20º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

DESIGUALDADES DE POINCARÉ E SOBOLEV COM PESOS

JOSÉ CARLOS DINIZ FERNANDES

SÉRGIO L. ZANI

IMPA 24 - 28 JULHO, 1995

impa

JOSÉ CARLOS DINIZ FERNANDES (IME/USP)
SÉRGIO LUÍS ZANI (ICMSC-USP - SÃO CARLOS - SP)

CAPA by Sara Müller

ISBN 85-244-0093-5

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Estrada Dona Castorina, 110 - Jardim Botânico

22460-320 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Introdução

O objetivo destas notas é a demonstração das desigualdades de Poincaré e Sobolev (Cf. 3.2 e 3.3). Classicamente essas desigualdades aparecem no estudo da regularidade de soluções de equações diferenciais parciais elíticas (veja por exemplo [GT]). Mais precisamente, os operadores clássicos são da forma

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

onde os coeficientes a_{ij} são funções mensuráveis, cuja matriz $A(x) = (a_{ij}(x))$ satisfaz

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leq \Lambda|\xi|^2,$$

para todo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, sendo λ e Λ constantes.

Os operadores elíticos degenerados, por sua vez, satisfazem

$$v(x)|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leq \omega(x)|\xi|^2, \tag{1}$$

onde v e ω são pesos, ou seja, funções localmente integráveis não negativas.

O principal obstáculo para a generalização dos resultados clássicos tem sido encontrar um substituto para a desigualdade de Poincaré

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B|^q dx\right)^{1/q} \leq c|B|^{1/n}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |\nabla f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \tag{2}$$

onde $f_B = \mathrm{av}_B f = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)dx$, os reais p e q satisfazem $1 \leq p < n$ e $0 < q \leq \frac{pn}{n-p}$ e c é uma constante independente de f e B.

Em diversos trabalhos como [CW1], [CW2], [FKS], [FL1], [FS], [J] e outros nesses citados têm sido demonstradas generalizações de 2 apropriadas ao estudo de operadores satisfazendo 1. Optamos por apresentar os resultados de Chanillo e Wheeden em [CW1].

Este trabalho consta de três capítulos e em seguida daremos um resumo dos tópicos abordados em cada um deles.

No Capítulo 1 damos uma introdução ao estudo da teoria de pesos introduzida por Muckenhoupt [M] em 1972. Muckenhoupt definiu a classe de pesos A_p e demonstrou que o operador que aplica uma função em sua função maximal de Hardy-Littlewood é contínuo em L^p_ω se e somente se o peso ω pertence a A_p, isto é, se existe uma constante C tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(y)dy\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^{p-1} \leq C$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. A união de todas as classes A_p, $p \geq 1$, é denotada por A_∞. As "classes de Muckenhoupt" têm desempenhado desde então um papel central no estudo da continuidade em espaço com peso dos operadores da Análise Harmônica clássica.

Um desses operadores é a integral fracionária de índice α

$$I_\alpha(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy,$$

que foi amplamente estudada por Sawyer e Wheeden em [SW]. No Capítulo 2 faremos um estudo detalhado desse operador e apresentaremos algumas de suas principais aplicações. Na verdade, veremos que a desigualdade de Poincaré está intimamente ligada ao estudo do operador I_1. Um dos resultados demonstrados no início do capítulo é que se $f \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$ então

$$|f(x) - \operatorname*{av}_B f| \leq c_n \int_B \frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy = c_n I_1(|\nabla f|\chi_B)(x),$$

onde $\mathrm{av}_B f = \frac{1}{|B|}\int_B f$. Combinando essa desigualdade com o teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev que afirma que se $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ então $\|I_1 f\|_{L^q} \leq c\|f\|_{L^p}$ temos, como conseqüência a desigualdade de Poincaré

$$\left(\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(x) - f_B|^q \omega(x)dx\right)^{1/q} \leq c|B|^{1/n}\left(\frac{1}{v(B)}\int_B |\nabla f(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p},$$

que pode ser demonstrada, seguindo o roteiro acima, encontrando-se condições necessárias e suficientes sobre os pesos v e ω que garantam $\|I_\alpha f\|_{L^q_\omega} \leq c\|f\|_{L^p_v}$. É isso que faremos em grande parte do Capítulo 2.

Como aplicação das desigualdades de Poincaré e Sobolev obtidas no Capítulo 2 apresentaremos no Capítulo 3 um estudo de operadores elíticos degenerados. Esse estudo segue de perto o trabalho [CW1] de Chanillo e Wheeden onde as desigualdades de Harnack e do valor médio além da continuidade e Hölder continuidade para soluções de $Lu = 0$ são demonstradas.

Essas notas foram elaboradas a partir de cursos ministrados pelo Prof. Richard L. Wheeden na Universidade de Rutgers, New Brunswick, EUA, a quem gostaríamos de expressar os nossos agradecimentos.

Índice

1 As classes de pesos A_p e função maximal de Hardy-Littlewood 3

1.1 Preliminares 3

1.2 Função maximal homogênea de Hardy-Littlewood 5

1.3 As classes de pesos A_p 9

1.4 O Teorema de Muckenhoupt 21

2 Integrais fracionárias e a desigualdade de Poincaré 25

2.1 Introdução 25

2.2 Integral fracionária 28

3 Aplicação às equações elíticas degeneradas 39

3.1 Introdução 39

3.2 Preliminares sobre $H(\Omega)$. 41

3.3 Desigualdade de Harnack 42

3.4 Continuidade das soluções 55

Capítulo 1

As Classes de Pesos A_p e a Função Maximal de Hardy-Littlewood

Neste capítulo apresentaremos a classes de pesos A_p que foram introduzidas por Muckenhoupt (ver [M]) no estudo da função maximal de Hardy-Littlewood. Entretanto, essa classe de funções tem desempenhado um papel importante no estudo dos operadores da Análise Harmônica clássica, como por exemplo, a integral fracionária que está ligada às desigualdades de Poincaré e Sobolev. Estas desigualdes, como veremos no Capítulo 3, nos permitem estudar a regularidade de soluções de operadores elíticos.

1.1 Preliminares

A seguir apresentaremos alguns resultados que serão necessários para a demonstração do principais teoremas desse capítulo, Teorema 1.4 e os Teoremas 1.28 e 1.30.

Teorema 1.1 (Lema simples de Vitali). *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$, cuja medida exterior de Lebesgue satisfaz $0 < |E|_e < \infty$. Suponha que E é coberto por uma coleção de cubos $\{Q\}$. Então existe um número finito de cubos disjuntos $Q_1, \cdots, Q_N$ em $\{Q\}$ e uma constante $\gamma = \gamma(n) > 0$ tais que $\sum_{i=1}^{n} |Q_i| > \gamma |E|_e$.*

Prova: Vamos indexar os cubos da coleção escrevendo $Q = Q(t)$, onde t é o comprimento do lado de Q. Seja $K_1 = \{Q\}$ e defina

$$t_1^* = \sup\{t; Q = Q(t) \in K_1\}.$$

Se $t_1^* = +\infty$, então K_1 contém uma seqüência de cubos Q com $|Q| \to +\infty$. Neste caso, dado $\beta > 0$, simplesmente escolhemos um cubo $Q \in K_1$ com $|Q| \geq \beta |E|_e$. Se $t_1^* < \infty$, a idéia é escolher um cubo "relativamente" grande: escolha $Q_1 =$

$Q_{t_1} \in K_1$ tal que $t_1 > \frac{1}{2}t_1^*$. Em seguida, divida $K_1 = K_2 \cup K_2'$, onde K_2 consiste dos cubos em K_1 que são disjuntos de Q_1 e K_2' daqueles que interceptam Q_1. Denote por Q_1^* o cubo concêntrico com Q_1 cujo o comprimento de seu lado é $5t_1$. Neste caso, $|Q_1^*| = 5^n|Q_1|$ e, como $2t_1 > t_1^*$, todo cubo em K_2' está contido em Q_1^*.

Começando com $j = 2$, continue o processo de seleção para $j = 2, 3, ...$ definindo

$$t_j^* = \sup\{t; Q(t) \in K_j\},$$

e escolhendo o cubo $Q_j = Q_j(t_j) \in K_j$ com $t_j > \frac{1}{2}t_j^*$. Agora, escreva $K_j = K_{j+1} \cup K_{j+1}'$, onde K_{j+1} consiste dos cubos de K_j que são disjuntos de Q_j. Se K_{j+1} é vazio, o processo termina. Temos que $t_j^* \geq t_{j+1}^*$ e além disso, para cada j, os cubos $Q_1, \cdots, Q_j$ são dois a dois disjuntos e disjuntos de cada cubo em K_j. Ademais, cada cubo em K_{j+1}' está contido no cubo Q_j^* concêntrico com Q_j e cujo lado é $5t_j$. Note que $|Q_j^*| = 5^n|Q_j|$.

Considere a seqüência $t_1^* \geq t_2^* \geq \ldots$. Se algum K_{N+1} é vazio (isto é, $t_j^* = 0$ para $j \geq N+1$) então, como

$$K_1 = K_2 \cup K_2' = \cdots = K_{N+1} \cup K_{N+1}' \cup \cdots \cup K_2'$$

e E é coberto por cubos em K_1, segue que E é coberto por cubos em $K_{N+1}' \cup \cdots \cup K_2'$. Logo, $E \subset \bigcup_{j=1}^N Q_j^*$, de modo que

$$|E|_e \leq \sum_{j=1}^N |Q_j^*| = 5^n \sum_{j=1}^N |Q_j|.$$

E neste caso, o lema está provado com $\beta = 5^{-n}$.

Por outro lado, se nenhum t_j^* é zero, então existe $\delta > 0$ tal que $t_j^* \geq \delta$ para todo j, ou $t_j^* \to 0$. No primeiro caso, $t_j \geq \frac{1}{2}\delta$ para todo j e, portanto, $\sum_{j=1}^N |Q_j| \to +\infty$ quando $N \to \infty$. Dado qualquer $\beta > 0$, o lema segue neste caso escolhendo N suficientemente grande.

Finalmente, se $t_j^* \to 0$, é fácil ver que $K_1 \subset \cup_j Q_j^*$, já que caso contrário, existiria um cubo $Q = Q(t)$ que não interceptasse nenhum Q_j. Como esse cubo pertenceria a K_j, t satisfaria $t \leq t_j^*$ para todo j e, portanto, t=0, o que é uma contradição. Como E é coberto por cubos em K_1, segue que

$$|E|_e \leq \sum_j |Q_j^*| = 5^n \sum_j |Q_j|.$$

Logo, dado β com $0 < \beta < 5^{-n}$, existe um N tal que $\sum_{j=1}^N |Q_j| \geq \beta|E|_e$, o que termina a prova. $\square$

Note que o lema acima não pressupõe que E seja um conjunto mensurável. No caso em que E é um conjunto mensurável a demonstração do lema acima pode ser simplificada. De fato, se E é mensurável, podemos supor que é fechado e limitado. Também podemos supor que os cubos da coleção são abertos e, portanto, segue do teorema de Heine-Borel que E pode ser coberto por um número finito de cubos. Seja Q_1 o cubo de maior lado. Seja Q_2 o cubo disjunto de Q_1 de maior lado. E continuamos o processo e escolhemos Q_j como sendo o cubo de maior lado que não toca Q_1,..., Q_{j-1}. Note que o processo é finito. Sejam Q_1,...,Q_N todos esses cubos. Todo cubo na coleção deve tocar algum Q_1,...,Q_N e, portanto,

$$\bigcup_{Q\in\{Q\}} Q \subset \bigcup_{j=1}^{N} 3Q_j,$$

o que implica que

$$|E| \leq \left|\bigcup Q\right| \leq \sum_{j=1}^{N} |3Q_j| = 3^n \sum_{j=1}^{N} |Q_j|.$$

Para concluir, basta escolher $\gamma < 1/3^n$.

Definição 1.2. *Uma medida de borel μ em $\mathbb{R}^n$ é dita dobrante se existir $c > 0$ tal que $\mu(2Q) \leq c\mu(Q)$ para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$.*

Definição 1.3. *Uma função mensurável, não negativa e localmente integrável ω em $\mathbb{R}^n$ é chamada de peso. Freqüentemente usaremos as seguintes notações: $|E| = \int_E dx$ e $\omega(E) = \int_E \omega(x)\,dx$.*

Observação: O Lema simples de Vitali continua válido para qualquer medida dobrante μ.

1.2 Função maximal de Hardy-Littlewood

Seja $\omega = \omega(x)$ uma função mensurável positiva e assuma que ω é dobrante (isto é, $\omega(x)dx$ é uma medida dobrante). Defina

$$M_\omega f(x) = \sup \frac{1}{\omega(Q)} \int_Q |f(y)|\omega(y)dy,$$

onde o supremo é tomado sobre todos os cubos que contenham x e sendo $\omega(Q) = \int_Q \omega(y)dy$. A função $M_\omega f$ é denominada a função maximal homogênea de Hardy-Littlewood de f.

Usaremos a notação $\|g\|_{L^p_\omega(E)} = \left(\int_E |g|^p \omega dx\right)^{1/p}$ e no caso $E = \mathbb{R}^n$ usaremos apenas $\|g\|_{L^p_\omega}$.

Note que se $\omega = 1$ então $M_1 f$ não pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (ver [WZ] página 104).

Teorema 1.4. *Se ω é dobrante então*
(i) $\|M_\omega f\|_{L^p_\omega} \leq c\|f\|_{L^p_\omega}$, $1 < p < \infty$ *(*desigualdade forte de tipo *(p,p))*.
(ii) $\omega\left(\{x; M_\omega f(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{c}{\lambda}\|f\|_{L^1_\omega}$ *(*desigualdade fraca de tipo *(1,1))*.

Prova: (ii) Fixe $\lambda > 0$. Considere $E = \{x; M_\omega f(x) > \lambda\}$. É fácil ver que E é um conjunto mensurável (E é na verdade um conjunto aberto). Para cada $x \in E$ existe um cubo Q_x tal que $x \in Q$ e

$$\frac{1}{\omega(Q_x)} \int_{Q_x} |f|\omega dy > \lambda. \tag{1.5}$$

Seja B_N a bola de centro 0 e raio N. Considere $E \cap B_N$. Se $x \in E \cap B_N$, como $x \in E$, existe Q_x tal que $x \in Q_x$ e vale 1.5. Pelo lema de Vitali aplicado a $E \cap B_N$ e à cobertura $\{Q_x\}_{x \in E \cap B_N}$ segue que existem cubos disjuntos $Q_1, \dots, Q_M$ e uma constante γ positiva tais que

$$\omega(E \cap B_N) \leq \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{M} \omega(Q_j)$$

que combinada com a desigualdade 1.5 implica que

$$\omega(E \cap B_N) \leq \frac{1}{\gamma}\lambda^{-1} \sum_{j=1}^{M} \int_{Q_j} |f|\omega dy \leq \frac{1}{\gamma}\lambda^{-1} \int_{E \cap B_N} |f|\omega dy \leq \frac{1}{\gamma}\lambda^{-1}\|f\|_{L^1_\omega}.$$

Fazendo $N \to \infty$, concluímos a demonstração de (ii).

Note que (i) é imediato quando $p = \infty$. Lembre que

$$\|g\|_{L^p_\mu(E)} = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu\left(\{x \in E; |g(x)| > \lambda\}\right) d\lambda.$$

Logo,

$$\|M_\omega f\|^p_{L^p_\omega} = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \omega\left(\{x; M_\omega f(x) > \lambda\}\right) d\lambda.$$

Dado $\lambda > 0$, escreva, $f = f_\lambda + f^\lambda$ onde

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad |f(x)| \leq \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \text{se} \quad |f(x)| > \frac{\lambda}{2}, \end{cases}$$

$$f^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad |f(x)| > \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \text{se} \quad |f(x)| \leq \frac{\lambda}{2}. \end{cases}$$

Observe que $f_\lambda \in L^\infty$ e que $M_\omega(f) \leq M_\omega(f_\lambda) + M_\omega(f^\lambda)$. E neste caso, se $M_\omega f(x) > \lambda$ então ou $M_\omega f_\lambda(x) > \lambda/2$ ou $M_\omega f^\lambda(x) > \lambda/2$. Logo,

$$\omega\left(\{x; M_\omega f(x) > \lambda\}\right) \leq \omega\left(\{x; M_\omega f_\lambda(x) > \lambda/2\}\right)$$

$$+\omega\left(\left\{x; M_\omega f^\lambda(x) > \lambda/2\right\}\right) = I + II.$$

Note que, se $\|f_\lambda\| \leq \lambda/2$ então $\|M_\omega f_\lambda\| \leq \lambda/2$ e, portanto, $I = 0$. Também observe que por (ii)

$$II \leq \frac{c}{\lambda}\|f^\lambda\|_{L^1_\omega} = \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f^\lambda|\omega dy = \frac{c}{\lambda}\int_{\{x;|f|>\lambda/2\}} |f|\omega dy.$$

E assim sendo temos que

$$\|M_\omega f\|^p_{L^p_\omega} \leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(\frac{c}{\lambda}\int_{\{x;|f|>\lambda/2\}} |f|\omega dx\right) d\lambda$$

$$= cp\int_0^\infty \lambda^{p-2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|\chi_{\{x;|f(x)|>\lambda/2\}}(x)\omega dx\right) d\lambda$$

$$= cp\int_{\mathbb{R}^n} |f|\omega\left(\int_0^\infty \lambda^{p-2}\chi_{\{x;|f(x)|>\lambda/2\}}(x)d\lambda\right) dx$$

$$= cp\int_{\mathbb{R}^n} |f|\omega\left(\int_0^{2|f(x)|} \lambda^{p-1}d\lambda\right) dx = \frac{cp}{p-1}2^{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\omega dx = c_{n,p}\|f\|^p_{L^p_\omega},$$

o que demonstra o teorema. $\square$

O argumento acima na verdade pode ser aplicado a uma classe mais ampla de operadores e é conhecido como o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz. A seguir daremos algumas definições para que possamos enunciar o Teorema de Marcinkiewicz.

Definição 1.6. *Um operador T definido em funções $(M, \mathcal{M}, \mu)$ a valores em $(N, \mathcal{N}, \nu)$ é sublinear se*

$$|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |T(f_1)(x)| + |T(f_2)(x)|,$$

para quase todo x.

Definição 1.7. *Um operador T é dito de tipo fraco (p, q) se $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ e se*

$$\nu(\{x; |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{c\|f\|_{L^p_\mu}}{\lambda}\right)^q,$$

para todo $\lambda > 0$, c independente de f e λ.

Para $q = \infty$, também exigimos que $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_{L^p_\mu}$.

Definição 1.8. *Um operador T é dito de tipo forte (p,q) se*

$$\|Tf\|_{L^q_\nu} \leq c\|f\|_{L^p_\mu},$$

c independente de f.

É fácil ver que se T é um operador de tipo forte (p,q) então T é de tipo fraco (p,q) já que

$$\lambda(\nu(\{x; |Tf(x)| > \lambda\})^{1/q} \leq \left(\int_{\{x;|Tf|>\lambda\}} |Tf|^q d\nu\right)^{1/q}$$

$$\leq \|Tf\|_{L^q_\nu} \leq c\|f\|_{L^p_\mu}.$$

Teorema 1.9 (Marcinkiewicz). *Seja T um operador sublinear que é simultaneamente de tipos fracos (p_1,q_1) e (p_2,q_2) com $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$, para $i = 1,2$ e $q_1 \neq q_2$, então T é de tipo forte (p_t,q_t) onde $\frac{1}{p_t} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2}$ e $\frac{1}{q_t} = \frac{t}{q_1} + \frac{1-t}{q_2}$, para todo $0 < t < 1$.*

Observe que se $p_1 = q_1$ e $p_2 = q_2$ e T é de tipo fraco (p_1,p_1) e de tipo fraco (q_2,q_2) então é fácil ver que $p_t = q_t$ e quando t percorre $(0,1)$, p_t cobre todo o intervalo (p_1,p_2).

