PRIMEIRO "COLLOQUIUM" BRASILEIRO DE MATEMATICA.

Poços de Caldas

Julho - 1957.

ALGEBRA MULTILINEAR E VARIEDADES DIFERENCIAVEIS.

Chaim Samuel Honig.

Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de S.Paulo e Conselho Nacional de Pesquisas.

Redigido por: Leo Huet Amaral
Nelson Onuchic
Institutto Tecnológico de Aeronáutica.

Publicação financiada pelo Conselho Nacional de Pesquisas.

S.Paulo - 1957.

PARTE I

ÁLGEBRA MULTILINEAR
(CÁLCULO TENSORIAL)

Prof. Chaim Samuel Hönig
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras
da Universidade de São Paulo.-
Conselho Nacional de Pesquizas.

Redigido pelos Profs. Nelson Onuchic e
Leo Huet Amaral
do Instituto Tecnológico de Aeronáutica.

PREFACIO.

Êste curso de Geometria Diferencial divide-se em três partes: na primeira parte é exposta a Algebra Multilinear (Cálculo tensorial) que constitue a maquinária algébrica necessária para o desenvolvimento das outras partes. A 2a. parte consiste no estudo das curvas e superfícies no R^3 (Geometria Diferencial Clássica). A 3a. parte aborda o estudo das Variedades Diferenciáveis.

As partes de Algebra Multilinear e Variedades Diferenciáveis foram elaboradas sob a direção do Prof. Chaim Samuel Honig. O Prof. Nelson Onuchic encarregou-se da redação do parágrafo que estuda os Produtos Tensoriais. A maior parte da redação esteve a cargo do Prof. Leo Huet Amaral. Para estas redações os Prof. Onuchic e Amaral aproveitaram trocas de idéias com o Prof. Chaim Samuel Honig e um curso que êste último desenvolveu em 1956 e no 1° semestre de 1957, em seminários no Departamento de Matemática do Instituto Tecnológico da Aeronáutica de São José dos Campos. A parte de Curvas e Superfícies foi desenvolvida a partir de um programa elaborado pelos Profs. Maurício Matos Peixoto e Antonio Rodrigues, sendo posteriormente muito influenciada pelo Prof. Alexandre A. Martins Rodrigues, que contribuiu para uma apresentação das idéias básicas sob forma moderna, tendo e em vista uma apresentação clara dos conceitos fundamentais e posteriores generalizações, para um estudo de Variedades Diferenciáveis e Geometria Diferencial Avançada. A redação desta parte esteve a cargo do Prof. Antonio Rodrigues. Os Prof. Nelson Onuchic, Leo Amaral e Antonio Rodrigues dedicaram-se com entusiasmo à penosa tarefa da redação dos cursos, para os quais contribuiram com valiosas sugestões e não pouparam esforços para que as redações ficassem prontas em tempo.

A Álgebra Multilinear foi apresentada de modo bastante suscinto. O 1° parágrafo(Produtos Tensoriais) não é essencial para o resto do Curso, mas achou-se importante mostrar aos leitores como o Cálculo Tensorial Clássico se torna simples , quando apresentado de modo intrínseco. Tratou-se sempre de mostrar a relação da apresentação moderna da Álgebra Multilinear com o Cálculo Tensorial Clássico. A Álgebra Exterior(2° parágrafo da 1a. parte) poderia ter sido desenvolvida a partir do 1° parágrafo, mas isto tornaria a exposição muito longa e achou-se mais compreensível, num primeiro estudo, uma apresentação direta da Álgebra Exterior por suas propriedades características.

Na parte de Curvas e Superfícies considerou - se importante fazer a distinção entre o espaço afim onde a curva ou a superfície em estudo está imersa e o espaço dos vetores livres associado a êsse espaço afim. Julgou-se também importante um tratamento detalhado, embora elementar da teoria das formas diferenciais lineares e quadráticas. Restringiu-se o curso aos tópicos essenciais e que pudessem, mais tarde, facilitar a compreensão da Geometria Riemanniana.

Na 3a. parte foram abordados os tópicos da teoria das Variedades Diferenciáveis indispensáveis para o estudo dos Grupos de Lie, das Variedades Riemannianas, das Variedades Complexas, das Variedades '' Feuilletés '', da Teoria das Correntes('' Courant de De Rham) etc.

No apêndice procurou-se mostrar ràpidamente como a técnica dos espaços paracompactos permite unificar o tratamento de uma série de problemas globais de Variedades Diferenciáveis

§ 1 - Produtos tensoriais

1 - Módulos.

Definição 1 - Sendo A um anel, chama-se A-módulo um conjunto E tal que

1º E é um grupo abeliano.

2º Existe aplicação $(\alpha, x) \rightarrow \alpha . x$ de A E em E satisfazendo aos axiomas seguintes:

$$\text{I)} \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y ;$$

$$\text{II)} \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$\text{III)} \quad \alpha(\beta x) = (\alpha \beta)x$$

Exemplos - O caso E = A onde para a operação de multiplicação tomamos a multiplicação da estrutura de anel.

Os espaços vetoriais sôbre um corpo K.

Um grupo abeliano qualquer, considerado como Z-módulo; Z sendo o conjunto dos números inteiros.

Em um A-módulo E diz-se que uma família $(a_i)_{i \; I}$ de elementos de E é livre se a relação $\bigcup_{i \in J} \lambda_i a_i$ implica $\lambda_i = 0$, para todo $J \subset I$ finito.

Um A-módulo E é dito unitário se A possue um elemento unidade ε de modo que $\varepsilon x = x$.

Definição 2 - Chama-se base de um módulo unitário E tôda família livre de elementos de E que gere E, isto é, qualquer elemento de E possa ser escrito como combinação linear de um número finito de elementos da família.

Pode-se mostrar, usando o teorema de Zorn, que todo espaço vetorial possue uma base. Isso, porém, não é verdade para um A-módulo qualquer.

No que segue, sempre trabalharemos com espaços vetoriais, geralmento sôbre o corpo $K = R$ dos reais ou $K = C$ dos complexos. Observemos, porém, que quase todos os resultados são válidos para módulos com base e, muitas vêzes, para módulos quaisquer.

Vamos relembrar algumas definições de que faremos uso frequente nos tópicos seguintes.

Sendo E e F espaços vetoriais, uma aplicação f de E em F é dita linear se:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo (x, y) de E;

2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todo $x \in E$ e $\alpha \in K$.

Quando $E = F$ a aplicação linear é dita um endomorfismo.

Sejam $E_1, \ldots, E_n$, F espaços vetoriais. Diz-se que uma aplicação f de $E_1 x \ldots x E_n$ em F é multilinear se, quaisquer que sejam o índice i e os $n-1$ elementos $a_k \in E_k$ $(k \neq i)$ a aplicação parcial

$$x_i \rightarrow f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

é uma aplicação linear de E_i em F.

Quando $n = 2$, a aplicação multilinear é chamada bilinear.

Quando $F = K$ a aplicação multilinear é chamada forma multilinear.

Indicamos por $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ ao conjunto das aplicações multilineares de $E_1 x \ldots x E_n$ em F.

<u>Exemplo</u> - Sejam E, F, G espaços vetoriais e E^*, F^* os duais de E e F. (Entendemos por dual de um espaço vetorial o conjunto de tôdas as formas lineares dêste espaço). Sejam (x'_i), (y'_i), (z_i) $1 \leq i \leq n$, famílias finitas de E^*, F^* e G respectivamente.

A aplicação $(x,y) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} < x, x'_i > < y, y'_i > z_i$

de $E \times F$ em G é bilinear.

Aqui $<x, x'_i>$ significa o resultado de se calcular a aplicação linear x'_i no ponto x. Anàlogamente $< y, y'_i >$.

Proposição 1 - Sejam E, F, N espaços vetoriais sôbre o mesmo corpo K. Então o espaço vetorial $\mathcal{L}(E, F; N)$ é isomorfo ao espaço $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F,N))$ bem como a $\mathcal{L}(F, \mathcal{L}(E,N))$.

Demonstração - Para tôda aplicação bilinear de $E \times F$ em N e todo $x \in E$, $y \to (x,y)$ é uma aplicação linear de F em N que indicaremos por ψ_x. A aplicação $x \to \psi_x$ é linear de E em $\mathcal{L}(F,N)$. Reciprocamente, para tôda aplicação linear $x \to f_x$ de E em $\mathcal{L}(F,N)$, a aplicação $(x,y) \to f_x(y)$ é bilinear de $E \times F$ em N e indiquemo-la por ; tem-se $_x = f_x$ para todo $x \in E$. Dessa maneira fica estabelecido um isomorfismo entre $\mathcal{L}(E,F; N)$ e $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F,N))$.

2 - Espaços de tensores.

Clàssicamente os tensores sôbre um espaço vetorial E de dimensão finita n são definidos em relação a uma base de E dando uma tabela de n^r números que mudam para uma outra tabela bem determinada quando fazemos uma mudança de base do espaço vetorial:

Seja $e_1, \dots, e_n$ uma base de E; um tensor duas vêzes contravariante, por exemplo, é expresso, clàssicamente, em relação à base $e_1, \dots, e_n$, por um conjunto t_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) de n^2 números de tal modo que se considerarmos uma nova base $\bar{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \, e_j$ (e portanto, $e_i = \sum b_i^j \, \bar{e}_j$ onde (b_i^j) é a matriz inversa de (a^j_i) então as componentes do tensor em relação à nova base, isto é, a nova tabela são

$$\bar{t}_{i_j} = \sum_{r,s} b^r_i \; b^s_j \; t_{r_s} .$$

Dizemos que o tensor t_{i_j} é duas vêzes covariante se com a mudança de base acima sua tabela muda em

$$\bar{t}_{i_j} = \sum_{r,s} a^r_i \; a^s_j \; t_{r_s} .$$

Dizemos que um tensor t_{i_j} é uma vez covariante e uma vez contravariante se suas componentes mudam segundo

$$\bar{t}_{i_j} = \sum_{r,s} a^r_i \; b^s_j \; t_{i_j} .$$

De modo análogo um tensor p vêzes contravariante e q vêzes covariante é expresso por um conjunto de n^{p+q} números $t_{i_1,\ldots,i_p,j_1\ldots j_q}$ em relação à base $e_1,\ldots,e_n$ que numa nova base mudam para

$$\bar{t}_{i_1,\ldots,i_p,j_1\ldots j_q} = \sum_{s,r} a^{s_1}_{j_1} \ldots a^{s_q}_{j_q} \; b^{r_1}_{i_1} \ldots b^{r_p}_{i_p} \, t_{r_1\ldots r_p,s_1\ldots s_q}$$

O conjunto dos tensores p vêzes contravariante e q vêzes contravariante forma por sua vez um espaço vetorial. Vamos definir a noção de tensor intrìnsecamente, isto é, independentemente de sua expressão numa base particular de E. Vamos mostrar como com a nova definição de tensor podemos definir também intrìnsecamente tôdas as operações e propriedades dos tensores da definição clássica como a adição de tensores, a multiplicação de tensores, a operação de contração, as noções de tensores simétricos e tensores anti-simétricos, etc..

Sejam E e F dois espaços vetoriais sôbre o mesmo corpo K. Consideremos o espaço vetorial G das combinações lineares formais dos elementos de $E \times F$, tendo como coeficientes elementos de K. Assim, então, um elemento qualquer de G é da forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i, y_i) \text{ onde } x_i \in E, \quad y_i \in F \quad \text{e} \quad \lambda_i \in K.$$

Vamos fazer em G as seguintes identificações:

a) $\lambda(x,y) = (\lambda x,y) = (x, \lambda y)$;

b) $(x+x_1,y) = (x,y) + (x_1,y)$;

c) $(x,y+y_1) = (x,y) + (x,y_1)$.

Com isso queremos dizer que os elementos $\lambda(x,y)$, $(\lambda x,y)$, $(x, \lambda y)$ não serão considerados distintos; a mesma observação para os elementos da forma considerada em b) e c). Com essas identificações, obtemos, a partir de G, um novo espaço vetorial que chamamos o produto tensorial de E por F, o que indicamos por $E \otimes F$.

Usando uma linguagem mais precisa, podemos apresentar a definição do produto tensorial $E \otimes F$ da maneira seguinte:

No espaço vetorial G, seja H o subespaço vetorial gerado pelos vetores da forma

$$(\lambda x,y) - \lambda(x,y); \qquad (x, \lambda y) - \lambda(x,y),$$

$$(x,y+y_1) - (x,y) - (x,y_1) \; ; \qquad (x+x_1 y) - (x,y) - x_1,y).$$

O produto tensorial de E por F é o espaço quociente de G por H, isto é, $E \otimes F = G/H$.

A imagem de (x,y) em $E \otimes F$ pela aplicação canônica é chamada produto tensorial de x por y e indicada por $x \otimes y$.

Vê-se, imediatamente, que são válidas as relações:

(1) $(x+x_1) \otimes y = x \otimes y + x_1 \otimes y$; $\quad x \otimes (y+y_1) = x \otimes y + x \otimes y_1$;

(2) $(\lambda x \otimes y) = x \otimes (\lambda y) = \lambda (x \otimes y)$.

Em particular $x \otimes 0 = 0 \otimes y = 0$ quaisquer que sejam x e y de E e F respectivamente.

Devido à relação (2), todo elemento de $E \otimes F$ pode ser posto sob a forma $\sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes y_i)$, embora não de maneira única.

Vemos, após essa nova maneira de apresentar $E \otimes F$, que a "identificação" feita em G, significa introduzir em G uma relação de equivalência e passar ao quociente o espaço G segundo a relação introduzida.

Observemos que a definição que demos do produto tensorial tem a vantagem de permitir obter os tensores intrìnsecamente como elementos de um espaço vetorial bem determinado, sem precisar lançar mão de uma base para a sua definição.

Sejam E,F,N espaços vetoriais sôbre um mesmo corpo K. A tôda aplicação bilinear f de $E \times F$ em N, associemos a aplicação linear $\bar{f}$ de $E \otimes F$ em N tal que $\bar{f}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)$. Reciprocamente, associemos a tôda aplicação linear $\bar{f}$ de $E \otimes F$ em N a aplicação bilinear f de $E \times F$ em N tal que $f(x,y) = \bar{f}(x \otimes y)$. Fica assim estabelecida uma correspondência biunívoca natural entre o conjunto $\mathcal{L}(E,F;N)$ das aplicações bilineares de $E \times F$ em N e o conjunto $\mathcal{L}(E \otimes F; N)$ das aplicações lineares de $E \otimes F$ em N. Temos assim demonstrado a

<u>Proposição 2</u> - Sendo E,F e N espaços vetoriais sôbre o mesmo corpo K, os espaços vetoriais $\mathcal{L}(E,F;N)$ e $\mathcal{L}(E \otimes F, N)$ são isomorfos.

Observamos do exposto, as seguintes propriedades do produto tensorial $E \otimes F$:

1) Existe aplicação bilinear φ de $E \times F$ em $E \otimes F$, (φ sendo a aplicação canônica de $E \times F$ em $E \otimes F = G/H$) tal que $\varphi\ (E \times F)$ gera $E \otimes F$. (Lembramos que $\varphi(x,y) = x \otimes y$).

2) Sendo N espaço vetorial qualquer sôbre K, a tôda aplicação bilinear f de $E \times F$ em N corresponde $\bar{f}$, aplicação linear de $E \otimes F$ em N e, reciprocamente, de modo que $f = \bar{f} \circ \varphi$.

A importância das propriedade 1) e 2) é que elas caracterizam o produto tensorial $E \otimes F$, isto é, qualquer outro espaço vetorial para o qual valem as propriedades 1) e 2) é isomorfo a $E \otimes F$. Isso resulta da

<u>Proposição 3</u> - Sejam M_i, $i = 1,2$, espaços vetoriais sôbre o mesmo corpo K. Para cada i seja φ_i uma aplicação bilinear de $E \times F$ em M_i de modo que
1) $\varphi_i(E \times F)$ gera M_i;
2) Sendo N espaço vetorial qualquer sôbre K, a tôda aplicação bilinear f de $E \times F$ em N corresponde uma aplicação linear g_i de M_i em N tal que $f = g_i \circ \varphi_i$.
Então, existe um isomorfismo u de M_1 sôbre M_2 tal que $\varphi_2 = u \circ \varphi_1$.

<u>Demonstração</u> - Fazendo $N = M_2$ existe aplicação linear h_1 de M_1 em M_2 tal que $\varphi_2 = h_1 \circ \varphi_1$; anàlogamente, existe aplicação linear h_2 de M_2 em M_1 tal que $\varphi_1 = h_2 \circ \varphi_2$. Resulta, pois,
$\varphi_1 = (h_2 \circ h_1) \circ \varphi_1$, onde $h_2 \circ h_1$ é aplicação linear de M_1 em M_1.
Como $\varphi_1(E \times F)$ gera M_1 , deduz-se da relação precedente que para todo $z \in M_1$ $z = h_2(h_1(z))$; $h_2 \circ h_1$ é, pois, a aplicação identidade de M_1 sôbre M_1. De maneira análoga concluímos que $h_1 \circ h_2$ é a aplicação identidade de M_2 sôbre M_2. Temos, então, que h_1 é uma aplicação biunívoca

linear de M_1 sôbre M_2 e h_2 a sua recíproca. Fica, assim, verificada a nossa proposição.

Base sôbre o produto tensorial $E \otimes F$.

Vamos mostrar como obter uma base sôbre $E \otimes F$ no caso em que E e F são de dimensão finita, a partir de uma base de E e de F. Isso é dado pela proposição seguinte:

Proposição 4 - Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita e (e_α), (f_β) bases de E e F respectivamente. Então $(e_\alpha \otimes f_\beta)$ é uma base de $E \otimes F$.

Demonstração - Mostremos, primeiro, que todo elemento t de $E \otimes F$ pode ser escrito como combinação linear de elementos da família $(e_\alpha \otimes f_\beta)$. Sabemos que t pode ser escrito na forma

$t = \sum_{i=1} x_i \otimes y_i$. Escrevendo x_i e y_i em têrmos das bases (e_α) e (f_β) :

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_{i\alpha} \, e_\alpha \qquad \text{e} \qquad y_i = \sum_{\beta=1}^{m} \mu_{i\beta} \, f_\beta \ .$$

Devido às relações (1) e (2)

$$x_i \otimes y_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_{i\alpha} \mu_{i\beta} (e_\alpha \otimes f_\beta)$$

De onde t pode ser escrito na forma

$$t = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} t_{\alpha\beta} \ (e_\alpha \otimes f_\beta)$$

Mostremos, agora, que os vetores da família $(e_\alpha \otimes f_\beta)$ são linearmente independentes.

Seja u_{α_0} a forma linear de E tal que $\langle e_\alpha , u_{\alpha_0} \rangle = \delta_\alpha^{\alpha_0}$ e v_{β_0} a forma linear de F tal que $\langle f_\beta , v_{\beta_0} \rangle = \delta_\beta^{\beta_0}$. Então $\omega_{\alpha_0\beta_0} = u_{\alpha_0} v_{\beta_0}$ é uma forma bilinear sôbre $E \times F$ à qual corresponde sôbre $E \otimes F$ uma forma linear $\overline{\omega_{\alpha_0\beta_0}}$ devido à proposição 2. Essa forma linear é tal que $\overline{\omega_{\alpha_0\beta_0}} \, (e_\alpha \otimes f_\beta) = (u_{\alpha_0} . v_{\beta_0}) \, (e_\alpha , f_\beta) = \langle e_\alpha , u_{\alpha_0} \rangle \langle f_\beta , v_{\beta_0} \rangle$.

Portanto, igual a 1 em $e_{\alpha_0} \otimes f_{\beta_0}$ e igual a zero para $e_\alpha \otimes f_\beta$ em que $(\alpha , \beta) \neq (\alpha_0 , \beta_0)$.

Seja agora $\displaystyle\sum_{(\alpha,\beta)} t_{\alpha\beta} \, (e_\alpha \otimes f_\beta) = 0.$

Aplicando a forma linear $\overline{\omega_{\alpha_0\beta_0}}$ a ambos os membros da igualdade acima resulta $t_{\alpha_0\beta_0} = 0$ o que mostra ser a família $(e_\alpha \otimes f_\beta)$ linearmente independente.

Corolário - Se E e F são espaços vetoriais de dimensão finita, então, $\dim(E \otimes F) = (\dim E) \, (\dim F)$.

Casos particulares do produto tensorial $E \otimes F$.

