Introdução à Teoria das Folheações Algébricas Complexas

Alcides Lins Neto e Bruno Scárdua

Prefácio

O estudo das equações diferenciais complexas foi iniciado de maneira sistemática por P. Painlevé no fim do século XIX [69], [70]. Foi com Painlevé que o estudo das equações diferenciais racionais da forma $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, onde P e Q são polinômios complexos, ganhou métodos próprios e diferenciados, utilizando de forma mais forte o caráter holomorfo das soluções locais. Pode-se dizer, no entanto, que vários outros autores contribuíram de maneira decisiva para a teoria no seu início, tais como E. Picard, G. Darboux, H. Poincaré, Briot e Bouquet, G. D. Birkhoff e outros.

Equações diferenciais complexas surgem em várias áreas da Matemática e das Ciência Naturais de um modo geral. Para citar alguns exemplos, lembramos dos circuitos elétricos e das equações diferenciais complexas que os regem. Lembramos também da Teoria de Iteração da Funções Racionais na esfera de Riemann, que está ligada ao estudo de certas equações diferenciais complexas racionais e dos seus conjuntos limites. Outra classe de exemplos bastante interessante é dada pela Teoria das ações de grupos de Lie complexos sobre uma variedade holomorfa. Outra motivação para o estudo das equações diferenciais complexas é a busca de novas funções transcendentes, como é o caso do logaritmo complexo, etc... Finalmente observamos que uma equação diferencial analítica real (por exemplo dada por um campo de vetores real polinomial) induz naturalmente uma equação diferencial complexa, cuja compreensão em muitos casos pode ser a responsável pela compreensão da equação real original.

Em seu trabalho, Painlevé esteve freqüêntemente preocupado com a classificação da equação geral

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{1}$$

a partir do comportamento de suas soluções. Por exemplo, supondo que as soluções definam (via prolongamento analítico), funções uniformes $y(x)$, o que se pode dizer a respeito da equação original. A relação com o problema de se descobrir novas funções analíticas transcendentes é clara. Um resultado clássico nesta direção se deve a Malmquist [60]. Um outro problema investigado por esta época é o de se determinar quais equações racionais da forma (1) como acima podem ser integradas por meio de funções elementares do Cálculo diferencial e integral e por meio de operações algébricas como a obtenção de raízes de polinômios complexos de duas variáveis. Na verdade Painlevé em seu trabalho já apontava para uma possível resposta a esta última questão.

Foi com o advento da Teoria das Folheações e com o desenvolvimento da Topologia Diferencial e da Teoria das Várias Variáveis Complexas (notadamente os trabalhos de Hartogs, Levi, Stein, Cartan e Hormander), que as equações diferenciais complexas (agora encaradas como folheações holomorfas) foram redescobertas e puderam ser uma vez mais estudadas com vigor. Nas últimas décadas houve um desenvolvimento acentuado deste estudo e um incremento considerável da compreensão das semelhanças e diferenças com o caso real, assim como várias questões (algumas das quais sem resposta por vários anos) foram respondidas. Restam todavia muitas questões a serem devidamente esclarecidas e uma parte substancial da teoria permanece praticamente intocada.

Este livro tem como objetivo introduzir o leitor ao estudo das equações diferenciais complexas, consideradas aqui, em sua forma mais geral, como folheações holomorfas. O nosso objetivo foi o de tornar o livro o mais auto-contido o possível, tendo como diretriz principal uma apresentação sistemática e motivada dos principais conceitos, exemplos e resultados no que se refere a certos aspectos globais das folheações holomorfas. A noção de folheação é apresentada de forma consistente, mas tendo como motivação principal o caso de um campo de vetores complexo. Acreditamos que o livro será útil tanto para aqueles que pensam em seguir uma linha de pesquisa neste tema, como para os que pretendem tomar contato com uma nova área e conhecer desde os seus resultados mais básicos até os mais recentes. Esperamos que o livro possa ser útil a todos que apreciam a Matemática em geral e que de alguma forma tenham o seu interesse voltado para este estudo que se iniciou de forma tão rica.

Agradecemos a César Camacho e a Paulo Sad pela sugestão de escrevermos este livro assim como pelo estímulo, e ao CNPq pelo suporte.

Rio de Janeiro, Abril de 2011.

Alcides Lins Neto e Bruno Scárdua

Sumário

Capítulo 1

Noções fundamentais

A Teoria Geométrica das Folheações teve sua origem clássica nos trabalhos de C. Ehresmann [31, 32] e G. Reeb [71, 72]. Sua diversidade de aplicações e riqueza de técnicas utilizadas, utilizando-se sem restrições das mais diversas áreas da Matemática como Topologia, Geometria, Análise e Sistemas Dinâmicos, têm sido fundamentais no aumento da compreensão de diversos problemas em Matemática. Mencionamos por exemplo o estudo e classificação de 3-variedades diferenciáveis reais. Nesta linha incluem-se vários dos resultados centrais, hoje clássicos, da Teoria Geométrica das Folheações. Por exemplo, os Teoremas de Estabilidade local e global, devidos a Reeb, o Teorema de Novikov sobre existência de folha compacta em S^3 e o Teorema do Posto de E. Lima, sobre o posto de S^3.

A noção de folheação complexa (holomorfa) por sua vez é oficialmente mais recente embora já esteja presente em espírito nos trabalhos de P. Painlevé [69, 70]. Seu grande desenvolvimento, últimas décadas, se deve, também, ao uso bem sucedido de técnicas modernas de Geometria Complexa e Várias Variáveis Complexas.

De uma certa forma porém grande parte da pesquisa em Folheações Complexas encontra-se centrada em aspectos locais da teoria como, por exemplo, estudo das singularidades de folheações holomorfas. Tal estudo já é um trabalho bastante árduo e tem se mostrado muito útil de um modo geral, entretanto alguns aspectos globais da teoria são também merecedores de atenção especial. O caso algébrico é como uma espécie de "caso compacto"neste mundo singular. Neste primeiro capítulo introduzimos o conceito de folheação holomorfa, também no caso de folheações com singularidades e damos vários exemplos e construções clássicas.

1.1 Introdução

Seja X um campo de vetores holomorfo em uma variedade complexa conexa M. Então a X podemos associar uma equação diferencial holomorfa

$$\dot{x} = X(x(t))$$

onde t é um tempo complexo. As soluções desta equação definem um fluxo local na variedade M. As subvariedades de M obtidas pelo prolongamento destas soluções locais são usualmente chamadas de as *trajetórias* de X. Se supomos que X é não singular em M, então estas trajetórias são curvas analíticas lisas (superfícies de Riemann) em M. Estas curvas são duas a duas disjuntas e por cada ponto p de M passa uma e somente uma trajetória de X. Assim as trajetórias de X definem uma *folheação* por curvas de M. Entretanto, em geral uma variedade complexa M pode não admitir campos de vetores holomorfos globalmente definidos. Mesmo assim a idéia de se poder decompor a variedade ambiente M em uma união disjunta de subvariedades, que se comportam (pelo menos localmente) como soluções de uma equação diferencial, persiste.

De fato, podemos considerar uma cobertura aberta de M por conjuntos U_i, $i \in I$, tal que em cada aberto U_i temos definido um campo de vetores holomorfo X_i, cujo fluxo local define então uma decomposição de U_i em superfícies de Riemann, a qual denotaremos por $\mathcal{F}_i$. O que procuramos é dar para cada intersecção não vazia $U_i \cap U_j \neq \phi$, uma condição de "colagem"para $\mathcal{F}_i$ e $\mathcal{F}_j$ nesta intersecção.

Fixemos $p \in U_i \cap U_j$. A subvariedade de $\mathcal{F}_i$ passando por $p \in U_i$ tem por espaço tangente neste ponto o subespaço complexo de dimensão um gerado por $X_i(p)$ em $T_p(M)$. De forma análoga, como $p \in U_j$, então $X_j(p)$ gera o espaço tangente à subvariedade de $\mathcal{F}_j$ por p. A condição destes subespaços coincidirem, pode ser expressa por $X_i(p) = g_{ij}(p).X_j(p)$, onde $g_{ij}(p) \neq 0$. Não é difícil ver, por meio de coordenadas locais, que a função $p \in U_i \cap U_j \longrightarrow g_{ij}(p)$ é holomorfa.

Deste modo, a condição natural para a colagem de $\mathcal{F}_i$ e $\mathcal{F}_j$ em $U_i \cap U_j$ é a seguinte:

$$X_i = g_{ij}.X_j$$

onde g_{ij} é uma função holomorfa em $U_i \cap U_j$ que não se anula em nenhum ponto deste conjunto.

Assim, de forma simplificada, uma folheação de M é uma decomposição de M em subvariedades lisas de mesma dimensão, e que são localmente associadas a equações diferenciais. No parágrafo seguinte formalizaremos este conceito.

1.2 Folheações Holomorfas

O objetivo desta seção é introduzir o conceito de folheação holomorfa. Na verdade, uma folheação holomorfa é, em particular, uma folheação no sentido clássico, conceito originalmente concebido por C. Ehresmann e G. Reeb por volta de 1950 (veja [31],[71], [72]). Para o leitor que nunca teve contato com o mesmo, recomendamos o texto introdutório [9]. Introduziremos também algumas notações que serão utilizadas ao longo do texto. Além disto, veremos alguns exemplos importantes para o desenvolvimento da teoria e que ilustram o conceito.

Definição 1.2.1. Seja M uma variedade complexa de dimensão complexa n. Uma *folheação holomorfa* de dimensão k, ou codimensão $n-k$, $1 \leq k \leq n-1$,é uma decomposição $\mathcal{F}$ de M em subvariedades complexas (chamadas *folhas* da folheação $\mathcal{F}$) de dimensão (complexa) k, imersas biunivocamente , que gozam das seguintes propriedades:

(i) $\forall p \in M$ existe uma uńica subvariedade L_p da decomposição que passa por p (chamada a *folha por* p).

(ii) $\forall p \in M$, existe uma carta holomorfa de M (chamada *carta distinguida de* $\mathcal{F}$), (φ, U), $p \in U$, $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n$, tal que $\varphi(U) = P \times Q$, onde P e Q são polidiscos abertos em $\mathbb{C}^k$ e $\mathbb{C}^{n-k}$ respectivamente.

(iii) Se L é uma folha de $\mathcal{F}$ tal que $L \cap U \neq \phi$, então $L \cap U = \bigcup\limits_{q \in D_{L,U}} \varphi^{-1}(P \times \{q\})$, onde $D_{L,U}$ é um subconjunto enumerável de Q.

Os subconjuntos de U da forma $\varphi^{-1}(P \times \{q\})$ são chamados de *placas* da carta distinguida (φ, U).

Uma folheação de dimensão um é também chamada de *folheação por curvas*. Neste caso, as folhas são superfícies de Riemann imersas biunivocamente na variedade ambiente.

Observe que (iii) também implica que as folhas são subvariedades imersas biunivocamente em M, já que a intersecção de uma folha com uma carta distinguida é uma união de placas disjuntas duas a duas. Mais adiante veremos exemplos de folheações que possuem folhas que, embora imersas, não são mergulhadas.

Observação 1.2.2. Uma folheação de dimensão $k\,\mathcal{F}$ em M, induz em M uma *distribuição* de planos de dimensão k, denotada por $T\mathcal{F}$, a qual é definida por

$$T_p\mathcal{F} = T_p(L_p) = \text{ plano tangente em } p, \;\; \text{à folha de } \mathcal{F} \text{ que passa por } p.$$

Decorre de (iii), que esta distribuição é holomorfa . Ela define um sub-fibrado vetorial holomorfo do fibrado tangente TM, o qual será também denotado por $T\mathcal{F}$.

O exemplo mais simples de folheação holomorfa de dimensão k é o seguinte:

Exemplo 1.2.3. Dado o espaço afim $\mathbb{C}^n$ podemos considerar qualquer decomposição $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$. Tal decomposição define uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k em $\mathbb{C}^n$, cujas folhas são os subespaços afins $\mathbb{C}^k \times \{q\}$, $q \in \mathbb{C}^{n-k}$.

Em seguida veremos duas maneiras de definir folheação, equivalentes à anterior, e que serão mais utilizadas ao longo do texto.

Proposição 1.2.4. *Uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k de M também pode ser definida dos seguintes modos equivalentes:*

(I) *Descrição por cartas distinguidas:*

$\mathcal{F}$ é dada por um atlas de M (também denotado por $\mathcal{F}$),$\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)/\alpha \in A\}$ onde:

(I.1) *$\varphi_\alpha(U_\alpha) = P_\alpha \times Q_\alpha$, onde P_α, Q_α são polidiscos de dimensões k e $n-k$ respectivamente.*

(I.2) *Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ então a mudança de cartas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é localmente da forma*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha, y_\alpha) = (h_{\alpha\beta}(x_a, y_\alpha), g_{\alpha\beta}(y_\alpha))$$

Neste caso as placas de $\mathcal{F}$ em U_α são os conjuntos da forma $\varphi_\alpha^{-1}(P_\alpha \times \{q\})$.

(II) *Descrição por submersões locais:*

$\mathcal{F}$ é dada por uma cobertura aberta $M = \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$ e por coleções $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi}$, que satisfazem:

(II.1) *$\forall\alpha \in A$, $y_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{C}^{n-k}$ é uma submersão .*

(II.2) *Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ então $y_\alpha = g_{\alpha\beta}(y_\beta)$ onde $g_{\alpha\beta} \colon y_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^k \to y_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^k$ é um difeomorfismo local holomorfo.*

Neste caso as placas de $\mathcal{F}$ em U_α são os conjuntos da forma $y_\alpha^{-1}(q)$, $q \in V_\alpha$.

Demonstração. Demonstremos que (I) é equivalente à definição de folheação.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão k em M. Vamos construir um atlas holomorfo $\mathcal{A}$ de M que satisfaça às condições (I.1) e (I.2) acima. Decorre da definição de folheação que existe um atlas holomorfo $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha); \alpha \in A\}$ de M tal que todos os sistemas de coordenadas $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ de $\mathcal{A}$ satisfazem (ii) e (iii), sendo então que $\varphi_\alpha(U_\alpha) = P_\alpha \times Q_\alpha$, onde P_α e Q_α são polidiscos de dimensões k e $n-k$ respectivamente.

Consideremos uma mudança de cartas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. Podemos escrever

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha, y_\alpha) = (h_{\alpha\beta}(x_a, y_\alpha), g_{\alpha\beta}(x_\alpha, y_\alpha)) = (x_\beta, y_\beta)$$

onde $(x_a, y_\alpha) \in P_\alpha \times Q_\alpha$. Afirmamos que $g_{\alpha\beta}$ não depende (localmente) de x_α.

Ora, um ponto $y_\alpha \in Q_\alpha$ define uma placa $\varphi_\alpha^{-1}(P_\alpha \times \{y_\alpha\})$ em U_α, a qual está contida numa folha L de $\mathcal{F}$. Por outro lado $L \cap U_\beta$ é constituído de uma união enumerável de placas de U_β, da forma $\cup_i \varphi_\beta^{-1}(P_\beta \times \{y_\beta^i\})$. Daí obtemos

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}((P_\alpha \times \{y_\alpha\}) \cap U_\beta) \subset \varphi_\beta(L \cap U_\beta) = \cup_i(P_\beta \times \{y_\beta^i\})$$

relação que implica a seguinte

$$g_{\alpha\beta}(P_\alpha \times \{y_\alpha\}) \subset \cup_i\{y_\beta^i\}$$

Não é difícil ver que a relação acima implica que $\partial g_{\alpha\beta}/\partial x_\alpha = 0$, o que prova a afirmação.

Suponhamos agora que exista um atlas holomorfo $\mathcal{F}$ de M satisfazendo (I.1) e (I.2). Como M é uma variedade, podemos supor que $\mathcal{F}$ é enumerável. Vamos em seguida definir as "folhas de $\mathcal{F}$", levando em conta (I.1) e (I.2).

Em M consideramos a relação de equivalência que identifica dois pontos $p, q \in M$ se, e somente se, existe uma cadeia finita de placas (como em (I)) $P_1, ..., P_r$ de $\mathcal{F}$ tal que $P_i \cap P_{i+1} \neq \phi, \forall i$, e $p \in P_1, q \in P_r$. As folhas são as classes de equivalência de M por esta relação. Assim, dois pontos $p, q \in M$ estão na mesma folha se, e somente se, existe uma cadeia de placas como acima que contém estes pontos. Como as placas são conexas, segue que as folhas também são.

Para ver que as folhas são subvariedades imersas em M é necessário dotar cada folha L de $\mathcal{F}$ de uma estrutura de variedade holomorfa de tal forma que a inclusão $i \colon L \to M$ seja uma imersão. Esta estrutura, que é chamada de *estrutura intrínseca*, é definida da seguinte forma:

Fixemos uma folha L e consideremos a cobertura de L formada de todas as placas contidas em L. Dada uma placa $P_\alpha^q = \varphi_\alpha^{-1}(P_\alpha \times \{q\}) \subset L$ definimos o "sistema de coordenadas"

$$\varphi_\alpha^q = \pi_1 \circ \varphi \,|_{P_\alpha^q} \colon P_\alpha^q \to \mathbb{C}^k$$

onde $\pi_1 \colon \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \to \mathbb{C}^k$ é a primeira projeção. Daí obtemos um "atlas",

$$\mathcal{F}_L = \{(\varphi_\alpha^q, P_\alpha^q) \;;\; P_\alpha^q \text{ é placa contida em } L\}.$$

Para verificar que $\mathcal{F}_L$ é um atlas holomorfo de L é necessário provar que as mudanças de cartas são biholomorfismos entre abertos de $\mathbb{C}^k$. Este fato, cuja verificação deixamos como exercício para o leitor (veja também [C-LN 1]), decorre de (I.2). Mencionamos, também sem demonstrar, que L, com a estrutura acima definida, é um espaço de Hausdorff.

Da definição de folha dada acima, segue que $L \cap U_\alpha$ é uma união disjunta de placas de U_α da forma

$$(*) \quad L \cap U_\alpha = \bigcup_{q \in D_{L,\alpha}} \varphi^{-1}(P_\alpha \times \{q\}),$$

onde $D_{L,\alpha} \subset \mathbb{C}^{n-k}$. Observe que a cada placa de L em U_α corresponde apenas um ponto em $D_{L,\alpha}$. Decorre daí, da definição de folha e do fato de que $\mathcal{F}$ é enumerável, que $D_{L,\alpha}$ é enumerável. Portanto L contém uma quantidade enumerável de placas. Não é difícil ver que isto implica que L possui uma base enumerável de abertos, sendo portanto uma variedade. Finalmente observe que (*) implica que $i \colon L \to M$ é uma imersão injetora.

Deixamos a verificação de que (II) é equivalente à definição de folheação como exercício para o leitor (veja o Exercício 1 e também [9]). $\square$

Exemplo 1.2.5. Seja $f\colon M \to N$ uma submersão holomorfa, onde M e N são variedades holomorfas de dimensões $n+k$ e k respectivamente. Neste caso, pelo Teorema da forma local das submersões holomorfo, os conjuntos de nível $\{f = c\}, c \in N$, são subvariedades holomorfas de codimensão k de M.

A definição (II) da Proposição 1.2.4 garante que existe uma folheação em M cujas folhas são as componentes conexas dos conjuntos de nível de f. Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor.

Exemplo 1.2.6 (Pull-back ou imagem inversa de uma folheação)**.** Sejam M e N variedades complexas, $f\colon M \to N$ uma aplicação holomorfa e $\mathcal{F}$ uma folheação em N de codimensão k.

Definição 1.2.7. Dizemos que f é *transversal* a $\mathcal{F}$, se para todo ponto $q \in N$, os subespaços $df_q(T_qM)$ e $T_p\mathcal{F}$ geram o espaço tangente T_pN, sendo $p = f(q)$.

Se este for o caso, existe uma folheação em M,denotada por $f^*(\mathcal{F})$, de mesma codimensão k, cujas folhas são as componentes conexas das imagens inversas por f, $f^{-1}(L)$, das folhas L de $\mathcal{F}$ em N. A folheação $f^*(\mathcal{F})$ é chamada de *pull-back ou imagem inversa* de $\mathcal{F}$ por f.

A folheação $f^*(\mathcal{F})$ é construída utilizando (II) da Proposição 1.2.4. De fato, consideremos uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de N e coleções $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi}$ satisfazendo (II.1) e (II.2) da Proposição 1.2.4. Dado $\alpha \in A$ sejam $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ e $z_\alpha = y_\alpha \circ f\colon V_\alpha \to \mathbb{C}^k$. Obtemos desta forma uma cobertura aberta $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M e uma coleção de aplicações holomorfas $\{z_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Observe que $V_\alpha \cap V_\beta = f^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, de forma que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \phi$ se, e somente se, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$. Além disto, se $V_\alpha \cap V_\beta \neq \phi$ então $z_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ z_\beta$, logo para verificarmos que $f^*(\mathcal{F})$ é uma folheação é suficiente provar que $z_\alpha\colon V_\alpha \to \mathbb{C}^k$ é submersão para todo $\alpha \in A$. Isto é conseqüência do fato de que f é transversal a $\mathcal{F}$, como o leitor pode verificar a partir da definição.

Exemplo 1.2.8 (Folheação gerada por um campo de vetores holomorfo)**.** Sejam M uma variedade complexa de dimensão n e X um campo de vetores holomorfo não identicamente nulo em M. Seja $S = \{p \in M; X(p) = 0\}$, o conjunto singular de X. Então X gera uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensão 1 no aberto $N = M \setminus S$. As folhas de $\mathcal{F}$ são as trajetórias de X em N. A estrutura de folheação decorre do Teorema do Fluxo Tubular para campos holomorfos, o qual pode ser enunciado da seguinte forma:

"Para todo $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$, existe um sistema de coordenadas holomorfo $(\phi = (z_1, ..., z_n), U)$, onde $p \in U, \phi : U \to \phi(U) = A \times B \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ e no qual $X = \partial/\partial z_1$."

Como as trajetórias de X são as soluções da equação diferencial $dz/dt = X(z)$ e $X\mid_U = \partial/\partial z_1$, vemos que as trajetórias de X em U são da forma $\phi^{-1}(A \times \{w\})$ com $w \in B$. Obtemos daí e da definição (I) da Proposição 1.2.4, uma folheação de dimensão 1, cujas folhas são as trajetórias de X.

De fato, toda folheação de dimensão um é localmente definida por campos de vetores, como veremos no resultado seguinte, cuja prova deixamos como exercício para o leitor.

Proposição 1.2.9. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão um em M. Então existem coleções $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi}$ tais que:*
(i) *$\mathcal{U}$ é uma cobertura de M por abertos.*
(ii) *X_α é um campo de vetores holomorfo em U_α que não se anula em nenhum ponto.*
(iii) *$g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$, isto é, é uma função holomorfa que não se anula em $U_\alpha \cap U_\beta$.*
(iv) *Em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ temos $X_\alpha = g_{\alpha\beta}.X_\beta$.*
(v) *Se $p \in U_\alpha$, então $T_p\mathcal{F} = \mathbb{C}.X_\alpha(p)$, o subespaço de T_pM gerado por $X_\alpha(p)$.*

Reciprocamente, se existem coleções $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{G}$ satisfazendo (i), (ii), (iii) *e* (iv), *então existe uma folheação $\mathcal{F}$ que satisfaz* (v).

Exemplo 1.2.10 (Folheações geradas por 1-formas diferenciais)**.** Sejam M uma variedade complexa de dimensão n e ω uma 1-forma holomorfa não identicamente nula em M. Seja $S = \{p \in M; \omega_p \neq 0\}$, o conjunto singular de ω. Neste caso, ω induz uma distribuição de hiperplanos Ω no aberto $N = M \setminus S$, definida por

$$\Omega_p = \ker(\omega_p) = \{v \in T_pM \ ; \ \omega_p(v) = 0\}$$

Definição 1.2.11. Dizemos que ω (ou Ω) é *integrável*, se existe uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ em N tal que $T\mathcal{F} = \Omega$. Em outras palavras, o espaço tangente em p à folha de $\mathcal{F}$ que passa por p, coincide com Ω_p.

Um fato bem conhecido, é o seguinte (veja [9], [35]):

"ω é integravel se, e somente se, $\omega \wedge d\omega = 0$."

O resultado acima é conhecido como *Teorema de Frobenius.* É comum dizer-se que a folheação $\mathcal{F}$ é definida pela equação diferencial $\omega = 0$ e que as folhas de $\mathcal{F}$ são as subvariedades integrais desta equação .

Convém notar que se η é uma 1-forma tal que $\eta = f\,\omega$, onde f é uma função holomorfa em N que não se anula, então a distribuição de hiperplanos induzida por η coincide com Ω. Em particular, η será também integrável e as folheações definidas por $\eta = 0$ e $\omega = 0$ coincidem.

As folheações de codimensão um são localmente definidas por 1-formas diferenciais integráveis, como veremos no resultado a seguir.

Proposição 1.2.12. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em M. Então existem coleções $\mathcal{W} = \{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi}$ tais que:*
(i) *$\mathcal{U}$ é uma cobertura de M por abertos.*
(ii) *ω_α é uma 1-forma diferencial holomorfa integrável em U_α que não se anula em nenhum ponto.*
(iii) *$g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$.*
(iv) *Em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ temos $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}.\omega_\beta$.*
(v) *Se $p \in U_\alpha$, então $T_p\mathcal{F} = \ker(\omega_\alpha(p))$.*

Reciprocamente, se existem coleções $\mathcal{W}, \mathcal{U}$ e $\mathcal{G}$ satisfazendo (i), (ii), (iii) *e* (iv), *então existe uma folheação $\mathcal{F}$ que satisfaz* (v).

A prova é semelhante à da Proposição 1.2.9 e é igualmente deixada como exercício para o leitor.

Em geral as folhas de uma folheação não são subvariedades mergulhadas, como já mencionamos. No entanto quando uma folheação possui uma folha propriamente mergulhada esta é um subconjunto analítico da variedade ambiente. Veremos em seguida um critério para que uma folheação, definida numa variedade complexa M por uma 1-forma possua uma folha analítica. Consideraremos a seguinte situação:

Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa, definida em M, variedade conexa, por uma 1-forma holomorfa integrável ω e $f \in \mathcal{O}(M)$ uma função holomorfa não constante, se anulando em algum ponto de M de forma que o subconjunto analítico $(f = 0)$ de M tenha codimensão 1 e seja não vazio. Diremos que $(f = 0)$ é invariante por $\mathcal{F}$ se as suas componentes conexas são folhas de $\mathcal{F}$.

Proposição 1.2.13. *Na situação acima, $(f = 0)$ é invariante por $\mathcal{F}$ se, e somente se, existe uma 2-forma holomorfa θ em M tal que*

$$(*) \quad \omega \wedge df = f\theta$$

Demonstração. Suponha primeiramente que $(f = 0)$ é invariante por $\mathcal{F}$. Neste caso, como cada componente conexa de $(f = 0)$ é uma folha de $\mathcal{F}$, estas são subvariedades lisas e propriamente mergulhadas em M. Logo, dado um ponto p tal que $f(p) = 0$, podemos escolher uma carta trivializadora de $\mathcal{F}$, $(\phi = (x, y), U)$, tal que $p \in U$, $\phi(p) = 0$,
$x\colon U \to \mathbb{C}^{n-1}$, $y\colon U \to \mathbb{C}$ e as placas de $\mathcal{F}$ em U são da forma $y^{-1}(q), q \in y(U)$. Note que, como $(f = 0)$ é mergulhada, podemos supor que $(f = 0) \cap U = y^{-1}(0)$. Obtemos então que $f(x, 0) \equiv 0$. Decorre daí que $f(x, y) = y^k.u(x, y)$, onde $k \geq 1$ e u é holomorfa e não se anula em U.

Por outro lado, como as placas de $\mathcal{F}$ em U são da forma $y = cte$, podemos escrever $\omega \mid_U=$

$g.dy$, onde g é holomorfa e não se anula em U. Decorre daí que

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = g.dy \wedge (k.\frac{dy}{y} + \frac{du}{u}) = g.dy \wedge \frac{du}{u}$$

Isto prova que a 2-forma $\theta = \omega \wedge \frac{df}{f}$ é holomorfa, como queríamos demonstrar.

Suponhamos agora que $\omega \wedge df = f\theta$. Seja L uma componente irredutível de $(f = 0)$ e fixemos $p \in L$. Calculando (*) em p, obtemos,

$$\omega_p \wedge df_p = 0 \;\Rightarrow\; (**)\; df_p = \lambda(p).\omega_p, \text{ onde } \lambda(p) \in \mathbb{C}$$

já que $\omega_p \neq 0$. Temos dois casos a considerar: (a) $df \not\equiv 0$ em L, (b) $df \equiv 0$ em L.

Consideremos o caso (a). Neste caso o conjunto $A = \{p \in L; df_p \neq 0\}$ é aberto e denso em L (veja o Princípio da Identidade em [42]). Por outro lado, $(**)$ implica que, se $p \in A$ então $\lambda(p) \neq 0$ e $T_pL = \ker(df_p) = \ker(\omega_p)$. Decorre daí que A está contido numa folha de $\mathcal{F}$ e portanto o seu fecho L é uma folha de $\mathcal{F}$.

Consideremos o caso (b). Vamos aqui utilizar o fato de que o conjunto de pontos lisos de L é aberto e denso em L (veja [43]). Dado um ponto liso p de L, existe um sistema de coordenadas $(\phi = (x, y), U)$ tal que $p \in U$, $\phi(p) = 0$, $x\colon U \to \mathbb{C}^{n-1}$, $y\colon U \to \mathbb{C}$ e $U \cap L = (y = 0)$. Como $f\mid_L \equiv 0$, obtemos que $f(x, y) = y^k.u(x, y)$, onde $k \geq 2$ e u é holomorfa e não se anula em U. Por outro lado, podemos escrever $\omega\mid_U = b\,dy + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\,dx_i$, e portanto de (*), obtemos que a 2-forma abaixo é holomorfa

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = \omega \wedge \frac{du}{u} + k\sum_{i=1}^{n-1} a_i\,dx_i \wedge \frac{dy}{y}.$$

Como $\frac{du}{u}$ é holomorfa, obtemos daí que $\sum_{i=1}^{n-1} a_i\,dx_i \wedge \frac{dy}{y}$ é holomorfa. Vemos então que y divide a_i, para todo $i = 1, ..., n-1$, ou seja, que podemos escrever $\omega\mid_U = y.\eta + b.dy$ onde b e η são holomorfas. Isto implica que $(y = 0) = L \cap U$ é invariante por $\mathcal{F}$. Como o conjunto de pontos lisos de L é aberto e denso em L, podemos concluir que L é invariante por $\mathcal{F}$, ou seja, que é uma folha de $\mathcal{F}$. □

1.3 Folheações singulares de dimensão 1

Nesta seção introduziremos o conceito de "folheação com singularidades". Entre as motivações para o estudo de tais objetos podemos mencionar as seguintes:

1 - O estudo das soluções das equações diferenciais complexas da forma $\frac{dz}{dt} = X(z)$, onde X é um campo de vetores que se anula em alguns pontos.

2 - Nem toda variedade complexa admite uma folheação holomorfa, no sentido da seção

anterior, embora muitas admitam folheações singulares. Veremos mais adiante, por exemplo, que no espaço projetivo complexo de dimensão n,$\mathbb{C}P(n)$, não existem folheações por curvas, i.e., folheações de dimensão um (sem singularidades), embora existam folheações singulares por curvas. Como veremos estas folheações correspondem, de certa forma às equações diferenciais ordinárias polinomiais em $\mathbb{C}^n$.

A definição dada abaixo é motivada pela Proposição 1.2.12.

Definição 1.3.1. Seja M uma variedade complexa de dimensão n. Uma *folheação com singularidades por curvas* de M, digamos $\mathcal{F}$, é um objeto definido por coleções $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi}$, tais que: (i) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma cobertura aberta de M. (ii) $X_\alpha \in \mathcal{X}^h(U_\alpha)$, é um campo de vetores holomorfo não identicamente nulo sobre U_α. (iii) $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$, ou seja, é uma função holomorfa em $U_\alpha \cap U_\beta$ que não se anula.

Estes objetos devem satisfazer à seguinte condição de compatibilidade: (iv) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ então $X_\alpha = g_{\alpha\beta}.X_\beta$ nesta intersecção.

Para cada campo X_α consideramos o seu conjunto singular dado por:

$$\text{sing}(X_\alpha) = \{p \in U_\alpha \big| X_\alpha(p) = 0\} =: S_\alpha$$

É claro que S_α é um subconjunto analítico de U_α. De (iii) e (iv) segue que $S_\alpha \cap U_\alpha \cap U_\beta = S_\beta \cap U_\alpha \cap U_\beta$. Assim, a união destes S_α define um subconjunto analítico S de M. Este conjunto, que denotaremos por $\text{sing}(\mathcal{F})$, é chamado de *conjunto singular* de $\mathcal{F}$. Observe que a Proposição 1.2.9 implica que $\mathcal{F}$ define uma folheação por curvas (não singular) no aberto $U = M\setminus\text{sing}(\mathcal{F})$. Dizemos então que $\mathcal{F}$ é *regular* em U. As folhas de $\mathcal{F}$ são, por definição, as folhas da restrição de $\mathcal{F}$ a U, a qual será denotada por $\mathcal{F}\mid_U$.

Dizemos que duas folheações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_1$ em M coincidem, se $\text{sing}(\mathcal{F}) = \text{sing}(\mathcal{F}_1)$ e $\mathcal{F}\mid_{M\setminus\text{sing}(\mathcal{F})} = \mathcal{F}_1\mid_{M\setminus\text{sing}(\mathcal{F}_1)}$.

No caso em que $\text{sing}(\mathcal{F}) = \phi$, vemos que $\mathcal{F}$ é uma folheação por curvas, conforme foi definido no §2. Dizemos então que $\mathcal{F}$ é uma *folheação regular*.

Veremos em seguida que, de certa forma, podemos supor que as componentes irredutíveis de $\text{sing}(\mathcal{F})$ têm codimensão ≥ 2.

Proposição 1.3.2. *Seja $\mathcal{F}$ folheação singular por curvas em M. Existe uma folheação $\mathcal{F}_1$ em M com as seguintes propriedades:*

(a) *As componentes irredutíveis de* $\text{sing}(\mathcal{F}_1)$ *têm codimensão ≥ 2, sendo que* $\text{sing}(\mathcal{F}_1) \subset \text{sing}(\mathcal{F})$.

(b) *$\mathcal{F}_1$ coincide com $\mathcal{F}$ em $M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$*

(c) *Se $\mathcal{F}_2$ é uma folheação em M satisfazendo* (a) *e* (b)*, então $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1$.*

Demonstração. Com efeito, sejam $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi}$, coleções que definem $\mathcal{F}$. Assuma que sing($\mathcal{F}$) possui componentes irredutíveis de codimensão 1. Denotemos por W a união destas componentes. Veremos em seguida como "eliminar W de sing($\mathcal{F}$)".

Dado um ponto $p \in W$ consideremos um sistema de coordenadas $(x = (x_1, ..., x_n), U_p)$ tal que $p \in U_p$, $x\colon U_p \to \mathbb{C}^n$, sendo $x(U_p)$ um polidisco de $\mathbb{C}^n$, e $W \cap U_p$ possui um número finito de componentes irredutíveis, digamos $W_1^p, ..., W_r^p$, as quais possuem equações irredutíveis $f_1, ..., f_r$ respectivamente (veja [43]). Podemos supor que $U_p \subset U_\alpha$, para algum $\alpha = \alpha(p) \in A$.

Observe se g é uma função holomorfa em U_p que se anula em $W \cap U_p$, então $g = f_1^{n_1}...f_r^{n_r}.h$, onde $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}$ e $h \in \mathcal{O}(U_p)$ (veja [43]).

Podemos escrever $X_\alpha \mid_{U_p} = \sum_{j=1}^n a_j\, \partial/\partial x_j$. Como $X_\alpha \mid_{W\cap U_p} \equiv 0$, vemos que as componentes a_j de $X_\alpha \mid_{U_p}$ se anulam em $W \cap U_p$ e portanto $X_\alpha = f_1^{n_1}...f_r^{n_r}.X'_p$,onde $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}$ e X'_p é um campo de vetores holomorfo em U_p, cujo conjunto singular tem codimensão ≥ 2.

Por outro lado, se $p \notin W$ tomamos $U_p \subset U_\alpha$, $X'_p = X_\alpha \mid_{U_p}$, para algum $\alpha = \alpha(p) \in A$, de tal forma que $U_p \cap W = \phi$ e que U_p seja domínio de uma carta local $x = (x_1, ..., x_n)$.

Assim sendo, podemos definir uma cobertura aberta $\{U_p\}_{p\in M}$ e uma coleção $\{X'_p\}_{p\in M}$, onde $U_p \subset U_{\alpha(p)}$, X'_p é um campo de vetores holomorfo em U_p tal que cod(singX'_p)) ≥ 2 e X'_p gera $\mathcal{F}$ em $U_p \setminus \text{sing}(X_{\alpha(p)})$. Veremos em seguida que existe uma coleção $\{g_{p,q}\}_{U_p\cap U_q\neq\phi}$, onde $g_{p,q} \in \mathcal{O}^*(U_p \cap U_q)$, tal que $X'_p = g_{p,q}.X'_q$ em $U_p \cap U_q \neq \phi$.

Sejam $p, q \in M$ tais que $U_p \cap U_q \neq \phi$ e $\alpha = \alpha(p)$ e $\beta = \alpha(q)$. Consideremos também o sistema de coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)\colon U_p \to \mathbb{C}^n$. Podemos escrever $X'_p = \sum_{j=1}^n a_j\, \partial/\partial x_j$ e $X'_q \mid_{U_p\cap U_q} = \sum_{j=1}^n b_j\, \partial/\partial x_j$. Observe que a relação $X_\alpha = g_{\alpha\beta}.X_\beta$ implica que

$$\frac{a_1}{b_1} = ... = \frac{a_n}{b_n} = g_{p,q} \quad \text{em } U_p \cap U_q,$$

ou seja que $X'_p = g_{p,q}.X'_q$, onde $g_{p,q}$ é em princípio meromorfa. Basta então provarmos que $g_{p,q}$ se estende a uma função em $\mathcal{O}^*(U_p \cap U_q)$.

Para isto, observe que os conjuntos singulares de X'_p e de X'_q, digamos S_p e S_q, têm codimensão ≥ 2. Coloquemos $Z = (S_p \cup S_q) \cap (U_p \cap U_q)$.

Dado $z_o \in (U_p \cap U_q) \setminus Z$, existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $b_j(z) \neq 0$, para todo z numa vizinhança de z_o. Logo $g_{p,q} = \frac{a_j}{b_j} \in \mathcal{O}(U_p \cap U_q \setminus Z)$. Como Z tem codimensão ≥ 2, segue-se do Teorema de Hartogs que $g_{p,q}$ se estende a uma função holomorfa em $U_p \cap U_q$ (veja [42], [79]). Pela mesma razão, $\frac{1}{g_{p,q}}$ também se estende. Logo a extensão obtida não se anula.

A afirmação (c) será conseqüência da Proposição 1.3.3 que veremos a seguir. $\square$

Veremos em seguida um critério para que duas folheações coincidam.

Proposição 1.3.3 (O Princípio da Identidade para folheações holomorfas)**.** *Sejam M uma variedade holomorfa conexa e $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, duas folheações por curvas em M, cujos conjuntos singulares têm codimensão ≥ 2. Suponha que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_1$ coincidem sobre um aberto não vazio $U \subset M$. Então $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ em M.*

Demonstração. Seja $\mathcal{W} = \{W \subset M \ ; \ W$ é aberto de M e $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_1$ coincidem em $W\}$. Em $\mathcal{W}$ consideramos a relação de ordem dada pela inclusão $\subset$. Não é difícil ver que $\subset$ é indutiva superiormente, isto é, se $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma coleção de conjuntos em $\mathcal{W}$ tal que $W_j \subset W_{j+1}$ para todo j, então $W = \cup_{j=1}^{\infty} W_j$ está em $\mathcal{W}$. Pelo lema de Zorn, basta provar que o único elemento maximal de $\mathcal{W}$ é M. Levando-se em conta que M é conexa, não é difícil ver que isto se reduz ao seguinte lema:

Lema 1.3.4. *Sejam X e Y campos holomorfos sobre um aberto conexo $U \subset \mathbb{C}^n$ e cujos conjuntos singulares têm codimensão ≥ 2. Assuma que X e Y definem a mesma folheação em um aberto não vazio $V \subset U$. Então X e Y definem a mesma folheação em U.*

Demonstração. De fato, podemos escrever $X = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ e $Y = \sum\limits_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ onde $X_j, Y_j \in \mathcal{O}(U)$. Como $X \mid_V \equiv Y \mid_V$ e os conjuntos singulares de X e Y têm codimensão ≥ 2, por um argumento semelhante ao já feito na prova da Proposição 1.3.2, existe uma função $f \in \mathcal{O}^*(V)$ tal que $X = f.Y$ em V. Obtemos daí que $f = \frac{X_j}{Y_j}, \forall j = 1, ..., n$. Podemos então estender f a $U \backslash (\mathrm{sing}(X) \cup \mathrm{sing}(Y))$ da seguinte forma: dado $p \in U \setminus (\mathrm{sing}(X) \cup \mathrm{sing}(Y))$ existe j tal que X_j, $Y_j \neq 0$ em vizinhança de p. Colocamos então $f = \frac{X_j}{Y_j}$ nesta vizinhança. Por outro lado, como $\mathrm{sing}(X)$ e $\mathrm{sing}(Y)$ são subconjuntos analíticos de codimensão ≥ 2, vemos que f se estende pelo Teorema de Hartogs a uma função holomorfa em U que não se anula e tal que $X = f\,Y$. Isto prova o lema. □

□

Em seguida veremos que no caso em que M tem dimensão 2, podemos definir uma folheação singular por meio de formas diferenciais em lugar campos de vetores.

Proposição 1.3.5. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão 2 e $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão 1 com singularidades em M. Existem coleções $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi}$ tais que:*

(i) *$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de M.*

(ii) *Para todo $\alpha \in A$, ω_α é uma 1-forma holomorfa em U_α.*

(iii) *Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, então $h_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\omega_\alpha = h_{\alpha\beta}\, \omega_\beta$.*

(iv) *Se $p \in U_\alpha$ não é singularidade de $\mathcal{F}$ então $T_p\mathcal{F} = \ker(\omega_\alpha(p))$.*

Demonstração. Consideremos coleções $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi}$ que definem $\mathcal{F}$ como na Definição 1.3.1. Tomando um refinamento da cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, se necessário, podemos supor que para todo $\alpha \in A$, U_α é domínio de uma carta local $\varphi_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)\colon U_\alpha \to \mathbb{C}^2$. Para cada α podemos escrever $X_\alpha = a_\alpha\partial/\partial x_\alpha + b_\alpha\partial/\partial y_\alpha$, onde $a_\alpha, b_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$. Consideremos a 1-forma ω_α dual de X_α, definida por:

$$\omega_\alpha \;=\; i_{X_\alpha}(dx_\alpha \wedge dy_\alpha) \;=\; a_\alpha\, dy_\alpha \;-\; b_\alpha\, dx_\alpha$$

sendo que então $\omega_\alpha \cdot X_a \equiv 0$. Não é difícil ver que se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, então a relação $X_\alpha = g_{\alpha\beta}.X_\beta$ implica que $\omega_\alpha = h_{\alpha\beta}.\omega_\beta$, onde $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}.D_{\alpha\beta}$, sendo $D_{\alpha\beta}$ o determinante jacobiano da mudança de coordenadas $\varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta)^{-1}$. Deixamos a verificação de (iv) como exercício para o leitor (veja Exercício 18). □

Veremos em seguida, como aplicação do Teorema de Levi (veja [79]), que uma folheação singular por curvas definida fora de um conjunto analítico de codimensão ≥ 2 de uma variedade complexa, se estende a toda a variedade.

Proposição 1.3.6. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão ≥ 2, V um subconjunto analítico de M de codimensão ≥ 2 e $\mathcal{F}$ uma folheação por curvas em $U = M \setminus V$. Então existe uma única folheação $\mathcal{F}'$ em M, cuja restrição a U coincide com $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Tomando cartas locais cujos domínios contém pontos de V, não é difícil ver que a prova do resultado pode ser reduzida ao seguinte:

Lema 1.3.7. *Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ um polidisco aberto, V um subconjunto analítico de codimensão ≥ 2 de U e $\mathcal{F}$ uma folheação singular definida no aberto $W = U \setminus V$, cujo conjunto singular tem codimensão ≥ 2. Então existe um campo de vetores holomorfo X em U tal que $X\mid_W$ gera a folheação $\mathcal{F}$. Em particular a folheação $\mathcal{F}$ se estende a U.*

Demonstração. De fato, sejam $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi}$ coleções que definem $\mathcal{F}$ em $U\backslash V$. Fixado $\alpha \in A$ podemos escrever $X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} X_\alpha^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, onde $X_\alpha^j \in \mathcal{O}(U_\alpha)$. Como $X_\alpha = g_{\alpha\beta}.X_\beta$, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, obtemos

$$(*) \quad X_\alpha^j = g_{\alpha\beta}.X_\beta^j \;\text{ se } U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi\, \forall\; j = 1, ..., n$$

Por outro lado, como V tem codimensão ≥ 2, $U \setminus V$ é conexo (veja [42]). Decorre daí que existe $j_o \in \{1, ..., n\}$ tal que $X_\alpha^{j_o} \not\equiv 0$ para todo $\alpha \in A$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $j_o = n$. Neste caso, podemos considerar para todo $j \in \{1, ..., n-1\}$ e todo $\alpha \in A$ a função meromorfa

$$f_\alpha^j = \frac{X_\alpha^j}{X_\alpha^n} \;\in\; \mathcal{M}(U_\alpha)$$

Observe agora que (*) implica que se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, então $f^j_\alpha \equiv f^j_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta$, para todo $j = 1, ..., n-1$. Isto nos permite definir funções f^j, meromorfas em $U \setminus V$, tais que $f^j\,|_{U_\alpha} = f^j_\alpha$, para todo $j = 1, ..., n-1$. Pelo Teorema de Levi estas funções se estendem meromorficamente a U. Utilizando-se agora que uma função meromorfa num polidisco pode ser escrita como quociente de duas funções holomorfas (veja [48]), podemos escrever que $f^j = \frac{g^j}{h^j}$, onde $g^j, h^j \in \mathcal{O}(U)$, onde o conjunto analítico $(g^j = h^j = 0)$ tem codimensão ≥ 2 (a não ser que $f^j \equiv 0$, e neste caso tomamos $g^j \equiv 0$ e $h^j \equiv 1$).

Seja agora $H = h^1 ... h^{n-1}$ e consideremos o campo holomorfo Y, definido em U por

$$Y = H\partial/\partial x_n \ + \ \sum_{j=1}^{n-1} a_j\, \partial/\partial x_j \quad \text{onde} \quad a_j = g_j\, H/h_j.$$

Observe que as componentes irredutíveis de $\mathrm{sing}(Y)$ têm codimensão ≥ 1 e que da construção temos que, se $p \in U \setminus V$ é tal que $Y(p) \neq 0$ então $T_p\mathcal{F} = \mathbb{C}.Y(p)$, isto é, a folheação gerada por Y coincide com $\mathcal{F}$ em $U \setminus (V \cup \mathrm{sing}(Y))$. Em particular, se $\mathrm{sing}(Y)$ não tivesse componentes de codimensão 1, então a folheação gerada por Y coincidiria com $\mathcal{F}$ em $U \setminus V$, pela Proposição 1.3.3.

Finalmente, se $\mathrm{sing}(Y)$ possui componentes de codimensão 1, como U é um polidisco, existe uma função holomorfa $g \in \mathcal{O}(U)$ tal que $Y = g.X$, onde X é um campo holomorfo em U, cujo conjunto singular tem codimensão ≥ 2. A função g é obtida utilizando-se o fato de que um conjunto irredutível L de codimensão 1 em U tem uma equação, isto é, é da forma $(v = 0)$, onde $v \in \mathcal{O}(U)$, sendo que qualquer função u que se anula sobre L é da forma $u = v^m.h$, com $m \geq 1$ e $h \in \mathcal{O}(U)$ (veja [43]).

Levando-se em conta a Proposição 1.3.3, obtemos que a folheação gerada por X coincide com $\mathcal{F}$ em $U \setminus V$. □

□

Corolário 1.3.8. *Sejam M uma variedade complexa, V um subconjunto analítico de codimensão ≥ 2 de M e $\mathcal{F}$ uma folheação regular em $M \setminus V$. Então $\mathcal{F}$ se estende a uma folheação (possivelmente singular) em M.*

Veremos em seguida exemplos de folheações, cujas folhas são de tipo analítico bem conhecido. Tais folheações são as induzidas pelos campos holomorfos "completos". Sejam M uma variedade complexa e X um campo de vetores holomorfo em M.

Definição 1.3.9. Um *fluxo local* de X é uma aplicação holomorfa $\phi\colon V \times \mathbb{D}(0,r) \to M$, onde V é um aberto de M e $\mathbb{D}(0,r)$ é o disco de raio r e centro 0 em $\mathbb{C}$, gozando das seguintes propriedades:

(i) $\phi(p,0) = p \ \ \forall \ \ p \in V$.

(ii) $\frac{\partial \phi}{\partial z}(p,z) = X(\phi(p,z)) \ \ \forall \ \ p \in V \ \ \forall \ \ z \in \mathbb{D}(0,r)$.

(iii) $\phi(\phi(p,z_1),z_2) = \phi(p,z_1+z_2)$ sempre que ambos os membros estão definidos, isto é, se $p, \phi(p,z_1) \in V$ e $z_1, z_2, z_1+z_2 \in \mathbb{D}(0,r)$.

O campo X define um *fluxo global* em M se podemos tomar $V = M$ e $r = \infty$,isto é, $\mathbb{D}(r,0) = \mathbb{C}$. Neste caso, dizemos também que X é um campo *completo*.

Note que as condições (i) e (ii) acima são equivalentes a que para todo $p \in M$ a curva complexa $z \in \mathbb{D}(0,r) \to \phi(p,z)$ é a solução da equação diferencial $dx/dz = X(x)$ com condição inicial $x(0) = p$.

Um fato que não podemos deixar de mencionar, é que as condições (ii) e (iii) da definição são de fato equivalentes (veja [80]).

Cabe aqui observar que os campos de vetores holomorfos em M admitem fluxos locais em vizinhanças de qualquer ponto de M. Além disto, estes fluxos são únicos, no seguinte sentido: dados dois fluxos associados a X, digamos $\phi_1\colon V_1 \times \mathbb{D}(0,r_1) \to M$ e $\phi_2\colon V_2 \times \mathbb{D}(0,r_2) \to M$, onde $V_1 \cap V_2 = V \neq \emptyset$, então $\phi_1 \equiv \phi_2$ em $V \times \mathbb{D}(0,r)$, sendo $r = \min(r_1,r_2)$. Estes fatos decorrem dos teoremas da existência e unicidade e da variação holomorfa das soluções de uma equação diferencial com as condições iniciais (veja [80]).

Por outro lado, em geral uma variedade holomorfa não admite campos de vetores holomorfos globais (a não ser o campo identicamente nulo), e mesmo quando admite, estes campos não são em geral completos. Veremos em seguida, um caso em que os campos holomorfos, se existem, são completos.

Proposição 1.3.10. *Seja X um campo holomorfo numa variedade compacta M, então X é completo. Em particular é possível definir o fluxo associado a X em $M \times \mathbb{C}$ e este fluxo define uma ação de $\mathbb{C}$ em M.*

Demonstração. Vamos aqui utilizar o resultado similar no caso real, o qual enunciamos abaixo (veja [80]).

Fato 1.3.11. *Seja Z um campo de vetores de classe $C^r, r \geq 1$, definido numa variedade compacta N. Então o intervalo maximal de definição de qualquer solução da equação diferencial (real) $\frac{dx}{dt} = Z(x)$ é $(-\infty,+\infty)$. Em particular é possível definir o fluxo associado a Z em $N \times \mathbb{R}$, sendo este fluxo também de classe C^r*

Consideremos então o campo holomorfo X. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, podemos considerar a equação diferencial real $\frac{dx}{dt} = \lambda.X(x)$, à qual está associado um fluxo $\phi_\lambda\colon M \times \mathbb{R} \to M$, sendo este analítico real, uma vez que o campo $\lambda.X$ é holomorfo. Em particular temos para $\lambda = 1$ e $\lambda = i$ os fluxos ϕ_1 e ϕ_i. Definamos uma aplicação $\phi\colon M \times \mathbb{C} \to M$ por

$$\phi(p, z) = \phi(p, s + it) = \phi_1(\phi_i(p, t), s),\ \forall z = s + it \in \mathbb{C},\ \forall p \in M$$

É suficiente provar que ϕ é holomorfa e satisfaz (i) e (ii) da Definição 1.3.9. A propriedade (i) é imediata. Em seguida provaremos que ϕ é holomorfa. Para tal utilizaremos a seguinte afirmação, cuja prova deixamos como exercício (veja Exercício 18):

Afirmação 1.3.12. *Sejam P e Q variedades holomorfas, P conexa, e $f\colon P \to Q$ uma aplicação analítica real. Suponhamos que existe um aberto não vazio $U \subset P$ tal que $f\mid_U$ seja holomorfa. Então f é holomorfa.*

Fixemos um ponto $p \in M$ e um fluxo local holomorfo associado a X, $\varphi\colon W \times \mathbb{D}(0, r) \to M$, onde W é uma vizinhança de p. Tendo-se em vista a afirmação e o fato de que ϕ é analítica real, é suficiente provar que $\phi \equiv \varphi$ em $W' \times \mathbb{D}(0, r')$,onde $p \in W' \subset W, 0 < r' < r$. A fim de provar isto, basta verificar os seguintes fatos, cuja prova deixamos para o leitor:

(a) $\varphi(q, s) = \phi_1(q, s)$, $\forall q \in W$, $\forall s \in (-r, r)$.

(b) $\varphi(q, it) = \phi_i(q, t)$, $\forall q \in W$, $\forall t \in (-r, r)$.

Como φ é um fluxo local, as identidades acima implicam que

$$\varphi(q, s + it) = \varphi(\varphi(q, it), s) = \phi_1(\phi_i(q, t), s) = \phi(q, s + it),\ \forall q \in W,\ \forall s + it \in \mathbb{D}(0, r)$$

desde que $\phi_i(q, t) \in W$. Tomando-se $W' \subset W$ e $0 < r' < r$ tais que $\phi_i(q, t) \in W$, $\forall q \in W'$, $\forall t \in (-r', r')$, obtemos o desejado, ou seja, que $\phi \equiv \varphi$ em $W' \times \mathbb{D}(0, r')$, como queríamos. Portanto ϕ é holomorfa.

Verifiquemos agora que ϕ satifaz (ii). Dado $p \in M$ seja φ um fluxo local como acima. Como $\phi \equiv \varphi$ em $W' \times \mathbb{D}(0, r')$ e φ satisfaz (ii), é claro que $\phi\mid_{W' \times \mathbb{D}(0, r')}$ também satisfaz. Por outro lado, como ϕ é analítica, o princípio da identidade analítica implica que ϕ satisfaz (ii), como queríamos. $\square$

Quando X é completo as folhas da folheação associada são de tipo analítico conhecido.

Proposição 1.3.13. *Seja X um campo completo sobre M. As órbitas não singulares de X são analiticamente equivalentes a um dos seguintes modelos: $\mathbb{C}, \mathbb{C}^*$, ou um toro complexo $T \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$.*

Demonstração. Seja $q \in M$ um ponto regular de X. Denote por ϕ o fluxo de X em M. O *grupo de isotropia* do ponto q é o subgrupo $G_q \subset (\mathbb{C}, +)$ dado por $G_q = \{z \in \mathbb{C}; \phi(q, z) = q\}$. Por outro lado, a órbita de X por q, que é a imagem $\mathcal{O}_q = \phi_q(\mathbb{C})$, é difeomorfa ao espaço quociente $\mathbb{C}/G_q$

(veja [33]). Observe que G_q é um subgrupo fechado de $(\mathbb{C},+)$. Isto implica que G_q é isomorfo um dos seguintes subgrupos de $(\mathbb{C},+)$ (veja [33]):

(a)$\{0\}$, (b)$\mathbb{Z}$, (c)$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, (d)$\mathbb{C}$, (e)$\mathbb{R}$, (f)$\mathbb{R}\oplus\mathbb{Z}$.

O caso (a) ocorre se, e somente se, ϕ_q é injetiva, sendo então $\mathcal{O}_q \cong \mathbb{C}$. No caso (b) $\mathcal{O}_q \cong \mathbb{C}^*$ e no caso (c) $\mathcal{O}_q \cong T$, um toro complexo. O caso (d) corresponde a uma singularidade de X, isto é, um ponto fixo da ação (o que estamos excluindo). Finalmente os casos (e) e (f) não podem ocorrer para ações de $\mathbb{C}$, como o leitor pode verificar diretamente (veja Exercício 21). □

Observe que um toro complexo é sempre compacto, assim que:

Corolário 1.3.14. *Seja X um campo completo sobre uma variedade de Stein. Então as órbitas de X são biholomorficamente equivalentes a $\mathbb{C}$ ou a $\mathbb{C}^*$.*

Demonstração. De fato, é sabido que uma variedade de Stein não pode conter um subconjunto analítico compacto de dimensão positiva ([48]). □

Um exemplo de variedade de Stein é $\mathbb{C}^n$, logo um campo em $\mathbb{C}^n$ não possui trajetória compacta.

Em seguida veremos alguns exemplos.

Exemplo 1.3.15. Os exemplos mais simples de campos completos, são os campos constantes em $\mathbb{C}^n$, ou seja, os campos da forma $X(x) \equiv v$, onde v é um vetor fixado em $\mathbb{C}^n$. O fluxo de X é dado por $\phi(p,z) = p + z.v$. Outros exemplos, são os campos lineares, ou seja, os campos da forma $X(x) = A.x$, onde A é uma transformação linear de $\mathbb{C}^n$. Neste caso o fluxo de X é dado por $\phi(p,z) = exp(z.A).p$, onde

$$exp(z.A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.z^n.A^n \quad ([80]).$$

Um campo da forma $X(x) = v + A.x$, onde v e A são como acima, também é completo (verifique).

Exemplo 1.3.16. O campo X em $\mathbb{C}$ definido por $X(x) = x^2\partial/\partial x$ não é completo. De fato, a solução da equação diferencial $\frac{dx}{dz} = x^2$ com condição inicial $x(0) = x_o$ é

$$x(z) = \frac{x_o}{1 - z.x_o}$$

a qual está definida em $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{x_o}\}$.

De fato, um campo em $\mathbb{C}$ da forma $X(x) = x^n\partial/\partial x \;\; n \geq 2$ não é completo, como o leitor pode constatar integrando a equação diferencial $\frac{dx}{dz} = x^n$.

Exemplo 1.3.17. Como mencionamos anteriormente, existem variedades que, embora admitam campos holomorfos não identicamente nulos, não admitem campos completos. Um exemplo é o polidisco $P = \mathbb{D}^n \subset \mathbb{C}^n$, onde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; \mid z \mid < 1\}$.

De fato, sejam X um campo completo em P e $x\colon \mathbb{C} \to P$ a solução com condição inicial $x(0) = p \in P$. Podemos escrever $x = (x_1, ..., x_n)$, onde $x_j\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ é holomorfa. Ora, pelo Teorema de Liouville, uma função inteira limitada é constante, logo $x_j \equiv x_j(0)$ e portanto $x \equiv p$. Isto implica que $X \equiv 0$, logo o único campo completo em P é o campo identicamente nulo. Por outro lado, é claro que em P existem campos não identicamente nulos.

Exemplo 1.3.18 (Campos holomorfos em toros complexos)**.** Um toro complexo é uma variedade obtida como quociente de $\mathbb{C}^n$ por um subgrupo aditivo de $\mathbb{C}^n$ isomorfo a $\mathbb{Z}^{2n}$. Mais especificamente, seja $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_{2n}\}$ uma base de $\mathbb{C}^n$, considerado como espaço vetorial real. Em $\mathbb{C}^n$ consideremos a relação de equivalência $\simeq$ definida por

$$p \simeq q \iff p - q = < m, v > = \sum_{j=1}^{2n} m_j \, v_j, \text{ onde } m = (m_1, ..., m_{2n}) \in \mathbb{Z}^{2n}$$

O espaço quociente $T = \mathbb{C}^n / \simeq$ é chamado de *toro complexo*. Observamos aqui que este espaço possui uma estrutura natural de variedade complexa, cuja construção o leitor pode encontrar em [33]. Mencionaremos apenas que esta estrutura é construída de tal forma que a projeção $\pi\colon \mathbb{C}^n \to T$ da relação $\simeq$, que associa cada ponto $p \in \mathbb{C}^n$ a sua classe de equivalência $\pi(p) = \{q \in \mathbb{C}^n; q \simeq p\}$, é o recobrimento universal (holomorfo) de T. Levando-se em conta este fato, se X é um campo de vetores holomorfo em T, podemos definir um campo de vetores holomorfo X^* em $\mathbb{C}^n$ por

$$X^*(p) = \pi^*(X)(p) = (d\pi_p)^{-1}.X(\pi(p))$$

Este campo é necessariamente invariante pelas translações $f_1, ..., f_{2n}$ de $\mathbb{C}^n$, definidas por $f_j(p) = p + v_j$, que são os geradores do grupo de automorfismos do recobrimento π. Esta condição de invariância pode ser expressa pela seguinte relação:

$$(*) \quad X^*(p + v_j) = X^*(p), \quad \forall j = 1, ..., 2n, \quad \forall p \in \mathbb{C}^n$$

Reciprocamente, se um campo holomorfo X^* satisfaz à condição $(*)$, então existe um campo holomorfo X em T tal que $X^* = \pi^*(X)$ (veja Exercício 20).

Note que, se $X^* = \sum_{i=1}^n a_i^*.\partial/\partial x_i$, então a condição $(*)$ é equivalente à seguinte:

$$(**) \quad a_i^*(p + v_j) = a_i^*(p), \quad \forall i = 1, ..., n, \quad \forall j = 1, ..., 2n, \quad \forall p \in \mathbb{C}^n.$$

ou seja, a_i^* satisfaz $a_i^* \circ f_j = a_i^*$, para todo $j = 1, ..., 2n$. Decorre daí que, para todo $i = 1, ..., n$, existe uma função holomorfa $a_i\colon T \to \mathbb{C}$ tal que $a_i \circ \pi = a_i^*$. Como T é compacta, isto implica que a_i^* é constante, para todo $i = 1, ..., n$, ou seja, que o campo X^* é um campo constante em $\mathbb{C}^n$.

Reciprocamente, se X^* é um campo constante em $\mathbb{C}^n$, então claramente X^* satisfaz $(*)$, logo existe um campo holomorfo X em T tal que $\pi^*(X) = X^*$.

Fixemos $X^* \equiv w \in \mathbb{C}^n$, um campo constante não nulo em $\mathbb{C}^n$ e seja X o campo em T tal que $X^* = \pi^*(X)$. Sejam ϕ e ϕ^* os fluxos de X e X^* respectivamente. Não é difícil ver que $\pi \circ \phi^* = \phi \circ (\pi \times id)$, onde id é a identidade de $\mathbb{C}$, ou seja, que, se $p \in \mathbb{C}^n$, então $\phi(\pi(p), z) = \pi(p + z.w)$. Com isto podemos obter o grupo de isotropia G_q de um ponto de $q = \pi(p) \in T$. Como o leitor pode verificar diretamente, este grupo é dado por

$$G_q = \{z \in \mathbb{C}; z.w = < m, v >,\ m \in \mathbb{Z}^{2n}\}$$

logo, em particular ele não depende de $q \in T$ e vamos denotá-lo por G. De acordo com a Proposição 1.3.13, três casos podem ocorrer: (a) $G = \{0\}$,(b) $G \simeq \mathbb{Z}$ ou (c) $G \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. No caso (a) as trajetórias de X são biholomorfas à $\mathbb{C}$, no caso (b) á $\mathbb{C}^*$ e no caso (c) a um toro complexo.

Observemos ainda que os três casos podem ocorrer em exemplos específicos (veja Exercício 6 deste capítulo).

1.4 Folheações singulares de codimensão um

Nesta seção introduziremos o conceito de "folheação singular de codimensão um". Além disto, estenderemos alguns dos resultados demonstrados na seção anterior para este caso e veremos alguns exemplos.

Como já vimos no Exemplo 1.2.10, uma 1-forma diferencial holomorfa integrável ω, definida numa variedade complexa M define uma folheação de codimensão 1 em $M \setminus S(\omega)$, onde $S(\omega) = \{p \in M;\ \omega_p = 0\}$, é o conjunto singular de ω. Uma folheação singular de codimensão um é, a grosso modo, um objeto que localmente é definido por uma 1-forma integrável.

Definição 1.4.1. Seja M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$. Uma folheação holomorfa singular de codimensão um em M é um objeto $\mathcal{F}$ dado por coleções $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi}$, tais que:

(i)$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de M.

(ii)ω_α é uma 1-forma diferencial holomorfa integrável não identicamente nula em U_α.

(iii)$g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$.

(iv)Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ então $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}.\omega_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta$.

Para cada forma ω_α consideramos o seu conjunto singular dado por:

$$\mathrm{sing}(\omega_\alpha) = \{p \in U_\alpha \big| \omega_\alpha(p) = 0\} =: S_\alpha$$

É claro que S_α é um subconjunto analítico de U_α. De (iii) e (iv) segue que $S_\alpha \cap U_\alpha \cap U_\beta = S_\beta \cap U_\alpha \cap U_\beta$. Assim, a união destes S_α define um subconjunto analítico S de M. Este conjunto, que denotaremos por $\mathrm{sing}(\mathcal{F})$, é chamado de *conjunto singular* de $\mathcal{F}$. Observe que a Proposição 1.2.12 implica que $\mathcal{F}$ define uma folheação de codimensão um (não singular) no aberto $U = M \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$. Dizemos então que $\mathcal{F}$ é *regular* em U. As folhas de $\mathcal{F}$ são, por definição, as folhas da restrição de $\mathcal{F}$ a U, a qual será denotada por $\mathcal{F}\mid_U$.

Dizemos que duas folheações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_1$ em M coincidem, se $\mathrm{sing}(\mathcal{F}) = \mathrm{sing}(\mathcal{F}_1)$ e $\mathcal{F}\mid_{M\setminus\mathrm{sing}(\mathcal{F})} = \mathcal{F}_1\mid_{M\setminus\mathrm{sing}(\mathcal{F}_1)}$.

No caso em que $\mathrm{sing}(\mathcal{F}) = \phi$, vemos que $\mathcal{F}$ é uma folheação de codimensão um, conforme foi definido anteriormente. Dizemos então que $\mathcal{F}$ é uma *folheação regular.*

Muitos dos resultados que enunciaremos nesta seção são análogos a resultados já provados para as folheações de dimensão um. Sendo assim nos contentaremos em provar apenas o primeiro como ilustração, deixando os demais como exercício para o leitor.

Assim por exemplo, temos a seguinte:

Proposição 1.4.2. *Seja $\mathcal{F}$ folheação singular de codimensão um em M. Existe uma folheação $\mathcal{F}_1$ em M com as seguintes propriedades:*

(a) *As componentes irredutíveis de* $\mathrm{sing}(\mathcal{F}_1)$ *têm codimensão* ≥ 2, *sendo que* $\mathrm{sing}(\mathcal{F}_1) \subset \mathrm{sing}(\mathcal{F})$.

(b) $\mathcal{F}_1$ *coincide com* $\mathcal{F}$ *em* $M \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$

(c) $\mathcal{F}_1$ *é maximal, ou seja, se $\mathcal{F}_2$ é a uma folheação em M satisfazendo (a) e (b), então $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1$.*

Demonstração. Com efeito, sejam $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi}$, coleções que definem $\mathcal{F}$. Assuma que $\mathrm{sing}(\mathcal{F})$ possui componentes irredutíveis de codimensão 1. Denotemos por W a união destas componentes. Veremos em seguida como "eliminar W de $\mathrm{sing}(\mathcal{F})$".

Dado um ponto $p \in W$ consideremos um sistema de coordenadas $(x = (x_1, ..., x_n), U_p)$ tal que $p \in U_p$, $x\colon U_p \to \mathbb{C}^n$, sendo $x(U_p)$ um polidisco de $\mathbb{C}^n$, e $W \cap U_p$ possui um número finito de componentes irredutíveis, digamos $W_1^p, ..., W_r^p$, as quais possuem equações irredutíveis $f_1, ..., f_r$ respectivamente (veja [43]). Podemos supor que $U_p \subset U_\alpha$, para algum $\alpha = \alpha(p) \in A$.

Observe se g é uma função holomorfa em U_p que se anula em $W \cap U_p$, então $g = f_1^{n_1}...f_r^{n_r}.h$, onde $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}$ e $h \in \mathcal{O}(U_p)$ (veja [43]).

Podemos escrever $\omega_\alpha\mid_{U_p} = \sum_{j=1}^n a_j\, dx_j$. Como $\omega_\alpha\mid_{W\cap U_p} \equiv 0$, vemos que as componentes a_j de $\omega_\alpha\mid_{U_p}$ se anulam em $W \cap U_p$ e portanto $\omega_\alpha = f_1^{n_1}...f_r^{n_r}.\omega'_p$,onde $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}$ e ω'_p é uma 1-forma holomorfa integrável em U_p, cujo conjunto singular tem codimensão ≥ 2.

Por outro lado, se $p \notin W$ tomamos $U_p \subset U_\alpha$, $\omega'_p = \omega_\alpha\mid_{U_p}$, para algum $\alpha = \alpha(p) \in A$, de tal forma que $U_p \cap W = \phi$ e que U_p seja domínio de uma carta local $x = (x_1, ..., x_n)$.

Assim sendo, podemos definir uma cobertura aberta $\{U_p\}_{p\in M}$ e uma coleção $\{\omega'_p\}_{p\in M}$, onde $U_p \subset U_{\alpha(p)}$, ω'_p é uma 1-forma holomorfa integrável em U_p tal que $\mathrm{cod}(\mathrm{sing}X\omega'_p)) \geq 2$ e ω'_p gera

$\mathcal{F}$ em $U_p \setminus \mathrm{sing}(\omega_{\alpha(p)})$ (isto é, se $q \in U_p \setminus \mathrm{sing}(\omega_{\alpha(p)})$, então $T_q\mathcal{F} = \ker(\omega_\alpha(q))$. Veremos em seguida que existe uma coleção $\{g_{p,q}\}_{U_p \cap U_q \neq \phi}$, onde $g_{p,q} \in \mathcal{O}^*(U_p \cap U_q)$, tal que $\omega'_p = g_{p,q}.\omega'_q$ em $U_p \cap U_q \neq \phi$.

Sejam $p, q \in M$ tais que $U_p \cap U_q \neq \phi$ e $\alpha = \alpha(p)$ e $\beta = \alpha(q)$. Consideremos também o sistema de coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)\colon U_p \to \mathbb{C}^n$. Podemos escrever $\omega'_p = \sum_{j=1}^n a_j\, dx_j$ e $\omega'_q\, |_{U_p \cap U_q} = \sum_{j=1}^n b_j\, dx_j$. Observe que a relação $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}.\omega_\beta$ implica que

$$\frac{a_1}{b_1} = ... = \frac{a_n}{b_n} = g_{p,q} \quad \text{em } U_p \cap U_q,$$

ou seja que $\omega'_p = g_{p,q}.\omega'_q$, onde $g_{p,q}$ é em princípio meromorfa. Basta então provarmos que $g_{p,q}$ se estende a uma função em $\mathcal{O}^*(U_p \cap U_q)$.

Para isto, observe que os conjuntos singulares de ω'_p e de ω'_q, digamos S_p e S_q, têm codimensão ≥ 2. Coloquemos $Z = (S_p \cup S_q) \cap (U_p \cap U_q)$.

Dado $z_o \in (U_p \cap U_q) \setminus Z$, existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $b_j(z) \neq 0$, para todo z numa vizinhança de z_o. Logo $g_{p,q} = \frac{a_j}{b_j} \in \mathcal{O}(U_p \cap U_q \setminus Z)$. Como Z tem codimensão ≥ 2, segue-se do Teorema de Hartogs que $g_{p,q}$ se estende a uma função holomorfa em $U_p \cap U_q$ (veja [43]). Pela mesma razão, $\frac{1}{g_{p,q}}$ também se estende. Logo a extensão obtida não se anula.

A prova de (c) pode ser feita utilizando-se a proposição a seguir. $\square$

Analogamente à Proposição 1.3.3, temos a seguinte:

Proposição 1.4.3 (Princípio da Identidade para folheações holomorfas de codimensão um)**.** *Sejam M uma variedade holomorfa conexa e $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, duas folheações de codimensão um em M, cujos conjuntos singulares têm codimensão ≥ 2. Suponha que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_1$ coincidem sobre um aberto não vazio $U \subset M$. Então $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ em M.*

A versão da Proposição 1.4.2 para folheações de codimensão um é a seguinte:

Proposição 1.4.4. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão ≥ 2, V um subconjunto analítico de M de codimensão ≥ 2 e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $U = M \setminus V$. Então existe uma única folheação $\mathcal{F}'$ em M, cuja restrição a U coincide com $\mathcal{F}$.*

Da mesma forma temos o seguinte:

Corolário 1.4.5. *Sejam M uma variedade complexa, V um subconjunto analítico de codimensão ≥ 2 de M e $\mathcal{F}$ uma folheação regular de codimensão um em $M \setminus V$. Então $\mathcal{F}$ se estende a uma folheação (possivelmente singular) em M.*

O resto desta seção será dedicado ao estudo de alguns exemplos.

Exemplo 1.4.6 (Folheações dadas por formas holomorfas fechadas)**.** Sejam M uma variedade complexa de dimensão ≥ 2 e ω 1-forma holomorfa fechada em M (isto é $d\omega = 0$) que não se anula identicamente. Então, ω é claramente integrável e portanto define uma folheação $\mathcal{F}$ em M. O Lema de Poincaré (veja [81]), garante que dado um aberto simplesmente conexo $U \subset M$, existe uma função holomorfa $f\colon U \to \mathbb{C}$, tal que $\omega\,|_U = df$. Observe que se $g\colon V \to \mathbb{C}$ é função tal que $dg = \omega$, onde $U \cap V$ é conexo e não vazio, então g e f diferem por uma constante em $U \cap V$. Desta forma, a folheação $\mathcal{F}$ pode ser localmente definida por funções holomorfas, no seguinte sentido: existem coleções $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $F = \{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $C = \{c_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi}$, tais que: (i) $\mathcal{U}$ é uma cobertura de M por abertos simplesmente conexos. (ii) Se $\alpha \in A$, então f_α é uma função holomorfa não constante em U_α tal que $df_\alpha = \omega\,|_{U_\alpha}$. (iii) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, então $U_\alpha \cap U_\beta$ é conexo, $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ e $f_\alpha = f_\beta + c_{\alpha\beta}$ em $U_\alpha \cap U_\beta$.

Observe que se ω não tem singularidades, então as funções f_α são submersões e $\mathcal{F}$ é regular. Neste caso, se denotarmos por $g_{\alpha\beta}$ a translação $g_{\alpha\beta}(z) = z + c_{\alpha\beta}$, então $f_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ f_\beta$, de forma que $\mathcal{F}$ pode ser descrita por submersões locais como em (II) da Proposição 1.2.4, sendo que no caso as $g_{\alpha\beta}$ são translações. Dizemos então que $\mathcal{F}$ tem uma *estrutura transversal aditiva*. No caso em $\operatorname{sing}(\omega) \neq \phi$, vemos que $\mathcal{F}$ tem uma estrutura transversal aditiva em $M \setminus \operatorname{sing}(\mathcal{F})$.

Reciprocamente, se $\mathcal{F}$ é uma folheação com estrutura transversal aditiva em $M \setminus \operatorname{sing}(\mathcal{F})$ e tal que $\operatorname{cod}(\operatorname{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$, então $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma 1-forma holomorfa fechada.

De fato, sejam $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $F = \{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $C = \{c_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi}$ coleções satisfazendo (ii) e (iii), onde $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de $M \setminus \operatorname{sing}(\mathcal{F})$. De (iii) obtemos que, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, então $df_\alpha = df_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta$. Isto implica que existe uma 1-forma holomorfa ω em $M \setminus \operatorname{sing}(\mathcal{F})$ tal que $\omega\,|_{U_\alpha} = df_\alpha$. Não é difícil ver que a forma ω é fechada e define $\mathcal{F}$ em $M \setminus \operatorname{sing}(\mathcal{F})$. Por outro lado, como $\operatorname{cod}(\operatorname{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$, o Teorema de Hartogs implica que ω se estende a uma forma holomorfa em M, a qual é também fechada e define a folheação $\mathcal{F}$.

Podemos então enunciar o seguinte resultado:

Proposição 1.4.7. *Sejam M uma variedade holomorfa e $\mathcal{F}$ uma folheação em M, cujo conjunto singular tem codimensão ≥ 2. Então $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma 1-forma fechada se, e somente se, $\mathcal{F}$ tem uma estrutura transversal aditiva em $M \setminus \operatorname{sing}(\mathcal{F})$.*

Exemplo 1.4.8 (Folheações dadas por formas meromorfas fechadas)**.** Sejam M uma variedade holomorfa de dimensão $n \geq 2$ e ω uma 1-forma meromorfa (não holomorfa) e fechada em M. Denotaremos o divisor de pólos de ω por $(\omega)_\infty$ (veja a definição em [48]). No caso $(\omega)_\infty \neq \phi$, já que ω não é holomorfa. Como ω é fechada e holomorfa no aberto $N = M \setminus (\omega)_\infty$, ela define uma folheação de codimensão um em N, digamos $\mathcal{F}$. Veremos em seguida que, de fato, $\mathcal{F}$ se estende a uma folheação em M.

Proposição 1.4.9. *A folheação $\mathcal{F}$ se estende a uma folheação $\mathcal{F}'$ em M tal que $(\omega)_\infty$ é invariante por $\mathcal{F}'$.*

Demonstração. Na prova de que $\mathcal{F}$ se estende utilizaremos o seguinte fato (veja [43]):

Fato 1.4.10. *O conjunto de pontos lisos de $(\omega)_\infty$, digamos L, é aberto e denso em $(\omega)_\infty$. Além disto, o conjunto $S = (\omega)_\infty \setminus L$ é um subconjunto analítico de M de codimensão ≥ 2.*

A idéia é provar primeiramente que $\mathcal{F}$ se estende a $M \setminus S$ e então utilizar a Proposição 1.4.4.

Fixemos um ponto $p \in L$. Como p é um ponto liso de $(\omega)_\infty$ e este conjunto tem codimensão um, existe um sistema de coordenadas holomorfo em vizinhança U de p, $w = (x, y) \colon U \to \mathbb{C}^n$, onde $w(U)$ é um polidisco, $x = (x_1, ..., x_{n-1}) \colon U \to \mathbb{C}^{n-1}$ e tal que $U \cap L = U \cap (\omega)_\infty = \{(x, y); y = 0\}$.

Observe agora que pela definição de conjunto de pólos, existe $j > 0$ tal que $y^j\,\omega$ se estende a uma forma holomorfa em U. Seja

$$k = \min\{j > 0;\quad y^j\,\omega \text{ se estende a uma forma holomorfa em } U\}$$

e coloquemos $\eta = y^k.\omega$. Podemos escrever $\eta = a_n.dy + \sum_{j=1}^{n-1} a_j\,dx_j$, onde algumas das funções $a_1, ..., a_n$ não se anulam identicamente em $U \cap L$. Note que η é integrável em $U \setminus L$ e define a mesma folheação que ω neste conjunto. Decorre daí que η é integrável em U, logo define uma folheação em U que estende $\mathcal{F}\,|_U$.

Por outro lado, de $\omega = y^{-k}.\eta$ obtemos

$$d(y^{-k}) \wedge \eta + y^{-k}.d\eta = d\omega = 0 \;\Rightarrow\; (*)\;\; dy \wedge \eta = k^{-1}.y.d\eta$$

Decorre então de (*) e da Proposição 1.2.13 que $(y = 0) = L \cap U$ é invariante pela folheação definida por η. Isto implica então que $\mathcal{F}$ se estende a $M \setminus S$ de tal forma que L é invariante pela extensão, como queríamos. $\square$

Observação 1.4.11. Observe que as componentes conexas de L são folhas de $\mathcal{F}'$. Além disto, dados uma folha $L_0 \subset L$ e um sistema de coordenadas $w = (x, y) \colon U \to \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ tal que $U \cap L = U \cap L_0 = (y = 0)$, podemos considerar o número

$$k = \min\{j > 0;\quad y^j\,\omega \text{ se estende a uma forma holomorfa em } U\}$$

É possvel provar que k só depende de L_0, isto é, independe do sistemas de coordenadas considerado (veja Exercício 8).

Dizemos então que ω *tem um pólo de ordem k ao longo de L_0*.

Em seguida veremos um exemplo particular da situação anterior.

Exemplo 1.4.12 (Folheações logarítmicas)**.** Sejam M uma variedade complexa de dimensão ≥ 2, $f_1, ..., f_r$ funções holomorfas e não identicamente nulas sobre M e $\lambda_1, ..., \lambda_r$ números complexos não nulos. A 1-forma meromorfa $\theta = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$ é chamada de *forma logarítmica*.

Observe que θ é fechada, de modo que induz uma folheação $\mathcal{F}$ em M. A folheação $\mathcal{F}$ é chamada de *folheação logarítmica associada a* θ. Note que $\mathcal{F}$ pode ser definida pela forma holomorfa integrável $\omega = f_1...f_r.\theta$. A Proposição 1.2.13 implica que

$$(\theta)_\infty = (f_1...f_r = 0) = \bigcup_{j=1}^{r} (f_j = 0)$$

é invariante por $\mathcal{F}$.

Voltaremos a mencionar este exemplo mais adiante.

1.5 Holonomia

O objetivo desta seção é introduzir o conceito de *holonomia de uma folha* e enunciar alguns resultados que utilizaremos mais adiante. Além disto, calcularemos a holonomia em alguns exemplos.

Observamos que o conceito de holonomia, introduzida por Ehresmann em [32], é, de fato, uma generalização da idéia de *transformação de Poincaré ou de primeiro retorno*, introduzida por Poincaré, com o objetivo de estudar o comportamento de um fluxo real na vizinhança de uma órbita periódica (veja [80]).

Assim, se γ é uma órbita periódica de um fluxo ϕ e Σ é uma seção transversal a ϕ que corta γ num único ponto $p \in \Sigma$, a holonomia de γ relativa a Σ será um difeomorfismo $f_\gamma \colon \Sigma^1 \to \Sigma$, onde Σ^1 é uma seção contida em Σ tal que $p \in \Sigma^1$ e para todo ponto $q \in \Sigma'$ a órbita positiva de q por ϕ corta Σ pelo menos uma vez. Podemos então definir f por

$$f(q) = \text{“primeiro ponto em que a órbita positiva de } \phi \text{ por } q \text{ corta } \Sigma\text{ ”}.$$

Se Σ^1 for uma seção suficientemente pequena contida em Σ, então f será um difeomorfismo sobre $f(\Sigma^1)$ com um ponto fixo em p. Ocorre que em alguns casos é necessário considerar-se os retornos seguintes das órbitas dos pontos de Σ, o que consiste em obter o n-ésimo iterado de f, denotado por $f^{(n)}$, e que é definido indutivamente por: $f^{(1)} = f$ e $f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)}$. Ora, em geral, para $n \geq 2$, $f^{(n)}$ não pode ser definida em todos os pontos de Σ^1, o que nos obriga a tomar domínios cada vez menores $\Sigma^1 \supset \Sigma^2 \supset ... \supset \Sigma^n$.

Analogamente, quando desejamos considerar os retornos sucessivos das órbitas negativas, que consiste em obter os iterados negativos de f; $f^{(-1)} = f^{-1}, ..., f^{(-n)} = (f^{-1})^{(n)}$, somos obrigados a tomar domínios diferentes $\Sigma^{-1} \supset ... \supset \Sigma^{-n}$. Observe que o único ponto de Σ no qual podemos garantir que f^n está definida para todo $n \in \mathbb{Z}$, é o ponto p, o qual é ponto fixo de todos os f^n. Com o objetivo de permitir a composição de difeomorfismos que têm um ponto fixo comum, sem ficar a todo momento especificando os domínios, introduz-se o conceito de *germe*, que veremos em seguida.

Definição 1.5.1. Sejam X e Y espaços topológicos e $p \in X$. Introduzimos no conjunto de aplicações $f\colon V \to Y$, onde V é uma vizinhança de p, a seguinte relação de equivalência $\simeq$:

$$f \simeq g \iff \text{existe uma vizinhança } W \text{ de } p \text{ tal que } f\,|_W \equiv g\,|_W\,.$$

A classe de equivalência de f, que será denotada por $[f]_p$, é chamada de *germe de f em p.*

Consideremos agora duas aplicações contínuas, digamos $f\colon V \to Y$ e $g\colon W \to Z$, onde $p \in V \subset X$ e $f(p) = q \in W \subset Y$, e sejam $[f]_p$ e $[g]_q$ os seus germes em p e q respectivamente. A *composição* de $[g]_q$ com $[f]_p$, denotada por $[g]_q \circ [f]_p$, é definida da seguinte maneira: como f é contínua e $f(p) = q$, existe uma vizinhança $V' \subset V$ de p tal que $f(V') \subset W$. Neste caso é possível fazer a composta $g \circ f\,|_{V'}\colon V' \to Z$. Verifica-se facilmente que o germe em p de $g \circ f\,|_{V'}$ não depende de V'. Define-se então $[g]_q \circ [f]_p = [g \circ f\,|_{V'}]_p$.

No caso em que $X = Y$ e $f\colon V \to X$ é tal que $f(p) = p$, é possível então considerar-se todos os "iterados"positivos de $[f]_p$. Assim o n-ésimo iterado de $[f]_p$, que será denotado por $[f]_p^n$, é definido indutivamente por: $[f]_p^1 = [f]_p$ e $[f]_p^{n+1} = [f]_p \circ [f]_p^n$. Quando f é um homeomorfismo local em p, isto é, se existe uma vizinhança V de p tal que $f\,|_V\colon V \to f(V)$ é um homeomorfismo, podemos também definir os iterados negativos de $[f]_p$: se $g\colon f(V) \to V$ é o homeomorfismo inverso de f, definimos $[f]_p^{-n} = [g]_p^n, n \geq 1$. Define-se também $[f]_p^0 = [id]_p$, onde id é a aplicação identidade de X.

O conjunto dos germes em $p \in X$ de homeomorfismos locais em p que deixam p fixo, será denotado por $\mathrm{Hom}(X, p)$. Quando X é uma variedade complexa, consideraremos também o conjunto dos germes em p de biholomorfismos locais que deixam p fixo, o qual será denotado por $\mathrm{Diff}(X, p)$.

Convém notar que $\mathrm{Hom}(X, p)$ é um grupo com a operação de composição. Se X é uma variedade complexa, então $\mathrm{Diff}(X, p)$ é um subgrupo de $\mathrm{Hom}(X, p)$. Deixamos a verificação destes fatos como exercício para o leitor (Exercício 22).

Como veremos em seguida, a holonomia de uma folha L de uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$, é uma representação do grupo fundamental de L no grupo de germes de biholomorfismos de uma seção Σ, transversal a $\mathcal{F}$ e que deixam um ponto de Σ fixo. Os resultados que enunciaremos nesta seção, são na verdade casos especiais de resultados gerais sobre folheações, de forma que no máximo daremos apenas uma idéia da prova dos mesmos. Para o leitor não familiarizado com a teoria das folheações e que desejar mais detalhes sobre o assunto, recomendamos as referências

[9] e [35].

Sejam M uma variedade complexa de dimensão n e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão k em M. Fixemos uma folha L de $\mathcal{F}$ e uma curva contínua $\gamma\colon I \to L$ (Nota: nesta seção a letra I denotará sempre o intervalo $[0,1]$). Sejam Σ_0 e Σ_1 seções transversais a $\mathcal{F}$ de dimensão k, tais que $p_0 = \gamma(0) \in \Sigma_0$ e $p_1 = \gamma(1) \in \Sigma_1$. As seções Σ_0 e Σ_1 podem ser obtidas através de cartas distinguidas U_0 e U_1 em p_0 e p_1, de tal forma que Σ_j corta cada placa de U_j exatamente uma vez.

Em seguida, consideremos uma cobertura finita de $\gamma(I)$ por cartas distinguidas de $\mathcal{F}$, digamos $V_0, ..., V_m$, tais que: (i) $V_0 = U_0$ e $V_m = U_1$. (ii) Para todo $j = 1, ..., m$, $V_{j-1} \cap V_j \neq \phi$. (iii) Para todo $j = 1, ..., m$, existe uma carta trivializadora U de $\mathcal{F}$ tal que $V_{j-1} \cup V_j \subset U$. (iv) Existe uma partição $\{0 = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = 1\}$ de I tal que $\gamma[t_j, t_{j+1}] \subset V_j$ para $j = 0, ..., m$.

Para cada $j = 1, ..., m$ seja $\Sigma_j^{'}$, uma seção transversal a $\mathcal{F}$ tal que $\gamma(t_j) \in \Sigma_j^{'} \subset U_{j-1} \cap U_j$ e $\Sigma_j^{'}$ corta cada placa de U_{j-1} e cada placa de U_j no máximo em um ponto. Coloquemos também $\Sigma_0^{'} = \Sigma_0$ e $\Sigma_{m+1}^{'} = \Sigma_1$. Deixamos os detalhes das construções acima para o leitor.

Utilizando (ii) e (iii), não é difícil ver que se $q \in \Sigma_j^{'}$, então a placa de V_j que contém q, corta $\Sigma_{j+1}^{'}$ no máximo em um ponto, sendo que se q está numa pequena vizinhança, digamos A_j, de $\gamma(t_j)$ em $\Sigma_j^{'}$, então esta placa corta de fato $\Sigma_{j+1}^{'}$ num ponto, digamos $f_j(q)$. Com isto, podemos definir uma aplicação $f_j\colon A_j \to \Sigma_j^{'}$ tal que $f_j(\gamma(t_j)) = \gamma(t_{j+1})$. Se as seções consideradas são subvariedades holomorfas, o que suporemos de agora em diante, então f_j será também. De fato, f_j será um biholomorfismo sobre sua imagem, já que podemos definir a sua inversa de maneira análoga.

Observe que, em geral não é possível compor f_{j+1} com f_j, mas podemos compor os seus germes, já que $f_j(\gamma(t_j)) = \gamma(t_{j+1})$. Denotando o germe de f_j em $\gamma(t_j)$ por $[f_j]$, podemos considerar o germe composto:

$$[f]_\gamma = [f_m] \circ ... \circ [f_0]$$

que será um germe de biholomorfismo em p_0, onde, em princípio, $[f]_\gamma$ depende da cobertura $V_0, ..., V_m$ e das seções intermediárias consideradas. O resultado abaixo, cuja prova pode ser encontrada em [9], mostra que de fato $[f]_\gamma$ não depende das construções auxiliares.

Lema 1.5.2. *O germe $[f]_\gamma$ depende somente de γ de Σ_0 e de Σ_1.*

O germe $[f]_\gamma$ é chamado de *holonomia de γ com respeito às seções Σ_0 e Σ_1*. No caso em que γ é uma curva fechada em L, ou seja $p_0 = p_1$, e $\Sigma_0 = \Sigma_1$, $[f]_\gamma$ é um elemento do grupo $\mathrm{Diff}(\Sigma_0, p_0)$ e é chamado de *holonomia de γ com respeito a Σ_0*, ou simplesmente *holonomia de γ*.

Veremos em seguida como se calcula a holonomia de uma curva obtida pela adjunção de duas outras. Sejam $\gamma,\ \delta\colon I \to L$ duas curvas em L tais que $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(1) = \delta(0) = p_1$ e $\delta(1) = p_2$.

A *adjunção* de γ e δ é, por definição, a curva $\alpha\colon I \to L$ definida por:

$$\alpha(t) = \gamma(2t), \quad \text{se} \quad t \in [0,1/2] \quad \text{e} \quad \alpha(t) = \delta(2t-1), \quad \text{se} \quad t \in [1/2,1].$$

A curva α definida acima será denotada por $\delta \star \gamma$.

Nota 1.5.3. Na maioria dos textos de teoria da homotopia, a adjunção é definida ao contrário, isto é, o que para nós é definido como $\delta \star \gamma$, nestes textos é definido como $\gamma \star \delta$. Adotamos esta convenção para que a representação de holonomia seja um homomorfismo de grupos e não um anti-homomorfismo.

O resultado seguinte decorre diretamente das definições:

Lema 1.5.4. *Sejam γ, δ, p_0, p_1 e p_2 como anteriormente. Fixemos seções transversais a $\mathcal{F}$, Σ_0, Σ_1 e Σ_2 por p_0, p_1 e p_2 respectivamente. Então:*

$$[f]_{\gamma\star\delta} = [f]_\gamma \circ [f]_\delta.$$

onde os germes acima são obtidos como holonomias nas seções Σ_0, Σ_1 e Σ_2.

O resultado a seguir, cuja prova o leitor pode encontrar em [9], nos permitirá definir o "grupo de holonomia"de uma folha de $\mathcal{F}$.

Lema 1.5.5. *Sejam M,$\mathcal{F}$, L, $p_0, p_1 \in L$, Σ_0 e Σ_1 como anteriormente. Se $\gamma, \delta\colon I \to L$ são duas curvas tais que $\gamma(0) = \delta(0) = p_0$, $\gamma(1) = \delta(1) = p_1$ e γ e δ são homotópicas em L com extremos fixos, então $[f]_\gamma = [f]_\delta$.*

Convém lembrar aqui que duas curvas γ e δ como no enunciado do lema, são *homotópicas em L com extremos fixos* se existe uma aplicação contínua $H\colon I \times I \to L$ tal que (i)$H(t,0) = \gamma(t)$ e $H(t,1) = \delta(t)$ $\forall t \in I$. (ii)$H(0,s) = p_0$ e $H(1,s) = p_1$ $\forall s \in I$.

Usaremos então a notação $\gamma \sim \delta$. No caso em que $p_0 = p_1$ é sabido que $\sim$ é uma relação de equivalência (veja [27]). A classe de equivalência (ou de homotopia) de uma curva γ com extremos em p_0 é denotada por $[\gamma]$. O conjunto das classes de equivalência de $\sim$ é, neste caso, chamado de *grupo fundamental* ou de *homotopia de L com base em p_0*. A notação geralmente utilizada para este grupo é $\pi_1(L, p_0)$. A lei de composição deste grupo,que será denotada por $\star$, é definida da seguinte maneira:

Dadas duas classes de homotopia $[\gamma]$ e $[\delta]$ em $\pi_1(L, p_0)$, fixemos representantes dos mesmos γ e δ. Definimos então $[\delta] \star [\gamma] = [\delta \star \gamma]$.

É possível demonstrar que a operação $\star$ está bem definida (isto é, $[\delta] \star [\gamma]$ não depende dos representantes escolhidos) e que $\pi_1(L, p_0)$ é um grupo com esta operação. No caso, o elemento unitário é a classe de equivalência da curva constante $e(t) \equiv p_0, t \in I$. Para mais detalhes recomendamos a referência [27]. Levando-se em conta o Lema 1.5.5, a seguinte definição é natural:

Definição 1.5.6. Sejam M uma variedade complexa, $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão k em M, L uma folha de $\mathcal{F}$, $p \in L$ e Σ uma seção holomorfa transversal a $\mathcal{F}$ tal que $p \in \Sigma$. A *representação de holonomia de* L *com respeito a* p *e a* Σ é, por definição, a aplicação $H = H_{L,p,\Sigma}\colon \pi_1(L,p) \to Dif(\Sigma,p)$, definida por:

$$H([\gamma]) = [f]_\gamma$$

onde γ é um representante de $[\gamma]$ e $[f]_\gamma$ é o germe de holonomia de γ com respeito a Σ. O Lema 1.5.5 implica que H está bem definida, isto é, não depende do representante γ de $[\gamma]$.

O *grupo de holonomia de* L *com respeito a* p *e a* Σ é, por definição a imagem $H(\pi_1(L,p))$.

Usaremos a notação $\mathrm{Hol}(L,p,\Sigma)$ para este conjunto. O seguinte resultado, que decorre do Lema 1.5.4, é fundamental:

Proposição 1.5.7. *A representação de holonomia é um homomorfismo de grupos. Mais especificamente, se* $a, b \in \pi_1(L,p)$*, então*

$$H(a \star b) = H(a) \circ H(b)$$

Outro fato, cuja prova pode ser encontrada em [9], é o seguinte:

Proposição 1.5.8. *Sejam* L *folha de uma folheação holomorfa* $\mathcal{F}$ *de codimensão* k*,* $p_0, p_1 \in L$ *e* Σ_0, Σ_1 *seções transversais a* $\mathcal{F}$ *que contém* p_0 *e* p_1 *respectivamente. Fixemos uma curva* $\alpha\colon I \to L$ *tal que* $\alpha(0) = p_0$ *e* $\alpha(1) = p_1$*. Seja* $[f]_\alpha$ *o germe em* p_0 *de holonomia de* α*, entre as seções* Σ_0 *e* Σ_1*. Então* $[f]_\alpha$ *conjuga* $\mathrm{Hol}(L,p_0,\Sigma_0)$ *e* $\mathrm{Hol}(L,p_1,\Sigma_1)$*, isto é:* $\mathrm{Hol}(L,p_0,\Sigma_0) = ([f]_\alpha)^{-1} \circ \mathrm{Hol}(L,p_1,\Sigma_1) \circ [f]_\alpha$

Em particular $\mathrm{Hol}(L,p_0,\Sigma_0)$ *e* $\mathrm{Hol}(L,p_1,\Sigma_1)$ *são isomorfos.*

Como podemos supor que as seções transversais são biholomorfas a abertos de $\mathbb{C}^k$, a seguinte definição é natural:

Definição 1.5.9. Seja L uma folha de uma folheação holomorfa de codimensão k. O *grupo de holonomia* de L, denotado por $\mathrm{Hol}(L)$, é a coleção de todos os grupos de germes em $q \in \mathbb{C}^k$, de homeomorfismos de $\mathbb{C}^k$ que deixam q fixo e que são conjugados a $\mathrm{Hol}(L,p,\Sigma)$, onde $p \in L$ e Σ é uma seção transversal a $\mathcal{F}$ passando por p.

Diremos que o grupo de holonomia de L é conjugado a um grupo dado, digamos G, se $G \in \mathrm{Hol}(L)$. Assim, por exemplo, diremos que $\mathrm{Hol}(L)$ é *trivial* se $\{id\} \in \mathrm{Hol}(L)$, onde id é a aplicação identidade.

Veremos em seguida uma maneira de calcular a holonomia através da integração de uma equação diferencial ordinária.

Como sempre, consideremos uma folha L de uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de codimensão k numa variedade complexa M. Vamos utilizar os seguintes fatos: (i) Toda curva $\gamma\colon I \to L$ é homotópica com extremos fixos a uma curva regular de classe C^∞ (veja [46]). (ii) Fixemos uma métrica riemanniana g em M. Dado um aberto $A \subset L$, cujo fecho é compacto, existe $r > 0$ tal que para todo $\epsilon > 0$ com $\epsilon < r$, então existe uma *vizinhança tubular normal de classe* C^∞, $\pi\colon V \to A$ de raio ϵ de A (veja [81], [46]).

Uma *vizinhança tubular normal de classe* C^r e raio ϵ de uma subvariedade A de M, consiste de um aberto de M, $V \supset A$, e de uma submersão de classe C^r,$\pi\colon V \to A$, com as seguintes propriedades: (a)$\pi(p) = p \quad \forall p \in A$. (b)Para todo $p \in A$, a fibra $F_p \doteq \pi^{-1}(p)$, é difeomorfa a uma bola de $\mathbb{C}^k$, a qual é normal a A em p e tem raio ϵ com respeito à métrica g.

A afirmação (ii) decorre do Teorema da vizinhança tubular (veja [81], [46]) e do fato de que se $A \subset L$ tem fecho compacto, então A é uma subvariedade de M de classe C^∞ e codimensão real $2k$. Observemos que o Teorema da vizinhança tubular implica que $\pi\colon V \to A$ é uma fibração com fibra difeomorfa a uma bola de $\mathbb{C}^k$.

A afirmação (i) implica, via o que observamos em (i) após a Definição 9 acima, que para efeito de cálculo da holonomia de uma curva, podemos supor que a mesma é regular de classe C^∞.

Fixemos então uma curva regular de classe C^∞, $\gamma\colon I \to L$ tal que $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(1) = p_1$. Como $c = \gamma(I)$ é compacto, não é difícil ver que c possui uma vizinhança A em L cujo fecho é compacto. Seja $\pi\colon V \to A$ uma vizinhança tubular normal de raio $\epsilon > 0$ de A, onde ϵ é escolhido de tal forma que as fibras $F_p, p \in A$, de π são transversais a $\mathcal{F}$ (verifique que isto é possível).A afirmação (ii) decorre do Teorema da vizinhança tubular (veja [81]) e do fato de que se $A \subset L$ tem fecho compacto, então A é uma subvariedade de M de classe C^∞ e codimensão real $2k$.

Vamos primeiramente considerar o caso em que a curva γ é injetora. Neste caso, o conjunto $\Lambda = \pi^{-1}(\gamma(I))$ é uma subvariedade de dimensão real $2k+1$ de M, cujo bordo é $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$, onde $\Sigma_0 = F_{p_0}$ e $\Sigma_1 = F_{p_1}$ (já que π é submersão).

Vamos em seguida definir um campo de vetores real de classe C^∞ em Λ com as seguintes propriedades: (I) γ é a trajetória de p_0 por X. (II) As trajetórias de X estão contidas em folhas de $\mathcal{F}$. (III) Se $q \in \Sigma_0$ está numa certa vizinhança U de p_0, então a sua trajetória corta Σ_1 num único ponto, digamos $f(q)$. (IV) O germe de f em p_0 é a holonomia de Σ_0 em Σ_1.

Dado $q \in \Lambda$, consideremos a aplicação linear

$$T_q = D\pi(q)\,|_{T_q\mathcal{F}}\colon T_q\mathcal{F} \to T_{\gamma(t)}L = T_{\gamma(t)}\mathcal{F}$$

onde $\gamma(t) = \pi(q)$. Como as fibras de π são transversais a $\mathcal{F}$, não é difícil ver que T_q é um isomorfismo. Colocamos então:

$$X(q) = T_q^{-1}(\gamma'(t)).$$

Deixamos a verificação de que X é de classe C^∞ para o leitor. Observe que para todo $q \in \Lambda$ temos $X(q) \in T_q\mathcal{F}$. Este fato implica (II). Por outro lado, é claro que $X(\gamma(t)) = \gamma'(t)$, o que implica (I). Observe agora que a afirmação (III) é verdadeira para a órbita de X por p_0 (que é γ).

Portanto o mesmo é verdade para as órbitas de pontos próximos de p_0, logo (III) é verdadeira. A afirmação (IV) decorre da (II), como o leitor pode verificar.

No caso geral, isto é, quando γ não é injetora, essencialmente a mesma construção pode ser feita, exceto que agora Λ é uma variedade imersa e o campo X pode ter "mais de uma definição" num ponto $q \in \Lambda$ tal que $\pi(q) = \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, onde $t_1 \neq t_2$. Esta dificuldade pode ser suplantada de várias formas. A mais simples, talvez, seja obter uma partição $\{0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = 1\}$ de I tal que para todo $j = 1, ..., m$, a restrição $\gamma_j = \gamma \mid_{[t_{j-1}, t_j]}$ seja injetora e, em seguida aplicar o método anterior para obter os germes de holonomia entre as seções intermediárias $F_{\gamma(t_{j-1})}$ e $F_{\gamma(t_j)}$, finalmente compondo-as para obter a holonomia desejada.

Observe que a aplicação $\pi = \pi_1 \mid_\Lambda : \Lambda \to \gamma(I)$ é uma fibração, cujas fibras têm dimensão k e são transversais a $\mathcal{F}$. Dado um ponto $q \in \Sigma_0$, próximo de p, a órbita de X que passa por q, é o *levantamento de γ pelas fibras de π, ao longo da folha de $\mathcal{F}$ que passa por q*. Para abreviar, chamaremos γ_q de *levantamento de γ pelo ponto q*.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.5.10 (Holonomia de uma separatriz de um campo linear)**.** Consideremos um campo linear A em $\mathbb{C}^n$ com a seguinte propriedade: (*)O eixo x_1 e o hiperplano $(x_1 = 0)$ são invariantes por A, sendo que se $x_1 \neq 0$, então $A(x_1, 0, ..., 0) \neq 0$.

Denotemos por $\mathcal{F}$ a folheação singular gerada por A. Observe que o conjunto $L = \{(x_1, 0, ..., 0) \; ; \; x_1 \neq 0\}$ é uma folha de $\mathcal{F}$. Além disto, a hipótese (*) implica que o sistema de equações diferenciais associado a A é da forma:

$$\frac{dx_1}{dz} = a.x_1, \text{ onde } a \neq 0, \quad \frac{dx_j}{dz} = \sum_{j=2}^{n} a_{j,i}.x_i, \; \forall \; j = 2, ..., n.$$

O número complexo a é o auto-valor de A associado ao auto-espaço "horizontal" $\{(x_1, 0, ..., 0); \; x_1 \in \mathbb{C}\}$.

Colocando $y = (x_2, ..., x_n)$ e $x = x_1$, o sistema acima pode ser escrito como:

$$(*) \quad \frac{dx}{dz} = a.x, \quad \frac{dy}{dz} = B.y$$

onde B é a matriz $(a_{j,i})_{2 \leq j,i \leq n}$. Note que, como $a \neq 0$, as fibras da primeira projeção $\pi_1(x, y) = x$ são transversais a $\mathcal{F}$ em todos os pontos (x, y) tais que $x \neq 0$.

Seja $\Sigma = (x = 1)$. Vamos calcular $\mathrm{Hol}(L, p, \Sigma)$, onde $p = (1, 0, ..., 0)$. Para isto, observemos que a folha L é difeomorfa a $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sendo que $\pi_1(L, p)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ e é gerado pela classe de homotopia da curva $\gamma(t) = (e^{2\pi it}, 0, ..., 0),\ t \in [0,1]$ (veja [27]). Basta então calcular a holonomia desta curva.

Consideremos o cilindro $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1};\ \mid x \mid = 1\}$, o qual pode ser parametrizado por $\varphi \colon \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}^n$ definida por $\varphi(\theta, y) = (e^{i\theta}, y)$, sendo que $\varphi(0, \mathbb{C}^{n-1}) = \varphi(2\pi, \mathbb{C}^{n-1}) = \Sigma$. A folheação $\mathcal{F}$ determinará uma equação diferencial em $\mathbb{C}^{n-1}$, obtida de (*), e cuja integração entre 0 e 2π, possibilitará o cálculo da holonomia f_γ de γ.

A partir de (*), podemos obter a *inclinação* da reta complexa determinada por $T\mathcal{F}$ num ponto $(x,y) \in \Lambda$, a qual é dada por

$$(**)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dz}{dx/dz} = \frac{1}{a.x}.B.y$$

Fixemos agora um ponto $q = (1, y_o) \in \Sigma$. Seja $\gamma_q(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ o levantamento de γ pelo ponto q. Este levantamento é feito utilizando a primeira projeção π_1, de forma que

$$x'(\theta) = \pi_1(\gamma_q'(\theta)) = \pi_1(\gamma'(\theta)) = ie^{i\theta}$$

Comparando a inclinação, y'/x', do vetor (x', y') com (**), obtemos:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y'}{ie^{i\theta}} = \frac{B.y}{a.e^{i\theta}} \quad \Rightarrow \quad (***)\ y' = ia^{-1}.B.y.$$

Ora, a solução $y(t)$, de (***) com condição inicial $y(0) = y_o$ é $y(\theta) = exp(i\theta a^{-1}.B).y_o$. Portanto a holonomia de γ é:

$$f_\gamma(y_o) = y(2\pi) = exp(2\pi i a^{-1} B).y_o$$

No caso em que $n = 2$ a matriz B é 1×1, logo pode ser pensada como um número complexo, digamos b, o qual é o auto-valor de A associado ao auto-espaço "vertical"$\{(0, x_2);\ \ x_2 \in \mathbb{C}\}$. Neste caso temos:

$$f_\gamma(y_o) = exp(2\pi i \frac{b}{a}).y_o$$

Em seguida veremos como generalizar o exemplo anterior.