Considere $M(f) = M_1 f = \sup \frac{1}{|Q|}\int_Q |f|dy$, onde o supremo é calculado sobre todos os cubos Q tais que $x \in Q$. Já sabemos que $\|Mf\|_{L^p} \leq c\|f\|_{L^p}$, para $1 < p \leq \infty$ e que $|\{x; Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda}\|f\|_{L^1}$. Neste ponto cabe o seguinte problema: caracterizar todos os pesos $\omega = \omega(x) \geq 0$ tais que

$$\|Mf\|_{L^p_\omega} \leq c\|f\|_{L^p_\omega}, \qquad \text{se } 1 < p \leq \infty \text{ e}$$

$$\omega(\{x; Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda}\|f\|_{L^1_\omega}, \qquad \text{se } p = 1.$$

A fim de responder o problema acima observe que se $p > 1$,

$$\text{(1.10)} \qquad \frac{1}{|Q|}\int_Q |f|dx = \frac{1}{Q}\int_Q |f|\omega^{1/p}\omega^{-1/p}dx$$

$$\leq \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q \omega^{-p'/p}dx\right)^{1/p'}\left(\int_Q |f|^p\omega dx\right)^{1/p}$$

$$= \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{1/p'}\left(\int_Q |f|^p\omega dx\right)^{1/p}$$

$$= \frac{\omega(Q)^{1/p}}{|Q|}\left(\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q |f|^p\omega dx\right)^{1/p}\left(\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{1/p'}$$

$$= \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q \omega dx\right)^{1/p}\left(\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{1/p'}\left(\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q |f|^p\omega dx\right)^{1/p}$$

e se $p = 1$,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| \le \frac{1}{|Q|}\left(\sup_Q \operatorname{ess}\frac{1}{\omega}\right)\int_Q f\omega dx \tag{1.11}$$

$$= \frac{\omega(Q)}{|Q|}\left(\sup_Q \operatorname{ess}\frac{1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q f\omega dx.$$

Tomando o supremo nas desigualdades 1.10 e 1.11 sobre todos os cubos Q tais que $x \in Q$ segue que

$$M_1 f(x) \le \sup_Q \left\{ \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q \omega dx\right)^{1/p}\left(\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \right\} M_\omega(|f|^p)^{1/p}(x), \tag{1.12}$$

se $1 < p < \infty$ e

$$M_1 f(x) \le \sup_Q \left\{ \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega dx \sup_Q \operatorname{ess}\frac{1}{\omega} \right\} M_\omega f(x), \tag{1.13}$$

se $p = 1$.

1.3 As classes dos pesos A_p

Nessa seção introduziremos a classe de pesos A_p e estudaremos algumas de suas propriedades.

Definição 1.14. *Sejam $1 \le p < +\infty$ e $p' = \frac{p}{p-1}$. Dizemos que o peso ω satisfaz a condição A_p se existir uma constante positiva C tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$*

$$\frac{1}{|Q|}\left(\int_Q \omega\right)^{1/p}\left(\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'} \le C, \quad \textit{se } 1 < p < \infty \textit{ ou} \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w \sup \operatorname{ess}\frac{1}{\omega} \le C, \quad \textit{se } p = 1. \tag{1.16}$$

Note que se $\omega \in A_p$ então, segue de 1.12 e 1.13 que

$$(M_1 f)^p \le c_{\omega,p} M_\omega(|f|^p). \tag{1.17}$$

Note que as desigualdades 1.15 e 1.16 são equivalentes às desigualdades

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (\omega^{-1})^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \le C \quad \text{e} \tag{1.18}$$

$$(1.19) \qquad \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega \leq C \inf_{x\in Q}\operatorname{ess}\omega(x), \qquad \text{respectivamente.}$$

Observe que as desigualdades opostas a 1.18 e 1.19 são válidas para qualquer peso ω, onde se pode tomar C igual a 1. Vejamos o caso $1 < p < \infty$.

$$|Q| = \int_Q 1 \leq \left(\int_Q \omega\right)^{1/p}\left(\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'},$$

pela desigualdade de Hölder. Logo,

$$1 \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}.$$

Quando $p = 1$, temos

$$\inf_{x\in Q}\operatorname{ess}\omega(x) = \frac{1}{|Q|}\int_Q \inf_{x\in Q}\operatorname{ess}\omega(x)\,dy \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega.$$

Segue da definição das classes A_p, $1 < p < +\infty$, que $\omega \in A_p$ se, e somente se, $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$, onde $p' = p/(p-1)$.

Observe que o peso $\omega(x) = 1$, x em $\mathbb{R}^n$, satisfaz a condição A_p para todo p em $[1,\infty)$. Mais geralmente, $\omega(x) = |x|^\alpha$, x em $\mathbb{R}^n$, satisfaz a condição A_p se, e somente se, $-n < \alpha < n(p-1)$. Para verificar esse fato precisamos do seguinte

Lema 1.20. *Dado $\alpha > -n$, existe uma constante positiva c tal que*

$$c^{-1}(|x_\circ| + r)^\alpha r^n \leq \int_{B(x_\circ,r)} |x|^\alpha\,dx \leq c(|x_\circ| + r)^\alpha r^n, \qquad \textit{isto e',}$$

$$(|x_\circ| + r)^\alpha r^n \simeq \int_{B(x_\circ,r)} |x|^\alpha\,dx,$$

para toda bola $B(x_\circ, r)$ centrada em $x_\circ$ e com raio $r > 0$.

Prova: Suponha $2r < |x_\circ|$. Se $x \in B(x_\circ, r)$ então

$$|x| \leq |x - x_\circ| + |x_\circ| \leq r + |x_\circ| \leq \frac{3}{2}|x_\circ|.$$

Também,

$$|x_\circ| \leq |x_\circ - x| + |x| \leq \frac{|x_\circ|}{2} + |x| \quad \text{e, portanto,} \quad |x_\circ| \leq 2|x|.$$

Note que $|x_\circ| \simeq |x_\circ| + r$, pois $|x_\circ| \leq |x_\circ| + r \leq \frac{3|x_\circ|}{2}$. Assim,

$$\int_{B(x_\circ,r)} |x|^\alpha \simeq |x_\circ|^\alpha \int_{B(x_\circ,r)} dx = c_{n,\alpha}|x_\circ|^\alpha r^n \simeq (|x_\circ| + r)^\alpha r^n.$$

Suponha agora que $2r \geq |x_\circ|$. Se x pertence a $B(x_\circ, r)$ então $|x| \leq |x - x_\circ| + |x_\circ| \leq 3r$, isto é, $B(x_\circ, r) \subset B(0, 3r)$. Também, $r \leq |x_\circ| + r \leq 3r$, isto é, $r \simeq |x_\circ| + r$. Assim,

$$\int_{B(x_\circ,r)} |x|^\alpha dx \leq \int_{B(0,3r)} |x|^\alpha dx = c_{n,\alpha} r^{n+\alpha} \simeq (|x_\circ| + r)^\alpha r^n.$$

Seja $y_\circ = x_\circ + \frac{x_\circ}{|x_\circ|} r$ caso $x_\circ \neq 0$ ou tal que $|y_\circ| = r$ se $x_\circ = 0$. Note que $|y_\circ| = |x_\circ| + r$ o que é óbvio se $x_\circ = 0$ e se $x_\circ \neq 0$ então $|y_\circ|^2 = |x_\circ|^2 + r^2 + 2|x_\circ|r = (|x_\circ| + r)^2$, ou seja, $|y_\circ| = |x_\circ| + r$. Seja $B_\circ = B(x_\circ + (y_\circ - x_\circ)\frac{3}{4}, \frac{r}{4})$. Se $x \in B_\circ$ então

$$|x - x_\circ| \leq |x - x_\circ - (y_\circ - x_\circ)\frac{3}{4}| + |y_\circ - x_\circ|\frac{3}{4} < \frac{r}{4} + \frac{3r}{4} = r.$$

Portanto, $B_\circ \subset B(x_\circ, r)$. Note que se $x \in B_\circ$ temos

$$|x - y_\circ| \leq |x - x_\circ - (y_\circ - x_\circ)\frac{3}{4}| + |x_\circ + (y_\circ - x_\circ)\frac{3}{4} - y_\circ| \leq \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2}.$$

Desse modo,

$$|x_\circ| + \frac{r}{2} = |y_\circ| - \frac{r}{2} \leq |x| + |x - y_\circ| - \frac{r}{2} \leq |x| \leq |x - x_\circ| + |x_\circ| \leq r + |x_\circ|,$$

isto é, $|x_\circ| + r \simeq |x|$, se $x \in B_\circ$ no presente caso.

Assim,

$$\int_{B(x_\circ,r)} |x|^\alpha \, dx \geq \int_{B_\circ} |x|^\alpha \, dx \simeq (|x_\circ| + r)^\alpha \int_{B_\circ} dx \simeq (|x_\circ| + r)^\alpha r^n.$$

Portanto,

$$\int_{B(x_\circ,r)} |x|^\alpha \, dx \simeq (|x_\circ| + r)^\alpha r^n,$$

e isto termina a demostração desse lema. $\square$

Provemos agora que $|x|^\alpha$ pertence a A_p se, e somente se, $-n < \alpha < n(p-1)$. Suponha que $-n < \alpha < n(p-1)$ e $1 < p < +\infty$. Se Q representa um cubo de $\mathbb{R}^n$, denotaremos por $B(Q) = B(x_Q, r_Q)$ a menor bola (fechada) contendo Q. Desse modo, $|B(Q)| \simeq |Q|$. Temos

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |x|^\alpha \, dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(|x|^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}} \, dx\right)^{p-1}$$

$$\leq \frac{c}{|B(Q)|}\int_Q |x|^\alpha\,dx\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(|x|^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}$$

$$\simeq \frac{c}{r_Q^n}(|x_Q|+r_Q)^\alpha r_Q^n\left(\frac{1}{r_Q^n}(|x_Q|+r_Q)^{-\frac{\alpha}{p-1}}r_Q^n\right)^{p-1}\leq C,$$

isto é, $|x|^\alpha$ pertence a A_p, se $1<p<+\infty$. Suponha agora que $|x|^\alpha$ pertença a A_p, $1<p<+\infty$. Como $|x|^\alpha$ precisa ser localmente integrável, integrando-a sobre uma bola centrada na origem, vê-se facilmente que $-n<\alpha$. Por outro lado como $|x|^\alpha$ está em A_p, existe uma constante $C_\circ$ tal que para qualquer cubo Q centrado na origem, temos:

$$C_\circ \geq \frac{1}{|Q|}\int_Q |x|^\alpha\,dx\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |x|^{-\frac{\alpha}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}$$

$$\geq c_{n,\alpha}|Q|^{\alpha/n-p+1}\left(\int_{B(0,\frac{|Q|^{1/n}}{2})}|x|^{-\frac{\alpha}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}.$$

Assim, $|x|^{-\frac{\alpha}{p-1}}$ é localmente integrável e, portanto, devemos ter $-\frac{\alpha}{p-1}>-n$, isto é, $\alpha<n(p-1)$. O caso $p=1$ é deixado a cargo do leitor.

Teorema 1.21. *Se $1\leq p\leq q<+\infty$ então $A_p\subset A_q$.*

Prova: O caso $p=q$ é trivial. Suponhamos que $1<p<q<+\infty$. Seja $\omega\in A_p$. Utilizando a desigualdade de Hölder com os expoentes $r=\frac{q-1}{p-1}>1$ e $r'=\frac{q-1}{q-p}$, para qualquer cubo Q de $\mathbb{R}^n$, temos

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega^{-\frac{1}{q-1}}\right)^{q-1}$$

$$\leq\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\left(\int_Q\omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{q-1}}|Q|^{\frac{q-p}{q-1}}\right)^{q-1}$$

$$=\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}\leq C,\quad\text{pois } \omega\in A_p.$$

□

Teorema 1.22. *São equivalentes as seguintes afirmações para um peso ω:*

1.22.1 Existem $0<\alpha<1$ e $0<\beta<1$ tais que para todo cubo Q e todo conjunto mensurável $E\subset Q$ tem-se: se $|E|<\alpha|Q|$ então $\int_E\omega\leq\beta\leq\int_Q\omega$.

1.22.2 Existem $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$ tais que para todo cubo Q e todo conjunto mensurável $E \subset Q$ tem-se: se $\int_E \omega \leq \alpha \int_Q \omega$ então $|E| < \beta|Q|$.

1.22.3 Existem $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$ tais que para todo cubo Q,

$$|\{x \in Q; \omega(x) > \underset{Q}{\text{av}}(\omega)\}| \geq \alpha|Q|,$$

onde $\text{av}_Q(\omega) = \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega$.

1.22.4 Existem $r > 1$ e $c > 0$ tais que para todo cubo Q,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r\right)^{1/r} \leq c\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega.$$

1.22.5 $\omega \in A_p$ para algum $1 \leq p < +\infty$.

1.22.6 Existem $\varepsilon > 0$ e $c > 0$ tais que para todo cubo Q e todo conjunto mensurável $E \subset Q$,

$$\int_E \omega \leq c\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\varepsilon}\int_Q \omega.$$

1.22.7 Existem $\varepsilon > 0$ e $c > 0$ tais que para todo cubo Q e todo conjunto mensurável $E \subset Q$,

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq c\left(\frac{\int_E \omega}{\int_Q \omega}\right)^{\varepsilon}.$$

Se um peso ω satisfizer qualquer uma das condições do Teorema 1.22, diremos que ω satisfaz a condição A_∞, isto é, $\omega \in A_\infty$.

Para demonstrar o teorema anterior, precisaremos do seguinte

Lema 1.23 (Calderón-Zygmund). *Sejam ω um peso, Q um cubo de $\mathbb{R}^n$ e $\lambda > av_Q\omega = \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega$. Então existe uma seqüência de cubos que não se sobrepõem $\{Q_i\}$ contidos em Q tais que*

(i) $\omega(x) \leq \lambda$ *se* $x \in Q \setminus \bigcup_i Q_i$.

(ii) $\lambda \leq \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} \omega \leq 2^n\lambda$.

Prova: Seja $Q_o = Q$. Subdivida Q_o em 2^n subcubos que não se soprepõem de lados iguais. Denote esses cubos por $\{Q^1\}$. Dessa coleção, selecione aqueles cubos Q^1 tais que

$$\frac{1}{|Q^1|}\int_{Q^1} \omega > \lambda.$$

Se Q^1 for um dos cubos selecionados, temos

$$\lambda < \frac{1}{|Q^1|}\int_{Q^1}\omega \leq \frac{1}{|Q^1|}\int_{Q_0}\omega = \frac{1}{2^n}\int_{Q_0}\omega < 2^n\lambda.$$

Se Q^1 não for selecionado então subdivida-o em 2^n subcubos de mesmo lado $\{Q^2\}$, digamos, e selecione aqueles Q^2 tais que

$$\frac{1}{|Q^2|}\int_{Q^2}\omega > \lambda.$$

Se Q^2 for um dos cubos selecionados, temos

$$\lambda < \frac{1}{|Q^2|}\int_{Q^2}\omega \leq \frac{|Q^1|}{|Q^2|}\frac{1}{|Q^1|}\int_{Q_1}\omega < 2^n\lambda.$$

O processo continua escolhendo-se sempre os subcubos $\{Q^k\}$ com $\mathrm{av}_{Q^k}(\omega) > \lambda$. A coleção de todos os cubos selecionados é enumerável e quaisquer dois cubos escolhidos não se sobrepõem e (ii) é assegurada pela construção.

Se x pertence a Q e não está em nenhum dos cubos selecionados, então, a cada passo, x pertence a um cubo que não foi selecionado. Assim, existe uma seqüência de cubos $Q_j \searrow x$ tal que $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}\omega \leq \lambda$. Portanto, $\omega(x) \leq \lambda$ quase sempre em $Q \setminus \bigcup_k Q^k$. □

Prova do Teorema 1.22: Mostremos que *1.22.3* implica *1.22.4*. Suponha que existam $0 < \alpha, \beta < 1$ tais que para todo cubo Q, $|\{x \in Q; \omega(x) > \beta\, \mathrm{av}_Q(\omega)\}| \geq \alpha|Q|$.

Afirmamos que existe $\gamma > 0$ tal que para todo $\lambda > \mathrm{av}_Q(\omega)$,

$$\int_{\{x\in Q;\omega(x)>\lambda\}}\omega \leq c\lambda|\{x \in Q; \omega(x) > \gamma\lambda\}|.$$

De fato, fixemos Q e λ como acima. Pelo Lema 1.23 existe um seqüência de cubos não sobrepostos $\{Q_i\}$ contidos em Q satisfazendo

(i) $\omega(x) \leq \lambda$ se $x \in Q \setminus \bigcup_i Q_i$.

(ii) $\lambda \leq \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}\omega \leq 2^n\lambda$.

Portanto,

$$\{x \in Q; \omega(x) > \lambda\} \subset \bigcup_i Q_i.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\omega(\{x\in Q;\omega(x)>\lambda\}) &\le \sum_i \int_{Q_i}\omega \\
=&\sum_i \left(\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}\omega\right)|Q_i| \le 2^n\lambda\sum_i |Q_i| && \text{por (ii)}\\
\le&\alpha^{-1}2^n\lambda\sum_i |\{x\in Q_i;\omega(x)>\beta\,\underset{Q_i}{\mathrm{av}}(\omega)\}| && \text{pela condição } \mathit{1.22.3}\\
\le&\alpha^{-1}2^n\lambda\sum_i |\{x\in Q_i;\omega(x)>\beta\lambda\}| && \text{pelo Lema 1.23}\\
\le&\alpha^{-1}2^n\lambda|\{x\in Q;\omega(x)>\beta\lambda\}|,
\end{aligned}$$

pois os cubos não se sobrepõem. Isto demonstra a afirmação que fizemos com $c=\alpha^{-1}2^n$ e $\gamma=\beta$.

Assumamos momentaneamente que $\int_Q\omega^r<\infty$, se $r>1$, suficientemente próximo de 1.

Temos

$$\int_Q\omega^r=\int_Q\omega^{r-1}\omega=(r-1)\int_0^\infty\lambda^{r-2}\omega(\{x\in Q;\omega(x)>\lambda\})\,d\lambda=$$

$$\begin{aligned}
=(r-1)&\int_0^{\mathrm{av}_Q(\omega)}\lambda^{r-2}\omega(\{x\in Q;\omega(x)>\lambda\})\,d\lambda+\\
&(r-1)\int_{\mathrm{av}_Q(\omega)}^\infty\lambda^{r-2}\omega(\{x\in Q;\omega(x)>\lambda\})\,d\lambda=I+II, \qquad \text{digamos.}
\end{aligned}$$

Note que

$$I\le(r-1)\omega(Q)\int_0^{\mathrm{av}_Q(\omega)}\lambda^{r-2}\,d\lambda=\omega(Q)(\underset{Q}{\mathrm{av}}(\omega))^{r-1}=|Q|(\underset{Q}{\mathrm{av}}(\omega))^r$$

e, pela afirmação que mostramos,

$$\begin{aligned}
II&\le c(r-1)\int_{\mathrm{av}_Q(\omega)}^\infty\lambda^{r-2}\lambda|\{x\in Q;\omega(x)>\gamma\lambda\}|\,d\lambda\\
&\le c(r-1)\int_0^\infty\lambda^{r-1}|\{x\in Q;\omega(x)>\gamma\lambda\}|\,d\lambda\\
&=c\gamma^{-r}(r-1)\int_0^\infty\lambda^{r-1}|\{x\in Q;\omega(x)>\gamma\lambda\}|\,d\lambda\\
&=c\gamma^{-r}(r-1)r^{-1}\int_Q\omega^r(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_Q \omega^r(x)\,dx \leq |Q|(\operatorname*{av}_Q(\omega))^r + c\gamma^{-r}(r-1)r^{-1}\int_Q \omega^r(x)$$
$$\leq |Q|(\operatorname*{av}_Q(\omega))^r + \frac{1}{2}\int_Q \omega^r(x),$$

se tomarmos $r > 1$ suficientemente próximo de 1. Portanto,

$$\int_Q \omega^r(x)\,dx \leq 2|Q|(\operatorname*{av}_Q(\omega))^r,$$

para $r > 1$, suficientemente próximo de 1, e daí obtemos

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r\right)^{1/r} \leq c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right),$$

que é a condição *1.22.4*, no caso em que $\int_Q \omega^r < \infty$, para $r > 1$, suficientemente próximo de 1. No caso geral, considere a seqüência de pesos $\omega_k = \min\{\omega, k\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Como $\omega_k \leq k$, $\int_Q \omega_k^r < \infty$, para todo $r > 0$. É suficiente aplicar o argumento anterior para ω_k e fazer uso do teorema da convergência monótona no final, contanto que mostremos que ω_k satisfaz *1.22.3* com as constantes independentes de k. Já que ω satisfaz *1.22.3*, é suficiente mostrar que para cada k,

$$\text{(1.24)} \qquad \{x \in Q; \omega_k(x) > \beta \operatorname*{av}_Q(\omega_k)\} \supset \{x \in Q; \omega(x) > \beta \operatorname*{av}_Q(\omega)\}.$$

Seja $x \in \{x \in Q; \omega(x) > \beta\,\mathrm{av}_Q(\omega)\}$. Se $\omega_k(x) = \omega(x)$ então $\omega_k(x) > \beta\,\mathrm{av}_Q(\omega_k)$, já que $\omega_k \leq \omega$. Se $\omega_k(x) = k$ então $\omega_k(x) = k \geq \mathrm{av}_Q(\omega_k) > \beta\,\mathrm{av}_Q(\omega_k)$, já que $\omega_k \leq k$ e $0 < \beta < 1$. Portanto, $x \in \{x \in Q; \omega_k(x) > \beta\,\mathrm{av}_Q(\omega_k)\}$, e isso conclui a prova de que *1.22.3* implica *1.22.4*.