I) $E \times E^*$

Os elementos de $E \otimes E^*$ são chamados tensores 1 vez contravariante e 1 vez covariante. Da maneira como êsses tensores foram introduzidos, não necessitamos usar uma base em E para a sua definição. Vamos lembrar outra vez como êsses tensores são definidos em análise clássica e, em seguida, mostrar a ligação entre essa definição e a que introduzimos.

Associemos a tôda base $X: (e_\alpha)$ do espaço $E = R^n$ o quadro de n^2 números (t_i^j) $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Dizemos que o conjunto dêsses quadros define um tensor 1 vez contravariante e 1 vez covariante ou, que são as coordenadas de um tensor 1 vez contravariante e 1 vez covariante se, ao passarmos de uma base X : (e_α) de E para uma base $\bar{X}$: $(\bar{e}_\alpha)$ de E segundo a matriz de transformação (a^α_β), o quadro (t^j_i) se trns-forma no quadro $(\bar{t}^j_i)$ de acôrdo com a lei (I)

$$t^j_i = \sum_{\alpha,\beta} a^j_\alpha \; b^\beta_i \; \bar{t}^\alpha_\beta \quad , \text{ onde } (b^\alpha_\beta) = (a^\alpha_\beta)^{-1} \; .$$

Voltando à definição que demos inicialmente, vamos escrever um tensor t nas bases : $(e_\alpha \otimes e^\beta)$ e $(\bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}^\beta)$ ((e^α), $(\bar{e}^\alpha)$ bases duais de (e_α) , $(\bar{e}_\alpha)$ respectivamente) e estabelecer a relação entre as coordenadas (t^j_i) e $(\bar{t}^j_i)$ relativamente a essas bases. Veremos, então, que a relação é aquela estabelecida em (I) e que nos serviu para definir tensor com o emprêgo de base.

$$\bar{e}_\alpha = \sum_\beta a^\beta_\alpha \, e_\beta \quad , \quad \bar{e}^\alpha = \sum_\beta b^\alpha_\beta \; e^\beta$$

$$t = \sum_{\alpha,\beta} \bar{t}^\alpha_\beta \; (\bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}^\beta) = \sum_{\alpha,\beta} \bar{t}^\alpha_\beta \; \Big(\sum_\lambda a^\lambda_\alpha e_\lambda\Big) \; \Big(\sum_\mu b^\beta_\mu e^\mu\Big) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu} \bar{t}^\alpha_\beta \; a^\lambda_\alpha \; b^\beta_\mu \; (e_\lambda \otimes e^\mu) =$$

$$= \sum_{\lambda,\mu} t^\lambda_\mu \, (e_\lambda \otimes e^\mu) .$$

de onde resulta $t^\lambda_\mu = \sum_{\alpha,\beta} a^\lambda_\alpha \; b^\beta_\mu \; \bar{t}^\alpha_\beta$.

II) E E

Os elementos do E E são chamados tensores 2 vêzes contravavariantes. Em análise clássica dizemos que os quadros (t^{ij}) são coordenadas de um tensor 2 vêzes contravariantes se êles se transformam nas mudanças de base de acôrdo com a lei

$$\text{(II)} \quad t^{ij} = \sum_{\alpha,\beta} a^i_\alpha \; a^j_\beta \; \bar{t}^{\alpha\beta}$$

Voltando à definição que demos no início, vamos escrever um tensor t nas bases : ($e_\alpha \otimes e_\beta$) e ($\bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\beta$) e estabelecer as relações entre (t^{ij}) e ($\bar{t}^{ij}$) . Reconhecemos, então, que temos as relações estabelecidas em (II), da qual nos servimos para definir o tensor nos moldes clássicos. $t = \sum_{\alpha,\beta} \bar{t}^{\alpha\beta} (\bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\beta) = \sum_{\alpha,\beta} \bar{t}^{\alpha\beta} (\sum_\lambda a^\lambda_\alpha \; e_\lambda) \otimes$

$$\otimes (\sum_\mu a^\mu_\beta \; e_\mu) = \sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu} \bar{t}^{\alpha\beta} a^\lambda_\alpha \; a^\mu_\beta \; (e_\lambda \otimes e_\mu) =$$

$$= \sum_{\lambda,\mu} t^{\lambda\mu} (e_\lambda \otimes e^\mu) .$$

Do onde resulta $t^{\lambda\mu} = \sum_{\alpha,\beta} a^\lambda_\alpha \; a^\mu_\beta \; \bar{t}^{\alpha\beta}$

III) $E^* \otimes E^*$

Os elementos de $E^* \otimes E^*$ são chamados tensores 2 vêzes covariantes. Em análise clássica dizemos que os quadros (t_{ij}) são coordenadas de um tensor 2 vêzes covariante se se êles se transformas nas mudanças de base de acôrdo com a lei

$$\text{(III)} \quad t_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} b^\alpha_i \; b^\beta_j \; \bar{t}_{\alpha\beta}$$

Voltando à nossa definição vamos escrever um tensor t nas bases:

$(e^\alpha \otimes e^\beta)$ e $(\bar{e}^\alpha \otimes \bar{e}^\beta)$ e estabelecer as relações entre (t_{ij}) e $(\bar{t}_{ij})$

$$t = \sum_{\alpha,\beta} \bar{t}_{\alpha\beta}(\bar{e}^\alpha \otimes \bar{e}^\beta) = \sum_{\alpha,\beta} \bar{t}_{\alpha\beta}\Big(\sum_\lambda b^\alpha_\lambda \; e^\lambda\Big) \otimes \Big(\sum_\mu b^\beta_\mu \; e^\mu\Big) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu} \bar{t}_{\alpha\beta}\; b^\alpha_\lambda b^\beta_\mu (e^\lambda \otimes e^\mu) = \sum_{\lambda,\mu} t_{\lambda\mu}(e_\lambda \otimes e_\mu).$$

De onde resulta $t_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha,\beta} b^\alpha_\lambda \; b^\beta_\mu \; \bar{t}_{\alpha\beta}$.

<u>Proposição 5</u> - Os produtos tensoriais $E \otimes F$ e $F \otimes E$ são isomorfos.

<u>Demonstração</u>.- Sendo a aplicação $(x,y) \to y \otimes x$ de $E \otimes F$ em $F \otimes E$ bilinear, resulta a aplicação $u : x \otimes y \to y \otimes x$ de $E \otimes F$ em $F \otimes E$ linear. Analogamente $v : y \otimes x \to x \otimes y$ é linear e $u \circ v$ e $v \circ u$ são as aplicações identidade de $E \otimes F$ e $F \otimes E$ respectivamente. Logo u e v são isomorfismos recíprocos.

<u>Proposição 6</u> - O produto tensorial $K \otimes E$ é isomorfo a E.

<u>Demonstração</u> - Como a aplicação $(\alpha, x) \to \alpha x$ de $K \times E$ em E é bilinear, resulta que a aplicação $u : \alpha \otimes x \to \alpha x$ de $K \otimes E$ em E é linear. A aplicação $v : x \to 1 \otimes x$ de E em $K \otimes E$ sendo linear concluímos que $u \circ v$ e $v \circ u$ são as aplicações identidade de E e $K \otimes E$. Logo u e v são isomorfismos recíprocos.

<u>Corolário</u> - O produto tensorial $K \otimes K$ é isomorfo a K, o isomorfismo sendo dado pela aplicação $\alpha \otimes \beta = \alpha\beta$.

3 - <u>Dualidade em espaços tensoriais</u>.

Sendo E_i , F_i $i = 1,2$, espaços vetoriais sôbre o mesmo corpo K e u_i aplicação linear de E_i em F_i , podemos associar ao par (u_1 , u_2) a aplicação linear de $E_1 \otimes E_2$ em $F_1 \otimes F_2$ que indicamos por $u_1 \otimes u_2$, definida por $(u_1 \otimes u_2)\ (x_1 \otimes x_2) = u_1(x_1) \otimes u_2(x_2)$.

Para os elementos do $E \otimes F$ não da forma $x_1 \otimes x_2$, a aplicação fica definida extendendo-a linearmente.

<u>Exercício</u> - Sejam E_i , F_i , $i = 1,2$, espaços vetoriais de dimensão finita. Demonstrar que a aplicação que a todo par $(u, v) \in \mathcal{L}(E_1 , F_1) \times \mathcal{L}(E_2 , F_2)$ faz corresponder a aplicação

$x \otimes y \to u(x) \otimes v(y)$ de $(E_1 \otimes E_2 , F_1 \otimes F_2)$ se estende canônicamente a um isomorfismo de $\mathcal{L}(E_1 , F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2 , F_2)$ sôbre $\mathcal{L}(E_1 \otimes E_2 , F_1 \otimes F_2)$.

Êste teorema justifica a notação $u \otimes v$ da definição precedente.

A definição de produto tensorial pode ser extendida a um número finito de espaços vetoriais, a maneira de fazê-lo sendo bastante natural depois da definição feita para dois espaços.

A proposição 2 se extende para o caso de um produto finito de espaços tensoriais de modo que o espaço vetorial $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n ; F)$ das aplicações multilineares de $E_1 \times \ldots \times E_n$ em F é isomorfo ao espaço $\mathcal{L}(E_1 \otimes \ldots \otimes E_n ; F)$ das aplicações lineares de $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ em F.

Como para o caso de dois fatores, temos também as seguintes pro priedades para o produto tensorial $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$:

1) Existe aplicação multilinear φ de $E_1 x \ldots x E_n$ tal que $(E_1 x \ldots x E_n)$ gera $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$.

2) Sendo N espaço vetorial qualquer, a tôda aplicação multilinear f de $E_1 x \ldots x E_n$ em N corresponde $\bar{f}$, aplicação linear de $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ em N e reciprocamente de modo que $f = \bar{f} \circ \varphi$.

Essas propriedades caracterizam o produto tensorial $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$, isto é, qualquer outro espaço vetorial para o qual valem as propriedades acima é isomor fo a $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$.

Indicamos por $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ a imagem de $(x_1, \ldots, x_n)$ em $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i = E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ pela aplicação canônica φ .

A proposição 4 também se extende a êsse caso mais geral como segue :

Sejam E_i $i = 1, \ldots, n$ espaços vetoriais de dimensão finita e $(e_{i\alpha_i})$ base de E_i . Então a família $(e_{1\alpha_1} \ldots e_{n\alpha_n})$ é uma base de $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$.

<u>Proposição 7</u> - Sejam E_i $i = 1, \ldots, n$ espaços vetoriais de dimensão finita. Então $E_1^* \otimes \ldots \otimes E_n^*$ é canônicamente isomorfo a $(E_1 \otimes \ldots \otimes E_n)^*$.

<u>Demonstração</u> - A todo produto tensorial $x_1' \otimes \ldots \otimes x_n'$ de $E_1^* \otimes \ldots \otimes E_n^*$ fazemos corresponder a forma linear u sôbre $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ definida por $\langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_n , u \rangle = \langle x_1 , x_1' \rangle \ldots \langle x_n , x_n' \rangle$. Como

$(E_1^* \otimes \ldots \otimes E_n^*)$ e $(E_1 \otimes \ldots \otimes E_n)^*$ têm a mesma dimensão, para demonstrar que temos um isomorfismo basta verificar que esta aplicação leva base do primeiro em base do segundo.

Será $(e_{i\,\alpha_i})$ base de E_i e $(e_i^{\alpha_i})$ a base dual em E_i^*. A imagem pela aplicação introduzida de $e_1^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_n^{\alpha_n}$ é tal que calculada no elemento $e_{1\alpha_{i_1}} \otimes \ldots \otimes e_{n\alpha_{i_n}}$ dá $\langle e_{\alpha_{i_1}}, e^{\alpha_1} \rangle \ldots \langle e_{\alpha_{i_n}}, e^{\alpha_n} \rangle$. Como êsse produto dá 1 no caso em que $\alpha_{i_1} = \alpha_1, \ldots, \alpha_{i_n} = \alpha_n$ e 0 nos demais casos, a imagem de $e_1^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_n^{\alpha_n}$ é a forma linear $(e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_n})^*$. Como a família $(e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_n})^*$ é a base dual em $(E_1 \otimes \ldots \otimes E_n)^*$ da base $(e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_n})$ de $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ a proposição está demonstrada.

- <u>Corolário</u> - Sejam E_i $i = 1, \ldots, n$ espaços vetoriais de dimensão finita. Então, tôda forma multilinear f de $E_1 x \ldots x E_n$ pode ser escrita na forma $f(x_1, \ldots, x_n) =$

$$= \sum \langle x_1, x'_{i_1} \rangle \ldots \langle x_n, x'_{i_n} \rangle .$$

<u>Demonstração</u> - É uma consequência do isomorfismo entre $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; K)$ e $\mathcal{L}(E_1 \ldots E_n; K)$ e da proposição anterior.

<u>Tensor p vêzes contravariante e q vêzes covariante.</u>

A definição que vamos apresentar de um tensor p vêzes contravariante e q vêzes covariante é intrínseca, isto é, não vamos necessitar de introduzir uma base para a sua definição.

Após a definição mostraremos como mudar as coordenadas de um tensor expresso em uma dada base quando operamos uma mudança dessa base. Vamos reconhecer que essa maneira de mudar as coordenadas de um tensor em uma mudança de base é o que exigimos na definição feita em Análise Classica para que êsses conjuntos ordenados de números sejam as coordenadas de um tensor.

Seja E um espaço vetorial. Chamamos tensor p vezes contravariante e q vezes covariante sôbre E todo elemento do produto $\bigotimes_{i=1}^{p+q} E_i$, onde p dos espaços E_i são idênticos a E e os outros q idênticos ao dual E^* de E; o número p+q é a ordem do tensor. Indicamos $\bigotimes_{i=1}^{p+q} E_i$ também por E_q^p. Quando $p = q = 0$ extendemos a nossa definição pondo $E_o^o = K$.

Os elementos de E_q^p que podem ser escritos na forma

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_q \otimes x'_1 \otimes \ldots \otimes x'_p$$

são chamados tensores decomponíveis.

Analisemos o caso mais importante que é aquêle em que E é de dimensão finita. Seja (e_α) uma base de E e (e^α) a base dual em E^*. Então, a família $(e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_p} \otimes e^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e^{\alpha_q})$ é uma base de E_q^p. Cada têrmo, pois, de E_q^p pode ser escrito na forma

$$t = \sum_{(\lambda_i)(\mu_j)} t^{\lambda_1 \ldots \lambda_p}_{\mu_1 \ldots \mu_q} \, e_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes e_{\lambda_p} \; e^{\mu_1} \otimes \ldots \otimes e^{\mu_q} \; .$$

Seja $(\overline{e_\alpha})$ uma outra base de E e $P = (a_\alpha^\beta)$ a matriz da transformação que leva a base (e_α) na base $(\overline{e_\alpha})$. Então, $\overline{e_\alpha} = \sum_\beta a_\alpha^\beta e_\beta$. Sabemos que a matriz da transformação que leva a (e^α) na base $(\overline{e^\alpha})$ dual de $(\overline{e_\alpha})$ é a transposta da recíproca de P, isto é, ${}^tP^{-1} = (c_\beta^\alpha)$. Temos, pois, que

$$\overline{e^\alpha} = \sum_\beta c_\alpha^\beta e^\beta \quad \text{ou} \quad \overline{e^\alpha} = \sum_\beta b_\beta^\alpha e^\beta$$

onde a matriz $(b_\beta^\alpha) = P^{-1}$. A base correspondente em E_q^p é, pois,

$$(\overline{e}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \overline{e}_{\alpha_p} \otimes \overline{e}^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \overline{e}^{\beta_q}).$$

Queremos ver agora como se transformam as coordenadas do tensor t com essa mudança de base em E^p_q.

$$t = \sum_{(\alpha_i),(\beta_j)} t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \; (\bar{e}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \bar{e}_{\alpha_p} \otimes \bar{e}^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \bar{e}^{\beta_q}) =$$

$$= \sum_{(\alpha_i),(\beta_j)} \bar{t}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \left(\sum_{\lambda_1} a^{\lambda_1}_{\alpha_1} e_{\lambda_1} \right) \otimes \ldots \otimes \left(\sum_{\lambda_p} a^{\lambda_p}_{\alpha_p} e_{\lambda_p} \right) \otimes$$

$$\otimes \left(\sum_{\mu_1} b^{\beta_1}_{\mu_1} e^{\mu_1} \right) \otimes \ldots \otimes \left(\sum_{\mu_q} b^{\beta_q}_{\mu_q} e^{\mu_q} \right) =$$

$$= \sum_{(\alpha_i),(\beta_j),(\lambda_k),(\mu_\ell)} \bar{t}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \, a^{\lambda_1}_{\alpha_1} \ldots a^{\lambda_p}_{\alpha_p} \, b^{\beta_1}_{\mu_1} \ldots b^{\beta_q}_{\mu_q} (e_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes e_{\lambda_p} \otimes e^{\mu_1} \otimes \ldots \otimes e^{\mu_q}) =$$

$$= \sum_{(\lambda_k),(\mu_\ell)} t^{\lambda_1 \ldots \lambda_p}_{\mu_1 \ldots \mu_q} \; e_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes e_{\lambda_p} \; e^{\mu_1} \otimes \ldots \otimes e^{\mu_q} .$$

De onde resulta

$$t^{\lambda_1 \ldots \lambda_p}_{\mu_1 \ldots \mu_q} = \sum_{(\alpha_i),(\beta_j)} a^{\lambda_1}_{\alpha_1} \ldots a^{\lambda_p}_{\alpha_p} \, b^{\beta_1}_{\mu_1} \ldots b^{\beta_q}_{\mu_q} \; \bar{t}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}$$

em que, como observamos, $(b^{\alpha}_{\beta}) = (a^{\alpha}_{\beta})^{-1}$.

Comparando essa expressão com a fórmula (α) vemos a ligação entre a definição aqui introduzida e aquela dada em análise clássica.

<u>Multiplicação de tensores.</u>

O espaço vetorial $E^p_q \otimes E^r_s$ pode ser identificado canônicamente ao espaço vetorial E^{p+r}_{q+s} pela aplicação linear

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes x'_1 \otimes \ldots \otimes x'_q) \otimes (y_1 \otimes \ldots \otimes y_r \otimes y'_1 \otimes \ldots \otimes y'_s) \rightarrow$$

$$\rightarrow (x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_r \otimes x'_1 \otimes \ldots \otimes x'_q \otimes y'_1 \otimes \ldots \otimes y'_s) .$$

Essa aplicação é chamada multiplicação dos tensores do E^p_q e dos tensores do E^r_s.

Contração de tensores

Vejamos, primeiro, como introduzimos essaooperação em análise clássica. Sondo $(A^{\lambda_1 \ldots \lambda_p}_{\mu_1 \ldots \mu_q})$ as coordenadas em um sistema X de um tensor p vezes contravariante e q vezes covariante, definimos contração do tensor relativamente ao i-ésimo índice contravariante e j-ésimo índice covariante, onde $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, o tensor p-1 vezes contravariante e q-1 vezes covariante cujas coordenadas no sistema X são dadas por

$$\bar{A}^{\lambda_1 \ldots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \ldots \lambda_p}_{\mu_1 \ldots \mu_{j-1} \mu_{j+1} \ldots \mu_q} = \sum_{\rho=1}^{n} A^{\lambda_1 \ldots \lambda_{i-1} \rho \lambda_{i+1} \ldots \lambda_p}_{1 \ldots \mu_{j-1} \rho \mu_{j+1} \ldots \mu_q} \qquad (8)$$

Devemos mostrar que essa definição é lícita, isto é, que as coordenadas assim introduzidas obedecem à lei que permite chamar essas novas coordenadas de coordenadas de um tensor.

Vamos definir de maneira intrínseca a operação de contração. Em seguida, determinaremos as coordenadas do tensor contraído em têrmos das coordenadas do tensor primitivo. Verificamos , então, que a relação é aquela que usamos para definir contração fazendo uso de base, ou seja, uma relação da forma (8).