Exemplo 1.5.11. Sejam X um campo de vetores holomorfo num aberto $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$ e $\mathcal{F}$ a folheação singular definida por X. Suponhamos que

$$L = \{x \in U;\ x_2 = ... = x_{n+1} = 0\} \setminus \text{sing}(X) \neq \phi$$

seja uma folha de $\mathcal{F}$ (em particular $X(q) \neq 0$, se $q \in L$). Fixemos uma curva regular $\gamma \colon I \to L$, onde $\gamma(0) = p_o$ e $\gamma(1) = p_1$.O nosso objetivo é determinar equações diferenciais, cuja integração nos forneçam a holonomia de γ e a sua derivada. Esta holonomia será calculada entre seções verticais passando por p_o e p_1. Como no exemplo anterior vamos usar a notação (x,y), onde $x \in \mathbb{C}$ e $y = (x_2,...,x_{n+1}) \in \mathbb{C}^n$. Neste caso podemos escrever $p_j = (c_j, 0),\ j = 0,1$, onde $c_j \in \mathbb{C}$. Suponhamos que o campo X tenha uma expressão do tipo:

$$X(x,y) = a(x,y).\partial/\partial x + \sum_{j=2}^{n+1} a_j(x,y).\partial/\partial x_j$$

à qual associamos o sistema de equações diferenciais:

$$(*)\quad \frac{dx}{dz} = a(x,y), \quad \frac{dx_j}{dz} = a_j(x,y),\ j = 2,...,n+1.$$

Em seguida, note que, como L é folha de $\mathcal{F}$, devemos ter necessariamente, $a(x,0) \neq 0$ e $a_j(x,0) \equiv 0$ se $j = 2,...,n+1$, o que implica $a_j(x,y) = \sum_{k=2}^{n+1} b_{jk}(x,y).x_k$, onde as funções b_{jk} são holomorfas. O sistema (*) pode ser escrito como

$$\frac{dx}{dz} = a(x,y), \quad \frac{dy}{dz} = B(x,y).y$$

onde $B = (b_{jk})_{2\leq j,k\leq n+1}$.

Como $\gamma(I) \subset L$ podemos escrever $\gamma = (\alpha, 0)$, onde $\alpha\colon I \to \mathbb{C}$ é tal que $\alpha'(t) \neq 0,\ \forall t \in I$. Denotemos por π_1 a primeira projeção, $\pi_1(x,y) = x$, por Σ_t a vertical $\pi_1^{-1}(\gamma(t))$ e por Λ o conjunto $\pi_1^{-1}(\gamma(I)) = \cup_{t\in I}\Sigma_t$. Note que, como $a(\alpha(t),0) \neq 0,\ \forall t \in I$, então existe $\epsilon > 0$ tal que Σ_t é transversal a $\mathcal{F}$ na região definida por $\mid y \mid < \epsilon$. Fixemos um ponto $q = (\alpha(t), y) \in \Sigma_t$ com $\mid y \mid < \epsilon$. A inclinação da reta complexa determinada por $T\mathcal{F}$ em q será

$$(**)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{B(\alpha(t),y).y}{a(\alpha(t),y)}$$

Por outro lado, se $q = (c_o, y_o) \in \Sigma_0$ está suficientemente próximo de p_o, podemos considerar o levantamento γ_q, de γ por q, que será da forma $\gamma_q(t) = (\alpha(t), y(t))$. Comparando a inclinação desta curva com (**), obtemos:

$$\frac{y'(t)}{\alpha'(t)} = \frac{B(\alpha(t),y(t)).y(t)}{a(\alpha(t),y(t))} \quad \Rightarrow \quad (***) y' = \frac{\alpha'.B(\alpha,y).y}{a(\alpha,y)}.$$

Com isto obtemos a equação (***) em $R = \{(t,y) \in I \times \mathbb{C}^n;\ \mid y \mid < \epsilon\}$, cujas soluções determinarão a holonomia f_γ entre Σ_0 e Σ_1. Denotando por $Y(t,y_o)$ a solução de (***) tal que $Y(0,y_o) = y_o$, temos o seguinte: (i)$Y(t,0) \equiv 0$. Esta solução corresponde à folha L. (ii) Existe $0 < \delta \leq \epsilon$ tal que se $\mid y_o \mid < \delta$, então $Y(t,y_o)$ está definida no intervalo I e $Y(1,y_o) = f_\gamma(y_o)$.

Em seguida mostraremos como calcular a derivada $T = Df_\gamma(0)\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ em 0. Provaremos que T pode ser obtida pela integração da equação linear em $I \times GL(n,\mathbb{C})$, $dW/dt = C(t).W$, onde

$$C(t) = \frac{\alpha^{'}(t).B(\alpha(t),0)}{a(\alpha(t),0)}.$$

Para isto consideremos uma equação diferencial em $I \times U$, da forma

$$(I) \quad \frac{dy}{dt} = F(t,y),$$

onde U é um aberto de $\mathbb{C}^n$ com $0 \in U$ e $F\colon I \times U \to \mathbb{C}^n$ é de classe C^∞, holomorfa com respeito a $y \in U$ e $F(t,0) \equiv 0$. Seja $Y(t,y_o)$ a solução de (I) com condição inicial $Y(0,y_o) = y_0$.

Provaremos o seguinte:

Lema 1.5.12. *A função Y é holomorfa com respeito a y_o. Além disto, se $W(t) = \frac{\partial Y}{\partial y_o}(t,0)$, então W é a solução da equação diferencial linear em $I \times GL(n,\mathbb{C})$, $V^{'} = C(t).V$, com condição inicial $V(0)$ =identidade, onde*

$$C(t) = \frac{\partial F}{\partial y}(t,0)$$

Demonstração. Denotaremos a variável $y_o \in U$ por $z = (z_1,...,z_n)$. Podemos escrever $Y(t,z) = (Y_1(t,z),...,Y_n(t,z))$, onde as Y_j são de classe C^∞. Coloquemos

$$\partial Y(t,z) = [\frac{\partial Y_i}{\partial z_j}(t,z)]_{1\le i,j\le n} \quad \text{e} \quad \overline{\partial} Y(t,z) = [\frac{\partial Y_i}{\partial \overline{z_j}}(t,z)]_{1\le i,j\le n}.$$

Provaremos primeiramente que $\overline{\partial} Y(t,z) \equiv 0$, o que implicará que Y é holomorfa com respeito a z. Por definição temos,

$$(II) \quad \frac{\partial Y(t,z)}{\partial t} = F(t,Y(t,z)),$$

logo derivando ambos os membros com respeito a $\overline{z_j}$ e trocando a ordem de derivação, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial Y}{\partial \overline{z_j}}) = \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}(F(t,Y(t,z)) = \frac{\partial F(t,Y)}{\partial y} \circ \frac{\partial Y}{\partial \overline{z_j}}, \quad j = 1,...,n.$$

Note que o sistema de equações acima pode ser escrito na forma matricial como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\partial} Y)(t,z) = \frac{\partial F}{\partial y}(t,Y(t,z)).\overline{\partial} Y(t,z)$$

que é uma equação linear com respeito a $\overline{\partial} Y$.

Como $Y(0,z) = z$ temos $\overline{\partial} Y(0,z) = 0$, logo $\overline{\partial} Y(t,z) \equiv 0$, como queríamos.

Por outro lado, se derivarmos ambos os membros de (II) com respeito a $z_j, j = 1,...,n$, trocarmos a ordem de derivação e escrevermos na forma matricial obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\partial Y)(t,z) = \frac{\partial F}{\partial y}(t,Y(t,z)).\partial Y(t,z)$$

Como $F(t,0) \equiv 0$, a solução de (I) com condição inicial $y(0) = 0$ é $y \equiv 0$, logo

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\partial Y)(t,0) = \frac{F}{\partial y}(t,0).\partial Y(t,0) = C(t).W$$

como queríamos. □

Finalmente, se calcularmos $C(t)$ no caso em que $F(t,y) = \frac{\alpha^{'}(t).B(\alpha(t),y).y}{a(\alpha(t),y)}$, obtemos o resultado desejado:

$$C(t) = \frac{\alpha^{'}(t).B(\alpha(t),0)}{a(\alpha(t),0)}.$$

Um caso particular interessante é quando $n = 1$. Neste caso, $B(\alpha(t),y)$ é uma matriz 1×1, logo podemos identificá-la com uma função, digamos $b(t,y)$. A derivada em questão será portanto:

$$f_{\gamma}^{'}(0) = exp(\int_0^1 \frac{\alpha^{'}.b(\alpha(t),0))}{a(\alpha(t),0)}.dt) = exp(\int_{\gamma} \frac{b(x,0)}{a(x,0)}.dx).$$

Exemplo 1.5.13 (Holonomia de folheações definidas por 1-formas holomorfas fechadas)**.** Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e ω uma 1-forma holomorfa fechada e não identicamente nula em M. Seja $\mathcal{F}$ a folheação singular de codimensão um definida por ω em M. O nosso propósito é provar que se L é uma folha de $\mathcal{F}$, tal que $L \subset M \setminus \text{sing}(\omega))$, então a sua holonomia é trivial.

Vamos utilizar o fato de que a folheação $\mathcal{F}$ tem uma estrutura transversal aditiva (veja Exemplo 1.4.6). Fixemos uma curva regular fechada $\gamma\colon I \to L$ com $\gamma(0) = \gamma(1) = p_o$. Dado $q \in \gamma(I)$ existe uma carta local $(x,y)\colon U \to \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ tal que $U \cap L = (y = 0)$ e $\omega\mid_U = dy$ (Lema de Poincaré). Podemos então obter uma coleção $\mathcal{C} = \{((x_j,y_j),U_j)\}_{j=1}^k$ de tais cartas e uma partição $\{0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = 1\}$ de I, tais que: (i) $\cup_{j=1}^k U_j = \gamma(I)$. (ii) $\gamma([t_{j-1},t_j]) \subset U_j,\ \ \forall j = 1,...,k$. (iii) $\omega\mid_{U_j} = dy_j,\ \ \forall j = 1,...,k$.

Como $\gamma(0) = \gamma(1)$ podemos supor que: (iv) $((x_1,y_1),U_1) = ((x_k,y_k),U_k) = ((x,y),U)$, onde $x(p_o) = 0 \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Consideremos as seções $\Sigma_j = \{(x_j,y_j) \in U_j;\ \ x_j = x_j^o = x_j(\gamma(t_j))\} \subset U_j,\ j = 1,...,k$, onde calcularemos a holonomia na seção $\Sigma = \Sigma_k$. Por abuso de linguagem denotaremos o ponto $(x_j^o,y_j) \in \Sigma_j$ por y_j. Para unificar a notação colocaremos $\Sigma_0 = \Sigma$ e $y_0 = y = y_k$.

Calculemos a holonomia $f_j\colon \Sigma_{j-1} \to \Sigma_j,\ j = 1,...,k$. Esta holonomia é da forma $y_j = f_j(y_{j-1})$. Basta provar que $f_j(y_{j-1}) = y_{j-1},\ j = 1,...,k$. Isto implicará que a holonomia de γ, que é a composta $f_k \circ ... \circ f_1$, é a identidade de Σ, como queremos.

Ora, como $\omega\mid_{U_{j-1}\cap U_j} = dy_{j-1} = dy_j$, obtemos que $d(y_j - y_{j-1}) = 0$ em $U_{j-1} \cap U_j$. Isto implica que a diferença $y_j - y_{j-1}$ é constante na componente conexa de $U_{j-1} \cap U_j$ que contém

$\gamma(t_{j-1})$, digamos $y_j = y_{j-1} + c$. Por outro lado, como $U_j \cap L = (y_j = 0)$ e $U_{j-1} \cap L = (y_{j-1} = 0)$, obtemos que $c = 0$, como queríamos.

Exemplo 1.5.14 (Holonomia das folhas de uma folheação definida por uma 1-forma meromorfa fechada)**.** Sejam M uma variedade complexa de dimensão ≥ 2 e ω uma 1-forma meromorfa fechada em M. Como vimos na Proposição 1.4.9, a folheação singular definida por ω em $M \setminus (\omega)_\infty$) pode ser estendida a uma folheação em M, a qual denotaremos por $\mathcal{F}$, tal que $(\omega)_\infty$ é invariante por $\mathcal{F}$, ou seja, a sua parte lisa é uma união de folhas de $\mathcal{F}$. No próximo resultado veremos como se calcula a holonomia de uma folha de uma tal folheação. Antes de enunciá-lo é conveniente introduzir alguns objetos que utilizaremos.

Dados $k \geq 2$ e $a \in \mathbb{C}$, consideremos o seguinte campo de vetores:

$$Y^{k,a} = \frac{y^k}{1 + a.y^{k-1}} \frac{\partial}{\partial y}$$

o qual é definido no aberto $\{y \in \mathbb{C};\ 1 + a.y^{k-1} \neq 0\}$. Note que $Y^{k,a}$ gera um fluxo local numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$, o qual será denotado por $Y_z^{k,a}$. Desta forma, para $z \in \mathbb{C}$ fixado, $Y_z^{k,a}$ é um biholomorfismo entre vizinhanças de $0 \in \mathbb{C}$, já que $Y_z^{k,a}(0) = 0$. Denotaremos o germe em 0 de $Y_z^{k,a}$ por $[Y_z^{k,a}]$.

Observemos agora que, se $k \geq 3$, então, $[Y_z^{k,a}]$ comuta com uma rotação $R_\lambda(y) = \lambda.y$, onde $\lambda^{k-1} = 1$. Deixamos a verificação deste fato como exercício para o leitor (veja Exercício 11). Decorre daí que, para todo $k \geq 2$ e todo $a \in \mathbb{C}$, o conjunto

$$G_{k,a} = \{[R_\lambda \circ Y_z^{k,a}]\ ;\ z \in \mathbb{C}\ \ \lambda^{k-1} = 1\}$$

é um grupo abeliano.

Um caso particular interessante é quando $k = 2$ e $a = 0$. Neste caso $G_{2,0}$ é o grupo de homografias da forma

$$\{y \to \frac{y}{1 + ay}\ ;\ a \in \mathbb{C}\}$$

como o leitor pode verificar integrando a equação diferencial $\frac{dy}{dz} = y^2$.

Provaremos em seguida o seguinte resultado:

Proposição 1.5.15. *Seja L uma folha de $\mathcal{F}$. Então:*
(a) *Se $L \subset M \setminus (\omega)_\infty$, então* Hol$(L)$ *é trivial.*
(b) *Se $L \subset (\omega)_\infty$ e ω tem pólo de ordem 1 ao longo de L, então* Hol(L) *é abeliana e linearizável, isto é, é conjugada a um subgrupo de aplicações lineares de $\mathbb{C}$.*
(c) *Se $L \subset (\omega)_\infty$ e ω tem pólo de ordem $k \geq 2$ ao longo de L, então* Hol(L) *é conjugada a um subgrupo de $G_{k,a}$, para algum $a \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. O caso (a) decorre do exemplo anterior, já que ω é holomorfa em $M \setminus (\omega)_\infty$.

Suponhamos que $L \subset (\omega)_\infty$. Fixemos $p \in L$ e uma carta local trivializadora de $\mathcal{F}$, $(x,y)\colon U \to \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ tal que $(\omega)_\infty \cap U = L \cap U = (y = 0)$ e as placas de $\mathcal{F}$ em U são da forma $y = c^{te}$. Afirmamos que

$$(*) \quad \omega \mid_U = \frac{g(y)}{y^k}.dy,$$

onde g é holomorfa em $\mathbb{D}$, $g(0) \neq 0$ e k é a ordem do pólo de ω ao longo de L.

De fato, como ω define $\mathcal{F}$ em $M \setminus (\omega)_\infty$ e as placas de $\mathcal{F}$ em U são da forma $y = c^{te}$, temos $\omega \mid_U = h(x,y)dy$, onde h é meromorfa em U com pólos em $(y = 0)$. Por outro lado, como ω é fechada temos $\partial h/\partial x \equiv 0$, ou seja, $h = f(y)$, só depende de y. Se ω tem pólo de ordem k ao longo de L, então f se escreve como em (*), como o leitor pode verificar diretamente.

Vamos agora utilizar o seguinte:

Lema 1.5.16. *Seja α uma 1-forma meromorfa numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$. Suponhamos que 0 é pólo de ordem $k \geq 1$ de α. Então existe um sistema de coordenadas $y\colon V \to \mathbb{C}$ com $0 \in V$, $y(0) = 0$ e tal que α se escreve neste sistema de coordenadas como:*
(i) $\alpha = a.\frac{dy}{y}$ $a \neq 0$, *se* $k = 1$.
(ii) $\alpha = \frac{1+a.y^{k-1}}{y^k}.dy$, *com* $a \in \mathbb{C}$, *se* $k > 1$.

Demonstração. Provaremos somente no caso $k = 1$. O caso $k > 1$ será deixado como exercício para o leitor (veja Exercício 23). No caso $k = 1$ podemos escrever $\alpha = \frac{g(z)}{z}dz$, onde g é holomorfa em vizinhança W de 0 e $g(0) = a \neq 0$. Observe que $a = Res(\alpha, 0)$, que é invariante por mudanças de coordenadas (veja [1]). Temos então $g(z) = a + z.u(z)$, onde u é holomorfa W, ou seja,

$$\alpha = a.\frac{dz}{z} + u(z)dz.$$

Seja φ uma primitiva da forma $\frac{u(z)}{a}dz$ numa vizinhança de 0. Consideremos a função $y(z) = z.\exp(\varphi(z))$. Como $y(0) = 0$ e $y^{'}(0) \neq 0$, vemos que y é um biholomorfismo entre duas vizinhanças de 0. Por outro lado,

$$a.\frac{dy}{y} = a.\frac{dz}{z} + a.d\varphi = a.\frac{dz}{z} + u(z)dz = \alpha$$

como queríamos. □

Voltemos à demonstração da proposição. Suponhamos primeiramente que $k = 1$. Fixemos uma curva fechada $\gamma\colon I \to L$ com $\gamma(0) = \gamma(1) = p_o$. Utilizando o Lema 1.5.16 e com um argumento análogo ao do Exemplo 1.5.13, podemos obter uma coleção de cartas trivializadoras de $\mathcal{F}$, $\mathcal{C} = \{((x_j, y_j), U_j)\}_{j=1}^k$ e uma partição $\{0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = 1\}$ de I, tais que: (i) $\cup_{j=1}^k U_j = \gamma(I)$. (ii) $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset U_j$, $\forall j = 1, ..., k$. (iii) $\omega\mid_{U_j} = a_j \frac{dy_j}{y_j}$, $\forall j = 1, ..., k$.

Como $\gamma(0) = \gamma(1)$ podemos supor que: (iv)$((x_1, y_1), U_1) = ((x_k, y_k), U_k) = ((x, y), U)$, onde $x(p_o) = 0 \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Consideremos também seções $\Sigma_j, j = 0, ..., k$ como no exemplo anterior, $\Sigma_0 = \Sigma_k = \Sigma$.

Observemos agora que se A é a componente conexa de $U_{j-1} \cap U_j$ que contém $\gamma(t_{j-1})$, então $a_{j-1}.\frac{dy_{j-1}}{y_{j-1}} = a_j \frac{dy_j}{y_j}$ em A. Comparando os resíduos das duas formas em 0, vemos que $a_{j-1} = a_j$. Podemos então dizer que $\frac{dy_{j-1}}{y_{j-1}} = \frac{dy_j}{y_j}$ em $U_{j-1} \cap U_j$, para todo $j = 1, ..., k$. Isto nos permite relacionar y_j e y_{j-1} em A. De fato, se $y_j = f(y_{j-1})$ em A, devemos ter

$$\frac{dy_j}{y_j} = \frac{f'(y_{j-1})}{f(y_{j-1}}.dy_{j-1} = \frac{dy_{j-1}}{y_{j-1}} \quad \Rightarrow \quad z.f'(z) = f(z) \quad \Rightarrow \quad f(z) = c_j\, z$$

como o leitor pode constatar, integrando a equação diferencial $z.f' = f$. Ora, isto implica que as holonomias intermediárias $f_j \colon \Sigma_{j-1} \to \Sigma_j$ são lineares. Como a composta de aplicações lineares é linear, obtemos que a holonomia de γ é linear no sistema de coordenadas considerado. Como este sistema só depende de ω (não depende da curva γ), obtemos finalmente que a holonomia de L é linearizável.

Consideremos agora o caso $k \geq 2$. Fixemos uma curva fechada $\gamma \colon I \to L$ com $\gamma(0) = \gamma(1) = p_o$. Utilizando o Lema 1.5.16 e com um argumento análogo ao do Exemplo 1.5.13, podemos obter uma coleção de cartas trivializadoras de $\mathcal{F}$, $\mathcal{C} = \{((x_j, y_j), U_j)\}_{j=1}^m$ e uma partição $\{0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = 1\}$ de I, satisfazendo (i),(ii),(iv) e (iii) $\omega\mid_{U_j} = \frac{1+a_j\, y_j^{k-1}}{y_j^k}.dy_j$, $\forall j = 1, ..., m$.

Observe que $a_j = Res(\omega, y_j = 0)$, logo por argumento análogo ao do caso anterior, podemos dizer que $a_1 = ... = a_m = a$.

Como vimos no caso anterior basta relacionarmos y_j com y_{j-1}. Faremos isto apenas no caso $k = 2$, deixando como exercício para o leitor os restantes (veja Exercício 7). Para simplificar a notação façamos $y_j = w$ e $y_{j-1} = z$, sendo $w = f(z)$.

Consideraremos primeiramente o caso em que $a = 0$. Neste caso, em $U_{j-1} \cap U_j$ temos

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dw}{w^2} = \frac{f'(z)}{(f(z))^2}.dz \quad \Rightarrow \quad z^2.f' = f^2 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{z}{1 + c.z}$$

de onde concluímos que f está no grupo $G_{2,0}$. Analogamente ao caso anterior, como a composta de elementos em $G_{2,0}$ está em $G_{2,0}$, obtemos que Hol(L) é conjugada a um subgrupo de $G_{2,0}$.

O argumento no caso $k = 2$ e $a \neq 0$ é semelhante ao anterior: basta provar que y_j e y_{j-1} são relacionados por um elemento de $G_{2,a}$. Como o leitor pode verificar, se $y_j = f(y_{j-1})$, então f

satisfaz à equação diferencial

$$(*) \quad z^2.(1+a.f(z)).f'(z) = (f(z))^2.(1+a.z),$$

restando então demonstrar que uma tal f está em $G_{2,a}$. Em seguida daremos uma idéia de como isto pode ser feito, sem explicitar os detalhes.

Passo 1 - Dado $b \in \mathbb{C}$, existe uma única solução f de (*), definida numa vizinhança de 0, tal que $f'(0) = 1$ e $f''(0) = b$.

De fato, se f é uma solução de (*) e $g(z) = \frac{f(z)-z}{z^2}$, então g satisfaz à seguinte equação diferencial:

$$(**) \quad g' = g.\frac{a + azg - g}{1 + az + azg} = F(z, g).$$

Como F é holomorfa em vizinhança de $(0, b/2)$, (**) possui uma única solução g, definida em vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$, com $g(0) = b/2$. Colocando $f(z) = z + z^2.g(z)$, obtemos a solução desejada. Passo 2 - Para todo $c \in \mathbb{C}$ a função $f_c = Y_c^{k,a}$ é a solução de (*) com condição inicial $f_c'(0) = 1$ e $f_c''(0) = 2c$.

Deixaremos a prova do passo 2 como exercício para o leitor (veja Exercício 24). Observe que os passos 1 e 2 implicam o desejado. □

Exemplo 1.5.17 (Holonomia das folhas de uma folheação logarítmica)**.** Um caso particular do exemplo visto acima é o das folheações definidas por formas logarítmicas (veja Exemplo 1.5.14). Estas formas se escrevem como

$$\theta = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

onde $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}^*$ e $f_1, ..., f_r$ são funções holomorfas em M. Dada uma folha L da folheação induzida por θ, temos dois casos a considerar: (1) $L \subset U = M \setminus \cup_{j=1}^{r} (f_j = 0)$. Neste caso, $\mathrm{Hol}(L)$ é trivial, já que θ é holomorfa em U.

(2) $L \subset (f_j = 0)$, para algum $j = 1, ..., r$. Neste caso, $\mathrm{Hol}(L)$ é abeliana e linearizável, já que θ tem pólo de ordem um ao longo de $(f_j = 0)$.

No caso em que M é simplesmente conexa, é possível provar, de fato, que $\mathrm{Hol}(L)$ é conjugada a um subgrupo do grupo gerado pelo seguinte conjunto de transformações lineares

$$\{z \to \lambda.z \ ; \ \lambda = e^{2\pi i \frac{\lambda_m}{\lambda_j}} \ \ 1 \le m \le r\}.$$

A prova deste fato é deixada como exercício para o leitor (veja Exercício 25).

1.6 Singularidades de campos de vetores holomorfos

Nesta seção estudaremos as singularidades de uma folheação por curvas, do ponto de vista local. No caso em que o ambiente é de dimensão dois, veremos um processo, conhecido como "Resolução de Singularidades", que reduz o estudo de uma singularidade isolada qualquer ao de uma folheação com singularidades especiais, chamadas de "singularidades simples".

Sejam $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j} = (X_1, ..., X_n)$, um campo de vetores holomorfo num aberto U de $\mathbb{C}^n$ e $q \in U$ uma singularidade de X. A Jacobiana, ou derivada, de X em q é, por definição, a matriz

$$DX(q) = (\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(q))_{i,j=1}^{n}.$$

Definição 1.6.1. Dizemos que q é uma singularidade *não degenerada* se $DX(q)$ é não singular. Seja $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ o espectro de $DX(q)$. A singularidade será *hiperbólica*, se for não degenerada e todos os quocientes λ_i/λ_j, $i \neq j$, forem não reais. Se a envoltória convexa de Λ não contém $0 \in \mathbb{C}$, dizemos que a singularidade está no *domínio de Poincaré.* Caso contrário, dizemos que ela está no *domínio de Siegel.*

Dizemos que a singularidade q tem uma *ressonância* se existem $1 \leq i \leq n$ e $m_1, ..., m_n$, inteiros não negativos, tais que $\sum_{j=1}^{n} m_j \geq 2$ e $\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} m_j \, \lambda_j$. Uma singularidade que não possui ressonâncias será chamada de *não ressonante.*

Observe que as propriedades, acima definidas, são invariantes por mudanças de coordenadas holomorfas. De fato, se $\varphi\colon V \to U$ é um biholomorfismo tal que $\varphi(p) = q$ e $Y = \varphi^*(X)$, então, os espectros de $DY(p)$ e $DX(q)$ coincidem. Isto nos permite estender as definições para campos de vetores em variedades complexas, via cartas locais.

Da mesma forma, estas propriedades também persistem, se multiplicarmos o campo X por uma função holomorfa que não se anula (verifique). Isto nos permite estender as definições para as folheações de dimensão um.

Observação 1.6.2. As singularidades não degeneradas são isoladas.

De fato, se $X = (X_1, ..., X_n)$, a condição $det(DX(q)) \neq 0$, implica que X, visto como aplicação de U em $\mathbb{C}^n$, é um difeomorfismo local em vizinhança V de q. Isto implica que a equação $X(p) = 0$ tem uma única solução em V. Logo q é a única singularidade de X em V.

Sejam agora $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ folheações holomorfas em variedades complexas M e N respectivamente e $\varphi\colon M \to N$ um homeomorfismo.

Definição 1.6.3. Dizemos que φ é uma *equivalência topológica* entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, se φ leva folhas de $\mathcal{F}$ em folhas de $\mathcal{G}$ e $\varphi(sing(\mathcal{F})) = sing(\mathcal{G})$.Se φ for um biholomorfismo, dizemos que φ é uma *equivalência holomorfa* e que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são *holomorficamente equivalentes.*

Suponhamos, por exemplo, que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são definidas por campos de vetores X e Y, cujos conjuntos singulares têm codimensão ≥ 2. Neste caso, temos a seguinte:

Proposição 1.6.4. *$\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são holomorficamente equivalentes se, e somente se, existem um biholomorfismo $\varphi\colon M \to N$ e uma função holomorfa f em M, que não se anula, tais que $\varphi^*(Y) = f.X$.*

Deixamos a prova deste resultado como exercício para o leitor (veja Exercício 13).

Um caso interessante desta situação, é quando $f \equiv 1$, isto é, $\varphi^*(Y) = X$. Dizemos então que φ *conjuga* Y com X. Convém notar que, neste caso, φ conjuga fluxos (locais) de X e Y, isto é, se X_z e Y_z denotam fluxos locais de X e Y em $\mathbb{D} \times U$ e $\mathbb{D} \times V$ respectivamente, onde $\varphi(U) = V$, então, $Y_z \circ \varphi = \varphi \circ X_z$, para todo $z \in \mathbb{D}$ (veja [80]).

O caso em que estamos interessados é o de conjugações ou equivalências em vizinhanças de singularidades. Mais especificamente, sejam p e q singularidades de X e Y respectivamente. Dizemos que X e Y são *localmente conjugados (resp. equivalentes)* em p e q, se existem vizinhanças U de p e V de q tais que as restrições $X\mid_U$ e $Y\mid_V$ são conjugados (resp. equivalentes). Dizemos que um campo de vetores holomorfo X é *linearizável* numa singularidade q, se X é localmente holomorficamente conjugado em q ao campo linear definido por $DX(q)$ em 0.

Os resultados mais importantes sobre as singularidades não degeneradas são os teoremas de linearização de Poincaré e Siegel, que enunciaremos em seguida.

Teorema 1.6.5 (Teorema de linearização de Poincaré [11])**.** *Seja q uma singularidade no domínio de Poincaré e sem ressonâncias, de um campo de vetores holomorfo X. Então X é linearizável em q.*

Em particular, se X é um campo de vetores holomorfo numa variedade complexa de dimensão dois com uma singularidade não degenerada q, então, vale o seguinte:

Corolário 1.6.6. *Sejam λ_1, λ_2 os auto-valores de $DX(q)$ e $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Então X é linearizável em q se uma das condições abaixo for verificada:* (a) *q é hiperbólica.* (b) $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \{n, \frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$.

De fato, qualquer uma das condições acima, implica que a singularidade está no domínio de Poincaré e é não ressonante.

Definição 1.6.7. Sejam q uma singularidade no domínio de Siegel e sem ressonâncias, de um campo de vetores holomorfo X, e $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ o espectro de $DX(q)$. Dizemos que a singularidade *verifica as condições de Siegel*, se existem constantes $C, \nu > 0$, tais que para qualquer $i = 1, ..., n$ e qualquer n-upla de inteiros não negativos $m = (m_1, ..., m_n)$ com $\sum_{j=1}^n m_j \geq 2$, temos

$$\mid \lambda_i - < m, \Lambda > \mid \geq \frac{C}{\mid m \mid^\nu}$$

onde $< m, \Lambda >= \sum_{j=1}^{n} m_j \lambda_j$ e $\mid m \mid= \sum_{j=1}^{n} m_j$.

Note que, as condições de Siegel implicam que a singularidade é não ressonante.

Teorema 1.6.8 (Teorema de Linearização de Siegel [11])**.** *Um campo holomorfo que possui uma singularidade que verifica as condições de Siegel, é linearizável nesta singularidade.*

Os teoremas de Poincaré e Siegel admitem melhoramentos devidos a Dulac [Dulac] e Brjuno [4] respectivamente. Enunciaremos aqui apenas o Teorema de Dulac.

Teorema 1.6.9 (Teorema de Poincaré-Dulac [11])**.** *Seja q uma singularidade no domínio de Poincaré, de um campo de vetores holomorfo X. Então X é localmente conjugado em q a um campo em $\mathbb{C}^n$ da forma $A.x + p(x)$, onde $A = DX(q)$ e p é um campo polinomial em $\mathbb{C}^n$ tal que $p(0) = 0$ e $[A.x, p] = 0$.*

No enunciado acima o símbolo $[,]$ denota o *colchete de Lie* (veja [81]).

No caso de dimensão dois, uma singularidade no domínio de Poincaré ressonante tem auto-valores com quociente $\lambda \in \{n, \frac{1}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$, como o leitor pode verificar. Neste caso, se $\lambda = n \geq 2$, o campo é localmente equivalente na singularidade a um campo em $\mathbb{C}^2$ da forma $(x, ny + a.x^n)$. O campo será linearizável se, e somente se, $a = 0$.

Em seguida, estudaremos as soluções analíticas de um campo, que incidem em uma singularidade.

Definição 1.6.10. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão um numa variedade M e $q \in M$ uma singularidade de $\mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ possui uma *separatriz* em q, se existem uma vizinhança U de q e um subconjunto analítico irredutível de dimensão um de U, digamos γ, com as seguintes propriedades: (a) $q \in \gamma$.
(b) $\gamma \setminus \{q\}$ é uma folha de $\mathcal{F} \mid_U$.

Dizemos que γ é uma separatriz *lisa* se q não é singularidade de γ. Isto equivale a dizer que γ é uma curva complexa regular em U.

Note que, embora γ seja um subconjunto analítico de U, o seu prolongamento (como folha de $\mathcal{F}$) pode não ser subconjunto analítico de M, já que este poderia se acumular em outras folhas de $\mathcal{F}$. Mais adiante veremos exemplos desta situação (veja o Capítulo 4).

Observação 1.6.11. Como as folheações de dimensão um são localmente definidas por campos de vetores, saber se uma folheação possui ou não uma separatriz, é, de fato, equivalente a saber se um campo de vetores X, definido numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$ e com uma singularidade em 0, possui ou não uma separatriz. Assim, por exemplo, se 0 for uma singularidade não degenerada de X e X for linearizável em 0, então X possui pelo menos uma separatriz em 0. De fato, neste caso, as separatrizes de X correspondem aos auto-espaços de dimensão um de $DX(0)$, ou seja, aos auto-vetores de $DX(0)$.

Daqui em diante nos restringiremos ao caso de dimensão dois. O resultado mais importante neste contexto é o seguinte:

Teorema 1.6.12 (Teorema da Separatriz de Camacho-Sad [12])**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão um numa variedade complexa de dimensão dois com uma singularidade isolada $q \in M$. Então $\mathcal{F}$ possui ao menos uma separatriz em q.*

A demonstração deste resultado é feita utilizando-se o processo de "blow-up"ou "explosão", que descreveremos a seguir.

Começaremos definindo o blow-up de $\mathbb{C}^2$ em 0. Consideremos duas cópias de $\mathbb{C}^2$, digamos U e V, com coordenadas (t, x) e (s, y) respectivamente. Definimos uma variedade complexa $\tilde{\mathbb{C}^2}$, identificando o ponto $(t, x) \in U \setminus (t = 0)$ com o ponto $(s, y) = \alpha(t, x) = (1/t, tx) \in V \setminus (s = 0)$.

O *divisor* de $\tilde{\mathbb{C}^2}$ é, por definição, a subvariedade D de $\tilde{\mathbb{C}^2}$ tal que $U \cap D = (x = 0)$ e $V \cap D = (y = 0)$. Note que, como $y = tx$, D está bem definida e é biholomorfa a $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P(1)$. Além disto, podemos definir uma submersão $P \colon \tilde{\mathbb{C}^2} \to D$ por $P\mid_U (t, x) = t$ e $P\mid_V (s, y) = s$. O terno $(\tilde{\mathbb{C}^2}, P, D)$ é, de fato, um fibrado vetorial com base D, projeção P e fibra $\mathbb{C}$, cuja seção nula é D.

Consideremos agora a aplicação holomorfa $\pi \colon \tilde{\mathbb{C}^2} \to \mathbb{C}^2$ definida por $\pi\mid_U (t, x) = (x, tx)$ e $\pi\mid_V (s, y) = (sy, y)$. Note que π está bem definida, uma vez que em $U \cap V$ temos $y = tx$ e $x = sy$. Além disto, π goza das seguintes propriedades: (a) $\pi^{-1}(0) = D$. (b) $\pi\mid_{\tilde{\mathbb{C}^2} \setminus D} \colon \tilde{\mathbb{C}^2} \setminus D \to \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ é um biholomorfismo. (c) π é própria.

Deixamos a verificação destes fatos para o leitor.

Dizemos que $\tilde{\mathbb{C}^2}$ é o *blow-up* ou *explosão* de $\mathbb{C}^2$ em 0, com aplicação de *blow-down* π.

Consideremos uma variedade complexa de dimensão dois M e um ponto $q \in M$. O blow-up de M em q é definido da seguinte maneira: fixemos uma carta local holomorfa $\varphi \colon A \to B \subset \mathbb{C}^2$ tal $q \in A$ e $\varphi(q) = 0$. Sejam $\pi \colon \tilde{\mathbb{C}^2} \to \mathbb{C}^2$ a aplicação de blow-down em 0, com divisor D e $\tilde{B} = \pi^{-1}(B)$. Na união disjunta $M' = (M \setminus \{q\}) \uplus \tilde{B}$ definimos uma relação de equivalência $\sim$ por $p_o \sim p_1$ se, e somente se, $p_o = p_1$ ou, caso contrário, $p_o \in A \setminus \{q\}$, $p_1 \in \tilde{B} \setminus D$ e $p_1 = \pi^{-1}(\varphi(p_o))$. O blow-up de M em q é o quociente $\tilde{M} = M'/\sim$.

Como $\tilde{B}$ é uma variedade e $\pi^{-1} \circ \varphi \colon A \setminus \{q\} \to \tilde{B} \setminus D$ é um biholomorfismo, não é difícil ver que $\tilde{M}$ é uma variedade complexa. Intuitivamente, $\tilde{M}$ foi obtida de M "substituindo-se o ponto q por um espaço projetivo $D \simeq \overline{\mathbb{C}}$". De fato, o divisor D, após o processo, fica naturalmente mergulhado em $\tilde{M}$.

Dado $p \in \tilde{M}$, temos três possibilidades: (1) A sua classe de equivalência está em D. (2) A sua classe de equivalência está em $M \setminus A$. (3) A sua classe de equivalência contém dois pontos $p_o \in A \setminus \{q\}$ e $p_1 \in \tilde{B} \setminus D$.

Desta forma os pontos de $\tilde{M}$ serão divididos em duas categorias: os pontos como em (1), que serão chamados pontos do divisor, e os pontos de $\tilde{M} \setminus D$, que serão pensados como pontos de M (como em (2) ou (3)).

A aplicação de blow-down $\Pi\colon \tilde{M} \to M$ é definida por $\Pi(p) = q$ no caso (1), $\Pi(p) = p$ no caso (2) e $\Pi(p) = p_o$ no caso (3). Não é difícil ver que Π goza de propriedades análogas às de π, ou seja, (a')$\Pi^{-1}(q) = D$. (b')$\Pi\mid_{\tilde{M}\setminus D}\colon \tilde{M} \setminus D \to M \setminus \{q\}$ é um biholomorfismo. (c')Π é própria.

Com isto, podemos agora, iterar o processo de blow-up: começamos com uma variedade M e um ponto $q_o \in M$. Do blow-up de M em q_o, obtemos uma variedade M_1 e uma aplicação de blow-down $\Pi_1\colon M_1 \to M$ com divisor $D_1 = \Pi_1^{-1}(p_o)$. Em seguida, fixamos $q_1 \in M_1$, e do blow-up de M_1 em q_1 obtemos uma variedade M_2 e uma aplicação de blow-down $\Pi_2\colon M_2 \to M_1$ com divisor D_2. Prosseguindo indutivamente, após n blow-ups, obteremos uma variedade M_n e uma aplicação de blow-down $\Pi_n\colon M_n \to M_{n-1}$ com divisor D_n. A composta $\Pi^n = \Pi_n \circ ... \circ \Pi_1\colon M_n \to M$ é uma aplicação holomorfa própria, que será chamada de um *processo de blow-up* ou *de explosão*.

O divisor D^n de Π^n é definido indutivamente da seguinte maneira: (I)$D^1 = D_1$. (II)$D^n = D_n \cup \Pi_n^{-1}(D^{n-1})$.

Note que $\Pi(D^n)$ é um subconjunto finito de M: são os pontos de M onde foram executados blow-ups. Além disto, a aplicação $\Pi^n\mid_{M_n\setminus D^n}\colon M_n \setminus D^n \to M \setminus \Pi^n(D^n)$ é um biholomorfismo.

Verifica-se facilmente que o divisor D^n é, de fato, uma união de n curvas complexas, todas difeomorfas a $\overline{\mathbb{C}}$. Assim, por exemplo, ao executarmos o segundo blow-up, se $q_1 \in D_1$, teremos $D^2 = D_2 \cup \Pi_2^{-1}(D_1)$. Constata-se diretamente que $\Pi_2^{-1}(D_1) \simeq \overline{\mathbb{C}}$ e que D_2 corta $\Pi_2^{-1}(D_1)$ transversalmente num único ponto, ou seja, D^2 é a união de dois projetivos mergulhados em M_2 com um único ponto em comum. Por abuso de linguagem usaremos a mesma notação para os projetivos D_i e as suas sucessivas contra-imagens por $\Pi_i, ..., \Pi_n$. Com esta convenção, podemos dizer que $D^n = \cup_{j=1}^n D_j$.

No caso em que para todo $j = 1, ..., n-1$ o j-ésimo blow-up é feito em um ponto de D^j, D^n será um "grafo sem ciclos de projetivos", isto é, para todo i o projetivo D_i corta um outro transversalmente D_j num único ponto, o qual chamaremos de *esquina* de D^n, de tal forma que se $D_{i_1} \cap D_{i_2} \neq \phi$,...,$D_{i_{m-1}} \cap D_{i_m} \neq \phi$, então $D_{i_1} \neq D_{i_m}$. Um tal processo será chamado de *processo de blow-up em* q.

Veremos em seguida no que consiste a "resolução de uma singularidade de uma curva". Consideremos uma curva $C = (f(x,y) = 0) \subset A \subset \mathbb{C}^2$, onde $f(0,0) = 0$, isto é, $0 \in C$. Vamos supor que o desenvolvimento de Taylor de f é $f = \sum_{j=k}^{\infty} f_j$, onde f_j é um polinômio homogêneo de grau j. Seja $\pi\colon \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$ o blow-down de $\mathbb{C}^2$ em 0. Tomando-se a expressão de π na carta $((t,x),U)$ de $\tilde{\mathbb{C}}^2$, obtemos

$$f \circ \pi(t,x) = f(x,tx) = \sum_{j=k}^{\infty} f_j(x,tx) = x^k . \sum_{j=k}^{\infty} x^{j-k} . f_j(1,t) = x^k . f_U(t,x),$$

de forma que $\pi^{-1}(C) \cap U = (x = 0) \cup (f_U(t, x) = 0)$. De maneira análoga, obtemos na outra carta, $((s, y), V)$, $\pi^{-1}(C) \cap V = (y = 0) \cup (f_V(s, y) = 0)$, onde $f_V(s, y) = \sum_{j=k}^{\infty} y^{j-k}.f_j(s, 1)$. Sendo assim, temos $\pi^{-1}(C) = D \cup \tilde{C}$, onde $\tilde{C} = (f_U = 0) \cup (f_V = 0)$. A curva $\tilde{C}$ é chamada de *transformada estrita de* C.

Note que $\tilde{C} \cap D$ é um conjunto finito. De fato, $\tilde{C} \cap D \cap U = \{(t, 0)\ ;\ f_k(1, t) = 0\}$, enquanto que $\tilde{C} \cap D \cap V = \{(s, 0)\ ;\ f_k(s, 1) = 0\}$.

De um modo geral, se considerarmos um processo de blow-up $\Pi^n\colon A_n \to A$ com divisor $D^n = D_1 \cup ... \cup D_n$, teremos $(\Pi^n)^{-1}(C) = D^n \cup C_n$, onde $C_n \cap D^n$ é um conjunto finito. A curva C_n é chamada de *transformada estrita* de C por Π^n.

Definição 1.6.13. Seja C uma curva holomorfa numa superfície complexa M. Dizemos que um processo de blow-up, $\Pi^n\colon M_n \to M$, com divisor $D^n = \cup_{j=1}^{n} D_j$ é uma resolução de C, se a sua transformada estrita C_n satisfaz às seguintes propriedades: (a)C_n é regular. (b)C_n corta cada $D_j \subset D^n$ transversalmente. (c)$C_n \cap D^n$ não contém esquinas.

Para ilustrar, vejamos um exemplo.

Exemplo 1.6.14. Considere a curva singular C, em $\mathbb{C}^2$, dada por $f(x, y) = y^2 - x^3 = 0$. Seja $\pi_1\colon M_1 = \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$ o blow-down de $\mathbb{C}^2$ em 0. Tomando-se a expressão de π na carta $((t, x), U)$ de M_1, obtemos

$$f \circ \pi_1(t, x) = f(x, tx) = x^2.(t^2 - x),$$

ou seja, $\pi_1^{-1}(C) \cap U$ consiste do divisor $(x = 0)$ e da transformada estrita C_1 de C, com equação $x - t^2 = 0$. Não é difícil ver que $\pi_1^{-1}(C) \subset U$, de forma que não é necessário considerar a outra carta. A transformada estrita C_1 de C é regular mas não é transversal ao divisor D_1, já $C_1 \cap D = (0, 0) \in U$ e $(x - t^2 = 0)$ é tangente a $(x = 0)$ neste ponto, ou seja a curva ainda não está resolvida.

Façamos então um blow-up $\pi_2(u, t) = (t, tu) = (t, x)$ em $(0, 0) \in U$. O divisor D^2 deste blow-up é a união de dois projetivos, $D_1 \cup D_2$, sendo que na carta (u, t), D_1 é representado por $(u = 0)$ e D_2 por $(t = 0)$. Temos então $f \circ \pi_1 \circ \pi_2(u, t) = t^3.u^2.(t - u)$. Logo a transformada estrita C_2 de C será $(t - u = 0)$. Esta curva corta D^2 na esquina $(0, 0) = D_1 \cap D_2$, ou seja, a curva ainda não está resolvida. Com um blow-up π_3 no ponto $(u, t) = (0, 0)$, da forma $t = vu$ (numa das cartas), obtemos um novo divisor D_3, o qual é representado por $(u = 0)$, e a transformada estrita C_3 de C com equação $v - 1 = 0$, a qual corta D_3 transversalmente no ponto $(v, u) = (1, 0)$, que não é esquina. Sendo assim, C_3 é uma resolução de C.

Note que, as coordenadas originais (x, y) se relacionam com (v, u) por

$$(x, y) = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3(v, u) = (v.u^2, v^2.u^3) = \pi^3(v, u).$$

Com isto, a partir da parametrização $u \to (1, u)$ de C_3, podemos obter a parametrização $u \to (u^2, u^3)$ de C.

Teorema 1.6.15 (Teorema de Resolução das Curvas [11]). *Toda curva holomorfa numa superfície complexa admite uma resolução.*

Corolário 1.6.16. *Seja S uma curva holomorfa numa superfície complexa M. Dado $q \in S$, existem uma vizinhança U de q e curvas holomorfas $S_1, ..., S_m \subset U$ tais que:*

(a) *$q \in S_j$ para todo $j = 1, ..., m$.*

(b) *$S \cap U \subset S_1 \cup ... \cup S_m$.*

(c) *$S_i \cap S_j = \{q\}$, se $i \neq j$.*

(d) *Para todo $j = 1, ..., m$, existe uma aplicação holomorfa injetora $\alpha_j \colon \mathbb{D}_r \to U$, onde $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ | z | < r\}$, tal que $\alpha_j(0) = q$, $\alpha_j(\mathbb{D}_r) = S_j$ e a restrição $\alpha_j\, |_{\mathbb{D}_r \setminus \{0\}}$ é um mergulho.*

Em particular, cada curva S_j é homeomorfa ao disco $\mathbb{D}$.

Definição 1.6.17. Os germes em q das curvas $S_1, ..., S_m$ são chamados de *ramos* de S em q. Para cada $j = 1, ..., m$, a aplicação α_j, é chamada de *parametrização de Puiseux* do *ramo* S_j.

Demonstração. Prova do Corolário. No caso em que o ponto q não é singularidade de S o resultado é imediato. Neste caso, a curva possui apenas um ramo em q.

Suponhamos que q seja uma singularidade de S. Sejam $\pi \colon \tilde{M} \to M$ uma resolução de S, com divisor $D = \cup_{j=1}^{n} D_j$, e $\tilde{S}$ o transformado estrito de S. Então $\tilde{S}$ corta transversalmente D, fora das esquinas, num conjunto finito, digamos $\{q_1, ..., q_m\}$. Como a curva $\tilde{S}$ é regular, para cada $j = 1, ..., m$, podemos obter um mergulho $\beta_j \colon \mathbb{D}_r \to \tilde{M}$, o qual é uma parametrização de uma vizinhança de q_j em $\tilde{S}$ tal que $\beta_j(0) = q_j$. Tomando a restrição dos β_j a um disco de raio menor, se necessário, podemos supor que $\beta_i(\mathbb{D}_r) \cap \beta_j(\mathbb{D}_r) = \phi$ se $i \neq j$. Coloquemos $\alpha_j = \pi \circ \beta_j$ e $S_j = \alpha_j(\mathbb{D}_r)$. Não é difícil verificar que $S_1, ..., S_m$ e $\alpha_1, ..., \alpha_m$ satisfazem (a),(c) e (d). Deixamos para o leitor a verificação de (b). □

Observação 1.6.18. De fato, prova-se que toda curva holomorfa numa variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ possui uma "resolução".

Uma conseqüência é o seguinte resultado:

Teorema 1.6.19 (cf. [40]). *Seja S uma curva holomorfa numa variedade complexa M. Então existem uma superfície de Riemann $\tilde{S}$ e uma aplicação holomorfa $\phi \colon \tilde{S} \to M$ com as seguintes propriedades:* (a) . *$\phi(\tilde{S}) = S$.* (b) . *Existem subconjuntos discretos $A \subset \tilde{S}$ e $B \subset S$ tais que $\phi\, |_{\tilde{S} \setminus A} \colon \tilde{S} \setminus A \to S \setminus B$ é um mergulho.* (c) *$\phi^{-1}(B) = A$. Além disto, B é o conjunto singular de S, e para todo $p \in B$, $\phi^{-1}(p)$ é um subconjunto finito de A.*

Definição 1.6.20. $\tilde{S}$ é chamada de *normalização* de S.

Note que o teorema acima implica que, dada uma singularidade $p \in S$, podemos definir os *ramos* de S em p da seguinte forma: como $\phi^{-1}(p) = \{q_1, ..., q_r\}$, é um subconjunto finito de $\tilde{S}$, podemos obter para cada $j = 1, ..., r$ um disco $\mathbb{D}_j \subset \tilde{S}$ tal que $p_j \in \mathbb{D}_j$ e $\mathbb{D}_i \cap \mathbb{D}_j = \phi$ se $i \neq j$. Os germes em p de $\phi(\mathbb{D}_1), ..., \phi(\mathbb{D}_r)$ são os ramos de S por p. As aplicações $\phi\mid_{\mathbb{D}_j} : \mathbb{D}_j \to S$, $j = 1, ..., r$, são as *parametrizações de Puiseux* destes ramos.

Mais adiante veremos o que se entende por "resolução de uma singularidade de uma folheação". Antes porém, é conveniente introduzir algumas notações.

Definição 1.6.21. Seja X um campo de vetores holomorfo definido numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que 0 é uma singularidade isolada de X. Sejam λ_1 e λ_2 os auto-valores de $DX(0)$. Dizemos que 0 é uma singularidade simples de X, se uma das condições abaixo for verificada:
(a) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ (ou vice-versa). Neste caso, dizemos que a singularidade é uma *sela-nó*.
(b) $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ e λ_2/λ_1 não é racional positivo. Os números λ_2/λ_1 e λ_1/λ_2 serão chamados de *números característicos* da singularidade.

Note que as condições acima são invariantes por mudanças holomorfas de coordenadas e por multiplicação de X por uma função que não se anula em 0. Desta maneira, elas podem ser estendidas às singularidades isoladas de folheações em superfícies complexas.

O Teorema da resolução diz, a grosso modo, que se 0 é uma singularidade isolada de uma folheação $\mathcal{F}$, então, após um processo de blow-up, $\pi\colon M \to \mathbb{C}^2$, é possível definir uma folheação $\mathcal{F}^* = \pi^*(\mathcal{F})$ que coincide com $\mathcal{F}$ fora do divisor de π e cujas singularidades são todas simples.

Vejamos o que ocorre com uma folheação após um blow-up π em 0. Consideremos uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$ com singularidade isolada em 0. Vamos supor $\mathcal{F}$ representada pelo campo $X = (P(x,y), Q(x,y))$ ou, equivalentemente, pela 1-forma dual $\omega = P(x,y)dy - Q(x,y)dx$. Denotaremos por $\mathcal{F}^*$ a folheação com singularidades isoladas obtida de $\pi^*(\omega)$. Podemos escrever o desenvolvimento de Taylor de ω em 0 como:

$$\omega = \sum_{j=k}^{\infty}(P_j dy - Q_j dx),$$

onde P_j e Q_j são polinômios homogêneos de grau j, com $P_k \not\equiv 0$ ou $Q_k \not\equiv 0$. A forma $\pi^*(\omega)$ se escreve na carta $((t,x), U)$ como:

$$\pi^*(\omega) = \sum_{j=k}^{\infty}(P_j(x,tx)d(tx) - Q_j(x,tx)dx) =$$

$$= x^k.\sum_{j=k}^{\infty} x^{j-k}.[(tP_j(1,t) - Q_j(1,t))dx - xP_j(1,t)dt].$$

Dividindo a forma acima por x^k obtemos:

$$(*) \quad x^{-k}.\pi^*(\omega) = (tP_k(1,t) - Q_k(1,t))dx + xP_k(1,t)dt + x.\alpha$$

onde $\alpha = \sum_{j=k+1}^{\infty} x^{j-k-1}.[(tP_j(1,t) - Q_j(1,t))dx + xP_j(1,t)dt]$.

Coloquemos $R(x,y) = yP_k(x,y) - xQ_k(x,y)$, de forma que $x^{-k}.\pi^*(\omega) = R(1,t)dx + xP_k(1,t)dt + x.\alpha$. Analogamente, ao calcularmos a expressão de $\pi^*(\omega)$ na carta $((s,y),V)$, obtemos:

$$(**) \quad y^{-k}.\pi^*(\omega) = R(s,1)dy - yQ_k(s,1)ds + y.\beta.$$

O polinômio $R(x,y)$ será chamado de *cone tangente* de ω. Temos dois casos a considerar: (a)$R \equiv 0$. Neste caso, dizemos que a singularidade é *dicrítica.* (b)$R \not\equiv 0$. Neste caso, dizemos que a singularidade é *não dicrítica.* O cone tangente tem então grau $k+1$.

Analisemos os casos acima. Caso (a). Neste caso, as formas em (*) e (**) ainda podem ser divididas por x e y respectivamente. Dividindo (*) por x obtemos

$$\omega_1 = P_k(1,t)dt + \alpha = P_k(1,t)dt + (tP_{k+1}(1,t) - Q_{k+1}(1,t))dx + x.\alpha_1,$$

forma esta que não pode ser mais dividida por x, uma vez que $P_k \not\equiv 0$. A folheação $\mathcal{F}^*$ será então representada nesta carta por ω_1 e na outra carta por uma forma ω_2, obtida da divisão de (**) por y. Observe que, nos pontos divisor $(x=0)$, da forma $(t_o, 0)$ tais que $P_k(1,t_o) \neq 0$, as folhas de $\mathcal{F}^*$ são transversais ao divisor. Os pontos $(t_o, 0)$ tais que $P_k(1,t_o) = 0$ serão, ou pontos singulares de $\mathcal{F}^*$, ou pontos de tangência das folhas de $\mathcal{F}^*$ com o divisor.

Note que, cada folha transversal ao divisor, dará origem a uma separatriz local de $\mathcal{F}$ por blow-down. Sendo assim, uma singularidade dicrítica possui uma infinidade de separatrizes.

Caso (b). Neste caso as formas em (*) e (**) não podem mais ser divididas. Portanto elas representam $\mathcal{F}^*$ nas cartas respectivas. Note que o divisor é invariante por $\mathcal{F}^*$. Além disto, as singularidades de $\mathcal{F}^*$ no divisor, são os pontos, da primeira carta, da forma $(0,t_o)$ onde $R(1,t_o) = 0$, e mais o ponto $(0,0)$, da segunda carta, se 0 for raiz de $R(s,1) = 0$. Vemos então que $\mathcal{F}^*$ possui $k+1$ singularidades, contadas com multiplicidade, no divisor.

Observe que, se alguma das singularidades de $\mathcal{F}^*$ possui alguma separatriz S, então $\pi(S)$ será separatriz de $\mathcal{F}$ em 0.

Consideremos agora um processo de blow-up em $0 \in \mathbb{C}^2$, obtido por uma sucessão de de n explosões, $\Pi\colon M \to \mathbb{C}^2$, com divisor $D = \cup_{j=1}^{n} D_j$. O argumento anterior, prova que podemos obter uma folheação $\tilde{\mathcal{F}}$, com singularidades isoladas, e que em $M \setminus D \simeq \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ coincide com $\mathcal{F}$. Diremos que o divisor D_j é *não dicrítico*, se ele for invariante por $\tilde{\mathcal{F}}$. Caso contrário, diremos que ele é *dicrítico.*

Definição 1.6.22. Dizemos que o processo de blow-up acima é uma *resolução da singularidade* se as seguintes condições forem verificadas: (i). Todas as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ em D são simples. (ii). Um divisor dicrítico, D_j, não contém, nem singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$, nem pontos de tangência de $\tilde{\mathcal{F}}$ com D_j.

Teorema 1.6.23 (Teorema da resolução de singularidades de Seidenberg [75])**.** *Toda singularidade isolada de uma folheação holomorfa em uma superfície complexa admite uma resolução.*

Observação 1.6.24. O Teorema de resolução de curvas pode ser demonstrado utilizando-se o Teorema de Seidenberg (veja Exercício 16 deste capítulo).

O Teorema de Resolução de Singularidades de Seidenberg representou um grande avanço na Teoria das Folheações complexas em dimensão 2. Gostaríamos de observar que, embora o processo de blow-up possa ser estendido para dimensões superiores, um resultado semelhante não é ainda conhecido. Em dimensão 3, no entanto, resultados parciais foram provados em [17].

Para finalizar a seção, estudaremos as separatrizes das singularidades simples. Sejam X um campo de vetores holomorfo com uma singularidade simples em $0 \in \mathbb{C}^2$ e $\mathcal{F}$ a folheação definida por X. Note que a definição de singularidade simples implica que a matriz $DX(0)$ é diagonalizável. Podemos então supor que X é da forma: $X = (\lambda_1.x, \lambda_2.y) + t.o.s.$, onde $\lambda_1 \neq 0$ e $t.o.s.$ indica "termos de ordem superior a 1". Dividindo X por λ_1, se necessário, obtemos a mesma folheação. Logo podemos supor que $X = (x, \lambda.y) + t.o.s.$, onde λ é um número característico de $\mathcal{F}$ em 0. A singularidade será uma sela-nó se, e somente se, $\lambda = 0$. Neste caso, a direção do auto-vetor não nulo (o eixo dos x no exemplo anterior) de $DX(0)$ será chamada de *direção forte*, enquanto que a do auto-vetor nulo (o eixo dos y no exemplo) de *direção fraca*.

Proposição 1.6.25. *Seja X como anteriormente.*

(a). *Se* 0 *não é uma sela-nó, então $\mathcal{F}$ possui exatamente duas separatrizes lisas por* 0*, as quais são tangentes aos auto-vetores de $DX(0)$.*
(b). *Se* 0 *é uma sela-nó, então $\mathcal{F}$ possui no mínimo uma e no máximo duas separatrizes por* 0*. No primeiro caso a separatriz é lisa e é tangente à direção forte, enquanto que no segundo ambas as separatrizes são lisas e tangentes às direções forte e fraca.*

A prova da proposição acima pode ser encontrada em [63], [64].

Convém notar que a prova do Teorema da existência da separatriz [12], é feita utilizando-se o Teorema de Seidenberg, a proposição acima e um Teorema de resíduos, conhecido como "Teorema do índice de Camacho-Sad", que veremos mais adiante.

A Proposição 1.6.25 e o método da resolução podem ser usados para "detectar e localizar" separatrizes em exemplos específicos, como veremos no exemplo abaixo.

Exemplo 1.6.26. Consideremos uma folheação $\mathcal{F}$, definida numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$ por $\omega = d(y^2 - x^3) + \alpha = 0$, onde $\alpha = f(x,y)dx + g(x,y)dy$, sendo que f e g e suas derivadas até ordem 2 em 0 se anulam. Veremos , sem fazer todos os detalhes, que $\mathcal{F}$ possui uma única separatriz em 0.

Observemos primeiramente que o processo de resolução de $\mathcal{F}$ é semelhante ao da resolução da curva $y^2 - x^3 = 0$, visto no Exemplo 1.6.14. São necessárias três explosões, com as quais obtemos três divisores D_1, D_2 e D_3.

Se $\pi = \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ é a composição destas explosões, então a folheação $\mathcal{F}^* = \pi^*(\mathcal{F})$ possui três singularidades, duas delas nas esquinas $D_1 \cap D_3$ e $D_2 \cap D_3$ e a terceira fora das esquinas. Além disto, os divisores não são dicríticos.Para ilustrar, veremos como obtemos uma parte do último estágio da resolução, obtendo $\mathcal{F}^* = \pi^*(\mathcal{F})$ na carta (v,u) tal que $\pi(v,u) = (vu^2, v^2u^3)$ (veja Exemplo 1.6.14). Substituindo $x = vu^2$ e $y = v^2u^3$ em ω obtemos:

$$\pi^*(\omega) = d(v^4u^6 - v^3u^6) + f(vu^2, v^2u^3)d(vu^2) + g(vu^2, v^2u^3)d(v^2u^3)$$

Desenvolvendo e utilizando a hipótese sobre f e g, temos:

$$(*) \quad \pi^*(\omega) = (4v^3u^6 - 3v^2u^6)dv + (6v^4u^5 - 6v^3u^5)du + v^3u^7.\alpha_1$$

onde α_1 é holomorfa. Dividindo a forma em (*) por v^2u^5, obtemos:

$$\omega_1 = u(4v-3)dv + 6(v^2 - v)du + vu^2.\alpha_1$$

forma esta que tem singularidades isoladas ao longo dos divisores $(u = 0)$ (D_3) e $(v = 0)$ (D_2). Estas singularidades são $(v,u) = (0,0)$ (esquina) e $(v,u) = (1,0)$. O campo dual de ω_1 é então da forma $X = [6(v - v^2) + vu^2.A(v,u)]\partial/\partial v + [u(4v-3) + vu^2.B(v,u)]\partial/\partial u$, onde A e B são holomorfas. Calculando os auto-valores de DX em $(0,0)$ e $(1,0)$ obtemos $\{6,-3\}$ e $\{-6,1\}$ respectivamente. Os números característicos de X são portanto racionais negativos e as singularidades são simples. Analogamente, a outra singularidade que aparece em $D_1 \cap D_3$ também é simples, como o leitor pode constatar (os seus números característicos serão -3 e $-1/3$). Decorre daí que $\mathcal{F}^*$ possui uma separatriz pelo ponto $(1,0)$, digamos S^*, transversal ao divisor D_3, que dará origem a uma separatriz $S = \pi(S^*)$ de $\mathcal{F}$. Como as outras singularidades de $\mathcal{F}^*$ estão em esquinas, esta será a única separatriz de $\mathcal{F}$.

Note que S^* tem uma equação da forma $v = \varphi(u)$ onde $\varphi(0) = 1$. Podemos daí obter uma parametrização de Puiseux de S:

$$(x(u), y(u)) = \pi(\varphi(u), u) = (u^2.\varphi(u), u^3.(\varphi(u))^3).$$

Partindo da parametrização acima é possível provar que, restringindo S a vizinhança menor de 0, podemos obter uma equação para S da forma $(w(x,y))^2 - (z(x,y))^3 = 0$, onde $(x,y) \to (z(x,y), w(x,y))$ é um biholomorfismo (veja Exercício 17).

1.7 Suspensão de um grupo de difeomorfismos holomorfos

Um modo bem conhecido de se obter folheações holomorfas em espaços fibrados com grupo de holonomia prescrito é o método da *suspensão* de um grupo de biholomorfismos. Esta construção é descrita brevemente abaixo (para mais detalhes veja [9]):

Sejam M e N variedades complexas conexas. Denotemos o grupo de biholomorfismos de N por $\mathrm{Aut}(N)$. Dada uma uma representação do grupo fundamental de M em $\mathrm{Aut}(N)$, digamos $h\colon \pi_1(M) \to \mathrm{Aut}(N)$, construiremos um fibrado holomorfo M_h, com base M, fibra N, e projeção $P\colon M_h \to M$, e uma folheação holomorfa $\mathcal{F}_h$ em M_h, tais que as folhas de $\mathcal{F}$ são transversais às fibras de P e se L é uma folha de $\mathcal{F}$ então $P\,|_L\colon L \to M$ é uma aplicação de recobrimento. Utilizaremos a notação $G = h(\pi_1(M)) \subset Aut(N)$.

Seja $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ o recobrimento universal holomorfo de M. Um automorfismo do recobrimento $\widetilde{M}$ é um biholomorfismo f de $\widetilde{M}$ que recobre a identidade de M, isto é, tal que $\pi \circ f = \pi$. Consideremos a representação natural $g\colon \pi_1(M) \to Aut(\widetilde{M})$ (veja [27]). É sabido que:

(a)g é injetora. Em particular $g(\pi_1(M))$ é isomorfo a $\pi_1(M)$.

(b)g é propriamente descontínua (veja [27]).

Podemos então definir uma ação $H\colon \pi_1(M) \times \widetilde{M} \times N \to \widetilde{M} \times N$ de modo natural:

Se $\alpha \in \pi_1(M)$, $\tilde{m} \in \widetilde{M}$ e $n \in N$ então $H(\alpha, \tilde{m}, n) = (g(\alpha)(\tilde{m}), h(\alpha)(n))$.

Utilizando (b) não é difícil ver que H é propriamente descontinua. Sendo assim, as órbitas de H definem uma relação de equivalência em $\widetilde{M} \times N$, cujo espaço quociente é uma variedade complexa.

Definição 1.7.1. A variedade quociente $\frac{\widetilde{M} \times N}{H} = M_h$ é chamada a *variedade da suspensão* da representação h.

Observamos que M_h é um fibrado holomorfo com base M e fibra N, cuja projeção $P\colon M_h \to M$ é definida por

$$P(o(\tilde{m}, n)) = \pi(\tilde{m})$$

onde $o(\tilde{m}, n)$ denota a órbita de $(\tilde{m}, n)$ por H.

Vejamos agora como se constrói a folheação $\mathcal{F}_h$. Consideremos a folheação produto $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\widetilde{M} \times N$ cujas folhas são da forma $\widetilde{M} \times \{n\}$, $n \in N$. Não é difícil ver que $\widetilde{\mathcal{F}}$ é H-invariante e portanto induz uma folheação holomorfa de codimensão $q = \dim(N)$, $\mathcal{F}_h$ em M_h, cujas folhas são da forma $P(\widetilde{L})$, onde $\widetilde{L}$ é uma folha de $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Definição 1.7.2. $\mathcal{F}_h$ é chamada a *folheação suspensão* de $\mathcal{F}$ por h.

As propriedades mais relevantes da suspensão estão reunidas na proposição abaixo (veja [35], [9]):

Proposição 1.7.3. *Seja $\mathcal{F}_h$ a folheação suspensão de uma representação $h\colon \pi_1(M) \to Aut(N)$. Então:*

(i) *$\mathcal{F}_h$ é transversal às fibras de $P\colon M_h \to M$. Além disto, cada fibra de P corta todas as folhas de $\mathcal{F}_h$.*

(ii) *As folhas de $\mathcal{F}_h$ correspondem biunivocamente às órbitas de h em N.*

(iii) [1] *Se L é uma folha de $\mathcal{F}_h$ correspondendo à órbita de um ponto $p \in N$, então $P\,|_L\colon L \to M$ é uma aplicação de recobrimento (consideramos aqui L com a sua estrutura intrínseca).*

Note que esta condição implica que, se fixamos um ponto $p \in M$ e a sua fibra $N_p = P^{-1}(p)$, obtemos por levantamento de caminhos em $\pi_1(M,p)$, nas folhas de $\mathcal{F}_h$, um grupo $G_p \subset Aut(N_p)$, o qual é conjugado a G. (veja os detalhes em [C- LN 1]).

(iv) Existe uma coleção $\{y_i\colon U_i \to N\}_{i\in I}$ de submersões holomorfas definidas em abertos U_i de M_h tais que

(a) $M_h = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$

(b) $\mathcal{F}_h\big|_{U_i}$ é dada por $y_i\colon U_i \to N$.

(c) se $U_i \cap U_j \neq \phi$ então $y_i = f_{ij} \circ y_j$ para algum $f_{ij} \in G$.

(d) Se L é a folha de $\mathcal{F}_h$ pelo ponto $q \in N_p$, então o grupo de holonomia de L é conjugado ao subgrupo de germes em q de elementos do grupo $G = h(\pi_1(M,p))$ que fixam o ponto q.

1.8 Exercícios do Capítulo 1

1. Verifique que as definições dadas pelas descrições (I) e (II) da Proposição 1.2.4 são equivalentes.

2. Termine a demonstração da afirmação do exemplo 2.

3. Demonstre a Proposição 1.2.9.

4. Demonstre a Proposição 1.2.12.

5. Sejam $\phi\colon M \times \mathbb{C} \to M$ um fluxo holomorfo em M e G_p o grupo de isotropia de $p \in M$. Prove que G_p é isomorfo a $\{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{C}$.

[1] Devido a (iii) chamamos G de *holonomia global* da folheação suspensão $\mathcal{F}_h$.

6. Dê exemplos de campos de vetores holomorfos em toros complexos de dimensão complexa 2, nas três situações abaixo:

(a) Suas órbitas são difeomorfas a $\mathbb{C}$.

(b) Suas órbitas são difeomorfas a um toro complexo de dimensão 1.

(c) Suas órbitas são difeomorfas a $\mathbb{C}^*$.

7. Dados $k \geq 2$ e $a \in \mathbb{C}$, considere o campo de vetores

$$Y = Y^{k,a} = \frac{y^k}{1 + a.y^{k-1}} \frac{\partial}{\partial y}$$

definido em $\{y \in \mathbb{C}\ ;\ 1 + a.y^{k-1} \neq 0\}$. Denote por Y_z o seu fluxo local complexo definido numa vizinhança de 0 (isto é, $z \to Y_z(p)$ é a solução da equação diferencial $\dot{y} = Y(y)$ com condição inicial $y(0) = p$). Prove que:

(a) Para todo $z \in \mathbb{C}$, Y_z comuta com a rotação R_β, onde $\beta = exp(2\pi i/(k-1)$.

(b) Prove que o grupo $G_{k,a}$ definido para enunciar a Proposição 1.5.15 é abeliano.

(c) Prove que se $f \in G_{k,a}$, então, $f^*(\alpha) = \alpha$, onde

$$\alpha = \frac{1 + a.y^{k-1}}{y^k} dy$$

Sugestão para (c). Note que $L_Y(\alpha) = 0$ ($L_Y(\alpha)$ denota a derivada de Lie de α com respeito a Y. Veja [81]).

8. Sejam ω uma 1-forma meromorfa fechada, numa variedade M de dimensão ≥ 2, $(\omega)_\infty$ o seu conjunto de pólos, $\overline{L}$ uma componente irredutível de $(\omega)_\infty$ e L a parte lisa de $\overline{L}$. Prove que:

(a) Dado $p \in L$ existe um sistema de coordenadas $(x, y) \colon U \to \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, em uma vizinhança U de p, tal que $L \cap U = (y = 0)$ e

$$\omega\ |_U = \frac{g(y)}{y^k} dy$$

onde $k \geq 1$ e g é holomorfa numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$ sendo $g(0) \neq 0$.

(b) Prove que o inteiro k não depende do sistema de coordenadas escolhido nem do ponto $p \in L$.

9. Seja α uma 1-forma meromorfa definida numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$, com pólo de ordem $k \geq 2$ em 0 e tal que $Res(\alpha, 0) = a \in \mathbb{C}$. Prove que existe um sistema de coordenadas y, numa vizinhança de 0, no qual a expressão de α é:

$$\alpha = \frac{1 + a.y^{k-1}}{y^k} dy.$$

10. Prove que a solução da equação diferencial

$$z^2.(1 + a.f).f' = f^2.(1 + a.z)$$

tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 2c$ é dada por $f(z) = Y_c^{2,a}(z)$, onde $Y_c^{2,a}$ é como no Exercício 7.

Sugestão. Use o Exercício 7.

11. Dados $k \geq 2$ e $a \in \mathbb{C}$, consideremos o seguinte campo de vetores:

$$Y^{k,a} = \frac{y^k}{1 + a.y^{k-1}} \frac{\partial}{\partial y}$$

definido no aberto $\{y \in \mathbb{C};\ 1 + a.y^{k-1} \neq 0\}$. Denotemos por $Y_z^{k,a}$ o seu fluxo local. Prove que se $k \geq 3$, então, $[Y_z^{k,a}]$ comuta com uma rotação $R_\lambda(y) = \lambda.y$, onde $\lambda^{k-1} = 1$.

12. Sejam M uma variedade simplesmente conexa,

$$\omega = \frac{df_o}{f_o} + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

uma forma logarítmica em M, $\mathcal{F}$ a folheação induzida por ω em M e $L \subset (f_o = 0)$ uma folha de $\mathcal{F}$. Prove que $\text{Hol}(L)$ é conjugada a um subgrupo do grupo gerado pelo seguinte conjunto de transformações lineares:

$$\{z \to a.z\ ;\ a = e^{2\pi i \lambda_j},\ j = 1, ..., r\}$$

Sugestão. Considere a função "multivaluada" $f = f_o.f_1^{\lambda_1}...f_r^{\lambda_r}$. Dada uma seção transversal Σ por um ponto de $(f_o = 0)$ (tal que $f_o\,|_\Sigma$ seja uma submersão e f_j não se anula em Σ se $j \geq 1$), prove que a cada elemento $g \in Hol(L, \Sigma)$ corresponde uma "determinação" de f em Σ.

13. Prove a Proposição 1.6.4.

14. Descreva o processo de resolução em $0 \in \mathbb{C}^2$, das seguintes curvas:

(a) $y^2 - x^2 + x^3 = 0$.

(b) $(y^2 - x^3)(y^2 - 2x^3) + x^7 = 0$.

(c) $y^2 - x^3 + f(x, y) = 0$, onde f e as suas derivadas até ordem 3 se anulam em $(0, 0)$.

15. Prove que a folheação em $\mathbb{C}^2$ definida pela forma $\omega = (2x^2+y^2+xy+x^5)dy-(2y^2+x^7)dx = 0$ possui três separatrizes lisas em 0.

16. Seja $S = (f = 0)$ uma curva num aberto A de $\mathbb{C}^2$, onde $0 \in A$ é a única singularidade de df em A . Sejam $\mathcal{F}$ a folheação em A cujas folhas são as componentes conexas das curvas $(f = c^{te}) \setminus \{0\}$ e $\Pi\colon M \to \mathbb{C}^2$ um processo de blow-up em 0 com divisor D que resulta numa resolução $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$.

(a). Prove que $\mathcal{F}$ tem um número finito de separatrizes por 0 e, portanto $\tilde{\mathcal{F}}$ não possui divisores dicríticos.

(b). Seja $q \in D$ uma singularidade de $\tilde{\mathcal{F}}$. Prove que q não é uma sela-nó, e que os números característicos de $\tilde{\mathcal{F}}$ em q são racionais negativos.

(c). Prove que a cada singularidade $q \in D$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ que não está numa esquina de D, corresponde um ramo de S em 0, e vice-versa.

(d). Prove que Π fornece uma resolução de S em 0.

17. Preencha os detalhes que faltam no Exemplo 1.6.26. Prove que a separatriz S tem uma equação $w^2 - z^3 = 0$, num sistema de coordenadas apropriado em $0 \in \mathbb{C}^2$.

18. Prove a Afirmação 1.3.12. Prove o item (iv) da Proposição 1.3.5.

19. Prove a seguinte afirmação do texto:

"Sejam P e Q variedades holomorfas, P conexa, e $f\colon P \to Q$ uma aplicação analítica real. Suponhamos que existe um aberto não vazio $U \subset P$ tal que $f\mid_U$ seja holomorfa. Então f é holomorfa."

20. Seja X^* um campo de vetores holomorfo sobre um toro complexo $T = \mathbb{C}^n/\simeq$, satisfazendo á seguinte condição de invariância:

$$(*)\quad X^*(p + v_j) = X^*(p), \quad \forall j = 1, ..., 2n, \quad \forall p \in \mathbb{C}^n$$

Prove que existe um único campo holomorfo X em T tal que $X^* = \pi^*(X)$.

21. Complete a demonstração da Proposição 1.3.13.

22. Sejam X uma variedade complexa e $p \in X$ um ponto. Denotemos por $\mathrm{Hom}(X, p)$ o conjunto dos germes em $p \in X$ de homeomorfismos locais em p que deixam p fixo, e por $\mathrm{Diff}(X, p)$ o conjunto dos germes em p de biholomorfismos locais que deixam p fixo, o qual será denotado por $\mathrm{Diff}(X, p)$. Prove que $\mathrm{Hom}(X, p)$ é um grupo com a operação de composição. e que $\mathrm{Diff}(X, p)$ é um subgrupo de $\mathrm{Hom}(X, p)$.

23. Complete a demonstração do Lema 1.5.16 no caso $k \geq 2$.

24. Complete a demonstração da Proposição 1.5.15 no caso $k \geq 3$.

Sugestão. A prova pode ser reduzida ao caso $k = 2$ por meio de uma "mudança de variáveis" ramificada da forma $w = y^k$.

25. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação logarítmica numa variedade simplesmente conexa M. Prove se L é uma folha qualquer de $\mathcal{F}$ então o grupo de holonomia de L, $\mathrm{Hol}(L)$ é conjugado a um subgrupo do grupo gerado pelo seguinte conjunto de transformações lineares

$$\{z \to \lambda.z\ ;\ \lambda = e^{2\pi i \frac{\lambda_m}{\lambda_j}}\ \ 1 \leq m \leq r\}.$$

26. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um num aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, tal que $\mathrm{cod}(\mathrm{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$. Prove que $\mathcal{F}$ pode ser representada em U por uma 1-forma holomorfa integrável, se uma das condições abaixo for verificada:

(a) O segundo problema de Cousin tem solução em U.

(b) Toda função meromorfa f em U pode ser escrita como o quociente de duas funções holomorfas g e h, $f = \frac{g}{h}$, onde $\text{cod}(\{g = 0\} \cap \{h = 0\}) \geq 2$.

(c) $U = P \times (Q \setminus \{0\})$, onde P é um polidisco em $\mathbb{C}^k$ e Q é um polidisco em $\mathbb{C}^m$, sendo $m \geq 2$ e $k + m = n$.

Capítulo 2

Folheações de dimensão um em espaços projetivos complexos

Neste capítulo estudaremos folheações em espaços projetivos complexos. Por conta de sua natureza algébrica e outras propriedades geométrico-analíticas, estes espaços constituem um ambiente importante e mesmo natural para o estudo destes objetos. Seu estudo é rico o bastante para absorver parte importante dos esforços por parte dos pesquisadores na área.

2.1 O espaço projetivo complexo

O objetivo desta seção é recordar a definição dos espaços projetivos complexos e alguns resultados que utilizaremos mais adiante. Aproveitaremos para estabelecer algumas notações.

Consideremos a relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$ definida por

$$p \sim q \Leftrightarrow p = \lambda.q \text{ onde } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

O *espaço projetivo complexo de dimensão n* é, por definição, o espaço quociente de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$ por $\sim$. Utilizaremos a notação $\mathbb{C}P(n)$ para designá-lo. A classe de equivalência de um ponto $p \in \mathbb{C}^n \backslash 0$ será denotada por $[p]$.

Note que $\mathbb{C}P(n)$ é obtido de $\mathbb{C}^{n+1} \backslash 0$ por identificação de pontos p e q sobre a mesma reta complexa: $p = (z_0, ..., z_n) \sim q = (w_0, ..., w_n)$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $z_j = \lambda w_j, \forall j = 1, ..., n+1$. Denotamos por $\pi \colon \mathbb{C}^{n+1} \backslash 0 \to \mathbb{C}P(n)$ a projeção canônica deste quociente. Desta forma $\mathbb{C}P(n)$ é interpretado geometricamente como o espaço de retas pela origem de $\mathbb{C}^{n+1}$.

A estrutura de variedade complexa em $\mathbb{C}P(n)$ é dada pelo *atlas de coordenadas afins*, o qual é definido da seguinte maneira:

Em $\mathbb{C}P(n)$ consideramos os abertos $E_j = \{[z_0, ..., z_n] \in \mathbb{C}P(n) \ ; \ z_j \neq 0\}$. Note que

$\mathbb{C}P(n) = \cup_{j=0}^{n} E_j$. Além disto, se $[p] = [z_0, ..., z_j, ..., z_n] \in E_j$, então $z_j \neq 0$, de forma que $[p] = [z_0/z_j, ..., z_{j-1}/z_j, 1, ..., z_n/z_j]$, ou seja $[p]$ tem um único representante da forma $[w_0, ..., w_{j-1}, 1, ..., w_n]$. Isto nos garante que a aplicação $\varphi_j \colon E_j \to \mathbb{C}^n$, definida por

$$\varphi_j([z_0, ..., z_n]) = (z_0/z_j, ..., z_{j-1}/z_j, z_{j+1}/z_j, ..., z_n/z_j)$$

é uma bijeção. Por outro lado, se $j \neq k$, não é difícil ver que $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}$ é um biholomorfismo de $\varphi_k(E_j \cap E_k)$ sobre $\varphi_j(E_j \cap E_k)$. Assim, por exemplo,

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z_1, ..., z_n) = (1/z_1, z_2/z_1, ..., z_n/z_1).$$

Isto mostra que $\{(\varphi_j, E_j) \ ; \ j = 0, ..., n\}$ é um atlas holomorfo de $\mathbb{C}P(n)$. Não é difícil provar que $\mathbb{C}P(n)$, com esta estrutura, é uma variedade complexa compacta, conexa de dimensão complexa n.

Note que o aberto E_j, definido acima, é biholomorfo a $\mathbb{C}^n$ pela carta φ_j, sendo que, $\mathbb{C}P(n)\backslash E_j$ é biholomorfo a $\mathbb{C}P(n-1)$. De fato, podemos identificar o hiperplano $H_j = \{(z_0, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \ ; \ z_j = 0\}$ de maneira natural com $\mathbb{C}^n$, logo o quociente de $H_j \setminus 0$ por $\sim$ é difeomorfo a $\mathbb{C}P(n-1)$. Por outro lado, $\pi(H_j) = \mathbb{C}P(n) \setminus E_j$, o que prova a afirmação.

De um modo geral, se $1 \leq k < n$, podem ser obtidos mergulhos de $\mathbb{C}P(k)$ em $\mathbb{C}P(n)$, da seguinte maneira: fixemos um conjunto $\{v_0, ..., v_k\}$ de $k+1$ vetores linearmente independentes em $\mathbb{C}^{n+1}$, o qual gera um subespaço $V =< v_0, ...v_k >$ de dimensão $k+1$. Observe que a aplicação $\phi_V \colon \mathbb{C}P(k) \to \mathbb{C}P(n)$, definida por

$$\phi_V([z_0, ..., z_k]) = \pi(\sum_{j=0}^{k} z_j \, v_j)$$

está bem definida e é injetora. A sua imagem, $[V] = \phi_V(\mathbb{C}P(k))$ é o quociente de $V \setminus 0$ por $\sim$. A aplicação ϕ_V é, de fato, um mergulho holomorfo.

Uma subvariedade como acima será chamada de um *k-plano* de $\mathbb{C}P(n)$.

No caso em que V tem dimensão n, $[V]$ é um (n-1)-plano, ou *hiperplano*, mergulhado e o aberto $U = \mathbb{C}P(n) \setminus [V]$ é biholomorfo a $\mathbb{C}^n$. Chamamos $[V]$ de *hiperplano do infinito de* U. Por outro lado, se V tem dimensão dois, diremos que $[V]$ é uma *reta projetiva*, ou simplesmente uma *reta*.

Um resultado importante é o seguinte:

Proposição 2.1.1. $\mathbb{C}P(n)$ *é uma variedade compacta e simplesmente conexa.*

A prova é deixada como exercício (Exercício 3).

Recordamos que dada uma variedade complexa M um *automorfismo* de M é um biholomorfismo $\phi \colon M \to M$, ou seja, uma bijeção holomorfa $M \to M$ com inversa holomorfa. Os automorfismos formam um grupo com a operação de composição, denotaremos este grupo por $\mathrm{Aut}(M)$. Dizemos que $\mathrm{Aut}(M)$ é *transitivo*, se dados $p, q \in M$ existe $f \in \mathrm{Aut}(M)$ tal que $f(p) = q$.

Dizemos que um subconjunto de $n+2$ pontos em $\mathbb{C}P(n)$, digamos $\{[p_1], ..., [p_{n+2}]\}$, é genérico, se $\{p_1, ..., p_{n+1}\}$ é uma base de $\mathbb{C}^{n+1}$ e $p_{n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j\, p_j$, onde $a_1 ... a_{n+1} \neq 0$.

Proposição 2.1.2. *O grupo de automorfismos* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}P(n))$ *do espaço projetivo complexo de dimensão n se identifica naturalmente com* $\mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{C})$*, o projetivizado do grupo das transformações lineares invertíveis de* $\mathbb{C}^{n+1}$*. Em particular,* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}P(n))$ *goza das seguintes propriedades:*

(a) *Dados dois conjuntos genéricos em* $\mathbb{C}P(n)$*,* $\{[p_1], ..., [p_{n+2}]\}$ *e* $\{[q_1], ..., [q_{n+2}]\}$ *existe uma única* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}P(n))$ *tal que* $f([p_j]) = [q_j]$ *para todo* $j = 1, ..., n+2$*. Em particular* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}P(n))$ *é transitivo.*

(b) *Sejam* $[V] \subset \mathbb{C}P(n)$ *um hiperplano e* $\mathbb{C}^n \simeq E = \mathbb{C}P(n) \setminus [V]$*. O conjunto dos automorfismos* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}P(n))$ *tais que* $f([V]) = [V]$ *se identifica naturalmente com o grupo de transformações afins de* $\mathbb{C}^n$*, isto é, as da forma* $f = A + p$*, onde* $A \in GL(n, \mathbb{C})$ *e* $p \in \mathbb{C}^n$*.*

Demonstração. De fato, dada uma aplicação linear invertível T de $\mathbb{C}^{n+1}$, se r é uma reta em $\mathbb{C}^{n+1}$ que passa pela origem, então $T(r)$ também é. Isto induz uma aplicação $[T] \colon \mathbb{C}P(n) \to \mathbb{C}P(n)$, com inversa $[T^{-1}]$. Não é difícil provar que $[T]$ e $[T^{-1}]$ são holomorfas. Logo $[T] \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}P(n))$. Note que, $[T_1] = [T_2]$ se, e somente se, existe $c \neq 0$ tal que $T_2 = c.T_1$ (verifique).

Temos que provar agora que, se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}P(n))$, então existe $T \in GL(n+1, \mathbb{C})$ tal que $f = [T]$. Este fato decorrerá de um resultado que enunciaremos mais adiante. Deixamos a prova de (a) e (b) como exercício para o leitor (veja Exercício 1). □

Definição 2.1.3. Dizemos que um subconjunto $A \subset \mathbb{C}P(n)$ é *algébrico*, se existem polinômios homogêneos de $n+1$ variáveis, digamos $f_1, ..., f_m$, tais que $A = \{[p] \in \mathbb{C}P(n)\ ;\ f_1(p) = ... = f_m(p) = 0\}$. Um tal conjunto será denotado por $Z(f_1, ..., f_m)$.

Assim, por exemplo, os k-planos de $\mathbb{C}P(n)$ são subconjuntos algébricos.

Observação 2.1.4. Um subconjunto algébrico de $\mathbb{C}P(n)$ é analítico. Um dos resultados fundamentais da geometria algébrica é o Teorema de Chow, segundo o qual todo subconjunto analítico de $\mathbb{C}P(n)$ é algébrico (veja [45]).

Um caso particular interessante do Teorema de Chow é quando o subconjunto tem codimensão um. Neste caso, prova-se que o subconjunto pode ser definido por um único polinômio (não nulo) (veja [43]).

Definição 2.1.5. Seja Z um subconjunto algébrico de codimensão um de $\mathbb{C}P(n)$. O *grau* de Z é o inteiro

$$d(Z) = \min\{m > 0 \ ; \ Z = Z(f), \text{ onde } f \text{ é polinômio homogêneo de grau } m\}.$$

O grau de um polinômio f será denotado por $d(f)$.

Observemos que todo polinômio homogêneo não nulo f, pode ser decomposto num produto de polinômios homogêneos $f_1^{j_1}...f_r^{j_r}$ (com $j_s \geq 1, \forall s$), onde os polinômios $f_1, ..., f_r$ são indecomponíveis e relativamente primos dois a dois (isto é $Z(f_i) \neq Z(f_j)$ se $i \neq j$)(veja [34]). Uma tal decomposição é chamada de *decomposição de f em fatores primos.* Temos então

$$Z(f) = Z(f_1...f_r) = \cup_{j=1}^r Z(f_j) \text{ e } d(Z) = d(f_1...f_r) = \sum_{j=1}^r d(f_j).$$

Dizemos que um polinômio f é *reduzido*, se a sua decomposição em fatores primos não contém fatores com potências ≥ 2.

Suponhamos agora que Z é como acima e $R \subset \mathbb{C}P(n)$ é uma reta tal que $R \not\subset Z$. Veremos em seguida que $d(Z)$ é o número de pontos de intersecção de Z com R, contados com multiplicidade. A multiplicidade de intersecção de R com Z num ponto é definida da seguinte maneira:

Fixemos um ponto $p \in R \cap Z$. Pela Proposição 1.2.9, podemos supor que no sistema de de coordenadas afins $\mathbb{C}^n \simeq E_0 = \{[1,p] \ ; \ p \in \mathbb{C}^n\}$ temos $p = 0$ e $R \cap E_0 = \{(z, 0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n \ ; \ z \in \mathbb{C}\}$. Por outro lado, $Z = Z(f)$, onde f é reduzido (ou seja, $d(f) = d(Z)$). Logo, neste sistema de coordenadas, obtemos $Z \cap E_0 = \{p \in \mathbb{C}^n \ ; \ f(1,p) = 0\}$. Sendo assim, $Z \cap R \cap E_0 = \{(z, 0, ..., 0) \ ; \ f(1, z, 0, ..., 0) = 0\}$. Seja $g(z) = f(1, z, 0, ..., 0)$. Como $0 \in R \cap Z$ e $R \not\subset Z$, é claro que $g(0) = 0$ e $g \not\equiv 0$. Portanto, podemos escrever $g(z) = z^j\, u(z)$, onde $u(0) \neq 0$. A *multiplicidade de intersecção* de Z com R em p é, por definição, $[Z, R]_p = j$.

Observe que g é um polinômio de grau $\leq d(f)$. No caso em que $Z \cap R \subset E_0$, g terá grau $d(f)$, a multiplicidade de intersecção de Z com R num ponto $(z_o, 0, ..., 0)$ tal que $g(z_o) = 0$ será a multiplicidade de z_o como raiz de g. Neste caso, g possui $d(f)$ raízes, contadas com multiplicidade. Isto justifica, de certa forma, a definição.

Consideremos agora uma curva $S \subset \mathbb{C}P(n)$ e uma hipersuperfície $Z \subset \mathbb{C}P(n)$. Dado $p \in S \cap Z$, define-se a *multiplicidade de intersecção* de S com Z em p, da seguinte maneira:

Podemos supor que $p = 0 \in \mathbb{C}^n$ e que $Z \cap \mathbb{C}^n$ tem uma equação reduzida $f = 0$ em vizinhança de 0. Sejam $S_1, ..., S_m$ os ramos de S em 0. Vamos supor que $S_j \not\subset Z$ para todo $j = 1, ..., m$. Para cada $j = 1, ...m$, fixemos uma parametrização de Puiseux $\phi_j \colon \mathbb{D} \to S_j$, onde $0 \in \mathbb{D}$ e $\phi_j(0) = 0$, e $r > 0$ tal que $\overline{D(0,r)} \subset \mathbb{D}$. Seja $\gamma_j(\theta) = \phi_j(e^{i\theta})\, \theta \in [0, 2\pi]$. Definimos a multiplicidade de intersecção de S_j com Z como sendo o inteiro positivo:

$$[S_j, Z]_p = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{df}{f} = Res(\phi_j^*(\frac{df}{f}), 0).$$

Note que $[S_j, Z]_p$ é a ordem em $0 \in \mathbb{D}$ da função $f \circ \phi_j(z)$. Com isto vemos que esta definição coincide com a dada anteriormente, no caso em que S é uma reta.

A multiplicidade de intersecção de S com Z em p é definida por

$$[S, Z]_p = \sum_{j=1}^{m} [S_j, Z]_p \ .$$

Observe que $[S, Z]_p = 1$ se, e somente se, p é ponto regular de S e de Z e S corta Z transversalmente em p (veja Exercício 2).

Se nenhuma componente irredutível de S está contida em Z, definimos o *número de intersecção* de S com Z, por

$$[S, Z] = \sum_{p \in S \cap Z} [S, Z]_p \ .$$

O *grau* de S é definido por $d(S) = [S, Z]$, onde Z é um hiperplano que não contém nenhuma componente irredutível de S.

Proposição 2.1.6. *Sejam S uma curva e Z uma hipersuperfície de $\mathbb{C}P(n)$. Suponha que nenhuma componente irredutível de S esteja contida em Z. Então $[S, Z] = d(S).d(Z)$. Em particular, $[S, Z] = 1$ se, e somente se, S é uma reta, Z é um hiperplano e $S \not\subset Z$.*

Demonstração. Fixemos um hiperplano H tal que:(i) H não contém nenhuma componente irredutível de S, (ii) $H \not\subset Z$ e (iii) $Z \cap S \cap H = \phi$. Suponhamos que $Z = Z(f)$, onde f é um polinômio homogêneo reduzido, de forma que $d(f) = d(Z)$. Seja $\mathbb{C}^n \simeq E = \mathbb{C}P(n) \setminus H$. Podemos supor que $E = E_0 = \{[1, q] \in \mathbb{C}P(n) \ ; \ q \in \mathbb{C}^n\}$. Sendo assim, a equação de Z em E_0 é $g(q) = f(1, q) = 0$. Observe que $S \cap Z \subset E_0$.

Seja $\phi \colon \tilde{S} \to S$ uma normalização de S (veja a Seção 6 do cap. I). Em $\tilde{S}$ consideremos a 1-forma meromorfa $\omega = \phi^*(\frac{df}{f})$. Não é difícil ver que os pólos de ω são os pontos $q \in \tilde{S}$ tais que $\phi(q) \in Z \cup H$. Desta maneira, a cada pólo de ω corresponde um ramo de S por $\phi(q) \in S$, que denotaremos por S_q. Por outro lado, temos: (a). Se $\phi(q) \in Z$, então $[S_q, Z] = Res(\omega, q)$. (b). Se $\phi(q) \in H$, então $Res(\omega, q) = -d(f).[S_q, H]$.

Deixamos a prova de (a) e (b) como exercício para o leitor (veja Exercício 3). Decorre daí e do Teorema dos resíduos em superfícies de Riemann que

$$[S, Z] - d(f).[S, H] = \sum_{\phi(q) \in Z} [S_q, Z] - d(f). \sum_{\phi(q) \in H} [S_q, H] = \sum_{q} Res(\omega, q) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad [S, Z] = d(f).[S, H] = d(Z).d(S).$$

□

Como conseqüência, temos o seguinte:

Corolário 2.1.7. *Se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}P(n))$, então existe $T \in GL(n+1,\mathbb{C})$ tal que $f = [T]$.*

Demonstração. Vamos provar que, a imagem de retas e hiperplanos em $\mathbb{C}P(n)$ por f são retas e hiperplanos, respectivamente. Isto é suficiente para provar o resultado (veja o Exercício 4).

Sejam R uma reta e H um hiperplano em $\mathbb{C}P(n)$ tais que $R \not\subset H$. Neste caso, temos $[R, H] = 1$. Além disto, R corta H transversalmente num único ponto. Decorre daí que $f(R)$ corta $f(H)$ transversalmente num único ponto. Por outro lado, pelo Teorema de Chow, $f(R)$ e $f(H)$ são subconjuntos algébricos de $\mathbb{C}P(n)$. Logo, $d(f(R)).d(f(H)) = [f(R), f(H)] = 1$. Concluímos daí que $d(f(R)) = d(f(H)) = 1$, ou seja, $f(R)$ é uma reta e $f(H)$ é um hiperplano, como queríamos. □

Veremos em seguida, uma maneira de definir aplicações entre espaços projetivos.

Exemplo 2.1.8. Seja $f = (p_0, ..., p_n)\colon \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$, onde $p_0, ..., p_n$ são polinômios homogêneos de mesmo grau $m \geq 1$ em $k+1$ variáveis, não todos nulos. Seja $Z = Z(p_0, ..., p_n) \subset \mathbb{C}P(k)$. Como $f(z.p) = z^m.f(p)$, a aplicação f induz uma função $[f]\colon \mathbb{C}P(k) \backslash Z \to \mathbb{C}P(n)$. Como o leitor pode constatar, ao exprimirmos $[f]$ em cartas afins de $\mathbb{C}P(k)$ e $\mathbb{C}P(n)$, $[f]$ se expressa como uma aplicação da forma $(g_1, ..., g_n)$, onde as g_j são quocientes de polinômios em k variáveis. Por esta razão, uma função como acima é chamada de *função racional*. O conjunto Z é chamado de conjunto *singular* de $[f]$. No caso em que $n = 1$ a função é também chamada de *função meromorfa*.

Observemos que quando $n < k$, o conjunto singular de $[f]$ nunca é vazio. Este fato decorre do seguinte resultado:

Teorema 2.1.9 (Lema da escolha [65])**.** *Sejam $g_1, ...g_m$ funções holomorfas definidas numa bola de raio r com centro em $0 \in \mathbb{C}^n$ tais que $g_j(0) = 0$ para todo $j = 1, ..., m$. Se $m < n$, então o conjunto analítico $V = (g_1 = ... = g_m = 0)$, contém uma curva holomorfa que corta todas as esferas de raio $s < r$.*

Corolário 2.1.10. *Seja $Z = Z(p_0, ..., p_n)$ um subconjunto algébrico de $\mathbb{C}P(k)$ definido por $n+1 < k+1$ polinômios homogêneos. Então $Z \neq \phi$. Em particular, se $[f]$ é uma função racional de $\mathbb{C}P(k)$ em $\mathbb{C}P(n)$, onde $n < k$, então o seu conjunto singular é não vazio.*

Quando o conjunto singular de $[f]$ é vazio, $[f]$ é uma função holomorfa de $\mathbb{C}P(k)$ em $\mathbb{C}P(n)$. De fato, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.11 ([43])**.** *Se $F\colon \mathbb{C}P(k) \to \mathbb{C}P(n)$ é uma função holomorfa não constante, então $k \leq n$ e existem polinômios homogêneos em $\mathbb{C}^{k+1}$, de mesmo grau, $p_0, ..., p_n$, tais que $F = [(p_0, ..., p_n)]$.*

Um exemplo interessante é o seguinte:

Exemplo 2.1.12 (Mergulhos de Veronese)**.** Dados k e d, consideremos todos os monômios de grau d em $k+1$ variáveis. Um tal monômio é da forma $x^\alpha = x_0^{\alpha_0}...x_k^{\alpha_k}$, onde $\mid \alpha \mid = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j = d$. Estes monômios são em número de $N(k,d) = \sharp\{\alpha = (\alpha_0,...,\alpha_k)\ ;\ \alpha_0 + ... + \alpha_k = d\} = C_d^{k+d}$. Enumerando-os, obtemos uma aplicação $V_k^d\colon \mathbb{C}P(k) \to \mathbb{C}P(n)$, onde $n = N(k,d) - 1$, da forma $V_k^d = [x^{\alpha^0},...,x^{\alpha^n}]$. É possível provar que V_k^d é de fato um mergulho de $\mathbb{C}P(k)$ em $\mathbb{C}P(n)$ (veja Exercício 5).

Uma das vantagens da aplicação de Veronese V_k^d é que ela leva subconjuntos algébricos de codimensão um e grau d em $\mathbb{C}P(k)$ em subconjuntos algébricos de $\mathbb{C}P(n)$ que estão contidos em hiperplanos.

Consideremos agora uma aplicação holomorfa não constante $F\colon \mathbb{C}P(n) \to \mathbb{C}P(n)$. Pelo Teorema 2.1.11, sabemos que $F = [p_0,...,p_n]$, onde $p_0,...,p_n$ são polinômios homogêneos de mesmo grau, digamos d, e $Z(p_0,...,p_n) = \phi$. Seja Ω a (n+1)-forma definida $\Omega = dp_0 \wedge ... \wedge dp_n = P.dx_0 \wedge ... \wedge dx_n$. O conjunto $Z(P) \subset \mathbb{C}P(n)$ é o conjunto dos *pontos singulares* de F, isto é, o conjunto dos pontos $[p] \in \mathbb{C}P(n)$ tais que $DF_{[p]}\colon T_{[p]}\mathbb{C}P(n) \to T_{F[p]}\mathbb{C}P(n)$ não é isomorfismo. O conjunto $F(Z(P))$ é chamado de conjuntos dos *valores críticos* de F e os pontos de $\mathbb{C}P(n) \setminus F(Z(P))$ são chamados de *valores regulares* de F.

Temos a seguinte:

Proposição 2.1.13. *Se q é um valor regular de F, então $F^{-1}(q)$ contém exatamente d^n pontos.*

Na verdade, o resultado acima é conseqüência do seguinte:

Teorema 2.1.14 (Teorema de Bézout [34])**.** *Sejam $f_1,...,f_n$ polinômios homogêneos de graus $d_1,...,d_n$ respectivamente em $\mathbb{C}^{n+1}$. Suponha que $Z(f_1,...,f_n)$ não possua componentes irredutíveis de dimensão ≥ 1. Então $Z(f_1,...,f_n)$ contém $d_1...d_n$ pontos contados com multiplicidade.*

A *multiplicidade* de um ponto em $Z = Z(f_1,...,f_n)$ é definida da seguinte maneira:

Seja $p \in Z$ e fixemos um sistema de coordenadas afim $\mathbb{C}^n \simeq E \subset \mathbb{C}P(n)$ com $p \in \mathbb{C}^n$. Podemos supor que $E = E_0$, de forma que vamos considerar os polinômios $g_j(x) = f_j(1,x),\ j = 1,...,n$. Note que $g_j(p) = 0$ para todo $j = 1,...,n$. Além disto, a hipótese de que Z não possui componentes de dimensão ≥ 1 implica que existe uma bola de raio r, $B = B(p,r)$, tal que p é a única solução de $g_1(x) = ... = g_n(x) = 0$ com $x \in B$. Vamos então considerar a situação mais geral em que $g = (g_1,...,g_n)\colon U \to \mathbb{C}^n$, é uma função holomorfa num aberto U de $\mathbb{C}^n$, tal que p é a única solução de $g(x) = 0$ na bola $B = B(p,r) \subset U$. Consideremos a aplicação $G = \frac{g}{|g|}\colon B \setminus \{p\} \to S_1$, onde S_1 denota a esfera de raio 1 em $\mathbb{C}^n$.

Definição 2.1.15. A multiplicidade de g em p é, por definição, o grau topológico da aplicação $G\mid_{S_\rho(p)}: S_\rho(p) \to S_1$, onde $0 < \rho < r$ e $S_\rho(p)$ denota a esfera de raio ρ e centro p (veja [65]). Usaremos a notação $m(g,p)$ para esta multiplicidade.

Lema 2.1.16. *A multiplicidade $m(g,p)$, goza das seguintes propriedades:*

(a). *Independe de $\rho < r$.*

(b). *Seja $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ uma matriz, cujas entradas a_{ij}, são funções holomorfas em $B(p,s), 0 < s \leq r$, e tal que $detA(p) \neq 0$. Defina $h: B(p,s) \to \mathbb{C}^n$ por $h = A.g$, isto é, $h_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}.g_j$. Então $m(h,p) = m(g,p)$.*

(c). *Sejam $f: V \to \mathbb{C}^n$ e $h: W \to U$ aplicações holomorfas, onde W e V são abertos de $\mathbb{C}^n$, $h(q) = p$ para algum $q \in W$, $0 \in V$, $f(0) = 0$ e $g \circ h(W) \subset V$. Suponha que $Dh(q)$ e $Df(0)$ são isomorfismos de $\mathbb{C}^n$. Então $m(f \circ g \circ h, q) = m(g,p)$.*

(d). *$Dg(p)$ é isomorfismo se, e somente se, $m(g,p) = 1$.*

Em particular a multiplicidade é invariante por mudanças de coordenadas holomorfas.

Prova. O grau topológico goza das seguintes propriedades (veja [46]):

(i). É invariante por homotopia: sejam M e N variedades reais compactas, sem bordo e orientáveis de mesma dimensão. Se $f, g: M \to N$ são aplicações contínuas e homotópicas, então elas têm o mesmo grau.

(ii). É invariante por cobordismo: seja V uma variedade compacta, orientável, com bordo $\partial V = M_1 \cup M_2$ (note que M_1 e M_2 são compactas, orientáveis e sem bordo). Seja $f: V \to N$ uma aplicação contínua, onde N é uma variedade compacta, conexa, sem bordo e orientável tal que $dim(N) = \dim(M_1) = \dim(M_2) = \dim(V) - 1$. Se em M_1 e M_2 consideramos as orientações induzidas pela orientação de V, então os graus de $f_1 = f\mid_{M_1}$ e $f_2 = f\mid_{M_2}$ são iguais.

A propriedade (ii) implica que a definição de multiplicidade independe do raio ρ da esfera considerada. Provemos (b) e (c). A propriedade (i) implica a seguinte:

(iii). Seja $H: [0,1] \times B(p,r) \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação contínua tal que:

(*) $H_t(x) = H(t,x) \neq 0$, para todo $(t,x) \in [0,1] \times S_\rho$, para algum $0 < \rho < r$.

Então os graus de $\frac{H_0}{|H_0|}\mid_{S\rho}$ e de $\frac{H_1}{|H_1|}\mid_{S\rho}$ coincidem.

Como o conjunto de aplicações lineares invertíveis de $\mathbb{C}^n$, $GL(n,\mathbb{C})$, é conexo, a partir de (iii) obtemos:

(iv). Se $B, C \in GL(n,\mathbb{C})$ então $m(h,p) = m(g,p)$, onde $h(x) = B(g(p + C(x-p)))$.

De fato, sejam B_t e C_t, $t \in [0,1]$, caminhos em $GL(n,\mathbb{C})$ tais que $B_0 = B$, $B_1 = Id$, $C_0 = C$ e $C_1 = Id$. Seja $H_t(x) = B_t(g(p + C_t(x-p)))$. Então H satisfaz (*), sendo $H_0 = h$ e $H_1 = g$. Isto prova (iv).

Para provar (b) consideramos a homotopia $H_t(x) = A(tx).g(x), t \in [0,1]$, a qual satisfaz (*)

se $0 < \rho < r$ é suficientemente pequeno. Como $H_0 = A(0).g$ e $H_1 = h$, obtemos de (iii) e (iv) que $m(g,p) = m(A(0).g,p) = m(h,p)$.

Para provar (c), vamos supor, sem perda de generalidade, que $p = q = 0$. Consideremos a homotopia H definida por $H(t,x) = \frac{1}{t}.f(t.g(\frac{1}{t}.h(t.x)))$ se $t \neq 0$ e $H(0,x) = B(g(C(x)))$, onde $B = Df(0)$ e $C = Dh(0)$. Não é difícil ver que H é contínua e satisfaz (*) se $0 < \rho$ é suficientemente pequeno. Portanto $m(g,0) = m(B.g.C,0) = m(H_1,0) = m(f \circ g \circ h, 0)$.

Deixamos a prova de (d) como exercício para o leitor. $\square$

Como a multiplicidade é invariante por mudança de coordenadas, a seguinte definição é natural:

Definição 2.1.17. Seja $f\colon M \to N$ uma aplicação holomorfa, onde M e N são variedades complexas de mesma dimensão n. Sejam $p \in M$ e $q \in N$ tais que $f(p) = q$. Suponhamos que p é uma solução isolada da equação $f(x) = q$, isto é que existe uma vizinhança W de p tal que a única solução de $f(x) = q$ com $x \in W$ é p. Consideremos sistemas de coordenadas holomorfos (α, U) e (β, V) em $p \in M$ e $q \in N$ respectivamente, tais que $f(U) \subset V$, $\alpha(p) = \beta(q) = 0 \in \mathbb{C}^n$. A multiplicidade de f em p, q é, por definição, $m(f,p,q) = m(\beta \circ f \circ \alpha^{-1}, 0)$.

No resultado abaixo veremos algumas propriedades interessantes da multiplicidade.

Proposição 2.1.18. *Seja $f\colon B(p,r) \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação holomorfa, onde $B(p,r)$ é a bola de raio r e centro p em $\mathbb{C}^n$. Suponha que $f(p) = q$ e que p é a única solução de $f(x) = q$ em $B(p,r)$.*

(a) *Dado $0 < \rho < r$ existe $\epsilon > 0$ tal que se $g\colon B(p,r) \to \mathbb{C}^n$ é holomorfa e satisfaz $\| f - g \|_{\overline{B(p,\rho)}} < \epsilon$, então $g^{-1}(q) \cap \overline{B(p,\rho)} = X$ é finito e*

$$m(f,p,q) = \sum_{x \in X} m(g,x,q).$$

(b) *Dado $0 < \rho < r$ existe $\delta > 0$ tal que se $| q - q' | < \delta$, então $f^{-1}(q') \cap \overline{B(p,\rho)} = X$ é finito e*

$$m(f,p,q) = \sum_{x \in X} m(f,x,q').$$

A proposição pode ser provada utilizando-se as propriedades (ii) e (iii) da prova do Lema 2.1.16 (veja os exercícios deste capítulo).