Mostremos agora que a condição *1.22.4* implica a condição *1.22.6*. Assumamos, portanto, que existam $r > 1$ e $c > 0$ tais que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r\right)^{1/r} \leq c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right), \qquad \text{para todo cubo } Q.$$

Dado um cubo Q, seja $E \subset Q$ um conjunto mensurável. Temos

$$\omega(E) = \int_E \omega = \int_Q \chi_E \omega \leq \left(\int_Q \chi_E\right)^{1/r'} \left(\int_Q \omega^r\right)^{1/r}$$

pela desigualdade de Hölder

$$= |E|^{1/r'}|Q|^{1/r}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r\right)^{1/r} \leq c|E|^{1/r'}|Q|^{1/r}\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega$$

pela condição *1.22.4*

$$= \left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{1/r'} \int_Q \omega = \left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{1/r'} \omega(Q).$$

Portanto,

$$\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \leq c\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{1/r'}, \qquad \text{que é } 1.22.6 \text{ com } \varepsilon = 1/r'.$$

Note que se a condição *1.22.6* for satisfeita para um dado peso ω então, para todo subconjunto mensurável E de um dado cubo Q tal que $|E| < \alpha|Q|$, onde $0 < \alpha < 1$ é tal que $\beta = c\alpha^\varepsilon < 1$ e as constantes c e ε são as mesmas da condição *1.22.6*, temos

$$\int_E \omega \leq c\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^\varepsilon \int_Q \omega \leq c\alpha^\varepsilon \int_Q \omega = \beta \int_Q \omega,$$

que é a condição *1.22.1*.

Agora, se *1.22.1* for verdadeira, então para todo subconjunto mensurável E de um dado cubo Q, tal que $|E| < \alpha'|Q|$, onde $\alpha' = 1 - \beta$, temos

$$\omega(Q \setminus E) = \omega(Q) - \omega(E) > (-1 + \beta + 1)\omega(Q) = \beta\omega(Q).$$

Assim, usando a condição *1.22.1* com $Q \setminus E$ no lugar de E, chegamos a $|Q \setminus E| > \alpha|Q|$ e, portanto, $|E| < (1-\alpha)|Q| = \beta'|Q|$, digamos. Ou seja, temos a condição *1.22.2* satisfeita, pois $0 < \beta' = 1 - \alpha < 1$ e $0 < \alpha' = 1 - \beta < 1$. De maneira análoga podemos provar que *1.22.2* implica *1.22.1*.

Suponhamos que *1.22.2* seja válida. Tome $\beta' \in (0, \alpha)$, onde α é como em *1.22.2*. Sejam Q um cubo e $E = \{x \in Q; \omega(x) > \beta' \operatorname{av}_Q(\omega)\}$. Temos

$$\begin{aligned}\omega(Q \setminus E) = \int_{Q\setminus E} \omega &\leq \beta' \operatorname*{av}_Q(\omega)|Q \setminus E| \\ &\leq \beta' \operatorname*{av}_Q(\omega)|Q| = \beta'\omega(Q) < \alpha\omega(Q).\end{aligned}$$

Assim, por *1.22.2*, $|Q \setminus E| < \beta|Q|$. Portanto, $|E| = |Q| - |Q \setminus E| > (1-\beta)|Q| = \alpha'|Q|$, onde $\alpha' = 1 - \beta$, que é exatamente a condição *1.22.3*.

Até agora provamos que são equivalentes as seguintes condições para um dado peso ω: *1.22.1*, *1.22.2*, *1.22.3*, *1.22.4* e *1.22.6*. Afirmamos que se ω satisfaz *1.22.1* então a medida $d\mu = \omega dx$ é dobrante. De fato, suponha que ω satisfaça *1.22.1* e sejam α e β como nessa condição. Escolha $\delta > 0$ tal que $|(1+\delta)Q \setminus Q| < \alpha|(1+\delta)Q|$. Então, por *1.22.1*, obtemos $\mu((1+\delta)Q \setminus Q) < \beta\mu((1+\delta)Q)$. Assim, $\mu(Q) > (1-\beta)\mu((1+\delta)Q)$ e, portanto, $\mu((1+\delta)Q) < \frac{1}{1-\beta}\mu(Q)$. Iterando, obtemos

$$\mu(2Q) < \left(\frac{1}{1-\beta}\right)^N \mu(Q),$$

para algum $N > 0$ que depende somente de δ. Isto termina a prova da nossa afirmação.

Observe que a condição *1.22.2*, em termos da medida μ introduzida acima, se exprime por:

Existem constantes $0 < \alpha, \beta < 1$ tais que para todo cubo Q e todo subconjunto mensurável E de Q satisfazendo $\mu(E) \leq \alpha\mu(Q)$ tem-se $\int_E \omega^{-1}\, d\mu \leq \beta \int_Q \omega^{-1}\, d\mu$. Esta condição é a mesma que *1.22.1* com a medida de Lebesgue e ω trocados por $d\mu$ e ω^{-1}, respectivamente. Denotemos por (*1.22.n*)' a condição análoga à condição *1.22.n* com a medida de Lebesgue e ω substituídos por $d\mu$ e ω^{-1}, respectivamente, para $n = 1, 2, 3, 4$ e 6.

Agora, se ω satisfizer a condição *1.22.1*, por exemplo, então, como já vimos, $d\mu$ é dobrante e como o Lema de Calderón-Zygmund continua verdadeiro para um tal peso, vemos que as condições *1.22.n* são equivalentes às condições (*1.22.n*)' para $n = 1, 2, 3, 4$ e 6.

Passemos a demonstrar que *1.22.1* implica *1.22.5*. Assuma que *1.22.1* seja satisfeita por ω. Então, por (*1.22.4*)', existem $c > 0$ e $r > 1$ tais que para todo cubo Q,

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \left(\frac{1}{\omega}\right)^r d\mu\right)^{1/r} \leq \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \frac{1}{\omega} d\mu.$$

Isto é,

$$\mu(Q)^{1-1/r}\left(\int_Q \omega^{1-r}\right)^{1/r} \leq c|Q|,$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)^{1/r'}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1-r}\right)^{1/r} \leq c$$

onde r' é o expoente conjugado a r e, portanto,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)^{1/r'}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{r'-1}}\right)^{1/r} \leq c,$$

isto é, ω pertence a $A_{r'}$, ou ainda, a condição *1.22.5* é satisfeita por ω.

Reciprocamente, suponnhamos que ω satisfaça *1.22.5*, isto é, $\omega \in A_r$ para algum $r \geq 1$. Podemos assumir $r > 1$. Assim, existe $c > 0$ tal que para todo cubo Q, temos

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{r-1}}\right)^{r-1} \leq c$$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1-r'}\right)^{r-1} \leq c$$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)^{1/r}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1-r'}\right)^{1/r'} \leq c^{1/r}$$

$$\left(\int_Q \omega\right)^{1/r} \left(\int_Q \omega^{-r'}\omega\right)^{1/r'} \le c^{1/r}|Q|$$

$$\mu(Q)^{-1/r'}\left(\int_Q \omega^{-r'}\,d\mu\right)^{1/r'} \le c^{1/r}\mu(Q)^{-1}|Q| = c^{1/r}\mu(Q)^{-1}\int_Q \omega^{-1}\,d\mu$$

onde $d\mu = \omega\,dx$

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \omega^{-r'}\,d\mu\right)^{1/r'} \le c^{1/r}\mu(Q)^{-1}\int_Q \omega^{-1}\,d\mu,$$

que é a condição (*1.22.4*)'.

Já sabemos que (*1.22.4*)' é equivalente a (*1.22.6*)'. Para terminar a demonstração do Teorema 1.22, mostremos que (*1.22.6*)' é equivalente a *1.22.7*. Para tanto, assumamos que existam $c > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que para todo cubo Q e todo subconjunto mensurável $E \subset Q$, temos

$$\frac{\int_E \omega^{-1}\,d\mu}{\int_Q \omega^{-1}\,d\mu} \le c\left(\frac{\mu(E)}{\mu(Q)}\right)^{\varepsilon},$$

ou seja,

$$\frac{|E|}{|Q|} \le c\left(\frac{\int_E \omega}{\int_Q \omega}\right)^{\varepsilon}$$

que é a condição *1.22.7*. □

A condição *1.22.4* é conhecida como Hölder reversa e se for satisfeita por um peso ω, escreveremos $\omega \in \mathbf{RH_r}$.

Já vimos que se $1 \le p < q < \infty$ então $A_p \subset A_q$. O próximo teorema nos diz que se $p < q$ e p e q estiverem suficientemente próximos, a recíproca é verdadeira. Mais precisamente, temos

Corolário 1.25. *Se $\omega \in A_p$ para algum $1 < p < \infty$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\omega \in A_{p-\varepsilon}$.*

Prova: Seja $\omega \in A_p$ para algum $1 < p < \infty$. Então $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'} \subset A_\infty$. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\omega \in \mathbf{RH}_{1+\delta}$, isto é, existe $c > 0$ tal que para todo cubo Q, temos

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1+\delta}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \le c\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1+\delta}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{1+\delta}} \le c\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \le C,$$

pois $\omega \in A_p$. Defina q tal que

$$\frac{1}{q-1} = \frac{1+\delta}{p-1}, \quad \text{isto é,} \quad q = 1 + \frac{p-1}{1+\delta}.$$

Assim, $q < p$ e, portanto, $\omega \in A_q = A_{p-\varepsilon}$, onde $\varepsilon = p - q$. □

Temos também o seguinte resultado:

Corolário 1.26. *Se $\omega \in A_p$, $1 \leq p < \infty$ então $\omega^{1+\varepsilon} \in A_p$ para algum $\varepsilon > 0$.*

Prova: Se $p > 1$ então ω e $\omega^{-\frac{1}{p-1}}$ estão em A_∞, pois $\omega \in A_p$ e $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que ω e $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in \mathbf{RH}_{1+\varepsilon}$. Desse modo, existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1+\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\omega^{1+\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \\
&\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{(1+\varepsilon)(p-1)} \\
&\leq \left[\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}\right]^{1+\varepsilon} \leq c^{1+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Se $p = 1$ então

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega \leq \inf_Q \operatorname{ess} \omega.$$

Também, $\omega \in A_\infty$ e, assim, $\omega \in \mathbf{RH}_{1+\varepsilon}$ para algum $\varepsilon > 0$. Portanto,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1+\varepsilon} \leq c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)^{1+\varepsilon} \leq c\left(\inf_Q \operatorname{ess} \omega\right)^{1+\varepsilon} = c \inf_Q \operatorname{ess} \omega^{1+\varepsilon},$$

isto é, $\omega^{1+\varepsilon} \in A_1$. □

Corolário 1.27. *Se $\omega \in \mathbf{RH_r}$ para algum $r > 1$ então existe $s > r$ tal que $\omega \in \mathbf{RH_s}$.*

Prova: Seja $\omega \in \mathbf{RH_r}$, $r > 1$. Então, pelo Teorema 1.22, $\omega \in A_p$ para algum $1 < p < \infty$. Defina $q = r(p-1) + 1$. Afirmamos que $\omega^r \in A_q$. De fato,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{r\left(-\frac{1}{q-1}\right)}\right)^{q-1} \\
=&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{r(p-1)} \\
\leq& c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)^r\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{r(p-1)} \qquad \text{pois } \omega \in \mathbf{RH_r} \\
=& c\left[\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{(p-1)}\right]^r \leq C,
\end{aligned}$$

pois $\omega \in A_p$. Isto demonstra a nossa afirmação.

Segue do Teorema 1.22 que $\omega^r \in \mathbf{RH}_{1+\varepsilon}$ para algum $\varepsilon > 0$. Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{r(1+\varepsilon)} &\leq c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^r\right)^{1+\varepsilon} && \text{pois } \omega^r \in \mathbf{RH}_{1+\varepsilon}\\ &\leq c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)^{r(1+\varepsilon)}, && \text{pois } \omega \in \mathbf{RH}_r.\end{aligned}$$

Portanto, $\omega \in \mathbf{RH}_s$, onde $s = r(1+\varepsilon) > r$. □

1.4 O Teorema de Muckenhoupt

Como já mencionamos, a classe de pesos A_p está intimamente relacionada com a função maximal de Hardy-Littlewood, como expressado no Teorema 1.28, para $1 < p < \infty$ e Teorema 1.30 para $p = 1$, devidos a Muckenhoupt.

Observe inicialmente que se $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$, então $Mf(x) \leq cM_\omega f(x)$, para toda função f localmente integrável, já que para todo cubo Q temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| &= \frac{1}{|Q|}\int_Q |f|\omega^{1/p}\omega^{-1/p}\\ &\leq \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q \omega^{-p'/p}\right)^{1/p'}\left(\int_Q |f|^p\omega\right)^{1/p}\\ &= \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'}\left(\int_Q |f|^p\omega\right)^{1/p}\\ &= \frac{\omega(Q)^{1/p}}{|Q|}\left(\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q |f|^p\omega\right)^{1/p}\left(\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'}\\ &= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)^{1/p}\left(\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'}\left(\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q |f|^p\omega\right)^{1/p}\\ &\leq c\left(\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q |f|^p\omega\right)^{1/p},\end{aligned}$$

pois $\omega \in A_p$. Assim, $Mf(x) \leq c[M_\omega|f|^p(x)]^{1/p}$. O mesmo resultado também é válido se $p = 1$, visto que se $\omega \in A_1$, existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| &\leq \frac{1}{|Q|}\left(\operatorname*{sup\,ess}_Q \frac{1}{\omega}\right)\int_Q |f|\omega\\ &= \frac{\omega(Q)}{|Q|}\left(\operatorname*{sup\,ess}_Q \frac{1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q |f|\omega \leq c\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q |f|\omega.\end{aligned}$$

Assim,

$$Mf(x) \leq cM_\omega f(x).$$

Teorema 1.28 (Muckenhoupt). *Seja $1 < p < +\infty$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1.28.1 $\omega \in A_p$.

1.28.2 Existe $c > 0$ tal que

$$\omega(\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda^p}\|f\|_{L^p_\omega}^p,$$

para todo $\lambda > 0$ e toda f.

1.28.3 Existe $c > 0$ tal que

$$\|Mf\|_{L^p_\omega} \leq c\|f\|_{L^p_\omega},$$

para toda f.

Prova: Suponhamos que *1.28.3* seja válida. Então

$$\omega(\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda^p}\int [Mf]^p\omega \leq c\int |f|^p\omega = c\|f\|_{L^p_\omega}^p.$$

Suponhamos agora que a afirmação *1.28.2* seja válida. Fixado um cubo Q, defina $f(x) = \chi_Q(x)\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}$. Observe que

$$\|f\|_{L^p_\omega}^p = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\chi_Q(x)\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}\right)^p\omega = \int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Por outro lado, se $x \in Q$,

$$\begin{aligned}(1.29) \qquad Mf(x) &= \sup_{I \ni x}\frac{1}{|I|}\int_I \chi_Q\omega^{-\frac{1}{p-1}} \\ &= \sup_{I \ni x}\frac{1}{|I|}\int_{I\cap Q}\chi_Q\omega^{-\frac{1}{p-1}} \geq \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}.\end{aligned}$$

Tome em *1.28.2* $\lambda = \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}$, o qual, por um momento, assumiremos ser finito e positivo. De 1.29 obtemos $Q \subset \{x; Mf(x) > \lambda\}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_Q \omega &\leq \omega(\{x; Mf(x) > \lambda\}) \leq \omega(\{x; Mf(x) > \lambda\}) \\ &\leq \frac{c}{\lambda^p}\int |f|^p\omega = \frac{c}{\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^p}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}.\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq c,$$

isto é, $\omega \in A_p$.

Se $\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}} = 0$ não há nada a ser demonstrado — estamos assumindo $0 \cdot \infty = 0$.

Se $\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}} = \infty$, mostraremos que $\omega(x) = 0$ para quase todo x em $\mathbb{R}^n$. Para cada $\varepsilon > 0$ defina $\omega_\varepsilon = \max\{\omega, \varepsilon\}$. Então, $\omega_\varepsilon \geq \varepsilon$ e $\omega_\varepsilon \geq \omega$. Tome $f = \omega_\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}$ e $\lambda = \frac{1}{|Q|}\int_Q \omega_\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}} < \infty$. Obtemos

$$\int_Q \omega \leq \frac{c}{\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega_\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}\right)^p} \int_Q \omega_\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}$$

e, portanto,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega_\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq c.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0+$, pelo teorema da covergência monótona, obtemos $\int_Q \omega = 0$ e, portanto, $\omega(x) = 0$ para quase todo x em Q. Como $\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}} = \infty$, então para todo cubo $I \supset Q$, $\int_I \omega^{-\frac{1}{p-1}} = \infty$. O mesmo argumento acima mostra que $\omega(x) = 0$ para quase todo x em I. Portanto, $\omega(x) = 0$ para quase todo x em $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, suponhamos que a afirmação *1.28*.1 seja válida. Então pelo Corolário 1.25 existe $\varepsilon > 0$, tal que $\omega \in A_{p-\varepsilon}$ e, obviamente, $\omega \in A_{p+\varepsilon}$. Assim, por 1.17, $Mf(x) \leq c[M_\omega|f|^{p-\varepsilon}(x)]^{1/(p-\varepsilon)}$ e $Mf(x) \leq c[M_\omega|f|^{p+\varepsilon}(x)]^{1/(p+\varepsilon)}$. Assim,

$$\{x; Mf(x) > \lambda\} = \{x; Mf(x)^{p-\varepsilon} > \lambda^{p-\varepsilon}\} \subset \{x; M_\omega(|f|^{p-\varepsilon}) > \lambda^{p-\varepsilon}/c\}.$$

Portanto,

$$\omega(\{x; Mf(x) > \lambda\}) \leq \omega(\{x; M_\omega(|f|^{p-\varepsilon}) > \lambda^{p-\varepsilon}/c\}) \leq \frac{C}{\lambda^{p-\varepsilon}} \int |f|^{p-\varepsilon}\omega$$

e, analogamente,

$$\omega(\{x; Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^{p+\varepsilon}} \int |f|^{p+\varepsilon}\omega.$$

Desse modo, a função maximal de Hardy-Littlewood Mf satisfaz as condições de tipo fraco $(p-\varepsilon, p-\varepsilon)$ e $(p+\varepsilon, p+\varepsilon)$. Portanto, pelo teorema de interpolação de Marcinkiewicz, Mf satisfaz a condição de tipo forte (p, p),

$$\|Mf\|_{L^p_\omega} \leq c\|f\|_{L^p_\omega},$$

que é o que queríamos demonstrar. □

No caso de pesos da classe A_1 temos o seguinte resultado:

Teorema 1.30 (Muckenhoupt). *São equivalentes as seguintes afirmações:*

1.30.1 $\omega \in A_1$.