Seja $1 \leq i \leq p$ e $1 \leq j \leq q$. Chama-se <u>contração</u> do i-ésimo índice contravariante e do j-ésimo índice covariante a aplicação linear C^i_j de E^p_q em E^{p-1}_{q-1} que, a todo tensor decomponível

$t = x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes x'_1 \otimes \ldots \otimes x'_q$ faz corresponder o tensor

$$c^i_j(t)=\langle x_i, x'_j\rangle x_1\otimes\ldots\otimes x_{i-1}\otimes x_{i+1}\otimes\ldots\otimes x_p\otimes x'_1\otimes\ldots\otimes x'_{j-1}\otimes x'_{j+1}\otimes\ldots x'_q$$

Sendo (e_α) uma base do E temos

$$t=\sum_{(\lambda_k),(\mu_\ell)} t^{\lambda_1\ldots\lambda_p}_{\mu_1\ldots\mu_q}\, e_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes e_{\lambda_p}\otimes e^{\mu_1}\otimes\ldots\otimes e^{\mu_q}$$

Buscando a expressão do $c^i_j(t)$ na base

$$(e_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes e_{\lambda_{i-1}}\otimes e_{\lambda_{i+1}}\otimes\ldots\otimes e_{\lambda_p}\otimes e^{\mu_1}\otimes\ldots\otimes e^{\mu_{j-1}}\otimes e^{\mu_{j+1}}\otimes\ldots\otimes e^{q}),$$

resulta

$$c^i_j(t)=\sum_{(\lambda_k)(\mu_\ell)} t^{\lambda_1\ldots\lambda_p}_{\mu_1\ldots\mu_q}\, c^i_j\,(e_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes e_{\lambda_p}\otimes e^{\mu_1}\otimes\ldots\otimes e^{\mu_q})=$$

$$=\sum_{(\lambda_k),(\mu_\ell)} t^{\lambda_1\ldots\lambda_p}_{\mu_1\ldots\mu_q}\langle e_{\lambda_i}, e^{\mu_j}\rangle\, e_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes e_{\lambda_{i-1}}\otimes e_{\lambda_{i+1}}\otimes\ldots e_{\lambda_p}\otimes e^{\mu_1}\otimes\ldots\otimes e^{\mu_{j-1}}\otimes e^{\mu_{j+1}}\otimes\ldots\otimes e^{\mu_q}=$$

$$=\sum_{(\lambda_k),(\mu_\ell),\rho} t^{\lambda_1\ldots\lambda_{i-1}\rho\lambda_{i+1}\ldots\lambda_p}_{\mu_1\ldots\mu_{j-1}\rho\mu_{j+1}\ldots\mu_q}\, e_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes e_{\lambda_{i-1}}\otimes e_{\lambda_{i+1}}\otimes\ldots\otimes e_{\lambda_p}\otimes e^{\mu_1}\otimes\ldots\otimes e^{\mu_{j-1}}\otimes e^{\mu_{j+1}}\otimes\ldots\otimes e^{\mu_q}=$$

$$=\sum_{(\lambda_k),(\mu_\ell)} \bar t^{\lambda_1\ldots\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\ldots\lambda_p}_{\mu_1\ldots\mu_{j-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_q}\, e_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes e_{\lambda_{i-1}}\otimes e_{\lambda_{i+1}}\otimes\ldots\otimes e_{\lambda_p}\otimes e^{\mu_1}\otimes\ldots\otimes e^{\mu_{j-1}}\otimes e^{\mu_{j+1}}\otimes\ldots\otimes e^{\mu_q}$$

De onde concluimos que

$$\bar t^{\lambda_1\ldots\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\ldots\lambda_p}_{\mu_1\ldots\mu_{j-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_q}=\sum_{\rho} t^{\lambda_1\ldots\lambda_{i-1}\rho\lambda_{i+1}\ldots\lambda_p}_{\mu_1\ldots\mu_{j-1}\rho\mu_{j+1}\ldots\mu_q}$$

Comparando, pois, essa relação com a (8) vemos a ligação entre a nossa definição e aquela dada em análise clássica.

<u>Proposição 8</u> - Sendo E, F dois espaços vetoriais de dimensão finita, a aplicação linear de $E^* \otimes F$ em $\mathcal{L}(E,F)$ que a todo produto tensorial $x' \otimes y$ faz corresponder a aplicação linear $x \to \langle x,x' \rangle y$ é um isomorfismo de $E^* \otimes F$ sôbre $\mathcal{L}(E,F)$.

<u>Demonstração</u> - Lembremos que sendo F de dimensão finita existe um isomorfismo natural de F sôbre F^{**} assim definido

$$y \in F \to \tilde{y} \in F^{**} \text{ de modo que } \langle y',\tilde{y} \rangle = \langle y,y' \rangle .$$

Temos assim $E^* \otimes F \simeq E^* \otimes F^{**}$ pela aplicação linear $x' \otimes y \to x' \otimes \tilde{y}$. Devido à proposição 7 temos $E^* \otimes F^{**} \simeq (E \otimes F^*)^*$ pela aplicação linear $x' \otimes \tilde{y} \to u$ definida por: $\langle x \otimes y',u \rangle = \langle x,x' \rangle \langle y,y' \rangle$. Pela proposição 2, $(E \otimes F^*)^* \simeq \mathcal{L}(E,F^*;K)$ pela aplicação linear $u \to v$ definida por $v(x,y',u = x,x' \quad y,y'$. Pela proposição 1, $(E,F^*;K) \qquad (E,F)$ pela aplicação linear $v \to \omega$ definida por $\omega(x) = \langle x,x' \rangle y$.

Assim resulta, pois, $E^* \otimes F \simeq \mathcal{L}(E,F)$ pela aplicação linear que leva $x' \otimes y$ na aplicação linear $x \to \langle x,x' \rangle y$.

<u>Corolário 1</u> - Tôda aplicação linear de E em F é soma de um número finito de aplicações lineares do tipo $x \to \langle x,x' \rangle y$, isto é, da forma

$$x \to \sum_{i=1}^{n} \langle x,x'_i \rangle y_i$$

<u>Corolário 2</u> - Tôda aplicação bilinear de E F em N é da forma

$$f(x,y) = \sum \langle x,x'_i \rangle \langle y,y'_i \rangle \; z_i ,$$

onde $x'_i \in E^*$, $y'_i \in F^*$ e $z_i \in N$.

<u>Demonstração</u> - Decorre do fato de ser $\mathcal{L}(E,F;N) \simeq \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,N))$ e do corolário anterior.

Traço de um endomorfismo.

Vamos, primeiro, lembrar como se define traço de um endomorfismo u em um espaço vetorial E de dimensão finita, fazendo uso de uma base (e_α) em E. Sendo $U = (a^\alpha_\beta)$ a matriz do endomorfismo u relativamente à base (e_α) definimos traço de u que indicaremos por Tr(u) como sendo

$$Tr(u) = Tr(U) = \sum_{\alpha=1}^{n} a^\alpha_\alpha$$

Essa definição não depende da base porquê, quando fazemos uma mudança de base, a matriz do endomorfismo passa a ser da forma PUP^{-1} para alguma matriz P e $Tr(PUP^{-1}) = Tr(PP^{-1}U) = Tr(U)$.

Vamos dar, agora, a definição de traço de um endomorfismo sem apelar a uma base:

Chamamos de traço do endomorfismo u o escalar $c^1_1(\tilde{u})$ onde $\tilde{u}$ é o tensor 1 vez contravariante e 1 vez covariante de $E^* \otimes E$, imagem de u pelo isomorfismo estabelecido na proposição 8. Mostremos a equivalência entre a definição feita inicialmente e a que ora introduzimos.

Sejam (e_α) uma base de E e $x \in E$. Temos

$$x = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha e_\alpha \qquad e \qquad u(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha u(e_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{n} \langle x, e^\alpha \rangle \, u(e_\alpha) \quad ,$$

(e^α) sendo a base dual de (e_α). Pelo isomorfismo estabelecido na proposição (8) resulta $\tilde{u} = \sum_{\alpha=1}^{n} e^\alpha \otimes u(e_\alpha)$. Sendo $u(e_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{n} a^\beta_\alpha \, e_\beta$

$$\tilde{u} = \sum_{\alpha,\beta} e^\alpha \otimes (a^\beta_\alpha e_\beta) = \sum_{\alpha,\beta} a^\beta_\alpha \, (e^\alpha \otimes e_\beta) \qquad \text{e portanto,}$$

$$c^1_1(\tilde{u}) = \sum_{\alpha=1}^{n} a^\alpha_\alpha$$

Tensores simétricos e antisimétricos.

Dado um tensor $t \in E_0^2 = E \otimes E$, $t = \sum x_i \otimes y_i$ dizemos que êle é simétrico se $\sum x_i \otimes y_i = \sum y_i \otimes x_i$; êle é antisimétrico se

$$\sum x_i \otimes y_i = - \sum y_i \otimes x_i .$$

Exercício 1 - Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base de E e $t = \sum t^{rs} e_r \otimes e_s$; demonstrar que t é simétrico se e sòmente se $t^{rs} = t^{sr}$ e que t é antisimétrico se e sòmente se $t^{rs} = -t^{sr}$.

Podemos generalizar esta noção para tensores de ordem qualquer (contravariantes ou covariantes): introduzimos em E_0^r um operador de simetrização e um operador de antisimetrização:

$$S(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r) = \sum_{s \in \mathfrak{S}(r)} x_{s(1)} \otimes \ldots \otimes x_{s(r)}$$

$$A(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r) = \sum_{s \in \mathfrak{S}(r)} (-1)^{\varepsilon(s)} x_{s(1)} \otimes \ldots \otimes x_{s(r)}$$

onde $\mathfrak{S}(r)$ indica o conjunto de tôdas as permutações do conjunto $\{1,2,\ldots,r\}$ e $\varepsilon(s)$ o sinal da permutação s. Êstes operadores são estendidos linearmente para tensores não decomponíveis.

Dizemos que um tensor t é simétrico se $S(t) = r!t$ e antisimétrico se $A(t) = r!t$.

Exercício 2 - Demonstrar que estas definições são equivalentes às clássicas.

Lembremos que os espaços $E^* \otimes E^* = E_2^0$, $\mathcal{L}(E,E^*)$ e $\mathcal{L}(E,E;K)$ são canônicamente isomorfos. Dado $g \in E_2^0$ indiquemos por $\tilde{g}$ a aplicação linear de E em E^* e por $\hat{g}$ a forma bilinear de E que lhe corresponde. Se $e^1,\ldots,e^n$ é uma base de E^* temos

$$g = \sum_{r,s} g_{rs}\, e^r \otimes e^s$$

<u>Exercício 3</u> - Demonstrar que as seguintes condições são equivalentes:

1) $\tilde{g}$ é um isomorfismo de E sôbre E^* ;
2) dado $X \in E$, $X \neq 0$ existe um $Y \in E$ tal que $\hat{g}(X,Y) \neq 0$;
3) a forma bilinear $\sum\limits_{r,s} g_{rs} x_r y_s$ é não degenerada.

Exercício 4
Demonstrar que as condições seguintes são equivalentes:
1) g é um tensor antisimétrico;
2) $\hat{g}(X,Y) = \hat{g}(Y,X)$ para todos $X,Y \in E$;
3) $g_{rs} = g_{sr}$.

<u>Exercício-5</u> - Demonstrar a equivalência das seguintes condições:
1) $\hat{g}(X,X) \geqslant 0$ e $g(X,X) = 0$ se e sòmente se $X = 0$;

2) $\sum\limits_{r,s} g_{rs}\, x_r x_s > 0$ se $(x_1,\ldots,x_n) \neq (0,\ldots,0)$

§ 2 - Álgebra exterior.

1. Potência exterior de E.

Definição 1. Sejam $E_1,\dots,E_m,F$ espaços vetoriais sôbre um corpo K. Uma aplicação

$$f:E_1\times\dots\times E_n\to F$$

é uma forma multilinear se e sòmente se for linear em cada variável, isto é, se tivermos

$$f(x_1,\dots,x_i+x_i',\dots,x_m) = f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_m)+f(x_1,\dots,x_i',\dots,x_m)$$
$$f(x_1,\dots,\lambda x_i,\dots,x_m) = \lambda f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_m),\quad \lambda\in K,$$

$i=1,2,\dots,m$.

Definição 2. Sejam E, F espaços vetoriais sôbre um corpo K. Uma forma multilinear

$$f: E\times\dots\times E\to F$$

é alternada se e sòmente se para qualquer $r\neq s$ temos

$$f(x_1,\dots,x_r,\dots,x_s,\dots,x_m) = 0 \qquad \text{quando } x_r = x_s$$

Exemplo. Dado um espaço vetorial E e os vetores $x_1',\dots,x_m'$ do espaço dual E^* a aplicação

$$(x_1,\dots,x_r)\to \det(\langle x_i,x_j'\rangle)$$

é uma forma multilinear alternada.

Definição 3. Uma forma multilinear

$$f:E\times\dots\times E\to F$$

é anti-simétrica se e sòmente se qualquer que seja $r\neq s$

$$f(x_1,\dots,x_r,\dots,x_s,\dots,x_m) = -f(x_1,\dots,x_s,\dots,x_r,\dots,x_m).$$

Teorema 1. Seja E um espaço vetorial sôbre um corpo K de característica zero. Então uma forma multilinear é alternada se e sòmente se é anti-simétrica.

Daqui para diante consideraremos apenas espaços vetoriais de dimensões finitas sôbre corpos de características iguais a zero.

Definição 4. Seja E um espaço vetorial sôbre um corpo K. $\overset{r}{\Lambda} E$ é o conjunto das combinações lineares formais finitas com coeficientes em K das r-plas $(r > 1)$ $(x_1,\ldots,x_r)$ (isto é, os elementos de $\overset{r}{\Lambda} E$ são da forma $\sum_i \lambda_i(x_{i_1},\ldots,x_{i_r})$) com os quais calculamos do seguinte modo:

1) $\lambda(x_1,\ldots,x_r) = (\lambda x_1,x_2,\ldots,x_r) = (x_1,\ldots,x_{r-1},\lambda x_r)$

2) $(x_1,\ldots,x_i+y_i,\ldots,x_r) = (x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_r) + (x_1,\ldots,y_i,\ldots,x_r)$

3) $(x_1,\ldots,x_i,x_{i+1},\ldots,x_r) = -(x_1,\ldots,x_{i+1},x_i,\ldots,x_r)$

ou em outros termos considerar o espaço quociente do espaço vetorial das combinações lineares formais com coeficientes em K de r-plas de E pelo sub-espaço vetorial gerado pelos elementos da forma

$\lambda(x_1,\ldots,x_r) - (\lambda x_1,x_2,\ldots,x_r)$ etc.

$(x_1,\ldots,x_i+y_i,\ldots,x_r) - (x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_r) - (x_1,\ldots,y_i,\ldots,x_r)$

e

$(x_1,\ldots,x_r)$ em que existe $i \neq j$ com $x_i = x_j$.

A imagem de $(x_1,\ldots,x_r)$ no referido espaço quociente é indicada por $x_1 \wedge \ldots \wedge x_r$.

Temos portanto (no caso particular em que $r = 2$):

$(x + y)\wedge z = x\wedge z + y\wedge z$; $(\lambda x)\wedge y = \lambda(x\wedge y)$;

$x\wedge y = - y\wedge x$ e portanto $x\wedge x = 0$ etc.

Definição 5. O espaço vetorial $\overset{r}{\Lambda} E$ chama-se <u>potência exterior r-ésima de E</u>. Os elementos de $\overset{r}{\Lambda} E$ chamam-se r-vetores sôbre E. Todo r-vetor da forma $x_1 \wedge \ldots \wedge x_r$ chama-se r-vetor <u>decomponível</u>.

Teorema 2. Seja F um espaço vetorial sôbre K. A tôda aplicação multilinear alternada

$f: E \times \ldots \times E \to F$

corresponde uma aplicação linear

$$\bar{f}: \overset{r}{\wedge} E \to F,$$

e reciprocamente, a tôda aplicação linear de $\overset{r}{\wedge} E$ em F corresponde uma aplicação multilinear alternada de $E \times \ldots \times E$ em F.

Demonstração. Com efeito se $f: E \times \ldots \times E \to F$ é aplicação multilinear alternada é fácil verificar que $\bar{f}: \overset{r}{\wedge} E \to F$ tal que

$$\bar{f}\left(\sum_i \alpha_i\, x_1^i \wedge \ldots \wedge x_r^i\right) = \sum_i \alpha_i\, f(x_1^i, \ldots, x_r^i)$$

é aplicação linear de $\overset{r}{\wedge} E$ em F. Por outro lado, se $g: \overset{r}{\wedge} E \to F$ é aplicação linear, $f: E \times \ldots \times E \to F$ tal que

$$f(x_1, \ldots, x_r) = g(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r)$$

é multilinear alternada.

Observação. É imediato que a aplicação $\varphi : (x_1, \ldots, x_r) \in E^r \to$ $\to x_1 \wedge \ldots \wedge x_r \in \overset{r}{\wedge} E$ é multilinear alternada e que $\varphi(E^r)$ gera $\overset{r}{\wedge} E$.

Exercício: Dado um espaço vetorial M e uma aplicação multilinear alternada φ de E^2 em M tal que $\varphi(E^r)$ gera M e tal que a qualquer aplicação multilinear alternada f de E^r num espaço vetorial F corresponde uma aplicação linear $\bar{f}$ de M em F tal que $f = \bar{f} \circ \varphi$ então M é isomorfo a $\overset{r}{\wedge} E$.

Teorema 3. Se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base de E os p-vetores $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ $(i_1 < \ldots < i_p)$ são uma base de $\overset{p}{\wedge} E$.

Demonstração. De fato, se $y \in \overset{p}{\wedge} E$

$$y = \sum_{i=1}^{q} x_1^i \wedge \ldots \wedge x_p^i .$$

Temos

$$x_j^i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ij}^{k} e_k \qquad \text{e portanto}$$

$$y = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k_1,\dots,k_p=1}^{n} \beta_{i1}^{k_1} \dots \beta_{ip}^{k_p} \; e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_p} =$$

$$= \sum_{i_1 \dots i_p} \gamma_{i_1 \dots i_p} \; e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$$

Do teorema 2 segue que os $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ $(i_1 < \dots < i_p)$ são linearmente independentes. Basta lembrar que dado um dêstes $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_p}$ $(j_1 < \dots < j_p)$ podemos definir uma forma multilinear alternada sôbre $E \times \dots \times E$ (p vêzes) que toma o valor 1 sôbre $(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$ e é nula sôbre todos os outros $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ $(i_1 < \dots < i_p)$.

<u>Corolário</u> - Se E tem dimensão n então $\overset{p}{\wedge} E$ tem dimensão $\binom{n}{p}$.

<u>Definição 6.</u> Sejam $x = \sum_i \alpha_i \, x_1^i \wedge \dots \wedge x_r^i \in \overset{r}{\wedge} E$, $y = \sum_j \beta_j \, y_1^j \wedge \dots \wedge y_s^j \in \overset{s}{\wedge} E$. O <u>produto exterior do r-vetor x pelo s-vetor y</u> é o (s+r)-vetor que designaremos por $x \wedge y$ tal que

$$x \wedge y = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \, x_1^i \wedge \dots \wedge x_r^i \wedge y_1^j \wedge \dots \wedge y_s^j .$$

2. <u>Interpretação geométrica do produto exterior.</u>

<u>Teorema 4.</u> Seja E espaço vetorial de dimensão n. Então $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_r = 0$ ($r \leq n$) se e sòmente se $x_1, x_2, \dots, x_r$ forem linearmente dependentes.

<u>Demonstração.</u> Se $x_1, \dots, x_r$ forem linearmente dependentes é claro que $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_r = 0$. Suponhamos que $x_1 \wedge \dots \wedge x_r = 0$. Se $x_1, \dots, x_r$ fossem linearmente independentes poderíamos determinar $x_{r+1}, \dots, x_n$ de modo que $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n\}$ fôsse uma base de E; consequentemente o conjunto constituido do único elemento $x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge x_{r+1} \wedge \dots \wedge x_n$ seria uma base do espaço uni-dimensional $\overset{n}{\wedge} E$. Isto forçaria que $x_1 \wedge \dots \wedge x_r \neq 0$.

Do Teorema 4 resulta que o subespaço vetorial de E gerado por um conjunto $\{x_1, \dots, x_r\}$ de vetores linearmente independentes, coincide com o conjunto

$$M = \left\{ x \in E \;\middle|\; x \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_r = 0 \right\}.$$

Podemos refrasear isto que foi dito acima da seguinte maneira:

<u>Teorema 5.</u> A todo r-vetor decomponível $z = x_1 \wedge \dots \wedge x_r \neq 0$ corresponde um subespaço M de dimensão r tal que

$$M = \left\{ x \in E \;\middle|\; x \wedge z = 0 \right\}.$$

Evidentemente, $x_1, \dots, x_r$ é uma base de M.

Teorema 6. A $x_1\wedge\ldots\wedge x_r \neq 0$ e a $y_1\wedge\ldots\wedge y_r \neq 0$ corresponde o mesmo subespaço M se e sòmente se $x_1\wedge\ldots\wedge x_r = \lambda y_1 \ldots y_r$, $\lambda \neq 0$.