2.2 Folheações em espaços projetivos complexos

Seja $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ um campo de vetores polinomial em $\mathbb{C}^n$ com coordenadas afins fixadas $(x_1, ..., x_n)$. Vamos supor que os coeficientes X_j não têm fator comum não constante. Isto significa que o conjunto singular de $X, \operatorname{sing}(X)$, é um subconjunto algébrico de codimensão maior ou igual a 2 em $\mathbb{C}^n$. O campo X gera então uma folheação por curvas $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}^n$. Suponhamos que $\mathbb{C}^n = E_0 \subset \mathbb{C}P(n)$. Vamos provar que existe uma folheação $\overline{\mathcal{F}}$ em $\mathbb{C}P(n)$ tal que $\overline{\mathcal{F}} \mid_{E_0} = \mathcal{F}$.

Proposição 2.2.1. *Existe uma folheação por curvas, com singularidades, em $\mathbb{C}P(n)$, que coincide com a folheação induzida por X no espaço afim $\mathbb{C}^n$.*

Demonstração. Consideremos a mudança de coordenadas ϕ^1 entre E_0 e E_1. Ela é da forma $\phi^1(x) = \phi_1(x_1, ..., x_n) = (1/x_1, x_2/x_1, ..., x_n/x_1) = (y_1, ..., y_n) = y$. Efetuando a mudança de coordenadas no campo X, obtemos $\phi^1_\star(X) = Y^1 = \sum_{j=1}^n Y_j \partial/\partial y_j$, onde

$$(1)\quad Y_1(y_1, ..., y_n) = -y_1^2.X_1(1/y_1, y_2/y_1, ..., y_n/y_1)$$

e

$$(j)\quad Y_j(y_1, ..., y_n) = y_1[X_j(1/y_1, y_2/y_1, ..., y_n/y_1) - y_j\, X_1(1/y_1, y_2/y_1, ..., y_n/y_1)].$$

Como X é polinomial, as expressões acima implicam que Y^1 é um campo meromorfo com pólos no hiperplano $(y_1 = 0)$. Podemos então escrever $Y^1(y) = y_1^{-k}.X^1(y)$, onde X^1 é um campo polinomial e k é a ordem do pólo. Observe que $(y_1 = 0)$ é a equação do hiperplano do infinito, digamos H, de E_0 na carta E_1.

De forma análoga, ao efetuarmos a mudança de variáveis ϕ_j entre E_0 e E_j, obteremos um campo $Y^j = \phi^j_\star(X) = z^{-k}.X^j$, onde X^j é polinomial e $(z = 0)$ é a equação de H na carta E_j (nota: a ordem do pólo, k, é a mesma em todos as cartas E_j). Podemos então definir uma folheação $\overline{\mathcal{F}}$ em $\mathbb{C}P(n)$ tal que $\overline{\mathcal{F}} \mid_{E_j}$ é definida por X_j. □

A folheação $\overline{\mathcal{F}}$ obtida acima é chamada de *compactificação de $\mathcal{F}$*. Ela será denotada por $\mathcal{F}(X)$.

Veremos em seguida que a situação acima descrita é geral.

Teorema 2.2.2. *Toda folheação holomorfa por curvas em $\mathbb{C}P(n)$ é o compactificado de uma folheação definida por um campo polinomial em $E_0 \simeq \mathbb{C}^n$.*

Demonstração. Vamos supor que $S = \operatorname{sing}(\mathcal{F})$ tem codimensão ≥ 2. Seja $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P(n)$ a projeção da relação de equivalência que define $\mathbb{C}P(n)$. Como π é submersão, podemos definir uma folheação não singular de dimensão dois, $\mathcal{F}^* = \pi^*(\mathcal{F} \mid_{\mathbb{C}P(n)\setminus S})$ em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus S^*$, onde $S^* = \{0\} \cup \pi^{-1}(S)$ é um subconjunto algébrico de codimensão ≥ 2 de $\mathbb{C}^{n+1}$. Note que $\mathcal{F}^*$ tem dimensão dois porque a sua codimensão em $\mathbb{C}^{n+1}$ é a mesma que a de $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(n)$. Além disto, se L é uma folha de $\mathcal{F}^*$ e $p \in L$, então a reta $[0,p]$, que passa por p e 0, está contida em L, já que $\pi^{-1}([p]) = [0,p]$. Em particular, as folhas de $\mathcal{F}^*$ são cones com vértice na origem $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. Denotando por R o campo radial, $R(x) = x$, vemos que as trajetórias de R estão contidas nas folhas de $\mathcal{F}^*$.

Veremos em seguida, como podemos estender $\mathcal{F}^*$ a uma folheação singular em $\mathbb{C}^{n+1}$. Para isto, provaremos primeiramente que $\mathcal{F}^*$ pode ser definida localmente por uma
(n-1)-forma holomorfa. Dado $p \in V = \mathbb{C}^{n+1} \setminus S^*$, existem uma vizinhança $U^p \subset V$ e campos holomorfos X^p e $Y^p = R$ em U^p tais que para todo $q \in U^p$ o subespaço $T_q(\mathcal{F}^*)$ é gerado pelos vetores $X^p(q)$ e $R(q)$. Em particular X^p e R são linearmente independentes em todos os pontos de U^p. Defina uma (n-1)-forma ω^p em U^p por $\omega^p = i_{X^p}(i_R(dx_0 \wedge ... \wedge dx_n))$, onde i denota o produto interior.

Afirmação 2.2.3. *Valem as seguintes propriedades:* (i). *Dados $q \in U^p$ e $v \in \mathbb{C}^{n+1}$, então $v \in T_q(\mathcal{F}^*)$ se, e somente se, $i_v(\omega^p(q)) = 0$. Usaremos a notação $\{v;\ i_v(\omega^p(q)) = 0\} = \ker(\omega^p(q))$.* (ii). *Dados p e q tais que $U^p \cap U^q \neq \phi$, então existe uma função $g_{pq} \in \mathcal{O}^*(U^p \cap U^q)$ tal que $\omega^p = g_{pq}.\omega^q$ em $U^p \cap U^q$.*

Deixamos a prova da afirmação como exercício para o leitor (Exercício 8). A idéia agora é obter uma $(n-1)$-forma holomorfa Ω em $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que para todo $p \in V$ tenhamos $ker(\Omega(p)) = \ker(\omega_p(p)) = T_p(\mathcal{F}^*)$. O argumento é semelhante ao da Proposição 1.3.6. Podemos escrever

$$\omega^p = \sum_I a_I^p.dx_I$$

onde a soma acima percorre todos os multi-índices $I = (i_1 < ... < i_{n-1})$, sendo $dx_I = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{n-1}}$. Como S^* tem codimensão ≥ 2, o seu complementar V é conexo. Isto implica que existe um multi-índice I_o tal que $a_{I_o}^p \not\equiv 0$, para todo $p \in V$. Decorre de (ii), que se $U^p \cap U^q \neq \phi$ e I é um multi-índice, então

$$\frac{a_I^p}{a_{I_o}^p} = \frac{a_I^q}{a_{I_o}^q} \quad \text{em} \quad U^p \cap U^q$$

Podemos então, para cada multi-índice I, definir uma função meromorfa f_I em V por $f_I \mid_{U^p} = \frac{a_I^p}{a_{I_o}^p}$. Pelo Teorema de Levi a função f_I se estende a uma função meromorfa em $\mathbb{C}^{n+1}$, que denotaremos também por f_I. Considere a (n-1)-forma meromorfa em $\mathbb{C}^{n+1}$, $\omega = \sum_I f_I.dx_I$. Note que, se $p \in V$ não é pólo de ω, então $ker(\omega(p)) = \ker(\omega^p(p)) = T_p(\mathcal{F}^*)$.

Por argumento semelhante ao da Proposição 2.3.5, existe uma (n-1)-forma holomorfa em $\mathbb{C}^{n+1}$, digamos Ω, tal que $\Omega = f.\omega$ e o conjunto singular de Ω tem codimensão ≥ 2, sendo f uma função holomorfa que se anula apenas no conjunto de pólos de ω. Observe que se $p \in V$, então $ker(\Omega(p)) = T_p(\mathcal{F}^*)$. Além disto, $i_R(\Omega) = 0$.

Consideremos agora o desenvolvimento de Taylor de Ω em 0: $\Omega = \sum_{j=k}^{\infty} \Omega_j$, onde Ω_j é uma (n-1)-forma cujos coeficientes são polinômios homogêneos de grau j e $\Omega_k \not\equiv 0$.

Afirmação 2.2.4. *Para todo $p \in V$ temos $ker(\Omega_k(p)) = T_p(\mathcal{F}^*)$.*

De fato, sejam $p \in V$ e $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ tais que $v \in T_p(\mathcal{F}^*)$, ou seja, $i_v(\Omega(p)) = 0$. Como as folhas de $\mathcal{F}^*$ são cones com vértice em 0, vemos que para todo $t \neq 0$, $v \in T_{tp}(\mathcal{F}^*)$, ou seja $ker(\Omega(p)) = \ker(\Omega(tp))$. Logo:

$$0 = i_v(\Omega(tp)) = \sum_{j=k}^{\infty} i_v(\Omega_j(tp)) = t^k . \sum_{j=k}^{\infty} t^{j-k} . i_v(\Omega_j(p)) \quad \Rightarrow \quad i_v(\Omega_k(p)) = 0$$

Decorre daí que $ker(\Omega(p)) \subset \ker(\Omega_k(p))$. Seja $\{v_1, ..., v_{n+1}\}$ uma base de $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que $v_n, v_{n+1} \in T_p(\mathcal{F}^*)$. Observe que $\Omega(p)(v_1, ..., v_{n-1}) \neq 0$. Como $ker(\Omega(p)) \subset ker(\Omega_k(p))$, não é difícil ver que $\Omega_k(p) = g(p).\Omega(p)$, onde

$$g(p) = \frac{\Omega_k(p)(v_1, ..., v_{n-1})}{\Omega(p)(v_1, ..., v_{n-1})}.$$

Deduzimos que $\Omega_k = g.\Omega$ em V, onde g é holomorfa. Como o complementar de V tem codimensão ≥ 2, o Teorema de Hartogs implica que g se estende a uma função holomorfa em $\mathbb{C}^{n+1}$, a qual designamos também g. Seja $g = \sum_{j=0}^{\infty} g_j$ o desenvolvimento de Taylor de g em 0, onde g_j é homogênea de grau j. Vemos então que:

$$(*) \ \Omega_k = g.\Omega = (\sum_{j=0}^{\infty} g_j).(\sum_{j=k}^{\infty} \Omega_j) \quad \Rightarrow \quad g_0 = g(0) = 1.$$

Como o leitor pode verificar, (*) e a relação $ker(\Omega(p)) = \ker(\Omega(tp))$ se $t \neq 0$, implicam a afirmação.

Fixemos agora um plano $\tilde{E}_0 = \{(x_0, ..., x_n);\ x_0 = 1\}$, o qual identificamos com o sistema de coordenadas afim $E_0 \subset \mathbb{C}P(n)$. Com esta identificação, a restrição $\alpha_0 = \Omega_k \mid_{\tilde{E}_0}$ define $\mathcal{F} \mid_{E_0}$, isto é, $\mathcal{F} \mid_{E_0} \simeq \mathcal{F}^* \mid_{\tilde{E}_0}$ e se $p \in V \cap \tilde{E}_0$, então

$$v \in T_p(\tilde{E}_0) \cap T_p(\mathcal{F}^*) \quad \Leftrightarrow \quad v \in T_p(\tilde{E}_0) \text{ e } i_v(\alpha_0(p)) = 0.$$

Por outro lado, podemos escrever

$$\alpha_0 = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \, X_j(x_1, ..., x_n).dx_1 \wedge ... \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge ... \wedge dx_n$$

onde X_j é polinômio de grau $\leq k$ para todo $j = 1, ..., n$. Ora, se $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \, \partial/\partial x_j$, não é difícil ver que $i_X(\alpha) = 0$ e que $\text{sing}(X)$ tem codimensão ≥ 2. Logo, pela Proposição 1.3.3, X gera $\mathcal{F} \mid_{E_0}$. $\square$

2.3 Grau de uma folheação

Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação por curvas em $\mathbb{C}P(n)$ e $H \simeq \mathbb{C}P(n-1)$ um hiperplano linearmente mergulhado. Estudaremos as tangencias de $\mathcal{F}$ com H. Antecipamos que se H é "genérico", então, a não ser num caso especial, o conjunto de tangencias será um subconjunto algébrico de codimensão um de H. O grau deste conjunto independerá de H e será chamado o grau da folheação $\mathcal{F}$.

Definição 2.3.1. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação por curvas em $\mathbb{C}P(n)$, e $M \subset \mathbb{C}P(n)$ uma subvariedade algébrica. Dado $p \in M$, dizemos que $\mathcal{F}$ é *tangente* a M em p se $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$, ou se $p \notin \text{sing}(\mathcal{F})$ e $T_p\mathcal{F} \subset T_pM$. Dizemos que M é *invariante* por $\mathcal{F}$ se todo ponto $p \in M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$ é um ponto de tangência de $\mathcal{F}$ com M. O conjunto de tangencias de $\mathcal{F}$ com M será denotado por $T(\mathcal{F}, M)$.

Observemos agora que o conjunto de hiperplanos em $\mathbb{C}P(n)$ é naturalmente isomorfo a $\mathbb{C}P(n)$, já que um hiperplano H, pode ser definido em coordenadas homogêneas por $F(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \, x_j = 0$, onde algum $a_j \neq 0$. Levando-se isto em conta, temos o seguinte:

Proposição 2.3.2. *Dada uma folheação por curvas, $\mathcal{F}$, em $\mathbb{C}P(n)$, cujo conjunto singular tem codimensão ≥ 2, existe um subconjunto aberto, denso e conexo $NI(\mathcal{F})$, do conjunto de hiperplanos, $H \subset \mathbb{C}P(n)$, tal que para cada $H \in NI(\mathcal{F})$ tem-se:*

(i) *H não é invariante por $\mathcal{F}$.*

(ii) *$\mathcal{T}(\mathcal{F}, H)$ é um subconjunto algébrico de H definido por um polinômio de grau $k = k(\mathcal{F})$ em H, que independe de H.*

Definição 2.3.3. O inteiro $k(\mathcal{F})$ acima é chamado o *grau* da folheação $\mathcal{F}$.

Demonstração. Utilizaremos o seguinte resultado:

Lema 2.3.4 ([40])**.** *Seja $Z \subset M$ um subconjunto analítico próprio de uma variedade holomorfa conexa M. Então o complementar $M \setminus Z$ é aberto, denso e conexo.*

Fixemos uma carta afim $E \simeq \mathbb{C}^n$ de $\mathbb{C}P(n)$ e um campo de vetores polinomial $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \partial/\partial x_j$, com conjunto singular de codimensão ≥ 2, que represente $\mathcal{F}$ em E. Como existem hiperplanos não invariantes por $\mathcal{F}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que o hiperplano do infinito de E não é invariante por $\mathcal{F}$.

Consideremos um hiperplano $H \subset \mathbb{C}P(n)$, que não seja o hiperplano do infinito de E. No sistema afim E podemos representá-lo por uma equação linear $L(x) = 0$ onde $x = (x_1, ..., x_n) \in E$, e $L(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j + b$, $a_j, b \in \mathbb{C}$. Por simplicidade suporemos que $a_n \neq 0$. Neste caso, a equação de H pode ser reescrita como

$$x_n = c + \sum_{j=1}^{n} b_j x_j = B(x_1, ..., x_{n-1}), \quad \text{onde} \;\; b_j = -a_j/a_n,\, c = -b/a_n.$$

Da definição, obtemos que, $\mathcal{F}$ é tangente a H em $p \in H$ se, e somente se, $X_n(p) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} b_j X_j(p)$. Um ponto $p \in H$ pode ser escrito como $p = (y, B(y))$, onde $y = (x_1, ..., x_{n-1})$. Logo o conjunto de tangencias de $\mathcal{F}$ com $H \cap E$ é $T = \{(y, x_n);\; x_n = B(y) \text{ e } F(y, B) = 0\}$, onde:

$$(*)\; F(y, B) = X_n(y, B(y)) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j X_j(y, B(y)).$$

onde acima estamos considerando B definida pelos parâmetros $(b_1, ..., b_{n-1}, c)$. Desta forma F será um polinômio em $(y, B) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^n$. Podemos então escrever que:

$$(**) \quad F(y, B) = \sum_{|\sigma| \leq k} F_\sigma(B).y^\sigma$$

sendo σ o multi-índice $(\sigma_1, ..., \sigma_{n-1})$, $\mid \sigma \mid = \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j$ e $y^\sigma = x_1^{\sigma_1} ... x_{n-1}^{\sigma_{n-1}}$. Note que para todo σ, $F_\sigma(B)$ é um polinômio em $B = (b_1, ..., b_{n-1}, c)$. Além disto, existe σ_o tal que $F_{\sigma_o} \not\equiv 0$ (verifique). Por outro lado, H é invariante por $\mathcal{F}$ se, e somente se, $F(y, B) = 0$ para todo $y \in \mathbb{C}^{n-1}$, ou seja, se, e somente se $F_\sigma(B) = 0$ para todo σ. Isto mostra que o conjunto de hiperplanos invariantes por $\mathcal{F}$, digamos $I(\mathcal{F})$, é um subconjunto algébrico próprio do conjunto de todos os hiperplanos.

Sejam agora $k = \max\{\mid \sigma \mid;\; F_\sigma \not\equiv 0\}$ e $A = \{\sigma;\; \mid \sigma \mid = k\} = \{\sigma_1, ..., \sigma_s\}$. Se H é um hiperplano tal que o correspondente B satisfaz $F_{\sigma_j}(B) \neq 0$, para algum $\sigma_j \in A$, então, H não é invariante por $\mathcal{F}$ e o conjunto de tangencias de $\mathcal{F}$ com H é dado por $T(\mathcal{F}, H) = \{(y, B(y));\; F(y, B) = 0\}$. Observe que, neste caso, $F(y, B)$ é um polinômio de grau k em y. Definindo $NI(\mathcal{F})$ como sendo o complementar do conjunto algébrico $\{B;\; F_{\sigma_1}(B) = ... = F_{\sigma_s}(B) = 0\}$, obtemos o resultado desejado. $\square$

Em seguida caracterizaremos as folheações de um certo grau fixado.

Proposição 2.3.5. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau k em $\mathbb{C}P(n)$. Dado um sistema coordenado afim $\mathbb{C}^n \simeq E \subset \mathbb{C}P(n)$, então $\mathcal{F}\big|_E$ é representada em E por um campo polinomial X da forma:*

$$X(x) = P(x) + g(x).R(x)$$

onde:
(a). *R é o campo radial $R(x) = \sum_{j=1}^n x_j \partial/\partial x_j$.*
(b). *g é um polinômio homogêneo de grau k (se não for identicamente nulo).*
(c). *P é um campo polinomial cujas coordenadas têm grau no máximo igual a k. No caso em que $g \equiv 0$, alguma das componentes de P tem grau exatamente k.*

Além disto, valem as seguintes propriedades:

(d). *O hiperplano no infinito $E_\infty := \mathbb{C}P(n) \backslash E$ relativo a E, é invariante se, e somente se, $g \equiv 0$.*

(e). *Se $g \not\equiv 0$ então $\mathcal{T}(\mathcal{F}, E_\infty) = \overline{\{g = 0\}} \cap E_\infty$.*

Demonstração. Fixemos a carta afim E e um campo polinomial $X = \sum_{j=1}^n X_j\, \partial/\partial x_j$ em E, que represente $\mathcal{F}$ em E e cujo conjunto singular tem codimensão ≥ 2. Pela Proposição 2.3.2, após uma mudança de coordenadas linear, se necessário, podemos supor que os planos coordenados $H_j = (x_j = 0)$ estão em $NI(\mathcal{F})$. Isto significa que, para todo $j = 1, ..., n$, o polinômio $X_j(x_1, ..., x_{j-1}, 0, x_{j+1}, ..., x_n) = f_j(x)$ tem grau k. Podemos então escrever que $X_j(x) = f_j(x) + g_j(x).x_j$, onde g_j é um polinômio. Adotando as notações da prova da Proposição 1.3.5, se $H \in NI(\mathcal{F})$ é um hiperplano com equação $x_n = B(y) = c + \sum_{j=1}^{n-1} b_j\, x_j := c + B_o(y)$, $T(\mathcal{F}, H)$ será definido por

$$X_n(y, B(y)) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j\, X_j(y, B(y)) =$$

$$= f_n((y, B(y)) + g_n(y, B(y)).B(y) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j\, [f_j(y, B(y)) + g_j(y, B(y)).x_j] = F(y, B) = 0$$

Seja $m = \max\{d(g_j);\ j = 1, ..., n\}$ e denotemos por g_{jm} a parte homogênea de grau m de g_j. Se $m \leq k - 1$ estamos feitos. Caso contrário, $m \geq k$, obtemos que $F(y, B)$ tem um termo homogêneo de grau $m + 1$ em y da forma:

$$g_{nm}(y, B_o(y)).B_o(y) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j\, g_{jm}(y, B_o(y)).x_j := F_{m+1}(y, B_o).$$

o qual, pela definição de grau de $\mathcal{F}$ é identicamente nulo.

Ora, como o leitor pode verificar diretamente, $F_{m+1}(y, B_o) \equiv 0$ (para um conjunto aberto de $B_{o's}$) se, e somente se, $g_{1m} = ... = g_{nm} = g$. Neste caso, teremos:

$$(*)\quad X_j(x) = P_j(x) + g(x).x_j, \quad \forall\ j = 1, ..., n$$

onde P_j é um polinômio de grau $\leq m$. Basta então provar que $m = k$. Para isto provaremos a afirmação (e).

Podemos supor sem perda de generalidade que $g(1, y_2, ..., y_n)$ tem grau m em $(y_2, ..., y_n)$. De fato, seja A uma mudança de coordenadas linear em E. Escrevendo $X = P + g.R$ não é difícil ver que $A^*(X) = A^*(P) + g \circ A.R$. Basta então escolher A de forma que $g \circ A(1, y_2, ..., y_n)$ tem grau m, o que é possível (verifique).

Consideremos uma mudança de carta afim da forma $(y_1, ..., y_n) = \phi(x) = (1/x_1, x_2/x_1, ..., x_n/x_1)$. A equação de E_∞ na nova carta é $(y_1 = 0)$ e $\phi_*(X) = Y = \sum_{j=1}^n Y_j\, \partial/\partial y_j$, onde

$$(1') \quad Y_1(y_1, ..., y_n) = -y_1^2.[P_1(1/y_1, y_2/y_1, ..., y_n/y_1) + g(1, y_2, ..., y_n).1/(y_1)^{m+1}]$$

e

$$(j') \quad Y_j(y_1, ..., y_n) = y_1[X_j(1/y_1, y_2/y_1, ..., y_n/y_1) - y_j\, X_1(1/y_1, y_2/y_1, ..., y_n/y_1)] =$$
$$= y_1[P_j(1/y_1, y_2/y_1, ..., y_n/y_1) - y_j\, P_1(1/y_1, y_2/y_1, ..., y_n/y_1)],$$

como o leitor pode verificar substituindo (*) nas expressões (1) e (j) da prova da Proposição 1.3.3. Como os $P_{j's}$ têm grau $\leq m$, decorre de (1') e (j') que o campo Y tem pólo de ordem $m - 1$ ao longo de $(y_1 = 0)$. Multiplicando Y por y_1^{m-1}, obtemos um campo polinomial Z que representa $\mathcal{F}$ na nova carta. A primeira componente de Z será

$$(**) \quad Z_1(y) = -y_1.\tilde{P}_1(y) + g(1, y_2, ..., y_n),$$

onde $\tilde{P}_1 = (y_1)^m.P_1(1/y_1, y_2/y_1, ..., y_n/y_1)$. Decorre daí que $T(\mathcal{F}, E_\infty)$ é definido por $g(1, y_2, ..., y_n) = 0$. Como $g(1, y_2, .., y_n)$ tem grau m, obtemos finalmente que $m = k$. A afirmação (d) também é conseqüência de (**), já que $g \equiv 0$ se, e somente se, $E_\infty = (y_1 = 0)$ é invariante por Z. $\square$

Denotaremos por $\mathcal{F}(n, k)$ o *espaço das folheações de grau k em $\mathbb{C}P(n)$*.

Deixamos como exercício para o leitor provar a seguinte observação (veja Exercício 20):

Observação 2.3.6. Dois campos polinomiais X e Y em $\mathbb{C}^n$, com conjunto singular de codimensão ≥ 2, induzem a mesma folheação em $\mathbb{C}P(n)$ se, e somente se, $X = \lambda.Y$ para alguma constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

A Proposição 2.3.5 e a Observação 2.3.6, implicam que podemos parametrizar $\mathcal{F}(n, k)$ utilizando os polinômios $P_1, ..., P_n$ e g. Como conseqüência obtemos:

Corolário 2.3.7 (Estrutura do espaço de folheações)**.** *$\mathcal{F}(n, k)$ possui estrutura natural de espaço projetivo de dimensão $N(\mathcal{F}(n, k)) = nN(n, k) + N(n-1, k) - 1$, onde $N(r, s) = C_s^{r+s}$ é a dimensão do espaço dos polinômios homogêneos de grau s em $r + 1$ variáveis complexas.*

Observação 2.3.8. O conjunto das folheações de $\mathcal{F}(n,k)$, cujo conjunto singular tem codimensão ≥ 2, é um subconjunto aberto, denso e conexo de $\mathcal{F}(n,k)$. De fato, ele é um *aberto de Zariski* em $\mathcal{F}(n,k)$, isto é, o seu complemento é um subconjunto algébrico próprio de $\mathcal{F}(n,k)$. Não provaremos este fato aqui. No entanto, provaremos mais adiante que ele contém um subconjunto aberto, denso e conexo de $\mathcal{F}(n,k)$.

Em seguida caracterizaremos as folheações de grau zero e um.

Corolário 2.3.9. *Se $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(n,0)$ então existe um sistema de coordenadas afim $\mathbb{C}^n \simeq E \subset \mathbb{C}P(n)$ tal que $\mathcal{F}$ é a folheação de E definida pelo campo radial.*

A prova é deixada como exercício para o leitor (veja Exercício 12).

Corolário 2.3.10. *Uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(n)$ tem grau 1 se, e somente se, $\mathcal{F}$ é dada por um campo de vetores holomorfo X definido globalmente sobre $\mathbb{C}P(n)$. Neste caso, as folhas de $\mathcal{F}$ são as órbitas de X.*

Demonstração. Decorre da prova da Proposição 2.3.5, que podemos representar uma folheação $\mathcal{F}$ de grau k, numa carta afim, por um campo polinomial X, que estendido a $\mathbb{C}P(n)$ é um campo meromorfo. No caso, X tem pólos de ordem $k-1$ no hiperplano do infinito. Portanto X pode ser estendido a um campo holomorfo global se, e somente se, $k = 1$. □

2.4 Singularidades Genéricas de Folheações Projetivas

Nesta seção estudaremos as folheações em $\mathbb{C}P(n)$ com singularidades isoladas. Em particular, veremos que o espaço das folheações em $\mathcal{F}(n,k)$ que possuem todas as singularidades não degeneradas é um subconjunto aberto, denso e conexo de $\mathcal{F}(n,k)$. Além disto, calcularemos o número de singularidades (contados com multiplicidade) de uma folheação em $\mathcal{F}(n,k)$ que tem todas as singularidades isoladas.

Denotaremos por $\mathcal{S}(n,k)$ o espaço das folheações de $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(n,k)$ que possuem todas as suas singularidades não degeneradas. Recordamos que uma singularidade p de um campo holomorfo X, definido numa vizinhança de p é não degenerada se a derivada $DX(p)$ é não singular. Um dos resultados centrais desta seção é o seguinte teorema:

Teorema 2.4.1. *$\mathcal{S}(n,k)$ é aberto, denso e conexo em $\mathcal{F}(n,k)$. De fato, $\mathcal{S}(n,k)$ é um aberto de Zariski.*

Uma conseqüência do resultado acima é o seguinte:

Corolário 2.4.2. *O número de singularidades de uma folheação $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(n,k,)$ é:*

$$\#\operatorname{sing}(\mathcal{F}) = 1 + k + ... + k^n$$

No resultado abaixo veremos que as singularidades não degeneradas "dependem holomorficamente da folheação".

Proposição 2.4.3. *Sejam $\mathcal{F}_o \in \mathcal{F}(n,k)$ e $p \in \operatorname{sing}(\mathcal{F}_o)$, singularidade não degenerada de $\mathcal{F}_o$. Então existem vizinhanças $U \ni p$, $\mathcal{U} \ni \mathcal{F}_o$, e uma aplicação holomorfa $\varphi\colon \mathcal{U} \to U$, tal que:*

(a) $\{\varphi(\mathcal{F})\} = \operatorname{sing}(\mathcal{F}) \cap U, \forall \mathcal{F} \in \mathcal{U}$.

(b) $\varphi(\mathcal{F})$ *é singularidade não degenerada de* $\mathcal{F}$, $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{U}$.

Demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas afim $\mathbb{C}^n \simeq E \subset \mathbb{C}P(n)$, tal que $p \in E$ é a origem 0. Seja $X_o = P_o + g_o.R$ um campo de vetores polinomial que representa$\mathcal{F}_o$ em E. Cada folheação $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(n,k)$ pode ser descrita em E por um campo polinomial $X = P + g.R$ como na Proposição 2.3.5. O conjunto $\mathcal{F}(n,k)$ pode então ser parametrizado (em coordenadas homogêneas) por P e g, ou seja, pelos coeficientes de g e das componentes de P. Identificando $\{(P,g);\ X = P + g.R\}$ com $\mathbb{C}^M$, onde $M = n.N(n,k) + N(n-1,k)$, podemos definir uma aplicação $\theta\colon \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, por $\theta(P,g,x) = X(x)$, sendo $X = P + g.R$. Assim θ é holomorfa e além disto, $\theta(P_o, g_o, 0) = 0$. Por outro lado, a derivada parcial com respeito a x no ponto $(P_o, g_o, 0)$ é dada por $D_x\theta(P_o, g_o, 0) = DX_o(0)$. Como 0 é singularidade simples de X_o, vemos que $D_x\theta(P_o, g_o, 0)$ é um isomorfismo. Decorre do Teorema das funções implícitas que existem vizinhanças $\mathcal{U}$ de (P_o, g_o) e U de 0, e uma função holomorfa $\varphi\colon \mathcal{U} \to U$, tal que

(i) $\varphi(P_o, g_o) = 0$.

(ii) Se $(P,g) \in \mathcal{U}$ e $x \in U$ são tais que $\theta(P,g,x) = 0$, então $x = \varphi(P,g)$.

Em particular, $\varphi(P,g)$ é a única singularidade de X em U.

Por outro lado, diminuindo $\mathcal{U}$ e U se necessário, podemos supor que para todo $(P,g,x) \in \mathcal{U} \times U$, a derivada parcial $D_x\theta(P,g,x) = DX(x)$ é um isomorfismo. Em particular, obtemos que $DX(\varphi(P,g))$ é isomorfismo se $(P,g) \in \mathcal{U}$. Isto prova a proposição. $\square$

Corolário 2.4.4. *Dada uma folheação $\mathcal{F}_o \in \mathcal{S}(n,k)$, com $\operatorname{sing}(\mathcal{F}_o) = \{p_1^o, ..., p_r^o\}$ onde $p_i^o \neq p_j^o$ se $i \neq j$, existem vizinhanças conexas $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{F}(n,k)$, $U_1, ..., U_r$ de $p_1, ..., p_r$ respectivamente, duas a duas disjuntas, e aplicações holomorfas $\varphi_j\colon \mathcal{U} \to U_j$, $j = 1, ..., r$, tais que* (a) $\varphi_j(\mathcal{F}_o) = p_j^o$ *para todo j.* (b) *Para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$ e todo j, $\varphi_j(\mathcal{F})$ é a única singularidade de $\mathcal{F}$ em U_j, sendo esta não degenerada.* (c) *Para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$ temos* $\operatorname{sing}(\mathcal{F}) = \{\varphi_1(\mathcal{F}), ..., \varphi_r(\mathcal{F})\}$.

Em particular $\mathcal{S}(n,k)$ é aberto em $\mathcal{F}(n,k)$.

Demonstração. A Proposição 2.4.3 implica a existência de $\mathcal{U}$,$U_1, ..., U_r$ e $\varphi_1, ..., \varphi_r$ satisfazendo (a) e (b). A propriedade (c) decorre do seguinte lema, cuja demonstração deixamos como exercício para o leitor:

Lema 2.4.5. *Sejam $\mathcal{F}_o \in \mathcal{F}(n,k)$ e $K \subset \mathbb{C}P(n)$ um compacto tal que $K \cap \mathrm{sing}(\mathcal{F}_o) = \phi$. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}_o$ em $\mathcal{F}(n,k)$ tal que para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$ temos $K \cap \mathrm{sing}(\mathcal{F}) = \phi$.*

□

Em seguida veremos que $\mathcal{S}(n,k)$ é não vazio, para $n \geq 2$ e $k \geq 0$.

Exemplo 2.4.6 (O exemplo de Jouanolou)**.** Seja $J(n,k)$ o campo de vetores polinomial dado em $E_o = \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}P(n)$ por

$$J(n,k) = \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1}^k - x_j x_1^k)\frac{\partial}{\partial x_j} + (1 - x_n x_1^k)\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

A folheação em $\mathbb{C}P(n)$ gerada por $J(n,k)$ será denotada por $\mathcal{J}(n,k)$. Esta folheação será chamada de *folheação de Jouanolou de grau k em $\mathbb{C}P(n)$*.

Algumas das propriedades das folheações de Jouanolou são resumidas na proposição a seguir.

Proposição 2.4.7. *Valem as seguintes propriedades:*

(a) *$\mathcal{J}(n,k) \in \mathcal{S}(n,k)$. De fato, se $k \geq 2$, então todas as singularidades de $J(n,k)$ são tais que os quocientes de dois auto-valores distintos não são reais positivos.*

(b) *$\mathcal{J}(n,k)$ tem todas as suas singularidades em E_o. Estas são dadas nestas coordenadas afins por: $p_j = (\delta^j, (\delta^j)^{f(n-1)}, ..., (\delta^j)^{f(1)})$, $j = 1, ..., N$, onde: δ é uma raíz N-ésima primitiva da unidade, sendo $N = 1 + k + ... + k^n$, e $f(m) = -(k + k^2 + ... + k^m)$.*

(c) *Existe um subgrupo cíclico finito $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}P(n))$, com N elementos, tal que cada elemento $T \in G$ permuta as singularidades de $\mathcal{J}(n,k)$ e deixa esta folheação invariante, ou seja, $T^*\mathcal{J}(n,k) \equiv \mathcal{J}(n,k)$.*

Demonstração. As singularidades do campo $J(n,k)$ são dadas pelo sistema de equações abaixo:

$$1 - x_n x_1^k = 0, \quad x_n^k - x_{n-1}x_1^k = 0, ..., x_{j+1}^k - x_j x_1^k = 0, ..., \quad x_2^k - x_1^{k+1} = 0$$

o qual pode ser resolvido indutivamente como abaixo:

$$x_n = x_1^{-k}, \quad x_{n-1} = x_n^k x_1^{-k} = x_1^{-k-k^2}, ..., x_{n-j} = x_1^{f(j+1)}, ..., x_2 = x_1^{f(n-1)}, (x_1^{f(n-1)})^k = x_2^k = x_1^{k+1}$$

onde

$$f(j) = -(k + k^2 + ... + k^j).$$

Da última equação, obtemos $x_1^N = 1$, logo $x_1 = \delta^j$, é uma das raízes N-ésimas da unidade. Substituindo este valor de x_1 nas equações anteriores obtemos os pontos $p_1, ..., p_N$ em (b). Em particular $\mathcal{J}(n,k)$ possui N singularidades em E_0. Deixamos como exercício para o leitor, a prova de que $\mathcal{J}(n,k)$ possui apenas estas singularidades.

Consideremos agora a transformação $A \in GL(n,\mathbb{C})$ definida em E por:

$$A(x_1,...,x_n) = (\alpha_1.x_1,...,\alpha_n.x_n) = (\delta.x_1, \delta^{f(n-1)}.x_2,...,\delta^{f(1)}.x_n).$$

Note que, $A^N = I$ e $A^j \neq I$ se $0 < j < N$. Em particular o grupo $G = \{Id, A, ..., A^{N-1}\}$ possui N elementos. Além disto, como é fácil ver, $A^j(1,...,1) = p_j$, o que prova que os elementos de G permutam as singularidades de $\mathcal{J}(n,k)$. Por outro lado,

$$A^*(J(n,k)) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^{-1}.[\alpha_{j+1}^k.x_{j+1}^k - \alpha_j\,\alpha_1^k.x_j\,x_1^k]\partial/\partial x_j \;+\; \alpha_n^{-1}.[1-\alpha_n.\alpha_1^k.x_n.x_1^k]\partial/\partial x_n \;=$$

$$= \delta^k.J(n,k),$$

ou seja, $A^*(\mathcal{J}(n,k)) = \mathcal{J}(n,k)$, o que prova (c).

Tendo-se em vista (c), para provarmos (a), é suficiente demonstrar que a singularidade $p = (1,...,1)$ de $J(n,k)$ é não degenerada. Calculando a matriz Jacobiana de $DJ(n,k)(p)$, obtemos a matriz J abaixo:

$$J = \begin{pmatrix} -(k+1) & k & 0 & 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 & 0 \\ -k & -1 & k & 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots\dots\dots\dots & . & . \\ . & . & . & . & \dots\dots\dots\dots & . & . \\ . & . & . & . & \dots\dots\dots\dots & . & . \\ -k & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots\dots & -1 & k \\ -k & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cujos auto-valôres são da forma $\lambda_j = -1 + k.\omega^j$, $j = 1,...,n$, onde ω é uma raiz (n+1)-ésima primitiva da unidade. Em particular, $\lambda_j \neq 0$ para todo $k \geq 1$ e todo $n \geq 2$, ou seja $\mathcal{J}(n,k) \in \mathcal{S}(n,k)$. Por outro lado, se $k \geq 2$, então λ_j está no círculo de centro -1 e raio k, sendo que se $i \neq j$, então os argumentos de $\lambda_i + 1$ e de $\lambda_j + 1$ são diferentes. Isto implica que $\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \notin \mathbb{R}_+$. $\square$

Corolário 2.4.8. *$\mathcal{S}(n,k)$ é não vazio para todo $n \geq 2$ e todo $k \geq 0$.*

Prova do Teorema 2.4.1. Fixemos $n \geq 2$ e $k \geq 1$ (o caso k=0 é imediato). Seja

$$\mathcal{D} = \{(\mathcal{F},p) \in \mathcal{F}(n,k) \times \mathbb{C}P(n);\; p \text{ é singularidade degenerada de } \mathcal{F}\}.$$

A idéia é provar que $\mathcal{D}$ é um subconjunto analítico de $\mathcal{F}(n,k) \times \mathbb{C}P(n)$ e em seguida utilizar o seguinte resultado:

Teorema 2.4.9 ([43]). *Sejam M e N variedades complexas e $f\colon M \to N$ uma aplicação holomorfa própria. Se V é subconjunto analítico de M, então $f(V)$ é subconjunto analítico de N.*

O resultado acima implica o Teorema 2.4.1. De fato, sejam $\pi_1\colon \mathcal{F}(n,k) \times \mathbb{C}P(n) \to \mathcal{F}(n,k)$ e $\mathcal{D}_1 = \pi_1(\mathcal{D})$. Não é difícil ver que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{F}(n,k) \setminus \mathcal{S}(n,k)$. Portanto se $\mathcal{D}$ for subconjunto analítico de $\mathcal{F}(n,k) \times \mathbb{C}P(n)$, então $\mathcal{S}(n,k)$ será um aberto de Zariski de $\mathcal{F}(n,k)$, já que π_1 é própria. Por outro lado, a Proposição 2.4.7 implica que $\mathcal{S}(n,k) \neq \phi$, logo $\mathcal{S}(n,k)$ será aberto, denso e conexo.

Provemos então que $\mathcal{D}$ é subconjunto analítico. Fixemos $(\mathcal{F}_o, p_o) \in \mathcal{D}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $p_o = 0 \in E_0 \simeq \mathbb{C}^n$. Parametrizemos $\mathcal{F}(n,k)$ por (P,g), onde uma folheação $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(n,k)$ é representada em E_0 por $X = P + g.R$. Uma singularidade $p \in E_0$ de $\mathcal{F}$ é degenerada se, e somente se $Det(DX(p)) = 0$. Consideremos então a aplicação $\Gamma\colon \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, definida por

$$\Gamma(P,g,x) = (X(x), Det(DX(x))),$$

onde $X = P + g.R$ e $(P,g) \in \mathbb{C}^M$, como na Proposição 2.4.3. Observe que Γ é um polinômio nas variáveis (P,g,x). Logo $\Gamma^{-1}(0)$ é um subconjunto analítico de $\mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^n$. Isto implica que $\mathcal{D} \cap (\mathcal{F}(n,k) \times E_0)$ é analítico. Portanto $\mathcal{D}$ é analítico, como queríamos. □

Prova do Corolário do Teorema 2.4.1. Para provar o Corolário basta agora observar que a aplicação $\#\colon \mathcal{S}(n,k) \to \mathbb{N}$, $\mathcal{F} \mapsto \#\,\mathrm{sing}(\mathcal{F})$ é localmente constante, como conseqüência do Corolário da Proposição 1.3.10. Como $\mathcal{S}(n,k)$ é conexo, segue que esta aplicação é constante. Por outro lado, como vimos na Proposição 2.4.7, o exemplo de Jouanolou possui $N = k^n + ... + k + 1$ singularidades. □

Em seguida veremos uma generalização do Corolário do Teorema 2.4.1 para folheações com singularidades isoladas.

Definição 2.4.10. Seja $X = \sum_{j=1}^n X_j \partial/\partial x_j$ um campo de vetores holomorfo definido num aberto U de $\mathbb{C}^n$. Dada uma singularidade isolada $p \in U$ de X, o *número de Milnor*, ou *multiplicidade* de X em p, é o inteiro

$$\mu(X,p) = m(X,p,0)$$

onde acima, $m(X,p,0)$ denota a multiplicidade de $X = (X_1, ..., X_n)$ em $p, 0$, pensado como aplicação de U em $\mathbb{C}^n$ (veja a definição 4 do §1).

Tendo-se em vista (b) e (c) do Lema 1.3.4, valem as seguintes propriedades: (I) Se f é uma função holomorfa em U que não se anula em p, então $\mu(X,p) = \mu(f.X,p)$. (II) Se $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{C}^n$ é um biholomorfismo, então $\mu(\varphi_\star(X), \varphi(p)) = \mu(X,p)$.

De fato, basta observar que $\varphi_\star(X)(q) = D\varphi(\varphi^{-1}(q)).X(\varphi^{-1}(q))$ e aplicar (b) e (c) do

Lema 2.1.16. A afirmação (d) do Lema 2.1.16 implica: (III) $\mu(X,p) = 1$ se, e somente se p é singularidade não degenerada de X.

Levando-se em conta (I) e (II), o conceito se estende a singularidades isoladas de folheações em variedades complexas, via cartas locais: se $p \in M$ é uma singularidade isolada de uma folheação $\mathcal{F}$ em M, tomamos um campo de vetores holomorfo X que represente $\mathcal{F}$ numa vizinhança U de p, uma carta local φ em p e definimos $\mu(\mathcal{F},p) = \mu(\varphi_\star(X), \varphi(p))$.

Podemos então enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.4.11. *Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(n,k)$, uma folheação com singularidades isoladas. Então*

$$\sum_{p \in \mathrm{sing}(\mathcal{F})} \mu(\mathcal{F},p) = k^n + ... + 1.$$

Demonstração. No caso em que $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(n,k)$, por (III), a fórmula acima reduz-se ao Corolário do Teorema 2.4.1. Vejamos o caso geral.

Seja $\mathcal{F}_o \in \mathcal{F}(n,k)$ uma folheação com singularidades isoladas, digamos $\mathrm{sing}(\mathcal{F}_o) = \{p_1,...,p_r\}$. Tomando um hiperplano H tal que $p_j \notin H$, para todo $j = 1,...,r$, podemos obter uma carta afim $\mathbb{C}^n \simeq E = \mathbb{C}P(n) \setminus H$, tal que $\{p_1,...,p_r\} \subset \mathbb{C}^n$. Seja $X_o = P_o + g_o.R$ um campo de vetores polinomial que represente $\mathcal{F}_o$ em E. Fixemos bolas $B_1,...,B_r$, $B_j = B(p_j,\rho)$, $j = 1,...r$, tais que $\overline{B_i} \cap \overline{B_j} = \phi$, se $i \neq j$. Consideremos o compacto $K = \mathbb{C}P(n) \setminus \cup_{j=1}^r B(p_j,\rho/2)$. Pelo Lema 2.4.5, existe uma vizinhança $\mathcal{U}_1$ de $\mathcal{F}_o$ tal que se $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_1$ então $\mathrm{sing}(\mathcal{F}) \cap K = \phi$, isto é, $\mathrm{sing}(\mathcal{F}) \subset \cup_{j=1}^r B(p_j,\rho/2)$.

Observemos agora que a Proposição 2.1.18 implica que existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1$ de $\mathcal{F}_o$, tal que se $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$, então:

$$\sum_{p \in \mathrm{sing}(\mathcal{F}) \cap B_j} \mu(\mathcal{F},p) = \mu(\mathcal{F},p_j).$$

De fato, pela Proposição 2.1.18, existe $\epsilon > 0$ tal que se $X = P + g.R$ satisfaz $\| X - X_o \|_{\overline{B_j}} < \epsilon$ para todo $j = 1,...,r$, então

$$\sum_{p \in \mathrm{sing}(X) \cap B_j} \mu(X,p) = \mu(X_o,p_j).$$

Isto nos fornece a vizinhança $\mathcal{U}$ desejada. Finalmente, como $\mathcal{S}(n,k)$ é denso em $\mathcal{F}(n,k)$, tomamos $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(n,k) \cap \mathcal{U}$, para a qual temos:

$$k^n + ... + 1 = \sum_{p \in \mathrm{sing}(\mathcal{F})} \mu(\mathcal{F},p) = \sum_{j=1}^r \Big(\sum_{p \in \mathrm{sing}(\mathcal{F}) \cap B_j} \mu(\mathcal{F},p) \Big) = \sum_{j=1}^r \mu(\mathcal{F}_o,p_j),$$

como queríamos. □

2.5 Folheações de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$

Nesta seção resumiremos algumas das propriedades das folheações singulares de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$. O principal resultado, que é análogo ao Teorema 2.2.2, é o seguinte:

Teorema 2.5.1. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{C}P(n)$ e $\mathcal{F}^* = \Pi^*(\mathcal{F})$, onde $\Pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P(n)$ é a projeção canônica. Então existe uma 1-forma holomorfa integrável em $\mathbb{C}^{n+1}$, $\Omega = \sum_{j=0}^{n} \Omega_j\, dx_j$, cujos coeficientes $\Omega_0, ..., \Omega_n$ são polinômios homogêneos de mesmo grau, tal que $\Omega = 0$ define $\mathcal{F}^*$ em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Em particular, para toda carta afim $E \subset \mathbb{C}P(n)$, $\mathcal{F}\mid_E$ pode ser definida por uma 1-forma polinomial integrável.*

A prova do resultado acima é análoga à do Teorema 2.2.2 e é deixada como exercício para o leitor.

Diremos que a forma Ω representa $\mathcal{F}$ em coordenadas homogêneas.

Observação 2.5.2. Como $\Pi^{-1}([p])$ é uma reta que passa pela origem de $\mathbb{C}^{n+1}$ para todo $[p] \in \mathbb{C}P(n)$, as retas que passam pela origem estão contidas nas folhas de $\mathcal{F}^*$. Em termos da forma Ω isto pode ser expresso pela relação:

$$(I) \quad i_R(\Omega) = \sum_{j=0}^{n} x_j\, \Omega_j \equiv 0,$$

onde R denota o campo radial em $\mathbb{C}^{n+1}$.

Fixemos uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um e uma reta $L \subset \mathbb{C}P(n)$, não invariante por $\mathcal{F}$, isto é, tal que L não esteja contida numa folha de $\mathcal{F}$ nem em $\operatorname{sing}(\mathcal{F})$. Seja $p \in L$ e tomemos uma carta afim $\mathbb{C}^n \simeq E$ tal que $p \in E$. Seja ω uma 1-forma polinomial que representa $\mathcal{F}$ em E. Dizemos que p é um *ponto de tangência* de $\mathcal{F}$ com L, se a restrição $\omega\mid_L$ se anula em 0. A *multiplicidade de tangência* de $\mathcal{F}$ com L em p é, por definição, a ordem de p como zero de $\omega\mid_L$. Prova-se facilmente que os conceitos acima independem da carta afim E e da forma ω que representa $\mathcal{F}$.

Com isto, a seguinte definição é natural:

Definição 2.5.3. O *grau* de uma folheação de codimensão um, $\mathcal{F}$, em $\mathbb{C}P(n)$, é o número de tangencias, contadas com multiplicidade, de $\mathcal{F}$ com uma reta não invariante por $\mathcal{F}$.

Observação 2.5.4. No caso em que $n = 2$ a definição acima coincide com a Definição 2.3.3.

Observação 2.5.5. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um e grau k em $\mathbb{C}P(n)$ e Ω uma 1-forma que representa $\mathcal{F}$ em coordenadas homogêneas. Suponhamos que $\operatorname{cod}(\operatorname{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$. Então: (a) Se Ω_1 é outra forma que representa $\mathcal{F}$ em coordenadas homogêneas, então $\Omega_1 = a.\Omega$, onde $a \neq 0$. (b) O grau dos coeficientes de Ω é $k+1$.

Deixamos a prova destas afirmações como exercício para o leitor.

A Observação 2.5.5 implica que o espaço de folheações de codimensão um e grau k em $\mathbb{C}P(n)$ se identifica naturalmente com o projetivizado do seguinte conjunto de 1-formas em $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$H(n,k) = \{\Omega;\ \Omega \wedge d\Omega = 0, i_R(\Omega) = 0, \Omega = \sum_{j=0}^{n} \Omega_j \, dx_j, \text{ onde } \Omega_0, ..., \Omega_n$$

$$\text{são polinômios homogêneos de grau } k+1\}$$

Note que $H(n,k)$ pode ser pensado como um subconjunto algébrico de um espaço de polinômios.

Em particular, se denotarmos o espaço de folheações de codimensão um e grau k de $\mathbb{C}P(n)$ por $\mathcal{F}_1(n,k)$, obtemos a seguinte:

Proposição 2.5.6. *$\mathcal{F}_1(n,k)$ é um conjunto algébrico.*

Um problema importante na teoria das folheações singulares é o de caracterizar as componentes irredutíveis de $\mathcal{F}_1(n,k)$ quando $n \geq 3$. Observamos aqui que, neste caso, a equação $\Omega \wedge d\Omega = 0$ não é satisfeita para todas as 1-formas Ω com coeficientes homogêneos de grau $k+1$ e tais que $i_R(\Omega) = 0$. Isto faz com que $\mathcal{F}_1(n,k)$ possua mais de uma componente irredutível, se $k \geq 1$. No casos $k = 0, 1, 2$ e $n \geq 3$, as componentes irredutíveis de $\mathcal{F}_1(n,k)$ são conhecidas (veja [21]). A seguir enumeraremos algumas das componentes irredutíveis conhecidas de $\mathcal{F}_1(n,k)$, $n \geq 3$.

Exemplo 2.5.7 (Componentes das folheações com integral primeira)**.** Sejam f e g polinômios homogêneos em $\mathbb{C}^{n+1}$ de graus p e q respectivamente. Sejam $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $m.d.c.(r,s) = 1$ e $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$. Estes polinômios definem uma função meromorfa $F = [f^s, g^r]$ em $\mathbb{C}P(n)$, como no exemplo 1 do §1, cujo conjunto singular é $Z = Z(f,g)$. A função F define uma folheação singular $\mathcal{F}(F)$ em $\mathbb{C}P(n)$, cujas folhas são as partes lisas das hipersuperfícies $L_c = (F = c), c \in \mathbb{C}P(1)$. Para $c = [0,1]$ ou $[1,0]$ vemos que $L_c = Z(f)$ ou $Z(g)$ respectivamente, enquanto que se $c = [t,1], t \neq 0$ temos $L_c = Z(f^s - t.g^r)$. A partir daí, deduz-se facilmente que uma forma Ω que representa $\mathcal{F}(F)$ em coordenadas homogêneas é:

$$(*) \quad \Omega = s.g.df - r.f.dg,$$

desde que $\operatorname{cod}(\operatorname{sing}(\Omega)) \geq 2$, isto é, Ω não possa ser escrita como $h.\Gamma$, onde h e os coeficientes de Γ são polinômios. Uma condição para que isto ocorra, é a seguinte:

$$(**) \quad \text{Se } [p] \in Z(f,g) \text{ então } df(p) \wedge dg(p) \neq 0$$

Neste caso $\mathcal{F}(F)$ terá grau $p+q-2 = d(\Omega)-1$. Podemos então parametrizar um subconjunto $R(p,q)$ de $\mathcal{F}_1(n,p+q-2)$ por $(f,g) \to \mathcal{F}([f^s,g^r])$, onde f e g estão nos espaços de polinômios homogêneos de graus p e q respectivamente.

O seguinte resultado é conhecido:

Teorema 2.5.8 ([21],[22],[37])**.** *Se $n \geq 3$ então $R(p,q)$ é uma componente irredutível de $\mathcal{F}_1(n,p+q-2)$. Além disto, os pontos de $R(p,q)$ da forma $\mathcal{F}([f,g])$, onde f e g satisfazem (**) são lisos.*

Observamos que, se $p+q-2 \geq 1$ e $n=2$, então $R(p,q)$ tem interior vazio em $\mathcal{F}_1(2,p+q-2)$.

Exemplo 2.5.9 (Componentes de folheações logarítmicas)**.** Sejam $f_1,...,f_k$ polinômios homogêneos em $\mathbb{C}^{n+1}$, de graus $d_1,...,d_k$, respectivamente, onde $k \geq 3$. Dados $\lambda_1,...,\lambda_k \in \mathbb{C}^*$ tais que $\sum_{j=1}^k \lambda_j\, d_j = 0$, consideremos a forma:

$$\Omega = \Omega(f_1,...,f_k,\lambda_1,...,\lambda_k) = f_1...f_k.\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\,\frac{df_j}{f_j}.$$

Observe que Ω é integrável, uma vez que $d(\frac{1}{f_1...f_k}.\Omega) = 0$. Além disto, a identidade de Euler $(i_R(df_j) = d_j\, f_j)$ implica que $i_R(\Omega) = 0$. Portanto Ω define em coordenadas homogêneas uma folheação $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f_1,...,f_k,\lambda_1,...,\lambda_k)$ em $\mathbb{C}P(n)$ de grau $d = (\sum_{j=1}^k d_j) - 2$. Podemos então parametrizar um subconjunto $L(d_1,...,d_k)$ de $\mathcal{F}_1(n,d)$ por $(f_1,...,f_k,\lambda_1,...,\lambda_k) \to \mathcal{F}(f_1,...,f_k,\lambda_1,...,la_k)$.

O seguinte resultado é conhecido:

Teorema 2.5.10 ([5],[6])**.** *Se $n \geq 3$, então $\overline{L(d_1,...,d_k)}$ é uma componente irredutível de $\mathcal{F}_1(n,d)$.*

Observamos que, se $n=2$ e $d \geq 2$, então $\overline{L(d_1,...,d_k)}$ tem interior vazio em $\mathcal{F}_1(2,d)$, como veremos mais adiante. No caso $n=2$ e $d=1$ tem-se $\mathcal{F}_1(2,1) = \overline{L(1,1,1)}$ (veja Exercício 19).

O leitor curioso pode encontrar a descrição de outras componentes irredutíveis de $\mathcal{F}_1(n,d)$, $n \geq 3$, na referência [21].

Para finalizar a seção, classificaremos as 1-formas meromorfas fechadas em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 2$.

Proposição 2.5.11. *Sejam ω uma 1-forma meromorfa fechada, não nula, em $\mathbb{C}P(n)$ e $\Omega = \Pi^*(\omega)$. Então:*

$$\Omega = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\,\frac{df_j}{f_j} \;+\; d(\frac{g}{f_1^{r_1-1}...f_k^{r_k-1}})$$

onde:

(a) $k \geq 2$ *e* $f_1, ..., f_k, g$ *são polinômios homogêneos em* $\mathbb{C}^{n+1}$.
(b) $f_1, ..., f_k$ *são irredutíveis e primos dois a dois.*
(c) *Se* $r_j > 1$, *então* f_j *não divide* g.
(d) $d(g) = \sum_{j=1}^{k} d(f_j).(r_j - 1)$, *ou seja* $d(g) = d(f_1^{r_1-1}...f_k^{r_k-1})$.
(e) $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{C}$ *e* $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, d(f_j) = 0$.
(f) *Se* $r_j = 1$, *então* $\lambda_j \neq 0$.

Além disto:
(g) *O conjunto de pólos de* ω *é* $\cup_{j=1}^{k} Z(f_j)$, *sendo* r_j *a ordem de* $Z(f_j)$ *como pólo de* ω *e* λ_j *o resíduo de* ω *em* $Z(f_j)$.

Demonstração. Em primeiro lugar, observemos que ω não pode ser holomorfa. Com efeito, como $\mathbb{C}P(n)$ é simplesmente conexa, caso ω fosse holomorfa, existiria uma função holomorfa não constante f tal que $\omega = df$. Ora, isto não é possível, já que $\mathbb{C}P(n)$ é compacta. Em particular o conjunto de pólos, digamos P, de ω é não vazio. Como este conjunto tem codimensão um ele é da forma $P = \cup_{j=1}^{k} Z(f_j)$, onde $f_1, ..., f_k$ são polinômios homogêneos irredutíveis em $\mathbb{C}^{n+1}$, primos dois a dois. Sejam λ_j e r_j o resíduo e a ordem de de ω em $Z(f_j)$, respectivamente, $j = 1, ..., k$.

Afirmação 2.5.12. $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, d(f_j) = 0$.

Com efeito, seja L uma reta linearmente mergulhada em $\mathbb{C}P(n)$ de tal forma que L corte P no seu conjunto liso transversalmente. Desta forma, $P \cap (f_j = 0)$ contém $d(f_j)$ pontos, para todo $j = 1, ..., k$. Seja $\zeta = \omega \mid_L$. Não é difícil ver que o resíduo de ζ em cada ponto de $L \cap (f_j = 0)$ é λ_j. Logo, pelo Teorema dos resíduos em superfícies de Riemann, temos

$$0 = \sum_{p \in L \cap P} Res(\zeta, p) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, d(f_j),$$

como queríamos.

Consideremos agora $\Omega = \Pi^*(\omega)$, a qual é uma forma meromorfa em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Pelo Teorema de Levi ela se estende a uma forma meromorfa em $\mathbb{C}^{n+1}$, a qual denotaremos ainda por Ω. Observe que $i_R(\Omega) = 0$, já que para todo $[p] \in \mathbb{C}P(n)$, $\Pi^{-1}[p]$ é uma órbita de R. Além disto, o conjunto de pólos de Ω é $P^* = \cup_{j=1}^{k} (f_j = 0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$, sendo λ_j o resíduo e r_j a ordem de Ω em $(f_j = 0)$, $j = 1, ..., k$. Seja $\alpha = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, \frac{df_j}{f_j}$. Note que $\beta = \Omega - \alpha$ é meromorfa e fechada em $\mathbb{C}^{n+1}$ e tem resíduos nulos.

Afirmação 2.5.13. *β é exata, isto é, existe f meromorfa tal que $\beta = df$.*

Basta provar que para todo caminho fechado $\gamma\colon S^1 \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus P^*$ temos $\int_\gamma \beta = 0$, onde $S^1 = \partial D = \{z \in \mathbb{C};\ |\ z\ |< 1\}$. Seja então γ um tal caminho. Podemos supor que γ é de classe C^∞. Como $\mathbb{C}^{n+1}$ é simplesmente conexo, existe aplicação contínua $F\colon \overline{D} \to \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $F\ |_{S^1} = \gamma$. Utilizando resultados conhecidos de topologia (veja [65]), podemos supor que: (i)F é de classe C^∞. (ii)$F(\overline{D})$ não contém pontos singulares de P^*, já que o conjunto singular de P^* tem codimensão real ≥ 4. (iii)F é transversal à parte lisa de P^*. Em particular, $F(\overline{D}) \cap P^* = \{z_1, ..., z_m\}$ é finito.

Pelo Teorema dos resíduos temos:

$$\int_\gamma \beta = \int_{S^1} F^*(\beta) = \sum_{j=1}^{m} 2\pi i Res(F^*(\beta), z_j) = 0$$

como queríamos.

Podemos então escrever

$$\Omega = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} \ + \ d(\frac{g}{h})$$

onde g e h são polinômios homogêneos do mesmo grau e sem fatores comuns. Observe agora que, se g e h não são constantes, então $Z(h) \subset P = \cup_{j=1}^{k} Z(f_j)$. Decorre daí que $h = f_1^{s_1}...f_k^{s_k}$, onde $s_1, ..., s_k \geq 0$. Como f_j é polo de ordem $s_j + 1$ de $d(\frac{g}{f_1^{s_1}...f_k^{s_k}})$, obtemos que a ordem de $Z(f_j)$ como polo de ω é $\max\{1, s_j + 1\}$, o que prova o resultado. $\square$

2.6 Exercícios do Capítulo 2

1. Prove as afirmações (a) e (b) da Proposição 2.1.2.

2. Sejam S uma curva e Z uma hipersuperfície de uma variedade complexa de dimensão n. Prove que $[S, Z]_p = 1$ se, e somente se, S e Z são regulares em p e S corta Z transversalmente em p.

3. Prove as afirmações (a) e (b) da Proposição 2.1.6.

$[S, Z] = d(S).d(Z)$

4. Seja $f\colon \mathbb{C}P(n) \to \mathbb{C}P(n)$ uma aplicação holomorfa tal que a imagem por f de retas e hiperplanos em $\mathbb{C}P(n)$ são retas e hiperplanos, respectivamente. Prove que existe um isomorfismo

$T \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $f = [T]$.

5. Prove que a *aplicação de Veronese* V_k^d é um mergulho (veja Exemplo 2.1.12).

6. Prove (d) do Lema 2.1.16.

7. Prove a Proposição 2.1.18.

8. Prove a Afirmação 2.2.3 do Teorema 2.2.2.

9. Prove a Proposição 2.1.13 utilizando o Teorema de Bézout.

10. Prove que o conjunto de hiperplanos de $\mathbb{C}P(n)$ é naturalmente difeomorfo a $\mathbb{C}P(n)$.

11. Sejam X e Y campos polinomiais em $\mathbb{C}^n$, cujos conjuntos singulares têm codimensão ≥ 2. Prove que as folheações induzidas por X e Y em $\mathbb{C}P(n)$ coincidem se, e somente se, $X = c.Y$, onde $c \in \mathbb{C}^(*)$.

12. Prove que uma folheação de grau zero em $\mathbb{C}P(n)$ é representada pelo campo radial em alguma carta afim.

13. Sejam $J(n,k) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} (x_{j+1}^k - x_j x_1^k)\frac{\partial}{\partial x_j} + (1 - x_n x_1^k)\frac{\partial}{\partial x_n}.$, o campo de Jouanolou em $\mathbb{C}^n$ e $\mathcal{J}(n,k)$ a folheação correspondente em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 2$, $k \geq$. Prove que $\mathcal{J}(n,k)$ não possui singularidades no hiperplano do infinito.

14. Prove que a matriz J da prova da Proposição 2.4.7 tem auto-valores da forma $-1 + k.\omega^j$, $j = 1, ..., n$, onde ω é uma raiz primitiva de $z^{n+1} = 0$.

15. Prove o Lema 2.4.5.

16. Prove o Teorema 2.4.9.

17. Prove que as Definições 6 e 8 coincidem no caso em que $n = 2$.

18. Prove as afirmações (a) e (b) da Observação 2.5.5.

19. Prove que $\mathcal{F}(2,1) = \mathcal{F}_1(2,1) = \overline{L(1,1,1)}$.

20. Prove a Observação 2.3.6 do texto.

21. Prove a Proposição 2.1.1.

Capítulo 3

Soluções algébricas de folheações no plano projetivo

3.1 Soluções algébricas

Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação por curvas em $\mathbb{C}P(n)$ e L uma folha de $\mathcal{F}$.

Definição 3.1.1. Dizemos que L é *algébrica* se o fecho $\overline{L}$ de L em $\mathbb{C}P(n)$, é um subconjunto algébrico de dimensão 1, ou seja, uma curva algébrica. Neste caso, diremos também que $\overline{L}$ é uma *solução algébrica* de $\mathcal{F}$.

Observação 3.1.2. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}P(n)$, cujas singularidades são isoladas. Então, uma folha L de $\mathcal{F}$, é solução algébrica se, e somente se, $\overline{L}$ é obtido de L por adjunção das singularidades de $\mathcal{F}$ às quais L é aderente. De fato, suponhamos que $\overline{L}$ seja uma curva algébrica. Neste caso, L não pode se acumular em pontos regulares de $\mathcal{F}$, pois caso isto ocorra $\overline{L}$ não é subconjunto analítico de dimensão um. Decorre daí que $\overline{L} \setminus L \subset \operatorname{sing}(\mathcal{F})$. Para provar a recíproca precisamos do Teorema de Remmert-Stein, que enunciamos em seguida.

Teorema 3.1.3 (Teorema de Remmert-Stein, [43],[45])**.** *Sejam M uma variedade holomorfa, K um subconjunto analítico irredutível de M e V um subconjunto analítico irredutível de $M \setminus K$ tal que $dim(V) > dim(K)$. Então $\overline{V}$ é subconjunto analítico de M.*

Suponhamos então que $\overline{L} \setminus L \subset \operatorname{sing}(\mathcal{F})$. Como $\operatorname{sing}(\mathcal{F})$ é subconjunto analítico de $\mathbb{C}P(n)$ de dimensão zero, obtemos dos Teoremas de Remmert-Stein e de Chow, que $\overline{L}$ é um conjunto algébrico. Isto implica, em particular, que L é subconjunto analítico (de dimensão um) de $\mathbb{C}P(n) \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$. Portanto $\overline{L}$ é uma curva algébrica, como o leitor pode verificar.

O seguinte resultado é creditado a Jouanolou:

Teorema 3.1.4 (Teorema de Jouanolou)**.** *Se $n = 2$ e $k \geq 2$, então a folheação de Jouanolou $\mathcal{J}(2, k)$ não possui folha algébrica. De fato existe um subconjunto genérico (denso e residual) de folheações em $\mathcal{F}(2, k), k \geq 2$, cujos elementos são folheações sem folhas algébricas.*

O resultado acima foi melhorado primeiro para dimensão 2 [54] e posteriormente para dimensão $n \geq 2$ [58] como segue:

Teorema 3.1.5. *Para todo $n \geq 2$ e todo $k \geq 2$, existe um aberto e denso $A(n, k) \subset \mathcal{F}(n, k)$ tal que se $\mathcal{F} \in A(n, k)$ então $\mathcal{F}$ não possui folha algébrica.*

No §4 veremos a prova do Teorema de Jouanolou e a prova do Teorema 3.1.3 no caso $n = 2$.

Definição 3.1.6. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em M. Uma *integral primeira meromorfa* de $\mathcal{F}$ é uma função meromorfa não constante em M, digamos f, tal que f é constante ao longo das folhas de $\mathcal{F}$.

Observação 3.1.7. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1, dada por uma 1-forma holomorfa integrável ω em M. Então uma função meromorfa f é uma integral primeira de $\mathcal{F}$ se, e somente se, $\omega \wedge df \equiv 0$. Deixamos a prova para o leitor (veja Exercício 9).

Note que uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(2)$, que possui uma integral primeira racional de f, tem todas as folhas algébricas. Nesta seção provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.8 (Teorema de Darboux)**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}P(2)$ que possui uma infinidade de soluções algébricas. Então $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional.*

Demonstração. Vamos supor que o conjunto singular de $\mathcal{F}$ tem codimensão ≥ 2. Seja $\mathcal{F}^* = \Pi^*(\mathcal{F})$. Como vimos anteriormente, existe uma 1-forma holomorfa $\Omega = Pdx + Qdy + Rdz$ em $\mathbb{C}^3$, cujos coeficientes, P, Q e R, são polinômios homogêneos de mesmo grau, digamos k, tal que $\Omega = 0$ define $\mathcal{F}^*$. A forma Ω satisfaz $i_R(\Omega) = 0$ (veja o Teorema 2.4.9 e a observação 4 do §5 do Capítulo 2). Além disto, $\text{sing}(\Omega)$ tem codimensão 2.

Seja agora S uma solução algébrica irredutível de $\mathcal{F}$. Como S tem codimensão um, vemos que $S = Z(f)$, onde f é um polinômio homogêneo irredutível em $\mathbb{C}^3$. Neste caso, $(f = 0)$ é invariante por $\mathcal{F}^*$.

Afirmação 3.1.9. *Existe uma 2-forma θ tal que:* (i)$df \wedge \Omega = f.\theta$. (ii) *Os coeficientes de θ são polinômios homogêneos de grau $k - 1$.*

Com efeito, a Proposição 1.2.13, garante que a forma $\alpha = \frac{df}{f} \wedge \Omega$ é holomorfa em $\mathbb{C}^3 \setminus \operatorname{sing}(\Omega)$. Como $\operatorname{sing}(\Omega)$ tem codimensão 2, pelo Teorema de Hartogs, α se estende a uma 2-forma holomorfa em $\mathbb{C}^3$, a qual chamaremos ainda de α. Seja $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ o desenvolvimento de Taylor de α, onde os coeficientes de α_j são polinômios homogêneos de grau j. Vemos então que:

$$df \wedge \Omega = f.\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} f.\alpha_j$$

Se f tem grau m, a forma $df \wedge \Omega$ tem coeficientes homogêneos de grau $k+m-1$. Por outro lado, $f.\alpha_j$ tem coeficientes homogêneos de grau $m+j$. Concluímos daí, que se $m+j \neq k+m-1$, então $f.\alpha_j = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_j = 0$. Portanto, $df \wedge \Omega = f.\alpha_{k-1}$, como queríamos.

Seja agora: $E = \{\theta;\ \theta$ é 2-forma holomorfa em $\mathbb{C}^3$, cujos coeficientes são polinômios homogêneos de grau $k-1$ $\}$.

Observe que E é um espaço vetorial de dimensão finita, digamos N. Suponhamos que $\mathcal{F}^*$ possua $N+1$ soluções algébricas, $(f_0 = 0), ..., (f_N = 0)$, onde $f_0, ..., f_N$ são irredutíveis e primos dois a dois. Podemos então escrever que

$$\frac{df_j}{f_j} \wedge \Omega = \theta_j,\ j = 0, ..., N,$$

onde $\theta_j \in E$. Como E tem dimensão N, o conjunto $T = \{\theta_0, ..., \theta_N\}$ é linearmente dependente. Neste caso, existe uma combinação linear não nula de elementos de T, que se anula. Podemos supor então que $\sum_{j=0}^{r} a_j\, \theta_j = 0$, onde $a_0, ..., a_r \in \mathbb{C}^*$, $r \leq N$. Desta identidade, obtemos que $\alpha \wedge \Omega = 0$, onde:

$$(*)\quad \alpha = \sum_{j=0}^{r} a_j \frac{df_j}{f_j}.$$

Como $\operatorname{cod}(\operatorname{sing}(\Omega))) = 2$, $f_0...f_k.\alpha$ é holomorfa e $f_0...f_k.\alpha \wedge \Omega = 0$, vemos que $f_0...f_k.\alpha = g.\Omega$, onde g é um polinômio homogêneo. Em particular, $\mathcal{F}$ é folheação logarítmica e $k \geq 1$, já que $\sum_{j=1}^{r} a_j\, d(f_j) = 0$ (veja a Proposição 2.5.11 do Capítulo 2).

Suponhamos agora que $\mathcal{F}^*$ possua uma outra solução $(f_{N+1} = 0)$, onde f_{N+1} é irredutível e primo com f_j para todo $j = 0, ..., N$. Seja $\theta \in E$ tal que $df_{N+1} \wedge \Omega = f_{N+1}.\theta$. Utilizando que $\{\theta, \theta_1, ..., \theta_N\}$ é linearmente dependente e um argumento análogo ao anterior, obtemos uma forma logarítmica

$$\beta = \sum_{j=1}^{s} b_j \frac{df_{i(j)}}{f_{i(j)}}$$

tal que $f_{i(1)}...f_{i(s)}.\beta = h.\Omega$, onde h é um polinômio homogêneo, $b_j \neq 0$ e $i(j) \neq 0$, $\ j = 1, ..., s$. Decorre daí que $\alpha = F.\beta$, onde $F = (g.f_{i(1)}...f_{i(s)})/(h.f_0...f_r)$. Note que F não pode ser constante, uma vez que o resíduo de α em $(f_0 = 0)$ é $a_0 \neq 0$ enquanto que o de β é 0. Como α e β são fechadas temos $dF \wedge \beta = 0 \Rightarrow dF \wedge \Omega = 0$. Em particular F é integral primeira de $\mathcal{F}^*$. $\square$

Como conseqüência da prova do Teorema 3.1.4, obtemos o seguinte:

Corolário 3.1.10. *Para todo $k \geq 1$, existe $M = M(k)$ tal que se $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(2, k)$ possui mais de $M(k)$ soluções algébricas, então $\mathcal{F}$ tem integral primeira meromorfa.*

3.2 O Teorema do índice

O objetivo desta seção é enunciar o Teorema do Índice de C. Camacho e P. Sad e provar uma versão do mesmo para folheações de $\mathbb{C}P(2)$. Consideraremos a seguinte situação:

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa, com singularidades isoladas, numa variedade complexa M de dimensão 2. Suponhamos que existe uma superfície de Riemann compacta e conexa, digamos S, mergulhada em M, a qual é invariante por $\mathcal{F}$. Neste caso, $S \cap \text{sing}(\mathcal{F})$ é finito. A cada ponto $p \in S \cap \text{sing}(\mathcal{F})$ associaremos um número complexo, chamado de *índice* de $\mathcal{F}$ com respeito a S em p. Como veremos, a soma de tais índices, será um número inteiro que depende somente do mergulho de S em M. Antes de enunciar o Teorema do índice precisamos definir alguns conceitos.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação definida numa vizinhança U da origem $0 \in \mathbb{C}^2$, e com uma singularidade isolada em 0. Seja γ uma separatriz de $\mathcal{F}$ em 0. Tal separatriz possui uma equação irredutível local $f = 0$ e uma parametrização de Puiseux $\alpha \colon \mathbb{D} \to \gamma$ (veja o Corolário do Teorema 1.6.15 do Capítulo 1). Fixemos também uma 1-forma holomorfa ω que define $\mathcal{F}$ numa vizinhança de 0.

Lema 3.2.1. *Existem funções holomorfas g, h e uma 1-forma holomorfa η, definidas numa vizinhança de 0, tais que:*

$$(*)\, g\omega = hdf + f\eta,$$

onde $h \not\equiv 0 \not\equiv g$ em γ.

Demonstração. Seja $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, $(x,y) \in U$, onde $(P = Q = 0) = \{0\}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma \neq (x = 0)$. Neste caso, $Q \not\equiv 0$ em γ, como o leitor pode verificar. Analogamente, como $(f = 0)$ é solução de $df = f_x dx + f_y dy = 0$, vemos que $f_y \not\equiv 0$ em γ. Por outro lado, como $(f = 0)$ é invariante por $\mathcal{F}$, temos $df \wedge \omega = f.\theta = f.k.dx \wedge dy$, onde k é holomorfa. A relação anterior é equivalente a $f_x.Q - f_y.P = f.k$. Decorre daí que

$$f_y.\omega = f_y(Pdx + Qdy) = Q(f_x dx + f_y dy) - f.k.dx = Q.df - f.k.dx.$$

Basta então tomarmos $g = f_y$, $h = Q$ e $\eta = -kdx$. $\square$

Consideremos agora a parametrização de Puiseux α de γ. Note que $\alpha\mid_{\mathbb{D}^*}$ é um biholomorfismo de $\mathbb{D}^*$ sobre $\gamma^* = \gamma \setminus \{0\}$. Em particular, $H_1(\gamma^*, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ e se $\delta(t) = r.e^{it}, t \in [0, 2\pi]$, então a classe do caminho imagem $\alpha(\delta)$ em $H^1(\gamma^*, \mathbb{Z})$ é um gerador desta homologia.

Lema 3.2.2. *A integral*

$$I(\mathcal{F}, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha(\delta)} -\frac{\eta}{h}$$

só depende da folheação $\mathcal{F}$ e da separatriz γ.

Definição 3.2.3. O número complexo $I(\mathcal{F}, \gamma)$, definido acima, é chamado de *índice* da separatriz γ relativa a $\mathcal{F}$.

O conceito de índice foi introduzido, no caso em que γ é lisa, por C.Camacho e P. Sad em [12] e generalizado como acima em [56].

Prova do Lema 3.2.2. Pelo Lema 3.2.1 podemos escrever que $g\omega = hdf + f\eta$, onde $g \not\equiv 0$ e $h \not\equiv 0$ em γ. Provaremos primeiramente que $I(\mathcal{F}, \gamma)$ independe de g,h e η. Suponhamos então que temos outra decomposição $g'\omega = h'df + f\eta'$, como anteriormente. Observe que:

$$\frac{df}{f} = \frac{g\omega}{fh} - \frac{\eta}{h} = \frac{g'\omega}{fh'} - \frac{\eta'}{h'} \;\Rightarrow\; \frac{\eta}{h} - \frac{\eta'}{h'} = \frac{h'.g - h.g'}{f.h.h'}.\omega.$$

Por outro lado:

$$f(h' - h)(\eta - \eta') = (h'.g - h.g')\omega \;\Rightarrow\; f \text{ divide } h'.g - h.g',$$

já que f é irredutível e não pode dividir ambas as componentes de ω. Podemos então escrever $h'.g - h.g' = f.k$, onde k é holomorfa. Obtemos daí que

$$\frac{\eta}{h} - \frac{\eta'}{h'} = \frac{k}{h.h'}.\omega.$$

Como γ é invariante por $\mathcal{F}$ e $h.h' \not\equiv 0$ em γ, vemos que $\frac{\eta}{h}\mid_\gamma = \frac{\eta'}{h'}\mid_\gamma$. Logo:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha(\delta)} -\frac{\eta}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha(\delta)} -\frac{\eta'}{h'},$$

como queríamos.

Provemos agora que $I(\mathcal{F}, \gamma)$ independe da equação de γ. Se $f' = 0$ é outra equação irredutível de γ, temos $f = u.f'$, onde $u(0) \neq 0$. Observe que:

$$g\omega = hdf + f\eta = h(udf' + f'du) + uf'\eta = h'df' + f'\eta',$$

onde $h' = hu$ e $\eta' = hdu + u\eta$. Portanto:

$$\frac{\eta'}{h'} = \frac{du}{u} + \frac{\eta}{h}.$$

Como $u(0) \neq 0$, temos $\int_{\alpha(\delta)} -\frac{du}{u} = 0$. Portanto:

$$\int_{\alpha(\delta)} -\frac{\eta'}{h'} = \int_{\alpha(\delta)} -\frac{\eta}{h},$$

como queríamos.

Finalmente $I(\mathcal{F}, \gamma)$ independe da forma que representa $\mathcal{F}$: se ω' é outra forma que representa $\mathcal{F}$ em vizinhança de 0, temos $\omega' = u.\omega$, onde $u(0) \neq 0$. Portanto $g\omega' = (u.h)df + f(u.\eta) = h'.df + f.\eta'$. A independência decorre então de que $\frac{\eta}{h} = \frac{\eta'}{h'}$, neste caso. □

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.2.4. Suponhamos que a separatriz γ é lisa. Neste caso podemos supor que $\gamma = (y = 0)$. Seja $\omega = Pdx + Qdy$. Como $(y = 0)$ é invariante, temos $P(x, 0) = 0 \Rightarrow P(x, y) = y.p(x, y)$. Logo $\omega = Qdy + y.pdx = hdy + y\eta$, de onde obtemos

$$-\frac{\eta}{h} \mid_\gamma = -\frac{p(x,0)}{Q(x,0)}dx \;\Rightarrow\; I(\mathcal{F}, \gamma) = Res(-\frac{p(x,0)}{Q(x,0)}dx, 0).$$

A fórmula acima pode ser encontrada em [12]. Um caso particular interessante é quando $\mathcal{F}$ é definida por um campo com parte linear $DX(0) = (\lambda_1.x + b.y)\partial/\partial x + \lambda_2.y$. Neste caso $I(\mathcal{F}, (y = 0)) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, como o leitor pode verificar.

Exemplo 3.2.5. Consideremos o caso em que $\mathcal{F}$ tem uma integral primeira holomorfa numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$. Seja g esta integral primeira. Podemos supor que $g(0) = 0$ e que a equação de γ é $(f = 0)$, onde f é um germe irredutível. Sendo assim, podemos escrever $g = f^m.h$, onde $m \geq 1$ e f não divide h. Seja ω uma forma que representa $\mathcal{F}$ em vizinhança de 0. Como g é integral primeira de $\mathcal{F}$ e 0 é singularidade isolada de ω, temos $dg = h_1.\omega$, onde h_1 é holomorfa. Obtemos daí que

$$h_1.\omega = f^{m-1}(m.h.df + f.dh) \;\Rightarrow\; f^{m-1} \text{ divide } h_1 \;\Rightarrow\; k.\omega = m.h.df + f.dh$$

onde $k = h_1/f^{m-1}$. Vemos então que

$$I(\mathcal{F}, \gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\delta -\frac{dh}{mh} = -\frac{1}{m}[\gamma, (h = 0)]_0,$$

onde $[,]_0$ denota o número de intersecção em 0 (veja a Seção 1 do Capítulo 2). Em particular se h é uma unidade, isto é, $h(0) \neq 0$, temos $I(\mathcal{F}, \gamma) = 0$. Mais geralmente, se $h = f_1^{m_1} ... f_n^{m_n}$ é a decomposição de h em germes irredutíveis, então

$$I(\mathcal{F}, \gamma) = -\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} m_j \, [\gamma, (f_j = 0)]_0.$$

Consideremos agora uma superfície de Riemann compacta e conexa S, mergulhada numa variedade complexa M de dimensão 2. O *número de auto-intersecção* de S em M é definido da seguinte maneira (veja [40]):

Seja $\tilde{S}$ uma deformação C^∞ de S tal que $\tilde{S}$ corta transversalmente S ($\tilde{S}$ pode ser obtida, por exemplo, considerando-se uma isotopia de S, ou seja $\tilde{S} = f(S)$, onde f é um difeomorfismo C^∞ de M próximo da identidade). Neste caso, $S \cap \tilde{S}$, é finito. Se $S \cap \tilde{S} = \phi$ define-se o número de auto-intersecção como zero. Caso contrário, dado $p \in S \cap \tilde{S}$, define-se o *sinal* da intersecção em p, $sn(p)$, como $+1$ ou -1, de acordo com a seguinte regra:

Sejam $\{u_1, u_2\}$ e $\{v_1, v_2\}$ bases positivas de T_pS e $T_p\tilde{S}$ respectivamente, onde em S consideramos a orientação dada pela estrutura complexa (podemos tomar, por exemplo $u_2 = i\, u_1$) e em $\tilde{S}$ a orientação dada pela deformação (isto é induzida pelo difeomorfismo f). Colocamos então $sn(p) = +1$ se a base $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ é positiva em T_pM e $sn(p) = -1$, caso contrário.

Definição 3.2.6. O *número de auto-intersecção* de S, é o inteiro

$$S.S = \sum_{p \in S \cap \tilde{S}} sn(p).$$

Prova-se que este número não depende da deformação $\tilde{S}$ (veja [40]).

Observação 3.2.7. Prova-se que $S.S$ coincide com a primeira classe de Chern do fibrado normal de S em M (veja [12]).

Podemos agora enunciar o Teorema do índice de Camacho-Sad.

Teorema 3.2.8 (Teorema do índice)**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação com singularidades isoladas numa variedade complexa M de dimensão 2. Suponha que $\mathcal{F}$ admite um subconjunto invariante S, o qual é uma superfície de Riemann compacta, conexa e mergulhada em M. Para cada $p \in S \cap \operatorname{sing}(\mathcal{F})$, seja S_p o ramo de S passando por p. Então*

$$(*) \qquad \sum_{p \in S \cap \operatorname{sing}(\mathcal{F})} I(\mathcal{F}, S_p) = S.S.$$

A prova do teorema acima pode ser encontrada em [12]. Algumas generalizações deste resultado podem ser encontradas em [56] e [20].

Em seguida veremos uma generalização do Teorema do índice para curvas, não necessariamente lisas, em $\mathbb{C}P(2)$. Consideraremos a seguinte situação:

Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação com singularidades isoladas em $\mathbb{C}P(2)$ e S uma solução algébrica de $\mathcal{F}$, não necessariamente lisa. Para cada $p \in S \cap \text{sing}(\mathcal{F})$, consideramos os ramos de S em p, digamos $S_p^1, ..., S_p^{m(p)}$. Usaremos a seguinte notação

$$I(\mathcal{F}, S) = \sum_{p \in S \cap \text{sing}(\mathcal{F})} \sum_{j=1}^{m(p)} I(\mathcal{F}, S_p^j)$$

Teorema 3.2.9 ([55]). *Na situação acima vale que:*

$$(**) \quad I(\mathcal{F}, S) = 3d(S) - \chi(S^*) + \sum_{p \in \text{sing}(S)} \sum_{j=1}^{m(p)} \mu(S_p^j)$$

onde $d(S)$ é o grau de S, $\mu(S_p^j)$ denota o número de Milnor do ramo S_p^j e $\chi(S^*)$ é a característica de Euler da normalização S^* de S (veja a definição 16 do §6 do Capítulo 1).

Observação 3.2.10. O número de Milnor de um ramo S_p^j é definido da seguinte maneira:

Seja $(f = 0)$ uma equação irredutível local do ramo S_p^j. Consideremos a folheação $\mathcal{G}$, definida numa vizinhança de p por $df = 0$. Define-se $\mu(S_p^j) = \mu(\mathcal{G}, p)$.

Em particular, se o ramo é liso temos $\mu(S_p^j) = 0$, já que neste caso df não tem singularidade em p.

Prova-se que (veja [65]):

$$\mu(S_p^j) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathcal{O}_p}{< f_x, f_y >}\right) = [f_x, f_y]_p \geq 0,$$

onde $< f_x, f_y >$ denota o ideal Jacobiano de f, $\mathcal{O}_p$ o anel dos germes de funções holomorfas em p e $[f_x, f_y]_p$ o número de intersecção de $(f_x = 0)$ com $(f_y = 0)$ em p.

A seguinte conseqüência será utilizada mais adiante:

Corolário 3.2.11. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}P(2)$ e S uma solução algébrica de $\mathcal{F}$. Então:* (a) *$I(\mathcal{F}, S)$ é um inteiro positivo.* (b) *$I(\mathcal{F}, S) = 1$ se, e somente se, S é uma reta projetiva mergulhada.* (c) *$I(\mathcal{F}, S) \neq 2$.*

Prova do Corolário. Pelo Teorema 3.1.8,

$$I(\mathcal{F},S) = 3d(S) - \chi(S^*) + \sum_{p\in S\cap \mathrm{sing}(\mathcal{F})} \sum_{j=1}^{m(p)} \mu(S_p^j) \geq 3d(S) - \chi(S^*) \geq 1$$

onde acima, utilizamos a observação 4, que $\chi(S^*) \leq 2$ e que $d(S) \geq 1$.

Por outro lado,

$$I(\mathcal{F},S) = 1 \ \Leftrightarrow \ 1 \geq 3d(S) - \chi(S^*) \geq 3d(S) - 2 \geq 1 \ \Leftrightarrow \ d(S) = 1$$

o que prova (b).

Além disto,

$$I(\mathcal{F},S) = 2 \ \Rightarrow \ 2 \geq 3d(S) - 2 \ \Rightarrow \ d(S) \leq \frac{4}{3} \ \Rightarrow \ d(S) = 1 \ \Rightarrow \ I(\mathcal{F},S) = 1$$

o que é um absurdo. □

Prova do Teorema 3.1.8. Precisamos de um lema.

Lema 3.2.12. *$I(\mathcal{F},S)$ não depende de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Consideremos uma resolução da curva S, $\pi\colon M \to \mathbb{C}P(2)$. Sejam S^* o transformado estrito de S e $\mathcal{F}^* = \pi^*(\mathcal{F})$. Pelo Teorema do índice, $I(\mathcal{F}^*,S^*) = S^*.S^*$, não depende de $\mathcal{F}^*$. O lema resultará da seguinte:

Afirmação 3.2.13. *$I(\mathcal{F},S) = I(\mathcal{F}^*,S^*) + k$, onde k é um inteiro positivo que só depende de π.*

De fato, seja $S_p^j = R$ um ramo de S passando por uma singularidade p de $\mathcal{F}$, com equação irredutível (f=0). O transformado estrito R^*, de R, é um disco contido em S^* e que corta transversalmente o divisor D de π num ponto q, que não é uma esquina de D. Seja ω uma forma holomorfa que representa $\mathcal{F}$ em vizinhança de p e consideremos uma decomposição como no Lema 3.2.1: $g.\omega = h.df + f.\eta$. Fixemos um sistema de coordenadas holomorfo (u,v), em vizinhança U de q tal que $D \cap U = (v = 0)$ e $R^* \cap D = (u = 0)$. Coloquemos $f^* = f \circ \pi$. Como $f^*(u,0) \equiv 0$, $f^*(0,v) \equiv 0$ e f é irredutível, obtemos que $f^*(u,v) = u.v^r.k(u,v)$, onde $k(0,0) \neq 0$. Fazendo $g^* = g \circ \pi$, $h^* = h \circ \pi$, $\omega^* = \pi^*(\omega)$ e $\eta^* = \pi^*(\eta)$, obtemos:

$$\frac{g^*}{h^*.f^*}.\omega^* = \pi^*(\frac{g.\omega}{h.f}) = \pi^*(\frac{df}{f} + \frac{\eta}{h}) = \frac{df^*}{f^*} + \frac{\eta^*}{h^*} = \frac{du}{u} + \frac{dk}{k} + r.\frac{dv}{v} + \frac{\eta^*}{h^*} = \frac{du}{u} + \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{h}}.$$

Seja δ um gerador da homologia de $R^* \setminus \{q\}$. Como a equação de R^* é $u = 0$, obtemos

$$I(\mathcal{F}^*,R^*) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{h}} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\delta [\frac{dk}{k} + r\frac{dv}{v} + \frac{\eta^*}{h^*}] = -r + \frac{1}{2\pi i}\int_{\pi(\delta)} -\frac{\eta}{h} = -r + I(\mathcal{F},R)$$

Provamos que $I(\mathcal{F}, R) = I(\mathcal{F}^*, R^*) + r$, onde r só depende de π. Isto prova a afirmação e o Lema. $\square$

Consideremos agora um sistema de coordenadas afim $\mathbb{C}^2 \simeq E \subset \mathbb{C}P(2)$, cuja reta do infinito $L = \mathbb{C}P(2) \setminus E$, é transversal a S. Seja $f = 0$ uma equação polinomial irredutível de S de grau $k = d(S)$. Seja $\mathcal{G}$ o compactificado em $\mathbb{C}P(2)$ da folheação de $\mathbb{C}^2$ dada por $df = 0$. Como $S \cap E = (f = 0)$ é invariante por $\mathcal{G}$, pelo Lema 3.2.12 temos: $I(\mathcal{F}, S) = I(\mathcal{G}, S)$. Calculemos então $I(\mathcal{G}, S)$. O conjunto singular de $\mathcal{G}$ pode ser dividido em duas partes: (i) $\mathcal{S}_\infty = \text{sing}(\mathcal{G}) \cap L$. (ii) $\mathcal{S}_{fin} = \text{sing}(\mathcal{G}) \cap E$.

Analisemos o caso (i). Seja $x = 1/u$, $y = v/u$, uma mudança de coordenadas projetiva, onde $(u = 0)$ é a equação de L no novo sistema de coordenadas, digamos E'. Note que $f(1/u, v/u) = \tilde{f}(u, v)/u^k$. Decorre daí que $\mathcal{G}$ pode ser definida em E' por $\omega' = u.d\tilde{f} - k.\tilde{f}.du$, sendo $S \cap E' = (\tilde{f} = 0)$, como o leitor pode verificar diretamente. Em particular $\mathcal{S}_\infty \cap E' = \{(0, v);\ \tilde{f}(0, v) = 0\}$. Portanto $\mathcal{S}_\infty$ contém k pontos, já que L corta S transversalmente. Além disto, para cada $p_o = (0, v_o) \in \mathcal{S}_\infty$, $\tilde{f}$ possui apenas um ramo em p_o, digamos R_{p_o}. Vemos então que

$$I(\mathcal{G}, R_{p_o}) = \frac{1}{2\pi i} \int_\delta k \frac{du}{u} = k$$

já que a intersecção é transversal. Obtemos daí que

$$\sum_{p \in \mathcal{S}_\infty} I(\mathcal{G}, R_p) = k^2$$

.

Analisemos agora o caso (ii). Sejam $p \in \mathcal{S}_{fin}$ e $R_p^1, ..., R_p^{m(p)}$ os ramos de S por p. Como f é irredutível (globalmente), podemos decompor f numa vizinhança de p como $f = f_1 ... f_{m(p)}$, onde $R_p^j = (f_j = 0)$. Tendo-se em vista o exemplo 2, obtemos $I(\mathcal{G}, R_p^j) = -\sum_{i \neq j} [R_p^j, R_p^i]_p$. Portanto

$$(*) \quad I(\mathcal{G}, S) = k^2 - \sum_{p \in \mathcal{S}_{fin}} \sum_{j=1}^{m(p)} \sum_{i \neq j} [R_p^j, R_p^i]_p \ .$$

Calculemos agora $\chi(S^*)$. Consideremos a resolução π de S e S^*, o transformado estrito de S, como no Lema 3.2.12. Seja $X = -f_y \partial/\partial x + f_x \partial/\partial y$ o campo dual de $df = f_x dx + f_y dy$. Observe que X é tangente a $(f = 0)$, de forma que podemos considerar $X^* = \pi^*(X\mid_S)$, o qual é um campo meromorfo em S^*, cujos pólos estão em $\pi^{-1}(\mathcal{S}_\infty)$. Vamos utilizar aqui que

$$\chi(S^*) = Z(X^*) - P(X^*)$$

sendo

$$Z(X^*) = \sum_{X^*(q)=0} o(X^*, q) \text{ e } P(X^*) = \sum_{\text{q pólo de } X^*} p(X^*, q)$$

onde $o(X^*, q)$ e $p(X^*, q)$ denotam, respectivamente, a ordem de q como zero ou pólo de X^*. Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor (veja Exercício 3). Note que se $p \in \pi^{-1}(\mathcal{S}_\infty)$, então a ordem de p como pólo de X^*, é a mesma que a ordem de $\pi(p)$ como pólo de $X \mid_S$. Como o leitor pode verificar, esta ordem é $k-3$. Logo $P(X^*) = k(k-3)$.

Consideremos agora $q \in S^*$ tal que $X^*(q) = 0$. Se $p = \pi(q)$, então ao ponto q corresponde um ramo R_p^j de S por p. Vamos supor, sem perda de generalidade que $R_p^j \neq (x = 0)$. Seja $\alpha(T) = (x(T), y(T)), T \in \mathbb{D}$, uma parametrização de Puiseux de R_p^j. Esta parametrização pode ser obtida, tomando-se uma parametrização $\beta \colon \mathbb{D} \to S^*$ com $\beta(0) = q$, e em seguida considerando-se a composta $\alpha = \pi \circ \beta$. A expressão de X^* com relação ao parâmetro T é então

$$X^*(T) = -\frac{f_y(\alpha(T))}{x'(T)} \partial/\partial T,$$

de onde obtemos $o(X^*, q) = o(f_y \circ \alpha, T = 0) - o(x', T = 0)$. Por outro lado, se $\delta(t) = r.e^{2\pi i t}, t \in [0,1]$ é um gerador da homologia de $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, então

$$o(f_y \circ \alpha, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\delta \frac{d(f_y \circ \alpha)}{f_y \circ \alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\pi(\delta)} \frac{df_y}{f_y} = [f_y, f_j]_p.$$

Colocando $f = f_1 ... f_{m(p)}$, como anteriormente, temos $f_y = f_1 ... f_{j-1}.(f_j)_y.f_{j+1} ... f_{m(p)} + f_j\, k$,onde k é holomorfa. Obtemos daí que:

$$[f_y, f_j]_p = [(f_j)_y, f_j]_p + \sum_{i \neq j} [f_i, f_j]_p = [(f_j)_y, f_j]_p + \sum_{i \neq j} [R_p^i, R_p^j]_p.$$

Analogamente, se $p = (x_o, y_o)$, temos $o(x'(T), 0) = o(x(T) - x_o, 0) - 1 = [x - x_o, f_j]_p - 1$. Logo

$$(**) \quad o(X^*, q) = [(f_j)_y, f_j]_p - [x - x_o, f_j]_p + 1 + \sum_{i \neq j} [R_p^i, R_p^j]_p.$$

Vamos provar logo em seguida que $[(f_j)_y, f_j]_p - [x - x_o, f_j]_p + 1 = \mu(R_p^j)$. Levando-se isto em conta, e o fato de que os ramos das singularidades em $\mathcal{S}_\infty$ são lisos, obtemos de (**) que

$$(***) \quad \chi(S^*) = Z(X^*) - P(X^*) = -k^2 + 3k + \sum_{p \in \text{sing}(S)} \sum_{j=1}^{m(p)} \mu(R_p^j) + \sum_{p \in \mathcal{S}_{fin}} \sum_{j=1}^{m(p)} \sum_{i \neq j} [R_p^j, R_p^i]_p.$$

Levando-se (*) e (***) em conta, obtemos

$$I(\mathcal{G},S) = k^2 - [k^2 - 3k + \chi(S^*) - \sum_{p\in \mathrm{sing}(S)} \sum_{j=1}^{m(p)} \mu(R_p^j)] = 3k - \chi(S^*) + \sum_{p\in \mathrm{sing}(S)} \sum_{j=1}^{m(p)} \mu(R_p^j),$$

como queríamos.

Para finalizar, provaremos que, se g é um germe de função holomorfa irredutível em $0 \in \mathbb{C}^2$, tal que $(g = 0) \neq (x = 0)$, então $\mu(g = 0) = [g_y, g]_0 - [x, g]_0 + 1$. Para isto, seja $g_y = h_1^{k_1} ... h_r^{k_r}$ uma decomposição de g_y em germes irredutíveis. Seja $\alpha(T) = (x(T), y(T))$ uma parametrização de Puiseux de $(h_j = 0)$. Temos $(g \circ \alpha)'(T) = g_x \circ \alpha(T).x'(T) + g_y \circ \alpha(T).y'(T) = g_x \circ \alpha(T).x'(T)$. Como vimos acima,

$$[g, h_j]_0 = o(g \circ \alpha, 0) = o((g \circ \alpha)', 0) + 1 = o(g_x \circ \alpha, 0) + o(x', 0) + 1 = [g_x, h_j]_0 + [x, h_j]_0.$$

Obtemos daí que

$$[g, g_y]_0 = \sum_j k_j \left([g_x, h_j]_0 + [x, h_j]_0\right) = [g_x, g_y]_0 + [x, g_y]_0 = \mu(g = 0) + [x, g]_0 - 1,$$

já que $[x, g_y]_0 = [x, g]_0 - 1$ como o leitor pode verificar (veja Exercício 4). Isto prova o Teorema 3.1.8. $\square$

3.3 O Teorema de Baum-Bott em $\mathbb{C}P(2)$

seja $\mathcal{F}$ uma folheação com singularidades isoladas em uma variedade complexa e compacta de dimensão 2. Nesta seção associaremos a cada singularidade p de $\mathcal{F}$ um número complexo, chamado *índice de Baum-Bott* de p. O Teorema de Baum-Bott garante que a soma de todos estes índices é um número inteiro que só depende da estrutura complexa de M e de certas classes de Chern associadas a $\mathcal{F}$ (veja [3]). Mais adiante provaremos uma versão do Teorema de Baum-Bott para folheações em $\mathbb{C}P(2)$.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa, com singularidades isoladas, em $U \subset \mathbb{C}^2$. Fixemos um campo holomorfo $X = P(x,y)\partial/\partial x + Q(x,y)\partial/\partial y$ que define $\mathcal{F}$ em U e $\omega = Pdy - Qdx$ a forma dual.

Lema 3.3.1. *Existe uma (1,0)-forma diferencial η, de classe C^∞ em $V = U \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$, com as seguintes propriedades:* (a) $d\omega = \eta \wedge \omega$. (b) $\eta \wedge d\eta$ *é fechada.* (c) *A classe de cohomologia de $\eta \wedge d\eta$ em $H^3_{DR}(V)$, depende somente de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Tomando

$$\eta = (P_x + Q_y).\frac{\overline{P}dx + \overline{Q}dy}{\mid P \mid^2 + \mid Q \mid^2}$$

obtemos $d\omega = \eta \wedge \omega$, como o leitor pode verificar diretamente, o que prova (a).

A verificação de (b) pode ser feita diretamente, no entanto daremos uma outra prova. De (a) obtemos

$$0 = d^2\omega = d\eta \wedge \omega + \eta \wedge d\omega = d\eta \wedge \omega + \eta \wedge \eta \wedge \omega = d\eta \wedge \omega.$$

Utilizaremos agora o seguinte resultado, cuja prova deixamos como exercício para o leitor (veja Exercício 5):

Lema 3.3.2 (Lema de Divisão)**.** *Seja α uma p-forma de classe C^∞ em $U \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$ tal que $\alpha \wedge \omega = 0$, onde $1 \leq p \leq 3$. Então existe uma (p-1)-forma de classe C^∞ em $U \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$, digamos β, tal que $\alpha = \beta \wedge \omega$.*

Decorre do Lema da divisão, que $d\eta = \alpha \wedge \omega$, onde α é C^∞ em V (verifique). Portanto $d(\eta \wedge d\eta) = d\eta \wedge d\eta = \alpha \wedge \omega \wedge \alpha \wedge \omega = 0$, o que prova (b).

Provemos (c). Seja $\tilde{\eta}$ uma outra (1,0)-forma de classe C^∞ em V satisfazendo (a). De $d\omega = \eta \wedge \omega = \tilde{\eta} \wedge \omega$, obtemos

$$(\tilde{\eta} - \eta) \wedge \omega = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{\eta} - \eta = g.\omega$$

onde g é de classe C^∞ em V. Vemos então que $d\tilde{\eta} = d\eta + dg \wedge \omega + g.d\omega$, o que implica

$$\tilde{\eta} \wedge d\tilde{\eta} - \eta \wedge d\eta = \eta \wedge dg \wedge \omega = -dg \wedge d\omega = -d(g.d\omega),$$

onde acima utilizamos que $\eta \wedge d\omega = \omega \wedge d\eta = \omega \wedge d\omega = 0$ e que $\eta \wedge \omega = d\omega$. Portanto $\tilde{\eta} \wedge d\tilde{\eta} - \eta \wedge d\eta$ é fechada, como queríamos.

Veremos agora que a classe de cohomologia de $\eta \wedge d\eta$ depende somente de $\mathcal{F}$. Seja ω_1 outra forma holomorfa que define $\mathcal{F}$ em U. Como as singularidades de $\mathcal{F}$ são isoladas, temos $\omega_1 = f.\omega$, onde f é holomorfa e não se anula em U. Portanto

$$d\omega_1 = df \wedge \omega + f.d\omega = \frac{df}{f} \wedge \omega_1 + f.\eta \wedge \omega = (\frac{df}{f} + \eta) \wedge \omega_1.$$

Logo $d\omega_1 = \eta_1 \wedge \omega_1$, onde $\eta_1 = \frac{df}{f} + \eta$, de onde obtemos

$$\eta_1 \wedge d\eta_1 - \eta \wedge d\eta = \frac{df}{f} \wedge d\eta = d(\eta \wedge \frac{df}{f}),$$

como queríamos. □

Seja agora p uma singularidade de $\mathcal{F}$. Como p é singularidade isolada, fixemos uma bola $B = B(p, \rho) \subset U$ tal que a única singularidade de $\mathcal{F}$ em B é p.

Definição 3.3.3. O *índice de Baum-Bott* de $\mathcal{F}$ em p é o número complexo

$$BB(\mathcal{F}, p) = Res(\eta \wedge d\eta, p),$$

onde $Res(\eta \wedge d\eta, p)$ é definido da seguinte maneira: sejam $0 < r < \rho$ e $S_r = S^3(p, r) = \partial B(p, r)$. Então

$$Res(\eta \wedge d\eta, p) = \frac{1}{8V} \int_{S_r} \eta \wedge d\eta,$$

onde $V = \pi^2/2$, é o volume na métrica Euclideana de $\mathbb{C}^2$ da bola de raio 1.

Observação 3.3.4. Note que a integral acima não depende do raio r considerado, uma vez que $\eta \wedge d\eta$ é fechada. De fato, para qualquer compacto conexo K, com fronteira regular $M = \partial K$, tal que $p \in int(K)$ é a única singularidade de $\mathcal{F}$ em K vale que

$$Res(\eta \wedge d\eta, p) = \frac{1}{8V} \int_{S_r} \eta \wedge d\eta = \frac{1}{8V} \int_M \eta \wedge d\eta$$

Decorre daí que $BB(\mathcal{F}, p)$ é invariante por mudanças de coordenadas, isto é, se $\varphi \colon V \to U$ é um biholomorfismo então

$$BB(\varphi^*(\mathcal{F}), \varphi^{-1}(p)) = BB(\mathcal{F}, p),$$

como o leitor pode verificar (veja Exercício 6). Isto garante que o conceito pode ser definido para singularidades isoladas de folheações em variedades de dimensão 2 através de cartas locais.

Exemplo 3.3.5. Consideremos o caso em que a folheação tem uma singularidade não degenerada em $p \in U$. Podemos supor que $p = 0 \in \mathbb{C}^2$. Sejam $X = P\partial/\partial x + Q\partial/\partial y$ um campo holomorfo que representa $\mathcal{F}$ em vizinhança de 0 e $\omega = Pdy - Qdx$ a forma dual. Seja $A = DX(0)$. Afirmamos que $BB(\mathcal{F}, 0) = \frac{T^2}{D}$, onde T é o traço de A e D o seu determinante.

Seja então

$$\eta = (P_x + Q_y).\frac{\overline{P}dx + \overline{Q}dy}{\mid P \mid^2 + \mid Q \mid^2},$$

como na prova do Lema 3.3.1. Com um cálculo direto obtemos

$$\eta \wedge d\eta = \frac{(P_x + Q_y)^2}{(\mid P \mid^2 + \mid Q \mid^2)^2}.(\overline{P}dx + \overline{Q}dy) \wedge (d\overline{P} \wedge dx + d\overline{Q} \wedge dy) =$$

$$= \frac{(P_x + Q_y)^2}{(\mid P \mid^2 + \mid Q \mid^2)^2}.(\overline{Q}d\overline{P} - \overline{P}d\overline{Q}) \wedge dx \wedge dy.$$

Consideremos em primeiro lugar o caso em que $X = A$ é linear. Neste caso, como $D = det(A) \neq 0$, a aplicação $(u,v) = \varphi(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ é um biholomorfismo. Além disto, $P_x + Q_y = T$. Por outro lado,

$$\Theta = \varphi^*(\eta \wedge d\eta) = \frac{T^2}{(\mid u \mid^2 + \mid v \mid^2)^2}.(\overline{v}d\overline{u} - \overline{u}d\overline{v}) \wedge (D^{-1}du \wedge dv),$$

já que $du \wedge dv = D.dx \wedge dy$. Integrando Θ na esfera $S^3 = (\mid u \mid^2 + \mid v \mid^2 = 1)$, obtemos

$$\int_{S^3} \Theta = \frac{T^2}{D} \int_{S^3} (\overline{v}d\overline{u} - \overline{u}d\overline{v}) \wedge du \wedge dv = \frac{T^2}{D} \int_B 2du \wedge d\overline{u} \wedge dv \wedge d\overline{v},$$

onde acima $B = B(0,1)$ e utilizamos o Teorema de Stokes na última igualdade. Como $du \wedge d\overline{u} \wedge dv \wedge d\overline{v} = 4.dV$, onde dV é a forma de volume Euclideana em $\mathbb{C}^2$, temos

$$BB(\mathcal{F}, 0) = \frac{1}{8V} \int_{S^3} \Theta = \frac{T^2}{D},$$

como queríamos.

Consideremos agora o caso geral. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\mathcal{F}$ está definida na bola de raio 2, $B(0,2)$, e que 0 é a única singularidade de $\mathcal{F}$ nesta bola. Podemos escrever $P = P_1 + R$ e $Q = Q_1 + S$, onde P_1 e Q_1 são lineares e R e S têm ordem ≥ 2 em 0. Seja $H_t(p) = t.p$, a homotetia de razão $t > 0$. Observe que para $0 < t \leq 1$ temos $S^3 \subset H_t^{-1}(B(0,2)) = B(0, 2/t)$, logo

$$BB(\mathcal{F}, 0) = \frac{1}{8V} \int_{S^3} \Theta_t,$$

onde $\Theta_t = H_t^*(\eta \wedge d\eta)$.