1.30.2 *Existe* $c > 0$ *tal que*

$$\omega(\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda}\|f\|_{1,\omega},$$

para todo $\lambda > 0$ *e toda* f.

Prova: Suponhamos que *1.30.1* seja satisfeita. Então, como já vimos no início desse capítulo, existe $c > 0$ tal que

$$\{x; Mf(x) > \lambda\} \subset \{x; M_\omega(f) > \lambda/c\}.$$

Portanto, pela condição (ii) do Teorema 1.4

$$\omega(\{x; Mf(x) > \lambda\}) \leq \omega(\{x; M_\omega(f) > \lambda/c\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int |f|\omega,$$

que é a condição *1.30.2*.

Agora, suponhamos que *1.30.2* seja satisfeita. Dado um cubo Q seja $A = \inf \operatorname{ess}_Q \omega$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto mensurável $E \subset Q$ de medida positiva tal que $\omega \leq A + \varepsilon$ em E. Tomemos $f = \frac{1}{\omega}\chi_E$ e $\lambda = \frac{|E|}{|Q|(A+\varepsilon)}$ em *1.30.2*. Desse modo, obtemos para todo $x \in Q$

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f| = \frac{1}{|Q|}\int_E \frac{1}{\omega} \geq \frac{|E|}{|Q|(A+\varepsilon)}.$$

Portanto, utilizando *1.30.2*, chegamos a

$$\int_Q \omega \leq \frac{c}{\frac{|E|}{|Q|(A+\varepsilon)}}\int \chi_E \frac{1}{\omega}\omega = c(A+\varepsilon)|Q|.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0+$, obtemos

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega \leq cA = c \inf_Q \operatorname{ess} \omega,$$

que é o que queríamos demonstrar. $\square$

Capítulo 2

Integrais Fracionárias e a Desigualdade de Poincaré

2.1 Introdução

Iniciamos este capítulo definindo a integral fracionária de f de índice α. Em seguida apresentaremos algumas de suas propriedades e aplicações.

Para $0 < \alpha < n$ e $f \in L^1_{\text{loc}}$ definimos a função maximal fracionária,

$$M_\alpha f(x) = \sup_B \frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_B |f(y)| dy,$$

onde o supremo é tomado sobre todos as bolas B tais que $x \in B$. Se $f \geq 0$, definimos a integral fracionária de f, $I_\alpha f$, por

$$I_\alpha f(x) = f \star |x|^{\alpha-n} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}} dy.$$

Lema 2.1. *$I_\alpha f(x) \geq c M_\alpha f(x)$, onde c é uma constante positiva independente de f.*

Prova: Fixe x e uma bola B tal que $x \in B$

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \geq \int_B \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Como x e y pertencem a B temos que $|x-y| \leq c_n |B|^{1/n}$ o que implica que,

$$I_\alpha f(x) \geq \int_B \frac{f(y)}{(c|B|^{1/n})^{n-\alpha}} dy = c_{n,\alpha} \frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_B f(y) dy.$$

O lema segue tomando o supremo sobre todas as bolas tais que $x \in B$. $\square$

A seguir enunciaremos um resultado clássico sobre as integrais fracionárias que motivará o enunciado do problema que pretendemos estudar neste capítulo.

Teorema 2.2 (Hardy-Littlewood-Sobolev). *Suponha que* $0 < \alpha < n$ *e* $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ *e defina* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. *Então*

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leq c\|f\|_{L^p}.$$

O objeto de estudo de grande parte deste capítulo será o seguinte problema relacionado com o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev.

Problema 1: Dados $1 < p \leq q < \infty$ e pesos w e v achar, se possível, condições necessárias e suficientes que garantam que $\|I_\alpha f\|_{L^q_\omega} \leq c\|f\|_{L^p_v}$.

A solução deste problema terá aplicações no estudo de regularidade de soluções para equações lineares de segunda ordem elíticas degeneradas. Mais precisamente, considere o operador

$$Lu = -\langle \nabla, A\nabla u\rangle = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

onde a_{ij} são funções mensuráveis, $A = A(x) = (a_{ij}(x))$ é uma matriz $n \times n$ simétrica e

$$v(x)|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leq w(x)|\xi|^2.$$

Recordando o procedimento clássico, isto é, quando v e ω são constantes (veja, por exemplo, [GT]) verificamos que para estudarmos a regularidade das soluções no caso degenerado seria essencial a demonstração do seguinte resultado

Problema 2 (Desigualdade de Poincaré com pesos) Seja B seja uma bola em $\mathbb{R}^n$, $1 < p \leq q < \infty$ e $f \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$ (o espaço das funções lipschitzianas em $\bar{\Omega}$). Achar condições nos pesos v e ω que nos permitam demonstrar a seguinte desigualdade:

$$\left(\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(x) - f_B|^q \omega(x)dx\right)^{1/q} \leq c|B|^{1/n}\left(\frac{1}{v(B)}\int_B |\nabla f(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p},$$

onde $f_B = \mathrm{av}_B\, f = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)dx$.

O fato é que os problemas 1 e 2 estão intimamente ligados como pode ser demonstrado no seguinte teorema.

Teorema 2.3. *Se* $f \in \mathrm{Lip}(\bar{B})$ *então*

$$|f(x) - \operatorname*{av}_B f| \leq c_n \int_B \frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy = c_n I_1(|\nabla f|\chi_B)(x),$$

para todo $x \in B$.

Prova: Escreva

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \operatorname*{av}_B f\right| &= \left|f(x) - \frac{1}{|B|}\int_B f(y)dy\right| \\ &= \left|\frac{1}{|B|}\int_B (f(x) - f(y))dy\right| \leq \frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f(y)|dy.\end{aligned}$$

Como,

$$
\begin{aligned}
|f(y)-f(x)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\{f(ty+(1-t)x)\}dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 (\nabla f)(ty+(1-t)x)\cdot(y-x)dt\right| \\
&\leq \left(\int_0^1 |(\nabla f)(ty+(1-t)x)|dt\right)|y-x|,
\end{aligned}
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-f(x)|dy \\
\leq\ & \frac{1}{|B|}\int_B \left(\int_0^1 |(\nabla f)(ty+(1-t)x\right) dt \cdot |x-y|dy \\
=\ & \frac{1}{|B|}\int_0^1 \int_B |(\nabla f)(ty+(1-t)x)||x-y|dydt.
\end{aligned}
$$

Note que se $z = ty + (1-t)x$ então $\frac{|z-x|}{t} = |y-x|$ e se r é o raio da bola B temos que $\frac{|z-x|}{t} \leq 2r$ e, portanto, $t \geq \frac{2r}{z-x}$. Combinando esses fatos com a última desigualdade obtemos

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-f(x)|dy \\
=\ & \frac{1}{|B|}\int_0^1 \left(\int_{\{z\in B;|x-z|\leq 2rt\}} |(\nabla f)(z)|\frac{|z-x|}{t^{n+1}}dz\right) dt \\
\leq\ & \frac{1}{|B|}\int_0^\infty \left(\int_{\{z\in B;|x-z|\leq 2rt\}} |(\nabla f)(z)|\frac{|z-x|}{t^{n+1}}dz\right) dt \\
=\ & \frac{1}{|B|}\int_B |(\nabla f)(z)||z-x|\left(\int_{\frac{|x-z|}{2r}}^\infty \frac{dt}{t^{n+1}}\right) dz \\
=\ & \frac{1}{n}\frac{1}{|B|}\int_B |(\nabla f)(z)|\frac{|z-x|}{|x-z|^n}(2r)^n dz \\
=\ & c_n \int_B \frac{|(\nabla f)(z)|}{|x-z|^{n-1}}dz.
\end{aligned}
$$

□

Assim sendo, desigualdades de tipo forte para I_1 devem implicar a desigualdade de Poincaré. Na verdade, desigualdades de tipo fraco para I_1 implicarão na desigualdade de Poincaré como conseqüência do Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz. Com isso, vemos que, precisamos de uma condição necessária e suficiente sobre os pesos ω e v de modo que I_α seja um operador do tipo fraco (p, q), que passaremos a estudar na próxima seção.

2.2 Integral fracionária

O teorema a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente sobre os pesos ω e v para que a integral fracionária seja um operador do tipo fraco (p,q).

Teorema 2.4. *Se $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < n$ então*

$$\omega(\{x \in \mathbb{R}^n; |I_\alpha f(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{c}{\lambda}\|f\|_{L^p_v}\right)^q,$$

para todo $\lambda > 0$ e para toda f se, e somente se,

$$\omega(B)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \frac{\sigma(x)}{|x - x_B|^{(n-\alpha)p'}} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C, \tag{2.5}$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$, onde x_B é o centro da bola B e $\sigma = v^{-\frac{1}{p-1}}$.

Na demonstração do teorema acima utilizaremos o seguinte lema de cobertura devido a Besicovitch, cuja prova pode ser encontrada em [WZ].

Lema 2.6 (Besicovitch). *Seja E um conjunto limitado em $\mathbb{R}^n$ e seja $\{B\}$ uma coleção de bolas tais que cada $x \in E$ é o centro de alguma bola B da coleção $\{B\}$. Então existe uma subcoleção $\{B_k\}$ em $\{B\}$ tal que $E \subset \cup B_k$ e $\sum_k \chi_{B_k} \leq c_n$, sendo c_n uma constante que só depende da dimensão n.*

Para f não negativa, defina

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{\omega(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f^p v dy\right)^{1/p}.$$

O próximo lema também será necessário na demonstração do Teorema 2.4.

Lema 2.7.

$$\omega(\{x; \mathcal{M}(f)(x) > \gamma\}) \leq \left(\frac{c\|f\|_{L^p_v}}{\gamma}\right)^q,$$

sem nenhuma restrição em ω e v.

Prova: Fixe γ e seja $E = \{x; \mathcal{M}(f)(x) > \gamma\}$. Se $x \in E$ então existe uma bola $B(x)$ com centro em x tal que

$$\gamma < \left(\frac{1}{\omega(B(x))} \int_{B(x)} f^p v dy\right)^{1/p}.$$

Fixe N e considere $E \cap \{x; |x| < N\} = E_N$. Pelo Lema 2.6 aplicado a E_N e $\{B(x); x \in E_N\}$ existe $\{B(x_i)\}$ tal que $E_N \subset \cup B(x_i)$ e $\sum \chi_{B(x_i)} \leq c_n$. Portanto,

$$\begin{aligned} \omega(E_N) &\leq \sum \omega(B(x_i)) \\ \leq & \sum \frac{1}{\gamma^p} \int_{B(x_i)} f^p v dy \leq \frac{1}{\gamma^p} \int_{\mathbb{R}^n} f^p \sum \chi_{B(x_i)} v dy \\ \leq & \frac{c_n}{\gamma^p} \int_{\mathbb{R}^n} f^p v dy = \frac{c_n}{\gamma^p} \|f\|^p_{L^p_v}. \end{aligned}$$

Para concluirmos a demonstração do lema basta fazer N tender ao infinito e usar o teorema da convergência monótona.

A seguir apresentaremos a demonstração do Teorema 2.4.

Prova da necessidade: Fixe $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Seja

$$f(y) = \frac{\sigma(y)}{|x-y|^{(n-\alpha)(p'-1)}} \chi_{\{y;|x-y|>r\}}(y).$$

Então

$$\|f\|_{L^p_v} = \left(\int_{\{y;|x-y|>r\}} \frac{\sigma(y)}{|x-y|^{(n-\alpha)p'}} dy \right)^{1/p}.$$

Note também que

$$I_\alpha f(z) = \int_{\{y;|x-y|>r\}} \frac{\sigma(y)}{|x-y|^{(n-\alpha)(p'-1)}} \frac{1}{|z-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Seja $z \in B(x,r)$. Então

$$|z-y| \leq |z-x| + |x-y| \leq r + |x-y| \leq 2|x-y|.$$

Logo,

$$I_\alpha f(z) \geq \frac{1}{2^{n-\alpha}} \int_{\{y;|x-y|>r\}} \frac{\sigma(y)}{|x-y|^{(n-\alpha)p'}} dy.$$

Defina

$$\lambda = \frac{1}{2^{n-\alpha}} \int_{\{y;|x-y|>r\}} \frac{\sigma(y)}{|x-y|^{(n-\alpha)p'}} dy.$$

Por hipótese

$$\omega(B(x,r))^{1/q} \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_{L^p_v} = c 2^{n-\alpha} \left(\int_{\{y;|x-y|>r\}} \frac{\sigma(y)}{|x-y|^{(n-\alpha)p'}} dy \right)^{1/p}.$$

Na verdade, devemos fazer algumas pequenas alterações na demonstração acima já que não sabemos se λ é finito. Para assegurarmos que λ é finito defina $f(y) = \frac{\sigma(y)}{|x-y|^{(n-\alpha)p'}} \cdot \chi_{\{y;r<|x-y|<N\}}$ e fazemos N tender ao infinito no final da demonstração (teorema da convergência monótona). Com isso a finitude de λ se reduz ao fato de σ ser localmente integrável. Como σ não é necessariamente localmente integrável substitua v por $v_\varepsilon = \max\{v, \varepsilon\}$ e, assim sendo, $v_\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}$ pertence a L^1_{loc} e para concluirmos a demonstração fazemos $N \to \infty$ e em seguida $\varepsilon \to 0$.

Prova da suficiência: Podemos supor, sem perda de generalidade, que $f \geq 0$ já que $|I_\alpha(f)| \leq I_\alpha(|f|)$. Fixe $x \in \mathbb{R}^n$ e escreva

$$
\begin{aligned}
I_\alpha f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\
&= \int_{\{y;|x-y|<r\}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy + \int_{\{y;|x-y|\geq r\}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\
&= I + II,
\end{aligned}
$$

onde r será escolhido convenientemente. Para II, por Hölder,

$$
\begin{aligned}
II &\leq \left(\int_{\{y;|x-y|>r\}} f^p v dy \right)^{1/p} \left(\int_{\{y;|x-y|>r\}} \frac{\sigma(y)}{|x-y|^{(n-\alpha)p'}} dy \right)^{1/p'} \\
&\leq \|f\|_{L^p_v} c\omega(B_r(x))^{-\frac{1}{q}},
\end{aligned}
$$

sendo que na última desigualdade utilizamos a hipótese. Escreva

$$
I = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{y;r_{k+1}<|x-y|<r_k\}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,
$$

sendo a seqüência (r_k) escolhida decrescente e satisfazendo

$$
\omega(B_{r_k}(x)) = 2^{-k} \omega(B_r(x))
$$

e $r_0 = r$. Por Hölder e pela hipótese 2.5

$$
\begin{aligned}
I &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f\chi_{B_{r_k}(x)}\|_{L^p_v} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{r_{k+1}}(x)} \frac{\sigma(y)}{|x-y|^{(n-\alpha)p'}} dy \right)^{1/p'} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f\chi_{B_{r_k}(x)}\|_{L^p_v} c\omega(B_{r_{k+1}}(x))^{-\frac{1}{q}} \\
&= c \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega(B_{r_k}(x))} \int_{B_{r_k}(x)} f^p v dy \omega(B_{r_k}(x)) \right)^{1/p} \omega(B_{r_{k+1}}(x)))^{-1/q}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= c\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\omega(B_{r_k}(x))}\int_{B_{r_k}(x)} f^p v dy\right)^{1/p} \times \\
&\times (2^{-k}\omega(B_r(x))^{1/p}(2^{-k-1}\omega(B_r(x)))^{-1/q} \\
&\leq c2^{1/q}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\omega(B_{r_k}(x))}\int_{B_{r_k}(x)} f^p v dy\right)^{1/p} (2^{-k})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\omega(B_r(x))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\
&\leq c\mathcal{M}(f)(x)\cdot\omega(B_r(x))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-k})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\
&= c\mathcal{M}(f)(x)\omega(B_r(x))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

já que $\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-k})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ é finita. Com isso provamos que

$$I_\alpha f(x) \leq I + II \leq c\{\|f\|_{L^p_v}\omega(B_r(x))^{-\frac{1}{q}} + \mathcal{M}(f)(x)\omega(B_r(x))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\}.$$

Note que se $\omega(B_r(x)) < \left[\frac{\|f\|_{L^p_v}}{\mathcal{M}(f)(x)}\right]^p$ para todo $r > 0$ então

$$I_\alpha f(x) \leq \|f\|_{L^p_v}\omega(B_r(x))^{-\frac{1}{q}} \qquad \text{para todo } r > 0,$$

o que implica que

$$I_\alpha(f)(x) \leq c\|f\|_{L^p_v}\omega(\mathbb{R}^n)^{-\frac{1}{q}}.$$

Logo, se $\{x; I_\alpha f(x) > \lambda\} \neq \emptyset$ então $\lambda \leq c\|f\|_{L^p_v}\omega(\mathbb{R}^n)^{-\frac{1}{q}}$ e, portanto,

$$w(\{x; I_\alpha f(x) \geq \lambda\} \leq \left(c\frac{\|f\|_{L^p_v}}{\lambda}\right)^q,$$

o que demonstra o teorema neste caso. Logo, podemos supor que existe um $r > 0$ de modo que

$$\omega(B_r(x)) = \left[\frac{\|f\|_{L^p_v}}{\mathcal{M}(f)(x)}\right]^p$$

e, assim sendo,

$$I_\alpha f(x) \leq c\|f\|_{L^p_v}^{1-\frac{p}{q}}\mathcal{M}(f)(x)^{\frac{p}{q}}$$

e, portanto,

$$\{x; I_\alpha f(x) > \lambda\} \subset \left\{x; \mathcal{M}(f)(x) > \left(\frac{\lambda}{c\|f\|_{L^p_v}^{1-\frac{p}{q}}}\right)^{q/p}\right\},$$

o que implica que

$$\omega(\{x; I_\alpha f(x) > \lambda\}) \leq \omega\left(\left\{x; \mathcal{M}(f)(x) > \left(\frac{\lambda}{c\|f\|_{L^p_v}^{1-\frac{p}{q}}}\right)^{q/p}\right\}\right).$$

Pelo Lema 2.7,

$$\omega(\{x; I_\alpha f(x) > \lambda\}) \leq c\|f\|_{L^p_v}^p \left(\frac{\lambda^q}{c\|f\|_{L^p_v}^{q-p}}\right)^{-1} = c\frac{\|f\|_{L^p_v}^q}{\lambda^q},$$

o que conclui a demonstração. $\square$

A técnica apresentada na demonstração do Teorema 2.4 pode ser aplicada em um outro contexto que apresentaremos a seguir. Dada uma bola $B_\circ$, considere o operador

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)dy,$$

onde $k(x,y) \geq 0$, $f \geq 0$, supp $f \subset B_\circ$ e $x \in B_\circ$. Neste caso, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.8. *Se* $1 < p < q < \infty$ *então*

$$\omega(\{x; |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{c}{\lambda}\|f\|_{L^p_v}\right)^q,$$

para todo $\lambda > 0$ *e para todo* f *se, e somente se,*

$$\left(\int_B \omega\right)^{1/q} \left(\int_{B_\circ \setminus B} k(x,y)^{p'}\sigma(y)dy\right)^{1/p'} \leq c \tag{2.9}$$

para toda bola B *centrada em* $x \in B_\circ$ *e com* $B \subset 3B_\circ$.