Demonstração. Com efeito, $x_i \in M$, $i = 1,2,\ldots,r$ resultando

$$x_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_i^{\,j}\, y_j$$

e portanto,

$$x_1\wedge\ldots\wedge x_r = \Big(\sum_{j_1=1}^{r} \alpha_1^{j_1}\, y_{j_1}\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{j_r=1}^{r} \alpha_r^{j_r}\, y_{j_r}\Big) =$$

$= \lambda y_1 \ldots y_r$ onde, é claro, $\lambda \neq 0$. Reciprocamente se $x_1\wedge\ldots\wedge x_r = \lambda y_1\wedge\ldots\wedge y_r$ então $y_i\wedge x_1\wedge\ldots\wedge x_r = \lambda y_i\wedge y_1\wedge\ldots\wedge y_r = 0$, isto é, cada y_i pertence ao subespaço gerado pelos x_j e do mesmo modo cada x_j pertence ao subespaço vetorial de E gerado pelos y_i.

3. Álgebra de Grassmann.

Já definimos (Def. 4) o que se entende por $\overset{r}{\wedge} E$ nos casos onde $r>1$. Para dar sentido a $\overset{o}{\wedge} E$ e a $\overset{1}{\wedge} E$ definimos:

$$\overset{o}{\wedge} = K, \quad \overset{1}{E} = E.$$

A Definição 6 nos dá a noção do produto exterior de um s-vetor por um r-vetro quando $s,r>1$. Para completar a definição 6 introduzimos a

Definição 7. $\alpha\wedge z = \alpha z$ se $\alpha \in \overset{o}{\wedge} E$, $z \in \overset{r}{\wedge} E$, $r>0$;

$x\wedge z = x\wedge x_1\wedge\ldots\wedge x_r$ onde $x \in \overset{1}{\wedge} E$,

e $z = x_1\wedge\ldots\wedge x_r$ onde $r \geq 1$;

$x\wedge z = z x$ se $x \in \overset{1}{\wedge} E$, $z \in \overset{o}{\wedge} E$.

É bom notar que $\overset{r}{\wedge} E$ é constituido apenas do elemento zero quando $r > n$, onde n é a dimensão de E.

Temos, portanto, definido o produto de um r-vetor u por um s-vetor v, e $u \wedge v \in \overset{r+s}{\wedge} E$ para $r,s \geqslant 0$.

Consideremos o conjunto $\wedge E$ das sequências $(u_o, u_1, \ldots)$ onde $u_i \in \overset{i}{\wedge} E$, $i = 0,1,2,\ldots$. Se $(u_o, u_1,\ldots), (v_o, v_1,\ldots) \in E$ definimos

1º) : $(u_o, u_1,\ldots) + (v_o, v_1,\ldots) = (u_o + v_o, u_1 + v_1,\ldots)$

2º) : $(u_o, u_1,\ldots) \; (v_o, v_1,\ldots) = (w_o, w_1,\ldots)$ onde

$$w_i = \sum_{r+s=i} u_r \wedge v_s$$

O conjunto $\wedge E$ com as definições acima forma uma álgebra que tem o nome de <u>álgebra de Grassmann</u>.

Como os elementos u_r com $r > n$ (dimensão de E) são todos iguais a zero, podemos escrever simplesmente

$$(u_o, u_1,\ldots) = (u_o, u_1,\ldots, u_n)$$

e os elementos da álgebra de Grassmann funcionam como se fôssem polinómios.

<u>Exercício</u> : se E tem dimensão n, demonstrar que $\wedge E$ tem dimensão 2^n.

4. <u>Dualidade entre $(\overset{r}{\wedge} E)$ e $\overset{r}{\wedge} E^*$</u>.

Seja E um espaço vetorial sôbre um corpo K e $e_1,\ldots, e_n$ uma sua base. Seja $e'_1,\ldots, e'_n$ a base dual em E^* . Do mesmo modo que para $\overset{r}{\wedge} E$, os r-covetores $e'_{i_1} \ldots e'_{i_r}$ $(i_1 < \ldots < i_r)$ formam uma base de $\overset{r}{\wedge} E^*$.

A relação $\langle e'_{i_1}\wedge\dots\wedge e'_{i_r}, e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_r}\rangle = \delta^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_r}$ $(i_1<\dots<i_r,\ j_1<\dots<j_r)$ define uma dualidade entre $\overset{r}{\wedge} E$ e $\overset{r}{\wedge} E^*$ isto é estabelece um isomorfismo entre $(\overset{r}{\wedge} E)^*$ e $\overset{r}{\wedge} E^*$.
(Naturalmente supomos a relação acima estendida linearmente a todos r-vetores e r-covetores).

Teorema 7. Seja $x_1\wedge\dots\wedge x_r$ um r-vetor decomponível e $x'_1\wedge\dots\wedge x'_r$ um r-covetor decomponível. Temos

$$\langle x_1\wedge\dots\wedge x_r,\ x'_1\wedge\dots\wedge x'_r\rangle = \det(\langle x_i, x'_j\rangle) .$$

Demonstração. De fato, estendendo ambos os membros da relação acima a $\overset{r}{\wedge} E\times\overset{r}{\wedge} E^*$ obtemos duas aplicações bilineares definidas sôbre $\overset{r}{\wedge} E\times\overset{r}{\wedge} E^*$ que coincidem nas bases $(e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_r},\ e'_{j_1}\wedge\dots\wedge e'_{j_r})$ e que portanto coincidem para pares quaisquer.

Observação. Êsse teorema nos mostra que a dualidade que definimos acima é na realidade independente de uma base particular.

§ 1 - VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

1. Funções numéricas diferenciáveis.

Definição 1. Seja $f:A \to R^1$ onde A é um conjunto aberto do R^n. Dizemos que a aplicação f é de classe C^r (ou r vezes contìnuamente diferenciável) se e sòmente se

$$\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}}$$

existe e é contínua para todo $s = \sum r_i \leqslant r$. Dizemos que f é de classe C^∞ (ou infinitamente diferenciável) se e sòmente se

$$\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}}$$

existe e é contínua para todo $s = \sum r_i$. Finalmente, dizemos que f é de classe C^ω (ou analítica em A) se e sòmente se para todo ponto $x \in A$ existe uma vizinhança V de x tal que f pode ser desenvolvida em série de potências convergente em V.

Seja $f:A \to R^m$, A conjunto aberto do R^n. Portanto $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Dizemos que f é de classe C^s ($s = r, \omega, \infty$) se e sòmente se f_i for de classe C^s, $i=1,2,\dots,m$, ou ainda, se $\varphi \circ f$ é de classe C^s para tôda função de classe C^s $\varphi : R^m \to R^1$.

Quando f for de classe C^s em A escrevemos $f \in C^s(A)$, ou $f \in \mathcal{F}_A^s$ ou quando $s = \infty$, $f \in \mathcal{F}_A$.

Se $f \in C^r(A)$ então $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{r-1}(A)$.

De agora em diante <u>função diferenciável</u> significará <u>função infinitamente diferenciável</u> a não ser que se faça menção explícita em contrário.

A função composta de duas funções diferenciáveis é diferenciável.

<u>Exercício 1.</u> Dados $x \in R^n$ e uma vizinhança U de x então

a): existe uma função diferenciável com valores em $[0,1]$ que é igual a 1 no ponto x e igual a 0 fora de U;

b): para qualquer vizinhança V de x, tal que $\bar{V} \subset \mathring{U}$ existe função numérica diferenciável nula em V e igual a 1 no $\complement U$.

Sugestão: começar considerando a seguinte função definida em R:

$g(x) = 0$ para $x \leqslant 0$ e $g(x) = \exp(-\frac{1}{x})$ para $x \geqslant 0$.

Tomar a função $h(x;a,b) = g(x-a)g(x-b)$ onde $a < b$ etc.

Ou: considerar a função $\rho_\varepsilon(x) = 0$ para $r \geqslant \varepsilon$

e $\rho_\varepsilon(x) = \exp(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - r^2})$ para $r \leqslant \varepsilon$ onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e

$r = (x_1^2 + \dots + x_n^2)$

<u>2. Variedades topológicas e diferenciáveis.</u>

<u>Definição 2.</u> Chama-se <u>variedade topológica de dimensão n</u> todo espaço topológico V separado e conexo tal que para todo $x \in V$ existe uma vizinhança aberta O de x que é homeomorfa a um conjunto aberto A do R^n.

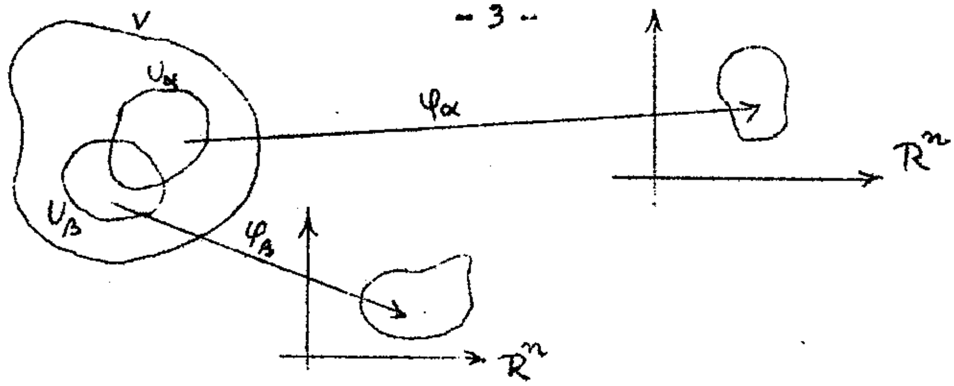
<u>Definição 3.</u> Seja V uma variedade topológica de dimensão n, e sejam U um subconjunto aberto de V e φ um homeomorfismo de U em R^n. O par (U, φ) tem o nome de <u>carta local</u>. Se $p \in U$ então $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ e os números $x_i(p)$, $i=1,2,\dots,n$, têm o nome de <u>coordenadas locais</u> de p na carta local (U, φ).

<u>Definição 4.</u> Seja V uma variedade topológica de dimensão n. Seja $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ um recobrimento de V de cartas locais, isto é, $\bigcup U_\alpha = V$, e tais que se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então a aplicação

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é diferenciável para todo , .

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é chamado um <u>atlas diferenciável</u> de V.



Considerando então a transformação inversa e a relação fornecida pelas matrizes das derivadas vemos que o determinante funcional da transformação é diferente de zero.

Para definir atlas de classe C^s basta supor que $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ seja de classe C^s ($s = r$ ou $s = \omega$).

Definição 5. Sejam $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e (U, ψ) um atlas diferenciável e uma carta local, respectivamente, de uma variedade topológica V de dimensão n. Dizemos que a carta local (U, ψ) é compatível com o atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ se e sòmente se para todo α tal que $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$ as aplicações

$$\varphi_\alpha \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap U_\alpha) \longrightarrow \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$$
$$\psi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \longrightarrow \psi(U \cap U_\alpha)$$

são diferenciáveis, ou ainda, o que é a mesma coisa, se ψ é diferenciável em $U \cap U_\alpha$ (em relação às coordenadas de U_α) e com determinante funcional diferente de zero.

Definição 6. Seja V uma variedade com um atlas diferenciável $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Uma função numérica $f: V^s \longrightarrow R^1$ é diferenciável se para todo α $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é diferenciável em $\varphi_\alpha(0_\alpha)$.

Esta definição não depende do particular 0_α pois se $(0_\beta, \varphi_\beta)$ for outra carta local tal que $0_\alpha \cap 0_\beta \neq \emptyset$, sendo $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ e $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ diferenciáveis, também $f \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = f \circ \varphi_\beta^{-1}$ será diferenciável.

Definição 7. Seja V uma variedade com um atlas diferenciável $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e seja 0 um subconjunto aberto de V. Uma função $f: 0 \longrightarrow R^1$

é diferenciável em O se e sòmente se para todo α tal que $O \cap U_\alpha \neq \emptyset$ a função $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é diferenciável.

Cabe aqui a mesma observação feita após a definição 6.

O conjunto de tôdas as funções $f: V \to R^1$ diferenciáveis será designado por $\mathcal{F}_V$ ou simplesmente por $\mathcal{F}$, e o conjunto de tôdas as funções diferenciáveis $f: O \to R^1$ onde O é um aberto de V, por $\mathcal{F}_O$.

<u>Definição 8</u>. Se juntamos a um atlas diferenciável uma carta local compatível o conjunto $\mathcal{F}$ não muda; em particular se temos dois atlas diferenciáveis de V tais que tôda carta local de um é compatível com o outro atlas, então ambos definem as mesmas funções diferenciáveis sôbre V. Nestas condições dizemos que os atlas são <u>equivalentes</u> e que definem a mesma estrutura de <u>variedade diferenciável sôbre V</u>, ou simplesmente a mesma <u>variedade diferenciável</u>.

Numa mesma variedade topológica podemos introduzir duas ou mais estruturas diferentes de variedades diferenciáveis. Por exemplo, seja $V = R^1$ com o atlas constituido da única carta local:

$$x \in V, \quad x \to x_1 = x$$

e seja $V = R^1$ com o atlas

$$x \in V, \quad x \to y_1 = x^3.$$

Temos duas estruturas de variedades diferenciáveis não equivalentes, pois $x_1 = y_1^{1/3}$ não é diferenciável.

<u>Exercício 2</u>. Dois atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ diferenciáveis de uma variedade diferenciável definem as mesmas funções numéricas diferenciáveis sôbre V se e sòmente se tôda carta local de um é compatível com o outro atlas.

<u>Exercício 3</u>. Mostrar a euqivalência da Def. 8 com a definição de variedade diferenciável dada por Chevalley em seu livro "Theory of Lie Groups".

<u>Solução</u>: Nesse livro, Chevalley dá a seguinte definição:

"Seja W uma variedade topológica e suponhamos que à cada ponto $x \in V$ esteja associada uma classe $a(x)$ de funções reais satisfazendo às seguintes condições:

I. Cada função em $a(x)$ é definida em alguma vizinhança de x (essa vizinhança podendo depender da função).

II. Se $F: O \subset R^p \longrightarrow R^1$ é uma função diferenciável e $g_1, \dots, g_p \in a(x)$ são definidas numa vizinhança V de x, e $(g_1(x), \dots, g_p(x)) \in O$ para todo $x \in V$ então a função $F(g_1, g_2, \dots, g_p): V \longrightarrow R^1$ pertence a $a(x)$.

III. É possível determinar um sistema ordenado de n funções $(f_1, \dots, f_n)$ em $a(x)$ definidas em U tal que $\phi_x = (f_1, \dots, f_n): U \longrightarrow R^n$ é um homeomorfismo de U em R^n. Se $y \in U$ então as funções $f_1, \dots, f_n \in a(y)$ e tôda função $g \in a(y)$ é da forma

$$g = F(f_1, \dots, f_n)$$

com $F: O \longrightarrow R^1$ $(O \subset R^n)$ diferenciável.

Nestas condições dizemos que foi definida sôbre W uma <u>estrutura de variedade diferenciável</u>, e a classe $a(x)$ é chamada de <u>classe das funções diferenciáveis em p</u>."

É claro que da Def. 8 resultam os postulados de Chevalley. Reciprocamente, para mostrar que a definição de Chevalley implica a Def. 8 basta mostrar como introduzir um atlas em V. Para isso, em cada ponto $x \in V$ definimos a seguinte carta local: (U, ϕ_x) onde $\phi_x = (f_1, \dots, f_n): U \longrightarrow R^n$ é homeomorfismo (condição III da definição de Chevalley); Se (W, ϕ_y) for outra carta local tal que $U \cap W \neq \emptyset$ então, ainda por III resulta que $g_i \in a(x)$, onde $\phi_y = (g_1, \dots, g_n)$, e g_i é da forma

$$g_i = F_i(f_1, \dots, f_n) \qquad i=1,2,\dots,n$$

com F_i diferenciável, isto é, a mudança de coordenadas é diferenciável, e então, (Def. 4) o conjunto destas cartas locais definem um atlas diferenciável sôbre V.

Seja O um conjunto aberto de uma variedade diferenciável V. O subespaço O é uma variedade topológica de mesma dimensão que V. Se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é o atlas que define a variedade diferenciável V então $\{(U_\alpha \cap O, \psi_\alpha)\}$, onde ψ_α é a restrição de φ_α a $U_\alpha \cap O$, é um atlas diferenciável em O que define uma estrutura de variedade diferenciável em O. Esta estrutura tem o nome de <u>estrutura induzida</u>.

Se temos duas variedades diferenciáveis V_1, V_2 de dimensões m e n respectivamente tais que V_1 é definida pelo atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e V_2 pelo atlas $\{(O_\beta, \psi_\beta)\}$ então podemos introduzir em $V_1 \times V_2$ uma estrutura de variedade diferenciável dando o atlas $\{(U_\alpha \times O_\beta, \theta_{\alpha\beta})\}$ onde $\theta_{\alpha\beta}$ é tal que $\theta_{\alpha\beta}(p, q) = (x_1(p), \dots, x_m(p), y_1(q), \dots, y_n(q))$ sendo $x_i(p), i=1,\dots,m, y_j(q), j=1,\dots,n$ as coordenadas locais nas cartas U_α e O_β respectivamente. É fácil mostrar que $\{(U_\alpha \times \theta_\beta, \theta_{\alpha\beta})\}$ é um atlas diferenciável. $V_1 \times V_2$ munido desta estrutura tem o nome de <u>variedade diferenciável produto</u>.

Exemplos:

1) R^1 com a aplicação idêntica.
2) R^n (variedade produto).
3) Um aberto O do R^n (estrutura induzida).
4) $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ com coordenadas locais
   $(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$ em $x_i > 0$ e em $x_i < 0$.
5) As curvas e superfícies regulares de R^3 (definidas no capítulo de Geometria Diferencial) com representações $X(t)$ e $X(u,v)$, respectivamente, infinitamente diferenciáveis. As coordenadas locais são t e (u,v), respectivamente.
6) R^1 com coordenadas locais $x_1 = x^3$, $x \in R^1$.
7) A faixa de Moebius que é o conjunto dos pontos $(x,y) \in R^2$ tais que $-1 \leq x \leq 1$, $-1 < y < 1$, onde identificamos os pontos

$(-1,y)$ com os pontos $(1, -y)$, definindo as seguintes cartas locais:

(a): para $x \neq -1$, $x \neq 1$, $(x,y) \to (y_1, y_2)$
onde $y_1 = x$, $y_2 = y$;

(b): para $x > 0$, $(x,y) \to (x_1, X_2)$ onde $x_1 = x - 1$, $x_2 = y$, e para $x < 0$ $(x,y) \to (x_1, x_2)$ onde $x_1 = x + 1$, $x_2 = -y$.

Na intersecção das duas cartas, para $x<0$ temos $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = -x_2$, e para $x>0$, $y_1 = x_1 + 1$, $y_2 = x_2$, o que nos mostra que é variedade diferenciável.

8) $S^1 = \left\{ (x,y) \quad R^2 \mid x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t \right\}$ com as cartas locais: $x = \cos t$ nos pontos onde $x \neq 1$, $x \neq -1$, e nos pontos onde $x = 1$ ou $x = -1$, $y = \operatorname{sen} t$.

9) O teorema das funções implícitas que se demonstra em Análise Clássica tem o seguinte enunciado: Sejam $F_i(x_1,\dots, x_n, y_1,\dots,y_r)$, $i = 1,\dots, r$, r funções numéricas diferenciáveis tais que em $(x_1^o,\dots,x_n^o, y_1^o,\dots, y_r^o) = (x_o ; y_o)$ temos $F_i \ (x_o ; y_o) = 0$ e

$$\frac{\partial(F_1,\dots,F_r)}{\partial(y_1,\dots,y_r)} \neq 0.$$

Então existem r funções $y_i = f_i\ (x_1,\dots, x_n)$ diferenciáveis numa vizinhança U de x_o satisfazendo as condições:

(a): $y_i^o = f_i\ (x_1^o,\dots, x_n^o)$, $i = 1,2,\dots, r$;

(b): $F_j\ (x_1,\dots, x_n, f_1(x_1,\dots,x_n),\dots, f_r(x_1,\dots,x_n)) = 0$
nos pontos $(x_1,\dots, x_n)$ de U.

Nestas condições o conjunto dos pontos
$(x_1,\dots, x_n, f_1\ (x_1,\dots, x_n),\dots, f_r\ (x_1,\dots, x_n))$
de R^{n+r} para $(x_1,\dots, x_n) \in U$ constituem uma variedade

diferenciável de dimensão n. Os pontos desta variedade são aquêles que satisfazem às equações

$$F_i(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_r)=0 \quad i=1,2,\ldots,r$$

$x_1,x_2,\ldots,x_n$ são coordenandas locais nos pontos desta variedade vizinhos de (x^o,y^o). Ver nº 5, Subvariedades, particularmente o teorema 7.