Por outro lado, $H_t^*(\eta \wedge d\eta) =$

$$= \frac{(\Delta_t)^2}{(\mid P_1 + R_t \mid^2 + \mid Q_1 + S_t \mid^2)^2}.[(\overline{Q_1 + R_t})d(\overline{P_1 + S_t}) - (\overline{P_1 + R_t})d(\overline{Q_1 + S_t})] \wedge dx \wedge dy,$$

onde $\Delta_t = T + R_x \circ H_t + S_y \circ H_t$, $R_t = t^{-1}.R \circ H_t$ e $S_t = t^{-1}.S \circ H_t$. Observe agora que Δ_t converge uniformemente em S^3 para T, quando $t \to 0$. Analogamente R_t e S_t convergem uniformemente em S^3 para zero, quando $t \to 0$. Decorre daí que Θ_t converge uniformemente em S^3, quando $t \to 0$, para

$$\Theta_0 = \frac{T^2}{(\mid P_1 \mid^2 + \mid Q_1 \mid^2)^2}.(\overline{Q_1}d\overline{P_1} - \overline{P_1}d\overline{Q_1}) \wedge dx \wedge dy.$$

Isto reduz o problema ao primeiro caso. Logo $BB(\mathcal{F}, 0) = \frac{T^2}{D}$.

Proposição 3.3.6. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação com singularidades isoladas em $U \subset \mathbb{C}^2$ e A um aberto com fecho compacto $\overline{A} \subset U$, cuja fronteira ∂A é regular por partes e $\partial A \cap \operatorname{sing} \mathcal{F} = \phi$. Seja η como no Lema 3.3.1. Então:*

$$\sum_{p \in A \cap \operatorname{sing} \mathcal{F}} BB(\mathcal{F}, p) = \frac{1}{8V} \int_{\partial A} \eta \wedge d\eta.$$

Demonstração. É conseqüência imediata do Teorema de Stokes (veja a lista de exercícios deste capítulo). □

O resultado principal desta seção é o seguinte:

Teorema 3.3.7 (Teorema de Baum-Bott em $\mathbb{C}P(2)$)**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau k, com singularidades isoladas, em $\mathbb{C}P(2)$. Então:*

$$\sum_{p \operatorname{sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p) = (k+2)^2.$$

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\operatorname{sing}(\mathcal{F}) \subset P_0 \subset E_0 = \{[1, x, y] \in \mathbb{C}P(2);\ (x, y) \in \mathbb{C}^2\} \simeq \mathbb{C}^2$, onde P_0 é o polidisco $\{(x, y);\ | x |< 1, | y |< 1\}$. Consideremos os sistemas afins $E_1 = \{[u, 1, v] \in \mathbb{C}P(2);\ (u, v) \in \mathbb{C}^2\}$ e $E_2 = \{[z, w, 1] \in \mathbb{C}P(2);\ (z, w) \in \mathbb{C}^2\}$. Sejam $P_1 = \{[u, 1, v] \in E_1;\ | u |< 1, | v |< 1\}$ e $P_2 = \{[z, w, 1] \in E_2;\ | z |< 1, | w |< 1\}$. Observemos os seguintes fatos: (i) $\mathbb{C}P(2) = \overline{P_0} \cup \overline{P_1} \cup \overline{P_2}$ (verifique). (ii) $\partial P_i = \cup_{j \neq i} (\overline{P_i} \cap \overline{P_j})$, $i = 0, 1, 2$ (verifique). (iii) $\overline{P_0} \cap \overline{P_1} \cap \overline{P_2} = T = \{[1, x, y];\ | x |=| y |= 1\}$.

Se $i \neq j$, usaremos a notação P_{ij} para designar a variedade com bordo $\overline{P_i} \cap \overline{P_j}$ com a orietação induzida pelo vetor normal que aponta de P_i para P_j. Temos ainda que: (iv) $\partial(P_{01}) = \partial(P_{12}) = \partial(P_{20}) = T$.

Seja $X_0 = P\partial/\partial x + Q\partial/\partial y$ um campo polinomial que representa $\mathcal{F}$ em E_0 e $\omega_0 = Pdy - Qdx$ o seu dual. Seja $\varphi_{10}(u, v) = (1/u, v/u) = (x, y)$ a mudança de coordenadas de E_1 para E_0. Não é difícil verificar que $\varphi_{10}^*(\omega_0) = u^{-(k+2)}.\omega_1$, onde ω_1 representa $\mathcal{F}$ em E_1. Analogamente, se φ_{20} é a mudança de coordenadas de E_2 para E_0, então $\varphi_{20}^*(\omega_0) = z^{-(k+2)}.\omega_2$, onde ω_2 representa $\mathcal{F}$ em E_2. Podemos então dizer que: (v) $\omega_i = f_{ij}.\omega_j$ em $E_i \cap E_j$, onde $f_{ij} = 1/f_{ji}$, $f_{01} |_{E_0} = x^{k+2}$, $f_{02} |_{E_0} = y^{k+2}$ e $f_{12} |_{E_0} = y^{k+2}/x^{k+2}$. Note que $f_{ij}.f_{jk}.f_{ki} = 1$ em $E_i \cap E_j \cap E_k$, quaisquer que sejam $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$. Daí obtemos: (vi)$\frac{df_{ij}}{f_{ij}} + \frac{df_{jk}}{f_{jk}} + \frac{df_{ki}}{f_{ki}} = 0$, $\forall i, j, k \in \{0, 1, 2\}$.

Para cada $j = 0, 1, 2$, consideremos uma (1,0)-forma η_j, de classe C^∞ em $E_j \setminus \operatorname{sing} \mathcal{F}$, tal que $d\omega_j = \eta_j \wedge \omega_j$. Decorre de (v) que:

$$\eta_i \wedge \omega_i = d\omega_i = df_{ij} \wedge \omega_j + f_{ij}.d\omega_j = (\frac{df_{ij}}{f_{ij}} + \eta_j) \wedge \omega_i,$$

logo, pelo Lema de divisão, existe uma função g_{ij}, de classe C^∞ em $E_i \cap E_j \setminus sing(\mathcal{F})$, tal que $\eta_i = \eta_j + \frac{df_{ij}}{f_{ij}} + g_{ij}.\omega_i$. Colocando-se $\alpha_{ij} = g_{ij}.\omega_i$, obtemos: (vii) $\eta_i = \eta_j + \frac{df_{ij}}{f_{ij}} + \alpha_i j$.

Note que (viii) $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{ki} = 0$.

Além disto, $d\eta_i = d\eta_j + d\alpha_{ij}$. Colocando-se $\Theta_j = \eta_j \wedge d\eta_j$, $j = 0, 1, 2$, obtemos de (vii) que:

$$(*) \quad \Theta_i = \Theta_j + \frac{df_{ij}}{f_{ij}} \wedge d\eta_j + \eta_i \wedge d\alpha_{ij} = d(\eta_j \wedge \frac{df_{ij}}{f_{ij}}) - d(\eta_i \wedge \alpha_{ij}),$$

já que

$$d(\eta_i \wedge \alpha_{ij}) = d\eta_i \wedge \alpha_{ij} - \eta_i \wedge d\alpha_{ij} = g_{ij}.d\eta_i \wedge \omega_i - \eta_i \wedge d\alpha_{ij} = -\eta_i \wedge d\alpha_{ij}$$

pois $d\eta_i \wedge \omega_i = 0$.

Utilizando que $\operatorname{sing}(\mathcal{F}) \subset P_0$ e a Proposição 3.3.6, temos

$$8V. \sum_{p \in \operatorname{sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p) = \int_{\partial P_0} \Theta_0 = \int_{\partial P_0} \Theta_0 + \int_{\partial P_1} \Theta_1 + \int_{\partial P_2} \Theta_2.$$

Levando-se (ii) em conta, temos:

$$8V. \sum_{p \in \operatorname{sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p) = \int_{P_{01}} \Theta_0 + \int_{P_{02}} \Theta_0 + \int_{P_{10}} \Theta_1 + \int_{P_{12}} \Theta_1 + \int_{P_{20}} \Theta_2 + \int_{P_{21}} \Theta_2 =$$

$$= \int_{P_{01}} (\Theta_0 - \Theta_1) + \int_{P_{12}} (\Theta_1 - \Theta_2) + \int_{P_{20}} (\Theta_2 - \Theta_0).$$

Utilizando agora (*), (iv) e o Teorema de Stokes, obtemos:

$$8V. \sum_{p \in \operatorname{sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p) = \int_T \alpha,$$

onde

$$(**) \quad \alpha = \eta_1 \wedge \frac{df_{01}}{f_{01}} - \eta_0 \wedge \alpha_{01} + \eta_2 \wedge \frac{df_{12}}{f_{12}} - \eta_1 \wedge \alpha_{12} + \eta_0 \wedge \frac{df_{20}}{f_{20}} - \eta_2 \wedge \alpha_{20}.$$

Por outro lado, de (vii) obtemos $\eta_i = \eta_0 + \frac{df_{i0}}{f_{i0}} + \alpha_{i0}$, $i = 1, 2$, relação que substituída em (**) nos fornece:

$$\alpha = (\eta_0 + \frac{df_{10}}{f_{10}} + \alpha_{10}) \wedge \frac{df_{10}}{f_{10}} - \eta_0 \wedge \alpha_{10} + (\eta_0 + \frac{df_{20}}{f_{20}} + \alpha_{20}) \wedge \frac{df_{12}}{f_{12}} -$$

$$-(\eta_0 + \frac{df_{10}}{f_{10}} + \alpha_{10}) \wedge \alpha_{12} + \eta_0 \wedge \frac{df_{20}}{f_{20}} - (\eta_0 + \frac{df_{20}}{f_{20}} + \alpha_{20}) \wedge \alpha_{20} =$$

$$= \frac{df_{20}}{f_{20}} \wedge \frac{df_{12}}{f_{12}} + \alpha_{10} \wedge \frac{df_{01}}{f_{01}} + \alpha_{20} \wedge \frac{df_{12}}{f_{12}} - \frac{df_{10}}{f_{10}} \wedge \alpha_{12} - \frac{df_{20}}{f_{20}} \wedge \alpha_{20},$$

onde acima levamos em conta (vi), (viii) e que $\alpha_{10} \wedge \alpha_{12} = \frac{df_{10}}{f_{10}} \wedge \frac{df_{01}}{f_{01}} = 0$. Note agora que:

$$\alpha_{10} \wedge \frac{df_{01}}{f_{01}} + \alpha_{20} \wedge \frac{df_{12}}{f_{12}} - \frac{df_{10}}{f_{10}} \wedge \alpha_{12} - \frac{df_{20}}{f_{20}} \wedge \alpha_{20} =$$

$$= \alpha_{20} \wedge (\frac{df_{12}}{f_{12}} + \frac{df_{20}}{f_{20}})\alpha_{10} \wedge \frac{df_{01}}{f_{01}} - \frac{df_{10}}{f_{10}} \wedge \alpha_{12} =$$

$$= \alpha_{20} \wedge (-\frac{df_{01}}{f_{01}} + \alpha_{10} \wedge \frac{df_{01}}{f_{01}} - \frac{df_{10}}{f_{10}} \wedge \alpha_{12} =$$

$$= \frac{df_{01}}{f_{01}} \wedge (\alpha_{20} + \alpha_{01} + \alpha_{12}) = 0.$$

Portanto $\alpha = \frac{df_{20}}{f_{20}} \wedge \frac{df_{12}}{f_{12}} = -(k+2)^2 \frac{dx}{x} \wedge \frac{dy}{y}$. Tomando a parametrização $(x,y) = (e^{i\theta}, e^{i\phi})$, $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$, obtemos finalmente que

$$8V. \sum_{p \in \text{sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p) = \int_T \alpha = -(k+2)^2. \int_T \frac{dx}{x} \wedge \frac{dy}{y} = 4\pi^2(k+2)^2 = 8V(k+2)^2.$$

$\square$

3.4 Folheações sem soluções algébricas

Nesta seção provaremos o Teorema 3.1.3, como aplicação dos Teoremas 3.1.8 e 3.2.8. Veremos também que a folheação de Jouanolou de grau ≥ 2 não possui soluções algébricas.

Vamos considerar os seguintes conjuntos: $\mathcal{A}_k = \{\mathcal{F} \in \mathcal{S}(2,k);$ os números característicos das singularidades de $\mathcal{F}$ não são racionais positivos $\}$.

$\mathcal{B}_k = \{\mathcal{F} \in \mathcal{S}(2,k);$ os números característicos das singularidades de $\mathcal{F}$ não são reais positivos $\}$.

Lembramos que $\mathcal{S}(2,k)$ denota o conjunto das folheações de grau k, cujas singularidades são não degeneradas. Utilizaremos o seguinte resultado:

Proposição 3.4.1. *Para todo $k \geq 1$, $\mathcal{B}_k$ é aberto e denso em $\mathcal{F}(2,k)$. Em particular $\mathcal{A}_k$ é denso em $\mathcal{F}(2,k)$.*

Demonstração. A abertura decorre do Corolário da Proposição 2.4.3, levando-se em conta que os números característicos são funções holomorfas da folheação. De fato, fixemos uma folheação $\mathcal{F}_o \in \mathcal{S}(2,k)$ que possui uma singularidade p_o, cujos números característicos não são reais positivos. Podemos supor que $p_o = 0 \in E_0 \simeq \mathbb{C}^2$ e que $\mathcal{F}_0$ é representada em E_0 pelo campo polinomial X_o. Pela Proposição 2.4.3 do Capítulo II, existem vizinhanças U de $0, \mathcal{U}$ de $\mathcal{F}_o$ e uma função holomorfa $\varphi\colon \mathcal{U} \to U$ tais que para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$, $\varphi(\mathcal{F})$ é a única singularidade de $\mathcal{F}$ em U, a qual é não degenerada. Por outro lado, $\mathcal{U}$ é parametrizada por campos polinomiais X em E_0 de tal forma que $X \to \mathcal{F}$ é holomorfa. Fixando $\mathcal{F} \simeq X \in \mathcal{U}$, com singularidade $p = \varphi(\mathcal{F})$, os números característicos de X em p são as soluções da equação $p(\mathcal{F},\sigma) = \sigma^2 + (2 - \frac{(T(\mathcal{F}))^2}{D(\mathcal{F})})\sigma + 1 = 0$, onde $T(\mathcal{F})$ é o traço de $DX(\varphi(\mathcal{F}))$ e $D(\mathcal{F})$ o seu determinante (verifique). Note que, como os números característicos de $\mathcal{F}_o$ em 0 são diferentes de 1, temos que as raízes de $p(\mathcal{F}_o,\sigma)$ são simples. Isto implica que as raízes de $p(\mathcal{F},\sigma)$ são funções holomorfas de $\mathcal{F}$, numa vizinhança $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ de $\mathcal{F}_o$.

Seja $\mathcal{B}_k(j) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{S}(2,k);\ \mathcal{F}$ possui pelo menos j singularidades cujos números característicos não são reais positivos $\}$. Utilizando o argumento acima, prova-se que $\mathcal{B}_k(j)$ é aberto em $\mathcal{F}(2,k)$. Em particular $\mathcal{B}_k$ é aberto. Para demonstrar a densidade é suficiente provar que $\mathcal{B}(j+1)$ é denso em $\mathcal{B}(j)$ para todo $0 \le j < k^2+k+1 =$ número de singularidades de $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(2,k)$. Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor (veja Exercício 8). □

Observação 3.4.2. Uma singularidade cujos números característicos não são racionais positivos possui exatamente duas separatrizes, as quais são lisas (veja a Proposição 1.6.25).

Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_k$ com singularidades $p_1, ..., p_N$, onde $N = 1 + k + k^2$ (veja o Corolário do Teorema 2.4.1). Para cada singularidade p_j de $\mathcal{F}$, denotemos por S_j^+ e S_j^- as separatrizes de $\mathcal{F}$ em p_j. Se X é um campo de vetores que representa $\mathcal{F}$ numa vizinhança de p_j, denotemos por λ_j^+ e λ_j^- os auto-valores de $DX(p_j)$ relativos às direções de S_j^+ e S_j^-, respectivamente. Como vimos no Exemplo 3.2.4 deste capítulo, temos $I(\mathcal{F}, S_j^+) = \frac{\lambda_j^-}{\lambda_j^+}$ e $I(\mathcal{F}, S_j^-) = \frac{\lambda_j^+}{\lambda_j^-}$.

Definição 3.4.3. Uma *configuração* associada a $\mathcal{F}$ é um subconjunto do conjunto de todas as separatrizes de $\mathcal{F}$,

$$sep(\mathcal{F}) = \{S_j^+, S_j^-;\ j = 1, ..., N\}.$$

Diremos que uma configuração C é *própria* se $C \neq sep(\mathcal{F})$.

Dada uma configuração $C \subset sep(\mathcal{F})$, usaremos a notação:

$$I(\mathcal{F}, C) = \sum_{S \in C} I(\mathcal{F}, S).$$

Observe que $I(\mathcal{F}, C)$ é uma soma de números característicos associados a singularidades de $\mathcal{F}$. Seja $A = \{(j,+),(j,-);\ j = 1,...,N\}$. Se C é uma configuração, podemos associar um subconjunto $\overline{C}$ de A, dado por $\overline{C} = \{(j,+);\ S_j^+ \in C\} \cup \{(j,-);\ S_j^- \in C\}$, de tal forma que

$$I(\mathcal{F}, C) = \sum_{(j,+)\in\overline{C}} I(\mathcal{F}, S_j^+) + \sum_{(j,-)\in\overline{C}} I(\mathcal{F}, S_j^-) = I_{\overline{C}}(\mathcal{F}).$$

Se V é uma curva algébrica invariante por $\mathcal{F}$, podemos definir uma *configuração associada a* $\mathcal{F}$ *e* V, por $C(\mathcal{F}, V) = \{S \in sep(\mathcal{F});\ S \subset V\}$.

Em seguida veremos um critério para que uma folheação em $\mathcal{A}_k$ não possua solução algébrica.

Proposição 3.4.4. *Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_k$, onde $k \geq 2$. Suponha que $I(\mathcal{F}, C)$ não é um inteiro positivo, para toda configuração própria $C \subset sep(\mathcal{F})$. Então $\mathcal{F}$ não possui solução algébrica.*

Demonstração. Suponha, por contradição que $\mathcal{F}$ possua uma solução algébrica V. Pelo Corolário do Teorema 3.1.8, temos que $I(\mathcal{F}, V) = I(\mathcal{F}, C(\mathcal{F}, V))$ é um inteiro positivo, logo, pela hipótese, $C(\mathcal{F}, S) = sep(\mathcal{F})$. Vamos em seguida calcular $I(\mathcal{F}, sep(\mathcal{F}))$ utilizando o Teorema de Baum-Bott em $\mathbb{C}P(2)$. De acordo com este teorema temos

$$\sum_{p\,\mathrm{sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p) = \sum_{j=1}^{N} BB(\mathcal{F}, p_j) = (k+2)^2.$$

Por outro lado, como as singularidades de $\mathcal{F}$ são não degeneradas, pelo Exemplo 3.3.5, temos

$$BB(\mathcal{F}, p_j) = \frac{T_j^2}{D_j},$$

onde T_j é traço e D_j o determinante de $DX(p_j)$, sendo X como anteriormente. Obtemos daí que:

$$BB(\mathcal{F}, p_j) = \frac{(\lambda_j^+ + \lambda_j^-)^2}{\lambda_j^+ . \lambda_j^-} = \frac{\lambda_j^+}{\lambda_j^-} + \frac{\lambda_j^-}{\lambda_j^+} + 2 = I(\mathcal{F}, S_j^-) + I(\mathcal{F}, S_j^+) + 2.$$

Portanto:

$$(k+2)^2 = \sum_{j=1}^{N} (I(\mathcal{F}, S_j^+) + I(\mathcal{F}, S_j^-) + 2) = I(\mathcal{F}, sep(\mathcal{F})) + 2(k^2 + k + 1),$$

logo $I(\mathcal{F}, sep(\mathcal{F}) = -k^2 + 2k + 2$.

Ora, como o leitor pode verificar diretamente, se $k \geq 3$, então $-k^2 + 2k + 2 < 0$, logo $sep(\mathcal{F})$ não pode ser a configuração de uma curva algébrica. Por outro lado, se $k = 2$, então $-k^2 + 2k + 2 = 2$. Neste caso, $sep(\mathcal{F})$ não pode ser a configuração de uma curva algébrica pelo corolário do Teorema 3.1.8. $\square$

Proposição 3.4.5. *Para todo $k \geq 2$ a folheação de Jouanolou $\mathcal{J}(2,k)$ não possui solução algébrica.*

Demonstração. Como vimos na Proposição 2.4.7, as singularidades de $\mathcal{J}(2,k)$ são todas não degeneradas e possuem os mesmos números característicos. No caso de dimensão 2, o campo de Jouanolou de grau k é $X = (y^k - x^{k+1})\partial/\partial x + (1 - x^k y)\partial/\partial y$. Calculando a matriz Jacobiana de X na singularidade $(1,1)$, obtemos

$$J = \begin{pmatrix} -(k+1) & k \\ -k & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto, os números característicos de uma singularidade, são as raízes da equação $z + z^{-1} + 2 = \frac{T^2}{D} = \frac{(k+2)^2}{N}$, onde $N = k^2 + k + 1$. As raízes da equação acima são

$$\sigma^+ = \frac{-k^2 + 2k + 2 + k(k+2)\sqrt{3}i}{2N} \text{ e } \sigma^- = \frac{-k^2 + 2k + 2 - k(k+2)\sqrt{3}i}{2N}.$$

Em particular $\mathcal{J}(2,k) \in \mathcal{B}_k$. Além disto, se S^+ e S^- são as separatrizes desta singularidade, temos $I(\mathcal{J}(2,k), S^+) = \sigma^+$ e $I(\mathcal{J}(2,k), S^-) = \sigma^-$. Logo, se C é uma configuração própria associada a $\mathcal{J}(2,k)$, temos

$$I(\mathcal{J}(2,k), C) = m.\sigma^+ + n.\sigma^- = (m+n).\frac{-k^2 + 2k + 2}{2N} + (m-n).\frac{k(k+2)\sqrt{3}i}{2N},$$

onde $0 < m + n < 2N$. Note agora que, para que $I(\mathcal{J}(2,k), C)$ seja real, é necessário que $m = n$ e então $I(\mathcal{J}(2,k), C) = m.\frac{-k^2+2k+2}{N}$. Obtemos daí que, se $k \geq 3$, então $I(\mathcal{J}(2,k), C) \notin \mathbb{R}$ ou $I(\mathcal{J}(2,k), C) < 0$. Por outro lado, se $k = 2$, então $I(\mathcal{J}(2,k), C) \notin \mathbb{R}$ ou $I(\mathcal{J}(2,k), C) = \frac{2m}{7}$, que não pode ser inteiro positivo, uma vez que $m < 7$. deduzimos daí e da Proposição 3.4.4 que $\mathcal{J}(2,k)$ não possui solução algébrica. □

Em seguida provaremos o Teorema 3.1.3 em dimensão 2, como prometemos no §1.

Prova do Teorema 3.1.3. Fixemos $k \geq 2$ e consideremos o seguinte conjunto de folheações:

$\mathcal{C}_k = \{\mathcal{F} \in \mathcal{B}_k;$ para toda configuração própria $C \subset sep(\mathcal{F})$ temos $I(\mathcal{F}, C) \notin \mathbb{N}\}$.

A Proposição 3.4.4 garante que se $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_k$, então $\mathcal{F}$ não possui solução algébrica. Por outro lado, a Proposição 3.4.5 implica que $\mathcal{J}(2,k) \in \mathcal{C}_k$. Em particular $\mathcal{C}_k \neq \phi$.

O Teorema 3.1.3 decorrerá então do seguinte:

Lema 3.4.6. *Se $k \geq 2$, então $\mathcal{C}_k$ é aberto e denso em $\mathcal{B}_k$.*

Demonstração. Fixemos $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{B}_k$. Sejam $p_1, ..., p_N$ as singularidades de $\mathcal{F}_0$. Pelas Proposição 3.4.1 e 2.4.3, existem vizinhanças $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}_k$ de $\mathcal{F}_0$, $U_1, ..., U_N$ de $p_1, ..., p_N$ respectivamente,e funções holomorfas $\varphi_j : \mathcal{U} \to U_j$ e $\sigma_j : \mathcal{U} \to \mathbb{C}^*$, $j = 1, ..., N$, tais que: (a). Se $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$, então $\varphi_j(\mathcal{F})$ é a única singularidade de $\mathcal{F}$ em U_j, a qual é não degenerada. (b). Se $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$, então os números característicos de $\varphi(\mathcal{F})$ são $\sigma_j(\mathcal{F})$ e $(\sigma_j(\mathcal{F}))^{-1}$.

Dada uma configuração C de $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$, seja $\overline{C} \subset A$, como anteriormente, de tal forma que $I(\mathcal{F}, C) = I_{\overline{C}}(\mathcal{F})$. Observe que $\mathcal{F} \in \mathcal{U} \to I_{\overline{C}}(\mathcal{F})$ é holomorfa para todo $\overline{C} \subset A$. Por outro lado, se C é uma configuração, então $I_{\overline{C}}^{-1}(\mathbb{N})$ é um fechado de $\mathcal{U}$, logo $F = \cup_{\overline{C} \neq A} I_{\overline{C}}^{-1}(\mathbb{N})$ é fechado. Como $\mathcal{C}_k \cap \mathcal{U} = \mathcal{U} \setminus F$, obtemos que $\mathcal{C}_k$ é aberto.

Para provar a densidade de $\mathcal{C}_k$ em $\mathcal{B}_k$ basta demonstrar a seguinte:

Afirmação 3.4.7. *Para todo $\overline{C} \neq A$, a função $I_{\overline{C}}$, se for constante em $\mathcal{U}$, então esta constante não é um inteiro positivo.*

Este fato é claramente verdadeiro se $\mathcal{F}_0$ é a folheação de Jouanolou $\mathcal{J}(2, k)$. Por outro lado, se $\mathcal{F}_0 \neq \mathcal{J}(2, k)$, isto pode ser provado por um argumento de continuação analítica, que resumimos em seguida.

Consideremos o conjunto $D_k = \{\mathcal{F} \in \mathcal{S}(2, k);\ 1$ não é número característico de nenhuma singularidade de $\mathcal{F}\}$. Então: (i) D_k é aberto e conexo (verifique). (ii) Dado $\mathcal{F}_o \in D_k$, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}_o$ tal que as singularidades e os seus números característicos são funções holomorfas de $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$. O argumento é semelhante ao feito no início da prova do lema. (iii) Seja $\gamma : [0, 1] \to D_k$ um caminho. Coloquemos $\mathcal{F}_t = \gamma(t)$ e suponhamos que $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in \mathcal{C}_k$. Dadas uma configuração C de $\mathcal{F}_0$ e a função $I_{\overline{C}}$, definida numa vizinhança $\mathcal{U}$, então $I_{\overline{C}}$ possui uma continuação analítica definida numa vizinhança de γ, a qual chamaremos também $I_{\overline{C}}$. Este fato decorre de (ii), como o leitor pode verificar.

Finalmente, se γ é um caminho tal que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{J}(2, k)$, para toda configuração própria C de $\mathcal{F}_0$, obtemos de (iii), uma configuração própria C_1 de $\mathcal{J}(2, k)$ tal que $I_{\overline{C}}(\mathcal{F}_0) = I(\mathcal{F}_0, C)$ e $I_{\overline{C}}(\mathcal{J}(2, k)) = I(\mathcal{J}(2, k), C_1)$. Isto prova a afirmação. □

□

3.5 Exercícios do Capítulo 3

1. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de grau k em $\mathbb{C}P(2)$ e S uma curva algébrica lisa invariante por $\mathcal{F}$. (a) Prove que o grau de S é no máximo $k+1$. (b) Prove que, se $d(S) = k+1$, então $\mathcal{F}$ tem uma integral primeira meromorfa da forma P/L^{k+1}, $d(P) = k+1$ e $d(L) = 1$.

Sugestão: Sejam $(P = 0)$ uma equação homogênea de grau $d(S)$ de $\Pi^{-1}(S)$ e Ω uma forma com coeficientes homogêneos de grau $k+1$ que representa $\Pi^*(\mathcal{F})$ em $\mathbb{C}^3$. Prove que $\Omega = H.dF + F.\Theta$, onde H é um polinômio homogêneo e Θ uma forma com coeficientes homogêneos.

2. Dê um contra-exemplo para (a) do Exercício 1, no caso em que S não é lisa.

3. Seja S uma curva algébrica em $\mathbb{C}P(2)$ e consideremos uma resolução da curva S, $\pi\colon M \to \mathbb{C}P(2)$. Fixado um sistema afim de coordenadas $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P(2)$ com a reta no infinito transversal a S, tomamos polinômio reduzido $f(x, y)$, tal que $S \cap \mathbb{C}^2 = \{f(x, y) = 0\}$. Sejam S^* o transformado estrito de S e $X = -f_y \partial/\partial x + f_x \partial/\partial y$ o campo dual de $df = f_x dx + f_y dy$. Seja $X^* = \pi^*(X\mid_S)$, considerado como campo meromorfo em S^*, com pólos contidos em $\pi^{-1}(\mathcal{S}_\infty)$. Prove que a característica de Euler da normalização $\chi(S^*)$, é dada por:

$$\chi(S^*) = Z(X^*) - P(X^*)$$

sendo $Z(X^*) = \sum_{X^*(q)=0} o(X^*, q)$ e $P(X^*) = \sum_{q \text{ pólo de } X^*} p(X^*, q)$, onde $o(X^*, q)$ e $p(X^*, q)$ denotam, respectivamente, a ordem de q como zero ou pólo de X^*.

Sugestão: Use o Teorema de Poincaré-Hopf para um campo C^∞, múltiplo conveniente de X^*.

4. Prove que $[x, g]_0 = [x, g_y]_0 + 1$ para todo germe irredutível de função holomorfa g na origem $0 \in \mathbb{C}^2$, que satisfaça $(g = 0) \neq (x = 0)$.

5. Prove o Lema de Divisão utilizado na prova do Lema 3.3.1.

6. Prove que o Índice de Baum-Bott é invariante por mudança de coordenadas.

7. Prove a Proposição 3.3.6.

8. Complete a prova da densidade na Proposição 3.4.1.

9. Prove a Observação 3.1.7.

Capítulo 4

Folheações com conjunto limite algébrico

4.1 Conjuntos limites de folheações

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação numa variedade complexa compacta M com conjunto singular, $\operatorname{sing}\mathcal{F}$, de codimensão ≥ 2. Dada uma folha $L \subset M$, de $\mathcal{F}$, considere uma *exaustão crescente de* L por compactos, digamos $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, ou seja, $L = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} K_j$, onde para cada j temos $K_j \subset \operatorname{int}(K_{j+1})$.

Definição 4.1.1. O *conjunto limite de* L é definido como $\lim(L) = \bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} \overline{L \backslash K_j}$.

É possível provar que $\lim(L) \subset M$ independe da exaustão de L considerada(veja Exercício 1). O *conjunto limite* da folheação $\mathcal{F}$ é definido como $\lim(\mathcal{F}) = \bigcup\limits_{L} \lim(L)$, onde L percorre todas as folhas de $\mathcal{F}$.

Observe que $\lim(L) \cup L = \overline{L}$.

A noção de conjunto limite é claramente inspirada no caso real (veja [C- LN 1]). Para folheações complexas, entretanto, temos a motivação extra dada pela teoria da dinâmica das transformações racionais da esfera de Riemann. Um problema é o de saber até que ponto o conjunto limite de uma folheação algébrica, ou de uma folha, contém informação suficiente para classificá-la. Neste Capítulo estamos interessados neste problema. Adiantamos o resultado principal que provaremos, e que decorre do seguinte resultado mais geral que se encontra demonstrado em [14]:

Teorema 4.1.2 ([14]). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação algébrica de codimensão 1 em $\mathbb{C}P(n)$, com conjunto limite algébrico próprio $\lim(\mathcal{F})$. Seja $\lim_1(\mathcal{F}) \subset \lim(\mathcal{F})$ a união das componentes de codimensão um de $\lim(\mathcal{F})$. Suponha que:*

(c_1) $\lim_1(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.

(c_2) $\lim_1(\mathcal{F})$ *contém todas as separatrizes de suas singularidades. Em particular, todas as singularidades de $\mathcal{F}$ em $\lim_1(\mathcal{F})$ são não dicríticas, isto é, possuem um número finito de separatrizes analíticas.*

(c_3) $\lim_1(\mathcal{F})$ *possui uma componente irredutível que contém um atrator no seu grupo de holonomia.*

Então existem uma aplicação racional $F\colon \mathbb{C}P(n) \to \mathbb{C}P(2)$ e uma folheação de grau um L em $\mathbb{C}P(2)$ tais que $\mathcal{F} = F^*L$.

Provaremos uma versão um pouco mais simples do teorema acima, em que suporemos que no processo de desingularização das singularidades de $\mathcal{F}$ em $\lim_1(\mathcal{F})$ não existem selas-nós. Observamos que as hipóteses do teorema acima, na verdade, implicam este fato
(veja a demonstração em [14]).

Em seguida veremos algumas propriedades elementares de $\lim(\mathcal{F})$.

Proposição 4.1.3. *Sejam $\mathcal{F}$ e M como acima. Então: (1) $\lim(\mathcal{F})$ é invariante por $\mathcal{F}$. (2) $\operatorname{sing}\mathcal{F} \subset \lim(\mathcal{F})$.*

Suponha que M tem dimensão 2. Então: (3) Dada uma folha L de $\mathcal{F}$ temos que $\lim(L) \subset \operatorname{sing}\mathcal{F}$ se, e somente se, $\overline{L}$ é um subconjunto analítico de M. (4) Se $M = \mathbb{C}P(2)$ e $\lim(\mathcal{F}) \subset \operatorname{sing}\mathcal{F}$ então $\mathcal{F}$ tem uma integral primeira racional.

Demonstração. Deixamos como exercício para o leitor a prova de (1) e (2) (veja Exercício 2). Para provar (3) note que se $\lim(L) \subset \operatorname{sing}\mathcal{F}$ então $\overline{L} \subset L \cup \operatorname{sing}\mathcal{F}$. Note que, se Σ é uma seção transversal por um ponto $p \in \overline{L} \setminus \operatorname{sing}(\mathcal{F})$, então $\overline{L} \cap \Sigma$ é um conjunto discreto ou um conjunto perfeito (veja [8]). Por outro lado, $L \cap \Sigma$ é um conjunto enumerável. Concluímos então que $L \cap \Sigma$ é discreto. Decorre daí que L é subconjunto analítico de $M \setminus \operatorname{sing}(\mathcal{F})$. Podemos então usar o Teorema de Remmert-Stein [43], já que $\operatorname{sing}\mathcal{F}$ tem codimensão 2, para concluir que $\overline{L}$ é analítico em M. A recíproca é imediata. Finalmente para provar (4) vemos que, por (3) todas as folhas são subconjuntos analíticos de $\mathbb{C}P(n)$. Pelo Teorema de Chow [45] todas estas folhas são algébricas e logo $\mathcal{F}$ tem um número infinito de folhas algébricas. Pelo Teorema de Darboux $\mathcal{F}$ tem integral primeira racional. □

A seguir damos alguns exemplos de folheações com conjunto limite conhecido:

Exemplo 4.1.4. Seja $\mathcal{F}$ a folheação em $\mathbb{C}P(2)$ que em uma carta afim $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ é dada por um campo de vetores linear $X(x, y) = (\lambda x, \mu y)$, onde $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$. Caso 1: $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}$. Neste caso

$\mathcal{F}$ pode ser dada por uma forma polinomial em $\mathbb{C}^2$ da forma $pxdy + qydx = 0$ onde $p, q \in \mathbb{Z}$ e portanto exibe uma integral primeira racional da forma $F = x^q y^p$. As folhas de $\mathcal{F}$ são todas algébricas, o que implica que $\lim(\mathcal{F}) = \text{sing}(\mathcal{F})$.

Caso 2: $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Neste caso, para cada folha L de $\mathcal{F}$ temos $\lim(L) = M_L^3$ onde M_L^3 é a variedade singular real de dimensão 3 dada por $\mid x \mid^{\mu} \mid y \mid^{-\lambda} = c$, sendo que $c \in \mathbb{R}$ é tal que, se $(x, y) \in L$, então $\mid x \mid^{\mu} \mid y \mid^{-\lambda} = c$.

Caso 3: $\lambda/\mu \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Neste caso, $\lim(\mathcal{F})$ é a união dos dois eixos complexos afins, $(y = 0)$ e $(x = 0)$ com a reta no infinito, sendo portanto um subconjunto algébrico de dimensão um de $\mathbb{C}P(2)$.

A demonstração das afirmações dos casos 2 e 3 acima pode ser feita levando-se em conta que a holonomia do eixo $(y = 0)$ é gerada por um biholomorfismo da forma $f(z) = e^{2\pi i \frac{\mu}{\lambda}}.z$. Deixamos os detalhes para o leitor.

Veremos em seguida como se comporta o conjunto limite após um pull-back por uma aplicação própria:

Lema 4.1.5. *Sejam $\pi\colon \tilde{M} \to M$ uma aplicação própria, $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em M genericamente transversal a π e $\tilde{\mathcal{F}}$ a folheação em $\tilde{M}$ obtida como pull-back de $\mathcal{F}$ por π. Sejam L uma folha de $\mathcal{F}$ e $\tilde{L} = \pi^{-1}(L)$. Então $\tilde{L}$ é uma união finita de folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$, digamos $\tilde{L} = \tilde{L}_1 \cup ... \cup \tilde{L}_r$, e*

$$(*) \quad \pi^{-1}(\lim(L)) = \bigcup_{j=1}^{r} \lim(\tilde{L}_j).$$

Em particular $\lim \tilde{\mathcal{F}} \subset \pi^{-1}(\lim(\mathcal{F}))$.

Demonstração. Seja L folha de $\mathcal{F}$. Como π é própria, a imagem inversa, $\pi^{-1}(L)$, é constituída por um número finito de folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$, digamos $\tilde{L} = \tilde{L}_1 \cup ... \cup L_r$. Por outro lado, se $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma exaustão de L por compactos, então $\{\tilde{K}_j = \pi^{-1}(K_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma exaustão de $\tilde{L}$ por compactos, o que implica (*). $\square$

Podemos utilizar o caso 3 do exemplo 1 para gerar, via pull-back, folheações em $\mathbb{C}P(n)$ com conjunto limite algébrico de codimensão um.

A seguir damos uma motivação geométrica para o estudo dos conjuntos limites de folheações complexas a partir da dinâmica dos grupos Fuchsianos.

Um grupo Fuchsiano é um grupo de transformações da esfera de Riemann que fixam um certo disco $\mathbb{D} \subset \overline{\mathbb{C}}$. Esta motivação está ligada a uma outra classe relevante de exemplos, que é a das folheações de Riccati:

Exemplo 4.1.6. Uma folheação de *Riccati* em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ é dada em coordenadas afins, isto é, em $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, por um campo de vetores polinomial da forma:

$$\dot{x} = p(x) \ , \ \dot{y} = y^2 a(x) + yb(x) + c(x)$$

As folheações de Riccati podem ser caracterizadas pela propriedade de serem transversais a uma das fibrações naturais de $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.

Lema 4.1.7. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. Então $\mathcal{F}$ é uma folheação de Riccati se, e somente se, $\mathcal{F}$ é transversal uma das fibras de uma das fibrações naturais de $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. Com efeito, fixado sistema de coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \subset \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, tomamos X campo de vetores polinomial com singularidades isoladas e que define $\mathcal{F}$ neste espaço afim. Escrevemos $X = (P(x, y), Q(x, y))$ em coordenadas. Suponhamos que $\mathcal{F}$ é transversal a uma fibra $x = x_o$ da fibração definida por $x = $ cte. Então, por compacidade das fibras, temos a mesma transversalidade para as fibras próximas, o que significa que para cada $x \in \mathbb{C}$ próximo de x_o fixado, o polinômio $y \to P(x, y)$ não se anula. Mas isto implica que $P = p(x)$ depende somente da variável x. Agora introduzimos a mudança de coordenadas $u = 1/x, v = y$. Nesta carta afim a transversalidade de $\mathcal{F}$ com a fibração $u = $ cte ao longo da reta $u = 0$ implica que $Q(x, y)$ tem grau no máximo 2 em y (Deixamos os detalhes para o leitor. Veja [LN 2]).Assim X tem a forma anunciada. □

A transversalidade de $\mathcal{F}$ com a fibração $x = $ cte ocorre de fato para todas as fibras, exceto para as fibras da forma $x = x_o$, onde $p(x_o) = 0$ e, eventualmente para a fibra $x = \infty$. As fibras não transversais são invariantes por $\mathcal{F}$. Seja $V = \{p_o\} \times \overline{\mathbb{C}} \cup ... \cup \{p_k\} \times \overline{\mathbb{C}}$ a união das fibras invariantes e consideremos a primeira projeção $p_1 \colon \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Sejam $M = \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \setminus V$ e $N = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{p, ..., p_k\}$. É claro que M é invariante por $\mathcal{F}$. Utilizando-se que as fibras de p_1 são compactas e que são transversais às folhas de $\mathcal{F}$ em M, é possível provar o seguinte fato:

(*) Se L é uma folha de $\mathcal{F}$ contida em M, então $p_1 |_L \colon L \to N$ é uma aplicação de recobrimento.

Fixemos $q \in N$. Utilizando-se (*) podemos levantar caminhos fechados em N com base em q: dados $\gamma \colon [0, 1] \to N$, com $\gamma(0) = \gamma(1) = q$, e $y \in \overline{\mathbb{C}}$, seja γ_y o levantamento de γ na folha L_y, de $\mathcal{F}$ que passa por (q, y), tal que $\gamma_y(0) = (q, y)$. Obtemos desta forma um biholomorfismo $f_\gamma \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ (uma transformação de Möbius), definido por $f_\gamma(y) = y_1$, onde y_1 é tal que $\gamma_y(1) = (q, y_1)$.

É possível provar os seguintes fatos (veja [9] e [56]):

(a)f_γ só depende da classe de homotopia de γ em $\pi_1(N, q)$. Passaremos a usar a notação $f_{[\gamma]}$ para designar f_γ, onde $[\gamma]$ é a classe de homotopia de γ em $\pi_1(N, q)$. (b) A aplicação $[\gamma] \in \pi_1(N, q) \to f_{[\gamma]} \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$ é um homomorfismo de grupos.

Pela descrição acima, como vimos no §7 do Capítulo 1, vemos que $\mathcal{F} |_M$ é a suspensão da representação de $\pi_1(N, q)$ em $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ dada em (b).

Estas observações mostram que a dinâmica de $\mathcal{F}$ pode ser descrita pela dinâmica do grupo de transformações de Möbius gerado pelos $f_{[\gamma]}$. Chamaremos este de *grupo de holonomia de* $\mathcal{F}$. O seguinte resultado é conhecido:

Teorema 4.1.8 ([56]). *Dado um grupo finitamente gerado G de transformações de Möbius, existe uma folheação de Riccati $\mathcal{F}$, cujo grupo de holonomia é conjugado ao grupo G.*

Como conseqüência podemos enunciar:

Proposição 4.1.9. *Existem folheações de Riccati $\mathcal{F}$ em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, cujo conjunto limite é formado por uma união finita de curvas algébricas.*

Demonstração. Tomamos um subgrupo de transformações de Möbius finitamente gerado cujo conjunto limite é finito. No caso, este conjunto limite contém um ou dois elementos que são pontos fixos dos elementos do grupo. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de Riccati com grupo de holonomia conjugado a G. Então, os pontos fixos de G determinam curvas algébricas em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ que são $\mathcal{F}$ invariantes. O conjunto limite de $\mathcal{F}$ será então a união destas curvas algébricas com as fibras invariantes. $\square$

4.2 Germes de biholomorfismos em $\mathbb{C}, 0$, com ponto fixo

Nesta seção estudaremos os subgrupos do grupo de germes em $0 \in \mathbb{C}$, de biholomorfismos com ponto fixo em 0. A motivação para tal, é o estudo do grupo de holonomia das folhas de uma folheação de codimensão um.

Seja $f : U \to V$ uma aplicação holomorfa, onde U e V são vizinhanças conexas da origem $0 \in \mathbb{C}$ e $f(0) = 0$. Diremos que f é um *biholomorfismo local em* 0 se $f'(0) \neq 0$. Neste caso, pelo Teorema da função inversa, existem vizinhanças $U' \subset U$ e $V' \subset V$, com $0 \in U' \cap V'$, tais que $f(U') = V'$ e $f\,|_{U'} : U' \to V'$ é um biholomorfismo.

O conjunto de germes em $0 \in \mathbb{C}$ de biholomorfismos locais com ponto fixo em 0 será denotado por $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ (veja a Seção 5 do Capítulo 1). Este conjunto é um grupo com a operação de composição (de germes). Diremos que dois subgrupos G_1 e G_2 de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ são *conjugados*, se existe um germe $f \in Dif(\mathbb{C}, 0)$ tal que $f \circ G_1 = G_2 \circ f$, isto é, para todo $g_1 \in G_1$, o germe $f \circ g_1 \circ f^{-1}$ está em G_2, ou seja, os elementos de G_1 são conjugados aos de G_2 por um mesmo germe de bilomorfismo. Não é difícil ver que a conjugação é uma relação de equivalência.

Outra relação de equivalência que consideraremos é a C^0-*conjugação*, ou *conjugação topológica*: diremos que dois germes $f_1, f_2 \in Dif(\mathbb{C}, 0)$ são topologicamente conjugados se existe um germe de homeomorfismo em $0 \in \mathbb{C}$, digamos g, tal que $g(0) = 0$ e $g \circ f_1 = f_2 \circ g$. De maneira análoga define-se a conjugação topológica entre subgrupos de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

Observe que a operação de "conjugar um germe" corresponde a uma mudança de coordenadas numa vizinhança de 0. Com isto podemos dizer que se $f \in Dif(\mathbb{C}, 0)$, então $\frac{df(z)}{dz}\big|_{z=0} = f'(0)$ não depende do sistema de coordenadas holomorfo z numa vizinhança da origem. O biholomorfismo $z \to f'(0).z$ é chamado de *parte linear* de f na origem.

Dizemos que um germe $f \in Dif(\mathbb{C},0)$ é um atrator (resp. repulsor) se $|f'(0)| < 1$ (resp. $|f'(0)| > 1$). Observe que f é um repulsor se, e somente se, f^{-1} é um atrator. No resultado seguinte, que é um caso particular do Teorema de linearização de Poincaré, veremos que um atrator ou repulsor é sempre linearizável.

Lema 4.2.1 (Lema de linearização de Poincaré)**.** *Seja $f \in Dif(\mathbb{C},0)$. Suponha que a parte linear de f satisfaz $|f'(0)| \neq 1$. Então f é linearizável, ou seja, existe um germe $\phi \in Dif(\mathbb{C},0)$, tal que $\phi \circ f(z) = f'(0).\phi(z)$ Além disso, se ψ é um outro germe em* $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ *que lineariza f, então $\phi \circ \psi^{-1}$ é linear, ou seja $\phi = \lambda.\psi$ para alguma constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$.*

Demonstração. A prova da primeira parte, que versa sobre a existência da linearização, será feita no Lema 5.3.7 do Capítulo 5, o qual é uma versão a parâmetros deste resultado. Vejamos como se prova a segunda parte:

Afirmação 4.2.2. *Sejam $f, g \in Dif(\mathbb{C},0)$, onde f é um atrator. Suponha que f e g comutam. Então g é linear em qualquer sistema de coordenadas que linearize f.*

Demonstração. De fato, consideremos um representante de f , o qual designaremos também por f, e tomemos uma carta local z, holomorfa numa vizinhança da origem $0 \in \mathbb{C}$, na qual $f(z) = \lambda.z$, onde $|\lambda| < 1$. Consideremos a série de Taylor de g, $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n z^n$, a qual converge numa vizinhança da origem. Como $f \circ g = g \circ f$ (comutatividade) obtemos, por comparação de coeficientes, que

$$\lambda.g_n = g_n.(\lambda)^n \, , \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $(\lambda)^n \neq \lambda$ se $n \neq 1$, segue que $g_n = 0$, $\forall n \neq 1$ e portanto $g(z) = g_1.z$ provando a afirmação.

Sejam agora f_1 e f_2 dois germes em $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ que linearizam f, ou seja, tais que $f_1^{-1} \circ f \circ f_1 = f_2^{-1} \circ f \circ f_2 = l$, onde l é a parte linear de f. Esta relação implica que $g \circ f = f \circ g$, onde $g = f_1 \circ f_2^{-1}$. O resultado decorre então da afirmação 1. □

□

Como espólio da prova acima obtemos:

Lema 4.2.3. *Sejam $f(z) = \lambda.z$ um biholomorfismo linear de $\mathbb{C}$ e $g \in Dif(\mathbb{C},0)$ tal que $f \circ g = g \circ f$. Valem as seguintes propriedades:*

(i) *Se $\lambda^n \neq 1$ para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ então $g(z) = \mu.z$ é também linear em z.*

(ii) *Se $\lambda^k = 1$ para $k \in \mathbb{N}$ então $g(z) = \mu.z(1 + \varphi(z^k))$, para alguma função holomorfa $\varphi(z)$ tal que $\varphi(0) = 1$.*

Deixamos a prova do lema acima como exercício para o leitor (veja Exercício 3).

Outro resultado relevante sobre os difeomorfismos locais de $\mathbb{C}$ é o seguinte, conhecido como *Teorema da Flor*:

Teorema 4.2.4 ([7]). *Seja f, um difeomorfismo local em $0 \in$, tangente à identidade, isto é, tal que $f'(0) = 1$, mas $f \neq id$. Seja $k = \min\{j \in \mathbb{N}\ ;\ , j \geq 2,\ f^j(0) \neq 0\}$. Então f é topologicamente conjugado com o difeomorfismo $\hat{f}(z) = \frac{z}{(1+a_{k+1}z^k)^{\frac{1}{k}}}$ numa vizinhança da origem.*

Assim, a dinâmica de um biholomorfismo f, tangente à identidade, satisfaz às seguintes propriedades:

(1) Para todo ponto, suficientemente próximo da origem, a sua órbita está contida em uma curva contínua invariante por f e que passa pela origem.

(2) Para cada ponto z, suficientemente próximo da origem, temos que $f^n(z)$ ou $f^{-n}(z)$ converge para a origem à medida que $n \to +\infty$.

4.3 Grupos de difeomorfismos locais com órbitas discretas

Definição 4.3.1. Seja G um subgrupo de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Dados uma vizinhança conexa V de $0 \in \mathbb{C}$ e um ponto $z \in V$, a *pseudo-órbita de z por G*, é definida por

$$\mathcal{O}(z) = \{f(z);\ f \text{ é um representante de um elemento de } G \text{ e } z \text{ está no domínio de } f\}.$$

Dados V vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$ e $z \in V \setminus \{0\}$, dizemos que a pseudo-órbita de z é *discreta*, se $\overline{\mathcal{O}(z)} \backslash \mathcal{O}(z) \subset \{0\}$. Dizemos que *$G$ tem pseudo-órbitas discretas em V, fora da origem*, se para todo ponto $z \in V \setminus \{0\}$, a sua pseudo-órbita é discreta.

O resultado seguinte, que é conseqüência de um Teorema de Nakai, nos será útil:

Teorema 4.3.2 ([67]). *Seja $G \subset Dif(\mathbb{C}, 0)$ subgrupo finitamente gerado e não solúvel. Então, existe vizinhança V de $0 \in \mathbb{C}$, tal que nenhuma pseudo-órbita de G em V, diferente da origem, é discreta.*

Assim, pelo Teorema de Nakai, se um grupo exibe alguma pseudo-órbita discreta, diferente da origem, então este deve ser solúvel. Provaremos em seguida um caso particular deste fato.

Proposição 4.3.3. *Seja G um subgrupo de* $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$. *Suponha que:*

(1) *Existe um atrator $f \in G$.*

(2) *Existe uma vizinhança V da origem, tal que G tem pseudo-órbitas discretas em V, fora da origem.*

Então G é abeliano.

Demonstração. Como $|f'(0)| < 1$, f é linearizável, isto é possui um representante, que denotaremos também por f, tal que $f(z) = \lambda.z$ ($|\lambda| < 1$), numa carta adequada z numa vizinhança da origem, contida em V. Seja $g \in G$ e suponhamos por absurdo que f e g não comutam. Então $h = [f,g] = f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$, é tangente á identidade, isto é, tem uma série de Taylor da forma: $h(z) = z + a_k z^k + \ldots$, onde $k \geq 2$ e $a_k \neq 0$. O Teorema da Flor implica que para todo ponto z próximo da origem $h^n(z)$ ou $h^{-n}(z)$ converge para a origem quando $n \to +\infty$.

Seja agora $A \subset \mathbb{C}$ um <u>*domínio fundamental*</u> para o atrator f. Tal domínio fundamental é um anel A, definido por $A = \overline{D \backslash f(D)}$, onde D é um disco com centro na origem. (note que como $f(z) = \lambda.z$, é atrator, $f(D)$ é um disco de raio menor que o raio de D. Assim A é um anel). Observe que para todo $z \in \mathbb{C}^*$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(z) \in A$. Vamos provar a existência de uma órbita não discreta em A.

Fixamos um disco compacto centrado na origem, $K \subset D$, de modo que $K \cap A = \emptyset$. Para cada $z \in A$ existe menor inteiro $m_1(z) = m_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $h^{m_1}(z) \in K$. Certamente existe menor inteiro positivo $n_1(z) = n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n_1} \circ h^{m_1}(z) \in A$. Procedendo deste modo podemos obter uma seqüência de pontos da forma $z_r = f^{-n_r} \circ h^{m_r} \circ \ldots f^{-n_1} \circ h^{-m_1}(z) \in A$, tal que $h^{m_r} \circ \ldots f^{-n_1} \circ h^{-m_1}(z) \in K$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Dadas duas seqüências fixadas de números inteiros $m = \{m_j\}_{j=1}^r$ e $n = \{n_j\}_{j=1}^r$, como acima, consideremos o conjunto

$$V_{m,n} = \{z \in A\,;\, f^{-n_r} \circ h^{m_r} \circ \ldots f^{-n_1} \circ h^{-m_1}(z) = z\}$$

Observe que $V_{m,n}$ é um conjunto finito. De fato, caso contrário, como A é compacto, $V_{m,n}$ teria um ponto de acumulação em A e isto implicaria que $f^{-n_r} \circ h^{m_r} \circ \ldots f^{-n_1} \circ h^{-m_1}(z) = z$ para todo z. Por outro lado, como a derivada de $f^{-n_r} \circ h^{m_r} \circ \ldots f^{-n_1} \circ h^{-m_1}$ em 0 é diferente de 1, esta aplicação não pode ser a identidade.

Assim, $\bigcup_{m,n} V_{m,n}$ é enumerável, de modo que o seu complementar em A possui algum ponto. Isto nos fornece uma órbita não discreta em A, o que é uma contradição. □

Como principal conseqüência obtemos:

Proposição 4.3.4. *Seja $G \subset Dif(\mathbb{C},0)$ subgrupo de difeomorfismos locais com pseudo-órbitas discretas fora da origem. Suponha que G contém um atrator $f \in G$. Então G é abeliano e linearizável.*

Demonstração. Com efeito, seja z uma coordenada que lineariza o atrator f. Pela Proposição 4.3.3, G é abeliano, logo pelo Lema 4.2.3 todo elemento $g \in G$ é também linear na coordenada z. $\square$

4.4 Holonomia Virtual

Passamos agora a considerar o objeto geométrico que medirá as acumulações das folhas, de uma folheação dada, em torno de uma folha fixada. Mais precisamente, consideramos a seguinte situação:

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa M e seja L uma folha de $\mathcal{F}$. Fixado um ponto $q \in L$, então $q \notin \operatorname{sing} \mathcal{F}$ e podemos considerar um disco transversal Σ centrado em q e a representação de holonomia $\operatorname{Hol}\colon \pi_1(L,q) \to Dif(\Sigma, q)$, denotando por $\operatorname{Hol}(\mathcal{F}, L, \Sigma, q)$ o representante do grupo de holonomia assim obtido.

Definição 4.4.1. O grupo de *holonomia virtual* da folha L de $\mathcal{F}$ na seção Σ é definido por

$$\operatorname{Hol}^{\text{virt}}(\mathcal{F}, L, \Sigma, q) := \{f \in Dif(\Sigma, q); L_z = L_{f(z)}\,,\, \forall z \in \Sigma\}$$

onde, na notação acima L_z denota a folha (global) de $\mathcal{F}$ que passa por z.

O grupo de holonomia virtual de L é a coleção $\operatorname{Hol}^{\text{virt}}(\mathcal{F}, L)$, de todos os grupos holomorficamente conjugados a $\operatorname{Hol}^{\text{virt}}(\mathcal{F}, L, \Sigma, q)$.

Assim, em outras palavras, o grupo de holonomia virtual consiste dos biholomorfismos locais, f, de Σ, com ponto fixo q e que para cada folha L_1 de $\mathcal{F}$ temos $f(L_1 \cap \Sigma) \subset L_1 \cap \Sigma$.

Pela própria definição de holonomia temos:

Proposição 4.4.2. $\operatorname{Hol}(\mathcal{F}, L)$ *é um subgrupo de* $\operatorname{Hol}^{\text{virt}}(\mathcal{F}, L)$.

Exemplo 4.4.3. Seja $\mathcal{F}$ um germe de folheação holomorfa com integral primeira holomorfa, digamos f, numa vizinhança da origem $0 \in \mathbb{C}^2$, tal que $f(0) = 0$. Consideremos a desingularização de $\mathcal{F}$, $\pi\colon M \to \mathbb{C}^2$, onde $\pi^{-1}(0) = D_1 \cup \ldots \cup D_r$ sendo que cada D_j é um divisor, ou seja, uma reta projetiva mergulhada com número de auto-intersecção negativo. Seja $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ a folheação resolvida no blow-up M. É claro que $\tilde{f} = f \circ \pi$ é uma integral primeira de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Para cada divisor D_j, fixemos uma seção transversal Σ_j a D_j com $\Sigma_j \cap D_j = q_j \in D_j \setminus \operatorname{sing} \tilde{\mathcal{F}}$. Observe que $\tilde{f}(q_j) = 0$. Seja $f_j = \tilde{f}\mid_{\Sigma_j}$. Pela forma local das funções holomorfas em uma variável, existe um sistema de coordenadas z, em vizinhança de q_j em Σ_j, tal que $z(q_j) = 0$ e $f_j(z) = z^m$ para algum inteiro positivo $m \in \mathbb{N}$.

A partir daí, não é difícil ver que a holonomia virtual, $\operatorname{Hol}^{\text{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j \setminus \operatorname{sing} \tilde{\mathcal{F}})$, calculada no sistema de coordenadas z, coincide com o *grupo de invariância* de $f_j(z) = z^m$, ou seja,

$\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j \setminus \operatorname{sing}\tilde{\mathcal{F}})$ é o grupo rotações gerado por $z \mapsto \exp(\frac{2\pi i}{m})$. Por outro lado, em geral, o grupo de holonomia $\mathrm{Hol}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j)$ será um subgrupo próprio de $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j)$.

4.5 Folheações com conjunto limite analítico

De um modo geral, assim como no Exemplo 4.4.3 acima, o grupo de holonomia virtual mede as acumulações das folhas em torno de uma folha fixada L, sendo as pseudo-órbitas discretas se, e somente se, as folhas são próprias em $V \setminus L$, onde V é uma vizinhança da folha L.

Façamos algumas considerações adicionais: seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma variedade complexa M, de dimensão 2. Suponhamos que o conjunto limite de $\mathcal{F}$ é um subconjunto analítico próprio de M. Se $\operatorname{cod}(\lim \mathcal{F}) = 2$ então $\lim \mathcal{F} \subset \operatorname{sing}\mathcal{F}$ e pelo que vimos na Proposição 4.1.3 as folhas de $\mathcal{F}$ são (contidas em subvariedades) analíticas em M. Se, além disso, $M = \mathbb{C}P(2)$, então, pelo Teorema de Darboux, $\mathcal{F}$ tem uma integral primeira racional. Deste modo suporemos que $\lim \mathcal{F}$ tem uma componente de codimensão 1, que será portanto uma curva analítica invariante por $\mathcal{F}$. Estudemos os grupos de holonomia virtual associados à resolução de $\mathcal{F}$ ao longo desta curva.

Proposição 4.5.1. *Seja $\mathcal{F}$ folheação holomorfa na superfície complexa M, com conjunto limite analítico próprio e possuindo uma componente irredutível de dimensão 1, digamos Λ. Denotemos por $\pi\colon (\tilde{M}, D) \to (M, \Lambda)$ a resolução das singularidades de $\mathcal{F}\big|_\Lambda$ por sucessivos blow-ups. Seja $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$. Suponha que $\operatorname{sing}(\tilde{\mathcal{F}}) \cap D$ não contém selas-nós e que as componentes irredutíveis de D são invariantes por $\tilde{\mathcal{F}}$. Então cada componente $D_j \subset D$ tem holonomia virtual solúvel. Se, além disso, existe alguma componente $D_j \subset D$ cuja holonomia virtual contém um atrator então:*

(1) Toda componente irredutível $D_i \subset D$, possui um atrator em seu grupo de holonomia virtual.

(2) O grupo de holonomia virtual da componente $D_i \subset D$ é abeliano e linearizável.

Demonstração. Observemos em primeiro lugar que $D = \pi^{-1}(\Lambda)$ é constituído da transformada estrita de Λ, que denotaremos por D_0, e divisores D_1,...,D_r, os quais são retas projetivas mergulhadas em $\tilde{M}$ de tal forma que se $i, j \geq 1$, $i \neq j$, então $D_i \cap D_j$ contém no máximo um ponto (uma esquina) e a intersecção é transversal. Por outro lado, D_0 pode cortar um divisor D_j em mais de um ponto, que é o que ocorre quando, por exemplo, Λ possui uma singularidade contida em vários ramos lisos de Λ passando por ela. Observemos, no entanto que D é conexo, uma vez que Λ é irredutível.

Fixemos uma vizinhança suficientemente pequena V de Λ, tal que $\lim \mathcal{F} \cap V = \Lambda$. Seja $\tilde{V} = \pi^{-1}(V)$. Observe que, $\lim \tilde{\mathcal{F}} \cap \tilde{V} = D$. Logo, se D_i é uma componente de D, então o grupo de holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_i)$, tem pseudo-órbitas discretas fora da origem (note que, por hipótese, cada D_i é invariante). Assim, pelo Teorema de Nakai [67], $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_i)$ é solúvel.

Assuma agora que existe uma componente de D_j de D que contém um atrator f_j na sua holonomia virtual. Seja D_i componente de D tal que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$.

Afirmação 4.5.2. $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_i)$ *contém um atrator.*

Demonstração. Utilizaremos o seguinte resultado, devido a Mattei e Moussu:

Lema 4.5.3 (Mattei-Moussu, [61]). *Seja X um campo de vetores definido numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$, com uma singularidade não degenerada em 0. Seja $\mathcal{F}$ a folheação definida por X. Então $\mathcal{F}$ é holomorficamente equivalente à folheação definida pela parte linear de X se, e somente se, a holonomia de alguma das separatrizes lisas de X é linearizável.*

Seja $q \in D_i \cap D_j$. Como D_i e D_j são invariantes e transversais temos que $q \in \operatorname{sing} \tilde{\mathcal{F}}$. Além disto, existe um sistema de coordenadas (x, y) numa vizinhança de q tal que $D_j = (y = 0)$ e $D_i = (x = 0)$. Afirmamos que $\tilde{\mathcal{F}}$ é equivalente numa vizinhança de q, à uma folheação definida por um campo linear.

De fato, seja X um campo de vetores que representa $\tilde{\mathcal{F}}$. Como D_i e D_j são invariantes por $\tilde{\mathcal{F}}$, q é singularidade simples de X (já que $\tilde{\mathcal{F}}$ é a resolução de $\mathcal{F}$). Por outro lado, por hipótese, q não é sela-nó, logo é não degenerada. Note que, como o grupo de holonomia virtual de D_j contém um atrator, este é abeliano e linearizável (Proposição 4.3.4 e Lema 4.2.3). Em particular, a holonomia $\mathrm{Hol}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j)$ é linearizável. Logo, a holonomia da separatriz de X associada a D_j, é linearizável. Basta agora aplicar o lema de Mattei-moussu.

Podemos então supor que $\tilde{\mathcal{F}}$ é representada em vizinhança de q pelo campo $X = x.\ \partial/\partial x + \lambda.y.\partial/\partial y$, onde $\lambda \neq 0$. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: $\lambda \notin \mathbb{R}$. Neste caso o próprio elemento de holonomia associado à singularidade q define um atrator f_i na holonomia virtual de D_i (lembramos que a parte linear deste elemento será dada por $f_i'(0) = \exp(\frac{2\pi i}{\lambda})$, logo $\mid f_i'(0) \mid \neq 1$).

Caso 2: $\lambda \in \mathbb{R}$: Neste caso, se $\lambda \notin \mathbb{Q}$, como vimos no exemplo 1 do §1, as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ próximas a q, se acumulam em folhas distintas de D_j e de D_i, e o conjunto limite não é analítico de codimensão um. Assim devemos ter $\lambda \in \mathbb{Q}$. Como a singularidade é simples, vemos que $\lambda \in \mathbb{Q}_-$. Seja $\lambda = -n/m$, onde $n, m \in \mathbb{N}$ são inteiros positivos primos entre si, $< n, m >= 1$. Logo $\tilde{\mathcal{F}}$ é representada pelo campo $m.x.\ \partial/\partial x - n.y.\partial/\partial y$, numa vizinhança de q, o qual tem como integral primeira holomorfa a função $h(x, y) = x^n.y^m$. Além disso, o elemento de holonomia g_j associado à singularidade q na holonomia de D_j, calculado na seção transversal $\Sigma_j = (x = 1)$ é dado por $g_j(y) = \exp(\frac{-2n\pi i}{m}).y$. Como $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j)$ é abeliano, segue que $g_j \circ f_j = f_j \circ g_j$ e portanto, pelo Lema 4.2.3, vemos que, na coordenada $y\big|_{\Sigma_j}$, $f_j(y) = \mu.y.(1 + \phi(y^m))$, $\mu = f_j'(0)$, para alguma função holomorfa ϕ numa vizinhança da origem e que satisfaz $\phi(0) = 0$.

Considere agora $f_i \in Dif(\Sigma_i, q)$ definido por $f_i(x) = \mu_1.x.\phi_1(x^m)$, onde $\mu_1 = \mu^{\frac{m}{n}}$ e $\phi_1 = (1+\phi)^{\frac{m}{n}}$, são raízes n-ésimas de μ^m e $(1+\phi)^m$, respectivamente. Como as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$, próximas a q, são dadas por $x^n y^m = \text{cte}$, não é difícil verificar que $f_i \in \mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_i, \Sigma_i)$ onde $\Sigma_i = (y = 1)$. Como $|\mu| < 1$ segue que $|\mu_1| < 1$, logo f_i é um atrator, o que prova a Afirmação.

Por outro lado, como D é conexo, segue que todas as componentes irredutíveis de D possuem um atrator em sua holonomia virtual. □

Vejamos uma interpretação geométrica da construção acima no caso 2 da demonstração. Fixemos um sistema de coordenadas (x, y) tal que $D_i \cap U \subset (x = 0)$, $D_j \cap U \subset (y = 0)$, e $h(x, y) = x^n y^m$ é integral primeira de $\tilde{\mathcal{F}}$ em U,onde $U \subset \{(x, y);\ |\ x\ | < 2 \text{ e } |\ y\ |< 2\}$ é uma vizinhança de q. Consideremos as seções transversais $\Sigma_i = (y = 1) \cap U$ e $\Sigma_j = (x = 1) \cap U$. A *correspondência de Dulac* da singularidade q, $\mathcal{D}$, entre Σ_i e Σ_j é definida por $\mathcal{D}(x_o) = x_o^{\frac{m}{n}}$. Esta correspondência deve ser interpretada da seguinte forma: dado $(x_o, 1) \in \Sigma_i$, o valor de h em na folha L de $\tilde{\mathcal{F}}$ que passa por $(x_o, 1)$ é x_o^n. Portanto L cortará Σ_j nos pontos da forma $(1, y_1), ..., (1, y_m)$, onde $y_1, ..., y_m$ são as raízes m-ésimas de x_o^n. Podemos então pensar que $\mathcal{D}(x_o) = \{y_1, ..., y_m\}$.

Denotemos por $G_j = \mathrm{Hol}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, \Sigma_j)$ e por $G_i = \mathrm{Hol}(\tilde{\mathcal{F}}, G_i, \Sigma_i)$. Seja $g_i \in G_i$ a holonomia da separatriz D_i de q, ou seja, $g_i(x) = \exp(-2\pi \frac{m}{n}.i).x$.

Usamos a correspondência de Dulac para associar a G_i um subgrupo $\mathcal{D}_*(G_i) \subset \mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, \Sigma_j)$. Tal subgrupo terá como propriedade principal o fato de que para cada elemento $f \in G_i$ existem m elementos $f_1, ..., f_m \in \mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, \Sigma_j)$ tais que $f_s \circ \mathcal{D} = \mathcal{D} \circ f$, $s = 1, ..., m$. Tomemos um elemento $f \in G_i$. Como G_i é abeliano, f comuta com g_i, logo $f(x) = \mu x \phi(x^n)$ para algum $\phi \in \mathcal{O}_1$, tal que $\phi(0) = 1$. Seja μ_s uma raiz m-ésima de μ^n. Defina f_s por $f_s(y) = \mu_s y \phi_1(y^m)$, onde $\phi_1(z)$ é a raiz m-ésima de $(\phi(z))^n$ tal que $\phi_1(0) = 1$. Não é difícil verificar que $f_s \in \mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, \Sigma_j)$ para todo $s = 1, ..., m$. Nos referimos a [15] para maiores informações.

□

4.6 Construção de formas meromorfas fechadas

Nesta seção veremos como podemos construir formas fechadas que definem uma folheação, a partir da informação de que as holonomias virtuais são abelianas e contém atratores. Isto será, de certa forma, como uma recíproca do Exemplo 17 do §5 do Capítulo 1.

Proposição 4.6.1. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa na superfície complexa M e $\Lambda \subset M$ uma curva analítica invariante por $\mathcal{F}$. Denote por $\pi\colon (\tilde{M}, D) \to (M, D)$ a resolução das singularidades de $\mathcal{F}$ em Λ e seja $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$, como de hábito. Seja $D = D_0 \cup ... \cup D_r$ a decomposição de D em componentes irredutíveis. Assuma que:*

(1) As componentes irredutíveis de D são invariantes por $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\operatorname{sing}\tilde{\mathcal{F}} \cap D$ não contém selas-nós.

(2) Cada componente irredutível D_j de D tem holonomia virtual abeliana e linearizável contendo um atrator.

(3)D não tem ciclos, isto é, se $i_1, ..., i_s \in \{0, ..., r\}$ são tais que $D_{i_j} \cap D_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ e $i_j \neq i_{j+1}$, $1 \leq j \leq s-1$, então $D_{i_1} \neq D_{i_s}$.

Então, existe uma vizinhança $\tilde{V}$ de D em $\tilde{M}$, na qual $\tilde{\mathcal{F}}$ pode ser representada por uma forma meromorfa fechada com pólos de ordem um, $\tilde{\omega}$, cujo divisor polar $(\tilde{\omega})_\infty$ contém D.

Em particular $\mathcal{F}$ pode ser representada por uma forma fechada com pólos simples numa vizinhança V de Λ em M.

Demonstração. Provaremos primeiramente a afirmação para cada componente $D_j \subset D$.

Lema 4.6.2. *Para cada componente $D_j \subset D$ existe uma forma meromorfa fechada com pólos simples ω_j definida numa vizinhança U_j de D_j, tal que $\tilde{\mathcal{F}}\big|_{U_j}$ é dada por $\omega_j = 0$ fora de $(\omega_j)_\infty$. A forma ω_j é unicamente determinada pela seguinte condição: Dados $q \in D_j \backslash \operatorname{sing}\tilde{\mathcal{F}}$, Σ um disco transversal a D_j com $\Sigma \cap D_j = q$, e um sistema de coordenadas holomorfo z em $(\Sigma, z(q) = 0)$, que linearize a holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, \Sigma)$, então $\omega_j\big|_\Sigma = \frac{dz}{z}$.*

Demonstração. Dado um ponto $p \in D_j \backslash \operatorname{sing}\tilde{\mathcal{F}}$, escolhemos um sistema de coordenadas holomorfo $\phi = (x, y)\colon U \to \mathbb{C}^2$ com $p \in U$, $\phi(p) = (0, 0)$ e $\phi(U) = \{(x, y);\ |\ x\ | < 2,\ |\ y\ | < 2\}$, tal que:

(1) $\tilde{\mathcal{F}}\big|_U$ é a folheação cujas folhas são da forma $y = cte$.

(2) $D_j \cap U \subset (y = 0)$.

(3) $\Sigma = (x = 0)$ é uma seção transversal a $\tilde{\mathcal{F}}$ e $y\ |_\Sigma$ é um sistema de coordenadas que lineariza a holonomia virtual $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, \Sigma)$.

A partir daí podemos obter uma cobertura aberta, digamos $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, de $D_j \backslash \operatorname{sing}\tilde{\mathcal{F}}$, por abertos conexos, onde são definidas coordenadas locais $(x_\alpha, y_\alpha)\colon U_\alpha \to \mathbb{C}^2$, com as propriedades (1), (2), e (3) acima. Podemos supor que, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então $U_a \cap U_\beta$ é conexo. Vejamos o que ocorre numa intersecção não vazia $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Utilizando a propriedade (3) e o fato que a holonomia virtual de D_j contém um atrator, é possível provar a seguinte afirmação:

Afirmação 4.6.3. *Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $y_\alpha = c_{\alpha,\beta}.y_\beta$, para alguma constante $c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}^*$.*

Deixamos a prova da afirmação acima como exercício para o leitor (veja Exercício 4).

Decorre da afirmação que, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $\frac{dy_\alpha}{y_\alpha} = \frac{dy_\beta}{y_\beta}$ em $U_\alpha \cap U_\beta$. Logo, existe uma forma meromorfa fechada ω_j em $V_j = \bigcup_\alpha U_\alpha$, tal que $\omega_j\big|_{U_\alpha} := \frac{dy_\alpha}{y_\alpha}$.

Afirmação 4.6.4. *A 1-forma ω_j se estende a uma vizinhança U_j de D_j.*

Demonstração. Com efeito, fixemos um ponto singular $p \in \operatorname{sing}\tilde{\mathcal{F}} \cap D_j$. Como p é uma singularidade não degenerada e a holonomia das separatrizes locais (de fato toda a holonomia virtual de D_j) é linearizável, $\tilde{\mathcal{F}}$ é equivalente numa vizinhança de p a uma folheação linear, pelo Lema de Mattei-Moussu. Assim sendo, podemos escolher um sistema de coordenadas $(x,y)\colon U \to \mathbb{C}^2$, com $p \in U$, $D_j \cap U \subset (y=0)$ e tal que $\tilde{\mathcal{F}}\big|_U$ é dada em U por $\omega = xdy - \lambda ydx = 0$, sendo $\lambda \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{Q}_+$ (já que as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ são simples e não degeneradas). A holonomia local associada a esta singularidade, relativa ao divisor D_j, calculada na seção transversal $\Sigma_j = (x=1)$ é então dada por $h(y) = \exp(2\pi i\lambda).y$, como já vimos anteriormente. Consideremos a 1-forma meromorfa fechada $\omega_p = \frac{dy}{y} - \lambda\frac{dx}{x} = \frac{1}{x.y}.\omega$ em U. Esta é uma forma fechada que tem pólos simples e resíduo 1 sobre $D_j \cap U \subset (y=0)$. Observe que ambas as formas, ω_p e ω_j, estão definidas e representam a mesma folheação $(\tilde{\mathcal{F}})$ em $V_j \cap U \supset \gamma = \{(x,0);\ \mid x \mid = 1\}$. Logo $\omega_q \wedge \omega_j = 0$ e portanto $\omega_j = f.\omega_p$ em $V_j \cap U$, onde f é uma função meromorfa em $V_j \cap U$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $V = \{(x,y);\ 1-\epsilon <\mid x \mid < 1+\epsilon,\ \mid y \mid < \epsilon\} \subset V_j \cap U$.

Observe que, $\omega_j \mid_V = \frac{\alpha}{y}$ e $\omega_p \mid_V = \frac{\beta}{y}$, onde α e β são holomorfas em V. Decorre daí que f é de fato holomorfa em V. Podemos então representar f em V por uma série de Laurent da forma

$$f(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{Z}, j\geq 0} f_{ij}x^i y^j$$

Por outro lado, como ω_p e ω_j são fechadas obtemos que $df \wedge \omega_p = 0$, ou seja, f é uma integral primeira de $\tilde{\mathcal{F}}$ em $V_j \cap U$. Esta relação pode ser escrita em V como:

$$(*)\quad xf_x + \lambda y f_y = 0$$

Considerando a série de Laurent do termo da esquerda de (*) e igualando os seus coeficientes a zero, obtemos as seguintes relações:

$$(**)\quad (i + j\lambda)f_{ij} = 0,\ \forall i \in \mathbb{Z},\ j \geq 0$$

Temos dois casos a distinguir:

Caso 1: $\lambda \notin \mathbb{Q}$. Neste caso claramente devemos ter $f_{ij} = 0\,, \forall (i,j) \neq (0,0)$, ou seja f é constante e logo $\omega_j = c.\omega_p$ no domínio comum, onde c é uma constante. Utilizando que os resíduos de ω_p

e ω_j ao longo de $(y=0)$ são iguais a 1, obtemos $c=1$, ou seja $\omega_p = \omega_j$ em $V_j \cap U$. Decorre daí que ω_j se estende como ω_p à vizinhança U de p.

Caso 2: $\lambda \in \mathbb{Q}_-$. Seja $\lambda = -\frac{m}{n}$ onde $n, m \in \mathbb{N}$ são primos entre si. Neste caso (**) implica que, se $f_{ij} \neq 0$ então $n.i - m.j = 0$, ou seja que $(i,j) = (k.m, k.n)$, onde $k \geq 0$ (já que $j \geq 0$). Concluímos daí que $f(x,y) = \phi(x^m y^n)$, onde ϕ é uma função holomorfa de uma variável. Isto prova que f se estende a uma função holomorfa numa vizinhança de p. Portanto ω_j pode ser estendida a uma vizinhança de p como $f.\omega_p$, o que prova a Afirmação 4.6.4. $\square$

Para finalizar a prova do Lema 4.5.3, basta observar que como o grupo de holonomia virtual contém um atrator, segue que fixada carta local $(x_\alpha, y_\alpha) \in U_\alpha$ como acima na construção de ω_j e dada qualquer coordenada z em $\Sigma_\alpha = (x_\alpha = \text{cte})$ que linearize $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, \Sigma_\alpha)$, então o Lema 4.2.3 implica que $y_\alpha\big|_{\Sigma_\alpha} = c.z$ para alguma constante $c \in \mathbb{C}^*$, de onde podemos deduzir que $\omega_j\big|_{\Sigma_\alpha} = \frac{dy_\alpha}{y_\alpha}\big|_{U_\alpha} = \frac{dz}{z}$. $\square$

Agora provaremos a existência de uma forma fechada ω com pólos simples, e que define $\tilde{\mathcal{F}}$ (fora de seus pólos) numa vizinhança de $D = D_o \cup D_1 ... \cup D_r$.

Pelo Lema 4.5.3, para cada componente $D_j \subset D$ existem, U_j vizinhança de D_j, e ω_j, 1-forma meromorfa fechada com pólos simples definida em U_j, tais que $\tilde{\mathcal{F}}\big|_{U_j}$ é dada por $\omega_j = 0$ fora de $(\omega_j)_\infty$. Consideremos uma esquina $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, digamos $q = D_i \cap D_j$. Como ω_i e ω_j representam a mesma folheação na vizinhança $U_{ij} = U_i \cap U_j$ de q, vemos que $\omega_i = f.\omega_j$, onde f meromorfa em U_{ij}. Observe que $df \wedge \omega_j = 0$, já que ω_i e ω_j são fechadas, ou seja, f é uma integral primeira para $\tilde{\mathcal{F}}$ em U_{ij}. Provaremos em seguida que f é constante.

Como já vimos, $\tilde{\mathcal{F}}$ é equivalente a uma folheação linear numa vizinhança de q, ou seja, pode ser representada pela forma $xdy - \lambda ydx$ em alguma carta local $(x,y)\colon U \to \mathbb{C}^2$, tal que $D_j \subset (y=0)$ e $D_i \subset (x=0)$. Se $\lambda \notin \mathbb{Q}$ então, pelo que vimos na prova do Lema 4.5.3, $\tilde{\mathcal{F}}$ não admite integral primeira meromorfa não constante numa vizinhança de q. Logo neste caso f é uma constante, como queríamos.

Suponha agora que $\lambda = -m/n \in \mathbb{Q}$, onde $n, m \in \mathbb{N}$ são relativamente primos. Veremos que neste caso f é também constante. Fixemos discos transversais $\Sigma_i \subset (y=1)$ e $\Sigma_j \subset (x=1)$ como de hábito. Podemos escolher a carta (x,y) de tal forma que $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_i, \Sigma_i)$ é linear na coordenada $x \to (x,1) \in \Sigma_i$. De fato, por hipótese, a holonomia virtual de D_i contém um atrator, digamos g, onde $g'(0) = \mu$. Como g comuta com a holonomia da separatriz D_i, a qual é da forma $h(x) = e^{-2\pi i \frac{n}{m}}.x$, podemos escrever $g(x) = \mu x \tilde{g}(x^m)$ para algum $\tilde{g} \in \mathcal{O}_1$ tal que $\tilde{g}(0) = 1$. Seja $x' = \phi(x)$ uma mudança de coordenadas em vizinhança de $0 \in \Sigma_i$ tal que $\phi \circ g \circ \phi^{-1}$ é linear, ou seja, tal que $\phi(g(x)) = \mu\phi(x)$. Utilizando que na coordenada x' a holonomia h da separatriz Σ_i é também linear, obtemos que $\phi(x) = x.\tilde{\phi}(x^m)$, onde $\tilde{\phi}(0) \neq 0$ (verifique). Consideremos então a mudança de coordenadas $(x', y') = \psi(x,y) = (x.\tilde{\phi}(x^m.y^n), y)$, a qual sobre Σ_i coincide com ϕ.

Não é difícil verificar que $\psi^*(mydx + nxdy) = u.(my'dx' + nx'dy'),$, onde $u(0) \neq 0$, ou seja, que ψ preserva a folheação linear. Podemos então supor que g é linear na coordenada (x, y), como queríamos.

Observe agora que $k(y) = \mu_1.y$, onde μ_1 é uma raiz m-ésima de μ^n é um atrator linear em $\text{Hol}^{\text{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, \Sigma_j)$ (veja a demonstração da Proposição 4.5.1). Isto implica que $\text{Hol}^{\text{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, D_j, \Sigma_j)$ é linearizável na coordenada $y \to (1, y)$ de Σ_j. Por outro lado, pelo Lema 4.5.3, temos

$$\omega_i \mid_{\Sigma_i} = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \omega_i = \frac{dx}{x} + \frac{n}{m}.\frac{dy}{y}$$

como o leitor pode verificar facilmente. Analogamente $\omega_j = \frac{dy}{y} + \frac{m}{n}.\frac{dx}{x}$, de onde concluímos que $\omega_i = \frac{n}{m}.\omega_j$, como queríamos.

Vamos agora utilizar que D não tem ciclos. Podemos supor, sem perda de generalidade, que D é conexo. Ordenamos $D = D_o \cup D_1 \cup ... \cup D_r$ de tal forma que para todo $k \leq r$ o conjunto $D_o \cup ... \cup D_k$ seja conexo. Definimos então por indução em $k = 0, ..., r$, uma forma fechada Ω_k por

(i) $\Omega_o = \omega_o$.

(ii) Dado $0 \leq k \leq r - 1$, suponhamos definida a forma fechada Ω_k na vizinhança $U_o \cup ... \cup U_k$ de $D_o \cup ... \cup D_k$, de tal forma que $\Omega_k \mid_{U_j} = c_j\, \omega_j$, onde $c_j \in \mathbb{C}^*$. Observe que em $U_k \cap U_{k+1}$ temos $\Omega_k = c_k.\omega_k = c'.\omega_{k+1}$, onde c' é uma constante. Podemos então estender Ω_k a uma forma Ω_{k+1} em $U_o \cup ... \cup U_{k+1}$ colocando $\Omega_{k+1} \mid_{U_{k+1}} = c'.\omega_{k+1}$. O fato de D não ter ciclos implica que Ω_{k+1} está bem definida.

Basta agora colocarmos $\tilde{\omega} = \Omega_r$. □

A hipótese (3) pode ser omitida no caso que mais nos interessa:

Proposição 4.6.5. *Seja $\mathcal{F}$ folheação em $\mathbb{C}P(2)$, com uma curva algébrica invariante $\Lambda \subset \mathbb{C}P(2)$. Denote por $\pi\colon (M, D) \to (\mathbb{C}P(2), \Lambda)$ a resolução de $\mathcal{F}\big|_\Lambda$ e seja $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ como de hábito. Assuma que:*

(1) $\text{sing}\,\tilde{\mathcal{F}} \cap D$ não contém selas-nós e que as singularidades de $\mathcal{F}$ sobre Λ não são dicríticas, isto é, que todas as componentes irredutíveis de D são invariantes por $\tilde{\mathcal{F}}$.

(2) Cada componente irredutível D_j de D tem holonomia virtual abeliana e linearizável contendo um atrator.

Então $\mathcal{F}$ é dada por uma forma logarítmica em $\mathbb{C}P(2)$.

Demonstração. A idéia é provar que $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma 1-forma meromorfa fechada (veja o Exemplo 1.4.8 do Capítulo I).

Seguindo a prova da Proposição 4.6.1, podemos construir para cada componente $D_j \subset D$ uma 1-forma meromorfa ω_j numa vizinhança U_j de D_j, que é fechada e com pólos simples. Estas formas são tais que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $\omega_i = c_{ij}.\omega_j$ numa vizinhança de $D_i \cap D_j$, onde $c_{ij} \in \mathbb{C}^*$.

Obtemos desta forma um cociclo multiplicativo $(c_{ij})_{U_i \cap U_j \neq \emptyset}$, associado à cobertura $U_o \cup ... \cup U_r$ de $D = D_o \cup ... \cup D_r$.

Fixemos um sistema de coordenadas afim $\mathbb{C}^2 \simeq E \subset \mathbb{C}P(2)$ e uma forma polinomial Ω que representa $\mathcal{F}$ em E. Esta forma se estende a $\mathbb{C}P(2)$ como forma meromorfa com pólos na reta do infinito de E. Seja $\tilde{\Omega} = \pi^*(\Omega)$. Esta é uma forma meromorfa em M que representa $\tilde{\mathcal{F}}$ em $M \setminus (\tilde{\Omega})_\infty$. Sendo assim, para cada $j \in \{0, ..., r\}$, existe uma função meromorfa h_j em U_j tal que $\tilde{\Omega} \mid_{U_j} = h_j.\omega_j$. Por outro lado, se $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então, em U_{ij} temos

$$\tilde{\Omega} = h_i \, \omega_i = h_i \, c_{ij}.\omega_j = h_j \, \omega_j$$

de onde concluímos que

$$h_i = c_{ij}^{-1}.h_j \ \Rightarrow \ \frac{dh_i}{h_i} = \frac{dh_j}{h_j}$$

em U_{ij}. Decorre daí que existe uma 1-forma meromorfa fechada $\tilde{\eta}$ em $\tilde{U}$ tal que $\tilde{\eta} \mid_{U_j} = \frac{dh_j}{h_j}$. Como $\pi \colon M \to \mathbb{C}P(2)$ é obtido por explosões pontuais, existe uma forma meromorfa fechada η em $U = \pi(\tilde{U})$ tal que $\tilde{\eta} = \pi^*(\eta)$. Pelo Teorema global de Levi (veja o Apêndice), a forma η pode ser estendida a uma forma meromorfa em $\mathbb{C}P(2)$, a qual denotaremos também por η.

Afirmação 4.6.6. *Existe uma função meromorfa f em $\mathbb{C}P(2)$ tal que $\eta = \frac{df}{f}$.*

Demonstração. Utilizaremos a classificação das 1-formas meromorfas fechadas em $\mathbb{C}P(n)$, vista na Proposição 2.5.11. Em primeiro lugar observemos que, se C é uma componente irredutível de $(\eta)_\infty$, o divisor de pólos de η, então: (i) A ordem de C como polo de η é um. (ii) O resíduo de η em C é inteiro.

De fato, seja $\overline{\eta} = \pi^*(\eta)$ (a qual será uma extensão meromorfa da forma $\tilde{\eta}$ considerada anteriormente). Pelo teorema de Bézout, $C \cap \Lambda \neq \emptyset$, logo $C \cap U \neq \emptyset$. Em particular, a transformada estrita $\tilde{C}$ de C por π, corta $\tilde{U}$. Suponhamos por exemplo que $\tilde{C} \cap U_j \neq \emptyset$. Ora, $\overline{\eta} \mid_{U_j} = \frac{dh_j}{h_j}$. Como $\frac{dh_j}{h_j}$ satisfaz às propriedades (i) e (ii) (verifique), obtemos que o mesmo é verdade para $\overline{\eta}$, logo para η. Decorre então da Proposição 2.5.11 do Capítulo 2, que em coordenadas homogêneas, η pode ser escrita como

$$\eta = \sum_{j=1}^{s} m_j \, \frac{df_j}{f_j}$$

onde $f_1, ..., f_s$ são polinômios homogêneos em $\mathbb{C}^3$ e $m_1, ..., m_s \in \mathbb{Z}$ são tais que $\sum_{j=1}^{s} m_j \, grau(f_j) = 0$. A função racional F em $\mathbb{C}^3$ definida por $F = \Pi_{j=1}^{s} f_j^{m_j}$ é o quociente de dois polinômios homogêneos do mesmo grau (já que $\sum_{j=1}^{s} m_j \ \mathrm{grau}(f_j) = 0$) e satisfaz $\frac{dF}{F} = \sum_{j=1}^{s} m_j \, \frac{df_j}{f_j}$. Portanto ela induz uma função meromorfa f em $\mathbb{C}P(2)$ tal que $\eta = \frac{df}{f}$, o que prova a Afirmação 4.6.6.

Afirmação 4.6.7. *f é um fator integrante de Ω, isto é, $d(\frac{\Omega}{f}) = 0$.*

Com efeito, se $\tilde{f} = f \circ \pi$, então $\overline{\eta} = \frac{d\tilde{f}}{\tilde{f}}$. Por outro lado, se $j \in \{0, ..., r\}$, então $\omega_j = \frac{1}{h_j}.\tilde{\Omega}$ é fechada, logo

$$d\tilde{\Omega}\mid_{U_j} = \frac{dh_j}{h_j} \wedge \tilde{\Omega} = \frac{d\tilde{f}}{\tilde{f}} \wedge \tilde{\Omega}$$

já que $\overline{\eta}\mid_{U_j} = \frac{dh_j}{h_j}$. Como a relação acima vale num aberto de M, ela é verdadeira em M. Obtemos daí que $d\Omega = \frac{df}{f} \wedge \Omega$ e isto implica que $d(\frac{\Omega}{f}) = 0$, o que prova a Afirmação 4.6.7.

Coloquemos $\omega = \frac{\Omega}{f}$. Esta é uma forma meromorfa fechada que representa $\mathcal{F}$ fora de seus pólos. Para ver que ω é uma forma logarítmica é suficiente provar que os seus pólos são de ordem um (veja a Proposição 2.5.11). Como o leitor pode verificar, este fato decorre de um argumento semelhante ao que fizemos para provar (i) da Afirmação 4.6.6 e que as formas ω_j, utilizadas anteriormente, têm pólos de ordem um. Deixamos os detalhes para o leitor. □

4.7 O Teorema de Linearização

Nesta seção apresentamos uma prova do seguinte resultado central deste capítulo:

Teorema 4.7.1 ([14]). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em $\mathbb{C}P(2)$ com conjunto limite algébrico próprio contendo uma componente irredutível de dimensão 1 $\Lambda \subset \mathbb{C}P(2)$. Sejam $\pi\colon (M, D) \to (\mathbb{C}P(2), \Lambda)$ a resolução das singularidades de $\mathcal{F}$ em Λ e $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*(\mathcal{F})$. Suponha que:*

(1) As componentes irredutíveis de D são invariantes por $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\operatorname{sing}\tilde{\mathcal{F}} \cap D$ não contém selas-nós.

(2) Alguma componente de D contém um atrator em sua holonomia virtual.

Então existem uma folheação de grau um $\L$ em $\mathbb{C}P(2)$ e uma aplicação racional $\Pi\colon \mathbb{C}P(2) \to \mathbb{C}P(2)$ tal que $\mathcal{F} = \Pi^*(\L)$.

Primeiro provaremos o seguinte:

Proposição 4.7.2. *Sejam $\mathcal{F}$ e Λ como no Teorema 4.3.2, então $\mathcal{F}$ é dada por uma forma logarítmica.*

Demonstração. Por hipótese alguma componente irredutível de D contém um atrator na sua holonomia virtual. De acordo com a Proposição 4.5.1 isto implica que o grupo de holonomia virtual de qualquer componente irredutível de D é abeliano, linearizável e contém um atrator. Mas então aplicando a Proposição 4.6.5 concluímos que $\mathcal{F}$ é dada por forma logarítmica. □

Prova do Teorema 4.3.2. Fixemos um sistema de coordenadas afins $\mathbb{C}^2 \simeq E \subset \mathbb{C}P(2)$ tal que a reta no infinito $L_\infty = \mathbb{C}P(2)\backslash\mathbb{C}^2$ nã seja invariante por $\mathcal{F}$. Seja ω a 1-forma logarítmica que define $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(2)$ e que é dada pela Proposição 4.7.2. Escrevemos a restrição $\omega\big|_{\mathbb{C}^2} = \sum\limits_{j=1}^{\ell} \lambda_j.\frac{df_j}{f_j}$, onde cada f_j é um polinômio irredutível e $(\omega)_\infty = \bigcup_{j=1}^{\ell} \Gamma_j$ onde $\Gamma_j = \overline{(f_j = 0)}$ (já que L_∞ não é invariante por $\mathcal{F}$). Observemos que λ_j é o resíduo de ω ao longo de Γ_j. Além disto, se d_j é o grau de f_j, então:

$$\sum_{j=1}^{\ell} d_j\, \lambda_j = 0$$

Estes fatos decorrem da Proposição 2.5.11. O que provaremos é que existem funções racionais F, G, $a \neq 0$ e $\lambda \notin \mathbb{R}$ tais que

$$\omega = a(\frac{dF}{F} - \lambda.\frac{dG}{G}).$$

Isto implicará que, se $\phi = (F, G)$, então $\mathcal{F} = \phi^*(\text{Ł})$, onde Ł é a folheação de grau um em $\mathbb{C}P(2)$ cuja restrição a $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P(2)$ é dada por $ydx - \lambda.xdy = 0$. Logo, se Π é a aplicação racional de $\mathbb{C}P(2)$ induzida por ϕ, teremos $\Pi^*(\text{Ł}) = \mathcal{F}$.

Com este objetivo em mente, provaremos o seguinte resultado:

Lema 4.7.3. *Sejam $\mu_j = \exp(2\pi i\frac{\lambda_j}{\lambda_1})$, $j = 2, ..., \ell$, e Σ_1 um disco transversal a $\mathcal{F}$ por um ponto $p \in \Gamma_1$. Seja z um sistema de coordenadas em Σ_1 tal que $z(p) = 0$ e $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, \Gamma_1, \Sigma_1)$ é linear neste sistema de coordenadas. Então o biholomorfismo $h_j(z) = \mu_j\, z$ está em $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, \Gamma_1, \Sigma_1)$ para todo $j = 2, ..., \ell$.*

Demonstração. Consideremos a restrição $\omega_1 = \omega\big|_{\Sigma_1}$. Esta é uma 1-forma meromorfa com pólo simples no centro do disco $p = \Gamma_1 \cap \Sigma_1$, que é fechada e tem resíduo λ_1 neste pólo. Podemos então escrever $\omega_1 = \lambda_1 \frac{dz}{z}$ para algum sistema de coordenadas z numa vizinhança de p em Σ_1 (veja o Lema 1.5.16. Neste sistema de coordenadas a holonomia virtual de Γ_1 é linear. De fato, pelo Lema 4.6.2, ω_1 se escreve como acima em qualquer sistema de coordenadas que linearize a holonomia virtual de Γ_1.

Fixemos agora $j \in \{2, ..., \ell\}$. Vamos supor primeiramente que existe algum ponto $q \in \Gamma_1 \cap \Gamma_j \setminus \cup_{i \neq 1,j} \Gamma_i$ tal que $df_1(q) \wedge df_j(q) \neq 0$. Neste caso, existe um sistema de coordenadas (x, y) numa vizinhança U de q tal que $U \cap \Gamma_1 \subset (y = 0)$, $U \cap \Gamma_j \subset (x = 0)$, $\omega\ |_U = \lambda_j\, \frac{dx}{x} + \lambda_1 \frac{dy}{y}$ e a holonomia virtual de Γ_1 é linearizável na coordenada y da seção $(x = 1)$ (veja o exercício [ref]). A holonomia da separatriz $(y = 0)$ contida em Γ_1 é então $h_j(y) = \mu_j\, y$. Isto implica o desejado, neste caso.

O caso geral pode ser demonstrado utilizando o seguinte fato:

Afirmação 4.7.4. *Fixado $z \in \Sigma_1$, existem caminhos contínuos $a\colon [0,1] \to \mathbb{C}P(2)\backslash \bigcup_{j=1}^{\ell} \Gamma_j$, contido na folha por $z \in \Sigma_1$, e $b\colon [0,1] \to \Sigma_1\backslash\{p\}$, tais que $b(0) = a(1)$ e $b(1) = z$ e $a * b$ é homólogo a γ_j em $\mathbb{C}P(2)\backslash \bigcup_{j=1}^{\ell} \Gamma_j$, onde γ_j é um caminho simples num pequeno disco Σ_j transverso a Γ_j em $\mathbb{C}^2$ e centrado em $\Sigma_j \cap \Gamma_j$ (Exercício 5).*

Decorre daí que

$$\int_{a*b} \omega = \int_{\gamma_j} \omega = 2\pi i \lambda_j$$

Por outro lado, $\int_{a*b} \omega = \int_a \omega + \int_b \omega$ e como $\omega\big|_a \equiv 0$ (pois a é contido numa folha que evita os pólos de ω) obtemos que $\int_{a*b} \omega = \int_b \omega = \int_b \lambda_1.\frac{dz}{z}$. Exponenciando a relação $\int_b \frac{dz}{z} = 2\pi i\lambda_j/\lambda_1$, obtemos então que $\frac{z}{a(1)} = \exp(2\pi i\lambda_j/\lambda_1)$, ou seja, $a(1) = \mu_j^{-1}.z$. Como a é contido na folha de $\mathcal{F}$ por z segue que $h_j(z) = \mu_j\, z$ define elemento da holonomia virtual como anunciado. □

Podemos agora completar a prova do Teorema 4.3.2. O grupo de holonomia virtual $G := \mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\mathcal{F}, \Gamma_1, \Sigma_1)$ é abeliano, contém um atrator e tem órbitas discretas, de modo que G é gerado por uma rotação racional $z \mapsto \exp(\frac{2\pi i}{m}).z$ ($m \in \mathbb{N}$) e um atrator $z \mapsto \exp(2\pi i\lambda).z$ ($Im(\lambda) > 0$)(veja Exercício 6), ou seja:

$$G = \{z \mapsto \exp(2\pi i.(\frac{k}{m} + l.\lambda).z\,; k, l \in \mathbb{Z}\}$$

Decorre do Lema 4.6.2 que existem inteiros k_j, l_j tais que

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_1} = \frac{k_j}{m} + l_j\lambda$$

Podemos escrever esta relação do seguinte modo

$$m\frac{\lambda_j}{\lambda_1} = v_j - u_j\lambda$$

onde $u_j, v_j \in \mathbb{Z}$. Coloquemos $G = f_2^{u_2} \dots f_\ell^{u_\ell}$ e $F = f_1^m f_2^{v_2} \dots f_\ell^{v_\ell}$.

Um cálculo direto mostra que

$$\frac{dF}{F} - \lambda\frac{dG}{G} = m\frac{df_1}{f_1} + \sum_{j=2}^{\ell} v_j \frac{df_j}{f_j} - \sum_{j=2}^{\ell} u_j\lambda\frac{df_j}{f_j} = m\left(\frac{df_1}{f_1} + \sum_{j=2}^{\ell} \frac{\lambda_j}{\lambda_1}\frac{df_j}{f_j}\right) = \frac{m}{\lambda_1}\omega$$

Isto encerra a prova do Teorema 4.3.2. □

4.8 Generalizações

Como vimos no Exemplo 4.1.6 podemos ter uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(2)$ com conjunto limite algébrico mas que não é dada por imagem inversa de folheação de grau um em $\mathbb{C}P(2)$. Em contrapartida, dentro de certas condições nas singularidades, é possível provar que este exemplo é essencialmente único, a menos do caso em que a folheação é como no Teorema 4.3.2:

Teorema 4.8.1 ([15]). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}P(2)$ tendo como conjunto limite, algumas de suas singularidades e uma curva algébrica $\Lambda \subset \mathbb{C}P(2)$. Assuma que as singularidades de $\mathcal{F}$ em Λ não são dicríticas e que as selas-nós que surgem na resolução destas singularidades têm variedade central invariante com holonomia não periódica. Então, ou bem $\mathcal{F}$ é dada por uma forma meromorfa fechada em $\mathbb{C}P(2)$, ou é dada pela imagem inversa, via uma aplicação racional, de uma folheação de Riccati da forma $\mathcal{R} : p(x)dy - (a(x)y^2 + b(x)y)dx = 0$, onde Λ corresponde a $\overline{(y = 0)} \cup \overline{(p(x) = 0)}$, em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.*

Note que são admitidas certas selas-nós, e que **não** se supõe a existência de atratores na holonomia virtual. A prova deste teorema é baseada no estudo dos grupos de holonomia virtual e nos grupos de holonomia *singulares* da resolução de $\mathcal{F}$ em Λ. O conjunto limite das folhas $\tilde{L}$ da folheação resolvida $\tilde{\mathcal{F}}$, induz pseudo-órbitas discretas em cada um deste grupos, de modo que este são solúveis como em [67]. A solubilidade deste grupos nos permite então caracterizar a folheação (veja [16] e também §5 do Capítulo 6).

4.9 Exercícios do Capítulo 4

1. Prove que a definição dada para conjunto limite de uma folha L de uma folheação $\mathcal{F}$ independe da exaustão por compactos de L.
2. Prove as propriedades (1) e (2) da Proposição 4.1.3.
3. Prove o Lema 4.2.3.
4. Prove a Afirmação 4.6.3.

sugestão: Considere um caminho $\gamma\colon I \to D_j - \{\operatorname{sing}\tilde{\mathcal{F}}\}$, e o difeomorfismo de holonomia $f_{[\gamma]}\colon (\Sigma_j, q_j) \to (\Sigma_i, q_i)$, obtido a partir de γ. Seja g in $\mathrm{Hol}^{\mathrm{virt}}(\tilde{\mathcal{F}}, \Sigma_j)$ um atrator, e considere a conjugação $\tilde{g} := g f_{[\gamma]}^{-1} \circ g \circ f_{[\gamma]} \in Dif(\Sigma_i, q_i)$, que define também um atrator. Então $y_i\big|_{\Sigma_i}$ lineariza g e $y_j\big|_{\Sigma_j}$ lineariza $\tilde{g}$. Deste modo $y_i = f_{[\gamma]}(y_j)$ é linear.
5. Prove a Afirmação 4.7.4.
6. Prove que um grupo abeliano $G \subset Dif(\mathbb{C}, 0)$, com órbitas discretas e contendo um atrator, é gerado por este atrator e por uma rotação racional e portanto é conjugado a um grupo da forma

$$G_{m\lambda} = \{z \mapsto \exp(2\pi i(\frac{k}{m} + l.\lambda).z)\,;k, l \in \mathbb{Z}\},$$

onde $\lambda \notin \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$.

Capítulo 5

O Teorema de Rigidez de Ilyashenko

5.1 Equivalências Topológicas e analíticas

Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ folheações holomorfas singulares em variedades M e N. Uma *equivalência topológica* entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ é um homeomorfismo $\phi\colon M \to N$ tal que: (i) $\phi(\operatorname{sing}\mathcal{F}) = \operatorname{sing}\mathcal{G}$. (ii) ϕ leva folhas de $\mathcal{F}$ em folhas de $\mathcal{G}$.

Diremos que ϕ é uma *equivalência analítica* entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, se ϕ é um biholomorfismo que satisfaz (i) e (ii) acima.

Se existe uma equivalência topológica (resp. analítica) entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, diremos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são *topologicamente equivalentes* (resp. *analiticamente equivalentes*).

Neste capítulo estudaremos um caso particular do seguinte problema:

Problema 5.1.1. *Sob que condições uma equivalência topológica entre folheações é analítica ?*

Vamos, de fato, considerar o caso de deformações paramétricas de folheações.

Definição 5.1.2 (Famílias paramétricas de folheações)**.** Sejam M uma variedade complexa e X um espaço topológico. Uma *família de folheações de dimensão k em M, parametrizada por X*, é uma correspondência contínua $X \ni t \to \mathcal{F}_t$, que associa a cada $t \in X$ uma folheação holomorfa de dimensão k em M, $\mathcal{F}_t$. Se X for um espaço analítico e a correspondência for holomorfa, diremos que a família é *analítica*.

Pressupomos na definição que o espaço de folheações holomorfas de dimensão k em M possui (localmente) uma estrutura de espaço analítico, o que é conhecido no caso em que M é compacta (veja [36]). No caso em que $M = \mathbb{C}P(n)$ e $k = 1$ ou $k = n - 1$ este fato foi demonstrado no Capítulo 2 (Corolário 1 da Proposição 2.3.5 e Proposição 2.5.6.

Definição 5.1.3. Sejam $X \ni t \to \mathcal{F}_t$ uma família holomorfa de folheações e $\mathcal{F}_o = \mathcal{F}_{t_o}$, $t_o \in X$. Diremos que a família é *topologicamente trivial* (resp.*holomorficamente trivial*) se existe uma aplicação contínua $\phi\colon X \times M \to M$ satisfazendo: (*) Para cada $t \in X$ a aplicação $\phi_t\colon M \to M$, definida por $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, é uma equivalência topológica (resp. analítica) entre $\mathcal{F}_o$ e $\mathcal{F}_t$.

Por simplicidade, suporemos que o espaço de parâmetros X é um disco $D = \{z \in \mathbb{C};\ \mid z \mid < r\}$, e que, na Definição 5.1.2, $t_o = 0 \in D$. Neste caso diremos que $(\mathcal{F}_t)_{t\in D}$ é uma *deformação analítica de* $\mathcal{F}_o$.

O nosso objetivo é demonstrar o chamado Teorema de Rigidez de Ilyashenko que, a grosso modo, mostra que genericamente (em $\mathcal{F}_o$), uma deformação analítica, topologicamente trivial, $(\mathcal{F}_t)_{t\in D}$ de uma folheação $\mathcal{F}_o$ em $\mathbb{C}P(2)$, tendo a reta no infinito invariante é, de fato, analiticamente trivial.

Definição 5.1.4. Fixemos um sistema afim $\mathbb{C}^2 \simeq E \subset \mathbb{C}P(2)$. Definimos o subconjunto $\mathcal{X}(n) \subset \mathcal{F}(2, n)$, como o conjunto das folheações de grau n em $\mathbb{C}P(2)$, que têm a reta do infinito de E como solução algébrica.

Observação 5.1.5. Uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathcal{X}(n)$ pode ser representada em $\mathbb{C}^2$ por um campo polinomial de grau n. Dois campos de grau n que determinam a mesma folheação, diferem por uma constante multiplicativa. Desta forma $\mathcal{X}(n)$ é um aberto (conexo) de um espaço projetivo.

Podemos agora enunciar o Teorema de Ilyashenko.

Teorema 5.1.6 (Teorema de Rigidez de Ilyashenko, [38, 51])**.** *Para cada inteiro $n \geq 2$, existe subconjunto residual $I_n \subset \mathcal{X}(n)$ tal que: Toda deformação analítica topologicamente trivial $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in D}$, de um elemento $\mathcal{F}_o \in I_n$, com $\mathcal{F}_t \in \mathcal{X}(n)$, é holomorficamente trivial.*

De fato, não é necessário supor que $\mathcal{F}_t \in \mathcal{X}(n)$ para $t \neq 0$.

Corolário 5.1.7. *Seja $I_n \subset \mathcal{X}(n)$ como no Teorema de Ilyashenko. Então toda deformação analítica topologicamente trivial $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in D}$, de um elemento $\mathcal{F}_o \in I_n$, é holomorficamente trivial.*

O Corolário acima decorre do Teorema de Ilyashenko e de duas observações que faremos em seguida.

Observação 5.1.8. Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ duas folheações em $\mathbb{C}P(2)$ topologicamente equivalentes por um homeomorfismo ϕ de $\mathbb{C}P(2)$. Suponha que $\mathcal{F} \in \mathcal{X}(n)$ e seja L a reta do infinito de E. Então $\phi(L)$ é uma reta de $\mathbb{C}P(2)$. Provemos este fato.