Prova: A demonstração segue os passos da prova do Teorema 2.4. Como antes escreva

$$Tf(x) = \int_{B(x,R)} k(x,y)f(y)dy + \int_{B(x,R)^c} k(x,y)f(y)dy = I + II,$$

onde R será escolhido convenientemente. Considere II. Se $B(x,R) \not\subset 3B_\circ$ então $B_\circ \subset B(x,R)$. De fato, se $z \in B_\circ = B(x_\circ, r_\circ)$ então

$$|x - z| \leq |x - x_\circ| + |x_\circ - z| \leq 2r_\circ < R,$$

sendo que a última desigualdade segue do fato que se $B(x,R) \not\subset 3B_\circ$ então existe u tal que $|u - x| < R$ e $|u - x_\circ| > 3r_\circ$ o que implica que

$$R > |u - x_\circ| \geq |u - x_\circ| - |x_\circ - x| > 3r_\circ - r_\circ = 2r_\circ.$$

Mas, neste caso, temos $II = 0$ já que supp $(f) \subset B_\circ$. Por outro lado, se $B(x,R) \subset 3B_\circ$ então por Hölder

$$\begin{aligned} II &\leq \left(\int_{B_\circ \setminus B(x,R)} k(x,y)^{p'}\sigma(y)dy\right)^{1/p'} \left(\int f^p v dy\right)^{1/p} \\ &\leq \|f\|_{L^p_v} c\omega(B_R(x))^{-1/q}, \qquad \text{por } 2.9. \end{aligned}$$

Logo a desigualdade acima vale em qualquer um dos casos. Para I escreva

$$(2.10) \qquad I = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{y; R_{k+1} < |x-y| < R_k\}} k(x,y) f(y) dy,$$

sendo a seqüência (R_k) escolhida decrescente e satisfazendo

$$\omega(B(x,R_k)) = 2^{-k}\omega(B(x,R))$$

e $R_0 = R$. Se $B(x,R_{k+1}) \not\subset 3B_\circ$ então, como foi demonstrado anteriormente, $B_\circ \subset B(x,R_{k+1})$ e, portanto, o termo correspondente em 2.10 é zero. Logo a soma é apenas sobre os índices k tais que $B(x,R_{k+1}) \subset 3B_\circ$. Por Hölder e (2.9),

$$\begin{aligned} I &\leq \sum \|f\chi_{B_{R_k}(x)}\|_{L^p_v} \left(\int_{B_\circ \setminus B_{R_{k+1}}} k(x,y)^{p'}\sigma(y)dy\right)^{1/p'} \\ &\leq \sum \|f\chi_{B_{R_k}(x)}\|_{L^p_v} c\omega(B_{R_{k+1}}(x))^{-1/q} \\ &\leq c\sum \mathcal{M}(f)(x)\omega(B_{R_k}(x))^{1/p}\omega(B_{R_{k+1}}(x))^{-1/q} \end{aligned}$$

onde,

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{R>0}\left(\frac{1}{\omega(B(x,R))}\int_{B(x,R)} f^p v dy\right)^{1/p}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &\leq c\mathcal{M}(f)(x)\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{-k}\omega(B_R(x))\right)^{1/p}\left(2^{-k-1}\omega(B_R(x))\right)^{-1/q} \\ &\leq c2^{1/q}\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-k})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\omega(B_R(x))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\ &\leq c\mathcal{M}(f)(x)\omega(B_R(x))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

e para $x \in B_\circ$

$$Tf(x) \leq I + II \leq c\{\|f\|_{L^p_v}\omega(B_R(x))^{-\frac{1}{q}} + \mathcal{M}(f)(x)\omega(B_R(x))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\}.$$

Escolha $R > 0$ de tal forma que

$$\omega(B_R(x)) = \left[\frac{\|f\|_{L^p_v}}{\mathcal{M}(f)(x)}\right]^p.$$

Note que, como antes, se $\omega(B_R(x)) < \left[\frac{\|f\|_{L^p_v}}{\mathcal{M}(f)(x)}\right]^p$ para todo $r > 0$ então

$$T(f)(x) \leq c\|f\|_{L^p_v}\omega(B_r(x))^{-1/q} \qquad \text{para todo } r > 0,$$

o que implica que $T(f)(x) \leq c\|f\|_{L^p_v}\omega(\mathbb{R}^n)^{-\frac{1}{q}}$. Logo, se $\{x; Tf(x) > \lambda\} \neq \emptyset$ então $\lambda \leq c\|f\|_{L^p_v}\omega(\mathbb{R}^n)^{-\frac{1}{q}}$ ou $w(\{x; T(f)(x) \geq \lambda\}) \leq \left(c\frac{\|f\|_{L^p_v}}{\lambda}\right)^q$, o que demonstra o teorema neste caso. Com esta escolha de R segue que

$$T(f)(x) \leq c\|f\|_{L^p_v}^{1-\frac{p}{q}}\mathcal{M}(f)(x)^{\frac{p}{q}}$$

e, portanto,

$$\{x \in B_\circ; T(f)(x) > \lambda\} \subset \left\{x; \mathcal{M}(f)(x) > \left(\frac{\lambda}{c\|f\|_{L^p_v}^{1-\frac{p}{q}}}\right)^{q/p}\right\},$$

o que implica que

$$\omega(\{x; Tf(x) > \lambda\}) \leq \omega\left(\left\{x; \mathcal{M}(f)(x) > \left(\frac{\lambda}{c\|f\|_{L^p_v}^{1-\frac{p}{q}}}\right)^{q/p}\right\}\right).$$

Pelo Lema 2.7,

$$\omega(\{x; T(f)(x) > \lambda\}) \leq c\|f\|_{L^p_v}^p\left(\frac{\lambda^q}{c\|f\|_{L^p_v}^{q-p}}\right)^{-1} = c\frac{\|f\|_{L^p_v}^q}{\lambda^q}.$$

□

Como aplicação do Teorema 2.4 podemos demonstrar a seguinte desigualdade de Poincaré.

Teorema 2.11. *Se $1 < p < q < \infty$ e $B_\circ$ é uma bola dada satisfazendo*

$$\omega(B)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{B_\circ\setminus B}\frac{\sigma(y)}{|y - x_B|^{(n-1)p'}}dy\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C, \tag{2.12}$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ centrada em $B_\circ$ e com $B \subset 3B_\circ$, sendo x_B o centro da bola B, então

$$\left(\int_{B_\circ}|f(x) - f_{B_\circ}|^q\omega(x)dx\right)^{1/q} \leq c\left(\int_{B_\circ}|\nabla f(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p}, \tag{2.13}$$

onde $f_{B_\circ} = \mathrm{av}_{B_\circ} f = \frac{1}{|B_\circ|}\int_{B_\circ} f(x)dx$.

Prova: Segue imediatamente dos Teoremas 2.3 e 2.4. □

A normalização usual da desigualdade 2.13 é escrita na seguinte forma

$$\left(\frac{1}{\omega(B_\circ)}\int_{B_\circ}|f(x)-f_{B_\circ}|^q\omega(x)dx\right)^{1/q}$$

$$\leq c|B_\circ|^{1/n}\left(\frac{1}{v(B_\circ)}\int_{B_\circ}|\nabla f(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p}.$$

Logo, substituindo, ω por $\frac{\omega}{\omega(B_\circ)}$ e v por $\frac{|B_\circ|^{p/n}v}{v(B_\circ)}$ na condição 2.11 obtemos

$$\frac{1}{|B_\circ|^{1/n}}\left(\frac{\omega(B)}{\omega(B_\circ)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{B_\circ\setminus B}\frac{\sigma(y)}{|y-x_B|^{(n-1)p'}}dy\right)^{\frac{1}{p'}}\leq\frac{C}{v(B_\circ)^{1/p}}, \tag{2.14}$$

para toda bola $B\subset 3B_\circ$ B centrada em $B_\circ$.

O próximo objetivo é obter uma forma mais simplificada para a condição 2.14. Para isso precisamos de alguns preliminares.

Definição 2.15. *Um peso ω satisfaz a propriedade dobrante reversa (escrevemos $\omega\in\mathbf{RD}$) se $\omega(2B)>\beta\omega(B)$ para algum $\beta>1$ e para toda bola B.*

O próximo lema nos dá algumas propriedades relacionando pesos que satisfazem a propriedade dobrante reversa.

Lema 2.16. *Temos:*

2.16.1 Se $\omega\in\mathbf{RD}$ então para $B_1\subset B_2$, B_1 e B_2 bolas em $\mathbb{R}^n$, existem constantes c e ε tais que

$$\omega(B_1)>c\left[\frac{r(B_1)}{r(B_2)}\right]^\varepsilon\omega(B_1),$$

sendo que $r(B)$ denota o raio da bola B.

2.16.2 Se ω é dobrante então $\omega\in\mathbf{RD}$.

2.16.3 Existe um peso que satisfaz a propriedade dobrante reversa e que não é dobrante.

Prova: Veja, por exemplo, [GT]. □

Agora estamos prontos para enunciarmos o próximo lema que reformula a condição 2.14 quando $\omega\in\mathbf{RD}$ e $v\in A_p$.

Lema 2.17. *Se $\omega \in \mathbf{RD}$ e $v \in A_p$ então a condição 2.14 está satisfeita quando*

$$\left(\frac{|B|}{|B_\circ|}\right)^{1/n}\left(\frac{\omega(B)}{\omega(B_\circ)}\right)^{1/q} \leq c\left(\frac{v(B)}{v(B_\circ)}\right)^{1/p}, \tag{2.18}$$

para toda bola $B \subset 3B_\circ$.

Prova:

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\circ\setminus B}\frac{\sigma(y)}{|x_B-y|^{(n-1)p'}}dy\\
\leq\ & \sum\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}\frac{\sigma(y)}{|x_B-y|^{(n-1)p'}}dy\\
\leq\ & c\sum_k\left(\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}\sigma(y)dy\right)\left(2^kr(B)\right)^{-(n-1)p'}\\
\leq\ & c\sum_k v\left(2^{k+1}B\right)^{-\frac{p'}{p}}\left|2^{k+1}B\right|^{p'}\left(2^kr(B)\right)^{-(n-1)p'},
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o fato que $v \in A_p$ e utilizando a condição 2.14 segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\circ\setminus B}\frac{\sigma(y)}{|x_B-y|^{(n-1)p'}}dy\\
\leq\ & c\sum v(B_\circ)^{-\frac{p'}{p}}\left(\frac{\omega(2^{k+1}B)}{\omega(B_\circ)}\right)^{-\frac{p'}{q}}\left(\frac{|2^kB|}{|B_\circ|}\right)^{-\frac{p'}{n}}\left|2^kB\right|^{p'}\left(2^kr(B)\right)^{-(n-1)p'}\\
=\ & cv(B_\circ)^{-\frac{p'}{p}}\omega(B_\circ)^{\frac{p'}{q}}|B_\circ|^{\frac{p'}{n}}\sum_k\omega(2^kB)^{-\frac{p'}{q}}\\
\leq\ & cv(B_\circ)^{-\frac{p'}{p}}\omega(B_\circ)^{\frac{p'}{q}}|B_\circ|^{\frac{p'}{n}}\sum_k\beta^{-\frac{kp'}{q}}\omega(B)^{-\frac{p'}{q}},
\end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade segue do fato que $\omega \in \mathbf{RD}$. Observe também que $\sum_k \beta^{-\frac{kp'}{q}} < \infty$ já que $\beta > 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{B_\circ\setminus B}\frac{\sigma(y)}{|x_B-y|^{(n-1)p'}}dy &\leq cv(B_\circ)^{-\frac{p'}{p}}\left[\frac{\omega(B_\circ)}{\omega(B)}\right]^{\frac{p'}{q}}|B_\circ|^{p'}n\\
&= c\left[v(B_\circ)^{-\frac{1}{p}}\left[\frac{\omega(B_\circ)}{\omega(B)}\right]^{\frac{1}{q}}|B_\circ|^{\frac{1}{n}}\right]^{p'}.
\end{aligned}$$

□

Em seguida mostraremos que o Teorema de Hardy-Littlewood Sobolev (Teorema 2.2) pode ser obtido a partir do Teorema 2.4.

Prova do Teorema 2.2: No caso $\omega = v = 1$ o termo do lado esquerdo da condição 2.5 pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\omega(B)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \frac{\sigma(x)}{|x - x_B|^{(n-\alpha)p'}} dx \right)^{1/p'} \\ &= |B|^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \frac{dx}{|x - x_B|^{(n-\alpha)p'}} \right)^{1/p'} \\ &= |B|^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\{y;|y|>r(B)\}} \frac{dy}{|y|^{(n-\alpha)p'}} \right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade segue por uma mudança de coordenadas. E, portanto, a condição 2.5 neste caso é

$$|B|^{1/q} \left(\int_{r(B)}^{\infty} r^{n-1-(n-\alpha)p'} dr \right)^{1/p'} \leq C,$$

para toda bola B, isto é,

$$r(B)^{n/q} \left(r(B)^{n-(n-\alpha)p'} \right)^{1/p'} \leq C$$

para todo $r(B) > 0$. É fácil ver que a condição acima é verdadeira se e somente se

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

Logo, sabemos que o operador $I_\alpha : L^p \to$ fraco L^q com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ e $0 < \alpha < n$. Fixe α, p e q satisfazendo as condições acima. Escolha p_1 e p_2 satisfazendo $1 < p_1 < p < p_2 < \frac{n}{\alpha}$ e q_1, q_2 tais que

$$\frac{1}{q_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{\alpha}{n}, \qquad \text{para } i = 1, 2.$$

Pelo Teorema de Marcinkiewicz (Teorema 1.9) segue que I_α é um operador de tipo forte de L^p em L^{q^*} onde

$$\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2}$$

e

$$\frac{1}{q^*} = \frac{t}{q_1} + \frac{1-t}{q_2}.$$

Mas

$$\begin{aligned}\frac{1}{q^*} &= \frac{t}{q_1}+\frac{1-t}{q_2}t\left(\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{n}\right)+(1-t)\left(\frac{1}{p_2}-\frac{\alpha}{n}\right)\\ &= \frac{t}{p_1}+\frac{1-t}{p_2}-\frac{\alpha}{n}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}=\frac{1}{q},\end{aligned}$$

isto é, $q^* = q$. O que demonstra o teorema. □

A seguir mostraremos, por meio de um exemplo, que o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev não é verdadeiro no caso $p = \frac{n}{\alpha}$ e $\frac{1}{q} = 0$, isto é, $q = \infty$. Em nosso exemplo $n = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ e $p = 2$ e acharemos $f \in L^2$ com $I_{1/2}f \notin L^\infty$. Seja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\log\frac{1}{x})^\beta}\chi_{(0,1/2)}(x),$$

onde $\beta > 0$ será escolhido convenientemente. Note que $f \in L^2$ se $\beta > 1/2$ já que

$$\int_0^{1/2}\frac{dx}{x(\log\frac{1}{x})^{2\beta}} = \int_{\log 2}^{\infty}\frac{du}{u^{2\beta}} < \infty.$$

Mas para x pequeno e positivo temos que

$$\begin{aligned}I_{1/2}f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{|x-t|^{1-\frac{1}{2}}}dt\\ &\geq \int_x^{1/2}\frac{1}{t^{1/2}(\log\frac{1}{t})^\beta(t-x)^{1/2}}dt \geq \int_x^{1/2}\frac{dt}{t(\log\frac{1}{t})^\beta}\\ &= \int_{\log 2}^{\log\frac{1}{x}}\frac{du}{u^\beta} = \left.\frac{u^{1-\beta}}{1-\beta}\right|_{\log 2}^{\log\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-\beta}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{1-\beta},\end{aligned}$$

que tende para $+\infty$ quando x tende a zero. Note que $\beta > \frac{1}{2}$ e $\beta \neq 1$.

Capítulo 3

Aplicação às Equações Elíticas Degeneradas de Segunda Ordem

3.1 Introdução

Neste capítulo aplicamos as desigualdades de Poincaré e Sobolev para estudarmos o comportamento local de soluções de equações elíticas degeneradas. Mais precisamente, provaremos as desigualdades do valor médio e de Harnack para soluções fracas de $Lu = 0$, em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, quando L é dado na forma divergente

$$L = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

e as funções a_{ij}, a valores reais, são mensuráveis e a matriz $A = (a_{ij})$ é simétrica e satisfaz

$$\omega(x)|\xi|^2 \leq \langle A\xi, \xi\rangle \leq v(x)|\xi|^2. \tag{3.1}$$

Note que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual e ω e v são funções pesos satisfazendo certas condições que serão fixadas adiante.

O caso $v = \omega = 1$ foi estudado por Di Giorgi, Nash e Moser e basicamente as técnicas apresentadas neste capítulo, desenvolvidas por Wheeden e Chanillo em [CW1], são adaptações dos métodos desenvolvidos por esses pesquisadores.

O espaço solução de $Lu = 0$, $H(\Omega)$, a ser apresentado mais detalhadamente na próxima seção, é um espaço de Hilbert que é o completado de $\mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$, sob a forma bilinear

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla\varphi\rangle + \int_\Omega u\varphi v.$$

Em seguida daremos as hipóteses sobre ω e v e enunciaremos os dois principais teoremas demonstrados neste capítulo.

Os pesos v e ω são dobrantes e verificam as seguintes desigualdades de Poincaré e Sobolev

3.2 (Poincaré). *Existe um índice $q = 2\sigma$, $\sigma > 1$, tal que para toda bola B e toda função $f \in \mathrm{Lip}(\bar{B})$,*

$$\left(\frac{1}{v(B)}\int_B |f - \underset{B,v}{\mathrm{av}}\, f|^q v\right)^{1/q} \leq ch\left(\frac{1}{\omega(B)}\int_B |\nabla f|^2\omega\right)^{1/2},$$

onde $\mathrm{av}_{B,v} f = \frac{1}{v(B)}\int_B fv$, h é o raio de B e a constante c é independente de f e B.

3.3 (Sobolev). *Existe um índice $q = 2\sigma$, $\sigma > 1$, tal que para toda bola B e toda função $f \in \mathrm{Lip}_\circ(\mathrm{B})$, (funções lipschitzianas com suporte compacto em B)*

$$\left(\frac{1}{v(B)}\int_B |f|^q v\right)^{1/q} \leq ch\left(\frac{1}{\omega(B)}\int_B |\nabla f|^2\omega\right)^{1/2},$$

onde h é o raio de B e a constante c é independente de f e B.

Como veremos na próxima seção, é possível associar a cada elemento u de $H(\Omega)$ uma função $\tilde{u}$ em $L^2_v(\Omega)$.

Teorema 3.4 (Desigualdade do Valor Médio). *Suponha que as condições 3.1, 3.2 e 3.3 estejam verificadas. Se u é uma solução de $Lu = 0$ pertencendo a $H(B)$ e $\tilde{u}$ é uma função em L^2_v associada a u então existem constantes c e d tais que para $1/2 \leq \alpha < 1$ e $0 < p < \infty$*

$$(\underset{\alpha B}{\sup\mathrm{ess}}\, |\tilde{u}|)^p \leq C\mu^{\frac{2\sigma}{\sigma-1}}\frac{1}{v(B)}\int_B |\tilde{u}|^p v,$$

onde $\mu = \left(\frac{v(B)}{\omega(B)}\right)^{1/2}$ e $C \leq \frac{c}{(1-\alpha)^d}$ se $p \geq 2$ ou $C \leq \frac{c^{\log\frac{3}{p}}}{(1-\alpha)^d}$ se $p < 2$.

Teorema 3.5 (Desigualdade de Harnack). *Suponha que as hipóteses 3.1, 3.2 e 3.3 estejam verificadas. Se u é uma solução não negativa de $Lu = 0$ pertencendo a $H(2B)$ e $\tilde{u}$ é uma função em L^2_v associada a u então*

$$\underset{B}{\sup\mathrm{ess}}\, \tilde{u} \leq e^{c\mu}\underset{B}{\inf\mathrm{ess}}\, \tilde{u},$$

c independente de u e B.