<u>Definição 9</u>. Seja V uma vriedade diferenciável. Um atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de V é <u>orientado</u> se e sòmente se os determinante funcionais das mudanças de coordenadas de uma carta local para outra são sempre positivos. Dizemos que uma variedade diferenciável V é <u>orientável</u> quando e sòmente quando existir um atlas orientado que define esta variedade, e neste caso dizemos que o atlas dá a <u>orientação</u> de V.

<u>Contra-exemplo</u>. A faixa de Moebius não é orientável.

<u>Definição 10</u>. Dadas as variedades diferenciáveis V e W de dimensões n e m respectivamente pelos atlas $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e $\{(W_\beta, \psi_\beta)\}$ dizemos que a aplicação $h: V \to W$ é diferenciável quando e sòmente quando

$$\psi_\beta \circ h \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

for diferenciável para tôdas as cartas locais $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$, (W_β, ψ_β) tais que $h(V_\alpha) \cap W_\beta \neq \emptyset$.

Sendo $(x_1,\ldots,x_n)$ e $(y_1,\ldots,y_m)$ as coordenadas locais em V_α e W_β respectivamente, as funções $y_i(h \circ \varphi_\alpha^{-1}) = y_i(x_1,\ldots,x_n)$ são diferenciáveis quando h for diferenciável. Pode-se ver fàcilmente que h é diferenciável se e sòmente se $f \in \mathfrak{F}_W$ implica $f \circ h \in \mathfrak{F}_V$.

<u>Definição 11</u>. Isomorfismo de V e W é um homeomorfismo h de V sôbre W tal que h e h^{-1} são aplicações diferenciáveis.

<u>Observação</u>. O conjunto das funções numéricas diferenciáveis $\mathfrak{F}_V$ determina a variedade diferenciável V a menos de um isomorfismo.

Exemplos

10) Seja V variedade diferenciável definida pelo atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e seja H um grupo de isomorfismos de H sôbre V, tal que para todo $x^o \in V$ existe uma vizinhança O de x^o tal que se $x,y \in O$, $x \neq y$, não existe $h \in H$, de modo que $y = h(x)$. Definimos a relação de equivalência: $x \mathcal{R} y$ se e sòmente se existe $h \in H$ de modo que $y = h(x)$, e consideramos o espaço quociente $V/\mathcal{R}$. Podemos introduzir em $V/\mathcal{R}$ uma estrutura de variedade diferenciável dando o seguinte atlas em $V/\mathcal{R}$: se $\dot{x} \in V/R$, seja $x \in V$ tal que $\dot{x} = p(x)$, onde $p: V \to V/\mathcal{R}$ é a projeção natural. Existe α tal que $x \in U_\alpha$ e existe O vizinhança de x satisfazendo as condições acima; $p(O \cap U_\alpha)$ é uma vizinhança de $\dot{x}$, e é fácil de se verificar que $p: O \cap U_\alpha \to p(O \cap U_\alpha)$ é uma aplicação biunívoca. Portanto temos em $V/\mathcal{R}$ a carta local em cada ponto $(p(O \cap U_\alpha), \varphi \circ p^{-1})$. É fácil demonstrar que estas cartas locais são tôdas compatíveis entre si usando do fato de que os $h \in H$ são isomorfismos diferenciáveis de V.

Casos particulares: Seja $V = R^1$ com a carta local $x \in R^1$, $x \to i(x) = x$. Consideremos o grupo de isomorfismos de R^1 em R^1: $h_n(x) = x + n$, n inteiro; todo $x \in R$ tem uma vizinhança, por exemplo, $\left]x - \frac{1}{4}, x + \frac{1}{4}\right[$, tal que se x_1, x_2 estão nessa vizinhança não existe $n \neq 0$ tal que $x_1 = h_n(x_2)$. Definimos: $x \mathcal{R} y$ se e sòmente se existe n tal que $y = h_n(x)$. O espaço quociente $R^1/\mathcal{R}$ é uma variedade topológica de dimensão um que é chamado de toro T^1. Tôda função $f: R^1 \to R^1$ diferenciável e periódica de período 1 induz uma função $g: R^1/\mathcal{R} \to R^1$ diferenciável, e reciprocamente, dada uma função diferenciável $g: R^1/\mathcal{R} \to R^1$ podemos definir uma função $f: R^1 \to R^1$ diferenciável periódica de período 1.

Seja agora R^2 com a carta local: $(x_1,x_2) \in R^2$, $(x_1,x_2) \longrightarrow i(x_1,x_2) = (x_1,x_2)$, e consideremos o grupo de isomorfismos de R^2 em R^2:

$$h_{m,n}(x_1,x_2) = (x_1 + ma, x_2 + nb)$$

onde m, n são inteiros.

Se $x \in R^2$, é fácil verificar que x tem uma vizinhança nas condições exigidas. O espaço quociente $R^2/\mathcal{R}$ tem o nome de toro T^2. Um sistema de representantes T^2 em R^2 é o retângulo cujos vértices são: (0,0), (a,0),(0,b), (a,b) onde retiramos o segmento que liga (0,0) com (a,0) e o segmento que liga (0,0) com (0,b).

11) Seja V uma variedade diferenciável. Seja $\tilde{V}$ um espaço topológico conexo e localmente conexo. O par $(\tilde{V}, \varphi)$ é um espaço de revestimento de V se e sòmente se $\varphi : \tilde{V} \longrightarrow V$ é uma aplicação contínua tal que todo ponto $x \in V$ tem uma vizinhança U satisfazendo a seguinte condição: $\varphi^{-1}(U) \neq \emptyset$ e qualquer componente conexa de $\varphi^{-1}(U)$ é transformada homeomòrficamente em U por φ. Como consequência, podemos introduzir em $\tilde{V}$ uma estrutura de variedade diferenciável, e então φ será uma aplicação diferenciável de $\tilde{V}$ em V.

12) O espaço projetivo real $P_n(R)$ de dimensão n com as seguintes cartas locais: em $x_i \neq 0$ as coordenadas locais do ponto de coordenadas homogêneas $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ são

$$\left(\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

Esta variedade é orientável se n é ímpar; caso contrário, ela não é orientável.

3. Vetores tangentes e diferenciais

Definição 12. Seja V uma variedade diferenciável de dimensão n. Um vetor tangente no ponto $x_o \in V$ é uma aplicação (linear)

$$X: \mathcal{F} \longrightarrow R^1$$

tal que

(a): $X(f + g) = X(f) + X(g)$

$X(\alpha f) = \alpha X(f), \quad \alpha \in R^1;$

(b): se $F: R^p \longrightarrow R^1$ é diferenciável e $g_i \in \mathcal{F}$, $i = 1,2,\ldots,p$ então

$$X(F(g_1,\ldots,g_p)) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial F}{\partial g_i}\right)_{x_o} X(g_i)$$

A condição (b) tem o nome de "lei de derivação de função composta".

Em particular se $F(g_1,g_2) = g_1 g_2$ resulta que

$$X(g_1 g_2) = g_2(x_o)X(g_1) + g_1(x_o)X(g_2)$$

e fazendo, em particular, $g_1 \equiv 1$ temos

$$X(g_2) = g_2(x_o)X(g_1) + X(g_2)$$

e portanto

$$X(g_1) = 0$$

isto é, o vetor tangente na aplicação constante é zero.

Lema. Se $f \in \mathcal{F}_V$ é tal que $f(x) = 0$ para todo x numa vizinhança U de x_o então $X(f) = 0$.

Demonstração. Seja W uma vizinhança de x_o tal que $\overline{W} \subset \mathring{U}$. Existe (Ex. 1 dêste parágrafo) uma função diferenciável $\varphi : V \longrightarrow R^1$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} = 0 & \text{se } x \in \overline{W} \\ = 1 & \text{se } x \in \complement U \end{cases}$$

Como $f = \varphi f$ temos

$$X(f) = X(\varphi f) = f(x_o)X(\varphi) + \varphi(x_o)X(f) = 0$$

Corolário. Se $f, g \in \mathcal{F}_V$ coincidem numa vizinhança de x_o, então $X(f) = X(g)$.

Observação. Se $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é uma carta local de V com coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$, a função x_i tal que

$$x \longrightarrow x_i(x) = x_i$$

é uma função diferenciável em U_α.

Seja W_α um conjunto aberto tal que $\overline{W} \subset \overset{\circ}{U}_\alpha$. Do exercício 1 dêste parágrafo resulta que existe uma função diferenciável $\varphi : V \longrightarrow R^1$ tal que

$$(x) = \begin{cases} = 0 & \text{se } x \in W_\alpha \\ = 1 & \text{se } x \in \complement U_\alpha \end{cases}$$

A função ψ tal que

$$\psi(x) = 1 - \varphi(x)$$

é diferenciável em V. Consideremos a função $\bar{x}_i$ tal que

$$\bar{x}_i(x) = \begin{cases} = x_i(x) & \text{se } x \in W \\ = \psi(x) & \text{se } x \in \complement U_\alpha \end{cases}$$

$\bar{x}_i$ coincide com x_i em W_α e é diferenciável em V. Por outro lado, o atlas $\{(W_\alpha, \varphi_\alpha / W_\alpha)\}$ é equivalente ao atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, e as coordenadas locais x_i na carta local W_α podem ser extendidas à variedade tôda, como funções diferenciáveis. Daqui em diante suporemos que todos os atlas satisfazem a esta condição e $X(x_i)$ significará $X(\bar{x}_i)$; pelo corolário do lema anterior, se existir outra extensão $\bar{\bar{x}}_i$, $X(\bar{\bar{x}}_i) = X(\bar{x}_i) = X(x_i)$.

Exemplos. Seja $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ uma carta local $(x_o \in U_\alpha)$ com coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$. Se $f \in \mathcal{F}$, a aplicação

$$X_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_o}$$

que associa a f o número real

$$X_i(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_o}$$

é um vetor tangente em x_o. Outros vetores tangentes são as aplicações X tais que

$$f \longrightarrow X(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_o}$$

onde os a_i são constantes reais quaisquer. Reciprocamente temos

Teorema 1. Sondo $(x_1,\dots,x_n)$ as coordenadas locais numa carta local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tal que $x_o \in U_\alpha$, qualquer vetor tangente em x_o é da forma

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_o}$$

Demonstração. Se $f \in \mathcal{F}$ e sendo $\bar{\bar{x}}_i \in \mathcal{F}$, $i=1,\dots,n$, temos, utilizando a condição (b) da Def. 12,

$$X(g) = X(f(\bar{\bar{x}}_1,\dots,\bar{\bar{x}}_n)) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_o} X(\bar{\bar{x}}_i)$$

onde $g(\bar{\bar{x}}_1,\dots,\bar{\bar{x}}_n) = f(\bar{\bar{x}}_1,\dots,\bar{\bar{x}}_n)$. Escrevendo $X(\bar{\bar{x}}_i) = a_i$ obtemos

$$X(g) = X(f) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_o} a_i$$

O conjunto T_{x_o} de todos os vetores tangentes em x_o é um espaço vetorial. Uma base de T_{x_o} é o conjunto dos vetores

$$X_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_o}$$

Com efeito, se $\sum \lambda_i X_i = 0$ então

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)_{x_o} = \lambda_j = 0$$

O espaço vetorial T_{x_o} é designado por <u>espaço vetorial tangente no</u>

<u>ponto x_0</u>, ou simplesmente <u>espaço tangente no ponto x_0</u>.

<u>Interpretação geométrica do vetor tangente</u>

Consideremos uma variedade bi-dimensional diferenciável, onde φ^{-1} é dada pelas equações:

$$x = \xi(u,v)$$
$$y = \eta(u,v)$$
$$z = \theta(u,v)$$

e seja f uma função numérica diferenciável definida no R^3. Então, sendo $X(u) = a$, $X(v) = b$, temos

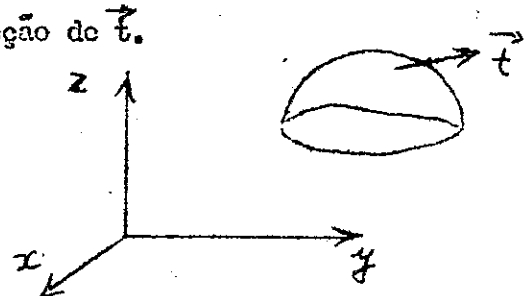
$$X(f) = \frac{\partial \phi}{\partial u} X(u) + \frac{\partial \phi}{\partial v} X(v)$$

onde $\phi(u,v) = f(\xi(u,v), \eta(u,v), \theta(u,v))$ e então

$$X(f) = (f_x \xi_u + f_y \eta_u + f_z \theta_u)a + (f_x \xi_v + f_y \eta_v + f_z \theta_v)b =$$

$$= (\text{grad } f, \; av(\xi_u, \eta_u, \theta_u) + bv(\xi_v, \eta_v, \theta_v)) = (\text{grad } f, \vec{t})$$

onde $\vec{t}$ é um vetor tangente à variedade. Portanto $X(f)$ é a derivada direcional de f na direção de $\vec{t}$.



<u>Nota</u>. Na definição de vetor tangente a condição (b) pode ser substituida pela condição

(b'): se $f, g \in \mathcal{F}$ então $X(fg) = f(x_0)X(g) + g(x_0)X(f)$.

Ambas as condições (b) e (b'), quando a variedade é diferenciável, isto é, infinitamente diferenciável, dão como resultado que qualquer vetor tangente X é da forma

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}$$

Entretanto, quando a variedade é de classe C^r, a condição (b') não dá êste resultado. Mostremos que supondo satisfeita (b') numa variedade diferenciável então

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_o}$$

De fato, $f(x) = f(x_o) + b_1(x_1-x_1^o) + \ldots + b_n(x_n-x_n^o) + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)(x_i-x_i^o)(x_j-x_j^o)$

onde $x_1,\ldots,x_n$ são as coordenadas de x_o. Pelo fato de ser f infinitamente diferenciável resulta que as funções $b_{ij}(x)$ são infinitamente diferenciáveis (uma conclusão análoga não podemos tirar quando $f \in C^r$) e então,

$$X(f)=X(f(x_o))+b_1X(x_1-x_1^o)+\ldots +b_n((x_n-x_n^o) + \sum_{i,j=1}^{n} X(b_{ij}(x)(x_i-x_i^o)(x_j-x_j^o)$$

Esta última parcela, como se pode verificar fàcilmente aplicando a condição (b') é zero, e notanto que $b_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_o}$ e $X(x_i) = a_i$, temos

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_o} a_i$$

Exercícios.

4) Seja $\quad :]-\varepsilon,\varepsilon[\to V$ (V variedade diferenciável) uma aplicação diferenciável tal que $\lambda(0) = X_o$. Definindo, para todo $f \in F$,

$$X(f) = \left(\frac{d(f\circ\lambda)}{dt}\right)_{t=0},$$

mostrar que X é um vetor tangente em x.

5) Definindo $c\lambda :]-\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}[\to V$ por $c\lambda(t) = \lambda(ct)$ mostrar que o vetor tangente definido por $c\lambda$ é cX.

Definição 13. Chama-se espaço dos vetores tangentes à variedade V ao conjunto

$$T(V) = \bigcup_{x_o \in V} T_{x_o}$$

Usaremos também a notação T_V ou simplesmente T quando não houver perigo de confusão.

Podemos introduzir em T_V uma topologia definindo: W é aberto se e sòmente se W é reunião de conjuntos da forma $0 \times U$ onde 0 é aberto em V e U um aberto de R^n. Consideremos agora o seguinte atlas sôbre T_V: $\{(W_\alpha, \psi_\alpha)\}$ onde $W_\alpha = U_\alpha \times R^n$ ($\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ o atlas que define V) e ψ_α assim definido:

$$\varphi_\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \right) = (\varphi_\alpha (x); a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Se $X \in T_V$ então X é determinado por n coordenadas $(x_1, \ldots, x_n a_1, \ldots, a_n)$

Se (U_β, φ_β) é outra carta local, na intersecção com $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ temos:

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_j \left(\sum_i a_i \frac{y_j}{x_i} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} =$$

$$= \sum b_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

onde

$b_j = \sum a_i \dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}$ e as coordenadas de X na nova carta local $\{(\ _\beta, \psi_\beta)\}$ são $(y_1, \ldots, y_n; b_1, \ldots, b_n)$.

Em geral a variedade T_V não é homeomorfa ao produto de V por R^n; ex. V = Superfície esférica.

<u>Teorema 2</u>. A variedade diferenciável T_V é orientável.

<u>Demonstração</u>. Com efeito, o determinante funcional da mudança de coordenadas de uma carta local para outra é

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} & \frac{\partial y_i}{\partial a_j} \\ \frac{\partial b_i}{\partial x_j} & \frac{\partial b_i}{\partial a_j} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} & 0 \\ * & \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \left[\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)\right]^2 > 0$$

<u>Definição 14</u>. O conjunto T_x^* das aplicações lineares $\omega : T_x \to R^1$ tem o nome de <u>espaço tangente dual</u> do espaço T_x, ou ainda espaço dos covetores tangentes no ponto x.

Se $f \in \mathfrak{F}$ podemos lhe associar um covetor tangente no ponto x_o que indicaremos por $(df)_{x_o}$ e que é definido por

$$(df)_{x_o}(X) = X(f).$$

Consideremos a carta local $(U_\alpha, x_1, \ldots, x_n)$ e a aplicação

$$x \to x_j(x)$$

Notando que $x_j \in \mathfrak{F}_{U_\alpha}$, e se $f \in \mathfrak{F}$, temos, (lembrando a convenção do $\bar{x}_j$!)

$$(df)_{x_o}(X) = X(f(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x_o} X(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_1^o, \ldots, x_n^o)\ (dx_i)_{x_o}(X)$$

Êste resultado nos diz que df é uma combinação linear dos $(dx_i)_{x_o}$, $i=1,\ldots,n$. Por outro lado o conjunto $\left\{(dx_1)_{x_o}, (dx_2)_{x_o}, \ldots, (dx_n)_{x_o}\right\}$ é a base do dual (ou a base dual) pois

$$(dx_j)_{x_0}\,(X_i) = X_i(x_j) = \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)_{x_0} = \delta^i_j$$

o que nos permite garantir que o conjunto de todos os df é exatamente o espaço T^*_x.

<u>Definição 15</u>. A aplicação $(df)_{x_0}: T_{x_0} \to R^1$ acima definida tem o nome de <u>diferencial da função f no ponto x_0</u>.

Quando não houver perigo de confusão, em vez de $(df)_{x_0}$ escreveremos simplesmente df. Usaremos para designar df(X) o símbolo $\langle X, df \rangle$.

Se F, $g_1, \ldots, g_p$ forem funções diferenciáveis que satisfazem à condição (b) da Def. 12 então temos

$$dF(g_1,\ldots,g_p)(X) = \langle X, dF(g_1,\ldots,g_p)\rangle = X(F(g_1,\ldots,g_p)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\partial F}{\partial g_i}\right)_{x_0} X(g_i) = \langle X, \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\partial F}{\partial g_i}\right)_{x_0} dg_i \rangle$$

isto é,

$$dF(g_1,\ldots,g_p) = \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\partial F}{\partial g_i}\right)_{x_0} dg_i$$

No caso particular onde $F(g_1,g_2) = g_1 g_2$ temos

$$d(g_1 g_2) = g_2(x_0)(dg_1)_{x_0} + g_1(x_0)(dg_2)_{x_0}$$

Sejam f,g duas funções diferenciáveis. Então, $(df)_{x_0} = (dg)_{x_0}$ se e sòmente se $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_0} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_{x_0}$, $i=1,2,\ldots,n$. De fato, df = dg se e sòmente se $\langle X,(df)_{x_0}\rangle = \langle X,(dg)_{x_0}\rangle$ para todo x T_{x_0} e em particular para $X = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}$ o que implica que $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_0} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_{x_0}$

Reciprocamente, se $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_0} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_{x_0}$ então

$X_i(f) = X_i(g)$ e portanto

$$X(f) = X(g).$$

<u>Definição 16</u>. O conjunto $T^*_V = \bigcup_{x \in V} T^*_x$ chama-se <u>espaço fibrado</u> dos covetores tangentes sôbre V.

A partir dos espaços vetoriais T_x e T^*_x podemos considerar o produto tensorial

$$(T_x)^r_s = T_x \otimes \dots \otimes T_x \otimes T^*_x \otimes \dots \otimes T^*_x$$

onde T_x aparece r vezes como fator e T^*_x s vezes. Então

$$T^r_s(V) = \bigcup_{x \in V} (T_x)^r_s$$

é o espaço dos tensores r vezes contravariantes e s vezes covariantes sôbre a variedade diferenciável V.