Observe primeiramente que $L_1 = \phi(L)$ é uma solução algébrica lisa de $\mathcal{G}$. Com efeito, como $\tilde{L} = L \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$ é uma folha de $\mathcal{F}$, então $N = \phi(\tilde{L})$ é uma folha de $\mathcal{G}$. Como $\phi(\mathrm{sing}(\mathcal{F})) = \mathrm{sing}(\mathcal{G})$, obtemos que o conjunto limite de N está contido em $\mathrm{sing}(\mathcal{G})$. Logo $\overline{N} = L_1$ é algébrico pela Proposição 4.1.3. Para provar que L_1 é lisa necessitamos dos seguintes fatos: (i) Cada singularidade de $\mathcal{G}$ em L_1 contém uma única separatriz local de G contida em L_1 (já que o mesmo é verdade para as singularidades de $\mathcal{F}$ em L). (ii) As separatrizes mencionadas em (i) são lisas.

A afirmação (ii) decorre do Teorema de Burau-Zariski ([2, 83]). Segundo este teorema, se S_1 e S_2 são germes de curvas analíticas em $0 \in \mathbb{C}^2$ tais que existe um germe de homeomorfismo $\phi\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ com $\phi(S_1) = S_2$, então S_1 e S_2 têm desingularizações minimais isomorfas. Em particular, se S_1 é lisa, então S_2 também é.

Para concluir a demonstração, basta observar que o número de auto-intersecção de L_1 é 1, já que o número de auto-intersecção é um invariante topológico de uma imersão (veja [29]). Deduzimos daí que L_1 tem grau 1, logo é uma reta.

Observação 5.1.9. Consideremos agora uma família (holomorfa) topologicamente trivial $(\mathcal{F}_t)_{t\in D}$ tal que $\mathcal{F}_o \in \mathcal{X}(n)$. Vamos supor que $\mathcal{F}_o$ possui ao menos duas singularidades não degeneradas p_o e q_o em L, a reta do infinito de $E \simeq \mathbb{C}^2$, a qual é invariante por $\mathcal{F}_o$. Seja $\phi\colon D \times \mathbb{C}P(2) \to \mathbb{C}P(2)$ como na Definição 5.1.2. Coloquemos $p(t) = \phi_t(p_o)$ e $q(t) = \phi_t(q_o)$. Decorre da Proposição 2.4.3, que $D \ni t \mapsto p(t)$ e $D \ni t \mapsto q(t)$ são funções holomorfas, já que $(\mathcal{F})_{t\in D}$ é holomorfa.

Seja L_t a reta de $\mathbb{C}P(2)$ que contém $p(t)$ e $q(t)$. Decorre da Observação 5.1.9, que L_t é invariante por $\mathcal{F}_t$ e que $L_t = \phi_t(L)$. Podemos então obter uma família holomorfa de automorfismos de $\mathbb{C}P(2)$, digamos $(f_t)_{t\in D}$ tais que $f_o = id$ e $f_t(L) = L_t$. Colocando $\mathcal{G}_t = f_t^*(\mathcal{F}_t)$, vemos que $\mathcal{G}_t \in \mathcal{X}(n)$. Obtivemos desta forma uma deformação holomorfa topologicamente trivial de $\mathcal{F}_o$, $(\mathcal{G}_t)_{t\in D}$ tal que $\mathcal{G}_t \in \mathcal{X}(n)$ para todo $t \in D$. Vejamos um exemplo que mostra que o teorema não é válido no caso de folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.

Exemplo 5.1.10. Consideremos um subgrupo $G \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, com $k \geq 3$ geradores não parabólicos. De acordo com [56], dadas $k+1$ famílias analíticas de retas verticais $L_o(t), ..., L_k(t) \subset \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ $(t \in D)$, da forma $L_j(t) = \{x_j(t)\} \times \overline{\mathbb{C}}$, existe uma folheação de Riccati $\mathcal{F}_t$ em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ tal que:

(i) As retas $L_o(t), ..., L_k(t)$ são invariantes por $\mathcal{F}_t$, para todo $t \in D$. Além disto, estas são as únicas retas verticais invariantes por $\mathcal{F}_t$.

(ii) O grupo de holonomia de $\mathcal{F}_t$ é conjugado a G.

É possível provar que a deformação $(\mathcal{F})_{t\in D}$ é topologicamente trivial (veja o Teorema 5 de [56]). Por outro lado, para que a deformação seja analiticamente trivial é necessário que o subconjunto $V_t = \{x_o(t), ..., x_k(t)\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ tenha módulo analítico trivial, ou seja, que para todo $t \in D$ exista um automorfismo f_t de $\overline{\mathbb{C}}$ tal que $f_t(V_t) = V_o$, o que não ocorre em geral, se $k \geq 3$.

5.2 Folheações com uma reta invariante

Nesta seção daremos uma versão do Teorema de Jouanolou [52],[55], (Capítulo 3 §4), para folheações com uma reta invariante. Utilizaremos este resultado para construir uma classe genérica de folheações em $\mathcal{X}(n)$, cuja holonomia da reta no infinito é não abeliana, e portanto (como veremos adiante) topologicamente rígida. Assim esta classe consistirá de folheações para as quais as deformações analíticas topologicamente triviais serão, de fato, analiticamente triviais. O resultado principal desta seção é o seguinte:

Teorema 5.2.1 ([59]). *Seja $n \geq 2$. Existe um aberto denso $M_1(n) \subset \mathcal{X}(n)$, tal que se $\mathcal{F} \in M_1(n)$ então:*

(i) *L_∞ é a única folha algébrica de $\mathcal{F}$*

(ii) *As singularidades de $\mathcal{F}$ são hiperbólicas, isto é, o seus números característicos não são reais.*

A fim de provarmos o Teorema 5.2.1 acima, recordamos algumas definições e introduzimos notações que nos serão úteis:

Sejam $q \in U$ uma singularidade não degenerada de uma folheação $\mathcal{F}$, definida em um aberto $U \subset \mathbb{C}^2$, e X um campo de vetores holomorfo que representa $\mathcal{F}$ em U. Então $DX(q)$ tem auto-valores não nulos e os chamados *números característicos* de $\mathcal{F}$ em q são os quocientes λ e λ^{-1} destes autovalores. Como vimos os números característicos não dependem do campo que representa $\mathcal{F}$ em vizinhança de q. Vimos também que, se $\lambda \notin \mathbb{Q}_+$ então $\mathcal{F}$ possui exatamente duas separatrizes (lisas e transversais) por q, digamos S_q^+ e S_q^-, que são tangentes aos vetores característicos de $DX(q)$ em q. Designaremos os auto-valores correspondentes por λ_q^+ e λ_q^-, respectivamente. Os *números característicos* destas separatrizes são dados por $I(\mathcal{F}, S_q^-) = \frac{\lambda_q^+}{\lambda_q^-}$, and $I(\mathcal{F}, S_q^+) = \frac{\lambda_q^-}{\lambda_q^+}$. A singularidade q é chamada *hiperbólica* se os números característicos não são reais. Consideremos os seguintes espaços de folheações:

$\mathcal{S}(n) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}(2, n);$ as singularidades de $\mathcal{F}$ são não degeneradas$\}$

$T(n) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{S}(n);$ os números característicos das singularidades de $\mathcal{F}$ não são reais positivos $\}$

$\mathcal{H}(n) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{S}(n);$ os números característicos das singularidades de $\mathcal{F}$ não são reais $\}$

$A(n) = T(n) \cap \mathcal{X}(n)$

Denotaremos por L_∞ a reta invariante das folheações em $\mathcal{X}(n)$.

Começaremos recordando um resultado preliminar:

Proposição 5.2.2. *Seja* $\mathcal{F}_o \in \mathcal{S}(n)$. *Então:* (a) $\#\operatorname{sing}\mathcal{F}_o = n^2 + n + 1 = N(n) = N$.

(b) *Se* $\operatorname{sing}(\mathcal{F}_o) = \{p_1^o, ..., p_N^o\}$ *onde* $p_i^o \neq p_j^o$ *se* $i \neq j$, *então existem vizinhanças conexas* $U_1, ..., U_N$ *de* $p_1, ..., p_N$ *respectivamente, duas a duas disjuntas, vizinhança* $\mathcal{U}$ *de* $\mathcal{F}_o$, *e aplicações holomorfas* $\varphi_j \colon \mathcal{U} \to U_j$, *tais que para toda* $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$, $\operatorname{sing}(\mathcal{F}) \cap U_j = \varphi_j(\mathcal{F})$ *é uma singularidade não degenerada. Em particular,* $\mathcal{S}(n)$ *é aberto em* $\mathcal{F}(2, n)$.

(c) *Se os números característicos de* $\mathcal{F}_o$ *em* $p_1^o, ..., p_N^o$ *são diferentes de* 1, *então podemos obter* $\mathcal{U}$ *de tal forma que os números característicos*

$$\lambda_1(\mathcal{F}), \lambda_1^{-1}(\mathcal{F}), ..., \lambda_N(\mathcal{F}), \lambda_N^{-1}(\mathcal{F})$$

sejam funções holomorfas de $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$. *Em particular* $T(n)$ *e* $\mathcal{H}(n)$ *são abertos em* $\mathcal{F}(2, n)$.

(d) *Se* $\mathcal{F}_o$ *e* $\mathcal{U}$ *são como em (c), então os auto-espaços invariantes de* $\mathcal{F}$ *em* $\varphi_j(\mathcal{F})$ *são funções holomorfas de* $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$.

Por simplicidade, resumiremos as propriedades (b),(c) e (d), dizendo que *as singularidades, os seus números característicos e seus auto-espaços invariantes podem ser seguidos analiticamente em* $\mathcal{U}$.

As afirmações (a) e (b) da Proposição 5.2.2 estão provadas no §4 do Capítulo 2. A afirmação (c) está provada na Proposição 3.4.1 do Capítulo 3. Deixamos a prova da afirmação (d) como exercício para o leitor (veja exercício 1).

Consideremos agora uma folheação $\mathcal{F} \in A(n)$. Observe que $\#(\operatorname{sing}\mathcal{F} \cap L_\infty) = n + 1$ e $\#(\operatorname{sing}\mathcal{F} \cap \mathbb{C}^2) = n^2$. Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor (veja exercício 2).

Sendo assim, enumeramos $\operatorname{sing}\mathcal{F} = \{p_1, ..., p_N\}$ de modo que $\{p_1, ..., p_{n^2}\} \subset \mathbb{C}^2$ e $p_j \in L_\infty$, $\forall j \geq n^2 + 1$. Observe que cada singularidade de $\mathcal{F}$ possui exatamente duas separatrizes lisas. Se a singularidade está em L_∞, então ela possui uma separatriz transversal a L_∞ e a outra contida em L_∞. Se $j \in \{1, ..., n^2\}$, designaremos as separatrizes da singularidade p_j por S_j^+ e S_j^-, e se $i \in \{n^2 + 1, ..., N\}$, denotaremos por S_i^o a separatriz de p_i transversal a L_∞. Denotaremos por $I(\mathcal{F}, S_j^+), I(\mathcal{F}, S_j^-)$ os números característicos associados às separatrizes S_j^+, S_j^-, respectivamente. Escolhemos uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{F}(2, n)$ como na Proposição 1 acima, de modo que podemos considerar $\mathcal{F}_1 \ni \mathcal{U} \longmapsto I(\mathcal{F}_1, S_j^+)$ e $\mathcal{F}_1 \ni \mathcal{U} \longmapsto I(\mathcal{F}_1, S_j^-)$ como aplicações holomorfas. Denotemos $\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \{S_j^+, S_j^-, S_i^o;\ j \in \{1, ..., n^2\},\ i \in \{1, ..., n + 1\}\}$ e também $\mathcal{S}(\mathcal{F})_{\text{fin}} = \{S_j^+, S_j^-, \mid j \in \{1, ..., n^2\}\}$.

Definição 5.2.3. Uma *configuração* é um subconjunto $C \subset \mathcal{S}(\mathcal{F})$. A configuração C é dita *finita* se $C \subset \mathcal{S}_{\text{fin}}$. Dada uma configuração C definimos

$$I(\mathcal{F}, C) = \sum_{S_j^+ \in C} I(\mathcal{F}, S_j^+) + \sum_{S_j^- \in C} I(\mathcal{F}, S_j^-) + \sum_{S_i^o \in C} I(\mathcal{F}, S_i^o)$$

No caso, $C = \emptyset$ colocamos $I(\mathcal{F}, C) = 0$. Se $S \subset \mathbb{C}P(2)$ é uma curva algébrica invariante irredutível, definimos a *configuração de* S como a configuração $C(S)$, constituída pelas separatrizes de $\mathcal{F}$ contidas em S, e pomos $I(\mathcal{F}, S) = I(\mathcal{F}, C(S))$.

Seja C uma configuração. Podemos dividir C em três partes $C = A \cup B \cup K$, onde

$$K = \{S_i^o \in C\},\ A = \{S_j^+ \in C \big| S_j^- \notin C\} \cup \{S_j^- \in C \big| S_j^+ \notin C\}$$

e

$$B = \{S_j^+ \in C \big| S_j^- \in C\} \cup \{S_j^- \in C \big| S_j^+ \in C\}$$

Também escrevemos $\alpha = \#A$, $\beta = \#B$ e $k = \#K$.

Proposição 5.2.4. *Seja $\mathcal{F} \in A(n)$, onde $n \geq 2$. Suponha que $\mathcal{F}$ possui uma curva algébrica invariante irredutível $S \neq L_\infty$. Coloquemos $C(S) = A \cup B \cup K$, como acima. Então:*

(a) $k = gr(S) \geq 1$.

(b) $I(\mathcal{F}, C(S)) = k^2 - \beta \geq 1$.

(c) $C(S) \neq \mathcal{S}(\mathcal{F})$.

Demonstração. A parte (a) segue do Teorema de Bézout, já que cada separatriz de $C(S)$ em K corta L_∞ com multiplicidade um. A fim de provarmos (b) usaremos o Teorema 3.1.8 do Capítulo 3, segundo o qual temos:

$$(*)\ 0 < I(\mathcal{F}, S) = 3k - \mathcal{X}(\tilde{S}),$$

onde $\mathcal{X}(\tilde{S})$ é a característica de Euler de uma normalização $\tilde{S}$ da curva S. Como S tem somente singularidades nodais, todas estas coincidindo com os pontos em B, segue pela Fórmula de Hurwitz [33]

$$(**)\ \mathcal{X}(\tilde{S}) = 2 - 2\Big(\frac{(k-1)(k-2)}{2} - \frac{1}{2}\beta\Big) = -k^2 + 3k + \beta$$

de modo que $I(\mathcal{F}, C(S)) = k^2 - \beta$. Observamos que a fórmula (**) acima, pode também ser deduzida da fórmula (***) contida na prova do Teorema 3.1.8 do Capítulo 3 (veja o exercício 5).

Agora provaremos (c): Se $C(S) = \mathcal{S}(\mathcal{F})$ então $k = n+1, \beta = 2n^2$, de modo que por (b) tem-se $I(\mathcal{F}, C(S)) = (n+1)^2 - 2n^2 = -n^2 + 2n + 1$. Portanto, $I(\mathcal{F}, C(S)) = 1$ se $n = 2$, e $I(\mathcal{F}, C(S)) < 0$ se $n \geq 3$. Logo, por (*), devemos ter $n = 2$ e $I(\mathcal{F}, C(S)) = 1$. Por outro lado, se $I(\mathcal{F}, C(S)) = 1$ então S é uma reta projetiva, pelo Corolário do Teorema 3.1.8 do Capítulo 3, o que não é possível se $C(S) = \mathcal{S}(\mathcal{F})$. □

Definição 5.2.5. Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos o subconjunto

$M(n) = \{\mathcal{F} \in A(n);$ para toda configuração $C = K \cup A \cup B \subset \mathcal{S}(\mathcal{F})$, tal que $C \neq \mathcal{S}(\mathcal{F})$ e $k^2 - \beta \geq 1$, então $I(\mathcal{F}, C) \neq k^2 - \beta\}$.

Observação 5.2.6. (1) Se $n \geq 2$ e $\mathcal{F} \in M(n)$, então $\mathcal{F}$ não admite curva algébrica invariante irredutível $S \neq L_\infty$ (veja a Proposição 5.2.4).

(2) $M(n)$ é aberto em $A(n)$ (veja a Proposição 5.2.2).

(3) $M(1) = \emptyset$.

Em seguida provaremos o resultado principal desta seção.

Teorema 5.2.7. *$M(n)$ é aberto e denso em $A(n)$ se $n \geq 2$.*

Demonstração. Observemos primeiramente que $X = A(n) \setminus M(n)$ é um subconjunto analítico de $A(n)$, ou seja, é localmente definido por um número finito de equações analíticas.

Com efeito, fixemos $\mathcal{F}_o \in X$. De acordo com a Proposição 5.2.2, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}_o$ em $A(n)$ na qual podemos seguir analiticamente as singularidades, seus números característicos e seus auto-espaços invariantes. Isto implica que se $C = K \cup A \cup B$, é uma configuração de $\mathcal{F}_o$, então C, K, A e B, assim como $I(\mathcal{F}_o, C)$, também podem ser seguidos analiticamente em $\mathcal{U}$. Em outras palavras, para toda $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$, existe uma configuração $C(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ que contém as separatrizes de $\mathcal{F}$ correspondentes às de $\mathcal{F}_o$. A configuração $C(\mathcal{F})$ pode ser decomposta como $K(\mathcal{F}) \cup A(\mathcal{F}) \cup B(\mathcal{F})$, onde estas subconfigurações "seguem"analiticamente K, A e B respectivamente. Em particular temos:

(i) $\#K(\mathcal{F}) = \#K = k$, $\#A(\mathcal{F}) = \#A = \alpha$ e $\#B(\mathcal{F}) = \#B = \beta$, para toda $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$.

(ii) A função $\mathcal{U} \ni \mathcal{F} \mapsto \phi_C(\mathcal{F}) = I(\mathcal{F}, C(\mathcal{F}))$ é analítica.

Obtemos daí que

$$X \cap \mathcal{U} = \bigcup_C \phi_C^{-1}(k^2 - \beta)$$

onde acima C percorre o conjunto de todas as configurações tais que $C \neq \mathcal{S}(\mathcal{F})$ e $k^2 - \beta \geq 1$. Isto prova que X é analítico, e portanto $M(n)$ é aberto em $\mathcal{X}(n)$.

Tendo-se em vista o que foi visto acima, para provar que $M(n)$ é denso, é suficiente demonstrar que $M(n) \neq \emptyset$, o que faremos em seguida.

Dados $n \geq 2$ e $b \in \mathbb{C}$, consideramos a folheação $\mathcal{F}(b)$ em $\mathbb{C}P(2)$ representada no sistema de coordenadas afins $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}P(2) \setminus L_\infty$ por

$$(a_o x - y^n + bx^n)dy - (y - x^n + byx^{n-1})dx = 0$$

onde a_o é uma raíz da equação $\frac{(1+a)^2}{(n^2-1)a} = -2 + \sqrt{2}$. Resolvendo esta equação explicitamente, podemos escolher

$$a_o = -1 - \ell + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell + \sqrt{\alpha - \beta\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{a_o} = -1 - \ell + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell - \sqrt{\alpha - \beta\sqrt{2}},$$

onde $\alpha = \frac{3}{2}\ell^2 + 2\ell\,, \beta = \ell + \ell^2$ e $\ell = n^2 - 1$. Note que $a_o < 0$. É suficiente provar o seguinte lema:

Lema 5.2.8. *O conjunto $A = \{b \in \mathbb{C};\ \mathcal{F}(b) \in M(n)\}$ é aberto e denso em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Consideremos primeiramente o caso $b = 0$. A folheação $\mathcal{F}(0)$ é dada em $\mathbb{C}^2$ pelo campo de vetores

$$X = (a_o x - y^n)\partial/\partial x + (y - x^n)\partial/\partial y.$$

Suas singularidades em $\mathbb{C}^2$ são:
(1) $p_o = (0,0)$, cujos números característicos são a_o e a_o^{-1}.
(2) Os pontos $p_j = (x_j, y_j) \neq (0,0)$, soluções de $y^n = a_o x$ e $y = x^n$. Elevando a segunda equação à potência n e substituindo na primeira, obtemos os pontos $(x_j, y_j), j = 1, ..., \ell = n^2 - 1$, onde $x_1, ..., x_\ell$ são as soluções de $x^{n^2-1} = a_o$ e $y_j = (x_j)^n$. Calculemos os seus números característicos. A matriz Jacobiana de X em (x_j, y_j) é

$$M_j = DX(x_j, y_j) = \begin{pmatrix} a_o & -ny_j^{n-1} \\ -nx_j^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Note que o traço e o determinante destas matrizes não dependem de j e são respectivamente $T = 1 + a_o$ e $D = (1 - n^2)a_o = -\ell a_o$. Desta forma os números característicos de p_j são as raízes de

$$\lambda + \lambda^{-1} + 2 = \frac{T^2}{D} = \frac{(1 + a_0)^2}{-\ell a_o} = 2 - \sqrt{2},$$

ou seja $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Agora voltamos nossa atenção para as singularidades na linha do infinito, L_∞. Consideramos a mudança de coordenadas dada por $u = 1/x\,, v = y/x$. Nestas coordenadas, $\mathcal{F}(b)$ é dada pela equação diferencial

$$\dot{u} = u(-b + v^n - a_o u^{n-1})\,,\ \dot{v} = v^{n+1} - 1 + vu^{n-1}(1 - a_o)$$

Em particular $L_\infty : \overline{(u = 0)}$ é invariante, e as singularidades sobre esta linha são dadas por $v^{n+1} - 1 = 0$, ou seja, os pontos $q_j = (0, \delta^j)$, $j = 0, .., n$, onde δ é uma raíz $n+1$-ésima primitiva de 1. Coloquemos $v_j = \delta^j$, $j = 0, ..., n$. O número característico de $\mathcal{F}(b)$ em q_j, associado à separatriz transversal a L_∞ é então

$$I(\mathcal{F}(b), S_j^o) = \frac{\phi'(v)}{v^n - b}\Big|_{v=v_j} = \frac{(n+1)}{1 - bv_j},$$

onde $\phi(v) = v^{n+1} - 1$ (lembramos que $v_j^n.v_j = 1$). Em particular para $b = 0$ obtemos $I(\mathcal{F}(0), S_j^o) = n + 1$, $j = 0, ..., n$. Por outro lado, se $b \notin R_0 \cup ... \cup R_n$, onde R_j é a reta de $\mathbb{C}$ que passa por 0 e $\overline{v_j}$, não é difícil verificar que os números característicos das singularidades

q_j não são reais e portanto $\mathcal{F}(b) \in A(n)$, se $\mid b \mid$ é pequeno, já que os números característicos das singularidades finitas de $\mathcal{F}(b)$ variam continuamente com b e para $b = 0$ eles não são reais positivos.

Fixamos a seguinte notação: Dada uma configuração $C \subset \mathcal{S}(\mathcal{F}(0))$, consideramos a sua continuação analítica com o parâmetro b, $C(b)$, e colocamos $I_C(b) = I(\mathcal{F}(b), C(b))$. Pelo que vimos anteriormente, para toda configuração C, I_C é função holomorfa de b. Provaremos que para toda configuração $C = K \cup A \cup B$ satisfazendo $C \neq \mathcal{S}(\mathcal{F}(0))$ e $k^2 - \beta \geq 1$ temos $I_C(b) \not\equiv k^2 - \beta$.

Afirmação 5.2.9. *Seja $C \subset \mathcal{S}_{\text{fin}}$, uma configuração finita. Então $I_C(0) \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $C = \emptyset$ e $I_C(0) = 0$, ou $C = \mathcal{S}_{\text{fin}}$ e $I_C(0) = -2n^2$.*

Demonstração. Com efeito, para $b = 0$, as singularidades finitas são: (1)$p_o = (0,0)$ com separatrizes S_o^+, S_o^-, onde podemos supor que $I(\mathcal{F}(0), S_o^+) = a_o$ e $I(\mathcal{F}(0), S_o^-) = a_o^{-1}$, e (2) p_j, $j = 1, ..., \ell$, cujas separatrizes são S_j^+, S_j^-, onde podemos supor que $I(\mathcal{F}(0), S_j^+) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$ e $I(\mathcal{F}(0), S_j^-) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$. Como C é uma configuração finita, temos $C \subset \{S_o^+, S_o^-, S_1^+, S_1^-, ..., S_\ell^+, S_\ell^-\}$. Suponha que $C \neq \emptyset$. Afirmamos que $C \not\subset \{S_j^{\pm};\ j = 1, ..., \ell\}$.

Com efeito, caso contrário

$$I_C(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} r + \frac{\sqrt{2}}{2} is \in \mathbb{Z},$$

onde, $r, s \in \mathbb{Z}$, $r > 0$, o que não é possível.

Portanto C deve conter ao menos uma das separatrizes $S_o^{\pm}$. Consideramos dois casos distintos:

Caso 1: $\{S_o^+, S_o^-\} \subset C$. Neste caso: $I_C(0) = a_o + a_o^{-1} + \sum_{S_j^+ \in C} I(\mathcal{F}(0), S_j^+) + \sum_{S_j^- \in C} I(\mathcal{F}(0), S_j^-) = a_o + a_o^{-1} + r\big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\big) + s\big(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\big) = -2 - 2\ell + \sqrt{2}\ell - (r+s)\frac{\sqrt{2}}{2} + (r-s)\frac{\sqrt{2}}{2} i$.
Como $I_C(0) \in \mathbb{Z}$ segue que, $r = s$ e $I_C(0) = -2 - 2\ell + \sqrt{2}\ell - r\sqrt{2} = -2 - 2\ell + \sqrt{2}(\ell - r)$, o que por sua vez implica $\ell = r$, e portanto $C = \mathcal{S}_{\text{fin}}$. Finalmente, de $\ell = r$ obtemos $I_C(0) = -2 - 2\ell = -2n^2$, como queríamos.

Caso 2: $S_o^+ \subset C$ e $S_o^- \not\subset C$, ou vice-versa. Neste caso,

$$I_C(0) = -1 - \ell + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \pm \sqrt{\alpha - \beta\sqrt{2}} - m\sqrt{2} = r + s\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\alpha - \beta\sqrt{2}},$$

onde, $r = -1 - \ell$, $s = \ell - 2m$ e $m = \#\{S_j^+;\ S_j^+ \subset C\} = \#\{S_j^-;\ S_j^- \subset C\}$. Em particular, temos $m \leq \ell$.

Suponha por absurdo que $I_C(0) \in \mathbb{Z}$, digamos

$$r + s\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\alpha - \beta\sqrt{2}} = u \in \mathbb{Z}.$$

Neste caso, podemos escrever

$$\pm\sqrt{\alpha - \beta\sqrt{2}} = u - r - s\frac{\sqrt{2}}{2} = v - s\frac{\sqrt{2}}{2}$$

para $v = u - r$.

Assim, $\alpha - \beta\sqrt{2} = v^2 - vs\sqrt{2} + \frac{1}{2}s^2$, o que implica $\beta = vs$ e $\alpha = v^2 + \frac{1}{2}s^2$, já que α, β, v e s são racionais. Substituindo $v = \beta/s$ na segunda relação,obtemos $\alpha = \frac{\beta^2}{s^2} + \frac{s^2}{2}$, ou seja, $2\alpha s^2 = 2\beta^2 + s^4$. Por outro lado, substituindo $\alpha = \frac{3}{2}\ell^2 + 2\ell$, $\beta = \ell + \ell^2$, $\ell = n^2 - 1$, $r = -1 - \ell$ e $s = \ell - 2m$ nesta última relação, obtemos

$$(*)\ \ (3\ell^2 + 4\ell)(\ell - 2m)^2 = 2\ell^2(1+\ell)^2 + (\ell - 2m)^4$$

Afirmamos que a única possibilidade de solução (não negativa) para (*) é $\ell = m = 0$, o que implica $n = 1$.

De fato, fazendo $x = \ell - 2m$ em (*) e multiplicando (*) por 4, obtemos a seguinte relação:

$$(**)\ 4x^4 - 4(3\ell^2 + 4\ell)x^2 + 8\ell^2(1+\ell)^2 \implies (2x^2 - (3\ell^2 + 4\ell))^2 = \ell^2(\ell^2 + 8\ell + 8)$$

Ora, se $\ell \neq 0 \neq x$, a relação (**) implica que $\ell^2 + 8\ell + 8$ é um quadrado perfeito, ou seja:

$$\ell^2 + 8\ell + 8 = y^2 \implies (\ell + 4 - y)(\ell + 4 + y) = 8$$

e portanto $\ell + 4 + y$, $\ell + 4 - y$ só podem tomar os valores ± 2 e ± 4, já que estes inteiros têm a mesma paridade. Como o leitor pode verificar facilmente, isto implica $\ell = -1$ ou $\ell = -7$, o que está excluído, já que $\ell \geq 0$. Isto termina a prova da Afirmação 5.2.9. □

Seja agora C uma configuração contendo apenas separatrizes de singularidades em L_∞, transversais a esta reta.

□

□

Afirmação 5.2.10. *$I_C(b)$ é uma função não-constante de b.*

Demonstração. De fato, seja $C = \{S^o_{i_j};\ j = 1, ..., r\}$, onde $r = \#C \leq n+1$. Como vimos anteriormente,

$$I_C(b) = \sum_{j=1}^{r} I(\mathcal{F}(b), S^o_{i_j}) = (n+1)\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{1 - bv_{i_j}} =$$

$$(n+1)\sum_{j=1}^{r}(1 + \sum_{m=1}^{\infty} v^m_{i_j} b^m) = (n+1)r + (n+1)\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{r} v^m_{i_j})b^m$$

Se $I_C(b)$ fosse constante teríamos

$$\sum_{j=1}^{r} v_{i_j}^m = 0 \ , \forall m$$

Mas, para $m = n+1$ isto implica que $\sum_{j=1}^{r} v_{i_j}^{n+1} = r$, o que nos dá uma contradição. Isto encerra a prova da Afirmação 5.2.10. $\square$

Agora terminamos a prova do Lema 5.2.8: Fixemos uma configuração $C = K \cup A \cup B$, tal que $k^2 - \beta \geq 1$ e $C \neq \mathcal{S}(\mathcal{F}(0))$. Suponha por absurdo que existe uma seqüência $(b_n)_{n\geq 1}$ de parâmetros não nulos, que tende a zero quando n tende a infinito e tal que $I_C(b_n) = k^2 - \beta \geq 1$. Como I_C é holomorfa devemos ter $I_C \equiv k^2 - \beta$. Em particular $I_C(0) = k^2 - \beta$. Decompondo $I_C(b) = I_A(b) + I_B(b) + I_K(b) = I_{A\cup B}(b) + I_K(b)$, temos $I_C(0) = I_{A\cup B}(0) + I_K(0)$. Como $I_K(0) = k(n+1)$, obtemos que $I_{A\cup B}(0) \in \mathbb{Z}$. Decorre da Afirmação 5.2.9 que, ou bem $A \cup B = \emptyset$ e $I_{A\cup B}(0) = 0$, ou bem $A \cup B = \mathcal{S}_{\text{fin}}$ e $I_{A\cup B}(0) = -2n^2$. Consideramos dois casos:

Caso 1: $A \cup B = \emptyset$. Neste caso, $I_C(0) = k(n+1) = k^2 - \beta = k^2$ (note que $\beta = \#B = 0$). Portanto $k = n+1$, de onde obtemos, $I_C(b) = (n+1)\sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{1-bv_j}$ que não é constante (Afirmação 5.2.10), logo $I_C(b) \not\equiv k^2 - \beta$.

Caso 2: $A \cup B = \mathcal{S}_{\text{fin}}$. Neste caso necessariamente $A = \emptyset$ e $B = \mathcal{S}_{\text{fin}}$ e $I_B(0) = -2n^2$, logo $I_C(0) = I_K(0) - I_B(0) = k(n+1) - 2n^2 = k^2 - \beta = k^2 - 2n^2$. Decorre daí que $k = n+1$, ou seja $C = \mathcal{S}(\mathcal{F}(0))$, contra a hipótese.

Com isto provamos que o conjunto A do enunciado do Lema 5.2.8 é não vazio. Por outro lado, como $\mathbb{C} \setminus A$ é subconjunto analítico de $\mathbb{C}$ (verifique), obtemos que A é aberto e denso em $\mathbb{C}$. Isto termina a prova do Lema 5.2.8 e do Teorema 5.2.7. $\square$

A prova do Teorema 5.2.1 é semelhante à do Teorema 5.2.7. Colocamos $M_1(n) = M(n) \cap \mathcal{H}(n)$. Em seguida observamos os seguintes fatos: (a) O conjunto $Y = M(n) \setminus M_1(n)$ é um subconjunto analítico real de $M(n)$. (b) $M_1(n)$ é denso em $M(n)$.

Deixamos a prova de (a) e (b) como exercício para o leitor (veja o exercício 6).

5.3 Conjugação e rigidez das holonomias

Nesta seção estudaremos a holonomia dos elementos de $A(n)$. A fim de demonstrarmos o Teorema de Ilyashenko devemos garantir a rigidez topológica do grupo de holonomia da folha L_∞.

Como veremos, a rigidez, se deve entre outras coisas, ao fato desta holonomia ser não abeliana. Começamos com o seguinte resultado:

Lema 5.3.1. *Seja ϕ uma equivalência topológica entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, duas folheações em M, variedade complexa de dimensão 2. Sejam $p \in \operatorname{sing} \mathcal{F}$ e $q = \phi(p) \in \operatorname{sing} \mathcal{G}$. Então ϕ leva as separatrizes de $\mathcal{F}$ por p nas separatrizes de $\mathcal{G}$ por q.*

Deixamos a prova do Lema 5.3.1 como exercício para o leitor (veja o exercício 3).

Definição 5.3.2. Sejam $G_1, G_2 \subset Dif(\mathbb{C}, 0)$ subgrupos. Dizemos que G_1 e G_2 são *topologicamente conjugados* (respectivamente *analiticamente conjugados*) se existe um germe de homeomorfismo (respectivamente de biholomorfismo) $H\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, tal que $H \circ G_1 \circ H^{-1} = G_2$. Diremos que um sugbrupo $G_1 \subset Dif(\mathbb{C}, 0)$ é *topologicamente rígido* se toda conjugação topológica entre G_1 e um subgrupo $G_2 \subset Dif(\mathbb{C}, 0)$ é conforme, isto é, holomorfa ou anti-holomorfa.

Começaremos provando que as holonomias da reta L_∞ para duas folheações topologicamente equivalentes $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in A(n)$, são topologicamente conjugadas.

Proposição 5.3.3. *Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in A(n)$ e assuma que existe uma equivalência topológica entre as restrições de $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ a vizinhanças de L_∞ em $\mathbb{C}P(2)$. Então as holonomias de L_∞ para $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são topologicamente conjugadas.*

Demonstração. Seja $\phi\colon (U, L_\infty) \to (V, L_\infty)$ uma equivalência topológica entre $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, onde U e V são vizinhanças de L_∞. Fixamos um ponto $p \in L_\infty \setminus \operatorname{sing} \mathcal{F}$ e uma seção transversal local a $\mathcal{F}$, $\Sigma \cong \mathbb{D}$, $\Sigma \cap L_\infty = p$. Seja $p_1 = \phi(p)$. Então $p_1 \in L_\infty \setminus \operatorname{sing} \mathcal{F}_1$. A seção Σ é mapeada por ϕ sobre uma seção contínua transversal a $\mathcal{F}_1$, $\phi(\Sigma)$, a qual, em geral, não é analítica. Entretanto, podemos escolher uma seção local analítica $\Sigma_1 \cong \mathbb{D}$ para $\mathcal{F}_1$, tal que $\Sigma_1 \cap L_\infty = p_1$. Consideremos uma carta trivializadora $(x, y) = \phi$ de $\mathcal{F}_1$ numa vizinhança W do ponto p_1 tal que $x(p_1) = y(p_1) = 0$, $\Sigma_1 = (x = 0)$ e $\mathcal{F}_1 \mid_W$ é a folheação cujas folhas são da forma $(y = cte)$. Consideremos também a projeção $\pi\colon W \to \Sigma_1$ dada por $\pi(x, y) = (0, y)$, a qual leva cada folha de $\mathcal{F}_1$ num ponto de Σ_1 na mesma folha. Definamos $h\colon \Sigma \to \Sigma_1$ por:

$$h(q) = \pi \circ \phi\big|_{\Sigma}(q),$$

aplicação que está definida para $q \in \Sigma$, suficientemente próximo de p. Como ϕ conjuga $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_1$, não é difícil ver que $h\colon (\Sigma, p) \to (\Sigma_1, p_1)$ é uma conjugação topológica entre $\operatorname{Hol}(\mathcal{F}, \Sigma, p)$ e $\operatorname{Hol}(\mathcal{F}_1, \Sigma_1, p_1)$. Deixamos os detalhes para o leitor. □

Veremos em seguida que a holonomia de L_∞ para as folheações de $M(n)$ não é abeliana.

Proposição 5.3.4. *Seja $\mathcal{F} \in M(n)$. Então a holonomia de L_∞ é não abeliana.*

Demonstração. Com efeito, vimos que, sob a hipóteses feitas em $\mathrm{sing}(\mathcal{F}) \cap L_\infty$, as singularidades de $\mathcal{F}$ em L_∞ são não degeneradas e os seus números característicos não são reais positivos. Suponhamos por absurdo que $\mathrm{Hol}(\mathcal{F}, L_\infty)$ seja abeliana. Podemos neste caso aplicar a Proposição 4.6.1 do capítulo IV. Este resultado implica que $\mathcal{F}$ é dada por uma forma logarítmica ω (meromorfa) em $\mathbb{C}P(2)$. A forma ω tem pólos de ordem um ao longo de L_∞ e de todas as separatrizes que cortam esta reta (isto decorre da prova da Proposição 5.5.1). Ora, como o conjunto de pólos de ω é algébrico e invariante por $\mathcal{F}$ (veja a Proposição 1.4.9 do Capítulo I), obtemos que $\mathcal{F}$ possui outras folhas algébricas além de L_∞, o que é um absurdo (veja a Observação 5.2.6 do §2). □

Em seguida daremos a idéia da prova de um teorema de "linearização a parâmetros".

Lema 5.3.5 (Lema de Linearização de Schröeder)**.** *Seja $f_t\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0), t \in \mathbb{D}$, uma família holomorfa de germes de biholomorfismos, tal que $|f_t'(0)| < 1$ para todo $t \in \mathbb{D}$. Então existe uma família holomorfa de germes de biholomorfismos $\phi_t\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, onde cada ϕ_t conjuga f_t à sua parte linear.*

Demonstração. Provaremos apenas a versão não paramétrica. Seja $f\colon U \to V$, biholomorfismo entre vizinhanças U e V de $0 \in \mathbb{C}$ tal que 0 é ponto fixo de f e $0 < |\lambda| = a < 1$, onde $\lambda = f'(0)$. Neste caso existe um disco D com centro em 0 tal que $\overline{D} \subset Dom(f)$ e $f(\overline{D}) \subset D$. Este disco é obtido da seguinte maneira: podemos escrever

$$(*)\ \ f(z) = \frac{\lambda z}{1 - u(z)}\ z \in U,$$

já que $f(z) \neq 0$ se $z \neq 0$, onde $u(0) = 0$. Sejam $b > 0$ e $r > 0$ tais que $br < 1-a$ e se $|z| < r$ então $z \in U$ e $|u(z)| < b|z|$ (verifique a existência de b e r). De (*) obtemos para $z \in D = D(0, r)$, que

$$(**)\ |f(z)| \leq \frac{a|z|}{1 - b|z|} < \frac{ar}{1 - br} < r,$$

ou seja $f(z) \in D$. Além disto, (**) implica que

$$(***)\ |f^k(z)| \leq \frac{a^k|z|}{1 - b(1 + a + ... + a^{k-1})|z|} < \frac{a^k|z|}{1 - c|z|}, \forall k \in \mathbb{N},$$

onde $c = \frac{b}{1-a}$, como o leitor pode verificar por indução em k.

Consideremos a seqüência de funções holomorfas $(h_k)_{k\geq 1}$, onde $h_k = \lambda^{-k} \circ f^k$, $k \geq 1$.

Afirmação 5.3.6. *A seqüência (h_k) converge uniformemente nas partes compactas de $D_o = D(0,r)$ para um biholomorfismo h que satisfaz*

$$h \circ f = \lambda.h$$

Demonstração. Primeiramente provaremos que a seqüência é normal. Para isto, é suficiente demonstrar que ela é uniformemente limitada nas partes compactas de D (Teorema de Montel, veja [54]). Seja $r_o < r$ e fixemos $z \in \overline{D(0,r_o)}$. De (***) obtemos que

$$|h_k(z)| \leq a^{-k}.|f^k(z)| \leq \frac{|z|}{1-c|z|} \leq \frac{r_o}{1-cr_o}\ ,\forall k\,,$$

como queríamos. Para provar que a seqüência converge é suficiente demonstrar que todas as suas subseqüências convergentes têm o mesmo limite. Para isto, provaremos que a seqüência $(g_k = h_{k+1} \circ h_k^{-1})_{k \geq 1}$ converge para a identidade. Com efeito, $g_k(z) = \lambda^{-k-1}.f(\lambda^k z)$. Escrevendo $f(z) = \lambda z + z^2.u(z)$, onde u é holomorfa, obtemos $g_k(z) = z + \lambda^{k-1}.u(\lambda^k z)$, de onde podemos concluir facilmente que esta seqüência converge uniformemente nas partes compactas de D para a identidade,já que $|\lambda| < 1$.

Consideremos agora uma subseqüência convergente $(h_{k_j})_{j \geq 1}$, digamos $\lim_j h_{k_j} = h$. Observe que $h'(0) = 1$, já que $h_k'(0) = 1$ para todo k. Além disto,

$$\lim_j h_{k_j+1} = \lim_j g_{k_j} \circ h_{k_j} = h\,,$$

já que $\lim_j g_{k_j} = id$. Por outro lado, $h_{k+1} = \lambda^{-1}.h_k \circ f$, de onde concluímos que

$$h = \lim_j h_{k_j+1} = \lambda^{-1}.(\lim_j h_{k_j}) \circ f = \lambda^{-1}.h \circ f\,,$$

ou seja $\lambda h = h \circ f$ e h lineariza f. Ora, como vimos no Lema 4.2.1 do Capítulo 4, se h_1 é outro biholomorfismo que lineariza f então $h_1 = b.h$, onde $b \in \mathbb{C}$, o que significa que h é o único biholomorfismo que lineariza f e tal que $h'(0) = 1$. Isto implica que todas as subseqüências convergentes de $(h_k)_{k \geq 1}$ convergem para h, como queríamos. □

Deixamos a prova da versão paramétrica para o leitor (veja o exercício 4). □

Mostraremos a seguir que a condição de ser um atrator é invariante por conjugações topológicas.

Lema 5.3.7. *Sejam f_1, f_2 biholomorfismos entre abertos de $\mathbb{C}$, com ponto fixo em $0 \in \mathbb{C}$ e topologicamente conjugados em vizinhanças de 0. Se 0 é atrator para f_1, então também é para f_2.*

Demonstração. Sejam $f_j\colon U_j \to V_j$, $j = 1,2$, e $\phi\colon U_1 \cup V_1 \to U_2 \cup V_2$ uma conjugação topológica entre f_1 e f_2:

$$(*)\ f_2 \circ \phi = \phi \circ f_1$$

Podemos supor que U_1 é um disco, e pelo lema anterior, que f_1 é linear, isto é, $f_1(z) = \lambda z$, onde $|\lambda| = a < 1$. Neste caso, V_1 é um disco tal que $\overline{V_1} = f_1(\overline{U_1}) \subset U_1$. De (*) obtemos que $V_2 \subset \overline{V_2} = \phi(\overline{V_1}) \subset U_2$. Como U_2 é simplesmente conexo, pelo Teorema de uniformização de Riemann (veja [54]), existe um biholomorfismo $T\colon U_2 \to \mathbb{D}$, onde $\mathbb{D} = \{z;\ |z| < 1\}$, com $T(0) = 0$. Seja $f = T \circ f_2 \circ T^{-1}$. Temos

$$f(\mathbb{D}) = T(V_2) \subset \overline{T(V_2)} \subset \mathbb{D},$$

ou seja, f envia $\mathbb{D}$ num aberto propriamente contido em $\mathbb{D}$.Do Lema de Schwarz (veja [54]) concluímos que $|f'(0)| = |f_2'(0)| < 1$. □

Consideremos agora um subgrupo $G \subset Dif(\mathbb{C}, 0)$ satisfazendo às seguintes condições:

$(\mathcal{I}_1)$: Existe elemento $f \in G$ tal que $|f'(0)| < 1$, ou seja, G contém um atrator.

$(\mathcal{I}_2)$: O subgrupo (multiplicativo) de $\mathbb{C}^*$, $G' = \{g'(0);\ g \in G\}$, é denso em $\mathbb{C}^*$.

$(\mathcal{I}_3)$: G é não abeliano.

Teorema 5.3.8. *Seja $G \subset Dif(\mathbb{C}, 0)$ satisfazendo $(\mathcal{I}_1)$, $(\mathcal{I}_2)$ e $(\mathcal{I}_3)$. Então G é topologicamente rígido.*

Demonstração. Sejam $G_1 = G$ e G_2 subgrupo de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ topologicamente conjugado a G_1 pelo germe de homeomorfismo $h\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Por hipótese G_1 contém um atrator digamos, $f_1 \in G_1$, onde $f_1'(0) = \lambda_1$, $|\lambda_1| < 1$. Seja f_2 o conjugado $f_2 = h \circ f_1 \circ h^{-1}$, onde $f_2'(0) = \lambda_2$. Pelo Lema 5.3.7, f_2 também é um atrator, logo $|\lambda_2| < 1$.

Consideremos agora representantes de f_1, f_2 e h, que denotaremos com os mesmos símbolos, $f_j\colon U_j \to V_j$, $j = 1,2$, $h\colon U_1 \cup V_1 \to U_2 \cup V_2$. Pelo Lema 5.3.5, conjugando f_1 e f_2 por biholomorfismos adequados, podemos supor que U_1 e U_2 são discos com centro em 0, de raio maior que 1, que $f_1(z) = \lambda_1.z$ e $f_2(w) = \lambda_2.w$. observe que $h(\lambda_1.z) = \lambda_2.h(z)$ para todo $z \in U_1$.

Sejam $G_j' = \{f'(0);\ f \in G_j\}$, $j = 1,2$. Consideremos a aplicação $H\colon G_1' \to G_2'$ definida da seguinte maneira: dado $a \in G_1'$, onde $a = f'(0)$ com $f \in G_1$, seja $g = h \circ f \circ h^{-1} \in G_2$. Definimos então $H(a) = g'(0) \in G_2'$. Observe que H é um homomorfismo de grupos. De fato, se $a = f'(0)$ e $b = k'(0)$ com $f, k \in G_1$, temos $ab = (f \circ k)'(0)$, logo

$$H(ab) = (h \circ f \circ k \circ h^{-1})'(0) = (h \circ f \circ h^{-1})'(0).(h \circ k \circ h^{-1})'(0) = H(a).H(b)$$

pela regra da cadeia. Note que $H(\lambda_1) = \lambda_2$.

Lema 5.3.9. *Para todo $a \in G_1'$ e todo z com $a.z \in U_1$, vale que*

$$h(a.z) = H(a).h(z)$$

Demonstração. Fixemos $a \in G_1'$ e $z_o \in U_1$ tais que $a.z_o \in U_1$. Sejam $f \in G_1$, tal que $f'(0) = a$, e $g = h \circ f \circ h^{-1}$. Podemos supor que o domínio de f, digamos U, é tal que $U \subset U_1$ e o domínio de g é $V = h(U) \subset U_2$. Observe que

$$(*) \ \lim_{n\to\infty} f_1^{-n} \circ f \circ f_1^n(z) = a.z\,.$$

Com efeito, escrevendo $f(z) = a.z + z^2.u(z)$, onde u é holomorfa, temos,

$$f_1^{-n} \circ f \circ f_1^n(z) = a.z + \lambda_1^n.z^2.u(\lambda_1^n.z) \implies \lim_{n\to\infty} f_1^{-n} \circ f \circ f_1^n(z) = a.z$$

já que $|\lambda_1| < 1$. Analogamente,

$$(**) \ \lim_{n\to\infty} f_2^{-n} \circ g \circ f_2^n(w) = H(a).w\,.$$

Observe também que, para o z_o fixado, existe $n_o > 0$ tal que se $n \geq n_o$, então $f_1^{-n} \circ f \circ f_1^n(z_o)$ e $f_2^{-n} \circ g \circ f_2^n(h(z_o))$ estão definidos (verifique). Decorre de (*) que existe $n_1 \geq n_o$ tal que se $n \geq n_1$, então $f_1^{-n} \circ f \circ f_1^n(z_o) \in U_1$, já que $a.z_o \in U_1$. Por outro lado, para $n \geq n_1$, temos,

$$h(f_1^{-n} \circ f \circ f_1^n(z_o)) = f_2^{-n} \circ g \circ f_2^n(h(z_o))$$

já que h conjuga G_1 com G_2. Logo,

$$h(a.z_o) = \lim_{n\to\infty} h(f_1^{-n} \circ f \circ f_1^n(z_o)) = \lim_{n\to\infty} f_2^{-n} \circ g \circ f_2^n(h(z_o)) = H(a).h(z_o)\,,$$

como queríamos. □

□

Como conseqüência obtemos o seguinte:

Corolário 5.3.10. *H se estende a um isomorfismo contínuo de $\mathbb{C}^*$ e h a um homeomorfismo de $\mathbb{C}$, denotados também por H e h, tais que,*

$$H(z) = \frac{h(z)}{h(1)},$$

para todo $z \in \mathbb{C}^*$.

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$, existe $n \geq 0$ tal que $\lambda_1^n.z \in U_1$. Coloquemos $\overline{h}(z) = \lambda_2^{-n}.h(\lambda_1^n.z)$. Observe que $\overline{h}$ está bem definida, uma vez que h conjuga f_1 e f_2. Além disto, $\overline{h}$ é homeomorfismo de $\mathbb{C}$, como o leitor pode verificar facilmente. Por outro lado, fixados $a \in G_1'$ e $z \in \mathbb{C}$, seja $n \geq 0$ tal que $\lambda_1^n.a.z\,,\ \lambda_1^n.z \in U_1$. O Lema 5.3.9 implica que

$$\overline{h}(az) = \lambda_2^{-n}.h(\lambda_1^n.a.z) = H(a).\lambda_2^{-n}.h(\lambda_1^n.z) = H(a).\overline{h}(z)\,,$$

em particular,

$$H(a) = \frac{\overline{h}(a)}{\overline{h}(1)}\ , \forall a \in G_1'.$$

Consideremos a extensão $\overline{H}$ de H a $\mathbb{C}^*$ dada pela fórmula acima. Como G_1' é denso em $\mathbb{C}^*$ e $\overline{h}$ é homeomorfismo, obtemos que $\overline{H}$ é isomorfismo de $\mathbb{C}^*$ (verifique). □

Lema 5.3.11. *Dado $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, temos*

$$H(re^{i\theta}) = r^\alpha.exp(\pm i\theta + i\beta.ln(r))$$

onde $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, sendo que o sinal $+$ ocorre se h preserva a orientação de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ e o sinal $-$, caso contrário. Em particular h é de classe C^∞ fora de 0.

Deixamos a prova do lema acima para o leitor (veja o exercício 7)

Lema 5.3.12. *Com as hipóteses do Teorema 5.3.8, h é holomorfa ou anti-holomorfa.*

Demonstração. Como G_1 é não abeliano, existem f_3 e f_4 em G_1 que não comutam. Neste caso $f = [f_3, f_4] = f_3^{-1} \circ f_4^{-1} \circ f_3 \circ f_4$ é tangente à identidade, isto é $f(z) = z + az^{k+1} + ...$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$. Seja $g = h \circ f \circ h^{-1}$. Como $g'(0) = 1$ e $g \neq id$, temos $g(w) = w + bw^{\ell+1} + ...$, onde $b \neq 0$ e $\ell \in \mathbb{N}$ (de fato, $k = \ell$, mas não utilizaremos isto na prova). Como vimos, $h(z) = h(1).H(z)$ é de classe C^∞ fora de $0 \in \mathbb{C}$. Vamos supor que h preserva a orientação, de modo que $H(re^{i\theta}) = r^\alpha.exp(i\theta + i\beta.ln(r)$. No que se segue, usaremos a notação ∂ para denotar o operador $\partial/\partial z = \frac{1}{2}(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$, $z = x + iy$. Por um cálculo direto, temos

$$\frac{\partial h}{h} = (\alpha + i\beta)\frac{\partial r}{r} + i\partial\theta = \frac{\gamma}{z}$$

onde $\gamma = (1 + \alpha + i\beta)/2 \neq 0$. Em particular, $\frac{\partial h}{h}$ é holomorfa fora de 0. Por outro lado, da relação $h \circ f = g \circ h$, obtemos

$$(*)\ \gamma\frac{f'}{f} = f'.(\frac{\partial h}{h}) \circ f = \frac{\partial(h \circ f)}{h \circ f} = \frac{\partial(g \circ h)}{g \circ h} = h.(\frac{g'}{g}) \circ h.\frac{\partial h}{h} = \frac{\gamma}{z}.h.(\frac{g'}{g}) \circ h.$$

Consideremos as funções holomorfas $\phi(z) = z.\frac{f'(z)}{f(z)}$ e $\psi(w) = w.\frac{g'(w)}{g(w)}$. Note que a relação (*) é equivalente a,

$$\phi(z) = \psi \circ h(z)$$

a qual implica que h é holomorfa, uma vez que ϕ e ψ não são constantes (veja o exercício 8). Em particular $\alpha = 1$, $\beta = 0$ e h é linear. No caso em que h inverte a orientação, h será anti-holomorfa, como o leitor pode verificar com uma prova semelhante à anterior. Isto conclui a prova do Lema 5.3.12 e do Teorema 5.3.8. □

Observação 5.3.13. Gostaríamos de destacar aqui alguns fatos que foram provados no Lema 5.3.12. Fixemos um atrator $f_1 \in G_1$, $f_2 = h \circ f_1 \circ h^{-1} \in G_2$, e sistemas de coordenadas z e w em vizinhanças de $0 \in \mathbb{C}$ tais que $f_1(z) = \lambda_1.z$ e $f_2(w) = \lambda_2.w$. Sejam $f \in G_1$ um elemento tangente à identidade e $g = h \circ f \circ h^{-1} \in G_2$, onde $f(z) = z + a.z^{k+1} + ...$ e $g(w) = w + b.w^{\ell+1} + ...$, sendo $k, \ell \geq 1$ e $a, b \neq 0$. Então: (a) h é linear, isto é, $h(z) = c.z$, onde $c = h(1)$. (b) $k = \ell$ e $a = b.c^k$.

Deixamos para o leitor a verificação destes dois fatos.

5.4 O conjunto I_n

Nesta seção definiremos o conjunto I_n do enunciado do Teorema 5.1.6. Fixemos $\mathcal{F} \in M(n)$. Sejam $p \in L_\infty \setminus \operatorname{sing} \mathcal{F}$ e Σ, $\Sigma \cap L_\infty = \{p\}$, uma seção transversal. Consideremos a representação de holonomia $G = \operatorname{Hol}(\mathcal{F}, L_\infty, \Sigma, p) \subset Dif(\mathbb{C}, 0)$. Como vimos na Proposição 5.3.4 deste Capítulo, G é não abeliano, logo satisfaz à condição $\mathcal{I}_3$ do §3. Sejam $\{p_1, ..., p_{n+1}\}$ as singularidades de $\mathcal{F}$ em L_∞. Cada uma destas singularidades, fornece um elemento de G, digamos f_j, tal que $f_j'(0) = e^{2\pi i \lambda_j}$, onde λ_j é um dos números característicos de $\mathcal{F}$ em p_j (o quociente do "auto-valor normal" pelo "auto-valor tangente" a L_∞). Sendo assim, se algum dos λ_j não é real, então G satisfaz à condição $\mathcal{I}_1$ do §3.

Definição 5.4.1. Definimos o subconjunto

$$I_n = \{\mathcal{F} \in M(n);\ G = \operatorname{Hol}(\mathcal{F}, L_\infty) \ \text{ satisfaz } \mathcal{I}_1\,,\, \mathcal{I}_2 \ \text{ e } \ \mathcal{I}_3\}.$$

Proposição 5.4.2. *I_n é um subconjunto genérico (residual) de $M(n)$ e portanto de $\mathcal{X}(n)$.*

Demonstração. Com efeito, seja $\mathcal{F}_o \in M(n)$, com $\operatorname{sing} \mathcal{F}_o \cap L_\infty = \{p_1, ..., p_{n+1}\}$. Como vimos acima, a cada singularidade p_j, corresponde um elemento $f_j \in G \subset Dif(\mathbb{C}, 0)$, tal que $f_j'(0) = e^{2\pi i \lambda_j}$. Pela Proposição 5.2.2 deste Capítulo, existem uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}_o$ em $M(n)$ e funções holomorfas $P_j \colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}P(2)$, $\Lambda_j \colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}^*$, $j = 1, ..., n+1$, tais que, (a) $P_j(\mathcal{F}_o) = p_j$ e $\operatorname{sing}(\mathcal{F}) \cap L_\infty = \{P_1(\mathcal{F}), ..., P_{n+1}(\mathcal{F})\}$, para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$. (b) $\Lambda_j(\mathcal{F}_o) = \lambda_j$ e $\Lambda_j(\mathcal{F})$ é número característico de $\mathcal{F}$ em $P_j(\mathcal{F})$.

É suficiente demonstrar que I_n é residual em $\mathcal{U}$. Seja $G(\mathcal{F}) = \operatorname{Hol}(\mathcal{F}, L_\infty) \subset Dif(\mathbb{C}, 0)$. Como vimos $G(\mathcal{F})$ satisfaz à condição I_3, para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$. Por outro lado, se $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \setminus \Lambda_1^{-1}(\mathbb{R})$, então toda folheação em $\mathcal{U}_1$ satisfaz à condição $\mathcal{I}_1$. Como a função Λ_1 não é constante, $\mathcal{U}_1$ é aberto e denso em $\mathcal{U}$. Vamos utilizar em seguida outra vez que $n \geq 2$. Isto implica que a função $\Lambda \colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}^2$ definida por $\Lambda(\mathcal{F}) = (\Lambda_1(\mathcal{F}), \Lambda_2(\mathcal{F}))$ é uma submersão holomorfa (veja o exercício 9). Sendo assim, se A é um subconjunto genérico de $\mathbb{C}^2$, então $\Lambda^{-1}(A)$ é subconjunto genérico de $\mathcal{U}$ (verifique). Levando-se em conta que $G'(\mathcal{F}) = \{f'(0);\ f \in G(\mathcal{F})\}$ contém $e^{2\pi i \Lambda_j(\mathcal{F})}$, $j = 1, 2$, reduzimos a prova da Proposição 5.4.2 ao seguinte resultado:

Proposição 5.4.3. *O seguinte subconjunto de $\mathbb{C}^2$ é genérico:*
$\mathcal{I} = \{(\lambda_1, \lambda_2)$; *o subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}^*$ gerado por $e^{2\pi i\lambda_1}$ e $e^{2\pi i\lambda_2}$ é denso em $\mathbb{C}^*\}$.*

Demonstração. Com efeito, primeiro observamos que o subgrupo multiplicativo gerado por $e^{2\pi i\lambda_1}$ e $e^{2\pi i\lambda_2}$ é denso em $\mathbb{C}^*$ se, e somente se, o subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$ gerado por $1, \lambda_1$ e λ_2 é denso em $\mathbb{C}$. Dado $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, a região fundamental do grupo aditivo gerado por 1 e λ_1 é o retângulo $R = \{m + n.\lambda_1;\ m, n \in \mathbb{Z}\}$. Por outro lado, se $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ podemos escrever $\lambda_2 = a + b.\lambda_1$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a, b\ b/a$ não são racionais, então o subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$ gerado por $1, \lambda_1$ e λ_2 é denso em $\mathbb{C}$ (veja o exercício 10). Deste modo o conjunto $\mathcal{I}$ contém o seguinte subconjunto genérico de $\mathbb{C}^2$: $\{(\lambda_1, \lambda_2);\ \lambda_1 \notin \mathbb{R},\ \lambda_2 = a + b.\lambda_1,\ \ a, b, b/a \notin \mathbb{Q}\}$.

Isto prova as Proposições5.4.2 e 5.4.3. □

5.5 Densidade das Folhas

Nesta seção provaremos o Teorema de Xuday-Verenov, segundo o qual, as folheações de I_n possuem todas as folhas densas (com exceção da folha L_∞). Um passo importante na prova deste teorema é o seguinte resultado:

Proposição 5.5.1. *Seja $G \subset Dif(\mathbb{C}, 0)$ subgrupo satisfazendo ($\mathcal{I}_1$) e ($\mathcal{I}_2$). Então G tem pseudo-órbitas densas fora da origem.*

Demonstração. Por hipótese G contém um atrator, digamos f, e o subgrupo multiplicativo G' é denso em $\mathbb{C}^*$. Seja $f'(0) = \mu$, onde $|\mu| < 1$. Pelo Teorema de Linearização (Lema 5.3.5) existe um sistema de coordenadas z num disco $D \subset Dom(f)$, com centro em $0 \in \mathbb{C}$, tal que $f(z) = \mu.z$ em D. Fixemos $z_o \in D$. Seja $\mathcal{O}(z_o)$ a pseudo-órbita de z_o em D. Afirmamos que $D \cap (G'.z_o) = \{a.z_o \in D;\ a \in G'\} \subset \overline{\mathcal{O}(z_o)}$.

Com efeito, fixemos $a \in G'$ tal que $a.z_o \in D$. Seja $g \in G$ tal que $g'(0) = a$. Como $|\mu| < 1$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_o$ então $f^n(z_o) \in Dom(g)$. Em particular, $f^n(z_o) \in Dom(f^{-n} \circ g)$. Por outro lado, como vimos na prova do Lema 5.3.9, a seqüência $(z_n = f^{-n} \circ g \circ f^n(z_o))_{n \geq n_o}$ converge para $a.z_o$. Como $z_n \in \mathcal{O}(z_o)$ para todo $n \geq n_o$, obtemos que $a.z_o \in \overline{\mathcal{O}(z_o)}$, o que prova a afirmação. Finalmente, como G' é denso em $\mathbb{C}^*$, temos que $\overline{\mathcal{O}(z_o)} \supset \overline{D \cap G'} \supset D$, o que prova a Proposição. □

Teorema 5.5.2 (Xuday-Verenov)**.** *Seja $\mathcal{F} \in A(n), n \geq 2$ tal que $G = \mathrm{Hol}(\mathcal{F}, L_\infty)$ tem órbitas densas fora da origem. Então todas as folhas não algébricas de $\mathcal{F}$ são densas em $\mathbb{C}P(2)$.*

Demonstração. Com efeito, sabemos que as folhas de $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}P(2) \setminus L_\infty$ não são limitadas em $\mathbb{C}^2$ (veja o exercício 12). em particular, estas folhas se acumulam em L_∞. Além disto, como os números característicos de um ponto singular $q \in \operatorname{sing} \mathcal{F} \cap L_\infty$ não são reais positivos, este possui exatamente duas separatrizes locais, uma contida e a outra transversal a L_∞. Logo, se $\mathcal{F}$ possui alguma folha algébrica em $\mathbb{C}^2$, esta deve conter algumas separatrizes transversais a L_∞. Decorre daí que $\mathcal{F}$ possui no máximo $n+1$ folhas algébricas. As folhas não algébricas necessariamente se acumulam em pontos não singulares de $\mathcal{F}$ em L_∞.

Seja $L \subset \mathbb{C}^2$, uma folha não algébrica de $\mathcal{F}$. Fixemos um ponto $p \in L_\infty \setminus \operatorname{sing}(\mathcal{F})$, tal que $p \in \overline{L}$, e uma seção transversal Σ, $\Sigma \cap L_\infty = \{p\}$. Como $\mathrm{Hol}(\mathcal{F}, L_\infty, \Sigma, p)$ tem pseudo-órbitas densas fora da origem (p), segue que $\overline{L}$ contém uma vizinhança de p em Σ, logo, diminuindo a seção se necessário, podemos supor que $\overline{L} \supset \Sigma$. Observe que a mesma afirmação é verdadeira para qualquer outra seção transversal a $\mathcal{F}$, digamos Σ', tal que $\Sigma' \cap L_\infty = \{q\}$. De fato, como $\tilde{L} = L_\infty \setminus \operatorname{sing}(\mathcal{F})$ é conexo, consideremos um caminho $\gamma\colon [0,1] \to \tilde{L}$ ligando p a q e a aplicação de holonomia deste caminho, $\phi\colon (\Sigma, p) \to (\Sigma', q)$, a qual está definida numa vizinhança U de p em Σ. Vemos então que

$$\phi(L \cap U) = L \cap \phi(U) \implies \phi(U) = \phi(\overline{L} \cap U) = \overline{L} \cap \phi(U),$$

como queríamos. Fixemos agora um aberto $V \subset \mathbb{C}P(2)$. Queremos provar que $L \cap V \neq \emptyset$. Como $\mathcal{F}$ possui um número finito de folhas algébricas, seja N uma folha não algébrica tal que $N \cap V \neq \emptyset$. Como vimos, $N \cap \Sigma \neq \emptyset$. Sejam $p_o \in N \cap \Sigma$, $q_o \in N \cap V$ e γ' um caminho em N ligando p_o a q_o. Tomemos uma seção transversal Σ' a $\mathcal{F}$ passando por q_o e tal que $\Sigma' \subset V$. Consideremos a aplicação de holonomia do caminho γ', digamos $\psi\colon W \to \Sigma'$, onde W é uma vizinhança de p_o em Σ. Como $L \cap W \neq \emptyset$, temos

$$L \cap V \supset L \cap \Sigma' \supset L \cap \psi(W) = \psi(L \cap W) \neq \emptyset,$$

como queríamos. □

Como as folheações em I_n não possuem folhas algébricas, com exceção de L_∞, obtemos a seguinte conseqüência:

Corolário 5.5.3. *Se $\mathcal{F} \in I_n$, então todas as folhas de $\mathcal{F}$, com exceção de L_∞, são densas em $\mathbb{C}P(2)$.*

5.6 Prova do Teorema de Ilyashenko

Fixemos uma folheação $\mathcal{F}_o \in I_n$ e $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{D}}$ uma deformação holomorfa de $\mathcal{F}_o$. Vamos supor que:

(i) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{D}}$ é topologicamente trivial, ou seja, existe aplicação contínua $\phi\colon \mathbb{D}\times\mathbb{C}P(2)\to\mathbb{C}P(2)$, tal que $\phi_0 = id$ e para todo $t\in\mathbb{D}$, $\phi_t\colon \mathbb{C}P(2)\to\mathbb{C}P(2)$ é equivalência topológica entre $\mathcal{F}_o$ e $\mathcal{F}_t$ ($\phi_t(p) = \phi(t,p)$).

(ii) $\mathcal{F}_t \in \mathcal{X}(n)$, $\forall t$.

Vamos provar que a deformação é analiticamente trivial, ou seja, que existe $\psi\colon \mathbb{D}\times\mathbb{C}P(2)\to\mathbb{C}P(2)$ holomorfa, tal que para todo $t\in\mathbb{D}$, ψ_t é equivalência holomorfa entre $\mathcal{F}_o$ e $\mathcal{F}_t$.

Vejamos qual é a idéia da prova. Vamos demonstrar que existe uma folheação holomorfa singular de codimensão um, $\tilde{\mathcal{F}}$, em $M = \mathbb{D}\times\mathbb{C}P(2)$, tal que para todo $t\in\mathbb{D}$, a restrição de $\tilde{\mathcal{F}}$ à fibra $M_t = \{t\}\times\mathbb{C}P(2)$ coincide com $\mathcal{F}_t$. Em seguida provaremos que existe um campo de vetores holomorfo X em M com as seguintes propriedades:

(1) O fluxo X_s de X é tal que $X_t(M_0) = M_t$, $t\in\mathbb{D}$, sendo portanto um biholomorfismo entre as fibras M_0 e M_t.

(2) X é tangente ao conjunto singular de $\tilde{\mathcal{F}}$, isto é, $\text{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ é constituído de órbitas de X.

(3) X é tangente às folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$, isto é, as órbitas de X, passando por pontos não singulares de $\tilde{\mathcal{F}}$, estão contidas em folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Não é difícil ver que (1), (2) e (3) implicam que para todo $t\in\mathbb{D}$, o automorfismo $\psi_t\colon \mathbb{C}P(2)\to\mathbb{C}P(2)$, definido por $X_t(0,p) = (t,\psi_t(p))$ é uma equivalência entre $\mathcal{F}_o$ e $\mathcal{F}_t$.

A folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ é definida a partir da aplicação contínua ϕ da seguinte forma:

(4) Folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$: fixemos um ponto $p_o = (0,p)\in M_0$ tal que $p\notin \text{sing}(\mathcal{F}_o)$. Seja L a folha de $\mathcal{F}_o$ por p. A folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ que passa por p_o é por definição a superfície (imersa e contínua)

$$\tilde{L} = \{(t,\phi(t,q));\ t\in\mathbb{D}\,\text{e}\,q\in L\}$$

(5) O conjunto singular de $\tilde{\mathcal{F}}$ é constituído das seguintes curvas: dado $p\in\text{sing}(\mathcal{F})$ seja $\alpha_p(t) = (t,\phi(t,p))$. Desta forma teremos:

$$\text{sing}(\tilde{\mathcal{F}}) = \cup_{p\in\text{sing}(\mathcal{F})}\alpha_p(\mathbb{D}).$$

Não é difícil ver que, a partir de (i), podemos definir uma folheação por (4) e (5), a qual é, em princípio, apenas de classe C^0. O nosso primeiro trabalho será provar que ela é, de fato, holomorfa.

Antes de iniciarmos a prova observamos que, para provar o Teorema, é suficiente demonstrar que existe $\epsilon > 0$ tal que se $D = D(0,\epsilon)$, então a deformação $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in D}$ é holomorficamente trivial (veja o exercício 11). Tendo-se em vista esta observação, de agora em diante, sempre que for mais conveniente, provaremos os resultados auxiliares para t numa vizinhança de $0 \in \mathbb{D}$.

Em seguida provaremos que o conjunto singular é constituído de curvas holomorfas.

Lema 5.6.1. *Seja* $\operatorname{sing}(\mathcal{F}_o) = \{p_1, ..., p_N\}$*, onde* $N = n^2 + n + 1$*,* $p_j \in L_\infty$ *para* $j = 1, ..., n+1$ *e* $p_i \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}P(2) \setminus L_\infty$ *se* $i > n + 1$*. Defina* $P_j(t) \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}P(2), j = 1, ..., N$*, por* $P_j(t) = \phi_t(p_j)$*. Então existe* $r > 0$ *tal que* P_j *é holomorfa em* $D = D(0, r)$*, para todo* $j = 1, ..., N$*.*

Demonstração. Pela Proposição 5.2.2 existem vizinhança $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}_o$ em $S(n)$ e funções holomorfas $\varphi_j \colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}P(2)$, $j = 1, ..., N$, tais que $\varphi_j(0) = p_j$ e para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$ temos $\operatorname{sing}(\mathcal{F}) = \{\varphi_1(\mathcal{F}), ..., \varphi_N(\mathcal{F})\}$. Seja $r > 0$ tal que se $|t| < r$ então $\mathcal{F}_t \in \mathcal{U}$. Coloquemos $P_j(t) = \varphi(\mathcal{F}_t)$, $|t| < r$, $j = 1, ..., N$. Como a família é holomorfa, as funções P_j também são. Por outro lado, como ϕ_t é equivalência contínua entre $\mathcal{F}_o$ e $\mathcal{F}_t$, temos $\operatorname{sing}(\mathcal{F}_t) = \{\phi_t(p_1), ..., \phi_t(p_N)\}$, o que prova o resultado, já que as funções $t \to \phi_t(p_j)$ são contínuas. $\square$

Nota. De fato, o conjunto singular de $\tilde{\mathcal{F}}$ é analítico, como veremos no próximo lema. Este fato também implica o Lema 5.6.1.

Provaremos agora que a holonomia de uma curva fechada em L_∞ depende holomorficamente do parâmetro t. Fixemos um caminho $\gamma \colon [0,1] \to L = \mathbb{C}P(2) \setminus \{p_1, ..., p_{n+1}\}$, com $\gamma(0) = \gamma(1) = q$ e uma seção transversal Σ a $\mathcal{F}_o$ com $\Sigma \cap L_\infty = \{q\}$. Pelo Lema 5.6.1, existe $r_1 \leq r$ tal que se $|t| < r_1$ então $P_j(t) \in V$ para todo $j = 1, ..., n + 1$, logo podemos definir a transformação de holonomia de γ com respeito a $\mathcal{F}_t$, a qual está definida numa vizinhança de q em Σ. Denotaremos esta transformação por f_t^γ, ou simplesmente por f_t, se não houver possibilidade de confusão.

Lema 5.6.2. *Sejam* γ *e* f_t *como acima. Existem* $r_2 \leq r_1$ *e uma vizinhança* W *de* q *em* Σ *tais que:*

(a) f_t *está definida em* W *para todo* $|t| < r_2$*.*

(b) *A aplicação* $f \colon D(0, r_2) \times W \to \sigma$ *definida por* $f(t, z) = f_t(z)$ *é holomorfa.*

Nota. Por simplicidade diremos que "f_t segue f_0 analiticamente".

Demonstração. Consideremos a folheação de dimensão um $\overline{\mathcal{F}}$, de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}P(2)$, definida da seguinte maneira:

(i) $\operatorname{sing}(\overline{\mathcal{F}}) = \operatorname{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$.

(ii) Dado $(t, p) \notin \operatorname{sing}(\overline{\mathcal{F}})$, a folha L, de $\overline{\mathcal{F}}$ por (t, p) é por definição $L = \{(t, x);\, x \in L_t\}$, onde L_t é a folha de $\mathcal{F}_t$ por p.

Em outras palavras, $\overline{\mathcal{F}}$ é uma folheação de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}P(2)$, tangente a cada fibra M_t e cuja restrição a esta fibra coincide com $\mathcal{F}_t$. Como a deformação $\{\mathcal{F}_t\}_t$ é holomorfa, não é difícil provar que $\overline{\mathcal{F}}$ é uma folheação holomorfa (em particular sing($\tilde{\mathcal{F}}$) é conjunto analítico).

Observe que, por construção, as folhas de $\overline{\mathcal{F}}$ estão contidas nas folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Consideremos uma seção transversal Σ' a $\overline{\mathcal{F}}$, passando por $(0, q)$, onde Σ' é da forma $D(0, r') \times W'$, sendo W' um aberto de Σ contendo q. Note que a curva $\overline{\gamma}(s) = (0, \gamma(s))$ está contida na folha $\{0\} \times L$ de $\overline{\mathcal{F}}$, onde $L = L_\infty \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_o)$. Seja F a holonomia desta curva com respeito a $\overline{\mathcal{F}}$, a qual está definida num aberto de Σ' da forma $D(0, r_2) \times W$, sendo $r_2 \leq r'$ e $q \in W \subset W'$. Como $\overline{\mathcal{F}}$ é tangente às fibras $M_t = \{t\} \times \mathbb{C}P(2)$, a aplicação F é da forma $F(t, x) = (t, f(t, x))$. Por outro lado, segue da construção de $\overline{\mathcal{F}}$ que $f(t, x) = f_t(x)$, o que prova o lema. $\square$

Note que para $t \leq r_2$, $q \in L_\infty$ é ponto não singular de $\mathcal{F}_t$. Vamos então denotar por G_t o grupo de holonomia $\text{Hol}(\mathcal{F}_t, L_\infty, \Sigma, q)$. Veremos em seguida que G_t é analiticamente conjugado a G_0 por um germe de biholomorfismo $h_t \colon (\Sigma, q) \to (\Sigma, q)$ de tal forma que a aplicação $t \to h_t$ é holomorfa.

Como $\overline{\mathcal{F}}$ é folheação holomorfa, fixemos uma carta trivializadora $\Phi = (t, x, y) \colon U \to \mathbb{C}^3$ de $\overline{\mathcal{F}}$, tal que $\Phi(0, q) = (0, 0, 0)$, $\Phi(t, p) = (t, x(t, p), y(t, p))$ para $(t, p) \in U$, as placas de $\overline{\mathcal{F}}$ em U são os conjuntos da forma $(t = c_1, x = c_2)$ e $(\{t_o\} \times \Sigma) \cap U = (t = t_o, y = 0)$ (verifique a existência de uma tal carta), de forma que $(\mathbb{D} \times \Sigma) \cap U = (y = 0)$.

Como $\phi_0 = id$, por continuidade, existem $r_3 \leq r_2$ e uma vizinhança A de q em Σ tal que se $|t| < r_3$ e $p \in A$ então $(t, \phi(t, p)) \in U$. Seja π a projeção de U sobre $\mathbb{D} \times \Sigma$ ao longo das placas de $\overline{\mathcal{F}}$, $\pi(t, x, y) = (t, x)$. Podemos definir então uma aplicação contínua $h \colon D(0, r_3) \times A \to \Sigma$ por $(t, h(t, p)) = \pi(t, \phi(t, p))$. Pela Proposição 5.3.3, $h_t(p) = h(t, p)$ conjuga G_0 com G_t, para todo $t \in D(0, r_3)$. Além disto, por construção, dado $p \in A$, a folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ que passa por $(0, p)$ corta $\{t\} \times \Sigma$ no ponto $(t, h(t, p))$.

Lema 5.6.3. *h é holomorfa numa vizinhança de $D(0, r_4) \times \{q\}$, onde $0 < r_4 \leq r_3$. Em particular $h_t \in Dif(\Sigma, q)$, se $|t| < r_4$.*

Demonstração. Por um Teorema de Hartogs (veja [40]), é suficiente provar que h é holomorfa com respeito a cada uma das variáveis. Como $\mathcal{F}_o \in I_n$, o Teorema 5.3.8 implica que h é holomorfa com respeito à segunda variável $p \in \Sigma$. Provemos que h é holomorfa com respeito á primeira variável.

Fixemos $f_o, g_o \in G_0$ tais que:

(a) f_o é atrator.

(b) g_o é tangente á identidade.

Pelo Lema 5.6.2 existem W vizinhança de q em Σ, $r_4 \leq r_3$ e funções holomorfas $f, g \colon D(0, r_4) \times W \to \Sigma$ tais que:

(c) f_t e g_t seguem analiticamente f_o e g_o, respectivamente, onde $f_t(p) = f(t, p)$ e $g_t(p) = g(t, p)$.

Como f_t é atrator, pelo Lema 5.3.5, diminuindo W, se necessário, podemos supor que existe uma aplicação holomorfa $z \colon D(0, r_4) \times W \to \mathbb{C}$, tal que:

(d) $z_t(W)$ é um disco D, com centro em $0 \in \mathbb{C}$ e $z_t(q) = 0$ $(z_t(p) = z(t,p))$.
(e) z_t conjuga f_t em W com a sua parte linear, isto é, $z_t \circ f_t(p) = f_t'(0).z_t(p)$ para todo $p \in W$.

Observe que $f_t'(0)$ não depende de t, já que f_o é holomorficamente conjugado a f_t (por h_t). Podemos então dizer que no sistema de coordenadas z_t, temos $f_t(z_t) = \lambda.z_t$, onde $\lambda = f_o'(0)$. Vamos agora utilizar a Observação 5.3.13. Como vimos nesta Observação, h_t é linear, isto é, $h_t(z_o) = c(t).z_t$, onde $c\colon D(0,r_4) \to \mathbb{C}^*$. Basta provarmos que c é holomorfa. Para isto, coloquemos $g_t(z_t) = z_t + b(t).z_t^{k+1} + ...$, onde $k \geq 1$ e $b(t) \neq 0$ para todo t. Como g e z são holomorfas, $b\colon D(0,r_4) \to \mathbb{C}^*$ é também holomorfa. Por outro lado, como $h_t \circ g_o = g_t \circ h_t$, obtemos $(c(t))^k = b(0)/b(t)$. Isto implica que c é holomorfa, como queríamos. $\square$

Podemos agora provar que $\tilde{\mathcal{F}}$ é folheação holomorfa.

Proposição 5.6.4. *$\tilde{\mathcal{F}}$ é folheação holomorfa em $D \times \mathbb{C}P(2)$, onde D é um disco com centro em $0 \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Como $\mathrm{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ é conjunto analítico de codimensão dois, pela Proposição 1.3.6 do Capítulo 1, basta provarmos que $\tilde{\mathcal{F}}|_V$ é holomorfa, onde $V = (D \times \mathbb{C}P(2)) \setminus \mathrm{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$. Em primeiro lugar provaremos que $\tilde{\mathcal{F}}$ é holomorfa num aberto W, onde W é uma vizinhança de um ponto $(0,q) \in \{0\} \times L_\infty$. Em seguida usaremos a densidade das folhas de $\mathcal{F}_o$, para provar que $\tilde{\mathcal{F}}$ é holomorfa em V.

Fixemos um ponto $q \in L_\infty \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F}_o)$ e uma carta trivializadora $\Phi = (t,x,y)\colon U \to \mathbb{C}^3$ de $\overline{\mathcal{F}}$, como na construção que precede o Lema 5.6.3, isto é, tal que $\Phi(0,q) = (0,0,0)$, $\Phi(t,p) = (t, x(t,p), y(t,p))$ para $(t,p) \in U$, as placas de $\overline{\mathcal{F}}$ em U são os conjuntos da forma $(t = c_1, x = c_2)$, e $(D \times \Sigma) \cap U = (y = 0)$, sendo $D = D(0,r_4)$ e Σ uma seção transversal a $\mathcal{F}_o$ por q. Como já vimos no Lema 5.6.3, se r_4 é suficientemente pequeno, podemos definir uma aplicação holomorfa $h\colon D \times A \to \Sigma$ tal que:
(i) h_t conjuga G_0 e G_t.
(ii) A folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ que passa por $(0,p) \in \{0\} \times A$, corta $\{t\} \times \Sigma$ no ponto $(t, h(t,p))$.

Note que a aplicação $H\colon D \times A \to D \times \Sigma$ definida por $H(t,p) = (t, h(t,p))$ é um biholomorfismo de $D \times A$ sobre a sua imagem.

No sistema de coordenadas $\Phi = (t,x,y)$, um ponto de $D \times A$ se escreve como $(t,x,0) \simeq (t,x)$. Podemos escrever H neste sistema de coordenadas como $H(t,x) = (t, h(t,x))$, sendo então uma folha típica de $\tilde{\mathcal{F}}|_U$ parametrizada por $(t,y) \to (t, h(t,x), y)$, onde $(0,x,0)$ é o ponto em que a folha corta a seção $\{0\} \times \Sigma$.

Por outro lado, a aplicação $F\colon U \to \mathbb{C}^3$ definida por $F(t,x,y) = (t, h(t,x), y) = (t, x', y)$ é um biholomorfismo sobre sua imagem, digamos W. Não é difícil ver que $F^{-1}\colon W \to \mathbb{C}^3$ é uma carta trivializadora de $\tilde{\mathcal{F}}$, sendo as placas de $\tilde{\mathcal{F}}$ os conjuntos da forma $(x = cte)$.

Provaremos agora que $\tilde{\mathcal{F}}$ é holomorfa em $V = (D \times \mathbb{C}P(2)) \setminus \mathrm{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$. A idéia é utilizar que as folhas de $\overline{\mathcal{F}}$ estão contidas nas de $\tilde{\mathcal{F}}$ e que as folhas de $\mathcal{F}_o$ (distintas de L_∞) são densas em $\mathbb{C}P(2)$.

Consideremos a carta $(t, x, y) \colon W \to \mathbb{C}^3$ acima. Coloquemos $\Sigma' = (y = 0)$. Note que Σ' é uma seção transversal a $\overline{\mathcal{F}}$ em W. Fixemos $p_o = (t_o, p) \in V$. Como $\mathcal{F}_o$ é topologicamente equivalente a $\mathcal{F}_{t_o}$ e as suas folhas (distintas de L_∞) são densas em $\mathbb{C}P(2)$, o mesmo é verdade para $\mathcal{F}_{t_o}$. Podemos então afirmar que a folha L_o, de $\overline{\mathcal{F}}$ por p_o, corta Σ', digamos num ponto $p_1 = (t_o, p') \in \Sigma'$. Isto significa que, se γ é um caminho em L_o ligando p_o a p_1 e Σ'' é uma seção transversal a $\overline{\mathcal{F}}$ por p_o (suficientemente pequena), então podemos definir uma aplicação de holonomia (para $\overline{\mathcal{F}}$) $f = f_\gamma \colon \Sigma'' \to \Sigma'$, a qual é holomorfa. Como as folhas de $\overline{\mathcal{F}}$ estão contidas nas de $\tilde{\mathcal{F}}$, não é difícil ver que as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ cortam Σ'' nos conjuntos da forma $f^{-1}(0, cte, 0)$, já que as placas de $\tilde{\mathcal{F}}$ em W são da forma $(x = cte)$. Isto implica que a restrição $\tilde{\mathcal{F}}|_{\Sigma''}$ é uma folheação holomorfa. Finalmente, utilizando mais uma vez que as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ estão contidas nas de $\tilde{\mathcal{F}}$ e que Σ'' é seção transversal a $\overline{\mathcal{F}}$, não é difícil ver que $\tilde{\mathcal{F}}$ é holomorfa numa vizinhança de p_o. Deixamos os detalhes para o leitor (veja também o Exercício 13). $\square$

Veremos em seguida que a deformação $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in D}$ é holomorficamente trivial. Pelo que vimos acima, existe uma folheação holomorfa de codimensão um $\tilde{\mathcal{F}}$ em $D \times \mathbb{C}P(2)$, tal que para todo $t \in D$ a restrição $\tilde{\mathcal{F}}|_{M_t}$ coincide com $\mathcal{F}_t$, sendo $M_t = \{t\} \times \mathbb{C}P(2)$. Note que $\mathcal{F}_o \in I_n$, logo, em particular, os números característicos das suas singularidades são diferentes de -1. Basta então provarmos o seguinte resultado:

Teorema 5.6.5. *Sejam $\mathcal{G}_o$ uma folheação holomorfa em $\mathbb{C}P(2)$ de grau $n \geq 1$ e $\{\mathcal{G}_t\}_{t \in \mathbb{D}}$ uma deformação analítica de $\mathcal{G}_o$. Suponha que:*
(a) *As singularidades de $\mathcal{G}_o$ são não degeneradas e têm números característicos diferentes de -1.*
(b) *Existe uma folheação holomorfa de codimensão um $\mathcal{G}$ em $\mathbb{D} \times \mathbb{C}P(2)$, cujo conjunto singular é de codimensão ≥ 2 e tal que para todo $t \in \mathbb{D}$, a restrição $\mathcal{G}|_{M_t}$ coincide com $\mathcal{G}_t$.*

Então existe $0 < r \leq 1$ tal que $\{\mathcal{G}_t\}_{t \in D(0,r)}$ é holomorficamente trivial.

Demonstração. Sejam $\pi \colon \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P(2)$ a projeção canônica e $\Pi \colon \mathbb{D} \times (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) \to \mathbb{D} \times \mathbb{C}P(2)$ definida por $\Pi(t, p) = (t, \pi(p))$. Consideremos a folheação $\mathcal{G}^* = \Pi^*(\mathcal{G})$. Esta é uma folheação holomorfa de codimensão um em $\mathbb{D} \times (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})$. Como o complementar de $\mathbb{D} \times (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})$ em $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^3$ tem codimensão 3, $\mathcal{G}^*$ se estende a uma folheação holomorfa de codimensão um em $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^3$, a qual designaremos também por $\mathcal{G}^*$.

Lema 5.6.6. *A folheação $\mathcal{G}^*$ pode ser representada em $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^3$ por uma 1-forma holomorfa integrável*

$$\Omega = A(t, x_1, x_2, x_3)dt + B_1(t, x_1, x_2, x_3)dx_1 + B_2(t, x_1, x_2, x_3)dx_2 + B_3(t, x_1, x_2, x_3)dx_3$$

com as seguintes propriedades:
(i) B_1, B_2 *e* B_3 *são polinômios homogêneos de grau* $n+1$ *nas variáveis* x_1, x_2, x_3.
(ii) A *é polinômio homogêneo de grau* $n+2$ *nas variáveis* x_1, x_2, x_3.
(iii) $\sum_{j=1}^{3} x_j\, B_j(t, x_1, x_2, x_3) \equiv 0$, *para todo* $(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C}^3$.
(iv) *Para todo* $t \in \mathbb{D}$ *fixado, a forma*

$$\Omega_t = \sum_{j=1}^{3} B_j(t, x_1, x_2, x_3) dx_j$$

representa $\pi^*(\mathcal{G}_t)$ *em* $\mathbb{C}^3$.

Demonstração. Em primeiro lugar observamos que $\mathcal{G}^*$ pode ser representada por uma 1-forma holomorfa integrável, digamos ω, em $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^3$ (veja exercício 26 do Capítulo 1). Seja ω_t a restrição de ω à fibra $\{t\} \times \mathbb{C}^3$. Note que ω_t representa $\mathcal{G}_t$ em coordenadas homogêneas. Coloquemos

$$\omega = a(t,x)dt + \sum_{j=1}^{3} b_j(t,x)dx_j = a(t,x)dt + \omega_t \ \ , x = (x_1, x_2, x_3).$$

Observe que, para todo $(t,p) \notin \text{sing}(\mathcal{G}^*)$ fixado, a reta perfurada $\ell = \{(t, s.p);\, s \in \mathbb{C}^*\}$ está contida na folha de $\mathcal{G}^*$ por (t,p). Como as retas deste tipo são trajetórias do campo "radial", $R = x_1.\partial/\partial x_1 + x_2.\partial/\partial x_2 + x_3.\partial/\partial x_3$, esta última condição é equivalente à seguinte:

$$(*)\ i_R(\omega) = i_R(\omega_t) = \sum_{j=1}^{3} x_j\, b_j \equiv 0.$$

Por outro lado, podemos escrever a série de Taylor de ω num ponto $(t,0)$ nas variáveis x_1, x_2, x_3 como $\omega = \sum_{j=k}^{\infty} \omega^j$, onde

$$\omega^j = a^j(t,x)dt + b_1^j(t,x)dx_1 + b_2^j(t,x)dx_2 + b_3^j(t,x)dx_3 = a^j(t,x)dt + \omega_t^j$$

sendo a^j e b_1^j, b_2^j, b_3^j holomorfas em (t,x) e polinômios homogêneos de grau j em x ($\omega_k \neq 0$). Afirmamos que $\Omega = \alpha^{k+1}dt + \omega_t^k$ representa $\mathcal{G}^*$ em $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^3$.

Com efeito, a relação de integrabilidade $\omega \wedge d\omega = 0$ implica, via (*), que

$$\omega \wedge (i_R(d\omega)) = -i_R(\omega \wedge d\omega) = 0 \implies i_R(d\omega) = f.\omega$$

onde f é holomorfa (já que $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{G}^*)) \geq 2$). Por outro lado, a derivada de Lie de ω na direção de R pode ser calculada como

$$\frac{d}{ds}[R_s^*(\omega)]_{s=0} = L_R(\omega) = i_R(d\omega) + d(i_R(\omega)) = i_R(d\omega) = f.\omega$$

onde $R_s(t,x) = (t, e^s.x)$ é o fluxo de R (veja [8] e [9]). Levando-se em conta a série de Taylor de ω, obtemos

$$L_R(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{ds}\big[a^j(t,e^s.x)dt + \sum_{i=1}^{3} b_i^j(t,e^s.x).e^s.dx_i\big]_{s=0} = \sum_{j=1}^{\infty}(j\, a_j\, dt + (j+1)\omega_t^j)$$

Escrevamos a série de Taylor de f como $f(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} f^j(t,x)$, onde f^j é holomorfa em (t,x) e homogênea de grau j em x. A relação $L_R(\omega) = f.\omega$ implica que

$$\sum_{j\geq k}(j\, a^j\, dt + (j+1)\omega_t^j) = (\sum_{r\geq 0} f^r).(\sum_{s\geq k}\omega^s) = \sum_{j\geq k}(\sum_{r+s=j} f^r.\omega^s),$$

Decorre daí que

$$j\, a^j\, dt + (j+1)\omega_t^j = \sum_{r+s=j} f^r.\omega^s = \sum_{r+s=j}(f^r.a^s.dt + f^r.\omega_t^s)\ ,\forall j \geq k$$

ou seja,

$$(**)\ j\, a^j = \sum_{r+s=j} f^r.a^s \text{ e } (j+1)\omega_t^j = \sum_{r+s=j} f^r.\omega_t^s\ ,\forall j \geq k.$$

Fazendo $j = k$ em (**) obtemos $f^0.a^k = k.a^k$ e $f^0.\omega_t^k = (k+1)\omega_t^k$, o que implica $f^0 = k+1$ e $a^k = 0$ (verifique que $f^0 \neq k$). A idéia agora é utilizar (**) para provar por indução que se $j \geq k$ então a forma $\alpha^j = a^{j+1}dt + \omega_t^j$ é múltipla de $\Omega = a^{k+1}dt + \omega_t^k$, o que implica a afirmação. Este argumento de indução pode ser feito a partir da seguinte relação,

$$(j-k)\alpha^j = \sum_{r+s=j, s\leq j-1} f^r.\alpha^s\ ,\forall j > k,$$

que resulta de (**) e cuja verificação deixamos para o leitor. Para finalizar, observamos que $k = n+1$, já que o grau de $\mathcal{G}_o$ é n (veja a Observação 2.5.5 do Capítulo 2). $\square$

Vejamos agora qual é a idéia da prova do Teorema 5.6.5. Provaremos que existe um campo de vetores holomorfo X em $D \times \mathbb{C}^3$, onde $D \subset \mathbb{D}$ é um disco com centro em $0 \in \mathbb{C}$, da forma

$$X = \partial/\partial t + \sum_{j=1}^{3} L_j(t,x).\partial/\partial x_j$$

com as seguintes propriedades:
(a) X é tangente a $\mathcal{G}^*$, isto é, $i_X(\Omega) = 0$.
(b) $L_j(t,x)$ é função linear de $x \in \mathbb{C}^3$, $j = 1,2,3$.

Suponhamos, por um instante, provada a existência de um tal campo e demonstremos o Teorema 5.6.5. Observe que o fluxo, X_s, de X, é obtido pela integração do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$(***)\ \frac{dt}{ds} = 1\ ,\ \frac{dx_j}{ds} = L_j(t,x)\ ,\ j = 1,2,3.$$

Como as L_j são funções lineares de x, a solução de (***) que passa por um ponto $(0, x_o) \in D \times \mathbb{C}^3$, digamos $\gamma(s)$, está definida em D e pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\gamma(s) = X_s(0, x_o) = (s, C(s).x_o)$$

onde $C(s)$ é um isomorfismo (linear) de $\mathbb{C}^3$ (veja [80]). Em particular, a restrição de X_s à fibra $F_0 = \{0\} \times \mathbb{C}^3$ coincide com $C(s)$ e envia esta fibra isomorficamente sobre a fibra $F_s = \{s\} \times \mathbb{C}^3$. Como $i_X(\Omega) = 0$, as órbitas de X são tangentes às folhas de $\mathcal{G}^*$, logo $C(s)$ é uma equivalência holomorfa entre as folheações $\mathcal{G}^*|_{F_0} = \pi^*(\mathcal{G}_o)$ e $\mathcal{G}^*|_{F_s} = \pi^*(\mathcal{G}_s)$. Isto implica que, se $\overline{C}_s$ é o automorfismo de $\mathbb{C}P(2)$ induzido por $C(s)$, então $\overline{C}_s$ é uma equivalência holomorfa entre $\mathcal{G}_o$ e $\mathcal{G}_s$, o que prova o Teorema.

Vejamos agora como obter o campo X. Observe que a relação $i_X(\Omega) = 0$ é equivalente à seguinte:

$$(N)\ \ A(t,x) = -\sum_{j=1}^{3} L_j(t,x).B_j(t,x)\,,$$

ou seja, para todo $t \in D$ fixado, o polinômio $A_t(x) = A(t,x)$ está no ideal gerado pelos polinômios $B_{jt}(x) = B_j(t,x)$.

Lembramos agora o seguinte resultado algébrico:

Teorema 5.6.7 (Lema de Noether). *Sejam P, Q polinômios homogêneos em $\mathbb{C}^3$. Suponha que:*
(i) *P, Q são primos relativos.*

(ii) *As curvas algébricas definidas em $\mathbb{C}P(2)$ por $(P = 0)$ e $(Q = 0)$ se intersectam transversalmente, isto é, se $P(x) = Q(x) = 0$ com $x \neq 0$, então $dP(x) \wedge dQ(x) \neq 0$.*

Seja H um polinômio homogêneo em $\mathbb{C}^3$. Então, $H \in I(P,Q)$ se, e somente se, $(P = Q = 0) \subset (H = 0)$.

A fim de obter uma solução para (N), utilizaremos a seguinte versão do Lema de Noether:

Lema 5.6.8. *(Lema de Noether para famílias de folheações [9]) Seja $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in D}$ uma família holomorfa de folheações de grau n em $\mathbb{C}P(2)$, com as seguintes propriedades:*
(a) *Para cada $t \in D$ fixado, $\pi^*(\mathcal{G}_t)$ é definido em coordenadas homogêneas pela 1-forma $\Omega_t = \sum_{j=1}^{3} B_j(t,x)dx_j$, onde os B_j são funções holomorfas de (t,x) e polinômios homogêneos de grau $n+1$ em x, sendo $i_R(\Omega_t) = 0$ para todo $t \in D$.*
(b) *Para todo $t \in D$, as singularidades de $\mathcal{G}_t$ são não degeneradas.*

Seja $H\colon D \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ uma aplicação holomorfa em (t,x) e homogênea de grau m em x. Suponha que para todo $t \in D$ fixado, temos

$$(S)\quad \mathrm{sing}(\Omega_t) =\subset H_t^{-1}(0).$$

Então H está no ideal gerado por B_1, B_2, B_3, isto é, existem funções holomorfas F_1, F_2, F_3, homogêneas de grau $m-n-1$ em x (nulas se $m < n+1$), tais que $H = \sum_{j=1}^3 F_j\, B_j$.

Suponhamos o Lema 5.6.8 demonstrado e provemos o Teorema 5.6.5. Pelo Lema 5.6.6, a folheação $\mathcal{G}^*$ pode ser representada em $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^3$ por $\Omega = A(t,x)dt + \Omega_t$, onde $\Omega_t = B_1(t,x)dx_1 + B_2(t,x)dx_2 + B_3(t,x)dx_3$, sendo que B_1, B_2 e B_3 são polinômios homogêneos de grau $n+1$ em x e A é polinômio homogêneo de grau $n+2$ em x. Para demonstrar o Teorema 5.6.5, é suficiente provar que a relação (N) é verificada em $D \times \mathbb{C}^3$, onde $D = D(0,r) \subset \mathbb{D}$. De acordo com o Lema 5.6.8, basta então provar que

$$\mathrm{sing}(\Omega_t) \subset A_t^{-1}(0) \ \ ,\forall t \in D(0,r),$$

se $r > 0$ é suficientemente pequeno. Para isto vamos utilizar a integrabilidade de Ω e o fato de que as singularidades de $\mathcal{G}_o$ têm números característicos diferentes de -1. Observe que o coeficiente de $dt \wedge dx_i \wedge dx_j$ $(i < j)$, de $\Omega \wedge d\Omega = 0$ (o qual se anula), é o seguinte:

$$(*)\ \ A(\frac{\partial B_j}{\partial x_i} - \frac{\partial B_i}{\partial x_j}) + B_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} - B_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} + B_i \frac{\partial A}{\partial x_j} - B_j \frac{\partial A}{\partial x_i} = 0.$$

Como as singularidades de $\mathcal{G}_o$ são não degeneradas e têm números característicos diferentes de -1, existe $r > 0$ tal que o mesmo é verdade para $\mathcal{G}_t$, $t \in D(0,r) = D$. Fixemos $t_o \in D$ e $x_o \in \mathrm{sing}(\Omega_t)$, $x_o \neq 0$. Obtemos de (*) que:

$$A(t_o, x_o)(\frac{\partial B_j}{\partial x_i}(t_o, x_o) - \frac{\partial B_i}{\partial x_j}(t_o, x_o)) = 0 \ \ ,\forall i < j.$$

Basta então provarmos que $\frac{\partial B_j}{\partial x_i}(t_o,x_o) - \frac{\partial B_i}{\partial x_j}(t_o,x_o) \neq 0$ para algum $i < j$. Suponhamos, por exemplo, que $x_o = (x_1^o, x_2^o, x_3^o)$, onde $x_3^o \neq 0$. Neste caso, se E é o sistema de coordenadas afim $\{x;\, x_3 = x_3^o\}$, a restrição $\mathcal{G}_t|_E$ é dada por 1-forma $\omega = B_1(y)dx_1 + B_2(y)dx_2 = 0$ $(y = (x_1, x_2, x_3^o))$, ou ainda pelo campo de de vetores dual $Z(y) = B_2(y)\partial/\partial x_1 - B_1(y)\partial/\partial x_2$. Por outro lado, como o número característico de Z no ponto x_o é diferente de -1 temos

$$\frac{\partial B_2}{\partial x_1}(t_o, x_o) - \frac{\partial B_1}{\partial x_2}(t_o, x_o) = \text{traço}(DZ(x_o)) \neq 0$$

como queríamos. Isto conclui a prova do Teorema 5.6.5 □

Veremos em seguida a prova do Lema 5.6.8.

Prova do Lema 5.6.8. Vamos denotar por $\mathcal{I}$ o ideal gerado por B_1, B_2 e B_3. Em primeiro lugar veremos que a condição (S) do Lema 5.6.8 implica que H está "localmente"em $\mathcal{I}$, ou seja, dado $p_o = (t_o, x_o) \in D \times \mathbb{C}^3$ tal que $x_o \neq 0$, então existem vizinhança U de p_o em $D \times \mathbb{C}^3$ e funções holomorfas $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{O}(U)$ tais que $H|_U = \sum_{j=1}^3 f_j\, B_j$. Em seguida, reduziremos a prova do Lema a um problema de Cousin e utilizaremos um Teorema de H. Cartan para concluir.

Antes de prosseguir, observamos que a relação $H = \sum_{j=1}^3 f_j\, B_j$ é equivalente à seguinte:

$$i_X(\Omega_t) = H$$

onde $X = \sum_{j=1}^3 f_j\, \partial/\partial x_j$. Vamos utilizar a notação $\mathcal{X}(U)$ para o conjunto de campos de vetores holomorfos, do tipo $\sum_{j=1}^3 f_j(t,x).\partial/\partial x_j$, definidos num aberto U de $D \times \mathbb{C}^3$.

Afirmação 5.6.9. *Dado $p_o = (t_o, x_o) \in D \times \mathbb{C}^3$, com $x_o \neq 0$, existem uma vizinhança U de p_o e $X \in \mathcal{X}(U)$ tais que $i_X(\Omega_t) = H|_U$.*

Com efeito, isto é claro no caso em que $x_o \notin \mathrm{sing}(\Omega_{t_o})$ (verifique). Suponhamos então que $x_o \in \mathrm{sing}(\Omega_{t_o})$. Coloquemos $x_o = (x_1^o, x_2^o, x_3^o)$, onde supomos, por exemplo, que $x_3^o \neq 0$. Consideremos o sistema de coordenadas afim E de $\mathbb{C}P(2)$, $E = \{x \in \mathbb{C}^3;\, x_3 = x_o^3\}$. A folheação $\mathcal{G}_{t_o}$ é definida em E pelo campo polinomial $Z(y) = B_2(y)\partial/\partial dx_1 - B_1(y)\partial/\partial x_2$, $y = (t_o, x_1, x_2, x_3^o) \simeq (x_1, x_2)$, o qual possui uma singularidade não degenerada em (x_1^o, x_2^o). Neste caso, o determinante da matriz $DZ(x_1^o, x_2^o)$ é não nulo. Isto implica que a aplicação $F\colon D \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ definida por $F(t,x) = (B_1(t,x), B_2(t,x))$ é uma submersão numa vizinhança de (t_o, x_o). Pelo Teorema das funções implícitas, existe um sistema de coordenadas holomorfo $\phi = (u_1, u_2, u_3, u_4)\colon U \to V \subset \mathbb{C}^4$ tal que $F \circ \phi^{-1}(u) = (u_1, u_2)$, sendo $U \subset \{(t,x);\, x_3 \neq 0\}$. Observemos agora que, se $S = \{(t,x) \in U;\, x \in \mathrm{sing}(\Omega_t)\}$, então $S = \{(t,x) \in U;\, B_1(t,x) = B_2(t,x) = 0\}$. Isto é conseqüência da identidade $x_1.B_1 + x_2.B_2 + x_3.B_3 \equiv 0$, como o leitor pode verificar diretamente. Sendo assim, $\phi(S) \subset \{u;\, u_1 = u_2 = 0\}$. Por outro lado, H se anula em S, logo $H \circ \Phi^{-1}(0,0,u_3,u_4) \equiv 0$, o que implica $H \circ \phi^{-1}(u) = u_1.g_1(u) + u_2.g_2(u)$, onde g_1 e g_2 são funções holomorfas em V. Colocando-se $f_j = g_j \circ \phi$, $j = 1, 2$, obtemos que $H = B_1.f_1 + B_2.f_2 = i_X(\Omega_t)$ em U, onde $X = f_1\partial/\partial x_1 + f_2\partial/\partial x_2 \in \mathcal{X}(U)$, o que prova a afirmação.

Tendo-se em vista a Afirmação 5.6.9, existem uma cobertura $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in J}$ de $M = D \times (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})$ por abertos conexos e uma coleção de campos de vetores holomorfos $\mathcal{V} = (X_j)_{j\in J}$, onde $X_j \in \mathcal{X}(U_j)$, tais que $H|_{U_j} = i_{X_j}(\Omega_t)$ para todo $j \in J$. Dados $i, j \in J$ tais que $U_i \cap U_j = U_{ij} \neq \emptyset$, definimos $X_{ij} = X_j - X_i \in \mathcal{X}(U_{ij})$.

Consideremos agora o campo de vetores

$$Y = (\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3})\partial/\partial x_1 + (\frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1})\partial/\partial x_2 + (\frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2})\partial/\partial x_3$$

em $\mathcal{X}(D \times \mathbb{C}^3)$. Este campo é tal que, se $t \in D$ é fixado, então

$$(*) \ d\Omega_t = i_Y(\nu), \ \nu = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Afirmação 5.6.10. *Existem coleções de funções holomorfas* $\mathcal{G} = (g_{ij})_{U_i \cap U_j \neq \emptyset}$ *e* $\mathcal{H} = (h_{ij})_{U_i \cap U_j \neq \emptyset}$, *sendo* $g_{ij}, h_{ij} \in \mathcal{O}(U_{ij})$, *tais que*
(i) *Se* $U_{ij} \neq \emptyset$ *então* $X_{ij} = g_{ij}.R + h_{ij}.Y$, *onde* R *é o campo radial.*
(ii) $\mathcal{G}$ *e* $\mathcal{H}$ *são cociclos aditivos, isto é, se* $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, *então* $g_{ij} + g_{jk} + g_{ki} = h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} \equiv 0$ *em* U_{ijk}.

Observemos em primeiro lugar que

$$i_R(i_Y(\nu)) = i_R(d\Omega_t) = (n+2).\Omega_t,$$

relação que decorre da prova do Lema 5.6.6. Isto implica o seguinte: se $p = (t, x) \notin \mathrm{sing}(\Omega_t)$, então o espaço tangente no ponto x, à folha de $\pi^*(\mathcal{G}_t)$ que passa por x, é gerado por $R(p)$ e $Y(p)$. Fixemos $i, j \in J$ tais que $U_{ij} \neq \emptyset$. Como $i_{X_{ij}}(\Omega_t) = 0$, o campo X_{ij} é tangente a $\pi^*(\mathcal{G}_t)$ nos pontos $(t, x) \notin \mathrm{sing}(\Omega_t)$. Isto implica que existem funções g_{ij} e h_{ij}, holomorfas em $U_{ij} \setminus \mathrm{sing}(\Omega_t)$ tais que $X_{ij} = g_{ij}.R + h_{ij}.Y$. Como $\mathrm{sing}(\Omega_t)$ tem codimensão 2, as funções g_{ij} e h_{ij} se estendem a U_{ij}. Suponhamos agora que $U_{ijk} \neq \emptyset$. Como $X_{ij} = X_j - X_i$, temos

$$0 = X_{ij} + X_{jk} + X_{ki} = (g_{ij} + g_{jk} + g_{ki}).R + (h_{ij} + h_{jk} + h_{ki}).Y \ ,$$

em U_{ijk}. Por outro lado, como R e Y são linearmente independentes em $U_{ijk} \setminus \mathrm{sing}(\Omega_t)$, obtemos (ii), o que prova a Afirmação.

Vamos agora utilizar o seguinte Teorema de H. Cartan (veja [19]):

Teorema 5.6.11 (Teorema de Cartan)**.** *Sejam* P *e* Q *polidiscos em* $\mathbb{C}^m$ *e* $\mathbb{C}^n$ *respectivamente, onde* $n \geq 3$ *e* $0 \in Q$. *Então o primeiro problema de Cousin tem solução em* $M = P \times (Q \setminus \{0\})$. *Em outras palavras, dadas uma cobertura* $\mathcal{U} = (U_j)_{j \in J}$ *de* M *por abertos e um cociclo aditivo* $(g_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset}$ $(g_{ij} \in \mathcal{O}(U_{ij}))$, *existe uma coleção* $(g_j)_{j \in J}$, *com* $g_j \in \mathcal{O}(U_j)$, *tal que, se* $U_{ij} \neq \emptyset$, *então* $g_{ij} = g_j - g_i$ *em* U_{ij}.