Pelo Lema 2.17 as desigualdades 3.2 e 3.3 são verdadeiras quando $\omega \in \mathbf{RD}$, $v \in A_2$ e a condição

$$\left(\frac{|B|}{|B_\circ|}\right)^{1/n}\left(\frac{\omega(B)}{\omega(B_\circ)}\right)^{1/q} \leq c\left(\frac{v(B)}{v(B_\circ)}\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

estiver verificada para algum $q > 2$ e para toda bola $B \subset 3B_\circ$ com c independente de B e $B_\circ$.

É fácil ver que 3.6 verifica-se para algum $q > 2$ quando $v = \omega \in A_2$ e que se $v = \omega = 1$, $q = \frac{2n}{n-2}$, que é o caso clássico estudado por Di Giorgi e Nash.

3.2 Preliminares sobre $H(\Omega)$.

Para cada $u \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$, Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, defina

$$\|u\|^2 = \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle + \int_\Omega u^2 v. \tag{3.7}$$

Por 3.1, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 w + \int_\Omega u^2 v \leq \|u\|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 v + \int_\Omega u^2 v. \tag{3.8}$$

Em particular, $\|u\|$ é finita visto que o lado direito de 3.8 é no máximo $(\|\nabla u\|_\infty^2 + \|u\|_\infty^2)v(\Omega)$.

Para cada $u, \varphi \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$, seja

$$a(u,\varphi) = \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla \varphi\rangle + \int_\Omega u\varphi v. \tag{3.9}$$

Usando a primeira desigualdade de 3.8 e que $|\langle Ax, y\rangle| \leq \langle Ax, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle Ay, y\rangle^{\frac{1}{2}}$ (A é simétrico), pode-se mostrar que $a(u,\varphi)$ é um produto interno em $\mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$ e, portanto, $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$.

Seja $H = H(\Omega)$ o completado de $\mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$ com respeito à norma $\|\cdot\|$, isto é, H é formado pelas seqüências da forma $u = \{u_k\}$, $u_k \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$, que são seqüências de Cauchy com respeito a $\|\cdot\|$. Podemos considerar que $\mathrm{Lip}(\bar{\Omega}) \subset H$ tomando-se as seqüências da forma $\{u_k\}$, com $u_k = u_o \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$. Se $u = \{u_k\}$ e $\varphi = \{\varphi_k\}$ pertencem a H, $a(u_k, \varphi_k)$ é convergente, e podemos definir

$$a(u,\varphi) = \lim_{k\to\infty} a(u_k, \varphi_k) \qquad e \qquad \|u\| = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|.$$

Desse modo, H se torna um espaço com produto interno $a(u,\varphi)$ e norma $\|u\| = a(u,u)^{1/2}$.

Notemos pela primeira desigualdade de 3.8 que se $u \in H$, $u = \{u_k\}$, então $\{\nabla u_k\}$ e $\{u_k\}$ são seqüências de Cauchy em $L^2_w(\Omega)$ e $L^2_v(\Omega)$, respectivamente. Conseqüentemente, existem $\tilde{u} \in L^2_v(\Omega)$ e um vetor $\vec{\alpha} \in L^2_w(\Omega)$ tais que $u_k \longrightarrow \tilde{u}$ em $L^2_v(\Omega)$ e $\nabla u_k \longrightarrow \vec{\alpha}$ em $L^2_w(\Omega)$. Segue da mesma desigualdade que seqüências de Cauchy equivalentes dão origem aos mesmos $\tilde{u}$ e $\vec{\alpha}$. Referiremos a $\tilde{u}$ como a função em $L^2_v(\Omega)$ associada a u.

Se omitirmos o termo $\int_\Omega u\varphi v$ em 3.9 e denotarmos

$$a_o(u,\varphi) = \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla\varphi\rangle, \qquad u, \varphi \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega}),$$

então o análogo de 3.8 é

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 w \leq a_o(u,u) \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 v.$$

Se $u = \{u_k\}$ e $\varphi = \{\varphi_k\}$, $u, \varphi \in H$, seja

$$a_\circ(u,\varphi) = \lim_{k\to\infty} a_\circ(u_k,\varphi_k).$$

Então

$$|a_\circ(u,\varphi)| \leq a_\circ(u,u)^{1/2} a_\circ(\varphi,\varphi)^{1/2} \qquad \text{e} \qquad a(u,\varphi) = a_\circ(u,\varphi) + \int_\Omega \tilde{u}\tilde{\varphi}v.$$

Note que $a_\circ(u,u)^{1/2}$ não é uma norma em $\mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$ já que $a_\circ(u,u) = 0$ não implica em $u = 0$. Entretanto, é uma norma em $\mathrm{Lip}_\circ(\Omega)$, e denotaremos o completado de $\mathrm{Lip}_\circ(\Omega)$ com relação a essa norma por $H_\circ(\Omega)$. Assim, $a_\circ(u,u)^{1/2}$ é uma norma em $H_\circ$, e usaremos a notação $\|u\|_\circ = a_\circ(u,u)^{1/2}$ para $u \in H_\circ$. Qualquer função em $\mathrm{Lip}_\circ(\Omega)$ pode ser estendida a uma função em $\mathrm{Lip}_\circ(\mathbb{R}^n)$ definindo $u = 0$ fora de Ω. Segue da desigualdade de Sobolev 3.3 que $H_\circ \subset H$ e, em particular, que é possível associar com cada $u \in H_\circ$ um par $(\tilde{u}, \vec{\alpha})$ tal que se $u = \{u_k\}$, então $u_k \longrightarrow \tilde{u}$ em L^2_v (mesmo em L^q_v) e $\nabla u_k \longrightarrow \vec{\alpha}$ em L^2_ω.

Seja $u \in H$. Dizemos que $u \geq 0$ se $u_k \geq 0$ para todo k para alguma seqüência $\{u_k\}$ que represente u. Note que se $\tilde{u}$ é a função em L^2_v associada a u, então $\tilde{u} \geq 0$ q.s. se $u \geq 0$. Dizemos que um elemento $u \in H$ é uma solução de $Lu = 0$ se

$$a_\circ(u,\varphi) = 0 \qquad \text{para qualquer} \quad \varphi \in H_\circ, \varphi \geq 0.$$

Similarmente, u é chamada uma subsolução de $Lu = 0$ se

$$a_\circ(u,\varphi) \leq 0 \qquad \text{para qualquer} \quad \varphi \in H_\circ, \varphi \geq 0.$$

Notemos que, de fato, existem soluções de $Lu = 0$. Por exemplo, dada $\psi \in H$, o problema de Dirichlet $Lu = 0$ com $u = \psi$ em ∂B tem uma solução única no sentido que existe uma única $u \in H$ tal que $u - \psi \in H_\circ$ e $a(u,\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in H_\circ$. Isto pode ser provado como de costume usando o seguinte fato de espaços hilbertianos. Para cada $\psi \in H$ fixa, $-a_\circ(\psi,\cdot)$ é um funcional linear em $H_\circ$. A forma bilinear $a_\circ(\cdot,\cdot)$ é limitada em $H_\circ$ e é também coerciva (por coerciva queremos dizer que $a_\circ(\varphi,\varphi) \geq \|\varphi\|^2_\circ$ em $H_\circ$; na verdade, vale a igualdade). Assim, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única $F \in H_\circ$ tal que $a_\circ(F,\varphi) = -a_\circ(\psi,\varphi)$ para toda $\varphi \in H_\circ$. Para obter o resultado, simplesmente tomamos $u = F \star \psi$.

3.3 Desigualdade de Harnack

Lema 3.10. *Suponha que as hipóteses 3.1, 3.2 e 3.3 sejam válidas e u é uma subsolução não negativa de $Lu = 0$ pertencendo a $H(B)$. Seja $\tilde{u}$ a função em L^2_v associada a u e $\mu = \mu(B) = \left[\frac{v(B)}{\omega(B)}\right]^{1/2}$. Neste caso, existem constantes c e d dependendo apenas dos parâmetros em 3.2 e 3.3 tais que para $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ e $p \geq 2$,*

$$(\sup_{\alpha B} \operatorname{ess} \tilde{u})^p \leq \frac{c}{(1-\alpha)^d} \mu^{\frac{2\sigma}{\sigma-1}} \frac{1}{v(B)} \int_B \tilde{u}^p v.$$

Prova: Para $\beta \geq 1$ e $0 < M < \infty$, defina $H_M(t) = t^\beta$ para $t \in [0, M]$ e $H_M(t) = M^\beta + \beta M^{\beta-1}(t - M)$ para $t > M$. Note que $H'_M(t)$ é limitado para cada M fixo. Seja $u = \{u_k\}$, $u_k \in \mathrm{Lip}(\bar{\mathrm{B}})$, $u_k \geq 0$, $\|u_k - u_j\| \to 0$ e para M fixo defina

$$\varphi_k(x) = \eta(x)^2 \int_0^{u_k(x)} H'_M(t)^2 dt,$$

sendo que η será uma função em $C_\circ^\infty(B)$ escolhida convenientemente. Claramente, $\varphi_k \in \mathrm{Lip}_\circ(\mathrm{B})$ e $\varphi_k \geq 0$. Em seguida mostraremos que a seqüência $\|\varphi\|_\circ$ é limitada. De fato, como

$$\nabla\varphi_k = \eta^2 H'_M(u_k)^2 \nabla u_k + 2\eta\nabla\eta \int_0^{u_k(x)} H'_M(t)^2 dt, \tag{3.11}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_k\|_\circ^2 &= \int \langle A\nabla\varphi_k, \nabla\varphi_k\rangle = \int \eta^2 H'_M(u_k)^2 \langle A\nabla u_k, \nabla u_k\rangle \\
&+ 4\int \eta^3 H'_M(u_k)^2 \left(\int_0^{u_k} H'_M(t)^2 dt\right) \langle A\nabla u_k, \nabla\eta\rangle \\
&+ 4\int \eta^2 \left(\int_0^{u_k} H'_M(t)^2 dt)^2\right) \langle A\nabla\eta, \nabla\eta\rangle = I + II + III.
\end{aligned}$$

Logo, para demonstrarmos que a seqüência $\|u\|_\circ$ é limitada basta majorarmos I, II e III. Claramente

$$0 \leq I \leq \|\eta\|_\infty^2 \|H'_M\|_\infty^2 \|u_k\|^2,$$

que é limitado em k já que $\{u_k\}$ é uma seqüência de Cauchy em H. Além disso, como $\int_0^{u_k} H'_M \leq \|H'_M\|_\infty^2 u_k$,

$$\begin{aligned}
|II| &\leq \|\eta\|_\infty^3 \|H'_M\|_\infty^4 \int u_k \langle A\nabla u_k, \nabla u_k\rangle^{1/2} \langle A\nabla\eta, \nabla\eta\rangle^{1/2} \\
&\leq c_{M,\eta} \int \langle A\nabla u_k, \nabla u_k\rangle^{1/2} u_k |\nabla\eta| v^{1/2},
\end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade segue da condição 3.1. Pela desigualdade de Schwarz,

$$|II| \leq c_{M,\eta} \left(\int \langle A\nabla u_k, \nabla u_k\rangle\right)^{1/2} \left(\int u_k^2 v\right)^{1/2} \leq c_{M,\eta}\|u_k\|^2,$$

que é limitado em k. Finalmente,

$$0 \leq III \leq 4\|\eta\|_\infty^2 \|H'_M\|^4 \int u_k^2 |\nabla\eta|^2 v \leq c_{M,\eta} \int u_k^2 v \leq c_{M,\eta}\|u_k\|^2.$$

As majorações I, II e III demonstram que a seqüência $\{\|\varphi_k\|_\circ\}$ é limitada e portanto podemos escolher uma subseqüência $\{\varphi_{k_j}\}$ fracamente convergente em $H_\circ$. Como $u \in H$ e $|a_\circ(u,\varphi)| \leq a_\circ(u,u)^{1/2} a_\circ(\varphi,\varphi)^{1/2} \leq \|u\| \|\varphi\|_\circ$, segue que $a_\circ(u,\cdot)$ é um funcional linear contínuo em $H_\circ$. Portanto,

$$\begin{aligned} a_\circ(u,\varphi) &= \lim a_\circ(u,\varphi_{k_j}) \\ &= \lim[a_\circ(u_{k_j},\varphi_{k_j}) + a_\circ(u-u_{k_j},\varphi_{k_j})] \\ &= \lim a_\circ(u_{k_j},\varphi_{k_j}), \end{aligned}$$

já que

$$|a_\circ(u-u_{k_j},\varphi_{k_j})| \leq \|u-u_{k_j}\| \|\varphi_{k_j}\|_\circ \leq c\|u-u_{k_j}\| \to 0.$$

Como u é subsolução, $a_\circ(u,\varphi) \leq 0$, e momentaneamente distinguiremos os casos $\lim a_\circ(u_{k_j},\varphi_{k_j}) = 0$ e $\lim a_\circ(u_{k_j},\varphi_{k_j}) < 0$. No primeiro caso, $a_\circ(u_{k_j},\varphi_{k_j}) = \delta_{k_j} \to 0$. Para simplificarmos a notação, não usaremos os subescritos k_j, isto é, escreveremos $u_{k_j} = u$, etc. De 3.11 e da fórmula

$$\int \langle A\nabla u, \nabla\varphi\rangle = a_\circ(u,\varphi) = \delta \tag{3.12}$$

obtemos

$$\int \left\langle A\nabla u, \eta^2 H_M'(u)^2 \nabla u\right\rangle + \int \left\langle A\nabla u, 2\eta\nabla\eta \int_0^u H_M'(t)^2 dt\right\rangle = \delta. \tag{3.13}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\int \left\langle AH_M'(u)\nabla u, H_M'(u)\nabla u\right\rangle \eta^2 \\ &\leq 2\int \left|\left\langle AH_M'(u)\eta\nabla u, \frac{\nabla\eta}{H_M'(u)} \int_0^u H_M'(t)^2 dt\right\rangle\right| + |\delta|, \end{aligned} \tag{3.14}$$

já que o lado esquerdo de 3.14 é não negativo. No caso $\lim a_\circ(u_{k_j},\varphi_{k_j}) < 0$, temos que $a_\circ(u_{k_j},\varphi_{k_j}) \leq 0$ para k_j suficientemente grande e assim teremos desigualdades análogas às 3.12 e 3.13 com "$= \delta$" substituídos por "≤ 0" para k_j suficientemente grande. Neste caso, 3.14 vale mesmo sem o termo "$+|\delta|$". Logo, 3.14 vale em qualquer um dos casos com $u = u_{k_j}$, para k_j grande e $|\delta| = |\delta_{k_j}| \to 0$.

Aplicando a desigualdade

$$|\langle Ax,y\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}\langle Ax,x\rangle + \frac{1}{2\varepsilon}\langle Ay,y\rangle \tag{3.15}$$

para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ no lado direito da desigualdade 3.14 e reagrupando os termos temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int \left\langle AH_M'(u)\nabla u, H_M'(u)\nabla u\right\rangle \eta^2 \\ \leq\ & 2\int \langle A\nabla\eta,\nabla\eta\rangle \left[\frac{1}{H_M'(u)}\int_0^u H_M'(t)^2 dt\right]^2 + |\delta| \\ \leq\ & 2\int \langle A\nabla\eta,\nabla\eta\rangle \left[uH_M'(u)\right]^2 + |\delta|, \end{aligned} \tag{3.16}$$

uma vez que $H'_M(t)$ é uma função crescente em t. Logo, notando que $H'_M(u)\nabla u = \nabla H_M(u)$ e aplicando 3.1, temos

$$\int |\nabla H_M(u)|^2 \omega\eta^2 \leq 4 \int |\nabla \eta|^2 v \left[uH'_M(u)\right]^2 + 2|\delta|.$$

Dados s e t satisfazendo $\frac{1}{2} \leq s < t < 1$, escolha a função η de tal modo que $\eta = 1$ em sB, $\eta = 0$ fora de tB e $|\nabla \eta| \leq \frac{c}{th - sh}$, onde h é o raio da bola B. Então

$$\int |\nabla H_M(u)|^2 \omega \leq c \frac{1}{(t-s)^2 h^2} \int_{tB} \left[uH'_M(u)\right]^2 v + 2|\delta|. \tag{3.17}$$

Combinando 3.17 com a desigualdade de Poincaré 3.2 aplicada para sB e $H_M(u)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{v(sB)} \int_{sB} |H_M(u) - \operatorname*{av}_{sB,v} H_M(u)|^q v\right)^{1/q} \\ \leq\ & c\frac{s}{t-s} \left[\frac{v(tB)}{\omega(sB)}\right]^{1/2} \left(\frac{1}{v(tB)} \int_{tB} \left[uH'_M(u)\right]^2 v\right)^{1/2} + \frac{csh}{\omega(sB)^{1/2}} |\delta|^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2} \leq s < t \leq 1$ e v e ω são dobrantes,

$$\left[\frac{v(tB)}{\omega(sB)}\right]^{1/2} \simeq \left[\frac{v(B)}{\omega(B)}\right]^{1/2} = \mu,$$

e

$$\operatorname*{av}_{sB,v} H_M(u) \leq c \operatorname*{av}_{tB,v} H_M(u) \leq c \left(\frac{1}{v(tB)} \int_{tB} \left[uH'_M(u)\right]^2 v\right)^{1/2},$$

sendo que na última desigualdade usamos que $H_M(u) \leq uH'_M(u)$. Portanto,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{v(sB)} \int_{sB} H_M(u)^q v\right)^{1/q} \\ \leq\ & c\left(\frac{s}{t-s}\mu + 1\right) \left(\frac{1}{v(tB)} \int_{tB} \left[uH'_M(u)\right]^2 v\right)^{1/2} + \frac{csh}{\omega(sB)^{1/2}} |\delta|^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Lembre que $u = u_{k_j} \to \tilde{u}$ in L^2_v e $\delta = \delta_{k_j} \to 0$. Considerando uma nova subseqüencia, podemos supor $u_{k_j} \to \tilde{u}$ quase sempre em Ω. Em seguida, fazemos $j \to \infty$ em 3.18. Para o lado esquerdo de 3.18, usamos o Lema de Fatou e o fato que H_M é uma função contínua e para o lado direito utilizamos

$$\left|uH'_M(u) - \tilde{u}H'_M(\tilde{u})\right|^2 \leq 2\left(|u - \tilde{u}|^2 \left|H'_M(u)\right| t^2 + |\tilde{u}|^2 \left|H'_M(u) - H'_M(\tilde{u})\right|^2\right)$$

e mais a continuidade e limitação de H_M'. Logo,

$$\left(\frac{1}{v(sB)}\int_{sB} H_M(\tilde{u})^q v\right)^{1/q} \leq c\left(\frac{s}{t-s}\mu+1\right)\left(\frac{1}{v(tB)}\int_{tB}[\tilde{u}H_M'(\tilde{u})]^2 v\right)^{1/2}.$$

Note que $\frac{s}{t-s}\mu + 1 \leq 2\frac{s}{t-s}\mu$ uma vez que $\frac{s}{t-s} \geq 1$ e $\mu \geq 1$. Portanto, devido aos fatos $\tilde{u}H_M'(\tilde{u}) \leq \tilde{u}\beta\tilde{u}^{\beta-1} = \beta\tilde{u}^\beta$ e $H_M(\tilde{u}) \geq \tilde{u}^\beta\chi_{\{\tilde{u}\leq M\}}$, fazendo $M \to \infty$ obtemos

$$\left(\frac{1}{v(sB)}\int_{sB}\tilde{u}^{\beta q}v\right)^{1/q} \leq c\beta\left(\frac{s}{t-s}\mu\right)\left(\frac{1}{v(tB)}\int_{tB}\tilde{u}^{2\beta}v\right)^{1/2}. \tag{3.19}$$

Elevando ambos os membros de 3.19 à potência $1/\beta$ e escrevendo $r = 2\beta$ e $q = 2\sigma$, segue que

$$\left(\frac{1}{v(sB)}\int_{sB}\tilde{u}^{\sigma r}v\right)^{1/\sigma r} \leq \left(c\mu r\frac{s}{t-s}\right)^{2/r}\left(\frac{1}{v(tB)}\int_{tB}\tilde{u}^r v\right)^{1/r}, \tag{3.20}$$

para $r \geq 2$.