Podemos introduzir uma estrutura de variedade diferenciável em T^*_V e em $T^r_s(V)$ do mesmo modo como o fizemos em T_V

<u>Exercício 6</u>. Definir a estrutura de variedade diferenciável de $T^r_s(V)$.

<u>4. Transformação induzida no espaço tangente</u>.

Sejam V e W variedades diferenciáveis, e $\phi : V \longrightarrow W$ uma aplicação diferenciável (Def. 10). Se $x \in V$, ϕ induz uma aplicação

$$\phi^* : T_x \longrightarrow T_{\phi(x)}$$

assim definida:

$$\phi^*(X)(f) = X(f \circ \phi),$$

onde $f \in \mathfrak{F}_W$ e portanto $f \circ \varphi \in \mathfrak{F}_V$. $\phi^*(X)$ é um vetor tangente no ponto $y = \phi(x)$. Com efeito, é linear e é uma derivação, pois

$$\phi^*(X)(\alpha f + \beta g) = X((\alpha f + \beta g) \circ \phi) = X(\alpha f \circ \phi + \beta g \circ \phi) =$$
$$= \alpha X(f \circ \phi) + \beta X(g \circ \phi) = \phi^*(X)(f) + \phi^*(X)(g),$$

e

$$\phi^*(X)(F(g_1,\dots,g_p)) = X(F(g_1,\dots,g_p)\circ\phi) = X(F(g_1\circ\phi,\dots,g_p\circ\phi)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial F}{\partial z_i} X(g_i\circ\phi) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial F}{\partial z_i} \phi^*(X)(g_i) ,$$

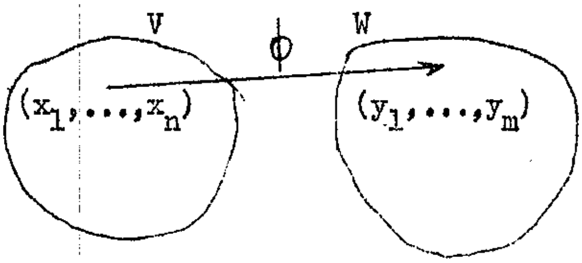
onde $z_i = g_i \circ \phi$, ficando portanto demonstrado que ϕ^* é aplicação de T_x em $T_y = T_{\phi(x)}$. É imediato que ϕ^* é uma aplicação linear

Definição 17. ϕ^* chama-se diferencial da aplicação ϕ.

Esta noção generaliza a noção de forma diferencial vetorial definida no capítulo de Geometria Diferencial: naquele capítulo a notação usada foi $d\phi$.

Exercício 7. Mostrar que quando $W = R^1$, então temos: $\phi^* = d\phi$.

Sugestão: Calcular $\phi^*(X)(i)$ onde $i: R^1 \longrightarrow R^1$ é a aplicação idêntica.



A aplicação $\phi: V \longrightarrow W$, localmente, induz m aplicações ϕ_i, pois $y_i = \phi_i(x_1,\dots,x_n)$. Sendo $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, temos

$$\phi^*(X_i)(f(y_1,\dots,y_m)) = X_i(f(\phi_1,\dots,\phi_m)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j} X_i(\phi_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}$$

e sendo $Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j}$, resulta:

$$\phi^*(X_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} Y_j ,$$

isto é, ϕ^* fica completamente determinada pela matriz

$$\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}\right) \quad , \ i=1,2,\ldots,m.$$

Teorema 3. ϕ^* é biunívoca se e sòmente se $\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_i}$ tem característica n (n dimensão de V).

Demonstração. É claro que sendo m a dimensão de W, para ϕ^* ser biunívoca devemos ter $n \leq m$.

Sejam $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad , \quad X' = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$

$$\phi^*(X) = \phi^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \phi^*(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \; Y_j$$

$$\text{e} \quad \phi^*(X') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \; Y_j$$

Se $\phi^*(X) = \phi^*(X')$, então temos

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} = 0$$

$X = X'$ se e sòmente se $a_i = b_i$, $i=1,2,\ldots,n$, o que acontecerá se e sòmente se a característica de $\left(\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_i}\right)$ for n.

Definição 16. Uma aplicação diferenciável $\phi : V \longrightarrow W$ é regular no ponto x se e sòmente se $\phi^* : T_x \longrightarrow T_{\phi(x)}$ é biunívoca.

Teorema 4. Sejam V e W variedades diferenciáveis. Seja $\phi : V \longrightarrow W$ uma aplicação diferenciável, e seja x_o um ponto de V. Suponhamos que $\phi^* : T_{x_o} \longrightarrow T_{\phi(x_o)}$ seja regular. Então, se $\{y_1, \ldots, y_m\}$ é um sistema de coordenadas em $\phi(x_o) \in W$ é possível selecionar no conjunto de funções $y_1 \circ \phi$,...,$y_m \circ \phi$ um subconjunto contendo n funções que forma um sistema de coordenadas em $x_o \in V$. Além disso, se $\{z_1,\dots,z_n\}$ é um sistema qualquer de coordenadas em x_o de V, existe um sistema de coordenadas $\{x_1,\dots,x_n\}$ em $\phi(x_o)$ de W tal que x_j coincide, na vizinhança de x_o, com z_j $(1 \leq j \leq n)$.

<u>Demonstração</u>. A demonstração pode ser feita utilizando-se o teorema 3.(Podemos encontrá-la no cap.II, § IV, Prop. 1 do livro Theory of Lie Groups - Chevalley)

<u>Teorema 5</u>. Usando a mesma notação do Teorema 4, suponhamos que a imagem de T_{x_o} por ϕ^* cubra todo o espaço $T_{\phi(x_o)}$, isto é, $T_{\phi(x_o)} \subset \phi^*(T_{x_o})$. Então, se $\{y_1,\dots,y_m\}$ é um sistema de coordenadas no ponto $\phi(x_o) \in W$, as funções $y_1 \circ \phi$,...,$y_m \circ \phi$ são parte de um sistema de coordenadas no ponto x_o de V.

<u>Demonstração</u>. Chevalley, cap. II, § IV, Prop. 2.

<u>Teorema 6</u>. Com a mesma notação do teorema 4, suponhamos que ϕ^* seja isomorfismo de T_{x_o} em $T_{\varphi(x_o)}$. Então existe uma vizinhança U de x_o que é transformada homeomòrficamente numa vizinhança N de $\phi(x_o)$. Além disso, a transformação inversa ϕ^{-1} de N em U é diferenciável.

<u>Demonstração</u>. Êste teorema é consequência dos Teoremas 4 e 5.

<u>5. Subvariedades</u>.

<u>Definição 19</u>. <u>Curva diferencial</u> em R^n é um subconjunto Γ de R^n tal que se $x \in \Gamma$, existe uma vizinhança V de x e um homeomorfismo $\varphi :]0,1[\longrightarrow V \cap \Gamma$, φ diferenciável.

O homeomorfismo φ induz n aplicações $x_1,\dots,x_n$ tais que

$\varphi(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$

e o conjunto dessas n aplicações tem o nome de <u>representação paramétrica</u> de Γ no ponto x. Dizemos que a representação é <u>regular</u> no ponto x se pelo menos uma das derivadas $\frac{\partial x_i}{\partial t} \neq 0$ no ponto x. Uma curva é <u>regular</u> em x se admitir uma representação regular em x; dizemos que a curva é <u>regular</u> quando for regular em todos seus pontos.

<u>Exemplos</u>

1): $\Gamma = \left\{ (x,y) \in R^2 \;\middle|\; y^2 = x^3 \right\}$ é uma curva diferenciável, pois podemos considerar a representação paramétrica $\begin{array}{l} x = t^3 \\ y = t^2 \end{array}$

Entretanto ela não é regular.

2): O conjunto dos pontos (x,y) satisfazendo à equação $F(x,y) = 0$ onde F é diferenciável e com $dF \neq 0$, ou equivalentemente $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ não nulas ao mesmo tempo, onde $F(x,y) = 0$

Se uma curva não é regular no ponto x, dizemos que x é <u>singular</u>. O ponto (0,0) é um ponto singular da curva Γ do Ex. 1

<u>Definição 20</u>. <u>Superfície diferenciável</u> em R^n é um subconjunto S do R^n tal que se $x \in S$ então existe uma vizinhança V de x e um homeomorfismo diferenciável $\varphi :]0,1[\times]0,1[\longrightarrow V \cap S$.

φ induz funções x_i tais que

$$\varphi(u,v) = (x_1(u,v), \ldots, x_n(u,v))$$

e o conjunto destas funções chama-se <u>representação paramétrica de S</u> no ponto x. A representação é regular no ponto x, se no ponto x, pelo menos um dos determinantes

$$\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u,v)} \neq 0.$$

A superfície é regular em x se admitir uma representação regular em x, e quando S for regular em todos os seus pontos, dizemos que S é regular.

Se x_o é ponto regular de uma curva, existe representação $x_1(t),\dots,x_n(t)$ tal que $\frac{dx_i}{dt}(t_o) \neq 0$ $(x_o = (x_1(t_o),\dots, x_n(t_o))$ para um certo i, e então podemos, numa vizinhança de t_o inverter a função x_i, obtendo $t = t(x_i)$ resultando

$$x = (x_1(t(x_i)),\dots,x_i,\dots, x_n(t(x_i)))$$

ou seja, podemos exprimir numa vizinhança tôdas as coordenadas do ponto em função de uma delas.

No caso de termos uma superfície regular num ponto, podemos numa vizinhança dêsse ponto exprimir tôdas as coordenadas em função de duas delas.

Uma das maneiras de obter uma curva em R^3 é dar duas funções $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ diferenciáveis tais que a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}$$

tenha característica 2 nos pontos (x,y,z) onde $F(x,y,z) = 0$, $G(x,y,z) = 0$. Êstes pontos constituem uma curva regular.

Teremos em R^3 uma superfície diferenciável se dermos uma função diferenciável $F(x,y,z)$ tal que $dF \neq 0$ nos pontos (que são os pontos da superfície) onde $F(x,y,z) = 0$.

As afirmações acima são justificadas pelo teorema das funções implícitas enunciado no Exerc. 8 do parágrafo 2.

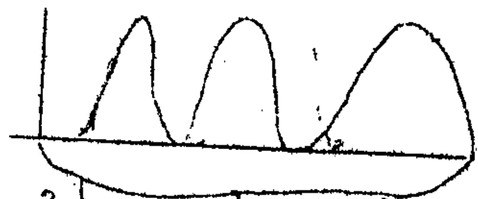
<u>Definição 21</u>. Dadas duas variedades diferenciáveis V e W e uma aplicação biunívoca diferenciável $\phi : V \to W$, dizemos que o par (V, ϕ) é uma <u>subvariedade</u> de V se e sòmente se ϕ^* é regular em todo $x \in V$ (ou ainda que ϕ^* é biunívoca em todo $x \in V$ (Def. 20)).

<u>Exemplos</u>:

1) $A = \left\{(x,y) \in R^2 \;\middle|\; y = \text{sen}\,\frac{1}{x} \text{ para } x \in \left]0,1\right] \right.$,

$(x,y) \in \{0\} \times [0,1]$ e mais uma curva ligando $(0,0)$ com $(1, \text{sen } 1)\}$.

(A,i) é uma subvariedade de R^2.



2) $A = \left\{ (x,y) \in R^2 \;\middle|\; y = \text{sen } \frac{1}{x},\ x > 0 \right\}$. (A,i) é subvariedade do R^2.

3) A aplicação

$$\varphi(\lambda) = (e^{2\pi i \alpha \lambda}, e^{2\pi i \beta \lambda})$$

(onde $\frac{\alpha}{\beta}$ é um número irracional) define a reta como uma subvariedade do toro T^2; $\varphi(R)$ é um subconjunto denso do toro.

4) Curvas regulares e superfícies regulares em R^n com aplicação idêntica i.

<u>Contra-exemplos</u>: 1) O segmento $\{0\} \times [0,1]$ não é subvariedade do R^2 pois o ponto $(0,1)$ não tem vizinhança homeomorfa a aberto do R^1.

2) O Ex. 1 de curva diferenciável $(x^3 = y^2)$.

<u>Teorema 7</u>. Seja V um subconjunto de uma variedade diferencial W de dimensão n. Então são equivalentes as três seguintes condições:

(a): V pode ser munido de uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão n tal que a imersão seja uma aplicação regular.

(b): para todo $x \in V$ existe uma carta local (U, φ) com coordenadas locais $x_1, \ldots, x_n$, de W, com $x \in U$ tal que as coordenadas dos pontos de $U \cap V$ podem ser expressas como funções diferenciáveis de m delas;

(c): para todo $x \in V$ existe uma carta local (U, φ) com coordenadas locais $z_1, \ldots, z_n$ tal que $U \cap V$ seja dado por $z_{m+1} = z_{m+2} = \ldots = z_n = 0$.

Demonstração. (a) implica (b) pois numa vizinhança do ponto,

$$x_i = f_i(y_1,\dots,y_m)$$

onde

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)$$

tem característica m, em virtude da imersão regular (Teor. 4). Suponhamos que

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)} \neq 0$$

Então, numa vizinhança do ponto, podemos inverter as funções, obtendo as funções diferenciáveis

$$y_i = \varphi_i\,(x_1,\dots,x_m), \quad i= 1,2,\dots,m.$$

Portanto,

$$x_{m+j} = f_{m+j}(\varphi_1(x_1,\dots,x_m),\dots,\varphi_m(x_1,\dots,x_m))$$

com $j=1,2,\dots,n-m$.

(b) implica (c). De fato, fazemos a mudança de coordenadas

$$z_i = x_i \text{ para } 1 \leq i \leq m$$
$$z_i = x_i - f_i(\;_1(x_1,\dots,x_m),\dots,\;_m(x_1,\dots,x_m))$$
$$\text{para } m < i \leq n$$

Fàcilmente vemos que $\dfrac{\partial(z_1,\dots,z_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = 1$ e portanto a mudança é permissível, e nas novas coordenadas $U \cap V$ é dado por $z_{m+1} = z_{m+2} = \dots = z_n = 0$.

(c) implica (a) trivialmente.

Definição 22. Dadas as variedades diferenciáveis V e W e uma aplicação biunívoca diferenciável $\phi : V \to W$, dizemos que (V, ϕ) é subvariedade regularmente imersa em W se e sòmente se (V, ϕ) é subvariedade de V e ϕ é homeomorfismo.

Contra-exemplos. Exemplos 2 e 4 de subvariedades.

Exercício 8. Tôda subvariedade (V, φ) regularmente imersa em W é uma subvariedade fechada de um aberto em W.

§ 2. Cálculo diferencial exterior.

1. Transformação infinitesimal ou campo de vetores tangentes.

Definição 1. Dada uma aplicação p de um conjunto B sôbre um conjunto A (que chamaremos de projeção) secção de B sôbre A é uma aplicação

$$\sigma : A \longrightarrow B$$

tal que

$$p \circ \sigma(x) = x$$

para todo $x \in A$.

Temos então $B = \bigcup_{a \in A} B_a$ onde $B_a = p^{-1}(a)$ e $B_a \cap B_{a'} = \phi$ se $a \neq a'$.

Definição 2. Seja V uma variedade diferenciável. Campo de vetores tangentes ou transformação infinitesimal é uma secção $X : V \longrightarrow T_V$ de T_V sôbre V, isto é, a todo $x \in V$ está associado um veTor tangente no ponto x.

Numa carta local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ com coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ o campo de vetores tangentes é dado por

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

isto é, $X_x = \sum_{i=1}^{n} a_i\big(x_1(x), \ldots, x_n(x)\big) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x$ para todo ponto $x \in U_\alpha$,

e as coordenadas locais dêste vetor tangente na carta local (W_α, ψ_α) (ver definição de variedade T_V) são

$$(x_1, \ldots, x_n, a_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, a_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

Dizer que a transformação infinitesimal X é, considerada como aplicação da variedade V na variedade T_V, é <u>diferenciável</u> é o mesmo que dizer que as funções $a_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i=1,2,\ldots,n$ são diferenciáveis (Def.10, §1).

<u>Teorema 1</u>. A transformação infinitesimal X é diferenciável se e sòmente se para tôda função $f:V\longrightarrow R^1$ diferenciável temos $X(f)$ diferenciável.

<u>Demonstração</u>. Se $a_i(x_1,\ldots,x_n)$ é diferenciável, também o será

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\ldots,x_n)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Recìprocamente, se $X(f)$ é diferenciável para qualquer $f\in\mathfrak{F}$, em particular, para $f(x_1,\ldots,x_n) = x_j$, resulta

$$X(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\ldots,x_n)\,\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = a_j(x_1,\ldots,x_n),$$

diferenciável.

<u>Observação</u>: Quando a variedade V é o espaço afim R^n podemos interpretar o espaço vetorial tangente no ponto $x\in R^n$ como o espaço vetorial dos vetores de origem x associado ao espaço afim R^n. Dar um campo de vetores tangentes em R^n é então dar um vetor em cada ponto de R^n.

A partir de agora suporemos que tôdas as transformações infinitesimais são diferenciáveis, a menos que se faça menção explícita do contrário.

2. <u>Grupo local, a um parâmetro, de transformações locais</u>.

<u>Definição 3</u>. Seja V uma variedade diferenciável de dimensão n. Consideremos a aplicação ϕ tal que se $t\in R^1$

$$t\longrightarrow\phi_t$$

onde $\phi_t:V\longrightarrow V$ é um homeomorfismo de V em V satisfazendo as condições:

(a): $\phi_s \circ \phi_r = \phi_{s+r}$, $\quad s,r \in R^1$;

(b): a aplicação $(t,x) \longrightarrow \phi_t(x)$ de $R \times V$ em V é uma aplicação diferencial de $R \times V$ em V, isto é, sendo $(U_\alpha, x_1,\ldots,x_n)$, $(U_\beta, y_1,\ldots,y_n)$ cartas locais tais que $|t - t_o| < \varepsilon$, $x \in U_\alpha$, $\phi_t(x) \in U_\beta$, e portanto

$\phi_t(x) = (y_1,\ldots,y_n) = (\varphi_1(t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_n(t,x_1,\ldots,x_n))$

então as funções φ_i são diferenciáveis nas variáveis $(t,x_1,\ldots,x_n)$.

O grupo $\{\phi_t\}_{t\in R^1}$ chama-se <u>grupo de transformações de V a um parâmetro</u>.

<u>Exemplo</u>. Em R^1 temos o grupo de transformações a um parâmetro $\{\phi_t\}_{t\in R^1}$ onde $\phi_t(x) = x + t$.

De (a) resulta que $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$ e $\phi_o = i$ (aplicação idêntica de V). De (b) resulta que todos os homeomorfismos ϕ_t são diferenciáveis.

Como $\phi_o(x) = x$ e φ_i são diferenciáveis e portanto contínuas, existem $\delta > 0$ e uma vizinhança U de x tais que se $|t| < \delta$ e $p \in U$, então

$$\phi_t(p) \in U_\alpha$$

A partir de um grupo de transformações podemos definir um campo de vetores tangentes. Com efeito, sendo $p \in V$, seja X_p tal que

$$X_p(f) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\phi_t(p)) - f(p)}{t}$$

onde $f \in \mathcal{F}$. Podemos demonstrar fàcilmente que X_p é linear. Por outro lado, se $F: R^m \longrightarrow R^1$ e $g_i \in \mathcal{F}$, F é diferenciável, temos

$$X_p(F(g_1,\ldots,g_m)) = \lim_{t\to 0} \frac{F(g_1(\phi_t(p)),\ldots,g_m(\phi_t(p))) - F(g_1(p),\ldots,g_m(p))}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial g_i}\right)_{g_i(p)} \left[g_i(\phi_t(p)) - g_i(p)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial g_i}\right)_{g_i(p)} \lim_{t\to 0} \frac{g_i(\phi_t(p)) - g_i(p)}{t} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial g_i}\right)_{g_i(p)} X_p(g_i)$$

isto é, X_p é um vetor tangente em p. X é uma transformação infinitesimal pois se $f \in \mathcal{F}$ então $X(f) \in \mathcal{F}$.

Em geral nem todo campo de vetores tangentes vem de um grupo de transformações de V. Por exemplo, em $V =]-1, 1[$ o campo de vetores tangentes $X = \frac{d}{dx}$ vem de $\phi_t(x) = x + t$ que stá definido quando $|x+t| < 1$. Entretanto, considerando grupos locais, tôda transformação infinitesimal vem de um grupo local.