Aplicando o Teorema de Cartan aos cociclos $(g_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset}$ e $(h_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset}$ obtidos acima, podemos afirmar que existem coleções $(g_j)_{j \in J}$ e $(h_j)_{j \in J}$, com $g_j, h_j \in \mathcal{O}(U_j)$, tais que $g_{ij} = g_j - g_i$ e $h_{ij} = h_j - h_i$ em U_{ij}. Consideremos o campo de vetores $Z_j = X_j - g_j\, R - h_j\, Y \in \mathcal{X}(U_j)$. Observe que, se $U_{ij} \neq \emptyset$, então $Z_j|_{U_{ij}} = Z_i|_{U_{ij}}$. Isto implica que podemos definir um campo de vetores holomorfo Z em $D \times (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})$ colocando $Z|_{U_j} = Z_j$. Pelo Teorema de Hartogs, este campo se estende a um campo holomorfo em $D \times \mathbb{C}^3$, o qual designaremos também por Z. Este campo Z satisfaz $i_Z(\Omega_t) = H$, já que em U_j temos $i_Z(\Omega_t) = i_{X_j}(\Omega_t) = H$.

Para finalizar, consideremos o desenvolvimento de Taylor de Z,

$$Z(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t,x)$$

onde $Z_k(t,x)$ é um campo holomorfo em (t,x) e cujos coeficientes são polinômios homogêneos de grau k em x. Observe que

$$H = i_Z(\Omega_t) = \sum_{k=0}^{\infty} i_{Z_k}(\Omega_t) \quad \Longrightarrow$$

$$i_{Z_k}(\Omega_t) = 0 \text{ se } k \neq m-n-1 \text{ e } i_{Z_k}(\Omega_t) = H \text{ se } k = m-n-1,$$

como o leitor pode verificar comparando os termos homogêneos de ambos os membros. Portanto, se $Z_k = F_1\partial/\partial x_1 + F_2\partial/\partial x_2 + F_3\partial/\partial x_3$, então $H = \sum_{j=1}^{3} F_j\, B_j$, como queríamos. Isto termina a prova do Lema 5.6.8 e do Teorema 5.6.5. □

5.7 Generalizações

O Teorema de Ilyashenko (Teorema 5.1.6) admite vários tipos de generalização. Dentre elas cumpre destacar as obtidas em [36] e [59]. Em [36] o Teorema 5.1.6é generalizado para folheações em superfícies complexas compactas que admitem uma curva compacta invariante fixada. Em [59] prova-se que o Teorema 5.1.6é válido para uma classe aberta e densa de folheações $\mathcal{F} \in \mathcal{X}(n)$.

Teorema 5.7.1. *[59] Fixado um sistema afim de coordenadas $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P(2)$ e um inteiro $n \geq 2$, existe um subconjunto aberto e denso $M_1(n) \subset \mathcal{X}(n)$ tal que se $\mathcal{F} \in M_1(n)$ então:*

(i) *$L_\infty = \mathbb{C}P(2)\backslash\mathbb{C}^2$ é a única solução algébrica de $\mathcal{F}$.*
(ii) *As singularidades de $\mathcal{F}$ são hiperbólicas.*
(iii) *Toda deformação analítica topologicamente trivial de $\mathcal{F}$ é analiticamente trivial.*

Na prova deste resultado são utilizados o Teorema 5.2.1 e o Teorema de Nakai [67] que estabelece rigidez topológica e densidade de pseudo-órbitas para grupos não solúveis de germes de difeomorfismos locais de $(\mathbb{C},0)$. Em seguida daremos uma idéia dos principais passos da sua demonstração segundo [LN-Sc-PS]. Começamos enunciando o Teorema de Nakai:

Teorema 5.7.2 ([67]). *Seja $G \subset Dif(\mathbb{C},0)$ um subgrupo não solúvel. Então:*
(1) A bacia de atração B_G de G [1] *é uma vizinhança aberta da origem.*
(2) Existem um aberto D contendo $0 \in \mathbb{C}$ e um conjunto finito de curvas analíticas reais contendo $0 \in \mathbb{C}$, digamos $\gamma_1,...,\gamma_r$, de tal forma que $D \setminus \cup_{j=1}^{r}\gamma_j$ consiste de $2r$ setores $D_1,...,D_{2r}$, com as seguintes propriedades:
(a) *Para todo $z \in D_j$ a pseudo-órbita de z por G é densa em D_j.*
(b) *Para todo $z \in \gamma_j$ a pseudo-órbita de z por G é densa em γ_j.*

(3) Se $G_1 \subset Dif(\mathbb{C},0)$ é um pseudo-grupo topologicamente conjugado a G por um homeomorfismo $f\colon (V,0) \to (W,0)$, entre vizinhanças abertas da origem $0 \in \mathbb{C}$, que preserva a orientação, então f é um biholomorfismo. Em particular G é topologicamente rígido.

Utiliza-se também um resultado análogo à Proposição 6.6.2:

Teorema 5.7.3. *[[59]] Se $\mathcal{F} \in M(n)$ então a holonomia de L_∞ não é solúvel.*

Fixemos então $\mathcal{F}_o \in M(n)$ e $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{D}}$ uma deformação analítica de $\mathcal{F}_o$. Usando-se as mesmas técnicas do §6 podemos construir uma folheação analítica $\tilde{\mathcal{F}}$ em $\mathbb{D} \times \mathbb{C}P(2)$, cujas folhas contém as folhas de cada $\mathcal{F}_t$, e obter (via o Teorema 6.4.9) uma trivialização analítica para $\tilde{\mathcal{F}}$.

5.8 Exercícios do Capítulo 5

1. Prove a afirmação (d) da Proposição 5.2.2.
2. Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{X}(n)$. Suponha que as singularidades de $\mathcal{F}$ são não degeneradas. Prove que $\#(\operatorname{sing}\mathcal{F} \cap L_\infty) = n+1$ e $\#(\operatorname{sing}(\mathcal{F}) \cap \mathbb{C}^2) = n^2$.
3. Prove que uma equivalência topológica entre dois germes de folheação, digamos $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, em vizinhanças de $0 \in \mathbb{C}^2$, leva separatrizes de $\mathcal{F}_1$ em separatrizes de $\mathcal{F}_2$.
Sugestão: Use o Teorema de Remmert-Stein (§1 do Capítulo 3)e os seguintes fatos:

(a) Se U é uma vizinhança pequena da singularidade 0, então uma separatriz S de $\mathcal{F}_1$ em U, é um subconjunto analítico de U tal que $S \setminus \{0\}$ é uma folha de $\mathcal{F}_1$.

(b) A imagem de $S \setminus \{0\}$ pela equivalência é uma folha de $\mathcal{F}_2$.

4. Prove a versão paramétrica do Lema 5.3.5.
Sugestão: Seja $(f_t)_{t\in\mathbb{D}}$ como no Lema 5.3.5. Considere a seqüência $(h_k)_{k\geq 1}$ definida por $h_k(t,z) = (\lambda(t))^{-k}.f_t^k(z)$. Prove que esta seqüência é uniformemente convergente nas partes

[1] A bacia de atração é o conjunto de pontos z para os quais o fecho da pseudo-órbita correspondente por G contém a origem.

compactas (de um certo aberto de $\mathbb{C}^2$) (veja a prova do Lema 6.3.12).

5. Prove que a fórmula (**), utilizada na prova da Proposição 5.2.4, pode ser deduzida da fórmula (***) utilizada na prova do Teorema 3.1.8 do Capítulo 3.

6. Prove as afirmações abaixo:
(a) $M(n) \setminus M_1(n)$ é subconjunto analítico real de $M(n)$.
(b) $M_1(n)$ é denso em $M(n)$.

7. Prove o Lema 5.3.11.
Sugestão: Use o recobrimento $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ dado pela aplicação exponencial $z \mapsto \exp(z)$).

8. Sejam U, V, W abertos de $\mathbb{C}$, $h\colon U \to V$ uma aplicação contínua e $\psi\colon V \to W$ uma aplicação holomorfa não constante. Suponha que $\phi = \psi \circ h$ é holomorfa. Prove que h é holomorfa.

9. Prove que a aplicação $\Lambda\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}^2$, definida como na prova da Proposição 5.4.2, é uma submersão.

10. (a) Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Escreva $\lambda_2 = a + b.\lambda_1$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Suponha que $a, b, b/a \notin \mathbb{Q}$. Prove que o subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$ gerado por $1, \lambda_1$ e λ_2 é denso em $\mathbb{C}$.
(b) Prove que o conjunto abaixo é genérico (intersecção enumerável de abertos e densos) em $\mathbb{C}^2$:

$$\{(\lambda_1, \lambda_2);\ \text{o subgrupo aditivo de}\,\mathbb{C}\,\text{gerado por}\,1, \lambda_1\,\text{e}\,\lambda_2\text{é denso em}\mathbb{C}\}.$$

11. Seja $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{D}}$ uma deformação analítica topologicamente trivial de uma folheação $\mathcal{F}_o \in I_n$.
(a) Prove que para todo $t_o \in \mathbb{D}$ existe $r > 0$ tal que $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in D(t_o,r)}$ é holomorficamente trivial.
(b) Prove que a deformação é holomorficamente trivial.

12. Seja X um campo de vetores polinomial em $\mathbb{C}^2$. Prove que as órbitas (não constantes) de X não são limitadas em $\mathbb{C}^2$.

13. Sejam $\overline{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ folheações não singulares numa variedade complexa M de dimensão n. Suponha que:
(a) $\overline{\mathcal{F}}$ é folheação holomorfa de dimensão um complexa.
(b) $\tilde{\mathcal{F}}$ é folheação de classe C^0 de dimensão real $2k$, onde $2 \le k \le n-1$.
(c) Existe um aberto $U \subset M$ tal que $\tilde{\mathcal{F}}|_U$ é folheação holomorfa de dimensão k (complexa).
(d) As folhas de $\overline{\mathcal{F}}$ estão contidas nas folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$.
Prove que $\tilde{\mathcal{F}}$ é folheação holomorfa no seguinte aberto de M:

$$sat_{\overline{\mathcal{F}}}(U) = \{p \in M;\ \text{a folha de}\,\overline{\mathcal{F}}\,\text{por}\,p\,\text{corta}\,U\}$$

Capítulo 6

Folheações transversalmente afins e transversalmente projetivas

6.1 Estruturas transversais de folheações

Neste capítulo estudaremos folheações holomorfas do ponto de vista de sua *estrutura transversal.* A grosso modo, tal estrutura é definida pelo modo como se "colam"as trivializações locais da folheação, do mesmo modo que para uma variedade diferenciável sua classe (módulo difeomorfismos) é definida pelos cociclos de mudanças de coordenadas associados a um atlas da variedade. No que se segue, introduzimos de modo mais preciso estas noções, começando com a noção de folheação transversalmente homogênea.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa singular de codimensão q, $q \geq 1$, em uma variedade complexa M, com conjunto singular $\operatorname{sing}\mathcal{F}$ de codimensão ≥ 2. Consideremos $M' = M \setminus \operatorname{sing}\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\big|_{M'}$, a folheação não singular associada. Então M' pode ser coberta por abertos U_i, $i \in I$; onde estão definidas submersões holomorfas $f_i \colon U_i \subset M \to \mathbb{C}^q$ tais que as folhas de $\mathcal{F}'\big|_{U_i} = \mathcal{F}\big|_{U_i}$ são as componentes conexas das curvas de nível $f_i^{-1}(x)$, de f_i, $\forall\, i \in I$. Se $U_i \cap U_j \neq \phi$, então $f_i = f_{ij} \circ f_j$ para algum biholomorfismo local

$$f_{ij} \colon f_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^q \longrightarrow f_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^q.$$

Se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \phi$, então no domínio comum, a condição de cociclo é satisfeita:

$$f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}.$$

O pseudogrupo $\{f_{ij} \colon f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)\}_{i,j \in I}$ define a *estrutura transversal* de $\mathcal{F}$ em M. Intuitivamente, $\mathcal{F}$ tem uma estrutura transversal "simples", se o pseudogrupo acima pode ser escolhido com elementos num subgrupo do grupo de transformações de uma variedade especificada. O significado preciso da expressão "simples" acima, é dado pela noção de *estrutura transversal homogênea*, que passamos a descrever: Primeiro substituímos $\mathbb{C}^q$ por uma variedade complexa q-dimensional N, de modo que as submersões f_i tomam valores em abertos de N, $f_i\colon U_i \to N$. Desta forma, a estrutura transversal de $\mathcal{F}$ é um pseudogrupo de biholomorfismos entre abertos de N. Denotemos por $\mathrm{Bih}(N)$ o grupo de biholomorfismos de N.

Definição 6.1.1. Dizemos que a folheação $\mathcal{F}$ é *transversalmente homogênea*, com estrutura num grupo de Lie G, se existe uma ação $\Phi\colon G \times N \to N$ tal que: (a) Para todo $g \in G$, a aplicação $\Phi_g\colon N \to N$, definida por $\Phi_g(p) = \Phi(g, p)$, é um biholomorfismo de N.
(b) A aplicação $g \in G \mapsto \Phi_g \in \mathrm{Bih}(N)$ é um homomorfismo (de grupos) injetor.
(c) Todo biholomorfismo da estrutura transversal de $\mathcal{F}$ é restrição a um aberto de N, de uma aplicação da forma Φ_g, para algum $g \in G$.

Por (b), podemos pensar que G é um subgrupo de $\mathrm{Bih}(N)$. Desta forma, denotaremos o elemento Φ_g por g simplesmente.

Um exemplo típico, é quando N é um espaço homogêneo, $N = G/H$, onde H é um subgrupo fechado (logo subgrupo de Lie) de G. Nesta situação diremos que $\mathcal{F}$ é *transversalmente homogênea de modelo G/H* em M se $f_{ij} \in G \subset \mathrm{Bih}(N)$, $\forall\, i, j$.

Assim, por exemplo, o *grupo afim* $\mathrm{Af}(\mathbb{C}^q) = \mathcal{G}L_q(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^q$ age em $\mathbb{C}^q$ de modo natural:

$$(\mathrm{GL}_q(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^q) \times \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^q \quad ((A, B), Z) \mapsto A \cdot Z + B.$$

O subgrupo de isotropia da origem $0 \in \mathbb{C}^q$ é $\mathrm{GL}_q(\mathbb{C})$, de modo que $\mathbb{C}^q$ pode ser identificado com o espaço homogêneo $\mathrm{Af}(\mathbb{C}^q)/\mathrm{GL}_q(\mathbb{C})$.

As folheações transversalmente homogêneas de modelo $\mathrm{Af}(\mathbb{C}^q)/\mathrm{GL}_q(\mathbb{C})$ são chamadas *folheações transversalmente afins* e desempenham um papel fundamental neste estudo. Na maior parte do tempo estaremos considerando folheações de codimensão 1. Neste caso existe uma outra estrutura transversal homogênea importante que descrevemos abaixo:

Considere o *grupo unimodular*, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, isto é, o grupo das matrizes complexas 2×2 de determinante 1 e denote por $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ sua projetivização, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$. O grupo de Lie $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ age em $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P(1)$ pelas transformações de Möbius

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \times \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}, \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

O subgrupo de isotropia do infinito, $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ é $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \,\middle|\, c = 0 \right\} \cong \mathrm{Af}(\mathbb{C})$ e assim $\overline{\mathbb{C}} = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})/\mathrm{Af}(\mathbb{C})$ é o espaço homogêneo associado. As folheações transversalmente homogêneas de modelo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})/\mathrm{Af}(\mathbb{C})$ são chamadas *folheações transversalmente projetivas.*

Investigaremos o quão freqüentes são estas estruturas (afim e projetiva). Começaremos pela estrutura afim.

6.2 Folheações transversalmente afins

Nesta seção $\mathcal{F}$ denota uma folheação holomorfa singular de codimensão 1 em uma variedade complexa n-dimensional M, com conjunto singular $\operatorname{sing}\mathcal{F}$ de codimensão ≥ 2. Tal folheação pode ser dada fora do seu conjunto singular por um atlas de submersões holomorfas $y_i\colon U_i \to \mathbb{C}$ tais que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $y_i = g_{ij}(y_j)$, para algum biholomorfismo g_{ij} entre abertos de $\mathbb{C}$.

Definição 6.2.1. Dizemos que $\mathcal{F}$ é *transversalmente afim*, se é possível escolher um atlas de submersões como acima $\{y_i\colon U_i \to \mathbb{C}\}_{i\in I}$, definindo $\mathcal{F}$ em $M\backslash \operatorname{sing}\mathcal{F}$, cujas mudanças de cartas são afins, isto é, $y_i = a_{ij}y_j + b_{ij}$ para cada $U_i \cap U_j \neq \phi$, onde a_{ij}, b_{ij} são constantes.

O problema de decidir se existem estruturas afins para uma dada folheação, em certos casos, é equivalente a um problema em formas diferenciais, como mostra o resultado seguinte:

Proposição 6.2.2. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão um numa variedade complexa M. Suponha que $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma forma meromorfa, isto é, que existe uma 1-forma integrável meromorfa Ω, que define $\mathcal{F}$ fora de seu divisor de pólos, $(\Omega)_\infty$. A folheação $\mathcal{F}$ é transversalmente afim no aberto $U = M \setminus \operatorname{sing}(\mathcal{F})$ se, e somente se, existe uma 1-forma meromorfa η em M satisfazendo às seguintes propriedades:*
(a) *η é fechada.*
(b) $d\Omega = \eta \wedge \Omega$.
(c) $(\eta)_\infty = (\Omega)_\infty$.
(d) *A ordem do polo de η ao longo de qualquer componente irredutível de $(\eta)_\infty$ é um.*
(e) *Para toda componente irredutível L de $(\Omega)_\infty$, temos $\operatorname{Res}(\eta, L) = -(\text{ordem de}\,(\Omega)_\infty\big|_L)$*

Além disso, dois pares (Ω, η) e (Ω', η') definem a mesma estrutura afim para $\mathcal{F}$ em U se, e somente se, existe uma função meromorfa $g\colon M \to \overline{\mathbb{C}}$ satisfazendo $\Omega' = g.\Omega$ e $\eta' = \eta + \frac{dg}{g}$ em U.

Demonstração. Seja Ω uma 1-forma meromorfa que define $\mathcal{F}$ em M. Suponha que $\mathcal{F}|_U$ possui uma estrutura transversal afim. Seja $\{y_i\colon U_i \to \mathbb{C}\}_{i\in I}$ um atlas de submersões em U, cujas mudanças de cartas são afins, isto é, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $y_i = a_{ij}y_j + b_{ij}$.

Como as submersões y_i definem $\mathcal{F}$ localmente, podemos escrever $\Omega\big|_{U_i} = g_i\, dy_i$ para alguma função meromorfa g_i. Note que g_i não pode se anular em U_i, uma vez que $U \cap \operatorname{sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$. Em $U_i \cap U_j \neq \phi$ temos:
(1) $\quad g_i\, dy_i = g_j\, dy_j$; (2) $\quad y_i = a_{ij}\, y_j + b_{ij}$.

A partir de (2) obtemos que $dy_i = a_{ij}\, dy_j$. Segue então de (1) que $a_{ij}\, g_i = g_j$. Logo $dg_i/g_i = dg_j/g_j$ em $U_i \cap U_j$. Isto nos permite definir uma forma meromorfa η em U por $\eta\big|_{U_i} = dg_i/g_i$. A 1-forma η é fechada, meromorfa e satisfaz $d\Omega = \eta \wedge \Omega$. Como $\operatorname{cod}(\operatorname{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$, pelo Teorema de Extensão de Levi (veja o Apêndice), a forma η pode ser estendida a uma forma meromorfa em M, a qual denotamos ainda por η.

Provemos (c). Para isto, observe que $\eta|_{U_i} = dg_i/g_i$, logo os pólos de η em U_i coincidem com os pólos de g_i (uma vez que g_i não se anula em U_i). Como os pólos de Ω em U_i também coincidem com os pólos de g_i, vemos que $(\eta)_\infty \cap U_i = (\Omega)_\infty \cap U_i$, para todo $i \in I$. Isto implica que $(\eta)_\infty \cap U = (\Omega)_\infty \cap U$. Como $M \setminus U = \mathrm{sing}(\mathcal{F})$, obtemos que $(\eta)_\infty = (\Omega)_\infty$ (já que $\mathrm{cod}(\mathrm{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$). Para provar (d) e (e), é suficiente observar que, se L_i é uma componente irredutível do conjunto de pólos de g_i, então a ordem de L_i como polo de dg_i/g_i é um e o resíduo de dg_i/g_i ao longo de L_i é a ordem de L_i como polo de g_i, a qual coincide com a ordem de L_i como polo de Ω. De fato, seja $p \in (\Omega)_\infty \cap U_i$, um ponto liso de $(\Omega)_\infty$, digamos $p \in L$, onde L é uma componente irredutível de $(\Omega)_\infty$. Seja $x\colon W \to \mathbb{C}$ uma submersão holomorfa definida numa vizinhança $W \subset U_i$ de p tal que $x^n.\Omega$ é holomorfa em W, onde n é a ordem de L como polo de Ω. Vemos que $x^n.\Omega = x^n.g_i\, dy_i = g\, dy_i$ em W, onde g é holomorfa em W e $g(p) \neq 0$. Diminuindo W, se necessário, podemos supor que $g \in \mathcal{O}^*(W)$. Da construção temos

$$\Omega|_W = x^{-n}.g\, dy \quad \text{e} \quad \eta|_W = \frac{d(x^{-n}.g)}{x^{-n}.g} = -\frac{ndx}{x} + \frac{dg}{g}\,.$$

Como $g \in \mathcal{O}^*(W)$, segue que a ordem de η ao longo de L é -1 e que $\mathrm{Res}_L\, \eta = -n$, como queríamos.

Suponhamos agora que existe η como no enunciado e provemos que $\mathcal{F}$ possui uma estrutura transversal afim em $U = M \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$. A idéia é provar que existe uma cobertura $\{U_i\}_{i\in I}$ de U por abertos e uma coleção $\{g_i\}_{i\in I}$ tais que:

(i) U_i é simplesmente conexo e se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $U_i \cap U_j$ é conexo.

(ii) g_i é uma função meromorfa em U_i.

(iii) $\eta|_{U_i} = \frac{dg_i}{g_i}$.

(iv) $\frac{\Omega}{g_i}$ se estende a uma forma holomorfa que não se anula em U_i.

Vejamos como podemos provar a existência da estrutura afim a partir dos objetos acima. Em primeiro lugar, observe que

$$d(\frac{\Omega}{g_i}) = \frac{1}{g_i}(d\Omega - \frac{dg_i}{g_i} \wedge \Omega) = \frac{1}{g_i}(d\Omega - \eta \wedge \Omega) = 0.$$

Como $\frac{\Omega}{g_i}$ é holomorfa e U_i é simplesmente conexo, existe uma função $y_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tal que $\Omega|_{U_i} = g_i\, dy_i$. Observe que y_i é submersão, uma vez que $dy_i = \frac{\Omega}{g_i}$ não se anula. Por outro lado, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ temos $\frac{dg_i}{g_i} = \eta = \frac{dg_i}{g_j}$ e $g_i\, dy_i = \Omega = g_j\, dy_j$. A primeira igualdade implica $g_j = a_{ij}.g_i$ para alguma constante não nula a_{ij}. A segunda igualdade implica que $dy_i = a_{ij}\, dy_j$, ou seja, que $y_i = a_{ij}\, y_j + b_{ij}$, onde b_{ij} é constante. Isto mostra que $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em U.

Construiremos em seguida a cobertura $\{U_i\}_i$ e a coleção $\{g_i\}_i$. Fixemos primeiramente um ponto $p \in U \setminus (\Omega)_\infty$. Como η é holomorfa e fechada em $U \setminus (\Omega)_\infty$, dada uma vizinhança simplesmente conexa de p, $W \subset U \setminus (\Omega)_\infty$, existe uma função $h \in \mathcal{O}(W)$ tal que $\eta\big|_W = dh$. Definimos $g = \exp(h)$, de forma que $g \in \mathcal{O}^*(U)$. Note que $\eta\big|_W = dg/g$ e que g satisfaz às propriedades (ii) e (iii). Por outro lado, como Ω define $\mathcal{F}$ em $U \setminus (\Omega)_\infty$, g também satisfaz (iv).

Fixemos agora um ponto $p \in U \cap (\Omega)_\infty$. Como $p \notin \operatorname{sing}(\mathcal{F})$, existe uma carta holomorfa $\phi = (x, z)\colon W \to \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ tal que W é simplesmente conexo e $\mathcal{F}\big|_W$ é definida por $dz = 0$. Como Ω define $\mathcal{F}$ em $W \setminus (\Omega)_\infty$, temos $\Omega\big|_W = k.dz$, onde k é uma função meromorfa em W que não se anula. Por outro lado,

$$d\Omega = \frac{dk}{k} \wedge \Omega = \eta \wedge \Omega \implies \eta = \frac{dk}{k} + h.dz,$$

onde h é uma função meromorfa que só depende de z, uma vez que η é fechada. Afirmamos que h é de fato holomorfa em W. Para provar esta afirmação, basta demonstrar que h é holomorfa numa vizinhança de qualquer ponto $q \in (\Omega)_\infty \cap W$. De fato, basta provarmos isto para os pontos não singulares de $(\Omega)_\infty \cap W$, já que o conjunto dos pontos singulares de $(\Omega)_\infty \cap W$ tem codimensão maior ou igual a dois em W. Fixemos então um ponto q não singular em $(\Omega)_\infty \cap W$. Isto significa que numa vizinhança $B \subset W$ de q, $B \cap (\Omega)_\infty$ pode ser definida por $w = 0$, onde $w\colon B \to \mathbb{C}$ é uma submersão. Seja n a ordem de $(w = 0)$ como polo de Ω. Como $\Omega\big|_B = k.dz$, podemos escrever $k = u/w^n$, onde $u \in \mathcal{O}^*(B)$. Ora,

$$h.dz = \eta - \frac{dk}{k} = \eta + n\frac{dw}{w} - \frac{du}{u},$$

logo h é holomorfa em B por (d) e (e) da hipótese. Isto prova a afirmação. Seja H uma primitiva de $h(z)dz$ e coloquemos $g = k.exp(H)$. Observe que g é meromorfa, $\frac{\Omega}{g} = exp(-H)dz$ e $\frac{dg}{g} = \eta\big|_W$, logo g satisfaz (ii), (iii) e (iv). Podemos então obter uma cobertura de V por abertos simplesmente conexos e a coleção de funções meromorfas satisfazendo (ii), (iii) e (iv). A propriedade (i) ($U_i \cap U_j$ conexo), pode ser obtida tomando um refinamento conveniente da primeira cobertura. Deixamos os detalhes para o leitor.

Provaremos agora a última parte de Proposição 6.2.2. Sejam (Ω, η) um par dado e $g\colon M \to \overline{\mathbb{C}}$ uma função meromorfa, como no enunciado. Coloquemos $\Omega' = g\Omega$ e $\eta' = \eta + \frac{dg}{g}\big|_U$. Usando a mesma notação de antes temos que $\eta'\big|_{U_i} = \eta\big|_{U_i} + \frac{dg}{g} = \frac{dg_i}{g_i} + \frac{dg}{g} = \frac{d(g_i g)}{(g_i\, g)} = \frac{dg'_i}{g'_i}$ e $\Omega'\big|_{U_i} = g.\Omega\big|_{U_i} = (gg_i)dy_i = g'_i dy_i$, e isto mostra que:

$$g'_i = a_{ij}\, g'_j \quad \text{e} \quad y'_i = y_i \quad \text{de modo que} \quad a'_{ij} = a_{ij}$$

e $b'_{ij} = b_{ij}$. Assim, os pares (Ω, η) e (Ω', η') definem a mesma estrutura transversal para $\mathcal{F}$ em U. Finalmente, suponha que (Ω, η) e (Ω', η') definem a mesma estrutura transversal para $\mathcal{F}$ em U. Como Ω e Ω' definem $\mathcal{F}$ (fora dos seus pólos), temos que $\Omega' = g\Omega$ para alguma função meromorfa g em M. Usando a mesma notação de sempre, escrevemos localmente $\Omega = g_i\, dy_i$, $\Omega' = g_i'\, dy_i$, $\eta = dg_i/g_i$ e $\eta' = dg_i'/g_i'$; mas $g_i' = gg_i$, logo $\eta' = \eta + dg/g$ completando a prova da Proposição 6.2.2. $\square$

A seguir veremos alguns exemplos de folheações com estrutura transversal afim.

Exemplo 6.2.3 (Folheações transversalmente afins em variedades simplesmente conexas)**.** Sejam M uma variedade complexa simplesmente conexa e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão um em M com conjunto singular de codimensão maior ou igual a dois. Então $\mathcal{F}$ possui uma estrutura transversal afim se, e somente se, possui uma integral primeira holomorfa $f\colon M \to \mathbb{C}$, a qual é uma submersão fora de $\operatorname{sing}(\mathcal{F})$.

De fato, isto é uma conseqüência da noção de *desenvolvimento* de uma folheação transversalmente homogênea (veja [35] Prop. 3.3 pp.247-248), a qual descrevemos sucintamente abaixo.

Como $\operatorname{cod}(\operatorname{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$, a variedade $V = M \setminus \operatorname{sing}(\mathcal{F})$ é simplesmente conexa (veja [27] para um estudo da noção de grupo fundamental). Suponhamos que $\mathcal{F}$ tem uma estrutura homogênea com estrutura num grupo de Lie $G \subset \operatorname{Bih}(N)$. Isto significa que podemos obter uma cobertura de V por abertos conexos $\{U_i\}_{i\in I}$, uma coleção de submersões $\{y_i\colon U_i \to N\}_{i\in I}$ e uma coleção $\{g_{ij}\}_{U_i\cap U_j\neq\emptyset}$ de elementos em G, tais que as folhas de $\mathcal{F}$ em U_i são as componentes conexas dos conjuntos $y_i^{-1}(cte)$ e $y_i = g_{ij} \circ y_j$ em $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Observe que $\{g_{ij}\}_{U_i\cap U_j\neq\emptyset}$ é um cociclo, isto é, satisfaz às seguintes propriedades:

(a) $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

(b) $g_{ij} \circ g_{jk} \circ g_{ki} = id_N$, se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

A idéia é provar que o cociclo é trivial, isto é, que existe uma coleção $\{g_i\}_{i\in I}$ de elementos de G, tais que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $g_{ij} = g_i^{-1} \circ g_j$. Isto implicará que existe uma submersão $y\colon V \to N$ tal que $y\big|_{U_i} = g_i \circ y_i$. Esta submersão será uma "integral primeira"de $\mathcal{F}$, no sentido que as folhas de $\mathcal{F}$ serão as componentes conexas dos conjuntos $y^{-1}(cte)$.

Veremos agora qual a idéia da construção dos g_{is}. Em primeiro lugar escolhemos um ponto $q_i \in U_i$ para cada $i \in I$. Fixemos $i_o \in I$. Dado $i \in I$, fixemos um caminho $\alpha\colon [0,1] \to V$ tal que $\alpha(0) = q_{i_o}$ e $\alpha(1) = q_i$. Seja agora $J = \{i_o, i_1, ..., i_k = i\} \subset I$ tal que:

(i) $\{U_{i_o}, U_{i_1}, ..., U_{i_k}\}$ é uma cobertura de $\alpha([0,1])$.

(ii) Existe uma partição $(0 = t_o < t_1 < ... < t_k < t_{k+1} = 1)$ de $[0,1]$ tal que $\alpha([t_j, t_{j+1}]) \subset U_j$ para todo $j = 0, 1, ..., k$.

Definimos então $g_{i_o} = id_N$ e $g_i = g_{\alpha,J} = g_{i_o i_1} \circ g_{i_1 i_2} \circ ... \circ g_{i_{k-1} i_k}$. As condições (a) e (b) de cociclo, implicam que a definição de $g_{\alpha,J}$ não depende de $J \subset I$ que satisfaz (i) e (ii), só dependendo em princípio da curva α (verifique). Colocamos então $g_{\alpha,J} = g_\alpha$. Fixemos uma métrica d em M. Dados dois caminhos α_1 e α_2 em M defina $d(\alpha_1, \alpha_2) = sup\{d(\alpha_1(t), \alpha_2(t));\, t \in [0,1]\}$. É claro da construção de g_α a partir da curva α, que existe $\epsilon > 0$ tal que se β é outra curva ligando q_{i_o} a q_i com $d(\alpha, \beta) < \epsilon$, então β satisfaz (i) e (ii) acima (verifique), ou seja, que

$g_\alpha = g_\beta$. Isto implica que se γ é uma outra curva ligando q_{i_o} a q_i, homotópica a α com extremos fixos, então $g_\alpha = g_\gamma$. Ora, como V é simplesmente conexo, obteremos desta forma que g_α só depende de fato do ponto final de α, ou seja de $i \in I$. Colocamos então $g_i = g_\alpha$. Fixemos $i, j \in I$ tais $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Não é difícil ver que podemos obter $J = \{i_o, ..., i_{k-1}, i_k\} \subset I$, satisfazendo (i), (ii) e tal que $i_{k-1} = i$ e $i_k = j$. Temos então que

$$g_j = g_{i_o i_1} \circ ... \circ g_{i_{k-2} i_{k-1}} \circ g_{i_{k-1} i_k} = g_i \circ g_{ij},$$

como queríamos.

No caso em que a estrutura transversal é afim, temos $N = \mathbb{C}$, logo podemos obter uma integral primeira de $\mathcal{F}$, $f \colon V \to \mathbb{C}$, a qual é uma submersão. O Teorema de Hartogs implica que esta integral primeira se estende holomorficamente a M, uma vez que $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$.

Um caso particular é o de uma folheação $\mathcal{F}$ num polidisco $P \subset \mathbb{C}^2$ com uma única singularidade em $0 \in P$. Neste caso, a existência de uma estrutura transversal afim para $\mathcal{F}$ em $P \setminus \{0\}$, implica que esta singularidade tem uma integral primeira em P e é portanto de *primeira ordem*, ou seja, a singularidade é uma "curva generalizada"(veja [13]), é não dicrítica e o seu processo de resolução não exibe selas-nós.

No caso em que $\mathcal{F}$ é dada por uma 1-forma holomorfa integrável Ω em M, podemos dar uma outra prova dos fatos acima, utilizando a Proposição 6.2.2:

Com efeito, por esta proposição, se $\mathcal{F}$ é transversalmente afim existe uma forma fechada holomorfa η tal que $d\Omega = \eta \wedge \Omega$. Como M é simplesmente conexa podemos escrever $\eta = \frac{dg}{g}$ para alguma função holomorfa $g \colon M \to \mathbb{C}^*$. A condição $d\Omega = \eta \wedge \Omega$ implica então que $d\left(\frac{\Omega}{g}\right) = 0$ de modo que $\Omega = g\,df$ para alguma função holomorfa $f \colon M \to \mathbb{C}$. Como $\text{sing}(\Omega)$ tem codimensão ≥ 2 segue que f é uma submersão fora de $\text{sing}(\mathcal{F})$. $\square$

Como um conseqüência obtemos:

Proposição 6.2.4. *Não existe folheação transversalmente afim em $\mathbb{C}P(n)$.*

Demonstração. De fato, $\mathbb{C}P(n)$ é simplesmente conexo e, como é compacto, não admite função holomorfa não constante. $\square$

Exemplo 6.2.5. Seja $\Phi \colon N \to M$ uma função holomorfa transversal à folheação $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ é transversalmente afim então o mesmo vale para a folheação induzida $\Phi^*\mathcal{F}$. Isto se verifica facilmente tomando-se as submersões locais que definem a estrutura afim para $\mathcal{F}$ e compondo-as com Φ, para definir uma estrutura afim para $\Phi^*\mathcal{F}$.

Exemplo 6.2.6 (Folheações logarítmicas em $\mathbb{C}P(n)$)). Uma folheação logarítmica $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(n)$, é uma folheação definida em coordenadas homogêneas por uma forma do tipo $\Omega = \prod_{i=1}^{m} f_i \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} = 0$, onde $f_1, ..., f_m$ são polinômios homogêneos em $\mathbb{C}^{n+1}$ e $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j d_j = 0$, sendo d_j o grau de f_j (veja a Seção 5 do Capítulo 2). Observe que, se $\eta = \sum_{j=1}^{m} \frac{df_j}{f_j}$, então $d\Omega = \eta \wedge \Omega$.

Tomando coordenadas afins $\mathbb{C}^n \simeq E_o = \{(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}\,;\, x_0 = 1\} \subset \mathbb{C}P(n)$, a folheação $\mathcal{F}$ é definida em E_o pela forma holomorfa (meromorfa em $\mathbb{C}P(n)$) $\omega = \Omega|_{E_o}$. Como $d\omega = \eta_o \wedge \omega$, onde $\eta_o = \eta|_{E_o}$ é meromorfa e fechada, podemos concluir da Proposição 6.7.5 que $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em $\mathbb{C}P(n)\backslash A$, onde $A \subset \mathbb{C}P(n)$ é o conjunto algébrico invariante dado por $\bigcup_{j=1}^{m} \{\overline{f_j = 0}\}$.

Como vimos no Exemplo 1.5.17, as folhas de $\mathcal{F}$ contidas nas hipersuperfícies $Z(f_j) = \pi(f_j = 0)$ têm holonomia abeliana e linearizável enquanto que as demais folhas têm holonomia trivial. Veremos que este fenômeno é também uma conseqüência da existência de uma estrutura transversal afim para $\mathcal{F}$.

A seguir damos um exemplo de folheação transversalmente afim, mas com grupos de holonomia não abelianos.

Exemplo 6.2.7 (Folheações de Bernoulli em $\mathbb{C}P(n+1)$). Em $\mathbb{C}P(n+1)$ consideramos coordenadas afins $(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{C}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}P(n+1)$. Seja Ω uma 1-forma meromorfa dada por

$$\Omega(x_1, \ldots, x_n, y) = \left(\prod_{j=1}^{n} p_j(x_j)\right) dy - \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{i \neq j} p_i(x_i)\right) (y^k c_j(x_j) - y b_j(x_j)) dx_j \ ,$$

onde p_j, b_j, c_j são polinômios de uma variável. Dizemos que Ω define uma *folheação de Bernoulli* de ordem k em $\mathbb{C}P(n+1)$, se Ω satisfaz à seguinte condição de integrabilidade:

$$c_i(x_i).b_j(x_j) = c_j(x_j).b_i(x_i) \qquad \forall\, i, j$$

Nestas condições a forma meromorfa fechada

$$\eta := k\frac{dy}{y} + \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j'(x_j) + (k-1).b_j(x_j)}{p_j(x_j)}\, dx_j \ ,$$

satisfaz $d\Omega = \eta \wedge \Omega$. Logo obtemos uma estrutura transversal afim para $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega)$, fora de uma hipersuperfície algébrica invariante $\Gamma \subset \mathbb{C}P(n+1)$, a qual é uma união finita de hiperplanos $\mathbb{C}P(n) \subset \mathbb{C}P(n+1)$. Se $n = 1$ temos

$$\Omega(x, y) = p(x)dy - (y^k\, c(x) - y\, b(x))dx$$

que é o pull-back de uma folheação (particular) de *Riccati* , dada por

$$p(u)dv - (k-1)(c(u)v^2 - b(u)v)du \ ,$$

pela aplicação $(u,v) = (x, y^{k-1})$. O ponto $p_\infty \in \mathbb{C}P(2)$ dado por $\overline{(x=0)} \cap L_\infty$, onde L_∞ é a reta do infinito, é uma singularidade dicrítica de $\mathcal{F}$. Esta singularidade desempenha um papel fundamental no estudo da estrutura de $\mathcal{F}$, e é responsável por sua não linearização. De fato, em geral, $\mathcal{F}$ não é uma folheação logarítmica, por causa das separatrizes não algébricas de p_∞.

O exemplo abaixo é construído como uma variante do exemplo de Furness [76], de uma folheação transversalmente afim numa variedade compacta, com folhas de tipo analítico $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^*$.

Exemplo 6.2.8. Construiremos uma folheação transversalmente afim em uma variedade compacta de dimensão 3. Esta será uma folheação não-singular com folhas densas que são biholomorfas a $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ ou a $(\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}^*$ (A notação $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}$ será esclarecida mais abaixo).

Começamos com uma construção geral inspirada no caso real: Sejam M uma variedade compacta de dimensão n, ω uma 1-forma fechada em M e $f\colon M \to M$ um biholomorfismo tal que $f^*(\omega) = \lambda.\omega$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$ com $|\lambda| \neq 1$. Defina Ω em $M \times \mathbb{C}^*$ por $\Omega(x,t) = t.\omega(x)$. Colocando $\eta(x,t) = \frac{dt}{t}$, temos que $d\Omega = \eta \wedge \Omega$. Observe que η é holomorfa e $d\eta = 0$. Sendo assim, Ω define uma folheação $\widetilde{\mathcal{F}}$, de codimensão 1 em $M \times \mathbb{C}^*$ que é transversalmente afim no sentido da Definição 6.1.1.

Consideremos agora a ação $\Phi\colon \mathbb{Z} \times (M \times \mathbb{C}^*) \longrightarrow M \times \mathbb{C}^*$, definida por $\Phi(n,(x,t)) = (f^n(x), \lambda^{-n}.t)$. Esta é uma ação localmente livre gerada pelo biholomorfismo $\varphi(x,t) = (f(x), \lambda^{-1}\,t)$, ou seja, $\Phi(n,(x,t)) = \varphi^{(n)}(x,t)$. Note que $\varphi^*(\Omega)(x,t) = \lambda^{-1}\,t.\lambda\,\omega(x) = \Omega(x,t)$ e $\varphi^*\eta = \eta$. Portanto, a folheação $\widetilde{\mathcal{F}}$ induz uma folheação de codimensão 1, digamos $\mathcal{F}$, na variedade quociente $V = (M \times \mathbb{C}^*)/\Phi$, folheação esta que herda uma estrutura transversal afim induzida pelo par (Ω, η).

Vejamos um exemplo particular, o qual é uma variante do Exemplo de Furness (veja [76]):

Considere a aplicação unimodular $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$; $\quad U(x,y) = (x+y, x+2y)$ e fixemos $\mu \in \mathbb{C}^*$, $|\mu| \neq 1$. Seja N a superfície de Riemann obtida de $\mathbb{C}^*$ pela relação de equivalência que identifica os pontos z e μz. Esta superfície é biholomorfa a um toro complexo. Coloquemos $M = N \times N$. Note que M é um toro complexo de dimensão dois (veja o Exemplo 1.3.18). O recobrimento universal holomorfo de N é $\mathbb{C}$ e a projeção $p\colon \mathbb{C} \to N$ deste recobrimento pode ser escrita como $p = p_1 \circ exp$, sendo $exp(x) = e^x$ e $p_1\colon \mathbb{C}^* \to N$ a projeção da relação de equivalência que define N. Podemos então dizer que o recobrimento universal holomorfo de M é dado por $P = p \times p\colon \mathbb{C}^2 \to M$, $P(x,y) = (p(x), p(y))$. Veremos em seguida que U induz um biholomorfismo f de M, tal que $P \circ U = f \circ P$.

Fixemos um ponto $q = P(x,y) \in M$. Seja α tal que $e^\alpha = \mu$. Como o leitor pode constatar, temos

$$(*)\ P^{-1}(q) = P^{-1}(P(x,y)) = \{(x + j\alpha + 2m\pi i, y + k\alpha + 2n\pi i);\ m,n,j,k \in \mathbb{Z}\}.$$

Para ver que existe uma aplicação holomorfa $f\colon M \to M$ tal que $f \circ P = P \circ U$, é suficiente provar que $P(U(P^{-1}(q)))$ contém um único ponto em M. Ora, não é difícil verificar, a partir de $(*)$, que

$$U(P^{-1}(q)) = U(P^{-1}(P(x,y))) = P^{-1}(P \circ U(x,y)),$$

e portanto, $P(U(P^{-1}(q))) = P \circ U(x,y)$, como queríamos. Por outro lado, f é um biholomorfismo, já que a sua inversa pode ser definida da mesma maneira, a partir da inversa de U, $U^{-1}(x,y) = (2x - y, -x + y)$.

Consideremos agora a forma diferencial holomorfa fechada em $\mathbb{C}^2$ dada por $\Omega = (1+\sqrt{5})dx - 2dy$, para a qual temos $U^*(\Omega) = \lambda.\Omega$, onde $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (verifique). Observemos que existe uma forma holomorfa fechada ω em M tal que $P^*(\omega) = \Omega$. Para ver isto é suficiente provar que para todo automorfismo T, do recobrimento $P\colon \mathbb{C}^2 \to M$, temos $T^*(\Omega) = \Omega$. Ora, isto decorre do fato de que os automorfismos de P são translações de $\mathbb{C}^2$ (verifique). Por outro lado, $f^*(\omega) = \lambda.\omega$, já que,

$$P^*(f^*(\omega)) = (f \circ P)^*(\omega) = (P \circ U)^*(\omega) = U^*(P^*(\omega)) = U^*(\Omega) = \lambda.\Omega = P^*(\lambda.\omega).$$

De acordo com a construção geral do início, obtemos então uma folheação transversalmente afim, digamos $\mathcal{F}$, na variedade $V = (M \times \mathbb{C}^*)/\Phi$, $\Phi(n,(x,t)) = (f^n(x), \lambda^{-n}.t)$. As folhas de $\mathcal{F}$ podem descritas da seguinte maneira: seja $\widetilde{\mathcal{F}}$ a folheação definida por ω em M. Esta folheação é também definida por um campo de vetores holomorfo X em M tal que $P^*(X) = X^* = 2\partial/\partial x + (1+\sqrt{5})\partial/\partial y$, cujas órbitas em M são densas e biholomorfas a $\mathbb{C}^*$(veja o Exemplo 1.3.18). Em particular, as folhas da folheação produto $\widetilde{\mathcal{F}} \times \mathbb{C}^*$ em $M \times \mathbb{C}^*$, da qual $\mathcal{F}$ é obtida por quociente, são densas e biholomorfas a $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Denotando por $\widetilde{L}$ uma folha de $\widetilde{\mathcal{F}}$ e por L a folha quociente de $\widetilde{\mathcal{F}} \times \mathbb{C}^*$ por Φ, não é difícil ver que L será biholomorfa a $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ se, e somente se, $\widetilde{L}$ não contém pontos periódicos de f. No caso em que $\widetilde{L}$ contém um ponto periódico de f, L será biholomorfa a $\mathbb{C}^* \times T$, onde $T \simeq \mathbb{C}^*/\mathbb{Z}$ é um toro complexo de dimensão um. Deixamos os detalhes para o leitor.

6.3 Estruturas afins estendidas

No que se segue introduziremos o conceito de "estrutura afim estendida". Tais estruturas nos permitirão estudar os grupos de holonomia associados à uma hipersuperfície invariante por uma folheação de codimensão um, que possui uma estrutura transversal afim no complementar da hipersuperfície.

Definição 6.3.1. Sejam M uma variedade complexa e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em M. Suponha que $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma 1-forma meromorfa integrável Ω (fora de $(\Omega)_\infty$). Suponha também que $\mathcal{F}$ possui uma hipersuperfície analítica invariante, digamos $\Lambda \subset M$. Uma 1-forma η, definida em uma vizinhança V de Λ, é chamada uma *derivada logarítmica adaptada a* Ω *ao longo* de Λ, se: i) η é meromorfa, fechada, e $d\Omega = \eta \wedge \Omega$ em V.
ii) O divisor polar de η, $(\eta)_\infty \supset \Lambda \cup (V \cap (\Omega)_\infty)$, tem ordem 1 ao longo de Λ e de $(\Omega)_\infty$ e, além disto, para cada componente irredutível L de $(\Omega)_\infty$ *não-invariante por* $\mathcal{F}$, temos que $\operatorname{Res}_L \eta = -(\text{ordem de } (\Omega)_\infty \text{ ao longo de } L)$.

Observação 6.3.2. Em geral o conjunto de pólos de η contém estritamente $\Lambda \cup (V \cap (\Omega)_\infty)$. Observamos que $(\eta)_\infty \setminus ((\Omega)_\infty \cup \Lambda)$ é invariante por $\mathcal{F}$.

Com efeito, seja L uma componente irredutível de $(\eta)_\infty \setminus ((\Omega)_\infty \cup \Lambda)$. Fixemos um ponto não singular p de $L \setminus \operatorname{sing}(\mathcal{F})$. Seja $(x, y)\colon U \to \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, um sistema de coordenadas tal que $p \in U \subset V$, $y(p) = 0$, $U \cap (\Omega)_\infty = \emptyset$ e $\mathcal{F}|_U$ é definida pela forma dy. Neste caso, como $\Omega|_U$ também representa $\mathcal{F}|_U$, temos $\Omega = g.dy$, onde g é holomorfa e não se anula em U. Note que

$$d\Omega = \frac{dg}{g} \wedge \Omega = \eta \wedge \Omega \quad \Longrightarrow \quad \eta = \frac{dg}{g} + h.dy,$$

onde h é meromorfa em U e tem polo em p, já que $p \in L$ e $\frac{dg}{g}$ é holomorfa. Como η e $\frac{dg}{g}$ são fechadas, obtemos $dh \wedge dy = 0$, ou seja, h depende apenas de y. Isto implica que $(h)_\infty \supset (y = 0)$, ou seja, que $L \cap U \supset (y = 0)$ e portanto L é invariante por $\mathcal{F}$.

Denotaremos a união das componentes irredutíveis de $(\eta)_\infty$, que são aderentes a Λ por $\operatorname{sep}(\Lambda)$ (separatrizes de Λ).

Exemplo 6.3.3. Seja $\mathcal{F}$ a folheação em $\mathbb{C}P(2)$ dada por $\Omega = xdy - y^k\, dx$ em coordenadas afins. Não é difícil ver que $\eta = k\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x}$ é uma derivada logarítmica adaptada a Ω ao longo da curva algébrica $\overline{\{y = 0\}} \cup \overline{\{x = 0\}} \subset \mathbb{C}P(2)$. Por outro lado, embora a curva algébrica $L_\infty = \mathbb{C}P(2) \backslash \mathbb{C}^2$ esteja contida em $(\eta)_\infty$, temos $\operatorname{Res}_{L_\infty}(\eta) = -(k+1)$, enquanto que ordem de $(\Omega)_\infty$ ao longo de $L_\infty = k + 2$. Neste exemplo, podemos considerar η como derivada logarítmica adaptada a Ω ao longo de $\Lambda = \overline{\{y = 0\}} \cup \overline{\{x = 0\}} \cup L_\infty$, já que L_∞ é invariante por $\mathcal{F}$.

Uma das ferramentas básicas no estudo da holonomia das folheações transversalmente afins é o seguinte lema:

Lema 6.3.4. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M de dimensão n, que possui uma hipersuperfície analítica conexa e não singular, invariante, digamos Λ. Suponha que $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma 1-forma integrável meromorfa Ω em M e que Ω possui uma derivada logarítmica adaptada η, ao longo de Λ.*

(1) *Suponha que* $\operatorname{Res}_\Lambda(\eta) = a \notin \{2, 3, \ldots\}$. *Dado um ponto regular $p \in \Lambda \backslash \operatorname{sing}(\mathcal{F})$, existe uma carta local $(x, y)\colon U \to \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ tal que $p = (0, 0)$, $\Lambda \cap U = \{y = 0\}$, $\Omega = g\, dy$ e $\eta = a\frac{dy}{y} + \frac{dg}{g}$,*

onde g é uma função meromorfa em U. Além disto, se $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \widetilde{U}$ é uma outra carta com propriedades análogas, tal que $U \cap \widetilde{U} \neq \phi$, então $\tilde{y} = c.y$ para algum $c \in \mathbb{C}^*$.

(2) Suponha que $\mathrm{Res}_\Lambda(\eta) = k \in \{2,3,\ldots\}$ e que existe uma carta local $(u,v)\colon U \to \mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}$ tal que $U \cap \Lambda = \{v = 0\}$, $\Omega = g_o.dv$ e $\eta = k\frac{dv}{v} + \frac{dg_o}{g_o}$, onde g_o é uma função meromorfa em U. Então, dado ponto regular $p \in \Lambda\backslash \mathrm{sing}\,\mathcal{F}$, existe carta local $(x,y)\colon W \to \mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}$ tal que $p \in W$, $\Lambda \cap W = \{y = 0\}$, $\Omega = g\,dy$ e $\eta = k\frac{dy}{y} + \frac{dg}{g}$, onde g é uma função meromorfa em W. Além disto, se $(\tilde{x},\tilde{y})\colon \widetilde{W} \to \mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}$, é uma outra carta com propriedades análogas e tal que $W \cap \widetilde{W} \neq \phi$, então $\tilde{y}^{k-1} = h(y^{k-1})$, para alguma homografia h do tipo $h(z) = \frac{\lambda z}{1+az}$.

Observação 6.3.5. Veremos mais adiante que a condição (2) é sempre satisfeita, se $\mathrm{sing}\,\mathcal{F} \cap \Lambda$ contém alguma singularidade linearizável não ressonante.

Prova do Lema 6.3.4. Consideremos o caso (1), onde $\mathrm{Res}_\Lambda(\eta) = a \notin \{2,3,\ldots\}$.

Afirmação 6.3.6. *Dado um germe de função holomorfa $r(y)$, em $0 \in \mathbb{C}$, com $r(0) = 1$, existe um germe de função holomorfa u em $0 \in \mathbb{C}$, com $u(0) \neq 0$ e tal que*

$$\frac{u^a}{u + y.u'} = r(y).$$

Demonstração. A fim de provarmos a afirmação separamos os casos $a = 1$ e $a \notin \{2,3,\ldots,\}$.

Caso 1: $a = 1$: Definimos $\xi(y) = \frac{1}{r(y)} - 1$. Como $\xi(0) = 0$ vemos que $\xi(y)/y$ é holomorfa em $y = 0$. Assim, é suficiente definir $u(y) = \exp\left(\int \frac{\xi(y)}{y}\,dy\right)$, que é holomorfa, não se anula, e satisfaz $\frac{u'}{u}(y) = \left(\frac{1}{r(y)} - 1\right)/y$, o que nos dá $r(y) = \frac{u(y)}{u(y)+y.u'(y)}$. □

Caso 2: $a \notin \{1,2,3,\ldots\}$. Neste caso resolvemos o problema formalmente e então provamos a convergência da solução.

Primeiro reescrevemos $\frac{u^a}{u+y.u'} = r$ como $\frac{(uy)'}{(uy)^a} = \frac{1}{r.y^a}$. Podemos escrever a série de Taylor de $1/r$ como $\frac{1}{r(y)} = 1 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots$. Assim, obtemos

$$\frac{(uy)'}{(uy)^a} = y^{-a} + a_1\, y^{1-a} + \cdots + a_k\, y^{k-a} + \cdots\,,$$

e como $a \notin \{1,2,3,\ldots\}$, podemos integrar membro a membro a equação acima, obtendo a solução formal

$$\frac{1}{1-a}.\frac{1}{(uy)^{a-1}} = \frac{1}{1-a}.y^{1-a} + \frac{1}{2-a}.a_1\, y^{2-a} + \cdots + \frac{1}{k-a+1}.a_k\, y^{k-a+1} + \cdots\,,$$

que nos dá,

$$u^{a-1} = \frac{1}{1 + \frac{a-1}{a-2} \cdot a_1 y + \frac{a-1}{a-3} \cdot a_2 y^2 + \cdots}.$$

Note que a série acima é convergente em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$. De fato, como $1 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots$ é convergente em alguma vizinhança de 0, temos

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < +\infty$$

e então

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{< \frac{a-1}{a-k-1} \cdot a_k >} < \infty,$$

de modo que a série

$$v(y) = 1 + \frac{a-1}{a-2} \cdot a_1 y + \frac{a-1}{a-3} \cdot a_2 y^2 + \cdots$$

é convergente numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$. Como $v(0) = 1$, existe uma função u, holomorfa numa vizinhança de 0, tal que $u(0) = 1$ e $u = (1/v)^{1/(a-1)}$, o que prova a Afirmação 6.3.6.

Consideremos agora uma carta local $(x, y)\colon U \to \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ tal que $\Lambda \cap U = \{y = 0\}$, $U \cap \operatorname{sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$ e $\Omega = g\, dy$. Observe que

$$d\Omega = \frac{dg}{g} \wedge \Omega = \eta \wedge \Omega \implies \eta = \frac{dg}{g} + h.dy,$$

onde h só depende de y. Como $\operatorname{Res}_\Lambda(\eta) = a$ e η tem polo de ordem um ao longo de Λ, podemos escrever que $h.dy = a.\frac{dy}{y} + \frac{dr}{r}$, onde r é holomorfa e não se anula numa vizinhança de $(y = 0)$. Podemos supor, sem perda de generalidade que $r(0) = 1$. Vemos então que

$$\eta = a\frac{dy}{y} + \frac{dg}{g} + \frac{dr}{r}.$$

Seja agora u como na Afirmação 6.3.6, isto é, tal que $u^a = r(u + y.u') = r(y.u)'$. Considere a mudança de variáveis $\tilde{y} := u(y).y$ (note que $y \mapsto u(y).y$ é um biholomorfismo em vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$) e defina $\tilde{g} := \frac{g.r(y)}{u^a(y)}$. Temos $\frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} = \frac{dy}{y} + \frac{du}{u}$ e $\frac{d\tilde{g}}{\tilde{g}} = \frac{dg}{g} + \frac{dr}{r} - \frac{a\, du}{u}$. Portanto

$$\eta = \frac{ady}{y} + \frac{dg}{g} + \frac{dr}{r} = \frac{ad\tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{d\tilde{g}}{\tilde{g}}$$

Isto prova a primeira parte de (1) do Lema 6.3.4.

Afirmação 6.3.7. *Seja $u = u(y)$ um germe de função holomorfa em $0 \in \mathbb{C}$ com $u(0) \neq 0$. Suponha que $r.u^a = u + y.u'$, onde $r, a \in \mathbb{C}^*$. Então:* (i) *u é constante, se $a \notin \{2, 3...\}$.* (ii) *$u^{a-1} = \frac{1}{r+b.y^{a-1}}$, para algum $b \in \mathbb{C}$, se $a \in \{2, 3...\}$.*

Demonstração. Suponha que $a \notin \{2, 3, \ldots, \}$. Observe que $r(u(0))^{a-1} = 1$. Derivando a expressão $r.u^a = u+y.u'$, obtemos $a.r.u^{a-1}.u' = 2u'+y.u''$. Fazendo $y = 0$, temos $a.u'(0) = 2u'(0)$. Como $a \neq 2$, temos $u'(0) = 0$. Suponhamos, por indução, que $u'(0) = ... = u^{(j-1)}(0) = 0$, onde $j \geq 2$, e provemos que $u^{(j)}(0) = 0$. Observe que a $j-$ésima derivada de $r.u^a$ é da forma

$$(r.u^a)^{(j)} = a.r.u^{a-1}.u^{(j)} + A_{j-1}(y).u^{(j-1)} + ... + A_1(y).u' \ ,$$

onde $A_1, ..., A_{j-1}$ são holomorfas e envolvem potências de u, u',... e $u^{(j-1)}$ (verifique). Obtemos daí e da hipótese de indução que $(r.u^a)^{(j)}(0) = a.u^{(j)}(0)$. Por outro lado, a $j-$ésima derivada de $u + y.u'$ é $(j + 1)u^{(j)} + y.u^{(j+1)}$. Vemos então que

$$a.u^{(j)}(0) = (j + 1)u^{(j)}(0) \implies u^{(j)}(0) = 0 \ ,$$

já que $a \neq j + 1$. Portanto u é constante.

Suponha agora que $a = k \in \{2, 3, \ldots, \}$. De $r.u^k = u + y.u'$, obtemos $\frac{(u.y)'}{u^k.y^k} = \frac{r}{y^k}$ e então $\frac{1}{(uy)^{k-1}} = \frac{r}{y^{k-1}} + b$ para alguma constante $b \in \mathbb{C}$. Daí segue a afirmação (ii) facilmente.

Com afirmativa acima podemos finalizar a prova de (1). Com efeito, consideremos duas cartas $((x, y), U)$, $((\tilde{x}, \tilde{y}), \widetilde{U})$ tais que

$$\Omega = g\,dy, \quad \eta = \frac{ady}{y} + \frac{dg}{g}, \quad \Omega = \tilde{g}\,d\tilde{y}, \quad \eta = \frac{ad\tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{d\tilde{g}}{\tilde{g}}$$

$U \cap \Lambda = (y = 0)$, $\widetilde{U} \cap \Lambda = (\tilde{y} = 0)$ e $U \cap \widetilde{U} \neq \phi$. Como as cartas trivializam a folheação, temos $\tilde{y} = u.y$ em $U \cap \widetilde{U}$, onde u depende apenas de y e $u(0) \neq 0$. Como $\Omega = g\,dy = \tilde{g}\,d\tilde{y} = \tilde{g}\,d(u.y)$ em $U \cap \widetilde{U}$, obtemos que $g/\tilde{g}$ também depende apenas de y e $g/\tilde{g} = u + y.u'$. Por outro lado, como $\eta = \frac{ady}{y} + \frac{dg}{g} = \frac{ad\tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{d\tilde{g}}{\tilde{g}}$ em $U \cap \widetilde{U}$, temos

$$\frac{d(u^a)}{u^a} = a\frac{du}{u} = a\frac{d(\tilde{y}/y)}{\tilde{y}/y} = \frac{d(g/\tilde{g})}{g/\tilde{g}} = \frac{d(u + y\,u')}{u + y\,u'},$$

e isto implica que $r.u^a = u + y\,u'$, para algum $r \in \mathbb{C}^*$. Da Afirmação 6.3.7 concluímos que:

(i) $a \notin \{2, 3, \ldots\} \Rightarrow \tilde{y} = c.y$, para algum $c \in \mathbb{C}^*$.

(ii) $a = k \in \{2, 3, \ldots\} \Rightarrow \tilde{y}^{k-1} = \frac{\lambda y^{k-1}}{1+\alpha.y^{k-1}}$ para algum $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$.

Isto encerra a prova de (1).

Prova de (2): $\mathrm{Res}_\Lambda(\eta) = k \in \{2, 3, \ldots\}$.

Seja $A = \{q \in \Lambda \backslash \mathrm{sing}(\mathcal{F})$; existe um sistema de coordenadas $((x, y), W)$ com as propriedades desejadas$\}$, isto é, tal que $p \in W$, $\Lambda \cap W = \{y = 0\}$, $\Omega = g\,dy$ e $\eta = k\frac{dy}{y} + \frac{dg}{g}$, onde g é uma função meromorfa em W. O conjunto A é claramente aberto em $\Lambda \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$. Como $\Lambda \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$ é conexo (já que $\mathrm{sing}(\mathcal{F}) \cap \Lambda$ tem codimensão ≥ 1 em Λ), basta provarmos que A é fechado em $\Lambda \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$. Suponhamos então que a fronteira de A contém um ponto $q_o \in \Lambda \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$. Seja $(\phi = (x,y), U)$ uma carta local tal que $q_o \in U$, $\Omega = g\,dy$, $\Lambda \cap U = \{y = 0\}$. Como vimos $\eta|_U = \frac{kdy}{y} + \frac{dg}{g} + \frac{dr}{r}$ para alguma função holomorfa $r = r(y)$ com $r(0) = 1$. Fixemos um ponto $q_1 \in U \cap A$ e uma carta local $(\hat{\phi}(\hat{x},\hat{y}), \widehat{U})$ tal que $q_1 \in \widehat{U} \subset U$, $\Lambda \cap \widehat{U} = (\hat{y} = 0)$, $\Omega|_{\widehat{U}} = \hat{g}\,d\hat{y} = g\,dy$ e

$$\eta|_{\widehat{U}} = \frac{kd\hat{y}}{\hat{y}} + \frac{d\hat{g}}{\hat{g}} = \frac{kdy}{y} + \frac{dg}{g} + \frac{dr}{r}\,.$$

Note que a mudança de cartas $\phi \circ \hat{\phi}^{-1}$ é do tipo $(x,y) = (X(\hat{x},\hat{y}), Y(\hat{y}))$, com inversa $(\hat{x},\hat{y}) = (\hat{X}(x,y), \hat{Y}(y))$, sendo $\hat{Y}(y) = u(y).y$, $u(0) \neq 0$. Em particular a submersão $\hat{y}$ se estende a uma vizinhança $W \subset U$ de $U \cap \Lambda$, $W = \{q \in U;\, q \in \text{domínio de } \hat{Y} \circ y\}$. Podemos então definir uma nova carta holomorfa $\tilde{\phi}\colon W \to \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ por $\tilde{\phi}(q) = (x(q), \hat{y}(q))$. Afirmamos que $\hat{g}$ se estende a W. De fato, da relação $\hat{g}\,d\hat{y} = g\,dy$, obtemos como antes que u e $g/\hat{g}$ dependem apenas de y e que $g/\hat{g} = u + y.u'$ em $\hat{U}$. Podemos então estender $\hat{g}$ a W como $g/(u + y.u')$. Obtivemos desta forma, uma carta holomorfa $(\tilde{\phi} = (x,\hat{y}), W)$ e uma função $\hat{g}$, meromorfa em W, tais que $q_o \in W$ e $\eta|_W = \frac{kd\hat{y}}{\hat{y}} + \frac{d\hat{g}}{\hat{g}}$, como queríamos. Isto implica a primeira parte de (2). A última parte segue de (ii) da Afirmação 6.3.7. $\square$

Corolário 6.3.8. *Sejam $\mathcal{F}$ e Λ como no Lema 6.3.4. Suponha que $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma 1-forma integrável meromorfa Ω em M e que Ω possui uma derivada logarítmica adaptada η, ao longo de Λ. Suponha que $\mathrm{Res}_\Lambda(\eta) = a \notin \{2,3,\ldots\}$. Então a holonomia da folha $L = \Lambda \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$ é abeliana e linearizável.*

Demonstração. Fixemos um ponto $p \in L$ e um sistema de coordenadas $(x,y)\colon U \to \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ tal que $p = (0,0)$, $\Lambda \cap U = \{y = 0\}$, $\Omega = g\,dy$ e $\eta = a\frac{dy}{y} + \frac{dg}{g}$, onde g é uma função meromorfa em U. Seja Σ a seção transversal $(x = 0) \subset U$. Em Σ consideramos o sistema de coordenadas y. Fixemos um caminho fechado $\gamma\colon I \to L$ com $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ e consideremos uma cobertura de $\gamma(I)$ por abertos $(U_j)_{j=0}^k$, tal que: (a) $U_0 = U_k = U$. (b) Existe uma partição de I, $\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = 1\}$, tal que $\gamma[t_j, t_{j+1}] \subset U_j$, para todo $j = 0, \ldots, k$. Em particular $U_j \cap U_{j+1} \neq \emptyset$, se $j = 0, \ldots, k-1$. (c) Para todo $j = 1, \ldots, k-1$, U_j é o domínio de um sistema de coordenadas $(x_j, y_j)\colon U_j \to \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ tal que $\Lambda \cap U_j = \{y_j = 0\}$, $\Omega = g_j\,dy_j$ e $\eta = a\frac{dy_j}{y_j} + \frac{dg_j}{g_j}$, onde g_j é uma função meromorfa em U_j. Colocamos também $y_0 = y_k = y$.

Por (1) do Lema 6.3.4, para todo $j = 0, \ldots, k-1$, existe uma constante $c_j \in \mathbb{C}^*$ tal que $y_{j+1} = c_j\,y_j$. Isto implica que a holonomia de γ é $f_\gamma(y) = c.y$, onde $c = c_0.c_1 \ldots c_{k-1}$, logo linear, como queríamos. $\square$

Corolário 6.3.9. *Sejam $\mathcal{F}$ e Λ como no Lema 6.3.4. Suponha que $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma 1-forma integrável meromorfa Ω em M e que Ω possui uma derivada logarítmica adaptada η, ao* *longo de* Λ. *Suponha que* $\mathrm{Res}_\Lambda(\eta) = k \in \{2, 3, \dots\}$. *Então a holonomia da folha* $L = \Lambda \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F})$ *é conjugada a um subgrupo do grupo*

$$H_k = \{h \in Dif(\mathbb{C}, 0);\ h(z) = \frac{\lambda.z}{(1 + b\, z^{k-1})^{1/(k-1)}}\,, \lambda \in \mathbb{C}^*\,, b \in \mathbb{C}\}.$$

A prova é semelhante ao do Corolário 6.3.8 e é deixada como exercício para o leitor (veja o Exercício 1).

No próximo resultado, consideraremos uma folheação $\mathcal{F}$ definida numa superfície complexa M que possui curva analítica invariante e não singular Λ. Vamos supor que $\mathcal{F}$ pode ser definida em M por uma 1-forma meromorfa Ω (fora de $(\Omega)_\infty$).

Lema 6.3.10 (Lema de Extensão)**.** *Na situação acima, suponha que:*
1) *Para toda singularidade* $p \in \Lambda \cap \mathrm{sing}\,\mathcal{F}$, *existe uma carta holomorfa* $((x, y), U)$ *tal que* $p \in U$, $x(p) = y(p) = 0$, $\Lambda \cap U = \{y = 0\}$ *e* $\mathcal{F}$ *é dada por* $xdy - \lambda y\, dx = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{Q}_+$.
2) *Uma das singularidades digamos,* $p_o \in \Lambda \cap \mathrm{sing}\,\mathcal{F}$, *é não ressonante (o que significa que temos* $\lambda \notin \mathbb{Q}$ *em* 1)*).*
3) *Existem uma vizinhança* V *de* Λ *e uma 1-forma meromorfa* η *definida em* $V \setminus (\Lambda \cup \mathrm{sep}(\Lambda))$ *satisfazendo:*
*item*i) η *é meromorfa e fechada. item*ii) $d\Omega = \eta \wedge \Omega$. *item*iii) $(\eta)_\infty \supset (\Omega)_\infty$. *Além disto, para cada componente* L *de* $(\Omega)_\infty$ *então* η *tem polo de ordem* 1 *ao longo de* L *e* $\mathrm{Res}_L(\eta) =$ *- ordem do polo de* Ω *ao longo de* L.

Então η *se estende meromorficamente a uma vizinhança de* Λ, *como uma derivada logarítmica adaptada a* Ω *ao longo de* Λ.

Nota 6.3.11. Dada uma singularidade de $\mathcal{F}$, $p \in \Lambda$, por (1), podemos considerar coordenadas $((x, y), U)$ tal que $\mathcal{F}$ é dada por $xdy - \lambda y\, dx = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{Q}_+$. Neste caso a singularidade possui exatamente duas separatrizes analíticas por p, $\{y = 0\} \subset \Lambda$ e $\{x = 0\}$ que é transversal a Λ. Vamos supor aqui que V é uma vizinhança suficientemente pequena de Λ de tal forma que $\{x = 0\} \cap V$ seja um subconjunto analítico de V. Isto corresponde a dizer que os pontos do bordo de $\{x = 0\} \cap V$ estão no bordo de V. Denotamos por $\mathrm{sep}(\Lambda)$ a união das separatrizes $\{x = 0\} \cap V$, como acima.

Demonstração. Provaremos primeiro que η se estende meromorficamente a uma vizinhança de p_o dado por (2). Consideremos coordenadas locais $((x, y), U)$ tais que $x(p_o) = y(p_o) = 0$, $\Lambda \cap U = \{y = 0\}$ e $\mathcal{F}|_U$ é dada por $xdy - \lambda_o y\, dx = 0$, $\lambda_o \notin \mathbb{Q}$. Neste caso, temos $\Omega(x, y) = g(xdy - \lambda_o y\, dx) = x\, y\, g\,(\frac{dy}{y} - \lambda_o \frac{dx}{x})$, onde g é meromorfa em U. Note que $\eta|_U$ é, em princípio, meromorfa em $U \setminus ((x = 0) \cup (y = 0))$. Por outro lado,

$$d\Omega = \eta \wedge \Omega \quad \Longrightarrow \quad \eta = \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} + \frac{dg}{g} + \alpha,$$

onde α é meromorfa, fechada em $U \setminus ((x=0)\cup(y=0))$ e $\alpha = f\,(xdy - \lambda_o y dx)$. Observe agora que a hipótese (iii) implica que os pólos de η em $U \setminus ((x=0)\cup(y=0))$ coincidem com os pólos de $\frac{dg}{g}$ e portanto α e f são holomorfas em $U \setminus ((x=0)\cup(y=0))$. Como α é fechada temos

$$0 = d\alpha = d(x\,y\,f)\wedge(\frac{dy}{y} - \lambda_o\frac{dx}{x}) \implies dh\wedge(xdy - \lambda_o\,ydx) = 0 \implies x\,h_x + \lambda_o\,y\,h_y = 0,$$

onde $h = x\,y\,f$. Como h é holomorfa em $U \setminus ((x=0)\cup(y=0))$, podemos desenvolvê-la em Série de Laurent $h = \sum\limits_{i,j\in\mathbb{Z}} h_{ij}\,x^i y^j$. Da relação $x\,h_x + \lambda_o\,y\,h_y = 0$, obtemos $(i+\lambda_o j).h_{ij} = 0$, $\forall\,(i,j)\in\mathbb{Z}^2$. Como $\lambda_o \notin \mathbb{Q}$ obtemos daí que $h_{ij} = 0$, $\forall\,(i,j)\neq(0,0)$, de modo que $h = c$ é constante. Decorre daí que

$$\eta = (1+c)\frac{dy}{y} + (1-c\,\lambda_o)\frac{dx}{x} + \frac{dg}{g} = \lambda_1\,\frac{dy}{y} + \lambda_2\,\frac{dx}{x} + \frac{dg}{g}\,,$$

onde $1+\lambda_o = \lambda_1\lambda_o + \lambda_2$ (Êste fato será usado posteriormente).

Assim sendo, η se estende meromorficamente a uma vizinhança de p_o tendo pólos de ordem 1.

Veremos em seguida que η se estende meromorficamente a uma vizinhança de $\Lambda\backslash(\operatorname{sing}\mathcal{F}\cap\Lambda)$, tendo pólos de ordem 1. Para provar isto, basta demonstrar que se $A\subset\Lambda\backslash(\operatorname{sing}\mathcal{F}\cap\Lambda)$ é um aberto tal que podemos estender η meromorficamente a uma vizinhança de A e q é um ponto da fronteira de A em $\Lambda\backslash(\operatorname{sing}\mathcal{F}\cap\Lambda)$, então podemos estender η meromorficamente a uma vizinhança de q. Fixemos uma carta holomorfa $((x,y),U)$ tal que $q\in U$, $x(q)=y(q)=0$, $\Lambda\cap U = (y=0)$ e $\Omega|_U = g\,dy$, onde g é meromorfa em U. Da relação $d\Omega = \eta\wedge\Omega$, obtemos $\eta = \frac{dg}{g} + \alpha$, onde $\alpha = f\,dy$, é fechada e meromorfa em $(U\setminus(y=0))\cup A$. Como η é fechada, temos $df\wedge dy = 0$, logo f só depende de y. Basta então provar que $y=0$ não é singularidade essencial de f. Ora, este fato decorre de que $A\cap U\neq\emptyset$, como o leitor pode verificar facilmente.

Fixemos agora uma singularidade $p\in\Lambda\cap\operatorname{sing}\mathcal{F}$,$p\neq p_o$, e provemos que η se estende meromorficamente a uma vizinhança de p. Escolhemos uma carta $((x,y),U)$ como em (1). Novamente temos que $\Omega|_U = g(x\,dy - \lambda\,y\,dx)$ e $\eta = \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} + \frac{dg}{g} + \alpha$, onde $\alpha = h(\frac{dy}{y} - \lambda\frac{dx}{x})$ e $xh_x + \lambda y\,h_y = 0$. Seja $h = \sum\limits_{i,j\in\mathbb{Z}} h_{ij}\,x^i y^j$ a série de Laurent de h em $U\setminus((x=0)\cup(y=0))$. Como antes, temos $(i+\lambda j).h_{ij} = 0$, $\forall\,(i,j)\in\mathbb{Z}^2$. Como η se estende meromorficamente ao longo de $\Lambda\backslash(\Lambda\cap\operatorname{sing}\mathcal{F})$, com polo de ordem 1, temos que h é holomorfa ao longo de $\Lambda\backslash(\Lambda\cap\operatorname{sing}\mathcal{F})$, ou seja ao longo de $(y=0)\setminus(0,0)$. Decorre daí que $h_{ij}=0$, $\forall\,(i,j)$, com $j<0$. Por outro lado, se $i<0$ e $j>0$, temos $i+\lambda\,j\neq 0$, já que $\lambda\notin\mathbb{Q}_+$. Obtemos então que $h_{ij}=0\ \forall\,(i,j)\notin\mathbb{Z}_+^2$, e portanto h é holomorfa em U. Com isto provamos que η se estende meromorficamente a uma vizinhança de p, logo a V, como queríamos. $\square$

Terminaremos esta seção com um lema e algumas observações que usaremos para linearizar as singularidades nas provas dos teoremas principais.

Seja $\mathcal{F}$ um germe de folheação holomorfa singular em $(\mathbb{C}^2, 0)$, dado por um germe de forma diferencial ω, com parte linear não degenerada, como abaixo;

$$\omega = xdy - \lambda y\, dx + t.o.s. = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{Q},$$

onde $t.o.s.$ denota "termos de ordem superior". Como $\lambda \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{Q}$, $\mathcal{F}$ possui duas separatrizes lisas passando por $0 \in \mathbb{C}^2$, uma delas tangente à reta $(y = 0)$. Podemos então supor que $\{y = 0\}$ é uma separatriz de $\mathcal{F}$ e que $\omega = (x + t.o.s.)dy - \lambda\, y(1 + t.o.s.)dx$. Fixemos uma seção transversal Σ, $\Sigma \cap \{y = 0\} = \{x_o\}$ e um sistema de coordenadas y em Σ, com $y(p) = 0$. Denotemos por $h(y)$ a holonomia da separatriz Σ no sistema de coordenadas y.

Lema 6.3.12. *Na situação acima, suponha que*

$$(h(y))^{k-1} = \frac{\mu\, y^{k-1}}{1 + ay^{k-1}} \quad \textit{para algum } k \in \{2, 3, \ldots\}, \mu, a \in \mathbb{C}, \mu \neq 1.$$

Então $\mathcal{F}$ é linearizável, isto é, existe um sistema de coordenadas $((u, v), W)$ em vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que $\mathcal{F}$ é definida em W por $u\, dv - \lambda\, v\, du$.

Demonstração. Pelo Lema de Mattei-Moussu (veja [61] e a Seção 5 do Capítulo 4), é suficiente mostrar que $h\colon (\Sigma, p) \to (\Sigma, p)$, pode ser linearizado em algum sistema de coordenadas z em Σ. Se $a = 0$, a relação $(h(y))^{k-1} = \mu\, y^{k-1}$, implica que $h(y) = \lambda\, y$, onde $\lambda^{k-1} = \mu$, ou seja, que h é linear. Podemos então supor que $a \neq 0$. Neste caso, considere a homografia $H(w) = \frac{\mu\, w}{(1 + a\, w)}$. Como $\mu \neq 1$, a homografia $Z(w) = \frac{w}{1 - c\, w}$, $c = \frac{a}{\mu - 1}$, é tal que $Z(0) = 0$ e $Z \circ H(w) = \mu Z(w)$, ou seja, H é linearizável. Note que, a relação $(h(y))^{k-1} = H(y^{k-1})$, nos diz que h é um recobrimento ramificado de H. Isto implica que h é linearizável. De fato, considere a mudança de coordenadas em vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$, $z(y) = \frac{y}{(1 - c\, y^{k-1})^{1/(k-1)}}$, cuja inversa é $y(z) = \frac{z}{(1 + c\, z^{k-1})^{1/(k-1)}}$. Note que $(z(y))^{k-1} = Z(y^{k-1})$. Daí obtemos que,

$$(z \circ h(y))^{k-1} = Z((h(y))^{k-1}) = Z \circ H(y^{k-1}) = \mu\, Z(y^{k-1}) = \mu\, (z(y))^{k-1},$$

logo $z \circ h(y) = \lambda\, z(y)$, onde $\lambda^{k-1} = \mu$. Isto implica que h é linearizável, como queríamos. $\square$

Observação 6.3.13. Seja $\mathcal{F}$ como no Lema 6.3.12, dada por uma 1-forma holomorfa $\omega = (x + t.o.s.)dy - \lambda\, y(1 + t.o.s.)dx$, que possui $\{y = 0\}$ como separatriz local. Suponha que ω admite η como uma derivada logarítmica adaptada ao longo de $\{y = 0\}$. Se $\mathrm{Res}(\eta)_{\{y=0\}} \notin \{2, 3, \ldots\}$ então $\mathcal{F}$ é linearizável.

Com efeito, pelo Corolário do Lema 6.3.4, a holonomia da separatrix $\{y = 0\}$ é linearizável. Portanto, $\mathcal{F}$ é linearizável pelo Lema de Mattei-Moussu ([61]).

6.4 Classificação das folheações transversalmente afins

Nesta seção veremos os resultados principais sobre as folheações transversalmente afins. Consideraremos a seguinte situação: seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa M^2, com singularidades isoladas, tendo uma curva analítica irredutível e conexa invariante $\Lambda \subset M$. Suponha que $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma forma meromorfa Ω. Vamos denotar por $\pi\colon M^* \to M$ o processo de resolução das singularidades de Λ e de $\mathcal{F}$, por $\mathcal{F}^*$ a folheação obtida por esta resolução, por Λ^* a transformada estrita de Λ e por $D_1, ..., D_m$ os divisores de π. O primeiro resultado é o seguinte:

Teorema 6.4.1 ([74])**.** *Na situação acima, suponhamos que:*

(i) *Todas as singularidades de $\mathcal{F}$ em Λ são de primeira ordem, isto é, que nenhum dos divisores é dicrítico para $\mathcal{F}^*$ e que $\mathcal{F}^*$ não possui selas-nós.*

(ii) *$\mathcal{F}^*$ possui alguma singularidade linearizável não ressonante.*

Então as seguintes condições são equivalentes:

(a) *Existe vizinhança V de Λ tal que $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em $V \setminus (\Lambda \cup \mathrm{sep}(\Lambda))$.*

(b) *A forma Ω admite uma derivada logarítmica adaptada ao longo de Λ.*

Além disto, se uma destas condições é satisfeita, então o grupo de holonomia de Λ^* e de cada divisor D_j de π é abeliana linearizável, ou é um recobrimento ramificado finito de um grupo de homografias. No caso linearizável, existe uma forma meromorfa θ, fechada com pólos de ordem 1, definida numa vizinhança W desta componente (Λ^* ou D_j) e que define $\mathcal{F}^*$ em $W \setminus (\theta)_\infty$.

Demonstração. A implicação (b) $\Rightarrow$ (a) é uma conseqüência direta da Proposição 6.2.2. Provemos que (a) $\Rightarrow$ (b). Fixemos uma vizinhança V de Λ tal que $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em $V \setminus (\Lambda \cup \mathrm{sep}(\Lambda))$. Seja $\pi\colon M^* \to M$, $\mathcal{F}^* = \pi^*(\mathcal{F})$ o morfismo de resolução de Λ e das singularidades de $\mathcal{F}$. Usaremos as notações $V^* = \pi^{-1}(V)$, $\widetilde{V} = \pi^{-1}(V \setminus (\Lambda \cup \mathrm{sep}(\Lambda)))$ e $D = \pi^{-1}(\Lambda) = \bigcup_{j=0}^m D_j$, de forma que $D_0 = \Lambda^*$. A folheação $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em $V \setminus (\Lambda \cup \mathrm{sep}(\Lambda))$. Portanto, existe uma forma η, meromorfa e fechada em $V \setminus (\Lambda \cup \mathrm{sep}(\Lambda))$, satisfazendo às condições da Proposição 6.2.2. Basta provar que η se estende meromorficamente a V, com pólos de ordem um ao longo de $\Lambda \cup \mathrm{sep}(\Lambda)$.

Para isto, coloquemos $\Omega^* = \pi^*(\Omega)$, $\eta^* = \pi^*(\eta)$, de forma que o par (Ω^*, η^*) define a estrutura afim de $\mathcal{F}^*$ em $\widetilde{V}$. Vamos provar que a 1-forma η^* se estende meromorficamente a V^*. Seja $q_{j_o} \in D_{j_o}$ uma singularidade linearizável não ressonante de $\mathcal{F}^*$. Pelo Lema 6.3.10, $\widetilde{\eta}$ se estende meromorficamente a D_{j_o} menos os outros pontos singulares de $\mathcal{F}^*$ em D_{j_o}. Note que ainda não sabemos se as outras singularidades de $\mathcal{F}$ são linearizáveis. Se este fato fosse conhecido, o Lema 6.3.10 implicaria que η^* poderia ser estendida meromorficamente a $D_{j_o} \cup \mathrm{sep}(D_{j_o})$. Ora, a extensão meromorfa de η^* a $D_{j_o} \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F}^*)$, nos permite calcular a holonomia da folha

$D_{j_o} \setminus \mathrm{sing}(\mathcal{F}^*)$. De acordo com os Corolários 6.3.8 e 6.3.9 do Lema 6.3.4, esta holonomia ou é abeliana e linearizável, ou é um recobrimento ramificado finito de um grupo de homografias como no Lema 6.3.12 (um subgrupo de H_k, segundo a notação do Corolário 6.3.9). Em particular, para qualquer singularidade $q'_{j_o} \in D_{j_o} \cap \mathrm{sing}(\mathcal{F}^*)$, existem uma seção transversal Σ e um sistema de coordenadas y em Σ, tais que a holonomia da separatriz definida por D_{j_o} nesta singularidade, é de um dos seguintes tipos:

(A) $h(y) = a.y$, $a \in \mathbb{C}^*$ (linear); (B) $h(y) = \frac{ay}{(1+b.y^k)^{1/k}}$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ (neste caso temos que $\mathrm{Res}_{D_{j_o}}(\eta^*) = k+1$).

No caso (B) temos duas possibilidades: (1) $a^k \neq 1$: Neste caso a homografia $\left(z \mapsto \frac{a^k z}{1+bz}\right)$ é linearizável e podemos assumir que $h(y) = \alpha.y$, como em (A) (veja o Lema 6.3.12). Neste caso e no caso (A), pelo Lema de Mattei-Moussu ([61]), a singularidade é linearizável e podemos usar o Lema 6.3.10 para estender η^* meromorficamente a uma vizinhança da singularidade q'_{j_o}.

(2) $a^k = 1$: Neste caso $\mathcal{F}^*$ pode ser definida em uma vizinhança de q'_{j_o} por uma forma do tipo $\widetilde{\omega} = g(x\,dy - \lambda\,y\,dx + t.o.s.)$, onde $\lambda = -\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_-$, $(m,n) = 1$. Podemos assumir que esta singularidade não seja linearizável e que $(y=0) \subset D_{j_o}$. Vamos provar que $\mathcal{F}^*$ pode ser definida numa vizinhança de q'_{j_o} por uma forma do tipo

$$\omega_{k,\ell} = k\,x\,dy + \ell\,y(1 + c\,x^\ell\,y^k)dx \ ,$$

onde $\ell/k = m/n$. Para isto, pelo Lema de Mattei-Moussu, é suficiente provar que as holonomias de $(y=0)$ por $\mathcal{F}^*$ e pela folheação definida por $\omega_{k,\ell}$, são conjugadas. Provemos este fato. Em primeiro lugar, note que a holonomia h de q'_{j_o} em D_{j_o} por $\mathcal{F}^*$, satisfaz $h(y)^k = \frac{y^k}{1+ay^k}$. Isto implica que $m.k = \ell.n$ para algum $\ell \in \mathbb{N}$ (verifique). Podemos então supor que $\widetilde{\omega} = k\,x\,dy + \ell\,y\,dx + t.o.s.$ (fazendo $g = k/\ell$), de forma que as partes lineares de $\widetilde{\omega}$ e $\omega_{k,\ell}$ em 0 coincidem. Por outro lado, $d\omega_{k,\ell} = \eta_{k,\ell} \wedge \omega_{k,\ell}$, onde $\eta_{k,\ell} = (\ell+1)\frac{dx}{x} + (k+1)\frac{dy}{y}$ (verifique). Portanto $\eta_{k,\ell}$ é uma derivada logarítmica de $\omega_{k,\ell}$ ao longo de $(y=0)$. Como $\mathrm{Res}_{(y=0)}(\eta_{k,\ell}) = k+1$, obtemos do Corolário 6.3.9 do Lema 6.3.4 que, a holonomia $h_{k,\ell}$ de $(y=0)$ por $\omega_{k,\ell}$, em uma seção transversal do tipo $(x = cte)$, está em H_{k+1}, isto é, é do tipo $h_{k,\ell}(y) = \frac{\lambda\,y}{(1+d\,y^k)^{1/k}}$. Como as partes lineares de $\widetilde{\omega}$ e $\omega_{k,\ell}$ em 0 coincidem, obtemos $\lambda = a$. Isto implica que $h_{k,\ell}$ e h são conjugadas (por uma homotetia, verifique). Portanto, por [61], a folheação $\mathcal{F}^*$ é equivalente, próximo a q'_{j_o}, ao germe de folheação dado por $\omega_{k,\ell}$. Em particular, existe um sistema de coordenadas $((x,y),U)$ e uma função meromorfa $\widetilde{g}$ em U, tais que $q'_{j_o} \in U$ e $\Omega^*\big|_U = \widetilde{g}\,\omega_{k,l}$. Obtemos daí que

$$d\Omega^* = \widetilde{\eta} \wedge \Omega^* \ , \ \widetilde{\eta} = (\ell+1)\frac{dx}{x} + (k+1)\frac{dy}{y} + \frac{d\widetilde{g}}{\widetilde{g}} \ .$$

Observemos agora que a forma η^* se estende meromorficamente a $(y=0) \setminus \{0\}$. Como $\widetilde{\eta}$ e η^* definem estruturas transversais afins fora dos eixos $(x=0), (y=0)$ e têm o mesmo resíduo $(k+1)$ ao longo de $(y=0)$, elas coincidem numa vizinhança de $(y=0) \setminus \{0\}$. Isto implica que $\widetilde{\eta}$ estende η^* meromorficamente a uma vizinhança de q'_{j_o}. Desta maneira, provamos que η^* se estende meromorficamente a $D_{j_o} \cup \mathrm{sep}(D_{j_o})$. Analogamente, para toda componente D_j de D, tal que $D_j \cap D_{j_o} \neq \phi$, η^* se estende meromorficamente a $D_j \cup \mathrm{sep}(D_j)$. Como D é conexo, obtemos que η^* se estende meromorficamente a D (por indução no número de componentes de D para as quais podemos estender η^*). Deixamos os detalhes finais para o leitor. Isto mostra que (a) $\Rightarrow$ (b).

Note que, como Ω^* possui derivada logarítmica ao longo de D, os Corolários 6.3.8 e 6.3.9 do Lema 6.3.4, implicam que o grupo de holonomia de cada D_j é abelian linearizável, ou é um recobrimento ramificado finito de um grupo de homografias.

Finalmente a última afirmação do Teorema, decorre da Proposição 4.6.5. $\square$

Vamos agora considerar o caso de folheações em $\mathbb{C}P(2)$.

Observação 6.4.2. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}P(2)$. Lembramos que o *grau* de $\mathcal{F}$ $(gr(\mathcal{F}))$, é definido como o número de tangencias de $\mathcal{F}$ com uma reta projetiva genérica $\mathbb{C}P(1) \subset \mathbb{C}P(2)$ (veja Cap. II §3). Se Ω é uma forma polinomial que define $\mathcal{F}$ num sistema de coordenadas afim $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P(2)$, então Ω pode ser pensada como uma forma meromorfa em $\mathbb{C}P(2)$, com polo de ordem $gr(\mathcal{F}) + 2$, na reta do infinito $L_\infty = \mathbb{C}P(2) \setminus \mathbb{C}^2$.

O *Problema de Poincaré*, pode ser enunciado da seguinte maneira: suponhamos que a folheação $\mathcal{F}$ possui uma curva algébrica invariante $S \subset \mathbb{C}P(2)$.

Problema 6.4.3. *É possível limitar o grau de $\mathcal{F}$ em termos do grau de S e de alguns outros dados de $\mathcal{F}$? (veja [18] e [20]).*

Nesta direção, o seguinte resultado é conhecido:

Teorema 6.4.4 (M. Carnicer, [18])**.** *Sejam $\mathcal{F}$ e S como acima. Suponhamos que $\mathcal{F}$ não possui singularidades dicríticas sobre S. Então:*

$$gr(\mathcal{F}) \leq gr(S) + 2.$$

No resultado seguinte provaremos que vale uma igualdade, na fórmula acima, no caso em que a folheação satisfaz hipóteses semelhantes às do Teorema 6.4.1. Para outras informações e resultados relativos ao problema de Poincaré, recomendamos ao leitor as referências [18] e [20].

Teorema 6.4.5 ([74])**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}P(2)$ que possui uma curva algébrica irredutível invariante, digamos Λ. Suponha que:*

(i) *Todas as singularidades de $\mathcal{F}$ em Λ são de primeira ordem.*

(ii) *A folheação $\mathcal{F}^*$, obtida pela resolução de Λ e das singularidades de $\mathcal{F}$ sobre Λ, possui ao menos uma singularidade linearizável não ressonante.* (iii) *Existe uma vizinhança V de Λ tal* *que $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em $V \setminus (\Lambda \cup \mathrm{sep}(\Lambda))$.*

Então: (a) *$\mathcal{F}$ tem um número finito de curvas algébricas invariantes. Denotemos por* $\mathrm{Sep}\,(\mathcal{F})$ *este conjunto:* (b) $gr(\mathrm{Sep}\,(\mathcal{F})) = gr(\mathcal{F}) + 2$.

Demonstração. A prova é baseada no Teorema de classificação das formas meromorfas fechadas em $\mathbb{C}P(2)$ (veja a Seção 5 do Capítulo II) e no Teorema do Índice de Camacho-Sad (veja a Seção 2 do Capítulo 3 e [12]).

Seja $\pi\colon M \to \mathbb{C}P(2)$ o morfismo de resolução de Λ e de $\mathrm{sing}(\mathcal{F}) \cap \Lambda$. Coloquemos $\mathcal{F}^* = \pi^*(\mathcal{F})$, $\pi^{-1}(\Lambda) = \Lambda^* \cup D$, onde Λ^*, $D = (\cup_{j=1}^k D_j)$ é a transformada estrita de Λ e $D_1, ..., D_k$ os divisores obtidos no processo de resolução. O Teorema 6.4.1 implica que $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma forma meromorfa Ω, a qual admite uma derivada logarítmica adaptada ao longo de Λ, digamos η. Esta forma, em princípio, é uma forma meromorfa na vizinhança V. No entanto, como $\mathbb{C}P(2) \setminus \Lambda$ é de Stein, o Teorema de extensão global de Levi, implica que ela se estende a uma forma meromorfa fechada em $\mathbb{C}P(2)$ (veja a Seção 4 do Apêndice). A hipótese (ii) e o Teorema de Darboux (veja a Seção 1 do Capítulo 3), implicam que $\mathcal{F}$ possui um número finito de curvas algébricas invariantes (verifique). Por outro lado, como vimos no Teorema 6.4.1, o divisor de pólos $(\eta)_\infty$ de η, contém Λ e todas as suas separatrizes locais (em V). Isto implica, em particular, que as folhas de $\mathcal{F}$ que contém estas separatrizes locais, são algébricas. Afirmamos que estas folhas, juntamente com Λ, são todas as folhas algébricas de $\mathcal{F}$. De fato, se L é uma folha algébrica qualquer de $\mathcal{F}$, então, pelo Teorema de Bézout, $\overline{L} \cup \Lambda \neq \emptyset$, ou seja, $L \subset \Lambda$, ou L contém alguma separatriz local de Λ, como queríamos. Vamos denotar por $\mathrm{Sep}\,(\mathcal{F})$ à união de todas as curvas algébricas invariantes por $\mathcal{F}$. Observe que $(\eta)_\infty = (\Omega)_\infty \cup \mathrm{Sep}\,(\mathcal{F})$.

Como na Observação 6.4.2, vamos supor que a forma Ω é polinomial num sistema de coordenadas afim $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P(2)$, tal que a reta do infinito, $L_\infty = \mathbb{C}P(2) \setminus \mathbb{C}^2$, não é invariante por $\mathcal{F}$. Vamos supor também que L_∞ é transversal a todas as componentes irredutíveis de $\mathrm{Sep}\,(\mathcal{F})$. Neste caso, a ordem do polo de Ω em L_∞ é $n = gr(\mathcal{F}) + 2$, e o resíduo de η em $L_\infty = -n$. Seja $(\eta)_\infty = L_\infty \cup (\cup_{j=1}^m \Lambda_j)$, onde $\Lambda_1 = \Lambda$ e $\Lambda_j = Z(f_j)$, sendo $f_1, ..., f_m$ polinômios homogêneos irredutíveis em $\mathbb{C}^3$. Vamos denotar por Λ_j^* a transformada estrita de Λ_j por π. Utilizaremos também as notações $\Omega^* = \pi^*(\Omega)$ e $\eta^* = \pi^*(\eta)$. Note que $\pi^{-1}(\cup_{j=1}^m \Lambda_j) = (\cup_{j=1}^m \Lambda_j^*) \cup (\cup_{j=1}^k D_j)$. Como conseqüência do que vimos acima, obtemos que as singularidades de $\mathcal{F}^*$ em $(\cup_{j=1}^m \Lambda_j^*) \cup (\cup_{j=1}^k D_j)$ estão contidas nos conjuntos da forma $\Lambda_j^* \cap D_i$ ou $D_i \cap D_j$ (esquinas da resolução).

Como η tem polo de ordem um ao longo de qualquer Λ_j, pela Proposição 2.5.11 do Capítulo 2, podemos escrever (em coordenadas homogêneas):

$$\eta = \sum_j \lambda_j \frac{df_j}{f_j} - n\,\frac{dg}{g}\ ,$$

onde g é homogêneo de grau um, $L_\infty = Z(g)$ e

$$(1)\ \sum_j \lambda_j\, gr(f_j) = n = gr(\mathcal{F}) + 2 \text{ (Teorema dos resíduos).}$$

Fixemos uma singularidade $p \in \Lambda_j^* \cap D$ de $\mathcal{F}^*$, digamos, $p \in \Lambda_j^* \cap D_\nu$. Note que Λ_j^* e D_ν se cortam transversalmente em p. Como vimos na prova do Teorema 6.4.1, existe um sistema de coordenadas $((x,y),U)$ tal que $\Lambda_j^* \cap U = (x=0)$, $D_\nu \cap U = (y=0)$, $\Omega^*|_U = h\,(x\,dy - \lambda\, y\, dx + t.o.s.)$. Neste caso, o índice de Camacho-Sad de $\mathcal{F}^*$ com respeito à separatriz definida por D_ν em p, é λ, ou seja $I(p, D_\nu) = \lambda$. Por abuso de linguagem, vamos denotar por f_i, a restrição do polinômio homogêneo f_i a um sistema de coordenadas afins que contém p. Podemos escrever $f_j \circ \pi(x,y) = x.y^{s_j}.u_j(x,y)$ e $f_i \circ \pi(x,y) = y^{s_k}.u_i(x,y)$, se $i \neq j$, onde as funções u_i são unidades em $p = (0,0)$. Note que $g(p) \neq 0$. Vemos então que

$$\eta^* = \pi^*(\eta) = \lambda_j \frac{dx}{x} + a_\nu \frac{dy}{y} + \frac{dv}{v}\ ,$$

onde $a_\nu = \sum_k \lambda_k.s_k = \mathrm{Res}_{\Lambda_j^*}(\eta^*)$ e $v(p) \neq 0$. Como vimos na prova do Lema 6.3.10, vale que $1 + \lambda = a_\nu\, \lambda + \lambda_j$, ou seja:

$$\lambda_j = 1 + (1 - a_\nu).I(p, D_\nu) \quad \Longrightarrow \quad I(p, D_\nu) = -\frac{\lambda_j - 1}{a_\nu - 1}.$$

Analogamente, se $p \in D_\mu \cap D_\nu$, então

$$I(p, D_\nu) = -\frac{a_\mu - 1}{a_\nu - 1}.$$

Seja $-w(D_\nu)$ o número de auto-intersecção de D_ν em M. Do Teorema do Índice de Camacho-Sad ([12]), obtemos:

$$-w(D_\nu) = \sum_{p \in D_\nu} I(p, D_\nu) = -\sum_j \sum_{p \in D_\nu \cap \Lambda_j^*} \frac{\lambda_j - 1}{a_\nu - 1} - \sum_j \sum_{p \in D_\nu \cap D_\mu} \frac{a_\mu - 1}{a_\nu - 1}\ ,$$

ou seja,

$$(2)\ w(D_\nu).(a_\nu - 1) = \sum_j \#(D_\nu \cap \Lambda_j^*)(\lambda_j - 1) + \sum_{\mu \neq \nu} \#(D_\nu \cap D_\mu).(a_\mu - 1) =$$

$$= \#(D_\nu \cap \Lambda_1^*)(\lambda_1 - 1) + \sum_{j \neq 1} \#(D_\nu \cap \Lambda_j^*)(\lambda_j - 1) + \sum_{\mu \neq \nu} \#(D_\nu \cap D_\mu).(a_\mu - 1).$$

Somamos agora sobre todos os D_ν obtendo,

$$\sum_\nu w(D_\nu).(a_\nu - 1) =$$

$$= (\lambda_1 - 1).\sum_{\nu} \#(D_\nu \cap \Lambda_1^*) + \sum_{j\neq 1}\left(\sum_{\nu} \#(D_\nu \cap \Lambda_j^*)\right)(\lambda_j - 1) + \sum_{\mu,\nu;\mu\neq\nu} \#(D_\nu \cap D_\mu).(a_\mu - 1).$$

Observamos agora que:

$$(3) \quad \sum_{\nu} \#(D_\nu \cap \Lambda_1^*)) = \#(\operatorname{sing} \mathcal{F}^* \cap \Lambda_1^*) \ ,$$

$$(4) \quad \sum_{\nu} \#(D_\nu \cap \Lambda_j^*) = gr(\Lambda_j).gr(\Lambda_1) = gr(f_j).gr(f_1) \ ,$$

se $j \neq 1$, já que

$$= gr(f_1).\left[\sum_{j\neq 1} \lambda_j\, gr(f_j) - \sum_{j\neq 1} gr(f_j)\right] = gr(f_1).\left[gr(\mathcal{F}) + 2 - \lambda_1.gr(f_1) - \sum_{j\neq 1} gr(f_j)\right]$$

$$(5) \sum_{\mu,\nu\mu\neq\nu} \#(D_\nu \cap D_\mu).(a_\mu - 1) = \sum_{\mu,\nu\mu\neq\nu} \#(D_\nu \cap D_\mu).(a_\nu - 1)$$

$$= \sum_{\nu\neq\mu D_\nu\cap\widetilde{\Lambda}\neq\phi} (a_\nu - 1)\#(D_\nu \cap D_\mu) + \sum_{\nu\neq\mu D_\nu\cap\widetilde{\Lambda}=\phi} (a_\nu - 1).\#(D_\nu \cap D_\mu).$$

$$= \sum_{D_\nu\cap\widetilde{\Lambda}=\phi} w(D_\nu).(a_\nu - 1) + \sum_{D_\nu\cap\widetilde{\Lambda}\neq\phi} (w(D_\nu) - 1).(a_\nu - 1) = \sum_{\nu} w(D_\nu).(a_\nu - 1) - \sum_{D_\nu\cap\widetilde{\Lambda}\neq\phi} (a_\nu - 1)$$

Mas por outro lado temos que

$$\sum_{p\in s(\widetilde{\mathcal{F}})\cap D_\nu} = \sum_{p\in s(\widetilde{\mathcal{F}})\cap D_\nu p\in D_\nu\cap\bigcup_{j\neq 1}\widetilde{\Lambda}_j} + \sum_{p\in s(\widetilde{\mathcal{F}})\cap D_\nu p\in D_\mu,\mu\neq\nu} + \sum_{p\in D_\nu\cap s(\widetilde{\mathcal{F}}) p\in\widetilde{\Lambda}} .$$

Portanto obtemos

$$-w(D_\nu) = \sum_{j\neq 1} -\#(D_\nu \cap \widetilde{\Lambda}_j).\frac{\lambda_j - 1}{a_\nu - 1}$$

e logo

$$-\#(D_\nu \cap \widetilde{\Lambda})\frac{(\lambda_1 - 1)}{a_\nu - 1} - \sum_{D_\mu\cap D_\nu\neq\phi\mu\neq\nu} \#(D_\mu \cap D_\nu).\frac{a_\mu - 1}{a_\nu - 1}$$

e então Agora, usando (1), (2), (a), (b) e (c) obtemos

$$(*)\ \ 0 = gr(f_1).\left[gr(\mathcal{F}) + 2 - \lambda_1.gr(f_1) - \textstyle\sum_{j\neq 1} gr(f_j)\right] + (\lambda_1 - 1).\#(\operatorname{sing}\mathcal{F}\cap\Lambda) - \textstyle\sum_{D_\nu\cap\widetilde{\Lambda}\neq\phi}(a_\nu - 1).$$

Aplicando agora o Teorema do Índice à curva $\widetilde{\Lambda}$ obtemos:

$$(gr(f_1))^2 - \#(\operatorname{sing}\mathcal{F} \cap \Lambda) = \sum_{D_\nu \cap \widetilde{\Lambda} \neq \phi} \operatorname{ind}(p_\nu, \widetilde{\Lambda})$$

onde $D_\nu \cap \widetilde{\Lambda} = \{p_\nu\}$ e $\operatorname{ind}(p_\nu, \widetilde{\Lambda}) = -\frac{a_\nu - 1}{\lambda_1 - 1}$. Portanto temos que

$$\sum_{D_\nu \cap \widetilde{\Lambda} \neq \phi} (a_\nu - 1) = (\lambda_1 - 1).[(gr(f_1))^2 - \#(\operatorname{sing}\mathcal{F} \cap \Lambda)]$$

Usando esta última equação e (*) obtemos

$$0 = gr(f_1).\left[gr(\mathcal{F}) + 2 - \sum_{j \geq 1} gr(f_j)\right]$$

e então $gr(\mathcal{F}) + 2 = \sum_{j \geq 1} gr(f_j) = gr(\operatorname{Sep}(\mathcal{F}))$. □

No teorema seguinte fazemos hipóteses em todas as singularidades de $\mathcal{F}$ que estejam sobre alguma curva algébrica invariante.

Teorema 6.4.6. *Sejam $\mathcal{F}$, e Λ como no Teorema 6.4.4. Suponha que:*

(i) *Todas as singularidades de $\mathcal{F}$ que estejam sobre alguma curva algébrica invariante são não degeneradas da forma $xdy - \lambda ydx + \mathrm{h.o.t.} = 0, \lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Q}_+$;*

(ii) *ao menos uma das singularidades de $\mathcal{F}$ em Λ é linearizável não ressonante;*

(iii) *$\mathcal{F}$ é transversalmente afim em alguma vizinhança de Λ menos Λ e suas separatrizes locais'*

Então $\mathcal{F}$ é uma folheação logarítmica e $gr(\mathcal{F}) + 2 = gr(\operatorname{Sep}(\mathcal{F}))$.

Demonstração. Como na prova do Teorema 6.4.4, dada qualquer carta afim $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P(2)$ tal que a reta $\mathbb{C}P(2)\backslash\mathbb{C}^2$ é não invariante e dado uma 1-forma polinomial $\Omega = P\,dy - Q\,dx$ que define $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}^2$, podemos obter uma 1-forma meromorfa η definida em uma vizinhança de Λ em $\mathbb{C}P(2)$ e que seja uma derivada logarítmica adaptada a Ω ao longo desta curva. Como $\mathbb{C}P(2)\backslash\Lambda$ é uma variedade de Stein, η se estende meromorficamente a $\mathbb{C}P(2)$ (veja [14]). Como na prova do Teorema 6.4.4 temos que $\eta = \sum\limits_j \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$ onde $\operatorname{Sep}(\mathcal{F}) \cap \mathbb{C}^2 = \bigcup (f_j = 0)$ e $\sum\limits_j \lambda_j \cdot gr((f_j)) = gr(\mathcal{F}) + 2$ como uma conseqüência do Teorema do Resíduo. Agora, de acordo com o Teorema 6.4.4 temos $\Sigma gr(f_j) = gr(\mathcal{F}) + 2$ e então $\sum\limits_j (\lambda_j - 1) \cdot gr(f_j) = 0$ e isto mostra que $\lambda_{j_o} \notin \{2, 3, \ldots\}$ para algum j_o. Usando agora o Teorema 6.4.1 concluímos que a curva algébrica $\Lambda_{j_o} = \overline{(f_{j_o} = 0)}$ invariante por $\mathcal{F}$, tem uma holonomia linearizável do mesmo modo que na prova do Teorema 6.4.1. Portanto, (como as singularidades de $\mathcal{F}$ em Λ são supostas não degeneradas) segue do Teorema 6.4.1 e de [14] que $\mathcal{F}$ é definida em $\mathbb{C}P(2)$ por uma forma meromorfa w tendo divisor polar de ordem 1 $(w)_\infty = \operatorname{Sep}(\mathcal{F})$. Pelo Lema de Integração [21] segue que w é logarítmica. □

Observação 6.4.7. Observamos que o Teorema 6.4.5 ainda vale se substituímos a condição (i) pela seguinte: (i') Todas as singularidades de $\mathcal{F}$ em alguma folha algébrica de $\mathcal{F}$ são de primeira ordem e exibem fator de integração local (ou seja, a folheação é dada por uma forma fechada meromorfa local em uma vizinhança de cada singularidade):

Com efeito, usando a abelianidade da holonomia de uma folha algébrica $\Lambda_{j_o} \backslash \operatorname{sing} \mathcal{F}$, como na prova acima, podemos colar as formas fechadas meromorfas locais dadas pelos fatores de integração locais em torno das singularidades, de modo a obter uma forma fechada meromorfa ω que descreve a folheação $\mathcal{F}$ em uma vizinhança da folha algébrica Λ_{j_o} (veja [14] ou [15] para um procedimento similar).