Agora, inicie com α e p fixos, $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, $p \geq 2$ e itere a desigualdade acima para s e t assumindo os valores sucessivos na seqüência $s_j = \alpha + \frac{1-\alpha}{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots$ e r e σr na seqüência $\{\sigma^j p\}$. Obtemos

$$\left(\frac{1}{v(s_{j+1}B)}\int_{s_{j+1}B}\tilde{u}^{\sigma^{j+1}p}v\right)^{\frac{1}{\sigma^{j+1}p}} \leq \left(c\mu\sigma^j p\frac{s_{j+1}}{s_j - s_{j+1}}\right)^{\frac{2}{\sigma^j p}}\left(\frac{1}{v(s_jB)}\int_{s_jB}\tilde{u}^{\sigma^j p}v\right)^{\frac{1}{\sigma^j p}}.$$

Como $\alpha B \subset s_{j+1}B$ e $v(s_{j+1}B) \simeq v(\alpha B)$ temos

$$\left(\frac{1}{v(\alpha B)}\int_{\alpha B}\tilde{u}^{\sigma^{j+1}p}v\right)^{\frac{1}{\sigma^{j+1}p}} \leq \prod_{k=0}^{j}\left(c\mu\sigma^k p\frac{s_{k+1}}{s_k - s_{k+1}}\right)^{\frac{2}{\sigma^k p}}\left(\frac{1}{v(B)}\int_B \tilde{u}^p v\right)^{\frac{1}{p}}.$$

e, portanto,

$$\sup_{\alpha B}\operatorname{ess}\tilde{u} \leq \prod_{k=0}^{\infty}\left(c\mu\sigma^k p\frac{s_{k+1}}{s_k - s_{k+1}}\right)^{\frac{2}{\sigma^k p}}\left(\frac{1}{v(B)}\int_B \tilde{u}^p v\right)^{\frac{1}{p}}.$$

É fácil ver que

$$\frac{s_{k+1}}{s_k - s_{k+1}} \leq c\frac{(k+2)^2}{1-\alpha}$$

e assim sendo

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(c\mu\sigma^k p\frac{s_{k+1}}{s_k - s_{k+1}}\right)^{\frac{2}{\sigma^k p}} \le \left(\frac{cp\mu}{1-\alpha}\right)^{\frac{2}{p}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^j}} \prod_{k=0}^{\infty}\left(\sigma^k(k+2)^2\right)^{\frac{2}{\sigma^k p}}$$

$$= \left(\frac{cp\mu}{1-\alpha}\right)^{\frac{2}{p}\frac{\sigma}{\sigma-1}} \prod_{k=0}^{\infty}\left(\sigma^k(k+2)^2\right)^{\frac{2}{\sigma^k p}}.$$

Como

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(\sigma^k(k+2)^2\right)^{\frac{2}{\sigma^k p}} = \prod_{k=0}^{\infty}\exp\left(\frac{2}{\sigma^k p}[k\log\sigma + 2\log(k+2)]\right)$$

$$= \exp\left(\frac{2}{p}\left[\log\sigma\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{\sigma^k} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\log(k+2)}{\sigma^k}\right]\right) = \exp\left(\frac{2}{p}c\right).$$

então

$$\sup_{\alpha B}\operatorname{ess}\tilde{u} \le \left(\frac{cp\mu}{1-\alpha}\right)^{\frac{2}{p}\frac{\sigma}{\sigma-1}}\left(\int_B \tilde{u}^p v\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lema 3.21. *Usando as mesmas notações do Lema 3.10 exceto que u agora é uma solução não negativa e $-\infty < p < +\infty$, temos*

$$\sup_{\alpha B}\operatorname{ess}(\tilde{u}^p) \le \frac{c}{(1-\alpha)^d}(1+\mu|p|)^{\frac{2\sigma}{\sigma-1}}\frac{1}{v(B)}\int_B \tilde{u}^p v.$$

Prova: Pelo Lema 3.10 é suficiente considerar o caso $-\infty < p < 2$.

Seja $u = \{u_k\}$, $u_k \in \mathrm{Lip}(\bar{\mathrm{B}})$, $u_k \ge 0$, $\|u_k - u_j\| \to 0$. Podemos assumir que $u_k(x) \ge \varepsilon_\circ$ para algum $\varepsilon_\circ > 0$ e todo k pois poderíamos considerar $\{u_k(x) + \varepsilon_\circ\}$. Com $\eta(x)$ como no Lema 3.10 e $\eta(x) \ge 0$, defina $\varphi_k = \eta^2 u_k^\beta$, $-\infty < \beta < +\infty$. Note que u_k^β é limitada, possui derivadas limitadas e que $\varphi_k \ge 0$, $\varphi_k \in \mathrm{Lip}_\circ(\mathrm{B})$.

Também, se fizermos a restrição $\beta \le 1$, pode-se mostrar que $\|\varphi_k\|_\circ$ é limitada em k. A verificação desse fato é similar à parte análoga do Lema 3.10 e, por isso, deixaremos de apresentar os detalhes. Entretanto, apresentaremos alguns fatos úteis. Primeiro, $u_k^{2(\beta-1)}$ é limitada em x e em k por $\varepsilon_\circ^{2(2\beta-1)}$. Também, $2(2\beta-1) \le 2$ e, portanto, usando a desigualdade de Hölder ou o fato de que $u_k \ge \varepsilon_\circ$, dependendo do sinal de $2\beta - 1$, obtemos

$$\int_B u_k^{2(\beta-1)}v \le c_{v,\beta}\left[\left(\int u_k^2 v\right)^{2\beta-1} + \varepsilon_\circ^{2(2\beta-1)}\right],$$

a qual é limitada em k. Similarmente, como $2\beta \le 2$,

$$\int_B u_k^{2\beta}v \le c_{v,\beta}\left[\left(\int u_k^2 v\right)^{\beta} + \varepsilon_\circ^{2\beta}\right].$$

Como $\|\varphi_k\|_\circ$ é limitada, podemos tomar uma subseqüência $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ em $H_\circ$ e obter como antes $a_\circ(u_{k_j}, \varphi_{k_j}) \longrightarrow a_\circ(u, \varphi) = 0$. Assim,

$$\int \left\langle A\nabla u_{k_j}, \nabla\varphi_{k_j} \right\rangle = \delta_{k_j} \longrightarrow 0.$$

Por simplicidade, omitiremos os subescritos escrevendo $\delta = \delta_{k_j}$, $u = u_{k_j}$ e $\varphi = \varphi_{k_j}$.

A partir das fórmulas

$$\nabla\varphi = \eta^2 \beta u^{\beta-1} \nabla u + 2\eta \nabla\eta u^\beta$$

e

$$\nabla\left(u^{\frac{\beta+1}{2}}\right) = \frac{\beta+1}{2} u^{\frac{\beta-1}{2}} \nabla u,$$

obtemos para $\beta \neq -1$

$$\frac{\beta}{\beta+1} \int \left\langle A\nabla\left(u^{\frac{\beta+1}{2}}\right), \nabla\left(u^{\frac{\beta+1}{2}}\right)\right\rangle \eta^2$$

$$= -\int \left\langle A\nabla\left(u^{\frac{\beta+1}{2}}\right), \nabla\eta\right\rangle u^{\frac{\beta+1}{2}}\eta + (\beta-1)\delta.$$

Tomando valores absolutos resulta em

$$\frac{|\beta|}{|\beta+1|} \int \left\langle A\nabla\left(u^{\frac{\beta+1}{2}}\right), \nabla\left(u^{\frac{\beta+1}{2}}\right)\right\rangle \eta^2$$

$$\leq \int \left|\left\langle A\nabla\left(u^{\frac{\beta+1}{2}}\right), \nabla\eta\right\rangle\right| u^{\frac{\beta+1}{2}}\eta + c_\beta|\delta|.$$

Aplicando 3.15 com $\varepsilon = \beta/|\beta+1|$, $-\infty < \beta \leq 1$, $\beta \neq 0, -1$, obtemos

$$\int \left\langle A\nabla\left(u^{\frac{\beta+1}{2}}\right), \nabla\left(u^{\frac{\beta+1}{2}}\right)\right\rangle \eta^2$$

$$\leq \frac{|\beta+1|^2}{|\beta|^2} \int |\langle A\nabla\eta, \nabla\eta\rangle| \, u^{\beta+1}\eta + c_\beta|\delta|.$$

A desigualdade acima é análoga a 3.16. Argumentando como anteriormente e usando 3.1, 3.2 e 3.3 vemos que

$$\left(\frac{1}{v(B)} \int_{sB} u^{\frac{\beta+1}{2}q} v\right)^{1/q}$$

$$\leq c\left(\frac{|\beta+1|}{|\beta|} \frac{s}{t-s}\mu + 1\right)\left(\frac{1}{v(tB)} \int_{tB} u^{\beta+1} v\right)^{1/2} + c_\beta \frac{sh}{2v(sB)^{1/2}} \delta^{1/2}.$$

Lembrando que $u = u_{k_j}$ e $\delta = \delta_{k_j}$, tomamos o limite em ambos os lados da desigualdade acima quando $j \to +\infty$. Com respeito à expressão do lado direito, note que se $\beta + 1 < 0$ então $u_{k_j}^{\beta+1}$ é uniformemente limitada por $\varepsilon_0^{\beta+1}$ e converge pontualmente para $\tilde{u}^{\beta+1}$, enquanto que se $0 < \beta + 1 \leq 2$, u_{k_j} converge para $\tilde{u}$ em $L_v^{\beta+1}$ pois isso já acontece em L_v^2. Assim,

$$\left(\frac{1}{v(sB)}\int_{sB}\tilde{u}^{\frac{\beta+1}{2}q}v\right)^{1/q}$$

$$\leq c\left(\frac{|\beta+1|}{|\beta|}\frac{s}{t-s}\mu+1\right)\left(\frac{1}{v(tB)}\int_{tB}\tilde{u}^{\beta+1}v\right)^{1/2}.$$

Colocando $\beta + 1 = r$ e $q = 2\sigma$, vemos que para qualquer r com $-\infty < r \leq 2$, $r \neq 0, -1$,

$$\left(\frac{1}{v(sB)}\int_{sB}\tilde{u}^{\sigma r}v\right)^{1/\sigma|r|} \tag{3.22}$$

$$\leq c^{2/|r|}\left(\frac{|r|}{|r-1|}\frac{s}{t-s}\mu+1\right)^{2/|r|}\left(\frac{1}{v(tB)}\int_{tB}\tilde{u}^{r}v\right)^{1/|r|}.$$

Essa última desigualdade é análoga a 3.20 e tudo o que resta agora é um argumento de iteração. O valor inicial de r é qualquer p fixo com $-\infty < p \leq 2$, $p \neq 0, -1$. Se $p < 0$, os valores $r = \sigma^j p$ decrescem a $-\infty$ e 3.22 é válida para todo r. O valor limite do lado esquerdo é $\inf \mathrm{ess}_{\alpha B}(1/\tilde{u})$. Definindo $a_j = s_j/(s_{j+1} - s_j)$ como anteriormente, $a_j \geq 1$, o produto infinito das constantes é

$$\prod_{j=0}^{\infty}\left[c\left(\frac{\sigma^j|p|}{|\sigma^j p-1|}a_j\mu+1\right)\right]^{2/\sigma^j|p|} \tag{3.23}$$

$$\leq \prod_{j=0}^{\infty}\left[c\left(\mu|p|\sigma^j a_j+1\right)\right]^{2/\sigma^j|p|}$$

pois $|\sigma^j p - 1| \geq 1$ neste caso,

$$\leq \prod_{j=0}^{\infty}\left[c\left(\mu|p|+1\right)\sigma^j a_j\right]^{2/\sigma^j|p|}$$

$$\leq \left[\frac{c}{(1-\alpha)^d}(1+\mu|p|)^{\frac{2\sigma}{\sigma-2}}\right]^{1/|p|}$$

por um simples cálculo e o lema segue no caso $p < 0$.

Se $0 < p < 2$, $p \neq -1$, os valores $r = \sigma^j p$ tendem a $+\infty$ quando $j \to +\infty$ e usamos 3.22 no caso em que $r < 2$, $r \neq 1$ e 3.20 quando $r \geq 2$.

Ao computar o produto infinito das constantes, podemos assumir para as constantes correspondentes a $r < 2$ que o termo $|r-1| = |\sigma^j p-1|$ no denominador de 3.22 é limitado inferiormente por uma constante positiva dependendo somente de σ; isso é claro no caso de j ser tal que $|\sigma^j p - 1| > 1/2$ e para os demais valores de j isso pode ser arranjado variando-se um pouco o valor de σ. Assim, alterando a constante c em 3.22, podemos ignorar no processo de iteração o fator $|r-1|$ no denominador de 3.22. Segue-se que

$$\prod_{j=0}^{\infty} \left[c\left(\mu p \sigma^j a_j + 1\right)\right]^{2/\sigma^j |p|} \leq \left[\frac{c}{(1-\alpha)^d}(1+\mu p)^{\frac{2\sigma}{\sigma-1}}\right]^{1/p}$$

como anteriormente. O resultado no caso $p = 1$ segue por um argumento de limite.

No caso $p = 0$ ($\beta = -1$), o resultado acima não contém nenhuma informação e o próximo lema é um substituto. □

Dizemos que $u \geq \varepsilon$ para um elemento u de H se existir uma seqüência de Cauchy $\{u_k\}$ que represente u tal que $u_k \geq \varepsilon$ para todo k.

Lema 3.24. *Suponha que as hipóteses do Lema 3.21 valem e que $u \geq \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$. Para $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, defina $k = k(\alpha, \tilde{u})$ pela expressão*

$$\log k = \frac{1}{v(\alpha B)} \int_{\alpha B} (\log \tilde{u}) v.$$

Então para $\lambda > 0$,

$$v\left(\left\{x \in \alpha B : \left|\log \frac{\tilde{u}(x)}{k}\right| > \lambda\right\}\right) \leq \frac{c}{1-\alpha} \frac{\mu}{\lambda} v(\alpha B),$$

onde c depende apenas dos parâmetros em 3.2 e 3.3.

Prova: Seja $\eta(x)$ uma função satisfazendo $\eta = 1$ em αB, supp $(\eta) \subset B$ e $|\nabla \eta| \leq \frac{c}{(1-\alpha)h}$, sendo h o raio da bola B. Por hipótese, $u = \{u_k\}$ onde $u_k \geq \varepsilon > 0$. Definindo $\varphi_k = \frac{\eta^2}{u_k}$, temos $\nabla \varphi_k = -\eta^2 u_k^{-2} \nabla u_k + 2\eta u_k^{-1} \nabla \eta$ e então segue, claramente, que a seqüência $\{\|\varphi_k\|_\circ\}$ é limitada. Deste modo, existe uma subseqüência satisfazendo

$$\int \left\langle A \nabla u_{k_j}, \nabla \varphi_{k_j} \right\rangle = \delta_{k_j} \to 0.$$

Logo,

$$\int \left\langle A \frac{\nabla u}{u}, \frac{\nabla u}{u} \right\rangle \eta^2 = 2 \int \left\langle A \frac{\nabla u}{u} \eta, \nabla \eta \right\rangle - \delta,$$

sendo que na igualdade acima os subescritos foram omitidos. Note que o lado esquerdo é não negativo e que $\nabla(\log u) = \nabla u/u$. Logo, tomando os valores absolutos e usando 3.15 com $\varepsilon = 1/2$, obtemos

$$\int \langle A\nabla(\log u); \nabla(\log u)\rangle\, \eta^2 \leq 4 \int \langle A\nabla\eta, \nabla\eta\rangle + 2|\delta|.$$

Por 3.1 e a definição de η,

$$\int_{\alpha B} |\nabla(\log u)|^2 \omega \leq c\frac{c}{(1-\alpha)^2 h^2} \int_B v + 2|\delta|.$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré com q substituído por 2 (que é uma hipótese mais fraca) e o fato que ω é dobrante,

$$\frac{1}{v(\alpha B)} \int_{\alpha B} \left|\log u - \operatorname*{av}_{\alpha B,v}(\log u)\right|^2 v \leq \frac{c}{(1-\alpha)^2}\frac{v(B)}{\omega(B)} + \frac{ch^2}{\omega(B)}|\delta|.$$

Lembre que $u = u_{k_j}$ e $\delta = \delta_{k_j}$. O próximo passo é fazer o limite $j \to \infty$. Como $u_k,\, \tilde{u} \geq \varepsilon > 0$,

$$|\log u_{k_j} - \log \tilde{u}| \leq \frac{|u_{k_j} - \tilde{u}|}{\varepsilon},$$

pelo teorema do valor médio. Logo, $\log u_{k_j} \to \log \tilde{u}$ em L^2_v,

$$\operatorname*{av}_{\alpha B,v}(\log u_{k_j}) = \frac{1}{v(\alpha B)} \int_{\alpha B} (\log u_{k_j}) v \to \log k$$

e

$$\frac{1}{v(\alpha B)} \int_{\alpha B} |\log \tilde{u} - \log k|^2 v \leq \frac{c}{(1-\alpha)^2}\mu^2.$$

Pela desigualdade de Chebyshev, para $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} & v\left(\left\{x \in \alpha B; \left|\log \frac{\tilde{u}(x)}{k}\right| > \lambda\right\}\right) \\ \leq\ & \frac{1}{\lambda}\int_{\alpha B} \left|\log \frac{\tilde{u}}{k}\right| v \leq \frac{1}{\lambda}\left(\int_{\alpha B}\left|\log\frac{\tilde{u}}{k}\right|^2 v\right)^{1/2} v(\alpha B)^{1/2} \\ \leq\ & \frac{1}{\lambda}\frac{c\mu}{1-\alpha} v(\alpha B), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

Lema 3.25 (Bombieri). *Sejam $\mu > 0$, $v(x)$ uma medida dobrante e $f(x)$ uma função não negativa limitada numa bola B. Assuma que existam constantes c e d tais que*

$$\sup_{sB} \mathrm{ess}(f^p) \leq \frac{c}{(t-s)^d} \frac{1}{v(tB)} \int_{tB} f^p v, \tag{3.26}$$

para todo s, t, p tais que $0 < p < 1/\mu$ e $1/2 \leq s < t \leq 1$;

$$v\left(\{x \in B; \log f(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{c\mu}{\lambda} v(B), \tag{3.27}$$

para todo $\lambda > 0$. Então existem constantes C e D tais que para $0 < \alpha < 1$,

$$\sup_{sB} \mathrm{ess}\, f \leq \exp\left(\frac{C}{(1-\alpha)^D}\mu\right).$$

Esse resultado, que é um fato meramente de análise real, é uma forma um pouco mais precisa do resultado análogo de Bombieri [B]. Pode ser provado da mesma forma que o Lema 3 de [M2] e nós não repetiremos os detalhes.

Prova da desiguadade de Harnack: Suponha que 3.1, 3.2 e 3.3 sejam válidas e que $u \in H(2B)$ seja uma solução não negativa de $Lu = 0$. Seja $\tilde{u}$ a função de L^2_v associada a u. Precisamos mostrar que

$$\sup_{B} \mathrm{ess}\, \tilde{u} \leq \exp\left(c\left[\frac{v(B)}{w(B)}\right]^{1/p}\right) \inf_{B} \mathrm{ess}\, \tilde{u},$$

na qual c é independente de u e de B.

Considerando, caso seja necessário, $u + \varepsilon$, isto é, $\{u_k + \varepsilon\}$, podemos assumir $u \geq \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$. Assim, $\tilde{u} \geq \varepsilon > 0$. Sabemos que $\tilde{u}$ é essencialmente limitada superiormente em αB para $0 < \alpha < 2$ (Cf. Lema 3.10).