<u>Definição 4</u>. Seja V uma variedade diferenciável de dimensão n. Se para todo $x \in V$, existe $]-\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x[$ e uma vizinhança U_x tal que em $Q = \bigcup_{x\in V}]-\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x[\times U_x$ (Q é uma vizinhança de $\{0\} \times V$ em $R \times V$) está definida uma função

$$\phi : Q \longrightarrow V$$

(com valor $\phi(t,x) = \phi_t(x)$) tal que para $t \in]-\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x[$ a restrição ϕ'_t de ϕ_t a U_x seja homeomorfismo satisfazendo às seguintes condições:

(a): se $s, t \in]-\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x[$ são tais que $s+t \in]-\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x[$ então $\phi'_s \circ \phi'_t = \phi'_{s+t}$;

(b): a aplicação $(t,x) \longrightarrow \phi'_t(x)$ é uma aplicação diferenciável de $]-\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x[\times U_x$ em V isto é se $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ for carta local com coordenadas locais $(x_1,\dots,x_n)$, (podemos supor $U_x \subset U_\alpha$) e portanto $\phi_t(x_1,\dots,x_n) = (\varphi_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots, \varphi_n(t,x_1,\dots,x_n))$ então as funções $\varphi_i(t,x_1,\dots,x_n)$, $i=1,2,\dots,n$, são diferenciáveis nas variáveis $t,x_1,\dots,x_n$, então dizemos que ϕ é um <u>grupo local a um parâmetro, de transformações locais de V</u>.

Um grupo local de transformações locais define uma transformação infinitesimal X; se $p \in V$ e $f \in \mathcal{F}$ definimos

$$X_p(f) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[f(\phi_t(p)) - f(p) \right] .$$

A demonstração de que X_p é vetor tangente em p se faz do mesmo modo que antes.

<u>Teorema 1</u>. Se X é transformação infinitesimal então existe um e um único grupo local de transformações locais ϕ tal que para $f \in \mathcal{F}$ temos

$$X_p(f) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[f(\phi_t(p)) - f(p) \right] .$$

<u>Demonstração</u>. Seja $(U_\alpha, x_1, \dots, x_n)$ uma carta local. Nesta carta local o campo de vetores se exprime por

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

onde $a_i(x_1, \dots, x_n)$ são funções diferenciáveis. Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = a_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

com condições iniciais $\varphi_i(0) = x_i(x)$ $(x \in U_\alpha)$. Para cada $x \in U_\alpha$, existe uma vizinhança U_x e um $\mathcal{E}_x > 0$ tal que na vizinhança U_x o sistema tem uma única solução definida para $|t| < \mathcal{E}_x$, que designaremos por $\varphi_i(t, x_1(x), \dots, x_n(x))$, verificando as condições iniciais, e diferenciáveis em t, $x_1, \dots, x_n$ e portanto contínuas nessas variáveis. Então, notando que $\varphi_i(0, x_1(p), \dots, x_n(p)) = x_i(p)$, (condições iniciais) e como U_α é vizinhança de p, existem $\mathcal{E} > 0$, $\delta_i > 0$, $i=1,2,\dots,n$, tais que se $|t| < \mathcal{E}$, $|x_i(x) - x_i(p)| < \delta_i$ temos

$(\varphi_1(t, x_1(x), \dots, x_n(x)), \dots, \varphi_n(t, x_1(x), \dots, x_n(x))) \in U_\alpha$, ou seja, definindo

$$\phi_t(x) = (\varphi_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n)),$$

$\phi_t(x) \in U_\alpha$ se $|t| < \varepsilon$ e $x \in U$,

Mostremos que $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$ para $|s| < \varepsilon_x$, $|t| < \varepsilon_x$ e $|s+t| < \varepsilon_x$.

Com efeito considerando ψ_s tal que

$$\psi_s(x) = (\psi_1(s,x),\ldots,\psi_n(s,x)) = \phi_{s+t}(x)$$

isto é

$$\psi_i(s,x) = \varphi_i(s+t,x) \qquad i=1,2,\ldots,n$$

que derivando em relação a s nos dá

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u}$$

onde $u = s+t$, isto é, ψ_i e φ_i satisfazem ao mesmo sistema de equações diferenciais.

O sistema

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial s} = a_i(\psi_1,\ldots,\psi_n) \qquad i=1,2,\ldots,n$$

com condições iniciais $\psi_i(0) = \varphi_i(t,x)$, $i=1,2,\ldots,n$, que devido à unicidade da solução, tem solução

$$\varphi_i(s, \ _i(t,x_1,\ldots,x_n),\ldots, \varphi_n(t,x_1,\ldots,x_n)) ,$$

ou seja

$$\psi(s,x) = \phi_s \circ \phi_t(x) \text{ , isto é}$$

$$\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$$

Tomando $|t| < \varepsilon$ resulta que

$$\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_o,$$

ficando portanto demonstrado que ϕ é um grupo local de transformações locais em p. Por outro lado, se $f \in \mathcal{F}$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\phi_t(x)) - f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(\varphi_1(t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_n(t,x_1,\ldots,x_n)) - f(x_1,\ldots,x_n)}{t} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}\right)_{t=0} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p a_i(x_1(p),\ldots,x_n(p)) = X_p(f).$$

A unicidade do ϕ segue da unicidade da solução do sistema de equações diferenciais.

<u>Observação</u>. Se o grupo local de transformações locais $\phi_t(x)$ é tal que existe um $a > 0$ tal que $\phi_t(x)$ está definido para $|t| < a$ para todo $x \in V$ então podemos extender $\phi_t(x)$ a um grupo de transformações a um parâmetro, de V.

Com efeito, dado $s \in R$ existe um n tal que $\left|\frac{s}{n}\right| < a$. Definimos $\phi_s(x) = \phi_{s/n} \circ \phi_{s/n} \circ \ldots \circ \phi_{s/n}(x) = (\phi_{s/n})^n(x)$. Esta definição é independente do n particular: se $\left|\frac{s}{m}\right| < a$ então

$$(\phi_{s/n}) = ((\phi_{s/nm})^m)^n = (\phi_{s/nm})^{nm} = ((\phi_{s/nm})^n)^m = (\phi_{s/m})^m.$$

Temos que $\phi_{t+s}(x) = \phi_t \circ \phi_s(x)$. Com efeito tomemos n tal que $\left|\frac{t}{n}\right| < a$, $\left|\frac{s}{n}\right| < a$ e $\left|\frac{t+s}{n}\right| < a$. Temos $\phi_{t+s} = (\phi_{\frac{t+s}{n}})^n = (\phi_{\frac{t}{n}+\frac{s}{n}})^n = (\phi_{t/n} \circ \phi_{s/n})^n =$

$$= \phi_{t/n} \circ \phi_{s/n} \circ \phi_{t/n} \circ \phi_{s/n} \circ \ldots \circ \phi_{t/n} \circ \phi_{s/n} = (\phi_{t/n})^n (\phi_{s/n})^n =$$
$$= \phi_t \circ \phi_s$$

(Lembrar que $\phi_{t/n}$ e $\phi_{s/n}$ comutam). É claro que os ϕ_t assim definidos ainda são homeomorfismos diferenciáveis de V e portanto está demonstrada nossa afirmação.

Daí segue imediatamente o

<u>Corolário</u>. Sôbre uma variedade compacta tôda transformação infinitesimal define um grupo de transformações a um parâmetro.

<u>Exercício 1</u>. Seja X uma transformação infinitesimal definida sôbre

uma variedade compacta V e tal que $X_x \neq 0$ para todo $x \in V$. Demonstrar que existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\phi_t(x) \neq x$ para todo $x \in V$ e $|t| < \varepsilon$, $t \neq 0$ (ϕ_t indica o grupo de transformações associado a X).

Observemos que a transformação ϕ_t acima é então uma transformação contínua (é mesmo homeomorfismo diferenciável) de V sem ponto fixo e homotópica à aplicação idêntica ($F(s,x) = \phi_{s/\varepsilon}(x)$, $0 \leq s \leq 1$, $t = \frac{s}{\varepsilon}$, define a homotopia). Do teorema dos pontos fixos de Lefschetz segue que a característica de Euler-Poincaré da variedade V é neste caso igual a zero (Ver a parte de Topologia Algébrica).

Portanto se uma variedade compacta admite um campo de vetores tangentes que não se anula, sua característica de Euler-Poincaré é nula.

Ou ainda: Numa variedade compacta cuja característica de Euler-Poincaré é diferente de zero todo campo (diferenciável) de vetores tangentes tem pelo menos um ponto singular, isto é, um ponto em que êle se anula. É o que acontece por exemplo sôbre a superfície esférica ($\chi(S^2) = 2$).

<u>Teorema 2</u>. Seja X uma transformação infinitesimal X tal que $X_p \neq 0$. Então existe uma carta local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ com coordenadas locais $y_1, \ldots, y_n$, tal que $p \in U_\alpha$, onde

$$X = \frac{\partial}{\partial y_1}$$

<u>Demonstração</u>. Seja (U_β, φ_β) uma carta local com coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ tal que $p \in U_\beta$. Nesta carta local, X é expressa por

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

com $a_1(x_1(p), \ldots, x_n(p)) \neq 0$ (podemos fazer esta hipótese sem perda de generalidade!) Seja $Q = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V \mid |x_i - x_i(p)| < a\}$ onde a é suficientemente pequeno para que $Q \subset U_\beta$, e consideremos o sistema de equações

$$\frac{\partial z_i}{\partial y_1} = a_i(z_1, \ldots, z_n) \qquad i=1,2,\ldots,n$$

O sistema possue uma única solução diferenciável

$$x_i = \psi_i(y_1, x_1(p), \ldots, x_n(p)) \qquad i=1,2,\ldots,n$$

com condições iniciais

$$\psi_i(0, x_1(p), \ldots, x_n(p)) = x_i(p), \qquad i=1,2,\ldots,n$$

para $|y_1| < b$.

A aplicação tal que

$$x_1 = \psi_1(y_1, x_1(p), \ldots, x_n(p)) = \varphi_1(y_1, \ldots, y_n)$$

$$x_i = \psi_i(y_1, x_1(p), \ldots, x_n(p)) + y_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n)$$

$i=2,\ldots,n$ tem determinante funcional igual a $a_1(x_1(p),\ldots,x_n(p)) \neq 0$ no ponto p, e portanto é um homeomorfismo φ_α de uma determinada vizinhança U_α de p, em R^n. Como consequência $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ com coordenadas $(y_1,\ldots,y_n)$ é uma carta local compatível com o atlas que define V. Seja agora $f \in \mathcal{F}$ e calculemos $\frac{\partial}{\partial y_1}(f)$:

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{isto é,} \quad X = \frac{\partial}{\partial y_1} \quad \text{nas}$$

coordenadas locais $y_1, \ldots, y_n$.

<u>Exercícios.</u>

2. Definir transformação infinitesimal <u>contínua</u>. Mostrar que a transformação infinitesimal é contínua $\Longleftrightarrow$ $a_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i=1,\ldots,n$, são contínuas $\Longleftrightarrow$ para todo $f \in \mathcal{F}$ então $X(f)$ é contínua.

3. Enunciado do Ex. 2 substituindo a palavra "contínua" por "r vezes diferenciável".

4. Definir do modo análogo um campo de tensores do tipo (r,s), isto é, r vezes contravariante e s vezes covariante sôbre V.

3. <u>Parêntesis de Poisson.</u>

Quando X,Y são transformações infinitesimais diferenciáveis, a transformação

$$[X,Y] = X \circ Y - Y \circ X = XY - YX$$

é uma transformação infinitesimal diferenciável. Com efeito, $[X,Y]$ é linear e

$$[X,Y]\left(F(g_1,\dots,g_m)\right) = X\left(Y\left(F(g_1,\dots,g_m)\right)\right) - Y(X(F(g_1,\dots,g_m))) =$$

$$= X \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial g_i} Y(g_i)) - Y \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial g_i} X(g_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} X \frac{\partial F}{\partial g_i} Y(g_i) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial g_i} X(Y(g_i)) - \sum_{i=1}^{m} Y(\frac{\partial F}{\partial g_i}) X(g_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial g_i} Y(X(g_i)) \quad ;$$

sendo numa carta local com coordenadas $(x_1,\dots,x_n)$, $X = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$,

$Y = \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ então

$$\sum_{i=1}^{m} X \frac{\partial F}{\partial g_i} Y(g_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial F'_{g_i}}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \frac{\partial g_i}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j,k=1}^{n} a_j(x)\, b_k(x) \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial g_\ell \, \partial g_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

e analogamente,

$$\sum_{i=1}^{m} Y(\frac{\partial F}{\partial g_i}) X(g_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j,k=1}^{n} b_j(x).\ a_k(x) \quad \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial g_\ell \partial g_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} ,$$

e como $\dfrac{\partial^2 F}{\partial g_\ell\, \partial g_i} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial g_i\, \partial g_\ell}$, estas duas últimas expressões são iguais resultando

$$[X,Y] \quad (F(g_1,\ldots,g_m)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial g_i} X(Y(g_i)) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial g_i} Y(X(g_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{g_i} [X,Y] \quad (g_i).$$

O fato de $[X,Y]$ ser diferenciável resulta de que X, Y são diferenciáveis (Teorema 1).

<u>Definição 5</u>. A transformação infinitesimal $[X,Y]$ tem o nome de <u>parêntesis de Poisson de X e Y</u>.

O parêntesis de Poisson goza das seguintes propriedades de fácil verificação

(a): $[X,Y] = - [Y,X]$;
(b): $[X, [Y,Z]] + [Y, [Z,X]] + [Z, [X,Y]] = 0$;
(c): $[X_1 + X_2, Y] = [X_1,Y] + [X_2,Y]$;
(d): $[aX,Y] = a [X,Y]$, a constante.
A propriedade (b) é chamada de <u>identidade de Jacobi</u>.

<u>Teorema 3</u>. Seja $\phi : V \longrightarrow W$ uma aplicação de uma variedade diferenciável V em uma variedade diferenciável W, regular em todos os pontos de V (Def. 18, § 1). Se $p \in V$, seja $\tilde{T}_p = \phi_p^*(T_p)$. Se Y é uma transformação infinitesimal em W tal que $Y_{\phi(p)} \in \tilde{T}_p$ para todo ponto $p \in V$, então existe uma e somente uma transformação infinitesimal em V tal que $Y = \phi^*(X)$.

Demonstração. Ver "Theory of Lie Groups" - Chevalley - Prop. 1, Cap. III, § VI.

Teorema 4. Seja ϕ uma aplicação diferenciável de uma variedade diferenciável V em uma variedade diferenciável W. Sejam X_1, X_2 transformações infinitésimais em V, e Y_1, Y_2 transformações infinitesimais em W. Se $Y_i = \phi^*(X_i)$, i=1,2, então

$$[Y_1, Y_2] = \phi^*([X_1, X_2])$$

Demonstração. "Theory of Lie Groups" - Chevalley, Propos. 2, Cap. III, § VI.

4. Formas de Pfaff.

Seja V uma variedade diferenciável e consideremos T^*_V o espaço fibrado dos covetores tangentes de V. Podemos introduzir uma estrutura de variedade diferenciável em T^*_V exatamente como foi feito para T_V (ver exerc. § 1). Então é imediato que uma secção $\omega : V \longrightarrow T^*_V$ de T^*_V sôbre V é diferenciável se e sòmente se, sendo

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n)\ dx_i$$

a expressão de numa carta local, as funções $a_i(x_1, \dots, x_n)$, i=1,2,...,n são diferenciáveis.

Definição 7. Uma secção diferenciável $\omega : V \longrightarrow T^*$ tem o nome de forma de Pfaff.

Teorema 5. Uma secção $\omega : V \rightarrow T^*$ é diferenciável se e sòmente se $\omega(X) = \langle X, \omega \rangle$ é uma função diferenciável para todo X diferenciável.

Demonstração. Se $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n)\ dx_i$ numa carta local com coordenadas locais $(x_1, \dots, x_n)$ e $X = \sum_{j=1}^{n} b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}$ então

$$<X,\omega> = < \sum_{j=1}^{n} b_j(x_1,\dots,x_n) \frac{\partial}{\partial x_j} \ , \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\dots,x_n)dx_i > =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} b_j(x_1,\dots,x_n).a_i(x_1,\dots,x_n) < \frac{\partial}{\partial x_j} \ , \ dx_i > =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1,\dots,x_n).\ a_i(x_1,\dots,x_n)$$

que é diferenciável pois por hipótese $a_i(x_1,\dots,x_n)$ e $b_i(x_1,\dots,x_n)$ são diferenciáveis. Reciprocamente se $<X,\omega>$ é diferenciável para todo X diferenciável, em particular para $X = \frac{\partial}{\partial x_j}$ resulta

$$< \frac{\partial}{\partial x_j} \ , \omega > = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\dots,x_j) < \frac{\partial}{\partial x_j}, \ dx_i > = a_j(x_1,\dots,x_n)$$

diferenciável.

Daqui para diante suporemos tôda forma de grau um diferenciável.

5. <u>Forma diferenciável de grau s.</u>

<u>Definição 8</u>. Sendo V uma variedade diferenciável de dimensão n, em todo ponto $x \in V$ temos o espaço T_x^* dos covetores tangentes em x. O espaço

$$\bigcup_{x \in V} \overset{s}{\Lambda} \ T_x^*$$

tem o nome de <u>espaço fibrado dos s-vetores sôbre V</u>.

<u>Definição 9</u>. Uma <u>forma de grau s</u> é uma secção $\omega : V \to \bigcup_{x \in V} \overset{s}{\Lambda} \ T_x^*$, isto é, a cada ponto $x \in V$ associamos um s-vetor em x.

Numa carta local com coordenandas $(x_1,\dots,x_n)$ uma forma de grau s se exprime por

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_s} a_{i_1 \ldots i_s}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{i_1} \wedge \ \ldots \wedge dx_{i_s}$$

<u>Definição 10</u>. Dizemos que uma forma de grau s é diferenciável se e sòmente se as funções $a_{i_1 \ldots i_s}(x_1, \ldots, x_n)$ são diferenciáveis.

Se introduzirmos, de um modo óbvio, uma estrutura de variedade diferenciável em $\bigcup \overset{s}{\wedge} T_x^*$, esta definição equivale a dizer que a secção é uma aplicação diferenciável.

<u>Teorema 6</u>. Uma forma de grau s é diferenciável se e sómente se $\omega(Y_1, \ldots, Y_s) = \langle Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_s, \omega \rangle$ é uma função diferenciável para quaisquer $Y_1, \ldots, Y_s$ diferenciáveis.

<u>Demonstração</u> Sendo $Y_j = \sum_{i=1}^{n} b_i^j(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$ então

$$\langle Y_1 \quad \ldots \quad Y_s, \omega \rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{j_k \neq j_\ell} b_{j_1}^1 \ldots b_{j_s}^s \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_s}}, \sum_{i_1 < \ldots < i_s} a_{i_1 \ldots i_s}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_s} \right\rangle =$$

$$= \sum_{\substack{j_k \neq j_\ell \\ i_1 \ldots i_s}} b_{j_1}^1 \ldots b_{j_s}^s\, a_{i_1 \ldots i_s} \left(\det \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}, dx_i \right\rangle \right) ;$$

mas êste determinante só pode ser igual a zero, a 1 ou a -1, o que mostra que

$\langle Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_s, \omega \rangle$ é diferenciável. Para mostrar a recíproca basta considerar:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \ldots, \quad Y_s = \frac{\partial}{\partial x_{j_s}} \quad :$$

$$\langle Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_s, \omega \rangle = a_{j_1 \ldots j_s}(x_1, \ldots, x_n) .$$

Daqui para diante suporemos diferenciáveis tôdas as formas de grau s, salvo aviso em contrário.

Chamaremos as funções diferenciáveis de formas de grau zero. Sendo ω uma forma de grau s e $f \in \mathcal{F}$ definimos: $f \wedge \omega = f\omega$.

As formas de grau um são as formas de Pfaff.

6. Diferenciação exterior de formas

Teorema 7. Existe uma e uma única operação ∂ que associa a tôda forma de grau s uma forma de grau s+1 tendo as seguintes propriedades:

(1): $\partial\,(\omega + \omega_1) = \partial\,(\omega) + \partial(\omega_1)$;

(2): sendo ω forma de grau p então

$$\partial\,(\omega \wedge \omega_1) = \partial\,(\omega) \wedge \omega_1 + (-1)^p \omega \wedge \partial\,(\omega_1) \quad ;$$

(3): se $f \in \mathcal{F}$ então $\partial f = df$;

(4): $\partial\partial\, f = 0$ para todo $f \in \mathcal{F}$.