Portanto obtemos:

Teorema 6.4.8. *Sejam $\mathcal{F}$ e Λ como no Teorema 6.4.4. Suponha que:*

(i) *Todas as singularidades de $\mathcal{F}$ que estejam sobre alguma curva algébrica invariante são de primeira ordem e admitem fatores de integração local meromorfo;*

(ii) *ao menos uma das singularidades de $\mathcal{F}$ em Λ é linearizável não ressonante;*

(iii) *$\mathcal{F}$ é transversalmente afim em alguma vizinhança de Λ menos Λ e suas separatrices.*

Então $\mathcal{F}$ é dada por uma forma fechada racional ω em $\mathbb{C}P(2)$ e $gr(\mathcal{F}) + 2 = gr(\operatorname{Sep}(\mathcal{F}))$.

Finalmente, observamos que nos próximos resultados nós *não* pedimos que $\mathcal{F}$ exiba alguma singularidade linearizável em sua resolução. Entretanto, supomos que $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em todo $\mathbb{C}P(n)$ menos um conjunto algébrico invariante S de codimensão 1.

Teorema 6.4.9. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{C}P(n)$ que é transversalmente afim fora de um conjunto algébrico invariante de codimensão 1 $S \subset \mathbb{C}P(n)$. Suponha que $\mathcal{F}$ exibe somente singularidades de primeira ordem em alguma componente S_o de S. Então $gr(\mathcal{F}) + 2 = gr(S)$.*

Teorema 6.4.10. *Sejam $\mathcal{F}$, e S como no be as em Teorema 6.4.6 acima. Suponha que $\mathcal{F}$ tem somente singularidades não degeneradas em S. Então $\mathcal{F}$ é dada por uma forma fechada racional em $\mathbb{C}P(2)$ e $gr(\mathcal{F}) + 2 = gr(S)$. A folheação $\mathcal{F}$ é uma folheação logarı'tmica em $\mathbb{C}P(n)$ desde que $\mathcal{F}$ exiba somente singularidades não-ressonantes em S.*

Chamamos a atenção do leitor para o fato que ambos os Teoremas 4 e 5 são enunciados para folheações de codimensão 1 em $\mathbb{C}P(n)$. Lembramos que de acordo com a observação da §8 do Capítulo 1 de [73] definimos as hipóteses para uma tal folheação de codimensão 1 em $\mathbb{C}P(n)$ via o uso de seções 2-dimensionais $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}\big|_{\mathbb{C}P(2)}$ onde $\mathbb{C}P(2) \subset \mathbb{C}P(n)$ é linearmente mergulhado e em posição geral com respeito a $\mathcal{F}$.

Prova do Teorema 6.4.9. Podemos assumir que $n = 2$: Com efeito, se $\mathcal{F}$ é uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{C}P(n)$, então dada uma seção linearmente mergulhada em posição geral com respeito a $\mathcal{F}$, $\mathbb{C}P(2) \subset \mathbb{C}P(n)$ a folheação induzida $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}\big|_{\mathbb{C}P(2)}$ tem o mesmo grau que $\mathcal{F}$ (por exemplo por definição). Além disso, o conjunto singular de $\mathcal{F}^*$ consiste da intersecção $\operatorname{sing}\mathcal{F} \cap \mathbb{C}P(2)$ e das tangencias de $\mathcal{F}$ com $\mathbb{C}P(2)$. Uma tangencias de $\mathcal{F}$ com $\mathbb{C}P(2)$ origina singularidades que possuem integral primeira local holomorfa (de fato, se $p \in \mathbb{C}P(n)\backslash \operatorname{sing}\mathcal{F}$ então $\mathcal{F}$ tem uma integral primeira holomorfa em p) e portanto, estas são não dicríticas. Deste modo, temos que que $\mathcal{F}^*$ tem somente singularidades não dicríticas em $S \cap \mathbb{C}P(2)$. Portanto, assumimos que $n = 2$.

Seja $\Omega = P\,dy - Q\,dx$ uma 1-forma polinomial que define $\mathcal{F}$ em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ como na prova do Teorema 6.4.4, com S transversa à reta $\mathbb{C}P(2)\backslash\mathbb{C}^2$. Escrevemos $S \cap \mathbb{C}^2 = \bigcup\limits_j (f_j = 0)$, com f_j polinômio irredutível dois a dois relativamente primos. Como $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em $\mathbb{C}P(2)\backslash S$ temos a 1-forma η definida em $\mathbb{C}P(2)\backslash S$, fechada e meromorfa com divisor polar $(\eta)_\infty = (\Omega)_\infty = (\mathbb{C}P(2)\backslash\mathbb{C}^2)$ e satisfazendo as condições definidas na Proposição 6.2.2. Pelo Lema de Integração temos que $\eta = \sum_j \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + \frac{dF}{F}$ para alguma função holomorfa $F\colon \mathbb{C}^2\backslash S \to \mathbb{C}^*$. Pelo Teorema dos Resíduos, temos que

$$(*)\ \ \sum_j \lambda_j gr(f_j) = gr(\mathcal{F}) + 2.$$

Agora observamos que os mesmos argumentos usados na prova do Teorema 6.4.4 podem ser repetidos neste caso usando a equação (*) acima mesmo no caso em que a singularidade é não linearizável (note que estamos supondo que as singularidades de $\mathcal{F}$ são de primeira ordem).

Deixamos portanto o resto da prova para o leitor (Exercício 4). $\square$

Prova do Teorema 6.4.10. De acordo com o que observamos acima podemos supor que $n = 2$. Seja $\Omega = P\,dy - Q\,dx$, $\eta = \sum \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + \frac{dF}{F}$ como na prova do Teorema 6.4.5 acima. Como $\sum \lambda_j gr(f_j) = gr(\mathcal{F}) + 2$ e $\sum gr(f_j) = gr(\mathcal{F}) + 2$ temos que $\sum(\lambda_j - 1)gr(f_j) = 0$ e então existe $\lambda_{j_o} \notin \{2, 3, \ldots\}$. Agora, pomos $\Omega' = F.\Omega$ e $\eta' = \Sigma\lambda_j \frac{df_j}{f_j} = \eta - \frac{dF}{F}$. Então, de acordo com a Proposição 6.2.2, o par (Ω', η') define a mesma estrutura afim para $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(2)\backslash S$ e neste caso η' é meromorfa em $\mathbb{C}P(2)$. Afirmamos então:

Afirmação 6.4.11. *Para cada ponto regular $p \in \Lambda_{j_o}\backslash \operatorname{sing}\mathcal{F}$ existe uma carta local $(x, y) \in U$ tal que $p = (0, 0)$, $\Lambda_{j_o} \cap U = \{y = 0\}$, $\Omega' = F.g\,dy$ e $\eta' = \lambda_{j_o} \cdot \frac{dy}{y} + \frac{dg}{g}$. Além disso, se $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \widetilde{U}$ é* *uma outra tal carta com $\widetilde{x}(\widetilde{p}) = \widetilde{y}(\widetilde{p}) = 0$, $U \cap \widetilde{U} \neq \phi$ então temos $\widetilde{y} = c.y$ para alguma constante $c \in \mathbb{C}^*$.*

Esta afirmação é provada como o Lema 6.3.12 (1) pois $\lambda_{j_0} \notin \{2, 3, \ldots\}$. Usando a Afirmação 6.4.11 provamos que a holonomia da folha algébrica $\overline{(f_{j_o} = 0)} = \Lambda_{j_o}$ é linearizável no senso do Teorema 6.4.1. Procedendo como no Teorema 6.4.5 provamos então que $\mathcal{F}$ é uma folheação logarítmica.
□

Do mesmo modo como se deriva o Teorema 6.4.6, se pode obter (exercício 5):

Teorema 6.4.12. *Sejam $\mathcal{F}$, e S como no Teorema 6.4.9. Suponha que todas as singularidades de $\mathcal{F}$ sobre S são de primeira ordem e admitem fator de integração local meromorfo. Então $\mathcal{F}$ é dada por uma 1-forma fechada racional ω em $\mathbb{C}P(2)$ e $gr(\mathcal{F}) + 2 = gr(\text{Sep}\,(\mathcal{F}))$.*

6.5 Grupos de holonomia solúvel e folheações transversalmente afins

Nesta seção relacionaremos a existência de estruturas transversais afins no complementar de curvas compactas invariantes à solubilidade de grupos de holonomia associados a estas curvas. Lembramos que um subgrupo de difeomorfismos locais holomorfos $G \subset \text{Bih}(\mathbb{C}, 0)$ é dito *solúvel* se o grupo dos comutadores $[G, G]$ é um grupo abeliano (ver [Ce-Mo] para maiores detalhes). Em particular qualquer subgrupo abeliano $G \subset \text{Bih}(\mathbb{C}, 0)$ é um grupo solúvel. Um exemplo menos trivial de grupo solúvel é dado pelos subgrupos $G \subset \mathbb{H}_k$ onde

$$\mathbb{H}_k = \left\{ g \in \text{Bih}(\mathbb{C}, 0)/g(z) = \frac{\lambda z}{\sqrt[k]{1 + az^k}}\,; \lambda, a \in \mathbb{C} \right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Um teorema de Cerveau-Moussu ([Ce-Mo]) estabelece que, exceto por casos excepcionais, estes são os únicos grupos não abelianos solúveis.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em M^2 e seja $\Lambda \subset M^2$ uma curva analítica invariante. Sob condições genéricas em sing $\mathcal{F} \cap \Lambda$, temos que $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em alguma vizinhança de Λ menos Λ e suas separatrizes locais se, e somente se, a holonomia de Λ é um grupo solúvel em um sentido mais forte que passamos a definir:

Definição 6.5.1. Assuma que sing $\mathcal{F} \cap \Lambda$ é não-dicrítica. Dizemos que *a holonomia de Λ tem a propriedade* $(\mathcal{S})$ se: (i) O grupo de holonomia G_i de cada componente D_i do divisor da resolução $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}\big|\Lambda$; é ou bem abeliano *analiticamente normalizável* ou (ou seja, um grupo que mergulha analiticamente no fluxo de um campo de vetores holomorfo em $(\mathbb{C}, 0)$), ou bem um grupo solúvel *analiticamente normalizável* que possui mergulho analítico $G_i \subset \mathbb{H}_{k_i}$ com acima. Neste caso uma coordenada local que defina tal mergulho é dita uma *coordenada normalizante* para G.

(ii) Temos as seguintes condições de compatibilidade: Dada qualquer esquina $\{q\} = D_i \cap D_j$, tal que $\widetilde{\mathcal{F}}$ tem uma integral primeira holomorfa em uma vizinhança de q, digamos $x^q y^p$ com $D_i = (x = 0)$ e $D_j = (y = 0)$; então, se a holonomia G_j of D_j é não abeliana $G_j \subset \mathbb{H}_{k_j}$, temos $p\big|(k_j q)$ em $\mathbb{N}$. No caso em que ambos os grupos são não abelianos se tomamos coordenadas normalizantes z e w tais que os grupos de G_i, e G_j são da forma $z \mapsto \frac{\lambda z}{\sqrt[k_i]{1+az^{k_i}}}$ e $w \mapsto \frac{\lambda w}{\sqrt[k_j]{1+aw^{k_j}}}$, respectivamente então (via a *correspondência de Dulac* (veja prova da Proposição 4.5.1). (que é definida pela integral primeira local) temos

$$z^{k_i} = \frac{\alpha w^{k_j}}{1 + \beta w^{k_j}}$$

para alguma homografia $x \mapsto \frac{\alpha x}{1+\beta x}$.

Proposição 6.5.2. *Sejam $\mathcal{F}$, M e Λ como no Teorema 6.4.1. Assuma que cada componente D_j do divisor de resolução D de* $\operatorname{sing}\mathcal{F} \cap \Lambda$ *exibe alguma singularidade não ressonante linearizável. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{F}$ é transversalmente afim em alguma vizinhança de Λ menos Λ e suas separatrizes locais.*

(ii) *A holonomia de Λ tem a propriedade $(\mathcal{S})$.*

Em particular se $M \backslash \Lambda$ é uma variedade de Stein com M compacta então qualquer separatriz local de $\mathcal{F}$ por alguma singularidade em $\operatorname{sing}\mathcal{F} \cap \Lambda$ *é o germe de uma separatriz global de $\mathcal{F}$ em M, desde que* (i) *ou* (ii) *ocorra.*

A prova da Proposição 6.5.2 é baseada na caracterização dos grupos solúveis citada acima.

Utilizaremos o seguinte lema cuja prova é um cálculo direto e é deixada para o leitor (Exercício 6):

Lema 6.5.3. *Seja* $G \subset \operatorname{Bih}(\mathbb{C}, 0)$ *um subgrupo tal que:*

(i) *Existe uma coordenada holomorfa $y \in (\mathbb{C}, 0)$, $y(0) = 0$ tal que cada elemento $g \in G$ é da forma $g(y) = \frac{\lambda_g . y}{\sqrt[k]{1+a_g . y^k}}$; $\quad a_g \in \mathbb{C}, \lambda_g \in \mathbb{C}^*$, onde $k \in \{1, 2, \ldots\}$ é independente de g;*

(ii) *G contém um elemento não-periódico linearizável digamos, $g_o \in G$, $g_o(z) = \lambda_o \cdot z + \text{h. o. t.}$, $\lambda_o^n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Então existe uma coordenada holomorfa $z \in (\mathbb{C}, 0)$, $z(0) = 0$, tal que $g_o(z) = \lambda_o . z$, e cada $g \in G$ é da forma $g(z) = \frac{\lambda_g . z}{\sqrt[k]{1+b_g . z^k}}$; de fato, isto vale para qualquer coordenada holomorfa z que linearize g_o.*

Prova da Proposição 6.5.2. De acordo com (a prova do) Lema 6.3.4 (i) $\Rightarrow$ (ii), exceto pela condição de compatibilidade (ii). Esta condição é facilmente provada usando-se a expressão local $\widetilde{\Omega} = g(pxdy + qydx), \widetilde{\eta} = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} + \frac{dg}{g}$, em coordenadas convenientes em torno da esquina q, que admite uma integral primeira local holomorfa $x^n y^m$ (veja a prova da Proposição 2.2.1 e veja também [15] para maiores detalhes).

Procedemos agora a provar que (ii) $\Rightarrow$ (i): Seja G_i o grupo de holonomia de uma componente D_i do divisor D.

Caso 1: G_i é um grupo comutativo. Neste caso como G_i contém um elemento periódico não linearizável segue que G_i é linearizável em algum sistema de coordenadas (veja Lema 4.2.3 do Capítulo 4). Assim, $\widetilde{\mathcal{F}}$ é dada por uma forma fechada meromorfa definida numa vizinhança de D_i, digamos a forma $\widetilde{w}_i$. Temos ainda que $(\widetilde{w}_i)_\infty = D_i \cup \operatorname{sep}(D_i)$.

Caso 2: G é solúvel não comutativo. Neste caso como G_i contém um elemento linearizável não periódico segue que G_i é analiticamente conjugado a um subgrupo de $\mathbb{H}_{k_i}$; para um único $k_i \in \{1, 2, \ldots\}$ ([Ce-Mo]). Afirmamos então:

Afirmação 6.5.4. *Existe uma coleção de cartas $(x_\alpha, y_\alpha) \in U_\alpha$, $\alpha \in A$, tal que:* (i) $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha = V \backslash sep\,(D_i)$, *$V$ = alguma vizinhança de D_i em $\widetilde{M}$;* (ii) $U_\alpha \cap D_i = \{y_\alpha = 0\}$ *e $U_\alpha \cap s(\widetilde{\mathcal{F}}) = \phi$, $\forall\, \alpha \in A$;* (iii) $\widetilde{\mathcal{F}}\big|_{U_\alpha}$ *é dada por $dy_\alpha = 0$;* (iv) *Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ então $y_\alpha^k = h_{\alpha\beta}(y_\beta^k)$ para alguma homografia $h_{\alpha\beta} \in \mathbb{H}_1$.*

Prova da Afirmação 6.5.4. A afirmação é provada usando o mergulho $G_i \hookrightarrow \mathbb{H}_{k_i}$, Lema 6.3.4 e um procedimento similar ao usado na prova da Afirmação 4.6.3 do Capítulo 4. (Exercício 7). $\square$

Agora, para cada $\alpha \in A$ existe uma função holomorfa $g_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ tal que $\widetilde{\Omega}(x_\alpha, y_\alpha) = g_\alpha\, dy_\alpha$ em U_α. Definimos portanto o modelo local

$$\widetilde{\eta}_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) = (k_i + 1)\frac{dy_\alpha}{y_\alpha} + \frac{dg_\alpha}{g_\alpha} \quad \text{em} \quad U_\alpha.$$

Afirmação 6.5.5. *Em cada $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ temos $\widetilde{\eta}_\alpha = \widetilde{\eta}_\beta$.*

Prova da Afirmação 6.5.5. De fato, em $U_\alpha \cap U_\beta$ temos que

$$\widetilde{\Omega} = g_\alpha\, dy_\alpha = g_\beta\, dy_\beta$$

e

$$y_\alpha^{k_i} = \frac{\lambda_{\alpha\beta}\, y_\beta^{k_i}}{1 + a_{\alpha\beta}\, y_\beta^{k_i}}$$

de modo que

$$\frac{dy_\alpha}{y_\alpha^{k_i+1}} = \frac{1}{\lambda_{\alpha\beta}} \cdot \frac{dy_\beta}{y_\beta^{k_i+1}}$$

e que

$$g_\alpha y_\alpha^{k_i+1} = \lambda_{\alpha\beta}\, g_\beta y_\beta^{k_i+1}$$

e assim

$$(k_i+1)\frac{dy_\alpha}{y_\alpha} + \frac{dg_\alpha}{g_\alpha} = (k_i+1)\frac{dy_\beta}{y_\beta} + \frac{dg_\beta}{g_\beta}\,.$$

encerrando a prova. □

Segue da afirmação acima que existe uma 1-forma meromorfa $\widetilde{\eta}_i$ em $V\backslash\operatorname{sep}(D_i)$ com, $(\widetilde{\eta}_i)_\infty = (D_i \cup (\widetilde{\Omega})_\infty) \cap (V\backslash \operatorname{sep}(D_i))$ que define uma estrutura transversalmente afim para $\widetilde{\mathcal{F}}$ em $V\backslash(D_i \cup \operatorname{sep}(D_i))$. Esta forma $\widetilde{\eta}_i$ se estende às singularidades $s(\widetilde{\mathcal{F}}) \cap D_i$ como no Lema 6.3.10 e na parte (2) do caso (b) na prova do Teorema 6.4.1 Usando agora a condição (iii) na Definição 6.5.1 acima podemos colar $\widetilde{\eta}_i$ com as formas análogas construídas em vizinhanças dos D_i's e obter $\widetilde{\eta}$ em uma vizinhança de D em $\widetilde{M}$. Esta forma se projeta via blow-down e se estende (pelo Teorema de Hartogs) a uma forma fechada meromorfa η em uma vizinhança de $\Lambda = \pi(D)$ conforme requerido para que esta defina uma estrutura transversal afim para $\mathcal{F}$ nesta vizinhança menos $\Lambda \cup \operatorname{sep}(\Lambda)$ como enunciado. □

6.6 Folheações transversalmente projetivas

Até este momento temos restringido nosso estudado das folheações transversalmente homogêneas ao caso transversalmente afim. Estudaremos agora as folheações com uma estrutura transversal projetiva em algum aberto da variedade ambiente. Começamos lembrando a sua definição:

Definição 6.6.1. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão 1 em M. Dizemos que $\mathcal{F}$ é *transversalmente projetiva* em M se é possível escolher um atlas de submersões holomorfas $y_j \colon U_j \to \mathbb{C}$, definindo $\mathcal{F}$ em $M\backslash \operatorname{sing}\mathcal{F} = \bigcup U_j$ e tendo relações afins, $y_i = \frac{a_{ij}y_j + b_{ij}}{c_{ij}y + d_{ij}}$ para cada $U_i \cap U_j \neq \phi$, onde $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \mathbb{C}$ são localmente constantes com $a_{ij}d_{ij} - b_{ij}c_{ij} = 1$ em $U_i \cap U_j$.

Assim como no caso transversalmente afim existe uma formulação da existência de estruturas transversais projetivas em termos de 1-formas diferenciais:

Proposição 6.6.2. *Seja $\mathcal{F}$ folheação singular de codimensão 1 em M dada por uma 1-forma holomorfa integrável Ω suponha que existe uma 1-forma holomorfa η em M tal que $d\Omega = \eta \wedge \Omega$. A folheação $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em M se, e somente se, existe uma 1-forma holomorfa ξ em M satisfazendo:*

(i) $d\eta = \Omega \wedge \xi$;

(ii) $d\xi = \xi \wedge \eta$.

Além disso, dois tais ternos (Ω, η, ξ) e (Ω', η', ξ') definem a mesma estrutura projetiva para $\mathcal{F}$

se, e somente se, vale:

$$\Omega' = f\Omega; \eta' = \eta + \frac{df}{f} + 2g\Omega\,;\, \xi' = \frac{1}{f}(\xi - 2dg - 2g\eta - 2g^2\Omega);$$

para algumas funções holomorfas $f, g\colon M \to \mathbb{C}^*, \mathbb{C}$. *Em particular os ternos* (Ω, η, ξ) *e* $(f\Omega, \eta + \frac{df}{f}, \frac{1}{f}\,\xi)$ *definem a mesma estrutura transversal projetiva para* $\mathcal{F}$. *Agora, se* Ω*e*η *são meromorfas então temos:*

Se $\mathcal{F}$ *é transversalmente projetiva em* M *então existe uma 1-forma meromorfa* ξ *em* M *satisfazendo* $d\omega = \eta \wedge \omega$ *e* $d\xi = \xi \wedge \eta$.

Damos a seguir alguns exemplos importantes de folheações transversalmente projetivas:

Exemplo 6.6.3 (Folheações transversalmente projetivas em variedades simplesmente conexas)**.** Seja $\mathcal{F}$ definida por uma função meromorfa $f\colon M \to \overline{\mathbb{C}}$, que é uma integral primeira de $\mathcal{F}$, então $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em M como se vê facilmente tomando-se o atlas dado por $z = f$ onde f é holomorfa e $w = 1/f$ numa vizinhança do divisor polar de f. Reciprocamente vale: Qualquer folheação transversalmente projetiva definida em uma variedade simplesmente conexa admite uma integral primeira meromorfa: Com efeito, veremos como conseqüência da noção de desenvolvimento de uma folheação transversalmente projetiva, que a folheação regular $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\big|_{M\setminus \operatorname{sing}\mathcal{F}}$, admite uma integral primeira meromorfa em $M' = M\setminus \operatorname{sing}\mathcal{F}$ (que é simplesmente conexa), e que se estende por Hartogs a a uma integral primeira meromorfa em M, uma vez que codim.sing $\mathcal{F} \geq 2$.

Exemplo 6.6.4 (Folheações de Riccati)**.** Uma *folheação de Riccati* $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(2)$ é dada em alguma carta afim por $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P(2)$, por uma 1-forma polinomial $\Omega = p(x)dy - (y^2\,c(x) - yb(x) - a(x))dx$ onde p, a, b e c são polinômios. Motivados pelo caso afim definimos a 1-forma

$$\eta = 2\frac{dy}{y} + \frac{p' + b}{p}\,dx + \frac{2a}{yp}\,dx \text{ e também a 1-forma } \xi = \frac{-2a}{y^2p^2}\,dx.$$

Então o terno (Ω, η, ξ) satisfaz às relações estabelecidas na Proposição 6.6.2. Em conseqüência, a folheação $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em $\mathbb{C}P(2)$ menos o conjunto algébrico $\overline{\{x \in \mathbb{C} \mid p(x) = 0\} \times \mathbb{C}} \cup \overline{\mathbb{C} \times \{y = 0\}}$. Agora, exceto pelo caso $a(x) \not\equiv 0$, temos que apenas a componente $S = \{p(x) = 0\} \times \overline{\mathbb{C}}$ é $\mathcal{F}$-invariante, o que implica que a estrutura transversal projetiva deve se estender a $\mathbb{C}P(2)\setminus S$: Com efeito, de acordo com a Proposição 6.6.2 se definirmos

$$g = \frac{-1}{p(x)y}$$

então

$$\eta' = \eta + 2g\Omega = \frac{p' - b + 2yc}{p}\,dx \text{ e } \xi' = \xi - 2dg - 2g\eta - 2g^2\Omega = \frac{2c}{p^2}\,dx$$

definem um terno (Ω, η', ξ') que é holomorfo em $\mathbb{C}P(2)\backslash S$, e que dá uma estrutura transversal projetiva para $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(2)\backslash S$ e esta estrutura projetiva coincide com a anterior em $\mathbb{C}P(2)\backslash(S \cup \overline{\mathbb{C} \times \{y=0\}})$. A 1-forma η é fechada se, e somente se, $a \equiv 0$. Portanto, $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em $\mathbb{C}P(2)\backslash(S \cup \overline{\mathbb{C} \times \{y=0\}})$ se a reta projetiva $\overline{\{y=0\}}$ é invariante.

Exemplo 6.6.5. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente projetiva em M como na Proposição 6.6.2 e seja $\pi\colon N \to M$ uma aplicação holomorfa transversal a $\mathcal{F}$, então a folheação $\pi^*(\mathcal{F})$ é transversalmente projetiva em em N (veja Exemplo 6.3.4).

Exemplo 6.6.6. Seja α uma 1-forma meromorfa fechada em M e seja $f\colon M \to \overline{\mathbb{C}}$ uma função meromorfa. Definimos (Ω, η, ξ) por: $\Omega = df - f^2\alpha, \quad \eta = 2f\alpha \quad \text{e} \quad \xi = 2\alpha$. Então (Ω, η, ξ) é um terno projetivo e portanto define uma estrutura transversalmente projetiva em M menos um subconjunto analítico de codimensão 1 $S \subset M$, $S = (\alpha)_\infty \cup (f)_\infty$. Esta mesma conclusão vale para $\Omega_\lambda = \Omega + \lambda\alpha$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$. A folheação $\mathcal{F}(\Omega_\lambda)$ é transversalmente afim em algum aberto menor da forma $M\backslash S'$ onde $S' \supset S$, $S' = S \cup (f^2 - \lambda = 0)$. (Temos que $\frac{\Omega_\lambda}{f^2-\lambda} = \frac{df}{f^2-\lambda} - \alpha$ é fechada e holomorfa em $M\backslash S'$).

Exemplo 6.6.7. Seja $h\colon M \to \mathbb{C}^*$ uma função holomorfa tal que $d\xi = -\frac{dh}{2h} \wedge \xi$ onde ξ é holomorfa. Esta condição se escreve também como $d(\sqrt{h}.\xi) = 0)$. Seja F qualquer função holomorfa e escrevemos (para $\lambda \in \mathbb{C}$) $\Omega = F \cdot \left(\frac{dF}{F} - \frac{1}{2}\frac{dh}{h}\right) - \left(\frac{F^2}{2} - \frac{\lambda}{2}h\right).\xi$, $\eta = \frac{1}{2}\frac{dh}{h} + F \cdot \xi$. O terno (Ω, η, ξ) satisfaz às condições da Proposição 6.6.2 e logo $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega)$ é uma folheação transversalmente projetiva em M.

Exemplo 6.6.8 (Suspensão de um grupo de difeomorfismos)**.** Um método interessante de se obter folheações transversalmente projetivas em espaços fibrados tendo uma holonomia é dado pela suspensão de um grupo de difeomorfismos de $\overline{\mathbb{C}}$ (veja [35] e veja Capítulo1 Seção 1.7).
Seja M^n uma variedade complexa n-dimensional cujo grupo fundamental $\pi_1(M)$ tem um número finito de gerados digamos, $[\gamma_1], \ldots, [\gamma_r]$ satisfazendo algumas relações:
Então dados $f_1, \ldots, f_r \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ satisfazendo estas mesmas relações é fácil de se definir uma representação $h\colon \pi_1(M) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ que envia γ_j sobre f_j $(j = 1, \ldots, r)$.

Se consideramos a suspensão de h definida acima obtemos uma fibração $p\colon M_h \overset{\overline{\mathbb{C}}}{\to} \longrightarrow M$ e uma folheação $\mathcal{F}_h$ de codimensão 1 (e sem singularidades) em M_h^{n+1} que é transversa às fibras $p^{-1}(x) \cong \overline{\mathbb{C}}$ e tal que a holonomia de qualquer fibra $\overline{\mathbb{C}} \cong p^{-1}(x)$ é conjugada ao subgrupo $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Por exemplo, se M é uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 1$ então temos a construção acima com $r = 2g$ e uma única relação. Um outro caso interessante é quando $M = \overline{\mathbb{C}}\backslash\{p_1, \ldots, p_{r+1}\}$ para algum $p_j \in \overline{\mathbb{C}}$, $(j = 1, \ldots, r+1)$ distinct. Este é o caso no qual podemos incluir as folheações de Riccati devido a o Teorema de Realização provado em [56].

6.7 Desenvolvimento de uma folheação transversalmente projetiva

O conceito de desenvolvimento de uma folheação transversalmente homogênea será de fundamental importância no estudo das folheações transversalmente projetivas. Este conceito será apresentado para folheações transversalmente projetivas, mas é definido de modo análogo para folheações transversalmente homogêneas em geral e dá uma outra interpretação da Proposição 6.6.2 acima (veja também [35]). Começamos com algumas considerações básicas:

O *grupo unimodular* $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ das matrizes complexas $\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ com determinante $xv - yu = 1$ age na esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ pelas transformações de Möbius $\left(z \mapsto \frac{xz+u}{yz+v}\,; z \in \mathbb{C} \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}}\right)$. Como $\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -x & -u \\ -y & -v \end{pmatrix}$ definem a mesma transformação de Möbius que a induzida pela projetivização $\mathbb{P}\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ em $\overline{\mathbb{C}}$. O grupo de isotropia do ponto no infinito $\infty = \overline{\mathbb{C}} \backslash \mathbb{C}$ é naturalmente identificado com o grupo afim $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ das transformações $(z \in \mathbb{C} \mapsto az + b)$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. Assim o espaço homogêneo correspondente é $\frac{\mathbb{P}\,\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})}{\mathrm{Aff}(\mathbb{C})} \cong \overline{\mathbb{C}}$.

Estudamos a álgebra de Lie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Lema 6.7.1. *As formas de Pfaff* $\Omega = xdy - ydx$, $\eta = 2(vdx - udy)$ *e* $\xi = 2(vdu - udv)$ *são globalmente definidas e constituem uma base das formas invariantes à direita sobre* $\mathbb{P}\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. *Além disso, o terno* (Ω, η, ξ) *satisfaz às seguintes relações:*

$$
\begin{aligned}
d\Omega &= \eta \wedge \Omega \\
d\eta &= \Omega \wedge \xi \\
d\xi &= \xi \wedge \eta
\end{aligned}
$$

A prova deste lema é um cálculo direto e é deixada para o leitor (veja também [35] pag. 301). Vejamos agora que estas relações definem precisamente a álgebra de Lie de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Primeiro fazemos algumas considerações gerais sobre grupos de Lie.

Seja G um grupo de Lie complexo e denote por $\mathcal{G}$ a álgebra de Lie de G. A *forma de Maurer-Cartan* de G é a única 1-forma $w\colon TG \to \mathcal{G}$ satisfazendo:
i) $w(X) = X$, $\forall\, X \in \mathcal{G}$ ii) $Lg^*w = w$, $\forall\, g \in G$; onde $Lg\colon G \hookrightarrow G$ é a translação á esquerda $x \in G \mapsto gx \in G$, $g \in G$ fixadas.
A 1-forma w satisfaz à *equação de Maurer-Cartan* $dw + \frac{1}{2}[w,w] = 0$.
De fato, dados $X, Y \in \mathcal{G}$ temos que

$$dw(X,Y) = X.w(Y) - Y.w(X) - w([X,Y]) = -[X.Y].$$

Mas

$$[w, w](X, Y) = [w(X), w(Y)] - [w(Y), w(X)] = 2[X, Y]$$

pois X e Y pertencem à álgebra de Lie $\mathcal{G}$ e $w(X) = X$, $\forall\, X \in \mathcal{G}$.
Assim temos que $dw(X, Y) + \frac{1}{2}[w, w](X, Y) = 0$, $\forall\, X, Y \in \mathcal{G}$ o que prova a equação de Maurer-Cartan.
Seja agora $\{X_1, \ldots, X_n\}$ uma base de $\mathcal{G}$. Temos que $[X_i, X_j] = \sum\limits_k c_{ij}^k X_k$ para algumas constantes $c_{ij}^k \in \mathbb{C}$, anti-simétricas com respeito a (i, j). Os c_{ij}^k's são as *constantes de estrutura* de G na base $\{X_1, \ldots, X_n\}$.
Seja agora $\{w_1, \ldots, w_n\}$ a base dual à base $\{X_1, \ldots, X_n\}$, com w_j invariante à esquerda. Temos que $dw_k = -\frac{1}{2} \sum\limits_{i,j} c_{ij}^k w_i \wedge w_j$ e portanto é fcil ver que $w = \sum\limits_k w_k X_k$ é a forma de Maurer-Cartan de G.

Teorema 6.7.2 (Darboux-Lie, [35] pag. 230)**.** *Seja α uma 1-forma holomorfa em uma variedade complexa M tomando valores na álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de G. Suponha que α satisfaz à equação de Maurer-Cartan $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$. Então α é localmente o pull-back da forma de Maurer-Cartan de G por uma aplicação holomorfa. Além disso, este pull-back é globalmente definido se M é simplesmente-conexa; e duas tais aplicações diferem por uma translação à esquerda em G.*

Corolário 6.7.3. *Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 1-formas holomorfas em uma variedade complexa holomorfa M. Suponha que $d\alpha_k = -\frac{1}{2} \sum\limits_{i,j} c_{ij}^k \alpha_i \wedge \alpha_j$ onde os c_{ij}^k's são as constantes de estrutura de um grupo de Lie G numa base $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Então, localmente, existem aplicações holomorfas $\pi\colon U \subset M \to G$ tais que $\alpha_j = \pi^* w_j$, $\forall\, j$ onde $\{w_1, \ldots, w_n\}$ é a base dual invariante à esquerda de $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Além disso se M é simplesmente conexa, então podemos tomar $U = M$ e se $\pi\colon U \to G$, $\overline{\pi}\colon \overline{U} \to G$ são duas tais aplicações com $U \cap \overline{U} \neq \phi$ e conexo então temos que $\overline{\pi} = Lg \circ \pi$ para alguma translação à esquerda Lg de G.*

Corolário 6.7.4. *Sejam Ω, η, ξ 1-formas holomorfas em M satisfazendo: $d\Omega = \eta \wedge \Omega$, $d\eta = \Omega \wedge \xi$ e $d\xi = \xi \wedge \eta$. Então localmente temos $\Omega = xdy - ydx$, $\eta = 2(vdx - udy)$ e $\xi = 2(vdu - udv)$ para alguma matriz holomorfa $\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} : U \subset M \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Se M é simplesmente conexa podemos escolher $U = M$. Além disso, dadas duas tais trivializações $\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} : U \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ e $\begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{u} \\ \tilde{y} & \tilde{v} \end{pmatrix} : \widetilde{U} \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ com $U \cap U \neq \phi$ conexo então temos que $\begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{u} \\ \tilde{y} & \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ para alguma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Além disso podemos tomar $U = M$ se M é simplesmente conexa.*

Como $xdy - ydx = x^2.d\left(\frac{y}{x}\right)$ podemos concluir que se M é simplesmente conexa então Ω define uma folheação holomorfa de codimensão um que admite uma integral primeira meromorfa.

A proposição seguinte é uma versão de um resultado de [35] pag.214.

Proposição 6.7.5. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa não-singular de codimensão 1 em M. Suponha que $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em M. Então existem um homomorfismo $h\colon \pi_1(M) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, um espaço de recobrimento transitivo $p\colon P \to M$ correspondendo ao núcleo de $H = \mathrm{Ker}(h) \subset \pi_1(M)$ e uma submersão meromorfa $\Phi\colon P \to \overline{\mathbb{C}}$ satisfazendo:*
i) *Φ é h-equivariante que significa que $\Phi(\alpha \circ x) = h(x) \circ \Phi$, $\forall\, x \in P$, $\forall\, \alpha \in \pi_1(M)$.*
ii) *A folheação $p^*\mathcal{F}$ coincide com a folheação definida pela submersão Φ.*

Tal construção é chamada um *desenvolvimento da folheação* $\mathcal{F}$ e pode ser definida para qualquer folheação transversalmente homogênea (veja [35] pag. 209).

Daremos uma idéia da prova da Proposição 6.7.5 de acordo com [35]:

Seja $\{y_i\colon U_i \to \mathbb{C}\}_{i\in I}$ uma estrutura transversal projetiva para $\mathcal{F}$ em M como na Definição 6.6.1. Denotemos por f_{ij} a transformação de Möbius $f_{ij}\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ tal que $y_i = f_{ij} \circ y_j$ in $U_i \cap U_j \neq \phi$.

Podemos identificar f_{ij} de modo natural com um elemento de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Agora seja E o espaço obtido como a soma dos $U_i \times G$, $i \in I$ onde $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Denotemos por G_1 o subgrupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ gerado pelos f_{ij}'s. Considere em E a relação de equivalência que identifica $(x,y) \in U_i \times G$, onde $x \in U_i \cap U_j$, com $(x, f_{ij} \circ g) \in U_j \times G$.

Denotemos por P o espaço quociente $E/\sim$. Então P é um fibrado principal $p\colon P \to M$ tendo um grupo estrutural discreto $G_1 \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, P sendo definido pelo cociclo (U_i, f_{ij}). O recobrimento transitivo $p\colon P \to M$ tem G_1 como grupo de automorfismos de modo que existe um homomorfismo natural $h\colon \pi_1(M) \to G_1 \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Agora, em cada $U_i \times G$ podemos construir uma submersão holomorfa $\Phi_i\colon U_i \times G \to \overline{\mathbb{C}}$ pondo $\Phi_i(x,g) = g(y_i(x))$. A submersão $\Phi\colon P \to \overline{\mathbb{C}}$ é construída pela colagem das submersões Φ_i. Finalmente observamos que se P não é conexo podemos substituir este espaço por uma de suas componentes conexas. □

Corolário 6.7.6. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não singular transversalmente projetiva numa variedade simplesmente conexa M. Então $\mathcal{F}$ é dada por uma submersão meromorfa $f\colon M \to \overline{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. Este corolário é uma conseqüência direta do Corolário 6.7.4 acima, mas pode também ser provado usando-se a Proposição 6.7.5: Com efeito, como M é simplesmente conexa, segue da Proposição 6.7.5 que $H = \mathrm{Ker}(h) \subset \pi_1(M) = 0$ de modo que $H = 0$ e então $P = M$. Assim o Corolário 6.7.6 segue de (ii) desta mesma Proposição 6.7.5. □

Observação 6.7.7. i) $\alpha \in \pi_1(M)$ age em P do seguinte modo: Dado $x \in P$ definimos $\alpha \cdot x$ como o ponto final do levantamento $\tilde{\alpha}_x$, do caminho α_x baseado no ponto $p(x)$.

Na prova da Proposição 6.6.2 necessitaremos também dos seguintes lemas:

Lema 6.7.8. *Sejam* $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \colon U \subset \mathbb{C}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ *be funções meromorfas satisfazendo:*
i) $ydx - xdy = \tilde{y}d\tilde{x} - \tilde{x}d\tilde{y}$
ii) $\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} = \frac{ax+by}{cx+dy}\,, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Então $\tilde{x} = \varepsilon.(ax+by)$ *e* $\tilde{y} = \varepsilon.(cx+dy)$ *para alguma* $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\varepsilon^2 = 1$.

Demonstração. De (i) temos que $y^2\, d\left(\frac{x}{y}\right) = \tilde{y}^2 . d\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right)$ e de (ii) temos que $\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} = \frac{a \cdot \frac{x}{y} + b}{c\frac{x}{y} + d}$ e então

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right) &= \frac{ad-bc}{\left(c\frac{x}{y}+d\right)^2} \cdot d\left(\frac{x}{y}\right) = \\ &= \frac{1}{\left(c \cdot \frac{x}{y} + d\right)^2} \cdot d\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

Portanto temos que

$$\tilde{y}^2 \cdot \frac{1}{\left(c \cdot \frac{x}{y} + d\right)^2} = y^2 \quad \text{e Então} \quad \tilde{y} = \varepsilon.(cx+dy)$$

onde $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\varepsilon^2 = 1$. de (ii) obtemos $\tilde{x} = \varepsilon.(ax+by)$. □

Lema 6.7.9. *Sejam* $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \colon U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *funções meromorfas satisfazendo* $\tilde{x} = ax + by$, $\tilde{y} = cx + dy$ *para alguma* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. *Então* $xdy - ydx = \tilde{x}d\tilde{y} - \tilde{y}d\tilde{x}$.

Demonstração. de um cálculo direto obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{x}\, d\tilde{y} - \tilde{y}\, d\tilde{x} &= (c \cdot dx + d \cdot dy)(ax+by) - \\ &\quad - (a \cdot dx + b \cdot dy)(cx+dy) \\ &= (ad-bc)x \cdot dy - (ad-bc)y \cdot dx \\ &= x\, dy - y\, dx. \end{aligned}$$

□

Prova da Proposição 6.6.2. Suponhamos $\mathcal{F}$ transversalmente projetiva em M^n, digamos, $\{f_i\colon U_i \to \mathbb{C}\}$ é uma estrutura transversal projetiva para $\mathcal{F}$ em $M\setminus \operatorname{sing}\mathcal{F}$. Em cada U_i temos que

$$\Omega = -g_i\, df_i \quad \text{para alguma função holomorfa } g_i \in \mathcal{O}(U_i)^*(0)$$

Em cada $U_i \cap U_j \neq \phi$ temos que:

$$g_i\, df_i = g_j\, df_j \tag{6.1}$$

$$f_i = \frac{a_{ij} f_j + b_{ij}}{c_{ij} f_j + d_{ij}} \quad \text{como na Definição 6.6.1}$$

Como $d\Omega = d(-g_i\, df_i) = \frac{dg_i}{g_i} \wedge \Omega$ temos que

$$\eta = \frac{dg_i}{g_i} - h_i \Omega \tag{6.2}$$

para alguma função holomorfa h_i em U_i.

Definimos $x_i, y_i, u_i, v_i\colon U_i \to \mathbb{C}$ do seguinte modo:

$$y_i^2 = g_i, \quad \frac{x_i}{y_i} = f_i, \quad h_i = \frac{2v_i}{y_i} \quad \text{e} \quad x_i v_i - y_i u_i = 1.$$

Portanto temos que:

$$\Omega = x_i\, dy_i - y_i\, dx_i \tag{6.3}$$

e

$$\eta = 2(v_i\, dx_i - u_i\, dy_i) \tag{6.4}$$

Isto motiva os seguintes modelos locais (veja Corolário 6.7.6):

$$\xi_i = 2(v_i\, du_i - u_i\, dv_i) \tag{6.5}$$

em U_i.

É então fácil de checar que:

$$d\xi_i = \xi_i \wedge \eta, \quad d\eta = \Omega \wedge \xi_i \quad \text{em} \quad U_i.$$

Podemos assumir que dx_i e dy_i são independentes para todo $i \in I$: in fact $dx_i \wedge dy_i = 0 \Rightarrow d\Omega\big|_{U_i} = 2\, dx_i \wedge dy_i = 0 \Rightarrow d\Omega = 0$ em M (podemos assumir que M é conexa) $\Rightarrow$ temos que $0 = d\Omega = \eta \wedge \Omega$ de modo que $\eta = h\Omega$ para alguma função holomorfa $h\colon M \to \mathbb{C} \Rightarrow$ podemos escolher $\xi = \frac{h^2\Omega}{2} + h\eta + dh$ que satisfaz às relações $d\eta = \Omega \wedge \xi$ e $d\xi = \xi \wedge \eta$.

Afirmação 6.7.10. *$\xi_i = \xi_j$ in each $U_i \cap U_j \neq \phi$ e portanto os ξ_i's podem ser colados em uma 1-forma holomorfa ξ in $M\setminus \operatorname{sing}\mathcal{F}$ satisfazendo às condições do enunciado.*

Demonstração. De (2) e (4) obtemos

$$\frac{x_i}{y_i} = \frac{a_{ij}x_j + b_{ij}y_j}{c_{ij}x_j + d_{ij}y_j}\,. \tag{6.6}$$

Portanto de acordo com o Lema 6.7.1 temos que

$$x_i = \varepsilon.(a_{ij}x_j + b_{ij}x_j), \quad y_i = \varepsilon.(c_{ij}x_j + d_{ij}y_j) \qquad \varepsilon^2 = 1. \tag{6.7}$$

Usando (10) e (6) obtemos:

$$(a_{ij}v_i - c_{ij}u_i)dx_j + (b_{ij}v_i - d_{ij}u_i)dy_j = \varepsilon.(v_j\,dx_j - u_j\,dy_j)$$

e Portanto:

$$\begin{aligned} edv_j &= a_{ij}\,v_i - c_{ij}\,u_i \\ u_j &= -b_{ij}\,v_i + d_{ij}\,u_j \end{aligned} ed(11 \tag{6.8}$$

Segue de (11) e do Lema 6.7.8 que

$$v_i\,du_i - u_i\,dv_i = v_j\,du_j - u_j\,dv_j$$

o que prova a Afirmação 6.7.10.

□

Afirmação 6.7.11. *Temos que* $\xi = \xi_i = h_i^2\frac{\Omega}{2} + h_i\eta + dh_i$ *em cada* U_i.

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned} h_i^2\eta &= \frac{4v_i^2}{y_i^2}\,(x_i\,dy_i - y_i\,dx_i) \\ h_i\eta &= \frac{4v_i}{y_i}\,(v_i\,dx_i - u_i\,dy_i) \\ dh_i &= 2d\left(\frac{v_i}{y_i}\right) \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{h_i^2\Omega}{4} + \frac{h_i\eta}{2} + \frac{dh_i}{2} = \frac{v_i^2}{y_i}\,dx_i - \frac{v_i}{y_i^2}\,(x_iv_i - 1)dy_i + \frac{dv_i}{y_i}\,.$$

Por outro lado um cálculo direto mostra que

$$\frac{\xi_i}{2} = v_i\,du_i - u_i\,dv_i = \frac{v_i^2}{y_i}\,dx_i - \frac{v_i}{y_i}(x_iv_i - 1)dy_i + \frac{dv_i}{y_i}\,.$$

e portanto a Afirmação 6.7.11 é válida. □

Como cod sing $\mathcal{F} \geq 2$ segue que ξ se estende holomorficamente a M. Isto prova a primeira parte.

Assumimos agora que (Ω, η, ξ) é dada como no enunciado da Proposição 6.6.2:

Afirmação 6.7.12. *Dado qualquer ponto $p \in M \backslash \operatorname{sing} \mathcal{F}$ existem funções holomorfas $x, y, u, v \colon U \to \mathbb{C}$ definidas em uma vizinhança aberta $U \ni p$ tais que: $\Omega = xdy - ydx$, $\eta = 2(vdx - udy)$ e $\xi = 2(vdu - udv)$.*

Demonstração. Esta afirmação é uma conseqüência do Teorema de Darboux-Lie (veja Corolário 6.7.6), mas podemos dar uma prova alternativa como segue:
Escrevemos localmente $\Omega = -gdf = xdy - ydx$ e $\eta = \frac{dg}{g} - h\Omega = 2(vdx - udy)$ como na prova da primeira parte. Usando a Afirmação 6.7.11 e a última parte da Proposição 6.7.5 obtemos localmente

$$\xi = \frac{h^2\Omega}{2} + h\eta + dh + \ell.\Omega$$

para alguma função holomorfa ℓ satisfazendo $\frac{d\ell}{-2\ell} \wedge \Omega = d\Omega$. Esta última igualdade implica que $d(\sqrt{\ell}.\Omega) = 0$ e existe $\ell = \frac{r(f)}{g^2}$ para alguma função holomorfa $r(z)$. Agora, buscamos funções holomorfas $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ e $\tilde{h}$ satisfazendo:

$$\Omega = -\tilde{g}d\tilde{f}, \quad \eta = \frac{d\tilde{g}}{\tilde{g}} - \tilde{h}\Omega,$$
$$\xi = \frac{\tilde{h}^2\Omega}{2} + \tilde{h}\eta + d\tilde{h}.$$

Tentamos obter $\tilde{f} = U(f)$ para função holomorfa que não se anula $U(z)$.
Usando $\Omega = gdf = -\tilde{g}d\tilde{f}$ obtemos $\tilde{g} = \frac{g}{U'(f)}$. Usando $\eta = \frac{dg}{g} - d\Omega = \frac{d\tilde{g}}{\tilde{g}} - \tilde{h}\Omega$ obtemos $\tilde{h} = h - \frac{U''}{gU'}$.
Usando $\xi = \frac{h^2\Omega}{2} + h\eta + dh + \ell\Omega = \frac{\tilde{h}^2\Omega}{2} + \tilde{h}\eta + d\tilde{h}$ obtemos $d\left(\frac{U''(f)}{U'(f)}\right) = r(f)df$.
Portanto é possível escrever Ω, η e ξ como no enunciado da Afirmação 6.7.12: definimos $x = \tilde{f}y$, $y = \sqrt{\tilde{g}}$, $v = \frac{\tilde{h}y}{2}$ e $u = \frac{xv-1}{y}$ como na primeira parte da Prova.
Assim provamos a Afirmação 6.7.12. □

Usando a Afirmação 6.7.12 e o Lema 6.7.9 provamos que $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em $M \backslash \operatorname{sing} \mathcal{F}$, ou seja, em M.
A última parte da Proposição 6.6.2 pode ser provada usando a última parte da Proposição 3.20 pag. 262 de [35] ou pode ser provada sem dificuldades usando a relação estabelecida acima entre estrutura projetiva e as trivializações locais para Ω, η e ξ : por exemplo, provamos o seguinte:

Afirmação 6.7.13. *(Ω,η,ξ) e $(f\Omega,\eta+\frac{df}{f},\frac{1}{f}\,\xi)$ definem a mesma estrutura transversal projetiva para $\mathcal{F}$, para qualquer função holomorfa $f\colon M\to\mathbb{C}^*$.*

Demonstração. Usando a notação da primeira parte definimos $\hat{x}_i=\sqrt{f}\,.\,x_i$, $\hat{y}_i=\sqrt{f}\,.\,y_i$, $\hat{u}_i=\frac{1}{\sqrt{f}}\,.\,u_i$ e $\hat{v}_i=\frac{1}{\sqrt{f}}\,.\,v_i$. Então:

$$\begin{aligned} f\Omega &= \hat{x}_i\,d\hat{y}_i-\hat{y}_i\,d\hat{x}_i\\ \eta+\frac{df}{f} &= 2(\hat{v}_i\,d\hat{x}_i-\hat{u}_i\,d\hat{y}_i)\quad \text{e}\\ \frac{1}{f}\,\xi &= 2(\hat{v}_i\,d\hat{u}_i-\hat{u}_i\,d\hat{v}_i)\end{aligned}$$

Além disso temos que

$$\frac{\hat{x}_i}{\hat{y}_i}=\frac{x_i}{y_i}=\frac{a_{ij}x_j+b_{ij}y_j}{c_{ij}x_j+d_{ij}y_j}=\frac{a_{ij}\hat{x}_j+b_{ij}\hat{y}_j}{c_{ij}\hat{x}_j+d_{ij}\hat{y}_j}$$

e isto prova a Afirmação 6.7.13. □

Agora, observamos que se (Ω,η) é um par de 1-formas meromorfas e se $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em M, então os mesmos passos da primeira parte da prova acima se repetem para construir uma 1-forma meromorfa ξ satisfazendo às relações do enunciado. □

6.8 Ternos meromorfos projetivos

Motivados pela Proposição 6.6.2 formulamos a seguinte definição:

Definição 6.8.1. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em M. Um terno (Ω,η,ξ) de 1-formas meromorfas em M é chamado um *terno projetivo* se satisfaz às *relações projetivas*:

$$d\Omega=\eta\wedge\Omega,\ d\eta=\Omega\wedge\xi,\ d\xi=\xi\wedge\eta$$

Dizemos que este é um terno projetivo *para* $\mathcal{F}$ se $\mathcal{F}$ é dada por Ω, fora do divisor de pólos $(\Omega)_\infty$.

Investigamos agora a relação entre dois ternos projetivos para uma mesma folheação:

Proposição 6.8.2. *Sejam (Ω,η,ξ) e (Ω',η',ξ') ternos meromorfos projetivos para $\mathcal{F}$ em M. Então temos que*

$$\Omega'=f\Omega,\ \eta'=\eta+\frac{df}{f}+2g\Omega',\ \xi'=\frac{1}{f}\left(\xi-2dg-2g.\left(\eta+\frac{df}{f}\right)-2g^2\Omega'\right)+\ell\Omega$$

para algumas funções meromorfas f, g e ℓ satisfazendo

$$d\Omega' = \frac{d\ell}{-2\ell} \wedge \Omega'$$

Em particular, se (Ω, η, ξ) e (Ω, η, ξ') definem ternos projetivos para $\mathcal{F}$ então $\xi' = \xi + \ell.\Omega$ para alguma função meromorfa ℓ com $d\Omega = \frac{-d\ell}{2\ell} \wedge \Omega$.

Demonstração. Primeiro consideramos o caso em que $\Omega' = \Omega$, $\eta' = \eta$, isto é, (Ω, η, ξ) e (Ω, η, ξ') são ternos projetivos para $\mathcal{F}$ em M.

Afirmação 6.8.3. *Temos que $\xi' = \xi + \ell.\Omega$ para alguma função meromorfa $\ell\colon M \to \overline{\mathbb{C}}$ satisfazendo $d\Omega = -\frac{d\ell}{2\ell} \wedge \Omega$.*

Demonstração. Temos que $(\xi - \xi') \wedge \Omega = -d\eta - (-d\eta) = 0$ e portanto $\xi' = \xi + \ell.\Omega$ para alguma meromorfa ℓ. Usando $d\xi = \xi \wedge \eta$ e $d\xi' = \xi' \wedge \eta$ obtemos $d\xi + d\ell \wedge \Omega + \ell d\Omega = d\xi' = (\xi + \ell.\Omega) \wedge \eta = \xi \wedge \eta + \ell\Omega \wedge \eta = d\xi + \ell\Omega \wedge \eta$ e assim $d\ell \wedge \Omega + \ell d\Omega = \ell\Omega \wedge \eta = -\ell d\Omega$ e logo $2\ell d\Omega = -d\ell \wedge \Omega$ o que prova a Afirmação 6.8.3. $\square$

Agora provaremos o caso geral. Como Ω e Ω' definem a mesma folheação temos que $\Omega' = f.\Omega$ para alguma função meromorfa f. Como $d(f\Omega) = \left(\frac{df}{f} + \eta\right) \wedge f\Omega$, temos que $\left[\eta' - \left(\eta + \frac{df}{f}\right)\right] \wedge \Omega' = 0$ e portanto $\eta' = \eta + \frac{df}{f} + 2g\Omega'$ para alguma função meromorfa g. Agora, substituindo (Ω', η', ξ') por $\left(\frac{1}{f}\Omega', \eta' - \frac{df}{f}, f.\xi'\right)$ podemos assumir que $f \equiv 1$ de modo que $\Omega' = \Omega$ e $\eta' = \eta + 2g\Omega$. Neste caso observamos que se definirmos $\widetilde{\xi} = \xi - 2dg - 2g\eta - 2g^2\Omega$ então temos que $d\eta' = \Omega' \wedge \widetilde{\xi}$, $d\widetilde{\xi} = \widetilde{\xi} \wedge \eta'$. Usando então a primeira parte da prova concluímos que $\xi' = \widetilde{\xi} + \ell.\Omega'$ para alguma função holomorfa ℓ satisfazendo $d\Omega' = -\frac{d\ell}{2\ell} \wedge \Omega'$. Portanto temos que $\Omega' = f\Omega, \eta' = \eta + \frac{df}{f} + 2g\Omega', \xi' = \frac{1}{f}.\left(\xi - 2dg - 2g\left(\eta + \frac{df}{f}\right) - 2g^2\Omega'\right) + \ell\Omega$ conforme enunciado. $\square$

Observação 6.8.4. Nas condições da Proposição 6.8.2 acima temos que se supomos que $\mathcal{F}$ **não** é transversalmente afim em abertos da forma $M \backslash S$, onde $S \subset M$ é um subconjunto analítico invariante de codimensão 1 (ou seja, se **não** estamos na situação do Capítulo 6) então ℓ é identicamente nula: Com efeito, de $d\Omega' = -\frac{d\ell}{2\ell} \wedge \Omega'$ segue da Proposição 6.2.2 que $\mathcal{F}$ é transversalmente afim fora de $S = (\ell = 0) \cup (\ell = \infty))$. Portanto $\ell \equiv 0$ e temos que $\xi' = \frac{1}{f}.\left(\xi - 2dg - 2g\left(\eta + \frac{df}{f}\right) - 2g^2 f\Omega\right)$. Portanto usando a Proposição 6 acima concluímos que, neste caso, $\mathcal{F}$ tem ao máximo uma estrutura transversal projetiva.

Também motivados pelo enunciado da Proposição 6.6.2 formulamos as seguinte definição:

Definição 6.8.5. Seja Ω uma 1-forma meromorfa integrável em M com conjunto singular $s(\Omega)$ (possivelmente de codimensão 1). Uma 1-forma η é chamada uma *derivada logarítmica* para Ω se $d\Omega = \eta \wedge \Omega$ em M.

Duas derivadas logarítmicas para Ω estão relacionadas por

$$\eta' - \eta = h\Omega$$

para alguma função meromorfa h em M.

A próxima proposição assegura a existência de derivadas logarítmicas em espaços projetivos complexos.

Proposição 6.8.6. *Uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 2$, pode ser descrita em uma carta afim $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}P(n)$ por uma 1-forma polinomial integrável Ω que admite uma derivada logarítmica racional.*

Demonstração. Suponhamos $n = 2$: Nesta caso temos que $\Omega = P\,dy - Q\,dx$ para polinômios P, Q em $\mathbb{C}^2$. Definimos $\eta = \frac{P_x}{P}\,dx + \frac{Q_y}{Q}\,dy$.

Assuma agora que $n = 3$: Escrevemos $\Omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ para polinômios A, B, C em $\mathbb{C}^3$. A condição de integrabilidade $\Omega \wedge d\Omega = 0$ implica

$$(*) \qquad \frac{C_y - B_z}{BC} + \frac{A_z - C_x}{AC} + \frac{B_x - A_y}{AB} = 0$$

Escolhemos agora quaisquer funções racionais R, S e T tais que $\frac{R}{A} - \frac{S}{B} = \frac{B_x - A_y}{AB}$ e $\frac{R}{A} - \frac{T}{C} = \frac{C_x - A_z}{AC}$. Então obtemos $\frac{S}{B} - \frac{T}{C} = \frac{C_y - B_z}{BC}$ como conseqüência de (*). Definimos agora $\eta = R\,dx + S\,dy + T\,dz$ para obter $d\Omega = \eta \wedge \Omega$.

O caso $n > 3$ é provado do mesmo modo que o caso $n = 3$. □

A existência de derivadas logarítmicas holomorfas é assegurada no seguinte caso:

Proposição 6.8.7. *Suponha que o Primeiro Problema de Cousin (o problema aditivo) tenha sempre solução em M* [1]. *Seja Ω uma 1-forma holomorfa integrável com singularidades em M definindo uma folheação $\mathcal{F}$ que satisfaz:* i) *O conjunto singular de $\mathcal{F}$, $\operatorname{sing}\mathcal{F}$, tem codimensão ≥ 2;*

ii) *qualquer singularidade $p \in \operatorname{sing}\mathcal{F}$ admite uma integral primeira holomorfa.*

Então Ω admite uma derivada logarítmica holomorfa η em M.

[1] Sabemos que isto corresponde ao anulamento do primeiro grupo de Cohomologia de Dolbeault $H^{0,1}(M) = 0$ [42, 19]

Demonstração. Como $\Omega \wedge d\Omega = 0$ podemos obter uma cobertura aberta $\bigcup U_i$ de $M \setminus \operatorname{sing} \mathcal{F}$ tal que em cada aberto U_i temos $\Omega = g_i\, dy_i$ para alguma função holomorfa $g_i, y_i \colon U_i \to \mathbb{C}$. Pela hipótese feita podemos estender esta cobertura aberta e as trivializações locais a M. Definimos agora $\eta_i = \frac{dg_i}{g_i}$ em cada U_i. Claramente η_i é holomorfa e satisfaz $d\Omega = \eta_i \wedge \Omega$. Em cada $U_i \cap U_j \neq \phi$ temos que $\eta_i - \eta_j = a_{ij}\, \Omega$ para alguma função holomorfa $a_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \mathbb{C}$. Claramente os a_{ij}'s satisfazem à condição de cociclo aditivo:

$$a_{ij} + a_{jk} = a_{ik} \text{ e } \; a_{ij} + a_{ji} = 0$$

em cada $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \phi$ e cada $U_i \cap U_j \neq \phi$ respectivamente. Pela hipótese feita em (i) podemos trivializar este cociclo, i.e., podemos obter funções holomorfas $a_i \colon U_i \to \mathbb{C}$ tais que que $a_{ij} = a_i - a_j$ e portanto $\eta_i - a_i \Omega = \eta_j - a_j \Omega$ se $U_i \cap U_j \neq \phi$. Assim definimos η em M por $\eta\big|_{U_i} = \eta_i - a_i \Omega$. □

Uma conseqüência da observação acima é o seguinte corolário:

Corolário 6.8.8. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 2$, que é transversalmente projetiva e tem singularidades não dicríticas fora de um subconjunto algébrico invariante e de codimensão 1, $S \subset \mathbb{C}P(n)$. Então qualquer 1-forma polinomial Ω que define $\mathcal{F}$ em algum espaço afim $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}P(n)$ admite uma derivada logarítmica holomorfa η definida em $\mathbb{C}^n \setminus S$.*

Demonstração. De fato, pomos $M = \mathbb{C}^n \setminus S = \mathbb{C}P(n) \setminus (S \cup \mathbb{C}P(n-1)_\infty)$, então é bem sabido que M é uma variedade de Stein [14] e *a fortiori* podemos sempre resolver o Primeiro Problema de Cousin em M [48, 19]. Além disso, como $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva e não-dicritica em M segue do Exemplo 1.3.15 que dada qualquer singularidade $p \in M \cap \operatorname{sing} \mathcal{F}$ podemos escolher um polidisco aberto $\Delta \ni p$ contido em M tal que existe uma integral primeira holomorfa para $\mathcal{F}\big|_\Delta$ em Δ. Assim, mostramos que estamos nas hipóteses da Proposição 6.8.7. Portanto qualquer 1-forma polinomial Ω que define $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}^n$ admite uma derivada logarítmica holomorfa η em M. □

Usando agora a Proposição 6.6.2 e a Proposição 6.8.6 obtemos:

Proposição 6.8.9. *Sejam $\mathcal{F}$, S como no Corolário* 2.1. *Então existe um terno projetivo* (Ω, η, ξ) *de* 1*-formas meromorfas em $\mathbb{C}P(n) \setminus S$ satisfazendo:*

(i) Ω *e* η *são racionais em* $\mathbb{C}P(n)$, (ii) Ω *define* $\mathcal{F}$ *em* $\mathbb{C}P(n) \setminus (\Omega)_\infty$, (iii) $d\Omega = \eta \wedge \Omega$, $d\eta = \Omega \wedge \xi$, $d\xi = \xi \wedge \eta$.

Além disso, dado qualquer subespaço afim $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}P(n)$ podemos escolher Ω como sendo polinomial em $\mathbb{C}^n$.

Assim, somente nos restará estender (como para o caso transversalmente afim), a 1-forma ξ meromorficamente a $\mathbb{C}P(n)$. Isto é o que trataremos na próxima seção.

6.9 Folheação dual a uma transversalmente projetiva

Nesta seção consideramos uma folheação com uma estrutura transversal projetiva definida fora de um subconjunto analítico invariante de codimensão 1, que certamente pode ser suposto invariante pela folheação dada. Introduziremos primeiramente então a noção de folheação transversa definida por uma estrutura transversal projetiva.

Definição 6.9.1. [73],[74] A folheação transversa associada a uma estrutura transversal projetiva: Seja (Ω, η, ξ) um terno projetivo para uma folheação $\mathcal{F}$ em M. Podemos assumir que M é conexa. Temos dois possíveis casos:

Caso 1: $d\eta \equiv 0$. Neste caso temos que $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em $M \backslash S$, onde $S = (\eta)_\infty \cup (\Omega)_\infty$, note que $(\eta)_\infty \backslash (\Omega)_\infty$ é invariante (veja Proposição 6.2.2).

Caso 2: $d\eta \not\equiv 0$. Neste caso $\xi \not\equiv 0$ e como $\xi \wedge d\xi = \xi \wedge \eta \wedge \xi = 0$ a 1-forma ξ define uma folheação holomorfa de codimensão um, digamos, $\mathcal{F}^\perp$, em M. A folheação $\mathcal{F}$ é transversal a $\mathcal{F}$ em $M \backslash \{p \in M \mid d\eta(p) = 0\}$. Podemos assumir que $\mathcal{F}^\perp$ tem conjunto singular de codimensão ≥ 2: Com efeito, de acordo com a Proposição 6.6.2 podemos substituir (localmente) se necessário ξ por $\frac{1}{f}\,\xi$ onde f é uma função tal que $\frac{1}{f}\,\xi$ tem (localmente) um conjunto singular de codimensão ≥ 2. Finalmente observamos que claramente $(\xi, -\eta, \Omega)$ é também um terno projetivo, de modo que $\mathcal{F}^\perp$ é também transversalmente projetiva em $M \backslash S$ como $\mathcal{F}$. Isto mostra a existência de uma certa *dualidade* entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^\perp$ de modo que suporemos, se necessário, que $\mathcal{F}$ é definida por ξ e $\mathcal{F}^\perp$ por Ω. De acordo com a Proposição 6.6.2 esta folheação transversal pode não ser unicamente determinada pela estrutura transversal projetiva.

6.10 Classificação de folheações transversalmente projetivas

Nesta seção damos uma classificação parcial das folheações em $\mathbb{C}P(n)$ que são transversalmente projetivas em $\mathbb{C}P(n) \backslash S$ para algum subconjunto algébrico de codimensão 1 e invariante $S \subset \mathbb{C}P(n)$. Como uma folheação de Riccati (e portanto seus pull-backs racionais) sempre admitem uma folheação transversal que é uma folheação por curvas de nível, ou seja, com integral primeira racional, esta é uma condição necessária para que a folheação acima seja um pull-back racional de folheação de Riccati. Mostraremos que esta condição é de fato suficiente para garantir a existência do pull-back. Estudaremos também alguns outros casos:

Comecemos pelo caso mais simples:

Proposição 6.10.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 2$, com conjunto singular de codimensão ≥ 2. Então $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em $\mathbb{C}P(n)$ se, e somente se, $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira rational.*

Demonstração. Esta é uma conseqüência direta do Exemplo 6.3.3 e do fato que $\mathbb{C}P(n)$ é simplesmente conexo que qualquer função meromorfa sobre $\mathbb{C}P(n)$ é uma função racional (Teorema de Liouville-Weierstrass [43]). □

Agora consideraremos uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 2$, tendo conjunto singular $\operatorname{sing}\mathcal{F}$ de codimensão ≥ 2. Seja $S \subset \mathbb{C}P(n)$ um subconjunto algébrico invariante de codimensão um que é, portanto, uma união finita de hipersuperfícies irredutíveis. Assumimos que:

(1) $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em $\mathbb{C}P(n)\backslash S$.

(2) $\mathcal{F}$ não é transversalmente afim em $\mathbb{C}P(n)\backslash S$.

(3) Existe um terno projetivo racional (Ω, η, ξ) em $\mathbb{C}P(n)$. Denotemos por $\mathcal{F}^{\perp}$ *a* folheação transversal definida por ξ em $\mathbb{C}P(n)$ (veja a Definição 6.9.1 Caso 2). Usando esta notação enunciamos:

Teorema 6.10.2. *Sejam $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{\perp}$, (Ω, η, ξ) e S como acima. Então:*

(i) *Se $\mathcal{F}^{\perp}$ tem uma integral primeira meromorfa então $\mathcal{F}$ é um pull-back racional de uma folheação de Riccati em $\mathbb{C}P(2)$.*

(ii) *Se $\mathcal{F}^{\perp}$ admite um fator de integração, digamos, $\xi = h.\alpha$ para alguma função meromorfa h, onde α, $d\alpha = 0$, então temos* (i) *ou que $\mathcal{F}$ é dada por $w = df - (f^2 - \lambda)\alpha$ para alguma função meromorfa f e $\lambda \in \mathbb{C}$,*

(iii) *Se $\mathcal{F}^{\perp}$ é transversalmente afim em $\mathbb{C}P(n)\backslash S$ então temos $d(\sqrt{h}.\xi) = 0$ para alguma função meromorfa h e logo $\mathcal{F}$ é dada por* (i), (ii) *ou $w = \frac{df}{g} - (f - \lambda)\xi$ para alguma f e g função meromorfa e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $h = g^2/f$.*

Demonstração. (i): Como $\mathcal{F}^{\perp}$ tem uma integral primeira meromorfa podemos assumir que $\xi = gdf$ para alguma função racional g e f. Mas, se substituímos o terno (Ω, η, ξ) pelo terno $(g\Omega, \eta + \frac{dg}{g}, \frac{1}{g}\xi)$, então podemos assumir que $g \equiv 1$ e portanto $\xi = df$. Como $0 = d\xi = \xi \wedge \eta$ temos que $\eta = hdf$ para alguma função meromorfa h. Agora, definimos Ω' por $\Omega' = \frac{h^2\xi}{2} + h\eta + dh$. Então (Ω', η, ξ) é um terno projetiva em $\mathbb{C}P(n)\backslash S$ e portanto segue da Proposição 6.8.2 que $\Omega = \Omega' + \ell\xi$ para alguma função racional ℓ com $0 = d\xi = -\frac{d\ell}{2\ell} \wedge \xi$ e então $d\ell \wedge df = 0$. Agora, como as folhas de $\mathcal{F}^\perp$ são conexas podemos assumir que f tem fibras conexas usando para isto o Teorema de Fatorização de Stein ([41]) e observando que podemos substituir o terno (Ω, η, ξ) por ternos da forma $(g\Omega, \eta + \frac{dg}{g}, \frac{1}{g}\xi)$ como no início. Agora, a relação $d\ell \wedge df = 0$, diz que ℓ é constante ao longo das fibras de f, que é suposta *primitiva* (fibras conexas), portanto pelo Teorema de Fatorização de Stein concluímos que $\ell = R(f) = \frac{P(f)}{Q(f)}$ para alguma função racional $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, P e Q polinômios. Portanto $\xi = \frac{h^2 df}{2} - h^2 df + dh + \frac{P(f)}{Q(f)}\, df = -\frac{1}{2}h^2 df + dh + \frac{P(f)}{Q(f)}\, df = \pi^*\left(-\frac{1}{2}y^2 dx + dy + \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx\right)$, onde $\pi\colon \mathbb{C}P(n) \to \mathbb{C}P(2)$ é a aplicação racional $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1, \ldots, x_n), h(x_1, \ldots, x_n))$. Isto prova (i).

(ii): Seja (Ω, η, ξ) um terno meromorfo, projetivo para $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}P(n)\backslash S$. Podemos assumir que $\xi = 2\alpha$ para alguma 1-forma meromorfa fechada α. Como $0 = d\xi = \xi \wedge \eta$ obtemos $\eta = f\alpha$ para alguma função meromorfa f. Usando a Proposição 6.8.2 e Exemplo 6.6.6 concluímos que

$$\Omega = df - f^2\alpha + \ell\alpha$$

para alguma função meromorfa ℓ satisfazendo

$$\frac{d\ell}{-2\ell} \wedge \xi = d\xi = 0$$

e então ℓ é uma integral primeira meromorfa para $\mathcal{F}^\perp$.

Se ℓ é não-constante então temos (i). Se por outro lado ℓ é constante, digamos, $\ell = \lambda \in \mathbb{C}$, então temos (ii).

(iii): Seja (Ω, η, ξ) como em (ii). Como $\mathcal{F}^\perp$ é transversalmente afim em $\mathbb{C}P(n)\backslash S$, existe uma 1-forma meromorfa fechada η_o em $\mathbb{C}P(n)\backslash S$ tal que $d\xi = \xi \wedge \eta_o$ (veja Proposição 6.2.2). Como

$$\xi \wedge (\eta - \eta_o) = d\xi - d\xi = 0$$

temos que

$$\eta = \eta_o + f\xi$$

para alguma função meromorfa f, e temos que $d\eta_o = 0$, de modo que

$$\Omega \wedge \xi = d\eta = d(f\xi) = (df - f\eta) \wedge \xi$$

e então

$$\Omega = df - f\eta + g\xi$$

para alguma função meromorfa g.

Afirmação 6.10.3. *Temos que*

$$d\xi = -\frac{1}{2}\frac{dh}{h} \wedge \xi$$

onde

$$h = f^2 - 2g$$

Prova da Afirmação 6.10.3. Temos que $d\Omega = d(df - f\eta + g\xi) = -df \wedge \eta - fd\eta + dg \wedge \xi + gd\xi$ e temos que $\eta \wedge \Omega = \eta \wedge (df - f\eta + g\xi) = \eta \wedge df + g\eta \wedge \xi$. Portanto, $-fd\eta + dg \wedge \xi = -2gd\xi$ e como $d\eta = d(f\xi)$ obtemos $d\xi = -\frac{1}{2}\frac{d(f^2-2g)}{f^2-2g} \wedge \xi$ o que prova a afirmação. $\square$

A Afirmação 6.10.3 diz que $d(\sqrt{h}.\xi) = 0$ sempre que $\sqrt{h}$ é bem definida. Como $\left(\eta - \frac{1}{2}\frac{dh}{h}\right) \wedge \xi = -d\xi + d\xi = 0$ segue que $\eta = \frac{1}{2}\frac{dh}{h} + F.\xi$ para alguma função meromorfa F. Defina agora

$$\Omega' = F\left(\frac{dF}{F} - \frac{1}{2}\frac{dh}{h}\right) - \frac{F^2.\xi}{2}$$

então é fácil provar que (Ω', η, ξ) é um terno projetivo (veja Exemplo 6.6.7).

Usando Proposição 6.7.5 concluímos que

$$\Omega = \Omega' + \ell.\xi$$

para alguma função meromorfa ℓ com

$$d\xi = -\frac{d\ell}{2\ell} \wedge \xi$$

Como $\sqrt{\ell}$ e $\sqrt{h}$ são fatores de integração para a 1-forma ξ segue que $\frac{h}{\ell}$ é uma integral primeira meromorfa para ξ e portanto obtemos dois possíveis casos:

Caso 1. $\frac{h}{\ell}$ é não-constante. Neste caso temos (i).

Caso 2. $\frac{\ell}{h} \equiv \frac{\lambda}{2} \in \mathbb{C}$ para alguma constante $\lambda \in \mathbb{C}$. Neste caso temos que

$$\Omega = F\left(\frac{dF}{F} - \frac{1}{2}\frac{dh}{h}\right) - \left(\frac{F^2}{2} - \frac{\lambda}{2}.h\right)\xi - \frac{1}{2}\left\{\frac{h}{F} \cdot d\left(\frac{F^2}{h}\right) - h\left(\frac{F^2}{h} - \lambda\right).\xi\right\}$$

Portanto $\mathcal{F}$ pode ser dada por

$$w = \frac{dx}{y} - (x - \lambda).\xi$$

onde $x = \frac{F^2}{h}$, $h = f$ são meromorfas e que satisfazem

$$d\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\xi\right) = 0$$

$\square$

6.11 Componentes irredutíveis de espaços de folheações.

Nesta seção estudaremos os espaços de folheações do ponto de vista de suas componentes irredutíveis, o que de certa forma já consideramos no Capítulo 2. Consideraremos folheações em $\mathbb{C}P(n)$ com $n \geq 3$. Começamos com algumas observações preliminares. Uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{C}P(n)$ pode ser dada em coordenadas homogêneas $(z_0; ...; z_n)$ em $\mathbb{C}^{n+1}$, por uma 1-forma integrável homogênea $w = \sum\limits_{j=0}^{n} A_j(Z)dz_j$ in $\mathbb{C}^{n+1}$, satisfazendo à condição de homogeneidade

$$\sum_{j=0}^{n} z_j\, A_j(Z) \equiv 0 \quad \text{e tendo conjunto singular de codimensão} \geq 2.(*$$

Fora do conjunto singular $S(w) = \{A_o = \cdots = A_n = 0\}$ temos uma folheação holomorfa de codimensão 1 $\widehat{\mathcal{F}}(w)$ cujas folhas são as integrais de $w = 0$ e esta folheação induz uma folheação $\mathcal{F} = \mathcal{F}(w)$ on $\mathbb{C}P(n)$ tendo conjunto singular $\operatorname{sing} \mathcal{F} = \pi(S(w))$ onde $\pi \colon \mathbb{C}^{n+1}\backslash 0 \to \mathbb{C}P(n)$ é a projeção canônica. Recordamos que o *grau* de $\mathcal{F}$ é definido como $gr(w) - 1$ onde $gr(w)$ é o grau comum dos A_j's em (*) acima. O espaço de folheações de grau k em $\mathbb{C}P(n)$ será denotado por $\mathcal{F}(k, n)$.

Vale o seguinte (veja [21]):

Proposição 6.11.1. *O espaço $\mathcal{F}(k, n)$ é um fechado de Zariski de uma variedade projetiva definido pela condição de integrabilidade $w \wedge dw = 0$.*

Se $n = 2$ então a condição de integrabilidade é trivial e $\mathcal{F}(k, 2)$ é um espaço projetivo complexo e portanto conexo.

Em geral, para $n \geq 3$, $\mathcal{F}(k, n)$ não é conexo e surge o seguinte problema:

Problema 6.11.2. *Descrever as componentes irredutíveis do espaço de folheações $\mathcal{F}(k, n)$, $n \geq 3$.*

A seguir descrevemos algumas componentes conhecidas de $\mathcal{F}(k, n)$, $n \geq 3$.

Exemplo 6.11.3 (Componente Logarítmica)**.** Sejam $f_1, \ldots, f_m$ polinômios homogêneos em $\mathbb{C}^{n+1}$, $m \geq 3$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}^*$. A 1-forma

$$w = f_1 \ldots f_m \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

é integrável. A condição (*) é equivalente a $\sum\limits_{j=1}^{;} \lambda_j gr(f_j) = 0$ e neste caso w é uma *forma logarítmica* que define uma folheação $\mathcal{F} = \mathcal{F}(w)$ on $\mathbb{C}P(n)$. Definimos $\mathrm{Log}(d_1, \ldots, d_m) \subset \mathcal{F}(k, n)$ como o conjunto das folheações $\mathcal{F}(w)$ onde

$$w = f_1 \ldots f_m \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{df_j}{f_j},$$

e onde $d_j = gr(f_j)$, $k = gr(w) = \sum\limits_{j=1}^{m} d_j - 2$ e $f_1, \ldots, f_m$ são irredutíveis, relativamente primos e $\lambda_i/\lambda_j \notin \mathbf{R}$, $\forall\, i \neq j$.

O resultado seguinte é devido a O. Calvo Andrade:

Teorema 6.11.4. *Sejam $n \geq 3$, $m \geq 3$ e $\overline{Log(d_1, \ldots, d_m)}$ componentes irredutíveis de $\mathcal{F}(k, n)$ onde $k = \sum\limits_{j=1}^{m} d_j - 1$.*

Este resultado se encontra demonstrado em [5] e [6].

Exemplo 6.11.5 ([37], Componentes racionais)**.** Sejam f e g polinômios homogêneos em $\mathbb{C}^{n+1}$ tais que:
(a) $gr(f) = m$, $gr(g) = \ell$ e $\frac{m}{\ell} = \frac{p}{q}$ onde $(p, q) = 1$.
(b) As hipersuperfícies $\{f = 0\}$ e $\{g = 0\}$ se encontram transversalmente em $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$.
(c) As hipersuperfícies $\pi(\{f = 0\})$ e $\pi(\{g = 0\})$ são lisas em $\mathbb{C}P(n)$.

Definimos $w = q\, gdf - pf\, dg$. Então a folheação $\mathcal{F}(w)$ tem a integral primeira racional $\varphi = f^q/g^p$ (considerada como função em $\mathbb{C}P(n)$). A folheação $\mathcal{F}(w)$ tem grau $k = m + \ell - 2$.
O seguinte resultado se encontra em [37], [22]: Seja $R(m, \ell)$ o conjunto de todas as folheações $\mathcal{F}(k, n)$ da forma acima.

Teorema 6.11.6. *O fecho $\overline{R(m, \ell)}$ é uma componente irredutível de $\mathcal{F}(k, n)$, se $n \geq 3$.*

A fim de estudarmos as componentes de $\mathcal{F}(k, n)$ precisamos estudar a estabilidade de um tipo de singularidade genérica. Dada qualquer w como na primeira parte acima definimos *o conjunto de singularidades de Kupka* de w, $K(w)$, como $K(w) = \{p \in \mathbb{C}^{n+1} \backslash 0 \mid w(p) = 0, dw(p) \neq 0\}$. O *conjunto singular de Kupka* de $\mathcal{F} = \mathcal{F}(w)$ é $K(\mathcal{F}) = \pi(K(w))$. As principais propriedades do conjunto singular de Kupka são resumidas no seguinte resultado:

Teorema 6.11.7 ([5])**.** *Sejam $n \geq 3$, $\mathcal{F}$, w, $K(\mathcal{F})$ como acima:*

(i) *O conjunto singular de Kupka $K(\mathcal{F})$ é uma subvariedade localmente fechada, lisa, de codimensão 2 de $\mathbb{C}P(n)$.*
(ii) *O conjunto singular de Kupka tem a estrutura de produto local: Dada uma componente conexa $K \subset K(\mathcal{F})$, existem uma 1-forma holomorfa η, chamada* o tipo transversal de K, *definida em uma vizinhança $0 \in \mathbb{C}^2$ se anulando apenas na origem 0, e uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de uma vizinhança de K em $\mathbb{C}P(n)$ e uma família de submersões holomorfas $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{C}^2$ satisfazendo: $\varphi_\alpha^{-1}(0) = K \cap U_\alpha$, $\varphi_\alpha^* \eta$ define $\mathcal{F}$ in U_α.*
(iii) *$K(\mathcal{F})$ é persistente para pequenas perturbações de $\mathcal{F}$, ou seja, fixados $p \in K(\mathcal{F})$ com 1-forma definidora $\varphi^*\eta$ como acima, e para qualquer folheação $\mathcal{F}'$ suficientemente próxima de $\mathcal{F}$, existe uma 1-forma holomorfa η' próxima de η e uma submersão φ' próxima de φ, tais que, $\mathcal{F}'$ é definida por $(\varphi')^*\eta'$ próxima ao ponto p.*
(iv) *Seja $K \subset K(\mathcal{F})$ uma componente conexa compacta cuja primeira classe de Chern do seu fibrado normal em $\mathbb{C}P(n)$ é não-nula, então o tipo transversal de K é $\eta(x, y) = pxdy - qydx$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e este tipo transversal é constante para pequenas deformações.*

A prova do teorema acima pode ser encontrada em [53],[5],[22] e [62].

Quando o tipo transversal de uma componente $K \subset K(\mathcal{F})$ é linearizável, existe uma estrutura transversal para $\mathcal{F}$ em uma vizinhança de K no ambiente menos eventualmente as separatrizes locais de $\mathcal{F}$. Isto é o que se conclui da seguinte proposição:

Proposição 6.11.8 ([74]). *Sejam $n \geq 3$, $\mathcal{F}$, $K(\mathcal{F})$ como acima. Seja $K \subset K(\mathcal{F})$ uma componente conexa com tipo transversal linearizável da forma $\eta = \lambda xdy - \mu ydx$, $\lambda.\mu \neq 0$. Temos que:*
(i) *Se $\lambda/\mu = p/q \in \mathbb{Q}$ então $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em uma vizinhança de K em $\mathbb{C}P(n)$*
(ii) *Se $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$ então $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em alguma vizinhança de K in $\mathbb{C}P(n)$, menos o conjunto de separatrizes locais* $\operatorname{sep}(\mathcal{F}, K)$ *através de K.*

Demonstração. Provamos (i): É suficiente provar a seguinte afirmação:

Afirmação 6.11.9. *Sejam $(f, g), (\tilde{f}, \tilde{g}) \colon U \to \mathbb{C}^2$ submersões holomorfas tais que $pfdg - qgdf$ e $p\tilde{f}d\tilde{g} - q\tilde{g}d\tilde{f}$ definem a mesma folheação $\mathcal{F}$ em U. Então temos que $\tilde{f}^q/\tilde{g}^p = S(f^q/g^p)$ para alguma transformação de Möbius $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.*

Demonstração. A folheação $\mathcal{F}$ tem g^p/f^q e $\tilde{g}^p/\tilde{f}^q$ como integrais primeiras meromorfas e tem folhas da forma $\lambda.g^p - \mu.f^q = 0$ e $\lambda.\tilde{g}^p - \mu.\tilde{f}^q = 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Em particular $\{g = 0\}$, $\{\tilde{g} - 0\}$, $\{f = 0\}$ e $\{\tilde{f} = 0\}$ são folhas de $\mathcal{F}$. Portanto, é fácil ver que existe uma transformação de Möbius

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, d, b, c \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1,$$

tal que

$$\frac{\hat{g}^p}{\hat{f}^q} = S\left(\frac{\tilde{g}^p}{\tilde{f}^q}\right) = \frac{a\tilde{g}^p + b\tilde{f}^q}{c\tilde{g}^p + d\tilde{f}^q}$$

define uma integral primeira meromorfa para $\mathcal{F}$ e as folhas $\{\hat{f} = 0\}$ e $\{f = 0\}$ coincidem, o mesmo valendo para as folhas $\{\hat{g} = 0\}$ e $\{g = 0\}$. Agora só nos resta provar que $\hat{g}^p/\hat{f}^q = \lambda.\, g^p/f^q$ para alguma constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$: Com efeito, temos que $\hat{f} = u.f$ e $\hat{g} = v.g$ para alguma função holomorfa que nunca se anula u, v em U. Isto implica que

$$\frac{v^p}{u^q} = \frac{(\hat{g}^p/\hat{f}^q)}{(g^p/f^q)}$$

é um quociente de integrais primeiras e logo v^p/u^q é uma integral primeira *holomorfa* para $\mathcal{F}$ em U. Como o tipo transversal não admite tal integral primeira segue que v^p/u^q é localmente constante em U. Isto prova a afirmação e assim o caso (i).

□

Agora provaremos (ii): De fato, é possível de provar o seguinte fato mais forte:

Afirmação 6.11.10. *$\mathcal{F}$ é dada em uma vizinhança V de K por uma 1-forma meromorfa fechada w com $(w)_\infty = K \cup \operatorname{sep}(\mathcal{F}, K)$ tendo ordem 1.*

Demonstração. Vamos assumir que $n = 3$ (isto apenas simplificará a notação). Dado ponto $p \in K$ podemos escolher um aberto $U \ni p$ e coordenadas locais $(x, y, z) \in U$ centradas em p tais que $\mathcal{F}\big|_U$ é dada pela 1-forma fechada meromorfa $w_U = \frac{\lambda\, dx}{x} - \frac{dy}{y}$ e $K \cap U = \{x = y = 0\}$. Suponha agora que $\tilde{p} \in K$ é um outro ponto, $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \widetilde{U}$ $w_{\widetilde{U}} = \frac{\lambda\, d\tilde{x}}{\tilde{x}} - \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}}$ escolhidos do mesmo modo acima e que $U \cap \widetilde{U} \neq \phi$. Podemos também assumir que $(x = 0)$ e $(\tilde{x} = 0)$ coincidem em $U \cap \widetilde{U}$ o mesmo valendo para $(y = 0)$ e $(\tilde{y} = 0)$. Então em $U \cap \widetilde{U}$ temos que $w_{\widetilde{U}} = f.w_U$ para alguma função meromorfa f. Como w_U e $w_{\widetilde{U}}$ têm divisor polar de ordem 1, coincidindo em $U \cap \widetilde{U}$ segue que f é holomorfa em $U \cap \widetilde{U}$ e como $0 = dw_U = dw_{\widetilde{U}}$ segue que f é uma integral primeira holomorfa para $\mathcal{F}\big|_{U\cap\widetilde{U}}$. Como o tipo transversal de K não admite uma integral primeira holomorfa ($\lambda \notin \mathbb{Q}$) segue que $f = f(z)$. Mas, como w_U e $w_{\widetilde{U}}$ não dependem de z e $\tilde{z}$ segue que f é localmente constante em $U \cap \widetilde{U}$. Finalmente, como $w_{\widetilde{U}}$ e w_U têm resíduo igual a 1 ao longo de $\{x = 0\} \cap U \cap \widetilde{U} = \{\tilde{x} = 0\} \cap U \cap \widetilde{U}$ segue que $f \equiv 1$ e portanto $w_U \equiv w_{\widetilde{U}}$ in $U \cap \widetilde{U}$. □

Isto encerra a prova da Proposição 6.11.8. □

Usaremos também o seguinte lema de extensão que generaliza o Teorema de Stein enunciado em [14].

Primeiramente recordamos a seguinte definição:

Definição 6.11.11. Uma subvariedade de codimensão-q $S \subset \mathbb{C}P(n)$ é dita uma *intersecção completa* se existem hipersuperfícies algébricas irredutíveis $X_1, \ldots, X_q \subset \mathbb{C}P(n)$ tais que $S = X_1 \cap \cdots \cap X_q$. Alternativamente, se existem polinômios homogêneos irredutíveis $f_j(z_1, \ldots, z_{n+1})$ $(j = 1, \ldots, q)$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ tais que S é dada em coordenadas homogêneas por

$$S = \{[z_1; \ldots; z_{n+1}]/f_j(z_1, \ldots, z_{n+1}) = 0, j = 1, \ldots, q\}$$

Proposição 6.11.12. *Seja $K \subset \mathbb{C}P(n)$, $n \geq 3$, uma subvariedade algébrica de codimensão 2, que é intersecção completa. Então uma q-forma meromorfa definida em uma vizinhança de K em $\mathbb{C}P(n)$, se estende meromorficamente a $\mathbb{C}P(n)$.*

A proposição acima é uma conseqüência da forma geral do Teorema de Levi para variedades 2-completas [79].
Vejamos agora uma primeira conseqüência do nosso estudo:

Proposição 6.11.13 ([22])**.** *Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(k, n)$, $n \geq 3$ uma folheação com conjunto de Kupka $K(\mathcal{F})$. Suponha que existe uma componente compacta $K \subset K(\mathcal{F})$ que é uma intersecção completa. Então $\mathcal{F}$ tem uma integral primeira racional.*

Demonstração. Seja η o tipo transversal de K. Usando o Teorema 6.10.2 (iv), podemos assumir que η é da forma $pxdy - qydx$, $p, q \in \mathbb{N}$. De acordo com a Proposição 6.11.1 isto implica que $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em V^n para alguma vizinhança V^n de K em $\mathbb{C}P(n)$. Usando a Proposição 7.4.10 e Proposição 6.11.8 provamos que $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em $\mathbb{C}P(n)$. A proposição segue então da Proposição 6.8.9. $\square$

Esta mesma proposição pode ser encontrada com uma outra prova em [22].
A fim de provarmos os Teoremas 6.4.12 e 6.10.2 utilizaremos algumas propriedades de estabilidade das componentes de Kupka $K' \subset K(\mathcal{F}')$ que se obtém como deformação de uma componente de Kupka $K \subset K(\mathcal{F})$ intersecção completa, onde $\mathcal{F}'$ é uma deformação da folheação $\mathcal{F}$. Notadamente utilizaremos a seguinte:

Proposição 6.11.14 (Sernesi, [77])**.** *Seja $K \subset \mathbb{C}P(n)$ uma subvariedade intersecção completa. Seja $\{K_t\}_{t \in (\mathbb{C},0)}$ um germe de deformação analítica de $K = K_o$. Então K_t é intersecção completa para todo $t \in (\mathbb{C}, 0)$ suficientemente próximo de 0.*

Como corolário obtemos:

Proposição 6.11.15. *Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(k, n)$, $n \geq 3$ uma folheação com conjunto de Kupka $K(\mathcal{F})$. Suponha que existe uma componente compacta se $K \subset K(\mathcal{F})$ que é intersecção completa. Então, para qualquer deformação analítica $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{F}$ $\;t \in (\mathbb{C}, 0)$, existe uma componente compacta $K_t \subset K(\mathcal{F}_t)$ que é intersecção completa para t suficientemente pequeno.*

Provaremos agora o Teorema 6.10.2 deixando o Teorema 6.4.12 como exercício para o leitor.

Prova do Teorema 6.10.2. Considere $w = pgdf - qfdg$, então Então w define $\mathcal{F}$ e temos que $K(\mathcal{F}) = \{p \mid w(p) = 0, dw(p) \neq 0\}$ contém a componente compacta $K = \{f = 0\} \cap \{g = 0\}$, que é uma intersecção transversal. Qualquer componente irredutível K_o de K é uma intersecção completa e tem tipo transversal $pydx - qxdy$. Segue então do Teorema 6.10.2 (iv) que qualquer pequena deformação $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ tem uma componente de Kupka K_o' com o mesmo tipo transversal, esta componente K_o' pode ser escolhida (para $\mathcal{F}'$ próxima o suficiente de $\mathcal{F}$) tal que seja uma intersecção completa. Assim podemos concluir pela Proposição 6.11.12 que $\mathcal{F}'$ tem uma integral primeira racional em $\mathbb{C}P(n)$. Usando agora o fato que qualquer tal componente K_o' tem tipo transversal $pydx - qydx$ concluímos que $\mathcal{F}'$ tem uma integral primeira racional do tipo f'^p/g'^q. $\square$

6.12 Exercícios do Capítulo 6

1. Prove o Corolário 2 do Lema 6.3.4.
2. Seja $\mathcal{F}$ um germe de folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$, definida por um germe de campo de vetores com variáveis separáveis $X = p(x)\partial/\partial x + q(y)\partial/\partial y$, onde $p(0) = 0 = q(0)$, $p'(0) \neq 0 \neq q'(0)$. Utilizando o Lema 1 do §3, prove que $\mathcal{F}$ é linearizável.
3. Seja $\mathcal{F}$ um germe de folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$, definida por um germe de 1-forma $\omega = \lambda xdy - ydx + \omega_2(y)$, onde $\omega_2(y)$ é holomorfa, só depende de y e tem ordem ≥ 2. Prove que:
1) Se $\lambda \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{F}$ é holomorficamente equivalente a uma folheação na forma normal de Poincaré-Dulac $\lambda xdy - ydx + ay^\lambda = 0$ para algum $a \in \mathbb{C}$.
2) Se $\lambda \notin \mathbb{N}$ então $\mathcal{F}$ é linearizável e equivalente à folheação definida por $\lambda xdy - ydx = 0$.
Sugestão. Prove que ω admite uma derivada logarítmica adaptada η, ao longo de $(y = 0)$ do tipo $\eta = \frac{h(y)}{y}\,dy$, onde h é holomorfa.

4. Complete a prova do Teorema 6.4.6.

5. Prove o Teorema 6.4.9.

6. Prove o Lema 6.5.3.

7. Prove a Afirmação 6.5.4.
8. Tente provar o Teorema 6.4.12 utilizando a Proposição 6.11.1, os resultados de estabilidade estrutural de [37, 10], e os resultados do Capítulo 6.

Capítulo 7

APÊNDICE - Teoremas de extensão

7.1 Funções holomorfas em abertos de $\mathbb{C}^n$

Nesta seção recordaremos alguns resultados básicos da teoria de funções holomorfas de mais de uma variável complexa. Veremos, em particular, como são generalizados os teoremas de Taylor e Laurent. Vamos supor aqui que o leitor está familiarizado com a teoria de funções holomorfas de uma variável complexa ([1],[54]).

Observemos primeiramente que $\mathbb{C}^n$ pode ser naturalmente identificado com $\mathbb{R}^{2n}$ pelo isomorfismo

$$(x, y) = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto z = x + iy = (x_1 + iy_1, ..., x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Desta forma, um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ pode ser considerado como um aberto do $\mathbb{R}^{2n}$ e uma função $f \colon U \to \mathbb{C}^m$ como uma função com domínio $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ e contradomínio $\mathbb{R}^{2m}$. Em particular, diremos que f é $\mathbb{R}$-*diferenciável*, se ela tiver derivada $Df(p)$ em todos os pontos de U (veja [30]). A derivada $Df(p)$ é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^m$.

Definição 7.1.1. Seja $f \colon U \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável. Dizemos que f é *holomorfa*, se para todo $p \in U$, a derivada $Df(p)$ é $\mathbb{C}$-linear, isto é, se

$$Df(p).(\lambda.v) = \lambda.Df(p).(v) \ , \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \forall v \in \mathbb{C}^n.$$

Vamos denotar o conjunto de funções holomorfas em U por $\mathcal{O}(U)$. O conjunto das funções holomorfas em U que não se anulam em nenhum ponto de U será denotado por $\mathcal{O}^*(U)$.

Dizemos que $f = (f_1, ..., f_m) \colon U \to \mathbb{C}^m$ é holomorfa, se cada uma das suas componentes f_j é holomorfa.

Em particular, uma função holomorfa em U, é holomorfa como função de cada variável z_j, isto é, para todo $j = 1, ..., n$ e para todo $(z_1^0, ..., z_n^0) \in U$, a função

$$z_j \mapsto f(z_1^0, ..., z_{j-1}^0, z_j, z_{j+1}^0, ..., z_n^0)$$

é holomorfa no aberto de $\mathbb{C}$, $U_j = \{z \in \mathbb{C};\ (z_1^0, ..., z_{j-1}^0, z, z_{j+1}^0, ..., z_n^0) \in U\}$.

Veremos em seguida como se generaliza a fórmula integral de Cauchy num *polidisco* $P = D_1 \times ...D_n \subset \mathbb{C}^n$, onde D_j é o disco de centro z_j^0 e raio $0 < r_j < \infty$, $D(z_j^0, r_j)$. Um polidisco deste tipo será chamado de *polidisco limitado com centro em* $z^0 = (z_1^0, ..., z_n^0)$. Vamos denotar por γ_j a curva $\gamma_j(t) = z_j^0 + r_j\, e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Teorema 7.1.2. *Seja $f\colon \overline{P} \to \mathbb{C}$ uma função contínua, onde P é o polidisco acima. Suponha que f é holomorfa em P. Então, para todo $z = (z_1, ..., z_n) \in P$ temos*

$$(*)\ f(z) = (\frac{1}{2\pi i})^n . \int_{\gamma_1} (...(\int_{\gamma_n} \frac{f(w_1, ..., w_n)}{(w_1 - z_1)...(w_n - z_n)} dw_1)...)dw_n =$$

$$= (\frac{1}{2\pi})^n . \int_0^{2\pi} (...(\int_0^{2\pi} \frac{f(z_1^0 + r_1.e^{i\theta_1}, ..., z_n^0 + r_n.e^{2\pi i\theta_n})}{(z_1^0 + r_1.e^{i\theta_1} - z_1)...(z_n^0 + r_n.e^{i\theta_n} - z_n)} .r_1.e^{i\theta_1}.d\theta_1)...)r_n.e^{i\theta_n}.d\theta_n.$$

Demonstração. Levando-se em conta que f é holomorfa com respeito a cada variável z_j, basta aplicar n vezes a fórmula integral de Cauchy para funções de uma variável complexa (veja [54] e [40]). $\square$

Veremos em seguida algumas conseqüências, cujas demonstrações omitiremos (veja [40]). Vamos utilizar as seguintes notações:
(1) Dado $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \mathbb{N}^n$, colocaremos $|\sigma| = \sigma_1 + ... + \sigma_n$.
(2)Dados $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \mathbb{Z}^n$ e $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, tal que $z_j \neq 0$ se $\sigma_j < 0$, colocaremos $z^\sigma = z_1^{\sigma_1}...z_n^{\sigma_n}$.

Corolário 7.1.3. *Sejam $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e $z^0 \in U$. Dado $\sigma \in \mathbb{N}^n$ coloquemos*

$$f_\sigma = (\frac{1}{2\pi i})^n . \int_{\gamma_1} (...(\int_{\gamma_n} \frac{f(w_1, ..., w_n)}{(w - z^0)^{\sigma'}} dw_1)...)dw_n$$

onde $\sigma' = (\sigma_1 + 1, ..., \sigma_n + 1)$.

Então a série de potências

$$S(z) = \sum_{\sigma \in \mathbb{N}^n} f_\sigma (z - z^0)^\sigma.$$

converge uniformemente para $f(z)$ em qualquer polidisco P com centro em z^0, tal que $\overline{P} \subset U$. Em particular, toda função holomorfa é analítica.

Corolário 7.1.4 (Princípio da identidade analítica)**.** *Sejam U um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e $f, g \in \mathcal{O}(U)$ tais que f coincide com g num subconjunto aberto não vazio de U. Então $f \equiv g$ em U.*

Corolário 7.1.5. *Seja $f\colon P \times V \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde $P \subset \mathbb{C}^n$ é um polidisco com centro em z^0 e V é um aberto de $\mathbb{C}^m$. Dado $\sigma \in \mathbb{N}^n$ seja $f_\sigma\colon V \to \mathbb{C}$ a função holomorfa definida por:*

$$f_\sigma(y) = (\frac{1}{2\pi i})^n . \int_{\gamma_1} (...(\int_{\gamma_n} \frac{f(w,y)}{(w-z^0)^{\sigma'}} dw_1)...)dw_n$$

onde $\sigma' = (\sigma_1 + 1, ..., \sigma_n + 1)$. Então f pode ser representada em $P \times V$ pela série

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{N}^n} f_\sigma(y).(z - z^0)^\sigma$$

a qual converge uniformemente nas partes compactas de $P \times V$.

Um fato interessante, que foi utilizado no texto, é o seguinte resultado, devido a Hartogs:

Teorema 7.1.6 (Hartogs)**.** *Sejam U um aberto de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, e $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função contínua e holomorfa com respeito a cada variável z_j. Então f é holomorfa em U.*

Demonstração. Como f é contínua e holomorfa com respeito a cada variável z_j, então f pode ser representada em cada polidisco $P \subset \mathbb{C}^n$ por uma integral como em (*) do Teorema 7.1.2. Podemos então aplicar o mesmo argumento do Corolário 7.1.3 (veja [40]) para provar que f pode ser representada numa vizinhança de cada ponto $z^0 \in U$ por uma série de Taylor. Isto implica que f é holomorfa. $\square$

Consideraremos agora funções definidas num aberto de $\mathbb{C}^{n+1}$ da forma $A \times V$, onde $A \subset \mathbb{C}$ é um anel e $V \subset \mathbb{C}^n$ um aberto (não vazio). Vamos usar as seguintes notações:

$$A(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C};\, r_1 < |z| < r_2\}\ , D(0, r) = \{z \in \mathbb{C};\, |z| < r\},$$

onde $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$. Denotaremos por γ_r a curva $\gamma_r(\theta) = r.e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Teorema 7.1.7 (Laurent)**.** *Seja $f\colon A \times V \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde V é um aberto de $\mathbb{C}^n$ e $A = A(r_1, r_2)$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$. Dado $n \in \mathbb{Z}$, considere a função holomorfa*

$$f_n(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w,y)}{w^{n+1}} dw.$$

onde $r_1 < r < r_2$. Então:
(a) *As séries $f_+(z,y) = \sum_{n \geq 0} f_n(y).z^n$ e $f_-(z,y) = \sum_{n \leq -1} f_n(y).z^n$ convergem uniformemente nas partes compactas de $D(0, r_2) \times V$ e $A(r_1, \infty) \times V$ respectivamente.*
(b) *$f(z,y) = f_+(z,y) + f_-(z,y)$ para todo $(z,y) \in A \times V$.*

Em particular, se $f_n \equiv 0$ para todo $n \leq -1$, então f se estende a uma função holomorfa em $D(0, r_2) \times V$.

Demonstração. É análoga à prova do Teorema de Laurent para funções de uma variável (veja o Teorema 8 do Capítulo 4 de [54]). Consideramos um anel $A(r,s)$, onde $r_1 < r < s < r_2$ e os dois círculos γ_r e γ_s. Pela fórmula integral de Cauchy (em uma variável), para todo $(z,y) \in A(r,s) \times V$, temos:

$$f(z,y) = \frac{1}{2\pi i}(\int_{\gamma_s} \frac{f(w,y)}{w-z}dw - \int_{\gamma_r} \frac{f(w,y)}{w-z}).$$

Definimos então $f_+(z,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_s} \frac{f(w,y)}{w-z}dw$ e $f_-(z,y) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w,y)}{w-z}dw$, as quais são funções holomorfas, que podem ser estendidas a $D(0,r_2) \times V$ e $A(r_1,\infty) \times V$ respectivamente. Claramente $f = f_+ + f_-$. Em seguida utiliza-se que

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}},$$

se $|z| < |w| = s$ e, que

$$\frac{1}{w-z} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}},$$

se $|z| > |w| = r$. Teremos então:

$$f_+(z,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_s} f(w,y).\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}dw = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_s} \frac{f(w,y)}{w^{n+1}}dw = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y).z^n$$

e analogamente:

$$f_-(z,y) = \sum_{n=-1}^{-\infty} f_n(y).z^n,$$

onde acima utilizamos que a integral $\int_{\gamma_r} \frac{f(w,y)}{w^{n+1}}dw$ não depende de $r \in (r_1,r_2)$. Em seguida provaremos que a série f_+ converge uniformemente nas partes compactas de $D(0,r_2) \times V$. Fixemos compactos $K_1 \subset D(0,r_2)$ e $K_2 \subset V$. Seja $s \in (r_1,r_2)$ tal que $K_1 \subset D(0,s)$. Como $K = \gamma_s \times K_2$ é um subconjunto compacto de $A \times V$, temos $||f||_K = sup_{(w,y)\in K}(|f(w,y)|) < \infty$, logo $|f_n(y)| \leq \frac{||f||_K}{s^n}$, para todo $y \in K_2$, ou seja, $||f_n||_{K_2} \leq \frac{||f||_K}{s^n}$. Seja $\rho = sup_{z\in K_1}(|z|) < s$. Obtemos daí que, se $(z,y) \in K_1 \times K_2$, então $|f_n(y).z^n| \leq ||f||_K.(\frac{\rho}{s})^n$. Como $\frac{\rho}{s} < 1$, a série converge uniformemente em $K_1 \times K_2$, como queríamos. Deixamos a prova da convergência da série f_- para o leitor. □

7.2 O Teorema de Hartogs

Nesta seção provaremos o Teorema de extensão de Hartogs. Como aplicação, provaremos que uma função holomorfa definida no complementar de um conjunto analítico de codimensão complexa maior ou igual a dois, se estende ao conjunto.

Definição 7.2.1. Um *domínio de Hartogs* em $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, é um subconjunto aberto H, do tipo

$$H = (D(0, r_2) \times U) \cup (A(r_1, r_2) \times V),$$

onde $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, V é um aberto conexo de $\mathbb{C}^n$ e U um subconjunto aberto não vazio de V. Dado o conjunto H como acima, colocamos $c(H) = D(0, r_2) \times V$. Mais geralmente, dadas uma variedade complexa M de dimensão $n+1$ e uma carta local holomorfa $\phi \colon U \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, um domínio de Hartogs $H \subset U$ é um aberto de U tal que $H_1 = \phi(H)$ é um domínio de Hartogs em $\mathbb{C}^{n+1}$, sendo $c(H_1) \subset \phi(U)$. Colocaremos então $c_\phi(H) = \phi^{-1}(c(H_1))$.

Teorema 7.2.2 (Teorema de Hartogs)**.** *Sejam $H \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ um domínio de Hartogs e $f \in \mathcal{O}(H)$. Então f se estende a uma única função holomorfa em $c(H)$.*

Demonstração. Seja $H = (A \times V) \cup (D \times U)$, onde $A = A(r_1, r_2)$ e $D = D(0, r_2)$. Pelo Teorema de Laurent, f pode ser desenvolvida numa série da forma

$$f(z, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y).z^n \ \ , f_n(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w, y)}{w^{n+1}} dw \ , \ r_1 < r < r_2 \, ,$$

a qual converge uniformemente nas partes compactas de $A \times V$. Basta provarmos que $f_n \equiv 0$ para todo $n \leq -1$. Ora, se $y \in U$ e $n \leq -1$, a função $z \mapsto f(z, y)/z^{n+1}$ é holomorfa em D. Pelo Teorema de Cauchy temos $\int_{\gamma_r} \frac{f(w,y)}{w^{n+1}} dw = 0$, ou seja, $f_n|_U \equiv 0$, para todo $n \leq -1$. Como V é conexo, obtemos que $f_n \equiv 0$ para todo $n \leq -1$, como queríamos. $\square$

Corolário 7.2.3. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n + 1$, $n \geq 1$, (ϕ, U) uma carta holomorfa de U e $H \subset U$ um domínio de Hartogs. Então toda função $f \in \mathcal{O}(H)$ se estende a uma única função em $\mathcal{O}(c_\phi(H))$.*

Veremos em seguida alguns exemplos de domínios de Hartogs.