Nossa intenção é aplicar o Lema de Bombieri (3.25), com as funções $\tilde{u}/k$ e $k/\tilde{u}$, com k definido por

$$\log k = \frac{1}{v\left(\frac{3}{2}B\right)} \int_{\frac{3}{2}B} (\log \tilde{u}) v,$$

com α, B e μ do referido lema substituídos por $2/3$, $\frac{3}{2}B$ e $(v(2B)/\, w(2B))^{1/2}$ ($\simeq (v(B)/w(B))^{1/2}$), respectivamente.

A hipótese 3.27 pode ser verificada aplicando-se o Lema 3.24 a $2B$; observe que como existe um valor absoluto na conclusão do Lema 3.24 e $\log(\tilde{u}/k) = -\log(k/\tilde{u})$, a hipótese 3.27 do Lema 3.25 se verifica tanto para $\tilde{u}/k$ como para $k/\tilde{u}$. A hipótese 3.26 pode ser verificada aplicando-se o Lema 3.21 à função $\tilde{u}/k$. Desse modo, obtemos de 3.25,

$$\sup_{B} \mathrm{ess}\left(\frac{\tilde{u}}{k}\right) \leq \exp(c\mu) \qquad \text{e} \qquad \sup_{B} \mathrm{ess}\left(\frac{k}{\tilde{u}}\right) \leq \exp(c\mu)$$

e o resultado segue ao tomarmos o produto dessas duas estimativas. □

Note que o fator exponencial $\exp(c\mu)$ é essencialmente a melhor constante que pode ser usada, como podemos mostrar com o seguinte exemplo. Para a, $b > 0$ a serem escolhidos convenientemente e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, considere a equação

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a|x|^{1/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b}{4}|x|^{-1/2}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{3.28}$$

A matriz dos coeficientes é dada por

$$A = \begin{pmatrix} a|x|^{1/2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{4}|x|^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Se $\omega(x,y) = a|x|^{1/2}$ e $v(x,y) = \frac{b}{4}|x|^{-1/2}$ então $\omega \leq v$ caso $|x| < b/4a$ e, portanto, nessa região é válida 3.1. Também, como já vimos no Capítulo 1,ω e v estão em $A_2(\mathbb{R}^2)$. É fácil ver que 3.6 vale quando $q = 6$. Logo, as desigualdades de Poincaré e Sobolev valem para $\sigma = 3$. Uma solução de 3.28 é

$$u(x,y) = \exp\left(|x|^{1/2}\right)\cos\left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} y.$$

Note que $u > 0$ na bola $2B$ de centro $(0,0)$ e raio $r = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/2}$. Observe que podemos escolher a suficientemente pequeno e b suficientemente grande de modo que $r < b/4a$. É fácil ver que

$$\min_B u = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad \max_B u = \exp\frac{(\pi/4)^{1/2}}{(a/b)^{1/4}}$$

e, portanto,

$$\frac{\max_B u}{\min_B u} \simeq \exp\left(c\left(\frac{b}{a}\right)^{1/4}\right).$$

Por um simples cálculo,

$$\frac{v(B)}{\omega(B)} = c\frac{b(b/a)^{3/4}}{a(b/a)^{5/4}} = c\left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}$$

e, portanto, o parâmetro μ definido no Teorema 3.4 é $\left(\frac{b}{a}\right)^{1/4}$.

Teorema 3.29. *Suponha que as hipóteses 3.1, 3.2 e 3.3 sejam válidas e u é uma subsolução de $Lu = 0$ pertencendo a $H(B)$. Seja $\tilde{u}$ a função em L^2_v associada a u e seja $\mu = \mu(B) = \left[\frac{v(B)}{\omega(B)}\right]^{1/2}$. Existem constantes c e d dependendo apenas dos parâmetros em 3.2 e 3.3 tais que $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ e $0 < p < \infty$,*

$$(\operatorname*{sup\,ess}_{\alpha B} \tilde{u}^+)^p \leq C\mu^{\frac{2\sigma}{\sigma-1}}\frac{1}{v(B)}\int_B (\tilde{u}^+)^p\, v,$$

onde $C \leq \frac{c}{(1-\alpha)^d}$ se $p \geq 2$ ou $C \leq \frac{c^{\log\frac{3}{p}}}{(1-\alpha)^d}$ se $0 < p < 2$.

Prova: Consideraremos os casos $p \geq 2$ e $0 < p < 2$. Se $p \geq 2$, as seguintes modificações na prova do Lema 3.10 será o suficiente. Seja u_k como antes (agora u_k não é necessariamente positiva) e defina φ_k utilizando u_k^+ no lugar de u_k. Observe que $u_k^+ \in$ Lip(B) e que $\nabla(u_k^+) = (\nabla u_k)\chi_{\{u_k>0\}}$ q.s.. Logo, $\|u_k^+\| \leq \|u_k\|$ e a seqüência $\{\|\varphi_k\|_\circ\}$ é limitada como antes. Chegaremos então a 3.12 com $u = u_k$ e $\varphi = \varphi_k$ definido usando u_k^+. Como $\nabla\varphi_k$ tem suporte no conjunto onde $u_k > 0$, podemos substituir u_k por u_k^+ em 3.11. Agora continue o argumento e chegaremos a 3.18 com $u = u_{k_j}^+$. Como $|u_{k_j}^+ - \tilde{u}^+| \leq |u_{k_j} - \tilde{u}| \to 0$ em L_v^2, o resto da prova segue como antes.

No caso $0 < p < 2$, adaptamos o processo iterativo de Hardy-Littlewood [HL]. Para $0 < p \leq \infty$, defina

$$\mathcal{I}_p(s) = \left[\frac{v(sB)}{\omega(sB)}\right]^{\frac{1}{p}\frac{\sigma}{\sigma-1}} \left(\frac{1}{v(sB)}\int_{sB}(\tilde{u}^+)^p v\right)^{1/p},$$

sendo que $\mathcal{I}_\infty(s)$ é o $\sup\mathrm{ess}_{sB}\,\tilde{u}^+$. Queremos mostrar que $\mathcal{I}_\infty(\alpha) \leq C\mathcal{I}_p(1)$ para $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, $0 < p < 2$ e a constante C definida como no enunciado do lema. Fixe p, $0 < p < 2$. Podemos assumir que $\mathcal{I}_p(1) = 1$. Do caso $p = 2$, se $\frac{1}{2} \leq r < s \leq 1$,

$$\mathcal{I}_\infty(r) \leq \frac{c}{(s-r)^c}\mathcal{I}_2(s) \leq \frac{c}{(s-r)^c}\mathcal{I}_\infty(s)^{\frac{2-p}{2}}\mathcal{I}_p(s)^{\frac{p}{2}}.$$

Segue facilmente da propriedade dobrante que $\mathcal{I}_p(s) \leq c^{1/p}\mathcal{I}_p(1) = c^{1/p}$. Logo,

$$\mathcal{I}_\infty(r) \leq \frac{c}{(s-r)^c}\mathcal{I}_\infty(s)^{\frac{2-p}{2}}$$

e

$$\log\mathcal{I}_\infty(r) \leq \log\frac{c}{(s-r)^c} + \frac{2-p}{2}\log\mathcal{I}_\infty(s),$$

para $\frac{1}{2} \leq r < s \leq 1$. Seja $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ e itere a última desigualdade para r e s sucessivamente na seqüência $s_\circ = \alpha$, $s_j = \alpha + \frac{(1-\alpha)}{c_\circ}\sum_{k=1}^{j} k^{-2}$, onde $c_\circ > \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$. Definindo $\theta = \frac{2-p}{2}$, obtemos para qualquer k,

$$\log\mathcal{I}_\infty(\alpha) \leq \sum_{j=0}^{k}\theta^j\log\frac{c}{(s_{j+1}-s_j)^c} + \theta^{k+1}\log\mathcal{I}_\infty(s_{k+1}). \tag{3.30}$$

Do caso $p = 2$, sabemos que $\tilde{u}^+$ é limitada em cada γB, $\gamma < 1$. Logo, como $c_\circ > \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ e $\mathcal{I}_\infty(s_{k+1})$ é crescente, o fator logarítmico no segundo termo a direita de 3.30 é limitado. Como $0 < \theta < 1$, esse termo tende a zero quando k tende a ∞. Logo,

$$\begin{aligned}\log\mathcal{I}_\infty(\alpha) &\leq \sum_{j=0}^{\infty}\theta^j\left[\log\frac{c}{(1-\alpha)^c} + c\log(j+1)\right]\\ &\leq \frac{c}{1-\theta}\left[\log\frac{c}{(1-\alpha)^c} + \log\frac{c}{1-\theta}\right].\end{aligned}$$

Como $1-\theta = p/2$, o lema está demonstrado. □

Corolário 3.31. *Se no Teorema 3.29 u é uma solução, a mesma conclusão vale com $\tilde{u}^+$ substituído por $|\tilde{u}|$, i.e., para $0 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$,*

$$\sup_{\alpha B} \operatorname{ess} |\tilde{u}|^p \leq C\mu^{\frac{2\sigma}{\sigma-1}} \frac{1}{v(B)} \int_B |\tilde{u}|^p v,$$

sendo C como antes.

Prova: Como u é solução $-u$ também é e, portanto, a conclusão do Teorema 3.29 vale para ambos $\tilde{u}$ e $-\tilde{u}$. Como $|\tilde{u}|^p = \max\{(\tilde{u}^+)^p, ([-\tilde{u}]^+)^p\}$, o corolário está demonstrado. □

3.4 Continuidade das soluções

Nessa seção, faremos a seguinte hipótese adicional

3.32. *Se u é um elemento de $H(B)$ cuja função associada $\tilde{u}$ satisfaz $\tilde{u} \geq 0$ q.s. em B, então $u \geq 0$, isto é, u é o limite em $H(B)$ de uma seqüência $\{u_k\}$ com $u_k \in$ Lip(B) e $u_k \geq 0$ em B.*

Seja $B(x,h)$ a bola com centro x e raio h e defina a oscilação sobre $B(x,h)$ de $\tilde{u}$, quando esta for limitada, por:

$$\operatorname{osc}(x,h) = \operatorname{osc}(x,h;\tilde{u}) = \sup_{B(x,h)} \operatorname{ess}(\tilde{u}) - \inf_{B(x,h)} \operatorname{ess} \tilde{u}$$

e seja

$$\mu(x,h) = \left(\frac{v(B(x,h))}{w(B(x,h))}\right)^{1/2}.$$

Seja u uma solução de $Lu = 0$ num domínio Ω e assuma que $u \in H(\Omega)$. Pelo Corolário 3.31 a função $\tilde{u}$ associada a u é essencialmente limitada em cada bola B tal que $\bar{B} \subset \Omega$. Se B é uma dessas bolas, defina

$$M = \sup_{\frac{1}{2}B} \operatorname{ess} \tilde{u} \qquad \text{e} \qquad m = \inf_{\frac{1}{2}B} \operatorname{ess} \tilde{u}$$

e também,

$$M' = \sup_{B} \operatorname{ess} \tilde{u} \qquad \text{e} \qquad m' = \inf_{B} \operatorname{ess} \tilde{u}.$$

Como $M' - \tilde{u}$ e $\tilde{u} - m'$ são não negativas q.s. em B, segue-se de 3.32 que $M' - u \geq 0$ e $u - m' \geq 0$. Como $M' - u$ e $u - m'$ são soluções em $H(B)$, a desigualdade de Harnack implica em

$$M' - m \leq e^{c\mu(x,h)}(M' - M) \qquad \text{e} \qquad M - m' \leq e^{c\mu(x,h)}(m - m').$$

Somando-se estas duas últimas estimativas resulta em

$$\operatorname{osc}(x,h/2) \leq \frac{e^{c\mu(x,h)}-1}{e^{c\mu(x,h)}+1}\operatorname{osc}(x,h). \tag{3.33}$$

No caso de pesos iguais, isto é, quando $v(x) \leq c\omega(x)$, $\mu(x,h)$ é limitada superiormente. Assim, o fator $(e^{c\mu(x,h)}-1)/(e^{c\mu(x,h)}+1)$ em 3.33 é limitado superiormente por uma constante estritamente menor do que 1 e a continuidade de Hölder de $\tilde{u}$ segue facilmente iterando 3.33. Esse fato foi demonstrado em [FKS]. No próximo caso veremos que $\tilde{u}$ é contínua mesmo no caso de pesos desiguais contanto que esses não sejam "muito" diferentes. Veja também [Tr].

Teorema 3.34. *Suponha que 3.1, 3.2, 3.3 e 3.32 sejam válidas em Ω e que $\mu(x,h) = o\left(\log\log\frac{1}{h}\right)$ uniformemente em Ω, quando h tende a zero. Seja u uma solução de $Lu = 0$ em $H(\Omega)$ e seja $\tilde{u}$ a função em L^2_v associada a u. Então $\operatorname{osc}(x,h;\tilde{u})$ tende a zero quando h tende a zero uniformemente em cada subconjunto compacto de Ω. Em particular, $\tilde{u}$ pode ser redefinida em um subconjunto de Ω de medida zero de modo que a função resultante seja contínua em Ω.*

Prova: Se a distância de x ao complementar de Ω é maior do que h então, por 3.33,

$$\operatorname{osc}(x,h/2) \leq \frac{1-e^{-c\mu(x,h)}}{1+e^{-c\mu(x,h)}}\operatorname{osc}(x,h) \leq (1-e^{-c\mu(x,h)})\operatorname{osc}(x,h). \tag{3.35}$$

Sejam K em subconjunto compacto de Ω e $0<\delta<1$. Tome $h_\circ$ de modo que se $x\in K$ e $0<h\leq h_\circ$, 3.35 seja válida e $c\mu(x,h)\leq \delta\log\log\frac{1}{h}$. Assim, para $x\in K$ e $0<h\leq h_\circ$,

$$\operatorname{osc}(x,h/2) \leq \left[1-\left(\log\frac{1}{h}\right)^{-\delta}\right]\operatorname{osc}(x,h)$$

e iterando, obtemos para $j=1,2,\ldots,$

$$\operatorname{osc}(x,h_\circ/2^{j+1}) \leq \left(\prod_{m=1}^{j}\left[1-(c_\circ m)^{-\delta}\right]\right)\operatorname{osc}(x,h_\circ). \tag{3.36}$$

Ainda,

$$\log\left(\prod_{m=1}^{j}\left[1-(c_\circ m)^{-\delta}\right]\right) \simeq -\sum_{m=1}^{j}\log\left[1-(c_\circ m)^{-\delta}\right] = \sum_{m=1}^{j}(c_\circ m)^{-\delta} = -j^{1-\delta},$$

o qual tende a $-\infty$ quando j tende a $+\infty$. Assim, o lado direito da desigualdade 3.36 tende a 0 quando j tende a $+\infty$ e isto termina a demonstração desse teorema.

□

Notemos que se $h = h_\circ/2^{j+1}$ então $j=\log(h_\circ/h)$ e, portanto, para $x\in K$, $0<h\leq h_\circ$ e $0<\delta<1$,

$$\operatorname{osc}(x,h) \leq \exp\left(-c\left(\log\frac{h_\circ}{h}\right)^{1-\delta}\right)\operatorname{osc}(x,h_\circ).$$

Bibliografia

[B] E. Bombieri, *"Theory of minimal surfaces and a counter-example to the Bernstein conjecture in high dimensions"*, Notas de aulas mimeografadas encontradas no Courant Institute, New York University, (1970).

[C] A.P. Calderon, *"Inequalities for the maximal function relative to a metric"*, Studia Math. 57 (1976), 297-306.

[CF] R.R. Coifman and C. Fefferman, *"Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals"*, Studia Math. 51 (1974), 241-250.

[CW1] S. Chanillo and R. Wheeden, *"Harnack's inequality and mean value inequalities for solutions of degenerate elliptic equations"*, Comm. P.D.E. 11 (10) (1986), 1111-1134.

[CW2] S. Chanillo and R. Wheeden, *"Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for the Peano maximal function"*, Amer. J. Math. 107 (1985), 1191-1226.

[De] E. De Giorgi *"Sulla diffenziabilità e analicità della estremali degli integrali multipli, regolari"*, Mem. Accad. Sci., Torino, 3, (1957), 25-43.

[FKS] E. Fabes, D. Jerison, and R. Serapioni, *"The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations"*, Comm. P. D. E., 7, (1982), 77-116.

[FJK] E. Fabes, D. Jerison and C. Kenig, *"The Wiener test for degenerate elliptic equations,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 32, 3 (1982), 151-182.

[FL1] B. Franchi and E. Lanconelli, *"Holder regularity for a class of linear non uniformily elliptic operators with measurable coefficients"*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (IV) 10 (1983), 523-541.

[FL2] B. Franchi and E. Lanconelli, *"Une metrique associée a une classe d'operateurs elliptiques dégénérés"*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino (1983), 105-114.

[FS] B. Franchi and R. Serapioni, *"Pointwise estimates for a class of strongly degenerate elliptic operators:a geometrical approach"*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (IV) 14 (1987), 527-568.

[FSt] E. Fabes and D. Strock, *"The L^p-integrability of Green's functions and Fundamental solutions for elliptic and parabolic equations"*, Duke Math. J. 51(4) (1984), 997-1016.

[GT] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *"Elliptic Partial Equations of Second Order"*, second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[HL] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *"Some properties of conjugate functions"*, J. Reine Angew. Math., 167, (1932), 405-423.

[J] D. Jerison, *"The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hormander's condition"*, Duke Math. J. 53 (1986), 503-523.

[KS] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *"An introduction to variational inequalities"*, Academic press 1983.

[M1] J. Moser, *"On Harnack's theorem for elliptic differential equations"*, Comm. in Pure and Applied Mathematics, 14 (1961), 577-591.

[M2] J. Moser, *"On pointwise estimate for parabolic differential equations"*, Comm. in Pure and Applied Mathematics, 24 (1971), 727-740.

[M] B. Muckenhoupt, *"Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function"*, Trans. Amer. Math. Soc., 165, (1972), 207-226.

[N] J. Nash *"'Continuity of the solutions of parabolic and elliptic equations"*, Amer. J. Math., 80, (1958), 931-954.

[S] E. Stein, *"Singular Integrals and Differentiability of Functions"*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[SW] E. Sawyer and R. Wheeden, *"Weighted inequalities for fractional integrals in Euclidean and homogeneous spaces"*, Amer. Jour. Math., to appear.

[T] A. Torchinsky, *"Real-Variable Methods in Harmonic Analysis"*, Academic Press Inc., New York, 1986.

[Tr] N. Trudinger, *"On the regularity of generalized solutions of linear non-uniformly elliptic equations"*, Arch. Rat. Mech. Anal., 41, (1971), 51-62.

[WZ] R. Wheeden and A. Zygmund, *"Measure and Integral"*, Marcel Dekker Inc., New York, 1977.

Índice Remissivo

Classe
- A_∞, 13
- A_p, 9

Condição
- de eliticidade, 39
- dobrante reversa, 35
- Hölder reversa, 19

Desigualdade
- de Harnack, 40
- de Poincaré, iv, 34, 40
- de Sobolev, 40
- do valor médio, 40

Espaço
- $H(\Omega)$, 41
- $H_o(\Omega)$, 42
- $\mathrm{Lip}_o(B)$, 40
- $\mathrm{Lip}(\bar{\Omega})$, 26

Função maximal
- fracionária, 25
- de Hardy-Littlewood, 5

Hölder continuidade, 56

Integral fracionária, 25

Lema
- de Besicovitch, 28
- de Bombieri, 52
- de Calderón-Zygmund, 13
- simples de Vitali, 3

Medida dobrante, 5

Operador
- do tipo forte (p, q), 8
- do tipo fraco (p, q), 7
- elítico degenerado, 26
- sublinear, 7

Peso, 5

Processo iterativo de
- Hardy-Littlewood, 54

Teorema de
- Hardy-Littlewood-Sobolev, 26
- interpolação de Marcinkiewicz, 8
- Muckenhoupt, 22

Impresso na Gráfica do

impa

pelo Sistema Xerox /1090