Exemplo 7.2.4. Sejam $n \geq 2$ e $m \geq 1$. Se $H \subset \mathbb{C}^n$ é um domínio de Hartogs e W é um subconjunto aberto conexo e não vazio de $\mathbb{C}^m$, então $H \times W$ é um domínio de Hartogs de $\mathbb{C}^{n+m}$. Note que $c(H \times W) = c(H) \times W$.

Exemplo 7.2.5. Sejam P_1 e P_2 os polidiscos de $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$),

$$P_j = \{(z_1, ..., z_n);\ |z_i| < r_i^j \, , i = 1, ..., n\},$$

onde $0 \leq r_i^1 < r_i^2 \leq \infty$, para $i = 1, ..., n$. Então $H = P_2 \setminus \overline{P_1}$ é um domínio de Hartogs, sendo $c(H) = P_1$.

Com efeito, coloquemos $D_i^j = D(0, r_i^j)$ e $A_i = A(r_i^1, r_i^2)$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, 2$. Observe que

$$P_2 \setminus \overline{P_1} = (D_1^2 \times ... \times D_n^2) \setminus (\overline{D_1^1} \times ... \times \overline{D_n^1}) = \bigcup_{j=1}^{n} (D_1^2 \times ... \times A_j \times ... \times D_n^2) = (A_1 \times V) \cup (D_1^2 \times U),$$

onde $V = D_2^2 \times ... \times D_n^2$ é aberto conexo e

$$U = \bigcup_{j=2}^{n} (D_2^2 \times ... \times A_j \times ... \times D_n^2) \neq \emptyset \ ,$$

como queríamos.

Antes de enunciar o próximo resultado lembraremos a definição de conjunto analítico.

Definição 7.2.6. Seja M uma variedade complexa. Dizemos que um subconjunto X de M é *analítico* se para todo $p \in M$ existem uma vizinhança conexa U de p e funções holomorfas $f_1, ..., f_{m(p)} \in \mathcal{O}(U)$ tais que $X \cap U = (f_1 = ... = f_{m(p)} = 0)$. Note que o número de funções depende de p. As funções $f_1, ..., f_{m(p)}$ são chamadas de *funções definidoras* de X numa vizinhança de p. Note que X possui funções definidoras mesmo em vizinhanças dos pontos $p \in M \setminus X$ (se $M \setminus X \neq \emptyset$). Dizemos que X tem *codimensão um*, se: (a) Para todo $p \in M$, $m(p) = 1$.
(b) Para todo $p \in X$ a função definidora $f_1 \in \mathcal{O}(U)$, não é constante.

Dizemos que um subconjunto analítico X de M ($dim(M) = n \geq 2$) tem *codimensão maior ou igual a dois* ($\text{cod}(X) \geq 2$), se $X = \emptyset$, ou se $X \neq \emptyset$ e para todo $p \in X$, $m(p) \geq 2$ e existem funções definidoras $f_1, ..., f_{m(p)}$ tais que duas delas, digamos f_1 e f_2, são *independentes* em p, ou seja, os germes de f_1 e f_2 em p são relativamente primos no anel $\mathcal{O}_p$ (veja [40]).

Observação 7.2.7. Seja X um subconjunto analítico de M, onde $dim(M) = n \geq 2$ e $\text{cod}(X) \geq 2$. Se $n = 2$, então X é um subconjunto discreto de M. Se $n \geq 3$ e $X \neq \emptyset$, então vale a seguinte propriedade:
(*) Para todo $p \in X$ existem uma carta local holomorfa (ϕ, V) e uma decomposição de $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2}$ tais que:
(a) $\phi(V) = P \times Q$, onde P e Q são polidiscos com centros em $0 \in \mathbb{C}^2$, $0 \in \mathbb{C}^{n-2}$ respectivamente, e $\phi(p) = (0, 0)$.
(b) $\phi(V \cap X) \cap (P \times \{0\}) = \{(0, 0)\}$, ou seja, o plano de dimensão 2, $\mathbb{C}^2 \times \{0\}$ corta $\phi(V \cap X)$ apenas no ponto $(0, 0)$.

Deixamos a prova desta afirmação como exercício para o leitor.

Teorema 7.2.8. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e $X \subset M$ um subconjunto analítico de codimensão maior ou igual a dois. Então toda função holomorfa em $M \setminus X$ se estende a uma única função holomorfa em M.*

Demonstração. Vamos supor que $X \neq \emptyset$. Seja $f \in \mathcal{O}(M \setminus X)$. Basta provarmos que para todo $p \in X$ podemos estender f numa vizinhança de p. Suponhamos primeiramente que $n = 2$. Como X é discreto neste caso, existe um sistema de coordenadas (ϕ, V) tal que $p \in V$, $V \cap X = \{p\}$ e $\phi(V) = P$ é um polidisco com centro em $0 = \phi(p) \in \mathbb{C}^2$. Como vimos no Exemplo 7.2.5, $H = P \setminus \{0\}$, é um domínio de Hartogs tal que $c(H) = P$. Concluímos daí que $f \circ \Phi^{-1}$ pode ser estendida a uma função holomorfa em P. Logo f pode ser estendida a V, como queríamos.

Suponhamos agora que $n \geq 3$. Neste caso, seja (ϕ, V) um sistema de coordenadas holomorfo como em (*) da Observação 7.2.7. Podemos então reduzir a prova de que f se estende a uma vizinhança de p, ao seguinte Lema:

Lema 7.2.9. *Seja U um aberto de $\mathbb{C}^{n+1}$, $n \geq 1$. Suponha que existem uma decomposição $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, $0 < r < \infty$, um compacto conexo $C \subset \mathbb{C}^n$ e $y_o \in C$, tais que o compacto*

$$K = \{(z, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n;\ |z| = r \ e \ y \in C\} \cup \{(z, y_o);\ |z| \leq r\},$$

está contido em U. Então existe um domínio de Hartogs limitado $H \subset U$ tal que $c(H) \supset \overline{D(0, r)} \times C$.

Demonstração. Denotemos por d a distância induzida pela norma euclideana $||(z, y_1, ..., y_n)|| = (|z|^2 + |y_1|^2 + ... + |y_n|^2)^{1/2}$. Como K é compacto e $K \subset U$, então $d(K, F) = a > 0$, onde $F = \mathbb{C}^{n+1} \setminus U$. Isto implica que, se $A = A(r - a/2, r + a/2)$, $D = D(0, r + a/2)$, $V = \{y \in \mathbb{C}^n;\ d(y, C) < a/2\}$ e $W = \{y \in \mathbb{C}^n;\ ||y - y_o|| < a/2\}$, então V é conexo (verifique), $V \supset W \neq \emptyset$ e o domínio de Hartogs $H = (A \times V) \cup (D \times W)$ está contido em U. Por outro lado, $c(H) = D \times V \supset \overline{D(0, r)} \times C$, como queríamos. □

Vejamos como se conclui a prova do Teorema 7.2.8. Consideremos uma carta holomorfa (ϕ, V) como na Observação 7.2.7. Seja $U = \phi(V \setminus X) \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^k = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^k$. Note que, se $0 < r < \infty$ é suficientemente pequeno e $C = \{(t, 0);\ 0 \leq t \leq r\}$, então o compacto $K = \{(z_1, z_2, 0) \in \mathbb{C}^n;\ |z_1| = r$ e $(z_2, 0) \in C\} \cup \{(z_1, r, 0);\ |z_1| \leq r\}$, está contido em U. Pelo Lema 7.2.9 existe um domínio de Hartogs $H \subset U$ tal que $0 = \phi(p) \in \overline{D(0, r)} \times C \subset c(H)$. Isto permite estender a função $f \circ \phi^{-1}$ a uma vizinhança de 0. Portanto, a função f pode ser estendida a uma vizinhança de p, como queríamos. □

Corolário 7.2.10. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$, $X \subset M$ um subconjunto analítico de codimensão maior ou igual a dois e E um fibrado vetorial holomorfo com base M. Então toda seção holomorfa de E em $M \setminus X$ se estende a uma única seção holomorfa em M. Em particular, todo campo de vetores holomorfo ou k-forma diferencial holomorfa em $M \setminus X$ se estende a M.*

Deixamos a prova do resultado acima como exercício para o leitor.

7.3 O Teorema de extensão de Levi

Nesta seção provaremos o Teorema de extensão de funções meromorfas de Levi. Antes de enunciarmos o Teorema de Levi recordaremos a definição de função meromorfa.

Definição 7.3.1. Seja M uma variedade complexa conexa. Uma *função meromorfa* em M é, por definição, uma função holomorfa $f \in \mathcal{O}(W)$ tal que:

(a) W é um subconjunto aberto e denso de M.
(b) Para todo $p \in M$ existem uma vizinhança conexa U_p de p e funções holomorfas $g_p, h_p \in \mathcal{O}(U_p)$ tais que $h_p \not\equiv 0$ e a restrição $f|_{W \cap U_p} = g_p/h_p$.
(c) Se $f \not\equiv 0$ e U_p, g_p e h_p são como acima, então o conjunto $\{q \in U_p;\, g_p(q) = h_p(q) = 0\}$ tem codimensão maior ou igual a dois em U_p.

Em outras palavras, uma função meromorfa é uma função que pode ser escrita localmente como o quociente de duas funções holomorfas. Em particular, as funções holomorfas, são meromorfas. Denotaremos o conjunto das funções meromorfas em M por $\mathcal{M}(M)$.

Observação 7.3.2. Como conseqüência da definição, podemos dizer que uma função meromorfa, não identicamente nula, em M pode ser dada por uma cobertura $\mathcal{U} = (U_j)_{j \in J}$ de M por abertos conexos e duas coleções de funções holomorfas $(g_j)_{j \in J}$ e $(h_j)_{j \in J}$ tais que
(i) $g_j, h_j \in \mathcal{O}(U_j)$, sendo $h_j \not\equiv 0$, para todo $j \in J$.
(ii) O conjunto $\{p \in U_j;\, g_j(p) = h_j(p) = 0\}$ tem codimensão maior ou igual a dois em U_j, para todo $j \in J$.
(iii) Se $i, j \in J$ são tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então as funções g_i/h_i e g_j/h_j coincidem (com f) no conjunto $\{p \in U_i \cap U_j;\, h_i(p) = 0 \,\text{ou}\, h_j(p) = 0\}$.

Veremos em seguida que uma função meromorfa define naturalmente dois divisores.

Definição 7.3.3. Seja M uma variedade complexa. Um *divisor* em M é uma tripla $\mathcal{D} = (\mathcal{U}, \mathcal{G}, \mathcal{C})$ tal que:
(a) $\mathcal{U} = (U_j)_{j \in J}$ é uma cobertura de M por abertos conexos, $\mathcal{G} = (g_j)_{j \in J}$ e $\mathcal{C} = (g_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset}$, são coleções de funções holomorfas, onde $g_j \in \mathcal{O}(U_j)$, $U_{ij} = U_i \cap U_j$, $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ ($\mathcal{O}^*(W)$ é o conjunto de funções holomorfas em W que não se anulam em nenhum ponto de W).
(b) Se $U_{ij} \neq \emptyset$ então $g_i = g_{ij}.g_j$ em U_{ij}.
(c) $\mathcal{C}$ é um cociclo multiplicativo, isto é, se $i, j, k \in J$ são tais que $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, então $g_{ij} = 1/g_{ji}$ em U_{ij} e $g_{ij}.g_{jk}.g_{ki} = 1$ em U_{ijk}.

Observe que a condição (b) implica que se $U_{ij} \neq \emptyset$, então $\{p \in U_{ij};\, g_i(p) = 0\} = \{p \in U_{ij};\, g_j(p) = 0\}$. Isto implica que existe um conjunto analítico X em M tal que $X \cap U_i = \{p \in U_i;\, g_i(p) = 0\}$ para todo $i \in J$. Este conjunto será chamado de *conjunto de zeros* do divisor $\mathcal{D}$ e será denotado por $Z(\mathcal{D})$.

Proposição 7.3.4. *Seja f uma função meromorfa, não identicamente nula, na variedade complexa e conexa, M. Então existem dois divisores $(f)_0$ e $(f)_\infty$ com as seguintes propriedades:*
(i) *O conjunto analítico $S(f) = Z((f)_0) \cap Z((f)_\infty)$ tem codimensão maior ou igual a dois em M.*
(ii) *f pode ser considerada como uma função holomorfa de $M \setminus S(f)$ em $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P(1)$, sendo $Z((f)_0) = f^{-1}(0)$ e $Z((f)_\infty) = f^{-1}(\infty)$.*

Nota 7.3.5. *$(f)_0$ e $(f)_\infty$ são chamados de divisores de zeros e de pólos de f, respectivamente. O conjunto $S(f)$ é chamado de conjunto singular de f. Denotaremos os conjuntos $Z((f)_0)$ e $Z((f)_\infty)$ por $Z(f)$ e $P(f)$, respectivamente.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in J}$, $\mathcal{G} = (g_j)_{j\in J}$ e $\mathcal{H} = (h_j)_{j\in J}$ como na Observação 7.3.2. Dados $i, j \in J$ tais que $U_{ij} \neq \emptyset$, defina $f_{ij} \in \mathcal{O}(U_{ij} \setminus (h_j = 0))$ como $f_{ij} = h_i/h_j$. Afirmamos que f_{ij} se estende a uma função holomorfa em $\mathcal{O}^*(U_{ij})$.

Com efeito, provemos primeiramente que f_{ij} se estende a uma função em $\mathcal{O}(U_{ij})$. Isto é claro no caso em que $h_j \in \mathcal{O}^*(U_j)$. Caso contrário $h_j^{-1}(0)$ é um subconjunto analítico de codimensão um de U_j. Como $f \not\equiv 0$, temos $g_j \not\equiv 0$ em U_{ij}. Por outro lado, como $g_i/h_i = g_j/h_j = f$ em $\{p \in U_i \cap U_j;\, h_i(p) = 0 \,\text{ou}\, h_j(p) = 0\}$, podemos definir f_{ij} em $U_{ij} \setminus (g_j = 0)$ por $f_{ij} = g_i/g_j$. Logo f_{ij} pode ser estendida ao conjunto $U_{ij} \setminus (h_j = g_j = 0)$. Como $\text{cod}(h_j = g_j = 0) \geq 2$, podemos estender f_{ij} a uma função em $\mathcal{O}(U_{ij})$, pelo Teorema 7.2.8, a qual chamaremos ainda de f_{ij}. Para ver que $f_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$, definimos f_{ji} em $\{p \in U_{ij};\, h_i(p) \neq 0\}$ por $f_{ji} = h_j/h_i$. Por argumento análogo ao anterior, f_{ji} se estende a uma função em $\mathcal{O}(U_{ij})$ Por outro lado, é claro que $f_{ij}.f_{ji} \equiv 1$ em U_{ij}. Logo, $f_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$, como queríamos.

Colocamos agora $(f)_0 = (\mathcal{U}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ e $(f)_\infty = (\mathcal{U}, \mathcal{H}, \mathcal{F})$, onde $\mathcal{F} = (f_{ij})_{U_{ij}\neq\emptyset}$. Não é difícil ver que $(f)_0$ e $(f)_\infty$ são divisores em M e que $\text{cod}(S(f)) \geq 2$. Deixamos os detalhes do resto da prova para o leitor. □

Observação 7.3.6. Sejam M uma variedade complexa, N uma subvariedade complexa de M de dimensão ≥ 1 e $f \in \mathcal{M}(M)$, $f \not\equiv 0$. Se $N \not\subset P(f)$, então podemos definir a restrição $f|_N$ da seguinte maneira: sejam $(U_j)_{j\in J}$, $(g_j)_{j\in J}$ e $(h_j)_{j\in J}$ como na Observação 7.3.2. Consideramos a cobertura de N, $\mathcal{V} = (V_j = N \cap U_j)_{j\in I}$, onde $I = \{j \in J;\, N \cap U_j \neq \emptyset\}$, e as coleções $(g'_j = g_j|_{V_j})_{j\in I}$ e $(h'_j = h_j|_{V_j})_{j\in I}$. A restrição $f|_N$ é definida então em V_j como g'_j/h'_j.

Proposição 7.3.7. *Sejam M uma superfície de Riemann e $f \in \mathcal{M}(M)$, $f \not\equiv 0$. Valem as seguintes propriedades:*
(a) *$P(f)$ é um subconjunto discreto de M e $S(f) = \emptyset$.*
(b) *Se $M \subset \mathbb{C}$, então $f = g/h$, onde $g, h \in \mathcal{O}(M)$.*

Demonstração. A parte (a) decorre de (i) da Observação 7.3.2 e do fato de que $\text{cod}(S(f)) \geq 2$. A parte (b) decorre do Teorema de fatoração de Weierstrass (veja [54]). Como vamos utilizar (b) mais adiante, daremos uma idéia da prova no caso em que $P(f)$ é finito. Suponhamos então $P(f) = \{z_1, ..., z_k\}$. Por definição, para cada $j \in \{1, ..., k\}$, existem uma vizinhança U_j de z_j e funções holomorfas $g_j, h_j\mathcal{O}(U_j)$, $h_j \not\equiv 0$, tais que $f_j = g_j/h_j$ em U_j. Podemos supor que $U_j = \{z;\, |z - z_j| < r_j\} \subset M$, que $U_i \cap U_j = \emptyset$, se $i \neq j$, e que $h_j^{-1}(0) = \{z_j\}$. Podemos escrever $g_j(z) = (z - z_j)^m.u(z)$ e $h_j(z) = (z - z_j)^\ell.v(z)$, onde v não se anula em U_j. Isto implica que $f(z) = w_j(z)/(z - z_j)^{n_j}$, para $z \in U_j \setminus \{z_j\}$, onde $w_j = u/v \in \mathcal{O}(U_j)$ e $n_j = \ell - m > 0$ (já que $z_j \in P(f)$). Seja $h(z) = \Pi_{j=1}^k (z - z_j)^{n_j}$. Não é difícil ver que $g(z) = h(z).f(z)$ se estende a uma função holomorfa em M e que $f = g/h$. □

Podemos agora enunciar o Teorema de Levi.

Teorema 7.3.8 (Teorema de Levi)**.** *Seja $H \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, um domínio de Hartogs. Toda função $f \in \mathcal{M}(H)$ se estende a uma única função meromorfa em $c(H)$.*

Demonstração. A maior dificuldade na prova do Teorema de Levi é que não sabemos se uma função meromorfa em H pode se escrever globalmente como quociente de duas holomorfas. Se isto fosse verdade, o Teorema de Levi seria uma conseqüência direta do Teorema de Hartogs.

Sejam $H = (A \times V) \cup (D \times U)$ e $f \in \mathcal{M}(H)$, onde $A = A(r_1, r_2)$, $D = D(0, r_2)$, V é conexo e $V \supset U \neq \emptyset$. Como na prova do Teorema de Hartogs, vamos denotar um ponto de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ por (z, y).

Seja $\mathcal{W}$ a coleção de todos os abertos W de V tais que $U \subset W$ e f pode ser estendida a uma função meromorfa em $(A \times V) \cup (D \times W)$. Em $\mathcal{W}$ consideramos a ordem parcial dada pela inclusão: $W_1 < W_2 \Leftrightarrow W_1 \subset W_2$. Esta relação de ordem é claramente indutiva superiormente em $\mathcal{W}$, isto é, se $(W_j)_{j \geq 1}$ é uma seqüência crescente em $\mathcal{W}$, então existe um aberto $W_o = \cup_{j \geq 1} W_j$, tal que $W_o \in \mathcal{W}$ e $W_j < W_o$ para todo $j \geq 1$. Pelo lema de Zorn, $\mathcal{W}$ possui um elemento maximal, digamos U_o, isto é, f pode ser estendida a $(A \times V) \cup (D \times U_o)$, mas se $B \neq U_o$, é um aberto tal que $U_o \subset B \subset V$, então f não pode ser estendida a $(A \times V) \cup (D \times B)$. Para demonstrar o Teorema de Levi, basta provar que $U_o = V$, ou seja, que se f pode ser estendida a um aberto da forma $(A \times V) \cup (D \times W)$, onde $U \subset W$ e $W \neq V$, então f pode ser estendida a $(A \times V) \cup (D \times W')$, onde $W' \supset W$ e $W' \neq W$. Suponhamos então que f pode ser estendida a $(A \times V) \cup (D \times W)$, onde $U \subset W$ e $W \neq V$. Por simplicidade vamos supor $H = (A \times V) \cup (D \times W)$.

Dado $y \in V$, defina $F_y = A \times \{y\}$, se $y \notin W$, e $F_y = D \times \{y\}$ se $y \in W$. Dado $y \in V$ tal que $F_y \not\subset P(f)$, vamos denotar por f_y a função $f_y(z) = f(z, y)$.

Seja $G = \{y \in V;\, F_y \subset P(f)\}$. Não é difícil ver que G é um subconjunto fechado de V com interior vazio (verifique). Outro fato que utilizaremos é que, se $F_y \cap (H \setminus P(f)) \neq \emptyset$, então $F_y \not\subset P(f)$. Como o leitor pode verificar, isto é conseqüência de que F_y é um subconjunto analítico conexo de H.

Como $W \neq V$ e V é conexo, a fronteira de W contém algum ponto $y_o \in V$. Neste caso, $F_{y_o} = A \times \{y_o\}$, mas para toda vizinhança B de y_o o conjunto $\{y \in B;\, F_y = D \times \{y\}\}$ é um aberto não vazio. Consideraremos dois casos:

Caso 1. $y_o \notin G$, ou seja, $F_{y_o} \not\subset P(f)$:

Como G é fechado, para todo polidisco Q de $\mathbb{C}^n$, suficientemente pequeno, tal que $y_o \in Q \subset V$, então $Q \cap G = \emptyset$. Vamos provar que f se estende a uma função meromorfa em $D \times Q$, para algum polidisco Q como acima.

Como $P(f)$ tem codimensão um e $F_{y_o} \not\subset P(f)$, existe uma vizinhança B de y_o, $B \subset V$, tal que $P(f) \cap F_y$ tem codimensão um em F_y, ou seja, é discreto em F_y, para todo $y \in B$. Isto implica que existem um polidisco Q, com $y_o \in Q \subset B$ e um anel $A' = A(s_1, s_2) \subset A$, $r_1 < s_1 < s_2 < r_2$, tal que f_y não tem pólos em $\overline{A'}$, para todo $y \in Q$ (verifique). Seja $D' = D(0, s_2)$. Vamos provar que é possível estender f a $D' \times Q$, logo a $(D' \times Q) \cup (A \times Q) = D \times Q$.

Como f é holomorfa em $A' \times Q$, pelo Teorema 7.1.7, podemos escrever

$$f(z,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y).z^n\,,$$

onde a série converge uniformemente nas partes compactas de $A' \times Q$ e $a_n \in \mathcal{O}(Q)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Fixemos $y_1 \in Q \cap W$. Como f_{y_1} é meromorfa em D e tem um número finito de pólos em D', pela prova da Proposição 7.3.7, existe um polinômio de grau m, digamos $p(z) = z^m + \sum_{j=0}^{m-1} b_j\, z^j$, tal que $p.f_{y_1}$ se estende a função holomorfa em D'. Observe que m é o número de pólos de f_{y_1} em D', contados com multiplicidade.

Dada uma $(n+1)$-upla $K = (k_0, k_1, ..., k_n)$ de inteiros negativos distintos, defina $D_K\colon Q \to \mathbb{C}$ por $D_K(y) = det(M_K(y))$, onde M_K é matriz

$$M_K = \begin{pmatrix} a_{k_0} & a_{k_0-1} & \cdots\cdots\cdots & a_{k_0-n} \\ a_{k_1} & a_{k_1-1} & \cdots\cdots\cdots & a_{k_1-n} \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ a_{k_n} & a_{k_n-1} & \cdots\cdots\cdots & a_{k_n-n} \end{pmatrix}$$

Lema 7.3.9. *Se $n \geq m$, então para toda $(n+1)$-upla K como acima, temos $D_K \equiv 0$ em Q.*

Demonstração. Provaremos primeiramente para $n = m$. Como f é meromorfa em $D \times (Q \cap W)$ e f_{y_1} tem m pólos contados com multiplicidade em D', mas não tem pólos em $\partial D'$, existe uma vizinhança B de y_1 tal que $B \subset W$ e $f_y(z) = f(z,y)$ tem m pólos contados com multiplicidade em D'. Provaremos que $D_K \equiv 0$ em B, para toda $(m+1)$-upla como acima.

Fixemos $y \in B$. Sejam $z_1, ..., z_m$ os pólos de f_y em D' (alguns possivelmente contados com multicidade) e $p(z) = \Pi_{j=1}^{m}(z - z_j)$. Observe que a expansão de Laurent de $p.f_y$ em A' não possui termos negativos, já que $p.f_y$ se estende a uma função holomorfa em D', ou seja, ela é da forma

$$p(z).f_y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, z^j.$$

Por outro lado,

$$p(z).f_y(z) = (\sum_{j=0}^{m} b_j\, z^j).(\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(y).z^j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n.z^n\,,$$

onde

$$c_n = \sum_{j=0}^{m} b_j\, a_{n-j}(y)\,,$$

de onde concluímos que, se $n < 0$, então,

$$\sum_{j=0}^{m} b_j\, a_{n-j}(y) = 0.$$

Portanto, se b é o vetor coluna $(b_m, ..., b_0)^t$, então $M_K(y).b = 0$. Como $b_m = 1$, a matriz $M_K(y)$ é singular. Isto implica que $D_K(y) = det(M_K(y)) \equiv 0$ em B, logo em Q, como queríamos.

No caso em que $n > m$, basta refazermos o argumento acima com o polinômio de grau n, $h(z) = z^{n-m}.p(z)$, observando que $h.f_y$ se estende a uma função holomorfa em D'. $\square$

Seja agora $k = \min\{n;\ D_K \equiv 0$ em Q para toda $(n+1)$-upla, K, de inteiros negativos distintos $\}$. Podemos supor que $k > 0$. Com efeito, $k = 0$, implica claramente que $a_j \equiv 0$ em Q para todo $j < 0$, ou seja, que $f(z, y)$ se estende a uma função holomorfa em $D' \times Q$, como queríamos. Suponhamos então $k \geq 1$. Por definição de k, existe uma k-upla, digamos $K_o = (m_1, ..., m_k)$, de inteiros negativos tal que $D_{K_o} \not\equiv 0$, mas se $K = (n, m_1, ..., m_k)$ é uma $(k+1)$-upla tal que $n < 0$, então $D_K \equiv 0$. Expandindo o determinante

$$det \begin{pmatrix} a_n(y) & a_{n-1}(y) & \dots\dots\dots\dots\dots & a_{n-k}(y) \\ a_{m_1}(y) & a_{m_1-1}(y) & \dots\dots\dots\dots\dots & a_{m_1-k}(y) \\ . & . & \dots\dots\dots\dots\dots & . \\ . & . & \dots\dots\dots\dots\dots & . \\ . & . & \dots\dots\dots\dots\dots & . \\ a_{m_k}(y) & a_{m_k-1}(y) & \dots\dots\dots\dots\dots & a_{m_k-k}(y) \end{pmatrix} \equiv 0$$

pela primeira linha, obtemos uma identidade da forma,

$$a_n(y).b_0(y) + ... + a_{n-k}(y).b_k(y) = \sum_{j=0}^{k} b_j(y).a_{n-j}(y) \equiv 0\,,$$

onde $b_k(y) = D_{K_o}(y) \not\equiv 0$. Defina $h\colon D' \times Q \to \mathbb{C}$ por $h(z, y) = \sum_{j=0}^{k} b_j(y).z^j \not\equiv 0$. Vemos então que

$$h(z, y).f(z, y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(y).z^j\,,$$

onde $c_n(y) = \sum_{j=0}^{k} b_j(y).a_{n-j}(y) \equiv 0$, se $n < 0$. Portanto $g = h.f$ pode ser estendida a uma função holomorfa em $D' \times Q$, ou seja, f pode ser estendida a uma função meromorfa em $D' \times Q$ como g/h, logo à uma função meromorfa em $(A \times V) \cup (D \times (Q \cup W))$, como queríamos.

Caso 2. $F_{y_o} \subset P(f)$.

A idéia é utilizar o Lema 7.2.9 e o caso 1 para provar a seguinte:

Afirmação 7.3.10. *Dado $z_o \in \overline{D(0, r_1)}$, é possível estender f a uma função meromorfa em $(A \times V) \cup (D \times W) \cup B_{z_O}$, onde B_{z_O} é uma vizinhança de (z_o, y_O).*

Suponhamos, por um instante, que a afirmação está provada. Neste caso, como $C = \overline{D(0,r_1)} \times \{y_o\}$ é compacto, não é difícil ver, que é possível estender f a uma função meromorfa em $(A \times V) \cup (D \times W) \cup (D \times Q) = (A \times V) \cup (D \times (W \cup Q))$, onde Q é um polidisco com centro em y_o, como queríamos.

Prova da Afirmação 7.3.10. Para simplificar as notações vamos supor que $y_o = 0 \in \mathbb{C}^n$. Fixemos $z_o \in \overline{D(0,r_1)}$. Dados $p, v \in \mathbb{C}^n$, seja $E_{pv} = \{(z, p + (z - z_o).v);\ z \in \mathbb{C}\}$. Note que $(z_o, 0) \in E_{0v}$.

Afirmação 7.3.11. *Existem $r > 0$, $v \in \mathbb{C}^n$ e um compacto conexo $C \subset \mathbb{C}^n$ com as seguintes propriedades:*
(i) *Para todo $p \in C$ temos $E_{pv} \cap H \not\subset P(f)$.*
(ii) *Para todo $p \in C$ temos $\{(z, p + (z - z_o).v);\ |z| = r\} \subset H$.*
(iii) *Existe $p_o \in C$ tal que $\{(z, p_o + (z - z_o).v);\ |z| \le r\} \subset H$.*

Demonstração. Seja h uma função holomorfa definida numa vizinhança convexa B de $(z,0) \in F_0$ tal que $P(f) \cap B = (h = 0)$. Observe que $h(z,0) \equiv 0$, já que $F_0 \subset P(f)$, mas que $h \not\equiv 0$. Isto implica que existe $(z_1, y_1) \in B$ tal que $h(z_1, y_1) \neq 0$ e $y_1 \in W$. Como $y_1 \in W$, temos $E_{y_1 0} \cap H = F_{y_1} = D \times \{y_1\}$. Seja $r = |z_1|$. Note que $r_1 < r < r_2$. Neste caso, o compacto $\overline{D(0,r)} \times \{y_1\} \subset H$. Decorre daí que existe $\epsilon > 0$ tal que se $w \in \mathbb{C}^n$ e $||w|| < \epsilon$, então

$$\{(z, y_1 - w + \frac{z - z_o}{z_1 - z_o}.w);\ |z| \le r\} \subset H.$$

Desta forma, se $||w|| < \epsilon$, $p_o = y_1 - w$ e $v = (z_1 - z_0)^{-1}.w$, vemos que p_o satisfaz (iii) e $H \cap E_{p_o v} \not\subset P(f)$, uma vez que $(z_1, y_1) \in E_{p_o v}$ e $(z_1, y_1) \notin P(f)$.

Observe agora que, diminuindo ϵ, se necessário, podemos escolher $w = (z_1 - z_o).v$ de tal forma que $(z_1, w) \in B$ e $h(z_1, w) \neq 0$. Como $P(f)$ tem codimensão um e $P(f) \not\subset (z = z_1)$, existe uma curva $\gamma\colon I \to \mathbb{C}^n$ tal que $\gamma(0) = w$, $\gamma(1) = y_1$, $(z_1, \gamma(t)) \in B$, e $h(z_1, \gamma(t)) \neq 0$,se $t \in I$ (verifique a existência de uma tal curva). Coloquemos $p(t) = \gamma(t) - w$ e $C = p(I)$. Note que, se $||v||$ for suficientemente pequeno, então $\{(z, p(t) + (z - z_o).v);\ |z| = r\,,\ t \in I\} \subset H$, já que $\{(z, p(t));\ |z| = r\,,\ t \in I\} \subset H$. Isto implica que, v e C satisfazem (ii). Finalmente, $(z_1, \gamma(t)) = (z_1, p(t) + (z_1 - z_o).v) \in E_{p(t)v}$, logo v e C satisfazem (i), o que prova a Afirmação 7.3.10. □

Para finalizar a prova da Afirmação 7.3.10, consideremos a decomposição de $\mathbb{C}^{n+1}$, $E \oplus F \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, onde $E = \{z, z.v);\ z \in \mathbb{C}\}$ e $F = \{0\} \times \mathbb{C}^n$. Não é difícil ver que podemos aplicar o Afirmação 7.3.11 e o Lema 7.2.9 a esta decomposição, para provar que existe um domínio de Hartogs $H_1 \subset H$, no qual podemos aplicar o Caso 1, tal que $(z_o, 0) \in c(H_1)$. Isto termina a prova da Afirmação 7.3.10 e do Teorema de Levi. □

□

7.4 O Teorema global de extensão

O objetivo desta seção é provar o Teorema global de extensão de seções holomorfas ou meromorfas de fibrados vetoriais holomorfos sobre uma classe de variedades complexas que chamaremos de *2-completas.* Esta classe inclui as variedades de Stein de dimensão maior ou igual a dois. Com este objetivo, primeiramente recordaremos alguns conceitos.

Definição 7.4.1. Seja $f\colon U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto. Dizemos, respectivamente, que f é *harmônica, subharmônica*, ou *estritamente subharmônica*, se $\partial^2 f/\partial\bar{z}\partial z = 0$, $\partial^2 f/\partial\bar{z}\partial z \geq 0$, ou $\partial^2 f/\partial\bar{z}\partial z > 0$ em U. Note que $\partial^2 f/\partial\bar{z}\partial z = \frac{1}{4}.\Delta f$, onde Δ é o Laplaciano em $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Observação 7.4.2. Seja $f\colon U \to \mathbb{R}$, de classe C^2, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto. É possível provar que (veja [25]):
(a) Se f é harmônica, então f é localmente a parte real de uma função holomorfa. Em particular f é analítica real em U.
(b) f é harmônica se, e somente se, para todo disco fechado $\overline{D(z_o, r)} \subset U$ temos

$$(*)\ f(z_o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_o + re^{i\theta})d\theta\,.$$

(c) Se f é uma função contínua em U que satisfaz (*), então f é harmônica.
(d) Seja f uma função de classe C^2 em U. As seguintes condições são equivalentes:
(i) f é subharmônica.
(ii) Para todo disco $\overline{D(z_o, r)} \subset U$ temos

$$(**)\ f(z_o) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_o + re^{i\theta})d\theta\,.$$

(iii) Para toda função harmônica $u\colon V \to \mathbb{R}$, onde $V \subset U$, a função $f - u$ satisfaz ao princípio do máximo em V.

Dizemos que uma função contínua $g\colon V \to \mathbb{R}$ satisfaz ao *princípio do máximo*, se ela não possui máximo estrito local em V, isto é, se não existe $z_o \in V$ tal que $f(z_o) > f(z)$ para todo z numa vizinhança de z_o.
(e) Como conseqüência de (d), prova-se que, se f é subharmônica em U e existe $z_o \in U$ tal que $f(z_o) \geq f(z)$ para todo z numa vizinhança de z_o, então f é constante na componente conexa de U que contém z_o.

Em seguida veremos como se generalizam os conceitos acima em dimensão maior que um.

Definição 7.4.3. Sejam U um aberto de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, e $f\colon U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Dizemos que f é, respectivamente, *pluriharmônica*, *plurisubharmônica* ou *estritamente plurisubharmônica*, se para todo $p_o \in U$ e todo $v \in \mathbb{C}^n$, a função $z \mapsto f(p_o + z.v)$ é harmônica, subharmônica, ou estritamente subharmônica, no subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ em que está definida.

Usaremos as notações p.h. para *pluriharmônica*, p.s.h. para *plurisubharmônica* e e.p.s.h. para *estritamente plurisubharmônica*. O conjunto das funções de classe C^2 de U em $\mathbb{R}$ será denotado por $C^2(U)$.

Dados uma função $f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, e $p \in U$, denotaremos por $H_f(p)$ a matriz

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}(p)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Não é difícil ver que $H_f(p)$ é hermitiana, isto é $H_f(p) = \overline{(H_f(p))}^t$, onde $\overline{(H_f(p))}^t$ é a transposta conjugada de $H_f(p)$. A matriz H_f é chamada de *matriz Hessiana de* f.

Proposição 7.4.4. *Seja $f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Então f é respectivamente, p.h., p.s.h., ou e.p.s.h., em U, se, e somente se, $H_f(p) \equiv 0$, $H_f(p)$ é não negativa definida, ou positiva definida, para todo $p \in U$.*

Demonstração. Fixemos $p \in U$ e $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Consideremos a função $g(z) = f(p + z.w)$, definida num certo aberto $V \subset \mathbb{C}$ tal que $0 \in V$. Temos $g(0) = f(p)$ e

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(p + z.w).\overline{w_j} \ ,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \overline{z}}(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(p + z.w)).\overline{w_j} \ = \ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}(p + z.w).w_i.\overline{w_j} \ ,$$

de onde obtemos que,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \overline{z}}(0) = w.H_f(p).w^t \, .$$

Portanto, se f é p.h., então $\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \overline{z}}(0) = 0$, o que implica, $w.H_f(p).\overline{w^t} = 0$, para todo $w \in \mathbb{C}^n$, ou seja, $H_f(p) = 0$. Analogamente, se é p.s.h. (resp. e.p.s.h.), então $w.H_f(p).\overline{w^t} \geq 0$ para todo $w \in \mathbb{C}^n$ (resp $w.H_f(p).\overline{w^t} > 0$ para todo $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$), o que implica que $H_f(p)$ é não negativa (resp. positiva) definida, como queríamos.

Reciprocamente, se $H_f \equiv 0$ (resp. não negativa definida) (resp. positiva definida), então g é harmônica (resp. subharmônica) (resp. estritamente subharmônica) em V. □

Corolário 7.4.5. *Seja $f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Então f é p.h. (resp. p.s.h.) se, e somente se, para qualquer aplicação holomorfa $\gamma \colon V \to U$, onde $V \subset \mathbb{C}$ é um aberto, a composta $f \circ \gamma \colon V \to \mathbb{R}$, é harmônica (resp. subharmônica) em V.*

Corolário 7.4.6. *Seja $f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Então f é e.p.s.h. se, e somente se, para qualquer imersão holomorfa $\gamma \colon V \to U$, onde $V \subset \mathbb{C}$ é um aberto, a composta $f \circ \gamma \colon V \to \mathbb{R}$, é harmônica (resp. subharmônica) em V.*

Deixamos a prova dos resultados acima como exercício para o leitor.

Definição 7.4.7. Seja $f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Definimos a *forma de Levi* de f, como sendo a forma quadrática L_f abaixo:

$$L_f(p) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}(p) dz_i \overline{dz_j} \ , \ p \in U.$$

Com esta notação queremos dizer que a cada $p \in U$ associamos uma forma quadrática, $L_f(p)$, tal que $L_f(p).w = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}(p).w_i.\overline{w_j} = w.H_f(p).\overline{w^t}$, para todo $w \in \mathbb{C}^n$. Vemos então que f é p.h. (resp. p.s.h.) (resp. e.p.s.h.) se, e somente se, $L_f(p) = 0$ (resp. $L_f(p)$ é não negativa definida) (resp. $L_f(p)$ é positiva definida) para todo $p \in U$.

Exemplo 7.4.8. Sejam U um aberto de $\mathbb{C}^n$, $f_1, ..., f_k \in \mathcal{O}(U)$ e $g = \sum_{j=1}^{k} |f_j|^2$. Um cálculo direto mostra que

$$L_g(z).v = \sum_{j=1}^{k} (df_j(z).v).(\overline{df_j(z).v}) = \sum_{j=1}^{k} |df_j(z).v|^2 \ , \forall z \in U \ , \forall v \in \mathbb{C}^n.$$

Em particular f é p.s.h.. Observe que f será e.p.s.h., se $k \geq n$ e para todo $z \in U$ existirem $m_1, ..., m_n \in \{1, ..., k\}$ tais que

$$df_{m_1}(z) \wedge ... \wedge df_{m_n}(z) \neq 0.$$

Deixamos a verificação deste fato para o leitor.

Observação 7.4.9. Seja $f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Dado $p \in U$, podemos escrever a expansão de Taylor de f de ordem 2, numa vizinhança de p como

$$f(p + h) = \mathbf{R}(F(h)) + \frac{1}{2}.L_f(p).h + O(h),$$

onde F é um polinômio de grau ≤ 2, $\mathbf{R}(F)$ a sua parte real e $\lim_{h \to 0} \frac{O(h)}{||h||^2} = 0$. Em particular, como $\mathbf{R}(F(h)$ é pluriharmônica, obtemos que $\frac{1}{2} L_f(p).h$ é a parte "não pluriharmônica"do jato de ordem dois de f em p.

Com efeito, a expansão de Taylor de ordem 2 de f em p é dada por

$$f(p + h) = f(p) + Df(p).h + \frac{1}{2} D^2 f(p).h^2 + O(h),$$

onde $\lim_{h \to 0} \frac{O(h)}{||h||^2} = 0$. Por outro lado,

$$Df(p) = \partial f(p).h + \overline{\partial} f(p).h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(p).h_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(p).\overline{h_j} \, .$$

Como f assume valôres reais, temos $\overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}$, ou seja, $Df(p) = 2.\mathbf{R}(\partial f(p).h) = \mathbf{R}(F_1(h))$, onde F_1 é um polinômio de grau um (ou $= 0$). Além disto,

$$D^2f(p).h^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(p).h_i.h_j + \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z_i} \partial \overline{z_j}}(p).\overline{h_i}.\overline{h_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}(p).h_i.\overline{h_j}) \ ,$$

como o leitor pode verificar diretamente. Como f assume valôres reais temos $\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z_i} \partial \overline{z_j}}$, ou seja, se $Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(p).h_i.h_j$, então $\frac{1}{2}D^2f(p).h^2 = \frac{1}{2}(Q(h) + \overline{Q(h)}) + \frac{1}{2}L_f(p).h = \mathbf{R}(Q(h)) + \frac{1}{2}L_f(p).h$, logo,

$$f(p+h) = \mathbf{R}(f(p) + F_1(h) + Q(h)) + \frac{1}{2}L_f(p).h + O(h) \, ,$$

como queríamos.

Proposição 7.4.10. *Sejam $f \in C^2(U)$ e $\phi \colon V \to U$, uma aplicação holomorfa, onde $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^m$ são abertos. Então $\phi^*(L_f) = L_{f\circ\phi}$. Em particular, se ϕ é um biholomorfismo, então f é p.h. (resp. p.s.h.) (resp. e.p.s.h.) se, e somente se $f \circ \phi$ é p.h. (resp p.s.h.) (resp. e.p.s.h.).*

Demonstração. Seja $\phi(w) = (z_1(w), ..., z_n(w))$, $w = (w_1, ..., w_m) \in \mathbb{C}^m$. Temos $dz_j = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z_j}{\partial w_k}.dw_k$ e $d\overline{z_j} = \sum_{k=1}^{m} (\overline{\frac{\partial z_j}{\partial w_k}}).d\overline{w_k}$, já que z_j é holomorfa. Por outro lado, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{w_k}}(f \circ \phi) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} \circ \phi.(\overline{\frac{\partial z_j}{\partial w_k}}) \implies \frac{\partial^2}{\partial w_\ell \partial \overline{w_k}}(f \circ \phi) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} \circ \phi \, (\frac{\partial z_i}{\partial w_\ell}).(\overline{\frac{\partial z_j}{\partial w_k}}) \ ,$$

de onde obtemos,

$$L_{f\circ\phi} = \sum_{\ell,k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial w_\ell \partial \overline{w_k}}(f \circ \phi) dw_\ell d\overline{w_k} = \sum_{\ell,k=1}^{m} (\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} \circ \phi \, (\frac{\partial z_i}{\partial w_\ell}).(\overline{\frac{\partial z_j}{\partial w_k}})) dw_\ell d\overline{w_k} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} \circ \phi).(\sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial w_\ell}.dw_\ell).(\sum_{k=1}^{m} (\overline{\frac{\partial z_j}{\partial w_k}}) d\overline{w_k}) = \sum_{i,j=1}^{n} (\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} \circ \phi) dz_i d\overline{z_j} = \phi^*(L_f),$$

como queríamos. □

Tendo-se em vista a Proposição 7.4.10, é possível estender os conceitos de função plurisubharmônica e estritamente plurisubharmônica para variedades complexas. Sejam M uma variedade complexa e $f \in C^2(M)$. Definimos a forma de Levi de f utilizando cartas locais: dado $p \in M$ seja $\phi \colon U \to \mathbb{C}^n$ uma carta holomorfa tal que $p \in U$. A forma de Levi de f em p, $L_f(p)$, é a forma quadrática no espaço tangente T_pM, definida por

$$L_f(p).v = L_{f\circ\phi^{-1}}(\phi(p)).(D\phi(p).v) \ , \ \forall v \in T_pM \, .$$

Levando-se em conta a Proposição 7.4.10, esta definição não depende da carta holomorfa escolhida (verifique).

Definição 7.4.11. Sejam M variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e $f \in C^2(M)$. Dizemos que f é pluriharmônica (resp. plurisubharmônica) (resp. estritamente plurisubharmônica) se $L_f \equiv 0$ (resp. $L_f(p)$ é não negativa definida em T_pM, para todo $p \in M$) (resp. $L_f(p)$ é positiva definida em T_pM, para todo $p \in M$).

Dado um inteiro k, $1 \leq k \leq n$, dizemos que f é *k-estritamente plurisubharmônica*, se para todo $p \in M$ existe um sub-espaço complexo $E \subset T_pM$, de dimensão k, tal que $L_f(p)|_E$ é positiva definida, ou seja, para todo $v \in E$, $v \neq 0$, temos $L_f(p).v > 0$. Usaremos a notação k-e.p.s.h. para *k-estritamente plurisubharmônica*.

Observação 7.4.12. Seja $f \in C^2(M)$. Valem as seguintes propriedades:
(a) Se f é k-e.p.s.h.,onde $2 \leq k \leq n$, então f é ℓ-e.p.s.h. para todo $\ell < k$. Em particular, se f e.p.s.h., então f é k-e.p.s.h. para todo $k \leq n$.
(b) Se f é k-e.p.s.h., $k \geq 1$, então M não pode ser compacta.

Com efeito, se M fosse compacta, existiria $p_o \in M$ tal que $f(p) \leq f(p_o)$ para todo $p \in M$. Seja $\psi \colon V \to M$ uma imersão holomorfa de um disco $V \subset \mathbb{C}$ tal que $0 \in V$, $\psi(0) = p_o$ e $0 \neq \psi'(0) = v \in E$, sendo E é um sub-espaço de dimensão k onde $L_f(p_o)$ é positiva definida. Seja $g = f \circ \psi \colon V \to \mathbb{R}$. Por um cálculo direto temos $\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}}(0) = L_f(p_o).v > 0$. Como f é de classe C^2, existe um disco $D = D(0,r)$ tal que $\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}}(z) > 0$ para todo $z \in D$, ou seja, g é estritamente subharmônica em D. Logo g satisfaz ao princípio do máximo em D (Observação 7.4.2). Como $g(0) \geq g(z)$ para todo $z \in D$, obtemos que g é constante. Isto implica que $\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}} \equiv 0$, contradição.
(c) Se f é k-e.p.s.h., $k \geq 1$, então para todo $t \in \mathbb{R}$ o nível $f^{-1}(t)$ tem interior vazio em M.

Com efeito, o argumento da prova de (b) implica que f não pode ser constante em nenhum aberto.

Definição 7.4.13. Seja M uma variedade complexa conexa de dimensão $n \geq 1$. Dizemos que M é *k-completa*, se existe uma exaustão $f \in C^2(U)$ de M, $f \in C^2(M)$, tal que f é k-e.p.s.h..

Uma *exaustão* de M é uma função $g \in C^0(M)$ com as seguintes propriedades:
(a) g é limitada inferiormente, digamos $g \geq c$.
(b) Para toda seqüência $(p_n)_{n \geq 1}$ que não tem pontos de acumulação em M (denotaremos este fato por $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$), temos $\lim_{n\to\infty} g(p_n) = +\infty$.

Não é difícil ver que as condições (a) e (b) acima implicam que:
(c) g atinge o seu mínimo em M, ou seja, existe $p_o \in M$ tal que $g(p) \geq g(p_o)$ para todo $p \in M$.
(d) Para todo intervalo fechado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, o conjunto $g^{-1}[a,b]$ é compacto.

Um resultado conhecido é que em toda variedade de classe C^∞, conexa e não compacta existe uma exaustão de classe C^∞ (veja [28] ou [ref]).

Observação 7.4.14. Um fato bem conhecido é que uma variedade complexa e conexa M é de *Stein* se, e somente se, existe em M uma exaustão e.p.s.h. de classe C^∞. Este resultado é conhecido como Teorema de Hormander. A demonstração pode ser encontrada em [48].

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 7.4.15. $\mathbb{C}^n$ é de Stein.
Com efeito, $f(z) = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = ||z||^2$, é uma exaustão e.p.s.h. de $\mathbb{C}^n$.

Exemplo 7.4.16. Sejam M uma variedade de Stein e $N \subset M$, uma subvariedade complexa, conexa e propriamente mergulhada de dimensão positiva. Então N é de Stein. Em particular, toda subvariedade complexa, conexa e propriamente mergulhada de dimensão positiva de $\mathbb{C}^n$ é de Stein.

De fato, se $f \in C^\infty(M)$ é uma exaustão e.p.s.h. de M, então $g = f|_N \in C^\infty(N)$ é uma exaustão e.p.s.h. de N. Deixamos a prova deste fato para o leitor.

Exemplo 7.4.17. Se M e N são de Stein, então $M \times N$ é de Stein. Com efeito, se $f \in C^\infty(M)$ e $g \in C^\infty(N)$ são exaustões e.p.s.h. de M e N respectivamente, então $h \in C^\infty(M \times N)$, definida por $h(x, y) = f(x) + g(y)$ é uma exaustão e.p.s.h. de $M \times N$ (verifique).

Proposição 7.4.18. *Seja X um subconjunto algébrico de $\mathbb{C}P(n)$ definido por k polinômios homogêneos não nulos em $\mathbb{C}^{n+1}$. Então $M = \mathbb{C}P(n) \setminus X$ é ℓ-completa, onde $\ell = n - k + 1$. Em particular, se X é um subconjunto algébrico de codimensão um de $\mathbb{C}P(n)$, então $M = \mathbb{C}P(n) \setminus X$ é de Stein.*

Demonstração. Suponhamos X definido pelos polinômios homogêneos $f_1, ..., f_k$ em $\mathbb{C}^{n+1}$. Desta forma, se $[z] \in \mathbb{C}P(n)$ denota a classe de equivalência de um ponto $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, então $X = \{[z] \in \mathbb{C}P(n); f_1(z) = ... = f_k(z) = 0\}$. Seja d_j o grau de f_j, $j = 1, ..., k$. Sejam $q_1, ..., q_k \in \mathbb{N}$ tais que $d_1.q_1 = ... = d_k.q_k = q \geq 1$. Defina $f \colon M \to \mathbb{R}$ por

$$f([z]) = lg\Big(\frac{(\sum_{j=0}^n |z_j|^2)^q}{\sum_{j=1}^k |f_j^{q_j}(z)|^2}\Big) = lg\Big(\frac{g(z)}{h(z)}\Big)\,.$$

onde $z = (z_0, ..., z_n) \neq 0$. Note que f está bem definida, uma vez que o numerador e o denominador da fração satisfazem $g(t.z) = |t|^{2q}.g(z)$ e $h(t.z) = |t|^{2q}h(z)$, para todo $t \in \mathbb{C}$. Além disto, f é analítica real em M e $\lim_{p \to X} f(p) = +\infty$, ou seja, f é uma exaustão C^∞ de M. Provaremos em seguida que f é $(n - k + 1)$-e.p.s.h..

Fixemos um ponto $[z^o] = [z_0^o, ..., z_n^o] \in M$. Podemos supor que $z_0^o \neq 0$, de forma que $[z^o] = [1, x_1^o, ..., x_n^o]$ onde $x_j^o = z_j^o/z_0^o$. No sistema de coordenadas afins $(x_1, ..., x_n) \simeq [1, x_1, ..., x_n]$, podemos escrever que $f(x) = lg(g(1, x)) - lg(h(1, x)) = q.lg(1 + \sum_{j=1}^n |x_j|^2) - lg(h(1, x))$.

Por outro lado, se $h_1, ..., h_m$ são funções holomorfas num aberto de $\mathbb{C}^n$ e $H = lg(\sum_{j=1}^m |h_j|^2)$, então

$$L_H = \frac{\sum_{i<j} |h_i\, dh_j - h_j\, dh_i|^2}{H^2}\,,$$

fórmula cuja dedução deixamos a cargo do leitor. Em particular obtemos que

$$L_f(x) = q.(\frac{\sum_{j=1}^n |dx_j|^2 + \sum_{i<j} |x_i\, dx_j - x_j\, dx_i|^2}{(1+\sum_{j=1}^n |x_j|^2)^2}) - \sum_{i<j} \frac{|F_i(x).dF_j(x) - F_j(x).dF_i(x)|^2}{(\sum_{j=1}^k |F_j(x)|^2)^2} \ ,$$

onde $F_j(x) = f_j(1,x)$. Coloquemos $Q = \sum_{i<j} |F_i\, dF_j - F_j\, dF_i|^2$. Dado $x \notin X \cap \mathbb{C}^n$, seja

$$E(x) = \{v \in \mathbb{C}^n;\ Q(x).v = 0\} = \cap_{i<j} E_{ij}(x)$$

onde $E_{ij}(x) = \{v \in \mathbb{C}^n;\ F_i(x).dF_j(x).v - F_j(x).dF_i(x).v = 0\}$.

Afirmamos que para todo $x \notin X$ temos $dim(E(x)) \geq n - k + 1$.

De fato, como $x \notin X$, podemos supor, por exemplo que $F_1(x) \neq 0$. Seja S o sub-espaço de $\mathbb{C}^n$ definido pelas equações lineares

$$F_1(x).dF_j(x).v - F_j(x).dF_1(x).v = 0\ ,\ j = 2, ..., k.$$

Como S é definido por no máximo $k-1$ equações, temos $dim(S) \geq n-k+1$. Basta então provarmos que $S \subset E(x)$. Seja então $v \in S$. Dados $i, j \in \{2, ...k\}$, temos

$$F_1(x).dF_i(x).v - F_i(x).dF_1(x).v = 0 \,\mathrm{e}\, F_1(x).dF_j(x).v - F_j(x).dF_1(x).v = 0.$$

Multiplicando a primeira equação por $F_j(x)$, a segunda por $F_i(x)$ e subtraindo, obtemos:

$$F_1(x).(F_j(x).dF_i(x).v - F_i(x).dF_j(x).v) = 0 \implies F_j(x).dF_i(x).v - F_i(x).dF_i(x).v = 0$$

já que $F_1(x) \neq 0$. Isto prova a afirmação.

Para finalizarmos a prova da Proposição, basta observarmos que para todo $x \in \mathbb{C}^n$ a forma quadrática

$$\sum_{j=1}^n |dx_j|^2 + \sum_{i<j} |x_i\, dx_j - x_j\, dx_i|^2$$

é positiva definida. Isto implica que, se $x \notin X$ e $v \in E(x)$, $v \neq 0$, então $L_f(x).v > 0$. □

Teorema 7.4.19 (Teorema global de extensão)**.** *Sejam M uma variedade complexa k-completa, onde $k \geq 2$, e $K \subset M$ um compacto tal que $M \setminus K$ é conexo. Seja E um fibrado vetorial holomorfo com base M. Então toda seção holomorfa (resp. meromorfa) de E em $M \setminus K$ se estende a uma única seção holomorfa (resp. meromorfa) em M.*

A partir da Proposição 7.4.18 e do Teorema 7.4.19global de extensão, obtemos a seguinte conseqüência:

Corolário 7.4.20. *Sejam E um fibrado vetorial holomorfo sobre $\mathbb{C}P(n)$ e X um subconjunto algébrico de $\mathbb{C}P(n)$ definido por k polinômios homogêneos não nulos em $\mathbb{C}^{n+1}$, onde $1 \leq k \leq n-1$. Seja V uma vizinhança conexa de X. Então toda seção holomorfa (resp. meromorfa) de E em V, se estende a uma seção holomorfa (resp. meromorfa) de E em $\mathbb{C}P(n)$.*

Prova do Teorema 7.4.19. Fixemos uma seção holomorfa (resp. meromorfa) $\sigma\colon M \setminus K \to E$. Antes de entrar em detalhes técnicos daremos uma idéia da prova. Seja $f \in C^2(M)$ uma exaustão k-e.p.s.h. de M. Sejam $c_o = inf\{f(p);\, p \in M\}$ e $c = sup\{f(p);\, p \in K\}$, de forma que $K \subset f^{-1}[c_o, c]$, ou seja, σ está definida em $f^{-1}(c, +\infty)$. Vamos usar a notação $M_d = f^{-1}(d, +\infty)$. Mais adiante veremos que M_d é conexo para todo $d \in \mathbb{R}$. A idéia é provar a seguinte:

Afirmação 7.4.21. *Suponha que é possível estender σ a uma seção holomorfa (resp. meromorfa) de E em M_d, para algum $c_o \leq d \leq c$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que é possível estender σ a uma seção holomorfa (resp. meromorfa) de E em $M_{d-\epsilon}$.*

Observe que a Afirmação 7.3.10 implica que $inf\{t \in \mathbb{R};\, \sigma$ pode ser estendida a uma seção holomorfa (resp. meromorfa) em $M_t\} = -\infty$, ou seja, que σ pode ser estendida a M. Por outro lado, para provar a Afirmação 7.3.10, é suficiente provar a seguinte:

Afirmação 7.4.22. *Suponha que podemos estender σ a M_d e que $\partial M_d = f^{-1}(d) \neq \emptyset$. Então existe uma cobertura finita de ∂M_d por abertos, digamos $\{B_1, ..., B_m\}$, com as seguintes propriedades:*
(a) *σ pode ser estendida a uma seção holomorfa (resp. meromorfa) em $M_d \cup B_j$, para todo $j = 1, ..., m$.*
(b) *Para todo $j = 1, ..., m$, B_j é conexo e relativamente compacto e $B_j \cap M_d \neq \emptyset$.*
(c) *Se $B_i \cap B_j \neq \emptyset$, e A é uma componente conexa de $B_i \cap B_j$, então $A \cap M_d \neq \emptyset$.*

A prova da Afirmação 7.3.10 pode ser reduzida à Afirmação 7.3.11, da seguinte maneira: seja σ_j a extensão holomorfa (resp. meromorfa) de σ a $U_j = M_d \cup B_j$. Como B_j e M_d são conexos e $M_d \cap B_j \neq \emptyset$, segue que U_j é conexo, logo esta extensão é única. Por outro lado, (c) implica que se $i, j \in \{1, ..., m\}$, então $U_{ij} = (M_d \cup B_i) \cap (M_d \cup B_j) = M_d \cup (B_i \cap B_j)$ é conexo. Decorre daí que $\sigma_i|_{U_{ij}} = \sigma_j|_{U_{ij}}$, já que $\sigma_i = \sigma_j = \sigma$ em $M_d \subset U_{ij}$. Podemos então estender σ a uma seção em $V = (\cup_{i=1}^m B_i) \cup M_d$, que chamamos ainda de σ, colocando $\sigma|_{U_j} = \sigma_j$. Observe agora que ∂V é compacto e $c = sup\{f(p);\, p \in \partial V\} = d - \epsilon < d$ (verifique). Logo, podemos estender σ a $M_{d-\epsilon}$, como queríamos.

A prova da Afirmação 7.3.11 será baseada no seguinte:

Lema 7.4.23. *Sejam M variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e $f \in C^2(M)$ uma função k-e.p.s.h., onde $k \geq 2$. Dados $p \in f^{-1}(d)$ e uma vizinhança B de p, existem uma carta holomorfa $\phi\colon U \to V \subset \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ e um domínio de Hartogs H tais que $p \in U \subset B$, $H \subset \phi(f^{-1}(d, +\infty))$ e $\phi(p) \in c(H)$.*

Demonstração. Considerando uma carta holomorfa $\psi\colon U_1 \to \mathbb{C}^n$ tal que $p \in U_1 \subset B$ e $\psi(p) = 0$, podemos supor que f é uma função k-e.p.s.h. em $\psi(U_1) = V_1 \subset \mathbb{C}^n$, sendo $f(0) = d$. Basta então provar que existem um biholomorfismo $F\colon V_2 \to V \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ e um domínio de Hartogs H em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ tais que $F(0) = 0$, e se $g = f \circ F^{-1}$ então $H \subset g^{-1}(d, +\infty)$ e $0 \in c(H)$. Consideraremos primeiramente o caso em que $n = 2$. O caso geral, $n > 2$, será reduzido a este utilizando o Lema 7.2.9. Sejam então $U \subset \mathbb{C}^2$ e $f \in C^2(U)$ uma função e.p.s.h., onde $0 \in U$ e $f(0) = d$. Pela Observação 7.4.9, podemos escrever

$$(1)\ \ f(z) = \mathbf{R}(F(z)) + \frac{1}{2}L_f(0).z + O(z)\,,\ z = (z_1, z_2) \in U\,,$$

onde $F(z) = d + \partial f(0).z + Q(z)$, Q é um polinômio homogêneo de grau 2 e $\lim_{z\to 0} \frac{O(z)}{||z||^2} = 0$. Dividiremos a prova em dois casos.

Caso 1. 0 é ponto regular de f, ou seja $df(0) \neq 0$. Note que esta condição é equivalente a $\partial f(0) \neq 0$, uma vez que f assume valôres reais. Podemos então supor que $\frac{\partial f}{\partial z_2} \neq 0$. Neste caso, pelo Teorema de função inversa, a aplicação $F(z_1, z_2) = (z_1, \partial f(0).z + Q(z)) = (w_1, w_2)$ é um difeomorfismo de uma vizinhança $V_1 \subset U$ de 0 sobre uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{C}^2$. Consideremos a função $g = f \circ F^{-1} \colon V \to \mathbb{R}$. De (*) obtemos:

$$(2)\ \ g(w) = g(w_1, w_2) = d + \mathbf{R}(w_2) + \frac{1}{2}L_f(0)(F^{-1}(w)) + O(F^{-1}(w)).$$

Escrevendo $F^{-1}(w) = T(w) + o(w)$, onde $T = DF^{-1}(0)$ e $\lim_{w\to 0} \frac{o(w)}{||w||} = 0$, e substituindo em (2), obtemos

$$(3)\ \ g(w) = d + \mathbf{R}(w_2) + L_1(w) + O_1(w) = d + x_2 + L_1(w) + O_1(w)\,,$$

onde $x_2 = \mathbf{R}(w_2)$, $L_1(w) = \frac{1}{2}L_f(0).T(w)$ e $\lim_{w\to 0} \frac{O_1(w)}{||w||^2} = 0$, como o leitor pode constatar diretamente. Observe que $L_1(w)$ é uma forma quadrática positiva definida ($L_1 = \frac{1}{2}.L_g(0)$), já que g é e.p.s.h.. Afirmamos que existem um intervalo $C = [0, a] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e $r > 0$ tais que o compacto

$$(4)\ \ K = \{(w_1, t);\ |w_1| = r \,\mathrm{e}\, t \in C\} \cup \{(w_1, a);\ |w_1| \leq r\}$$

está contido em $g^{-1}(d, +\infty)$.

Com efeito, como L_1 é positiva definida e $\lim_{w\to 0} \frac{O_1(w)}{||w||^2} = 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que se $||w|| < \epsilon$, então $w \in V$ e $L_1(w) + O_1(w) \geq 0$, sendo a desigualdade estrita se $w \neq 0$. Fixemos $r > 0$ e $a > 0$ tais que se $|w_1| \leq r$ e $t \in [0, a]$ então $w = (w_1, t) \in V$ e $||w|| < \epsilon$. Se K é como em (4) e $w = (w_1, t) \in K$, então $||w|| < \epsilon$, logo $g(w) = d + t + L_1(w) + O_1(w) \geq d + t$, sendo a desigualdade estrita se $w \neq 0$, o que implica que $K \subset g^{-1}(d, +\infty)$, como queríamos. Pelo Lema 7.2.9, existe um domínio de Hartogs $H \subset g^{-1}(d, +\infty)$ tal que $0 \in \overline{D(0, r)} \times C \subset c(H)$, o que termina a prova do Caso 1.

Caso 2. $\partial f(0) = 0$. Neste caso, o desenvolvimento de Taylor de f em $0 \in \mathbb{C}^2$ é da forma

$$(5)\ \ f(z) = d + \mathbf{R}(Q(z)) + L(z) + O(z)\,,$$

onde Q é um polinômio complexo homogêneo de grau dois, $L(z) = \frac{1}{2}L_f(0).z$ é positiva definida e $\lim_{z\to 0} \frac{O(z)}{||z||^2} = 0$. Vamos primeiramente reduzir o problema ao caso em que f é homogênea de grau 2. Seja $q(z) = \mathbf{R}(Q(z)) + \frac{1}{2}L(z)$.

Afirmação 7.4.24. *Suponha que existem um biholomorfismo $\psi\colon U \to V$, onde U e V são vizinhanças de $0 \in \mathbb{C}^2$ e $\psi(0) = 0$, uma decomposição $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ e um domínio de Hartogs limitado $H \subset \psi(q^{-1}(0,+\infty)) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ tais que $0 \in c(H)$ e $\psi(0) = 0$. Então H satisfaz à conclusão do Lema 7.4.23.*

De fato, consideremos o domínio V_1 de f, onde $0 \in V_1$. Seja $h_t(z) = t.z$, a homotetia de razão $t > 0$. Como $H \subset \psi(q^{-1}(0,+\infty))$ temos

$$\psi^{-1}(H) \subset q^{-1}(0,+\infty) \implies h_t(\psi^{-1}(H)) \subset h_t(q^{-1}(0,+\infty)) = q^{-1}(0,+\infty)\,,$$

já que $q \circ h_t^{-1}(z) = q(t^{-1}.z) = t^{-2}.q(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}^2$. Como H é limitado e ψ^{-1} é biholomorfismo, vemos que $\psi^{-1}(H)$ é limitado. Isto implica que, dado $r > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que se $t < \epsilon$, então $h_t(\psi^{-1}(H)) \subset B_r \cap q^{-1}(0,+\infty)$, onde $B_r = \{z;\, ||z|| < r\}$. Em particular, se r for suficientemente pequeno, teremos $h_t(\psi^{-1}(H)) \subset V_1$. Por outro lado, $f(z) - q(z) = d + \frac{1}{2}L(z) + O(z)$. Como L é positiva definida e $\lim_{z\to 0} \frac{O(z)}{||z||^2} = 0$, existe $r_o > 0$ tal que se $z \in B_{r_o}$ então $z \in V_1$ e $\frac{1}{2}L(z) + O(z) \geq 0$, sendo a desigualdade estrita se $z \neq 0$. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que se $t < \epsilon$, então $h_t(\psi^{-1}(H)) \subset B_{r_o}$. Observe que se $t < \epsilon$ e $z \in h_t(\psi^{-1}(H))$, então

$$f(z) - q(z) = d + \frac{1}{2}L(z) + O(z) \geq d \implies f(z) \geq d + q(z) > d\,,$$

uma vez que $h_t(\psi^{-1}(H)) \subset q^{-1}(0,+\infty)$. Logo existe $t > 0$ tal que $h_t(\psi^{-1}(H)) \subset f^{-1}(d,+\infty)$. Seja $\phi = \psi \circ h_t^{-1}$. Vemos então que $H \subset \phi(f^{-1}(d,+\infty))$ e $0 = \phi(0) \in c(H)$, o que prova a Afirmação 7.4.21. □

Vamos agora estudar as formas quadráticas do tipo $\mathbf{R}(Q(z)) + L(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, onde Q é um polinômio complexo homogêneo de grau 2 e L é positiva definida.

Proposição 7.4.25. *Sejam Q um polinômio homogêneo de grau 2 e L uma forma quadrática positiva definida em $\mathbb{C}^n$. Então existe um isomorfismo T de $\mathbb{C}^n$ tal que $L \circ T(w_1,...,w_n) = \sum_{j=1}^n |w_j|^2$ e $Q \circ T(w_1,...,w_n) = \sum_{j=1}^n a_j\, w_j^2$, onde $a_1,...,a_n$ são números reais não negativos.*

Demonstração. Um resultado bem conhecido de álgebra linear, é que se L é uma forma quadrática positiva definida em $\mathbb{C}^n$, então existe uma base de $\mathbb{C}^n$, digamos $\{V_1,...,V_n\}$, tal que $L(\sum_{j=1}^n z_j\, V_j) = \sum_{j=1}^n |z_j|^2$. Podemos então supor que $L(z_1,...,z_n) = \sum_{j=1}^n |z_j|^2$. Seja $<,>$ a métrica hermitiana associada, $< Z, W >= Z.\overline{W}^t = \sum_{j=1}^n z_j\, \overline{w_j}$, $Z = (z_1,...,z_n), W = (w_1,...,w_n) \in \mathbb{C}^n$. Escrevamos Q neste sistema de coordenadas como $Q(Z) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}.z_i\, z_j = Z.A.Z^t$, onde podemos supor que a matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ é simétrica. Consideremos a transformação $\mathbb{R}$-linear S de $\mathbb{C}^n$ definida por $S(Z) = \overline{Z}.\overline{A}$. Temos $Q(Z) = Z.A.Z^t =< Z, S(Z) >$. Vamos considerar $\mathbb{C}^n$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Afirmamos que os auto-valôres de S são reais e que S é diagonalizável numa base de $\mathbb{C}^n$ do tipo $\{W_1, i\,W_1, ..., W_n, i\,W_n\}$, sendo $\{W_1,...,W_n\}$ ortonormal com respeito a $<,>$.

Com efeito, observemos em primeiro lugar que

$$< Z, S(W) >= Z.A.W^t = W.A.Z^t =< W, S(Z) >,$$

já que A é simétrica. Isto implica que, se E é um sub-espaço invariante por S, então $E^\perp = \{Z; < Z, W >= 0 \text{ para todo } W \in E\}$, é também invariante por S (verifique).

Provemos que os auto-valores de S são reais. Suponhamos, por absurdo, que S possua um auto-valor da forma $a + ib$ com $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Neste caso, é sabido da álgebra linear, que S possui um sub-espaço invariante de dimensão real dois, o qual possui uma base $\{Z_1, Z_2\}$ tal que

$$S(Z_1) = a.Z_1 + b.Z_2 \ \text{ e } \ S(Z_2) = -b.Z_1 + a.Z_2\,,$$

de onde obtemos,

$$a < Z_2, Z_1 > +b||Z_2||^2 =< Z_2, S(Z_1) >=< Z_1, S(Z_2) >= -b||Z_1||^2 + a < Z_1, Z_2 >\,,$$

logo,

$$b(||Z_1||^2 + ||Z_2||^2) = a(< Z_1, Z_2 > - < Z_2, Z_1 >) = 2ia\Im(< Z_1, Z_2 >)\,,$$

onde $\Im(x + iy) = y$ (parte imaginária). Como $||Z_1||^2 + ||Z_2||^2 > 0$, obtemos $b = 0$, contradição. Logo os auto-valôres de S são reais. Fixemos um auto-vetor W_1 de S com auto-valor $a_1 \in \mathbb{R}$. Temos

$$S(i\,W_1) = \overline{i\,W_1}.\overline{A} = -i\,\overline{W_1}.\overline{A} = -i\,S(W_1) = -i\,a_1.W_1 = -a_1.(i\,W_1).$$

Concluímos daí que $i\,W_1$ é auto-vetor de S com auto-valor $-a_1$. Trocando W_1 por $i\,W_1$, se necessário, podemos supor que $a_1 \geq 0$. Normalizando, podemos supor que $||W_1|| = ||i\,W_1|| = 1$.

Suponhamos, por indução, que obtivemos um conjunto ortonormal $\{W_1, ..., W_\ell\}$ tal que $S(W_j) = a_j\,W_j$, $a_j \geq 0$, para todo $j = 1, ..., \ell$, onde $1 \leq \ell < n$. Seja E o sub-espaço gerado por $W_1, i\,W_1, ..., W_\ell, i\,W_\ell$. Como $E^\perp$ é invariante por S e tem dimensão positiva, podemos escolher um auto-vetor de S, $W_{\ell+1} \in E^\perp$, com auto-valor $a_{\ell+1} \geq 0$, e tal que $||W_{\ell+1}|| = 1$. Neste caso $i\,W_{\ell+1}$ é auto-vetor de S com auto-valor $-a_{\ell+1}$ e $< W_j, W_{\ell+1} >= 0$ para todo $j = 1, ..., \ell$. Desta forma podemos obter a base $\{W_1, i\,W_1, ..., W_n, i\,W_n\}$ desejada.

Fixemos agora $W \in \mathbb{C}^n$. Podemos escrever $W = \sum_{j=1}^n (x_j\,W_j + y_j\,i\,W_j) = \sum_{j=1}^n w_j\,W_j$, $w_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$. Temos $L(W) = ||W||^2 = \sum_{j=1}^n |w_j|^2$, já que $\{W_1, ..., W_n\}$ é ortonormal. Além disto,

$$S(W) = \sum_{j=1}^n S(x_j\,W_j + y_j\,i\,W_j) = \sum_{j=1}^n (x_j\,S(W_j) + y_j\,S(i\,W_j)) =$$

$$= \sum_{j=1}^n (a_j\,x_j\,W_j - a_j\,y_j\,(i\,W_j)) = \sum_{j=1}^n a_j\,\overline{w_j}.W_j\,,$$

logo,

$$Q(W) =< W, S(W) >= \sum_{j,k=1}^{n} < w_j\, W_j, a_k.\overline{w_k}.W_k >= \sum_{j=1}^{n} a_j\, w_j^2\,,$$

como queríamos. □

Voltemos à prova do Lema 7.4.23. Pela Proposição 7.4.25, podemos supor que

$$q(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \mathbf{R}(a_1.z_1^2 + a_2.z_2^2) = (1 + a_1)x_1^2 + (1 - a_1)y_1^2 + (1 + a_2)x_2^2 + (1 - a_2)y_2^2\,,$$

onde $a_1, a_2 \geq 0$ e $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$. Vamos dividir em três subcasos:

2.1. $0 \leq a_1 < 1$ e $0 \leq a_1 < 1$. Neste caso, $q^{-1}(0, +\infty) = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Colocamos então, na Afirmação 7.4.21, $\psi = \mathit{identidade}$ e $H = P \setminus Q$, onde $P = \{(z_1, z_2);\, |z_1|, |z_2| < 2\}$ e $Q = \{(z_1, z_2);\, |z_1|, |z_2| \leq 1\}$.

2.2. $0 \leq a_1 < 1$ e $1 \leq a_2$, ou vice-versa. Suponhamos por exemplo que $0 \leq a_1 < 1$ e $1 \leq a_2$. Neste caso, se $z = (z_1, t)$ onde $t \in \mathbb{R}$, então $q(z) \geq 0$, sendo a desigualdade estrita se $z \neq 0$. Seja

$$K = \{(z_1, t);\, |z_1| = 1\,\mathrm{e}\,t \in [0, 1]\} \cup \{(z_1, 1);\, |z_1| \leq 1\}.$$

Como $K \subset q^{-1}(0, +\infty)$, pelo Lema 7.2.9 existe um domínio de Hartogs limitado $H \subset q^{-1}(0, +\infty)$ tal que $0 \in \overline{D(0, 1)} \times [0, 1] \subset c(H)$, como queríamos.

2.3. $a_1, a_2 \geq 1$. Neste caso, ao contrário dos anteriores, temos que fazer algumas mudanças de variáveis. Fazendo $z_1' = \sqrt{a}_1.z_1 + i\sqrt{a}_2.z_2$ e $z_2' = \sqrt{a}_1.z_1 - i\sqrt{a}_2.z_2$, obtemos

$$q(z_1', z_2') = b_1|z_1' + z_2'|^2 + b_2|z_1' - z_2'|^2 + \mathbf{R}(z_1'.z_2'),$$

onde $b_1 = 1/4a_1$, $b_2 = 1/4a_2 \leq 1/4$, como o leitor pode verificar diretamente. Vamos fazer mais uma simplificação: fixemos $a = max\{a_1, a_2\} \geq 1$ e coloquemos

$$h(z_1', z_2') = |z_1'|^2 + |z_2'|^2 + 2a.\mathbf{R}(z_1'.z_2') = \frac{1}{2}(|z_1' + z_2'|^2 + |z_1' - z_2'|^2) + 2a.\mathbf{R}(z_1'.z_2'),$$

Como $2a.q(z_1', z_2') - h(z_1', z_2') \geq 0$, obtemos que $h^{-1}(0, +\infty) \subset q^{-1}(0, +\infty)$, logo basta obtermos um biholomorfismo $\psi \colon U \to V$ e um domínio de Hartogs $H \subset \psi(h^{-1}(0, +\infty) \cap U)$.

Note que

$$h(z_1', z_2') = |z_1'|^2 + |z_2' - a|^2 + 2a.\mathbf{R}(z_2' + z_1'.z_2') - a^2.$$

Consideremos então o biholomorfismo $\psi \colon \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D} \times \mathbb{C}$, definido por $\psi(z_1', z_2') = (z_1', a(z_2' + z_1'.z_2')) = (w_1, w_2)$, cujo inverso é $\psi^{-1}(w_1, w_2) = (w_1, w_2/a(1+w_1) = (z_1', z_2')$. Neste novo sistema de coordenadas temos

$$(1)\;\; h(w_1, w_2) = |w_1|^2 + |\frac{w_2}{a(1 + w_1)} - a|^2 + 2\mathbf{R}(w_2) - a^2.$$

A idéia é provar que, escolhendo $0 < r < 1$ convenientemente, o compacto

$$K = \{(w_1, t);\, |w_1| = r \,\text{e}\, t \in [0, \frac{a^2}{2}]\} \cup \{(w_1, \frac{a^2}{2});\, |w_1| \leq r\},$$

está contido em $h^{-1}(0, +\infty)$ e utilizar em seguida o Lema 7.2.9. Fazendo $w_2 = t \in \mathbb{R}$ em (*) obtemos

$$(2)\;\; h(w_1, t) = |w_1|^2 + |\frac{t}{a(1 + w_1)} - a|^2 + 2t - a^2.$$

Em particular se $t = a^2/2$ então

$$h(w_1, t) = |w_1|^2 + |\frac{a}{2(1 + w_1)} - a|^2,$$

logo $h(w_1, a^2/2) > 0$ para todo $w_1 \in \mathbb{D}$. Em particular $\{(w_1, a^2/2);\, |w_1| \leq 1\} \subset h^{-1}(0, +\infty)$. A fim de analisar o sinal de h em $\{(w_1, t);\, |w_1| = r \,\text{e}\, t \in [0, a^2/2]\}$, onde $r < 1$ é próximo de 1, façamos $w_1 = e^{i\theta}$ em (2). Temos,

$$h(e^{i\theta}, t) = 1 + |\frac{t}{a(1 + e^{i\theta})} - a|^2 + 2t - a^2 =$$

$$= 1 + \frac{t^2}{a^2|1 + e^{i\theta}|^2} - 2t\mathbf{R}(\frac{1}{1 + e^{i\theta}}) + 2t = 1 + \frac{t^2}{2a^2(1 + cos(\theta))} + t,$$

uma vez que $|1 + e^{i\theta}|^2 = 2(1 + cos(\theta))$ e $\mathbf{R}(1/(1 + e^{i\theta})) = 1/2$. Logo $h(e^{i\theta}, t) \geq 1$ para todo $t \in [0, a^2/2]$. Isto implica que se $r < 1$, está próximo de 1, então $h(re^{i\theta}, t) > 0$ para todo $t \in [0, a^2/2]$, como queríamos. Isto prova o Lema 7.4.23 no caso $n = 2$.

Provemos o Lema 7.4.23 no caso $n \geq 3$. Sejam $f \in C^2(M)$ uma função k-e.p.s.h. e $p \in f^{-1}(d)$, onde $k \geq 2$. Como $k \geq 2$, existe um plano de dimensão 2, digamos $E \subset T_p(M)$, tal que a forma de Levi de f em p restrita a E é positiva definida. Seja $\phi\colon U \to \mathbb{C}^n$ uma carta local holomorfa, onde $p \in U$, tal que $\phi(p) = 0 \in \mathbb{C}^n$ e $D\phi(p).E = \mathbb{C}^2 \times \{0\}$. Seja $h = f \circ \phi^{-1}\colon V \to \mathbb{R}$, onde $V = \phi(U)$ e $h(0) = d$. Denotemos por $L_h(q)$ a forma de Levi de h num ponto $q \in V$. Afirmamos que existe uma vizinhança $W \subset V$ de 0 tal que se $q \in W$, então a restrição de $L_h(q)$ a $\mathbb{C}^2 \times \{0\}$ é positiva definida.

Com efeito, como $L_h(0)|_{\mathbb{C}^2 \times \{0\}}$ é positiva definida, temos

$$inf\{L_h(0).v;\, v \in \mathbb{C}^2 \times \{0\} \,\text{e}\, ||v|| = 1\} = a > 0.$$

Seja $S^3 = \{v \in \mathbb{C}^2 \times \{0\};\, ||v|| = 1\}$. Como $h \in C^2$, a função $g\colon V \times S^3 \to \mathbb{R}$, definida por $g(q, v) = L_h(q).v$ é contínua. Portanto existe vizinhança de 0, $W \subset V$, tal que para todo $(q, v) \in W \times S^3$ temos $L_h(q).v > a/2$, o que implica a afirmação.

Seja $W_1 = W \cap (\mathbb{C}^2 \times \{0\})$. Observe que $h|_{W_1}$ é e.p.s.h.. O Lema 7.4.23, aplicado no caso $n = 2$, implica que existem um biholomorfismo ψ de uma vizinhança de 0, $W_2 \subset W_1$, numa vizinhança W_3 de $0 \in \mathbb{C}^2$, e um domínio de Hartogs $H_1 \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, tais que $0 \in c(H_1)$ e $H_1 \subset \psi(W_1 \cap h^{-1}(d, +\infty))$. Podemos supor que H_1 é relativamente compacto em W_3 e que $\overline{H_1} \subset \psi(W_1 \cap h^{-1}(d, +\infty))$ (verifique). Consideremos a aplicação ψ_1 definida por $\psi_1(z_1, z_2, z_3, ..., z_n) = (\psi(z_1, z_2), z_3, ..., z_n)$, a qual está definida e é um biholomorfismo numa vizinhança de 0 do tipo $W_2 \times B \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2}$. Aplicando o Lema 7.2.9 ao compacto $\overline{H_1} \times \{0\} \subset \psi_1(h^{-1}(d, +\infty))$, podemos obter um domínio de Hartogs H da forma $H_1 \times P$, onde P é um polidisco em $\mathbb{C}^{n-2}$ com centro em 0, tal que $0 \in c(H)$ e $H \subset \psi_1(h^{-1}(d, +\infty))$. Isto termina a prova do Lema 7.4.23. □

Voltemos à prova da Afirmação 7.3.11. Fixemos um ponto $p \in \partial M_d = f^{-1}(d)$. Suponhamos que $\pi \colon E \to M$ é um fibrado vetorial holomorfo sobre M de posto r. Tomando uma trivialização de E numa vizinhança B de p, podemos fixar r seções holomorfas $\sigma_1, ..., \sigma_r \colon B \to E$ tais que para todo $q \in B$ a fibra $\pi^{-1}(q)$ é gerada por $\sigma_1(q), ..., \sigma_r(q)$. Pelo Lema 7.4.23 existem uma carta holomorfa $\phi \colon U \to V \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ e um domínio de Hartogs $H \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ tais que $p \in U \subset B$, $H \subset \phi(f^{-1}(d, +\infty))$ e $\phi(p) \in c(H)$. Consideremos a seção holomorfa (resp. meromorfa) σ, a qual está definida em $M_d = f^{-1}(d, +\infty)$. Observe que a restrição $\sigma|_{B \cap M_d}$ pode ser escrita como $\sum_{j=1}^{r} f_j \, \sigma_j$, onde $f_1, ..., f_r$ são funções holomorfas (resp. meromorfas) em $B \cap M_d$. Pelo Teorema de Hartogs (resp. de Levi), as funções $f_1 \circ \phi^{-1}, ..., f_r \circ \Phi^{-1}$ podem ser estendidas a $c(H)$. Como $\phi(p) \in c(H)$, as funções $f_1, ..., f_r$ podem ser estendidas a uma vizinhança conexa de p, digamos W_p. Isto implica que σ pode ser estendida à vizinhança W_p. Por outro lado, como ∂M_d é compacto, podemos considerar uma cobertura finita $\{W_1 = W_{p_1}, ..., W_\ell = W_{p_\ell}\}$ de ∂M_d por abertos deste tipo. Veremos agora como obter a cobertura $\{B_1, ..., B_m\}$ como em (c) da Afirmação 7.3.11.

Dados $i \neq j \in \{1, ..., \ell\}$, podemos escrever $W_i \cap W_j = W'_{ij} \cup W''_{ij}$, onde W'_{ij} é a união das componentes conexas de W_{ij} que cortam M_d e W''_{ij} é a união das componentes conexas de W_{ij} que não cortam M_d. Seja $W'_j = W_j \setminus (\cup_{i \neq j} W''_{ij})$. Note que $\cup_{j=1}^{\ell} W'_j \supset \partial M_d$, uma vez que W''_{ij} não contém pontos de ∂M_d. Seja $W'_j = \cup_{r \in I_j} B^r_j$ a decomposição de W'_j em componentes conexas. Observe que, se $(i, s) \neq (j, r)$ são tais que $B^s_i \cap B^r_j \neq \emptyset$, então todas as componentes conexas de $B^s_i \cap B^r_j$ cortam M_d (por construção). Como $\mathcal{B} = \{B^r_j\}_{j,r}$ é uma cobertura de ∂M_d, o qual é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita de $\mathcal{B}$, a qual denotamos por $\{B_1, ..., B_m\}$. Não é difícil ver que esta cobertura satisfaz às propriedades (a), (b) e (c) da Afirmação 7.3.11, como queríamos.

Para completar a prova do Teorema 7.4.19 falta provarmos que M_d é conexo para todo $d \in \mathbb{R}$. Na verdade, enunciaremos um fato mais geral. Fixemos a variedade M de dimensão complexa n e a exaustão k-e.p.s.h., $f \in C^2(M)$. Para $d \in \mathbb{R}$ fixo, denotemos por $i \colon M_d \to M$ a inclusão. Dado $j \in \{0, ..., 2n\}$, sejam $h_j \colon H_j(M_d, \mathbb{Z}) \to H_j(M, \mathbb{Z})$ e $i_j \colon \Pi_j(M_d, p) \to \Pi_j(M, p)$ os homomorfismos induzidos por i.

Teorema 7.4.26. *Os homomorfismos h_j e i_j são sobrejetores, se $j \leq k-1$, e são isomorfismos, se $j \leq k-2$. Em particular se $k \geq 2$ então M_d é conexa (já que h_0 é isomorfismo).*

Provaremos o Teorema 7.4.26 apenas no caso que nos interessa, isto é, que h_0 é isomorfismo se $k \geq 2$. A idéia da prova do caso geral é a mesma, apenas tecnicamente mais elaborada. Esta prova pode ser encontrada em [57].

Demonstração. (h_0 é isomorfismo). Vamos supor $k = 2$. Consideremos primeiramente o caso em as singularidades de f são de Morse (veja [66]). Uma singularidade de f é um ponto $p \in M$ tal que $Df(p) = 0$. A singularidade é de Morse se numa carta local $(x_1, ..., x_{2n}) = x \colon U \to \mathbb{R}^{2n}$, de classe C^∞, tal que $p \in U$ e $x(p) = 0$, a matriz Hessiana

$$H = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0))_{1 \leq i,j \leq 2n}$$

é não singular. Como esta matriz é simétrica, os seus auto-valores são reais e não nulos. O número de auto-valores negativos (resp. positivos) de H é chamado de *índice (resp. co-índice) de Morse de* f no ponto p. Êstes números não dependem da carta local escolhida (veja [66]). Uma função tal que todas as suas singularidades são de Morse é chamada de *função de Morse*. Observemos que as singularidades de Morse são isoladas. Como conseqüência, o conjunto singular de uma função de Morse é discreto.

Observação 7.4.27. O Teorema de Taylor implica que, no sistema de coordenadas considerado, podemos escrever f numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ como

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0).x_i\, x_j + O(x) = f(0) + \frac{1}{2}x^t.H.x + O(x),$$

onde $\lim_{x \to 0} O(x)/||x||^2 = 0$. Em particular $x^t.H.x = D^2 f(0).x^2$. Por outro lado, da álgebra linear segue que o co-índice de Morse de f em 0 é o inteiro

$$c = \max\{dim(E);\, E \text{ é subespaço de } \mathbb{R}^{2n} \text{ e } D^2 f(0)|_E \text{ é positiva definida}\}.$$

Deixamos a verificação deste fato para o leitor.

Lema 7.4.28. *Seja f uma função de Morse k-e.p.s.h.. Então todas as singularidades de f possuem co-índice de Morse maior ou igual a k.*

Demonstração. Seja $p \in M$ uma singularidade de f, onde $f(p) = d$. Tomando uma carta local holomorfa numa vizinhança de p, podemos supor que $p = 0 \in \mathbb{C}^n$ e que $f \colon U \to \mathbb{R}$, onde U é uma vizinhança de 0. Seja L a forma de Levi de f em 0. Pela Observação 7.4.9, o desenvolvimento de Taylor de f em $0 \in \mathbb{C}^n$ é da forma

$$f(z) = f(0) + \frac{1}{2}(L.z + \mathbf{R}(Q(z))) + O(z)\,,$$

onde Q é um polinômio homogêneo de grau dois e $\lim_{z \to 0} O(z)/||z||^2 = 0$. Concluímos daí que $D^2 f(0).z^2 = L.z + \mathbf{R}(Q(z))$. Como f é k-e.p.s.h., seja E um plano de dimensão complexa k tal que $L|_E$ é positiva definida. Pela Proposição 7.4.25, existem $a_1, ..., a_k \geq 0$ e uma base $\{e_1, ..., e_k\}$ de E tal que se $W = \sum_{j=1}^k w_j\, e_j \in E$, então

$$D^2 f(0).W^2 = \sum_{j=1}^{k}(|w_j|^2 + a_j \mathbf{R}(w_j^2)) = \sum_{j=1}^{k}[(1+a_j)x_j^2 + (1-a_j)y_j^2]\,,$$

onde $w_j = x_j + iy_j$. Seja $F = \{W = \sum_{j=1}^k (x_j + iy_j).e_j \in E;\ y_j = 0\,\forall j = 1, ..., k\}$.

Note que F tem dimensão real k e que $D^2 f(0)|_F$ é positiva definida. O Lema 7.4.28 decorre então da Observação 7.4.27. □

Provaremos agora que M_d é conexa (o que é equivalente a dizer que h_0 é isomorfismo). Fixemos dois pontos $p_0, p_1 \in M_d$ e provemos que existe um caminho $\alpha\colon I \to M_d$ tal $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$. Como M é conexa existe um caminho $\beta\colon I \to M$ tal $\beta(0) = p_0$ e $\beta(1) = p_1$. Podemos supor que o caminho β é regular de classe C^∞. Seja $c = \min\{f(p_0), f(p_1)\} > d$ de forma que $p_0, p_1 \in \overline{M_c}$. Fixemos $d < e < c$. Seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função tal que $\phi(t) = 1$ se $t \in [-\infty, e]$, $\phi(t) = 0$ se $t \geq c$ e $0 \leq \phi(t) \leq 1$ se $t \in [e, c]$. Considere a função $g \in C^2(M)$ definida por $g(p) = \phi(f(p)).f(p)$. Note que $g|_{M \setminus M_e} \equiv f|_{M \setminus M_e}$ e que $g|_{M_c} \equiv 0$. Fixemos uma métrica riemanniana em M, a qual denotaremos por $<,>$. A norma relativa a $<,>$ é definida por $||v||_p^2 = < v, v >_p$, $v \in T_p(M)$. Seja $X = grad(g)$ o campo gradiente de g com respeito a $<,>$. Êste campo é definido da seguinte maneira: dado $p \in M$, $X(p)$ é o único vetor de $T_p(M)$ que satisfaz $Dg(p).v = < X(p), v >_p$, para todo $v \in T_p(M)$. Denotemos por X_t o fluxo (real) de X. Observemos os seguintes fatos:

(a) X coincide com grad(f) no aberto $U = M \setminus \overline{M_e}$. Em particular as singularidades de X em U coincidem com as singularidades de $f|_U$. Estas singularidades são em número finito, já que f é de Morse e $\overline{U}$ é compacto (pois f é exaustão).

(b) $X \equiv 0$ em M_c.

Decorre de (b) que:

(c) O fluxo de X é completo, isto é, para todo $q \in M$ e todo $t \in \mathbb{R}$, $X_t(q)$ está definido. Em particular para todo $t \in \mathbb{R}$ fixado, $X_t\colon M \to M$ é um difeomorfismo de classe C^2 (veja [68]).

(d) Se $p \in M$ não é uma singularidade de X, então g é crescente ao longo da órbita de p. De fato, seja $h(t) = g(X_t(p))$. Temos

$$h'(t) = Dg(X_t(p)).\frac{d}{dt}(X_t(p)) = Dg(X_t(p)).X(X_t(p)) = ||X(X_t(p))||^2 > 0,$$

já que $X(X_t(p)) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Seja agora $p \in M$ uma singularidade de X. A *variedade estável* de p é definida por $W^s(p) = \{q \in M;\ \lim_{t\to+\infty} X_t(q) = p\}$. O seguinte fato é conhecido:

(e) Se p é uma singularidade de Morse de g com índice de Morse r, então $W^s(p)$ é uma subvariedade de M de classe C^2 de dimensão real r (veja [68]).

Como f é 2-e.p.s.h. e $f \equiv g$ em $U = M \setminus \overline{M_e}$, pelo Lema 7.4.28, as variedades estáveis de todas as singularidades de X em U são subvariedades de M de classe C^2 e dimensão $r \leq 2n-2$, já que o co-índice é maior ou igual a 2. Sejam $q_1, ..., q_m$ as singularidades de X em U e $W_1, ..., W_m$ as suas variedades estáveis. Note que (d) implica que $W_1 \cup ... \cup W_m \subset U$ (verifique). Pela teoria da transversalidade (veja [28] ou [29]), a curva β pode ser arbitrariamente aproximada por uma curva regular γ de classe $\mathcal{C}^\infty$, tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e γ é transversal às variedades $W_1, ..., W_m$. Ora, como $dim(\gamma(I)) = 1$ e $dim(W_j) \leq 2n-2$ para todo $j = 1, ..., m$, a condição de transversalidade de γ com W_j, implica que $\gamma(I) \cap W_j = \emptyset$, para todo $j = 1, ..., m$.

Afirmamos que existe $t_0 > 0$ tal que $X_{t_0}(\gamma(I)) \subset M_d$. A fim de provar este fato, denotemos por K o compacto $M \setminus M_d$ e fixemos $q \in K \setminus W$, onde $W = W_1 \cup ... \cup W_m$. Observe que a órbita, $o(q)$, de q por X_t, corta necessariamente M_d. De fato, caso contrário, como K é compacto, $o(q)$ tem um ponto de acumulação em K, isto é, existe uma seqüência de números reais $(s_k)_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to+\infty} s_k = +\infty$ e $\lim_{k\to+\infty} X_{s_k}(q) = q_0 \in K$. Como o campo X é gradiente, isto implica que q_0 é uma singularidade de X e que $q \in W^s(q_0)$ (veja [68]). Como $q \notin W$, isto não é possível. Logo $o(q) \cap M_d \neq \emptyset$, ou seja existe $T > 0$ tal que $X_T(q) \in M_d$. Note que, por (d), teremos $X_t(q) \in M_d$ para todo $t \geq T$. Como M_d é aberto, por continuidade do fluxo, existe uma vizinhança A de q tal que para todo $z \in A$ temos $X_T(z) \in M_d$. Por outro lado, como $\gamma(I) \cap W = \emptyset$, podemos obter uma cobertura finita de $\gamma(I)$ por abertos $A_1, ..., A_\ell$ e números positivos $T_1, ..., T_\ell$, tais que se $q \in A_j$ e $t \geq T_j$ então $X_t(q) \in M_d$. Seja $t_0 = \max\{T_1, ..., T_\ell\}$. Não é difícil ver que se $q \in \gamma(I)$, então $X_{t_0}(q) \in M_d$, ou seja, $X_{t_0}(\gamma(I)) \subset M_d$, como queríamos. Consideramos então o caminho $\alpha(s) = X_{t_0}(\gamma(s))$. Êste caminho é tal que $\alpha(0) = p_0$, $\alpha(1) = p_1$ e $\alpha(I) \subset M_d$.

Consideremos agora o caso geral, isto é, em que f não é necessariamente de Morse. Neste caso apenas indicaremos como é possível provar o Teorema. Suporemos para simplificar que $\partial M_d = f^{-1}(d)$ é subvariedade de M, o que é garantido se d é valor regular de f. Observemos que o conjunto de de valores regulares de f é denso $\mathbb{R}$ (Teorema de Sard, veja [29]). No caso, este conjunto será também aberto porque f é uma exaustão (logo própria). Fixemos um valor $d_0 \in \mathbb{R}$ tal que todo $s \in [d_0, d]$ é valor regular de f. Por um resultado de [29], dado $\epsilon > 0$, é possível obter uma função $g \in C^2(M)$ com as seguintes propriedades:

(1) $g|_{M_d} \equiv f|_{M_d}$ e todo $s \in [d_0, d]$ é valor regular de g.

(2) g está ϵ próxima de f na topologia da convergência uniforme C^2.

(3) As singularidades de g em $M \setminus M_d$ são de Morse.

Se ϵ for suficientemente pequeno g será 2-e.p.s.h. (verifique). Podemos agora aplicar o argumento anterior para g, obtendo desta forma a curva α desejada. Isto prova o Teorema 7.4.26 no caso desejado e termina a prova do Teorema 7.4.19. □

Referências Bibliográficas

[1] L.V. Alphors: Complex Analysis; 2nd. edition, MacGraw-Hill Book Company, 1996. International Student Edition.

[2] W. Burau: Kennzeichnung der schlauchknoten; Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 9 (1932), pg. 125-133.

[3] P.Baum, R.Bott: Singularities of Holomorphic Foliations; J. Differential Geometry 7, (1972) 279-342.

[4] A.D. Brjuno: Analytic form of differentiable equations; Trans. Moscou. Math. Soc. 25 (1971) 131-282.

[5] Calvo Andrade: Persistência de folheações definidas por formas logarítmicas; Tese, IMPA, 1990.

[6] Calvo Andrade: Irreducible components of the space of holomorphic foliations; Math. Annalen, no. 299, pp.751-767 (1994).

[7] C. Camacho: On the local structure of conformal maps and holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^2$; Soc. Math. de France, Astérisque, 59-60 (1978), pp. 83-94.

[8] C. Camacho e A. Lins Neto: Teoria Geométrica das Folheações; Projeto Euclides, vol. 12 (1979).

[9] C. Camacho e A. Lins Neto: Geometric theory of foliations; Birkhauser 1985.

[10] C. Camacho and A. Lins Neto: The Topology of Integrable Differential Forms Near a Singularity; Publ. Math. I.H.E.S., 55 (1982), 5–35.

[11] C. Camacho, P. Sad: Pontos singulares de equações diferenciais anlíticas; 16 Colóquio Brasileiro de Matematica, IMPA, 1987

[12] C. Camacho e P. Sad: Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields; Ann. of Math. 115 (1982), pg. 579-595.

[13] C. Camacho, A. Lins Neto e P. Sad: Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields; J. of Diff. Geometry, vol. 20, n$^{\text{the}}$ 1 (1984), pg. 143–174.

[14] C. Camacho, A. Lins Neto e P. Sad: Foliations with algebraic limit sets; Ann. of Math. 136 (1992), pg. 429-446.

[15] C. Camacho, B. Azevedo Scárdua: Foliations on complex projective spaces with algebraic limit sets; a aparecer em Asterisque.

[16] C. Camacho e B. Scárdua: Solvable holonomy groups, Liouvillian first integrals e Riccati foliations; Pré-print, IMPA, Julho 1995.

[17] F. Cano, D. Cerveau: Desingularization of holomorphic foliations e existence of separatrices; Acta Mathematica, Vol. 169, 1992, pg. 1-103.

[18] M. Carnicer: The Poincaré problem in the non-dicritical case; Ann. de Math. 140 (1994) pg. 289-294.

[19] H. Cartan: Sur le premier problème de Cousin; C.R. Acad. Sc., 207 (1938), pg. 558-560.

[20] D. Cerveau e A. Lins Neto: Holomorphic foliations in $\mathbb{C}P(2)$ having an invariant algebraic curve; Ann. Inst. Fourier, t 41 (1991), Fasc. 4, pg. 883-903.

[21] D. Cerveau e A. Lins Neto: Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 3$; Ann. of Math. (1996) pg. 577-612 .

[22] D. Cerveau, A. Lins Neto: Codimension-one foliations in $\mathbb{C}P(n)$ $n \geq 3$ with Kupka components; Astérisque 222 (1994) pg. 93-132.

[23] D. Cerveau, J.-F. Mattei: Formes intégrables holomorphes singulières; Astérisque, vol.97(1982).

[24] D. Cerveau et R. Moussu: Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $ydy + \cdots = 0$; Bull. Soc. Math. France, 116 (1988), pg. 459-488.

[25] J. B. Conway: Functions of one Complex Variables; Springer Verlag, 1973.

[26] H. Dulac, Recherches sur les points singuliers des équations différentielles; Journal de l'Ecole Polytechnique, 2, 9, (1904), pg. 1-125.

[27] E.L. Lima: Grupo Fundamental e espaços de recobrimento; Projeto Euclides, 1993.

[28] E.L. Lima: Variedades Diferenciáveis; Monografias de Matemática # 15, IMPA, 1973.

[29] E.L. Lima: Introdução à Topologia Diferencial; Notas de Matemática n$^{\underline{\text{the}}}$23, IMPA 1961.

[30] E.L.Lima: Curso de análise vol. 2; Projeto Euclides (1981).

[31] C. Ehresmann, G. Reeb: Sur les champs d'eléments de contact complètement intégrables dans une varieté continûement différentiable V_n; C.R. Acad. Sci. Paris, 218, 1944 p. 955-957.

[32] C. Ehresmann, W. Shih: C.R. Acad. Sci. Paris 243, (1956).

[33] H.M.Farkas & I.Kra: Riemann Surfaces; Springer-Verlag, NY 1980.

[34] Arnaldo Garcia, Yves Lequain: Introdução à Álgebra; Projeto Euclides, Rio de Janeiro.

[35] C. Godbillon: Feuilletages: Études Geométriques I, Université Louis Pasteur; Maio 1985.

[36] X. Gomez-Mont: The Transverse Dynamics of a Holomorphic Flow; Annals of Mathematics 127 (1988) pg. 49-92.

[37] X. Gomes-Mont, A. Lins: Structural stability of foliations with a meromorphic first integral; Topology 30 (1991), pg. 315-334.

[38] X. Gomez-Mont, L. Ortiz-Bobadilla: Sistemas Dinamicos Holomorfos en Superficies; Sociedad Matematica Mexicana, 1989.

[39] R. Hartshorne: Algebraic Geometry; Springer-Verlag, 1977.

[40] Griffiths-Harris: Principles of Algebraic Geometry; John-Wiley and Sons, 1994.

[41] H. Grauert, R. Remmert: Theory of Stein Spaces; Springer-Verlag.

[42] R.C. Gunning: Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables; Vol. I; Wadsworth & Brooks/Cole.

[43] R.C. Gunning: Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Vol. II; Wadsworth & Brooks/Cole.

[44] R.C. Gunning: Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Vol. III; Wadsworth & Brooks/Cole.

[45] R. Gunning & H. Rossi: Analytic functions of several complex variables; Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965.

[46] M. Hirsch, *Differential Topology*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[47] Hirsh-Smale: Differential Equations, dynamical systems and linear algebra; Academic Press, 1974.

[48] L. Hormander: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables; $3rd$ ed., North-Holland, Amsterdam, 1990.

[49] H. Hukuhara, T. Kimura, Mme T. Matuda: Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe; Publ. Math. Soc. de Japan, 1961.

[50] Y. Iliashenko: Density of an individual solution e ergodicity of a family of solutions to the equation..., Math Zametki 4 (1968) pg. 741-750.

[51] Y. Iliashenko: Global e local aspects of the theory of complex differential equations; Proc. of Int. Cong. of Math. Helsinki (1978), 821-826.

[52] J.P. Jouanolou: Équations de Pfaff algèbriques; Lecture Notes in Math. 708, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[53] I. Kupka: The singularities of integrable structurally stable Pfaffian forms; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 52 (1964), pg. 1431-1432.

[54] A. Lins Neto: Funções de uma variável complexa; Projeto Euclides (1993).

[55] A. Lins Neto: Algebraic solutions of polynomial differential equations e foliations in dimension two; Lect. Notes em Math. $\mathrm{n}^{\mathrm{the}}$ 1345, pg. 192-231.

[56] A Lins Neto: Construction of singular holomorphic vector fields e foliations in dimension two; Journal of Diff. Geometry 26 (1987), pg. 1-31.

[57] A Lins Neto: A note on projective Levi flats and minimal sets of algebraic foliations; Preprint IMPA.

[58] A. Lins Neto, M.G. Soares: Algebraic solutions of onde-dimensional foliations; J. Diff. Geometry 43 (1996) pg. 652-673.

[59] A. Lins Neto, P. Sad, B. Scárdua: *On topological rigidity of projective foliations*, Pré-print IMPA, Março de 1997.

[60] J. Malmquist: Sur les functions à un nombre fini des branches définies par les équations différentielles du premier ordre; Acta Math.36 (1913), pg. 297-343.

[61] J.F. Mattei e R. Moussu: Holonomie et intégrales premières; Ann. Ec. Norm. Sup. 13 (1980), pg. 469-523.

[62] A. Medeiros: Structural stability of integrable differential forms; Geometry and Topology (M. do Carmo, J. Palis eds.), LNM, 1977, pg. 395-428.

[63] J. Martinet et J-P. Ramis: Classification analytique des équations différentielles non lineaires resonnants du premier ordre; Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 16,1983, pg. 571-621.

[64] J. Martinet et J-P. Ramis: Problème de modules pour des équations différentielles non lineaires du premier ordre; Publ. Math. Inst. Hautes Études Scientifiques, 55 (1982), pg. 63-124.

[65] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces.

[66] J. Milnor: Morse Theory; Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1963.

[67] I. Nakai: Separatrices for non solvable dynamics on $\mathbb{C}, 0$; Ann. Inst. Fourier, Grenoble 44, 2(1994), pg. 569-599.

[68] J. Palis e W. de Melo: Introdução aos sistemas dinâmicos; Projeto Euclides, IMPA, 1978.

[69] P. Painlevé: Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles; Paris, Librairie Scientifique A. Hermann, 1897.

[70] P. Painlevé: Ouvres de Paul Painlevé; Tome II, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, 15, quai Anatole-France,75700, Paris, 1974.

[71] G. Reeb: Sur les varietés intégrables de champs d'elements de contact complétement intégrables; C.R. Acad. Sci. Paris, 220, 1945 pg. 236-237.

[72] G. Reeb: Sur les points singuliérs d'une forme de Pfaff complétement intégrable ou d'une fonction numérique ; C.R. Acad. Sci. Paris, 222, 1946 pg. 847-849.

[73] B. Scárdua: Transversely affine e transversely projective foliations on complex projective spaces; Tese de doutorado, IMPA, 1994.

[74] B. Scárdua: Transversely affine e transversely projective foliations on complex projective spaces; a aparecer em Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.

[75] A. Seidenberg: Reduction of singularities of the differential equation $Ady = Bdx$; Amer. J. de Math. 90 (1968), pg. 248-269.

[76] Bobo Seke: Sur les structures transversalement affines des feuilletages de codimension un; Ann. Inst. Fourier, Grenoble 30, 1 (1980), pg. 1-29.

[77] E. Sernesi: Small deformations of global complete intersections; Bollettino della Unione Matematica Italiana, vol. 12 (1975), pg. 138-146.

[78] M.F. Singer: Liouvillian first integrals of differential equations; Trans. American Math. Soc. 333(1992).

[79] Y. Siu: Techniques of Extension of Analytic Objects; Marcel Dekker, N.Y., 1974.

[80] J. Sotomayor: Lições de Equações Diferenciais Ordinárias; Projeto Euclides, Rio de Janeiro.

[81] M. Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry; Vol. 1, second edition, Publish or Perish, Berkeley, 1979.

[82] N. Steenrod: The topology of fibre bundles; Princeton University Press, 1951.

[83] O. Zariski: On the topology of algebroid singularities; Amer. Journal of Mathematics, 54 (1932) pg. 453-465.

Índice Remissivo