Demonstração. Dada uma carta local $(U; x_1, \ldots, x_n)$, seja ω uma forma cuja expressão local é $\omega = \sum a_{i_1 \ldots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$. Vamos demonstrar que $\partial\omega$ tem necessàriamente a expressão local

$$\partial\omega = \sum da_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

Inicialmente observemos que se $\omega = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ numa carta local então $\partial\omega = 0$ nesta carta local. Com efeito quando p = 2,

$$\partial\,(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}) = \partial\,(dx_{i_1}) \wedge dx_{i_2} - dx_{i_1} \wedge \partial\,(dx_{i_2}) \quad ;$$

da condição (4) resulta

$$\partial\,(dx_{i_j}) = \partial\,(\partial\, x_{i_j}) = 0 \quad , \; j=1,2.$$

Portanto $\partial\,(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}) = 0$. Supondo que

$$\partial(dx_{i_1}\wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}) = 0$$

temos

$$\partial(dx_{i_1}\wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}} \wedge dx_{i_p}) = \partial(dx_{i_1}\wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}) \wedge dx_{i_p} +$$

$$+ (-1)^{p-1}(dx_{i_1}\wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}) \wedge \partial(dx_{i_p}) = 0.$$

Sendo agora $\omega = a_{i_1 \dots i_p}(x)\, dx_{i_1}\wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ temos

$$\partial(\omega) = \partial(a_{i_1\dots i_p}(x)\, dx_{i_1}\wedge \dots \wedge dx_{i_p}) =$$

$$= \partial(a_{i_1\dots i_p}(x)) \wedge (dx_{i_1}\wedge \dots \wedge dx_{i_p}) + (-1)^0 a_{i_1\dots i_p}(x) \wedge \partial(dx_{i_1}\wedge \dots \wedge dx_{i_p}) =$$

$$= d(a_{i_1\dots i_p}(x)) \wedge dx_{i_1}\wedge \dots \wedge dx_{i_p} \quad ;$$

para o caso mais geral, isto é, quando

$\omega = \sum a_{i_1\dots i_p}(x)\, dx_{i_1}\wedge \dots \wedge dx_{i_p}$, resulta, devido à condição (1), que

$$\partial(\omega) = \sum d(a_{i_1\dots i_p}(x)) \wedge dx_{i_1}\wedge \dots \wedge dx_{i_p} \,.$$

O operador ∂ é único, pois se existisse outro ∂' satisfazendo (1), (2), (3), (4) teríamos

$$\partial'(\omega) = \sum d(a_{i_1\dots i_p}(x)) \wedge dx_{i_1}\wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

e portanto

$$\partial' = \partial$$

<u>Teorema 8</u>. Para qualquer forma ω de grau p $(p \geqslant 0)$ temos $\partial\partial\omega = 0$
A demonstração é fácil.

Daqui em diante escreveremos $d\omega$ em lugar de $\partial\omega$. $d\omega$ se chama

<u>diferencial exterior</u> da forma e a aplicação $\omega \longrightarrow d\omega$ se chama <u>diferenciação exterior</u>.

A diferencição de formas pode ser caracterizada intrinsecamente (isto é, sem usar da expressão de uma forma em coordenadas locais) do seguinte modo:

<u>Teorema 7'</u>. A diferenciação exterior é um endomorfismo do conjunto dos p-formas de uma variedade diferenciável no conjunto das (p+1)-formas desta variedade caracterizado pelas propriedades seguintes:

(a): Se f é uma 0-forma, isto é, uma função diferenciável sôbre V, então $df(x) = X(f)$ para tôda transformação infinitesimal X de V.

(b): Se ω é uma p-forma $(p \geqslant 1)$ sôbre V então

$$(d\omega)(X_1,\dots,X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i\omega(X_1,\dots,X_i,\dots,X_{p+1}) +$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\left([X_i,X_j], X_1,\dots,X_i,\dots,X_j,\dots,X_{p+1}\right)$$

A demonstração é simples, basta verificar que o endomorfismo assim definido satisfaz às propriedades 1 a 4 do teorema 7.

Se ω é uma 2-forma temos em particular

$$(d\omega)(X_1,X_2) = X_1\omega(X_2) - X_2\omega(X_1) - \omega([X_1,X_2])$$

7. <u>Interpretação do cálculo diferencial exterior em R^3</u>.

Uma forma diferencial f de grau zero sôbre R^3 é simplesmente uma função diferenciável definida em R^3.

Fazendo corresponder a dx_1, dx_2 e dx_3 no ponto x os vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ de R^3 no ponto x então a uma forma de grau um

$$\omega^{(1)}(x) = v_1(x)dx_1 + v_2(x)dx_2 + v_3(x)dx_3$$

corresponde um campo vetorial $\vec{V}(x) = v_1(x)\vec{i} + v_2(x)\vec{j} + v_3(x)\vec{k}$.

A uma forma de grau 2

$$\omega^{(2)}(x) = a_1(x)dx_2 \wedge dx_3 + a_2(x)dx_3 \wedge dx_1 + a_3(x)dx_1 \wedge dx_2$$

corresponde um campo de tensores antisimétricos de ordem 2 que pode ser interpretado como um campo $\vec{A}(x) = a_1(x)\,\vec{i} + a_2(x)\,\vec{j} + a_3(x)\,\vec{k}$ de vetores axiais (que se distinguem dos vetores comuns chamados polares pelo fato de não mudarem de sinal quando mudamos a orientação do espaço invertendo os sentidos dos três eixos por exemplo) se aos produtos exteriores $dx_1 \wedge dx_2$, $dx_2 \wedge dx_3$, $dx_3 \wedge dx_1$ fazemos corresponder os produtos vetoriais $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ são agora interpretados como vetores axiais), isto é, se ao produto exterior de duas um-formas fazemos corresponder o produto vetorial dos seus campos de vetores correspondentes.

A uma forma de grau três

$$\omega^{(3)} = s(x)\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

corresponde uma função pseudo-escalar $s(x)$ (isto é, uma função que muda de sinal quando mudamos a orientação de R^3) se a $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ fazemos corresponder o produto interno do vetor polar $\vec{i}$, por exemplo, pelo vetor axial $\vec{j} \wedge \vec{k}$, isto é, o produto mixto $\vec{i}\cdot(\vec{j} \wedge \vec{k})$ $(= (\vec{i} \wedge \vec{j})\cdot\vec{k})$ (que é um pseudo-escalar); isto é, ao produto exterior de uma 1-forma por uma 2-forma fazemos corresponder o produto interno do campo de vetores correspondente à primeira pelo campo de vetores axiais correspondente à segunda.

Portanto:

a $\displaystyle df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$ corresponde

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\vec{k}$$

A $$d\,\omega^{(1)} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1$$ corresponde

$$\text{rot}\,\vec{V}(x) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\vec{k}$$

A $d\omega^{(2)} = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ corresponde

$$\text{div}\,\vec{A}(x) = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

As relações $dd\omega = 0$ e $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge (d\omega_2)$ onde ω_1 é uma r-forma têm então as seguintes interpretações:

$ddf = 0$	$\text{rot grad } f = 0$
$dd\,\omega^{(1)} = 0$	$\text{div rot } \vec{V} = 0$
$d(fg) = (df)g + f(dg)$	$\text{grad}(fg) = g.\text{grad } f + f.\text{grad } g$
$d(f\omega^{(1)}) = df \wedge \omega^{(1)} + fd\omega^{(1)}$	$\text{rot}(fV) = \text{grad } f \wedge \vec{V} + f \text{ rot } \vec{V}$
$d(f\omega^{(2)}) = df \wedge \omega^{(2)} + fd\omega^{(2)}$	$\text{div } f\vec{A} = \text{grad } f.\vec{A} + f \text{ div } \vec{A}$
$d(\omega_1^{(1)} \wedge \omega_2^{(1)}) = d\omega_1^{(1)} \wedge \omega_2^{(1)} - \omega_1^{(1)} \wedge d\omega_2^{(1)}$	$\text{div}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = (\text{rot}\vec{V}_1)\cdot\vec{V}_2 - \vec{V}_1 \cdot \text{rot}\vec{V}_2$

§ 3. Teorema de Frobenius.

1. Sistema diferencial.

Seja V uma variedade diferenciável de dimensão n. Sejam $G^r(T_x)$ o conjunto de todos os subespaços de dimensão r de T_x, e $G^{n-r}(T^*_x)$ o conjunto de todos os subespaços de dimensão n-r de T^*_x. A aplicação que a todo subespaço W de um T_x associa o subespaço ortogonal $W^{\perp}$ de T^*_x define um isomorfismo canônico de $G^r(T_x)$ sôbre $G^{n-r}(T^*_x)$.

Consideremos os conjuntos

$$G^r(V) = \bigcup_{x \in V} G^r(T_x),$$

$$G^{*(n-r)}(V) = \bigcup_{x \in V} G^{n-r}(T^*_x).$$

Definição 1. Chama-se sistema diferencial de dimensão r ou distribuição de dimensão r tôda secção $F:V \to G^r(V)$, isto é, a todo ponto $x \in V$ corresponde um subespaço W^r_x de dimensão r de T_x.

Desde que a todo subespaço W^r_x de T_x corresponde um subespaço $W^{\perp(n-r)}_x$ de dimensão n-r de T^*_x, à secção $F:V \to G^r(V)$ corresponderá uma secção

$$F^*:V \longrightarrow G^{*(n-r)}(V).$$

Definição 2. Se para cada $p \in V$ existirem uma carta local ($(U_\alpha, x_1,\dots,x_n)$ com $p \in U_\alpha$, e r transformações infinitesimais diferenciáveis $X_1,\dots,X_r$ linearmente independentes em U_α tais que $(X_1)_y,\dots,(X_r)_y$ são uma base de W^r_y para todo $y \in U_\alpha$, então dizemos que o sistema diferencial F é diferenciável. Se a transformação infinitesimal X for tal que para todo ponto $x \in V$ o subespaço vetorial T_x gerado por X_x é um subespaço de F(x) diremos, por abuso de linguagem, que $X \in F$.

Daqui para diante suporemos diferenciável todo sistema diferencial.

Se $X_1,\dots,X_r$ é uma base de W_x^r sôbre um aberto U, completando-a numa base $X_1,\dots,X_n$ de T_x e considerando a base dual $\omega_1,\dots,\omega_n$ $(\omega_i(X_j) = \delta_j^i)$ então $\omega_{r+1},\dots,\omega_n$ é uma base de ${W_x^*}^{(n-r)}$. Portanto, a todo sistema diferencial F de dimensão r fica associada uma forma de grau n-r que se pode exprimir localmente como

$$\Omega = \omega_{r+1}\wedge\dots\wedge\omega_n.$$

<u>Definição 3</u>. Seja (W,ϕ) uma subvariedade de V. W é <u>variedade integral</u> de um sistema diferencial F se e sòmente se para todo ponto $y \in W$ temos

$$\phi^*(T_y) \subset F(\phi(y)) = W_y^r .$$

<u>Definição 4</u>. Um sistema F é <u>completamente</u> integrável se e sòmente se para todo ponto x V existe uma carta local $(U_\alpha, x_1,\dots,x_n)$ com $x \in U_\alpha$ tal que cada subvariedade definida por x_{r+1}=cte.,..., x_n= cte. é uma variedade integral de F.

<u>Exemplo</u>. Quando damos uma equação $\frac{\partial y}{\partial x} = f(x,y)$ estamos dando em cada ponto do plano uma direção. Integrar a equação significa determinar uma curva, que será a variedade integral, tal que o vetor tangente à curva no ponto (x,y) faz com o eixo dos x um ângulo θ tal que $\operatorname{tg}\theta = f(x,y)$. Êste problema pode ser encarado sob o seguinte aspecto: suponhamos que a solução de $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ seja dada por $u(x,y) = c$. Então $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}y' = 0$ ou $\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Reciprocamente, se $u(x,y)$ satisfaz a esta última equação, $u(x,y) = c$ nos dá uma solução de $y' = f(x,y)$. Portanto as equações

$$y' = f(x,y) \quad \text{e}$$

$$Xu = 0$$

onde $X = \frac{\partial}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ são equivalentes. Por outro lado X é um sistema diferencial de dimensão 1. Efetuando a mudança de coordenadas

$$u = u(x,y)$$
$$v = v(x,y),$$

$u(x,y) = c$ nos dá uma variedade integral. Com efeito, o espaço tangente a esta subvariedade é gerado pelo vetor tangente $\dfrac{\partial}{\partial v}$, e

$$X(g(x(u,v),y(u,v)) = \frac{\partial g}{\partial x} X(x) + \frac{\partial g}{\partial y} X(y) =$$
$$= \frac{\partial g}{\partial x}\left\{\frac{\partial x}{\partial u} X(u) + \frac{\partial x}{\partial v} X(v)\right\} + \frac{\partial g}{\partial y}\left\{\frac{\partial y}{\partial u} X(u) + \frac{\partial y}{\partial v} X(v)\right\} =$$
$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right) X(v) = X(v)\frac{\partial}{\partial v}\left[g(x(u,v),y(u,v))\right]$$

donde resulta

$$X = a\frac{\partial}{\partial v} .$$

2. Derivação em aneis graduados.

Definição 5. Dado um anel A, dar uma graduação de A é dar uma decomposição de A em soma direta de subgrupos A_g, $A = \sum_{g\in G} A_g$, e uma lei de composição (que indicaremos aditivamente) associativa e comutativa em G tal que se $x \in A_g$ e $y \in A_h$ então $xy \in A_{g+h}$.

Um anel com uma graduação se chama anel graduado.

Exemplos.

1) Seja $G = \{0\}$ e $A = A^0$ um anel. $A = \sum A^0$ é um anel graduado trivial.

2) Seja $G = N = \{0,1,2,\ldots\}$ e E um espaço vetorial de dimensão n. A álgebra $\wedge E = \sum_{i\in N} \overset{i}{\wedge} E = \sum_{i=1}^{n} \overset{i}{\wedge} E$ é um anel graduado com o produto

$$xy = x\wedge y \in \overset{r+s}{\wedge} E \text{ se } x\in \overset{r}{\wedge} E,\; y\in \overset{s}{\wedge} E.$$

3) A álgebra dos tensores covariantes $\otimes E = \sum_{r\in N} \overset{r}{\otimes} E$.

4) A álgebra dos tensores contravariantes $\otimes E^* = \sum_{r\in N} \overset{r}{\otimes} E^*$.

5) Se E^r_s indica o espaço dos tensores r vezes contravariantes e s vezes covariantes, $\sum\limits_{r,s} E^r_s$ munido com a operação do produto tensorial, tem uma estrutura de anel graduado. Neste caso $G = N \times N$ com soma: $(r,s) + (r',s') = (r+r',s+s')$.

6) Sejam V uma variedade diferenciável e A^n o conjunto das formas de grau n sôbre V.

$$A = \sum_{n \in N} A^n$$

munido com a multiplicação exterior de forma é um anel graduado.

Quando $G = N = \{0,1,2,\dots\}$ um elemento $(a_n)_{n \in N}$ pode ser escrito na forma

$(a_o,a_1,\dots,a_p,0,0,\dots) = (a_o,0,0,\dots) + (0,a_1,0,\dots) + \dots + (0,\dots,0,a_p,0,\dots)$.

Neste caso escreveremos

$$(0,\dots,a_i,0,\dots) = a_i.$$

Portanto,

$$(a_o,a_1,\dots,a_p,0,\dots) = a_o + a_1 + \dots + a_p, \quad a_i \in A^i.$$

Diremos que um elemento de A_i é um elemento <u>homogêneo de grau i</u>.

Quando os elementos de A^n forem da forma

$$\sum b_o \, a_1^{j_1} \dots a_1^{j_q}$$

onde $b_o \in A^o$ e $a_1^{j_s} \in A^1$, diremos que o anel graduado é gerado pelos elementos de graus zero e um.

<u>Definição 6</u>. Seja $A = \sum\limits_{n \in N} A_n$ um anel graduado. A <u>operação barra</u> é uma aplicação de A em A tal que se $x \in A^n$,

$$\bar{\bar{x}} = (-1)^n x,$$

e se $a = a_o + a_1 + \dots + a_p$,

$$\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}_o + \bar{\bar{a}}_1 + \dots + \bar{\bar{a}}_p.$$

Definição 7. Uma aplicação linear $D:A \longrightarrow A$, A anel graduado, é uma derivação se e sòmente se tivermos:

(a): $D\bar{x} = \overline{Dx}$;

(b): $D(xy) = (Dx)y + x(Dy)$.

Uma aplicação linear $D:A \longrightarrow A$, é uma anti-derivação se e sòmente se tivermos:

(a'): $D\bar{x} = -\overline{Dx}$

(b'): $D(xy) = (Dx)y + \bar{x}\,(Dy)$

Exemplos.

1) Seja $A = \mathfrak{F}$ o anel graduado das funções diferenciáveis numa variedade diferenciável V. Tôda transformação infinitesimal X é uma derivação. Mostre como exercício que tôda derivação em $\mathfrak{F}$ é uma transformação infinitesimal.

2) A diferenciação exterior de formas é uma antiderivação no anel graduado das formas diferenciais exteriores.

Teorema 1. Sejam A um anel graduado e $\mathfrak{D}$ o conjunto de tôdas as derivações sôbre A. Se $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$ então $D_1D_2 - D_2D_1 \in \mathfrak{D}$.

A demonstração é simples.

Indicaremos $D_1D_2 - D_2D_1$ por $[D_1, D_2]$.

Teorema 2. Se D é uma anti-derivação num anel graduado, então DD é uma derivação.

Teorema 3. Se D_1 é uma derivação e D_2 anti-derivação então D_1D_2 é antiderivação.

Observação: Num anel graduado gerado pelos seus elementos de graus zero e um, se duas derivações ou duas antiderivações coincidem nos geradores, então elas coincidem em todos os elementos do anel.

<u>Exercício</u>: Demonstrar que a aplicação $(D_1,D_2)\in \mathfrak{D}\times \mathfrak{D}\to [D_1,D_2]\in \mathfrak{D}$ goza das propriedades dos Parênteses de Poisson.

Já vimos que (§2, Teor. 1) numa variedade diferenciável V, a tôda transformação infinitesimal X corresponde, biunivocamente, um grupo local a um parâmetro de transformações locais ϕ_t. Se $q\in V$, seja $q' = \phi_t(q)$. ϕ_t transforma uma vizinhança V_q de q numa vizinhança $V_{q'}$ de q'. Portanto, ϕ_t induz uma transformação $\phi_t^*: T_q \to T_{q'}$ tal que

$$\phi_t^*(X)f = X(f\circ \phi_t), \text{ para } f\in \mathcal{F}.$$

Por outro lado,

$$df(\phi_t^*(X)) = \phi_t^*(X)f = X(f\circ\phi_t) = d(f\circ\phi_t)(X)$$

isto é a todo $df\in T^*_{q'}$ está associado um $d(f\circ\phi_t)$ T^*_q. Escrevendo

$$d(f\circ\phi_t) = \phi_t^*(df),$$

(podemos usar esta notação pois não há perigo de confusão), obtemos uma transformação

$$\phi_t^* : T^*_{q'}\to T^*_q .$$

Vamos supor que t seja suficientemente pequeno para que exista uma carta local $(U_\alpha, x_1,\dots,x_n)$ de modo que $q, q'\in U_\alpha$. Nesta carta local uma forma de grau s é dada por

$$\omega = \sum a_{i_1\dots i_s}(x_i)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_s} .$$

Vamos indicar por $\phi_t^*\omega$ a forma

$$\phi_t^*\omega = \sum a_{i_1\dots i_s}(x_i\circ\phi_t)(\phi_t^* dx_{i_1})\wedge\dots\wedge(\phi_t^* dx_{i_s}).$$

De maneira análoga procedemos quando tivermos um campo de tensores de tipo (r,0) ou (0,s) ou (r,s).

<u>Definição 8</u>. Dada uma transformação infinitesimal X à qual corresponde o grupo local de transformações locais ϕ_t, chama-se <u>derivada associada a X</u> ao operador D_X que a uma p-forma ω associa uma p-forma D_X definida por

$$D_X \omega = \lim_{t \to 0} \frac{(\phi_t^* \omega)_q - \omega_q}{t}$$

É fácil verificar que D_X é uma derivação no anel graduado das formas diferenciais exteriores, isto é, que é linear, que $D_X \overline{\omega} = \overline{D_X \omega}$ e que $D_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = (D_X \omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (D_X \omega_2)$. Portanto D_X fica perfeitamente determinada pelo seu modo de operar sôbre as formas de grau 0 e 1:

$$D_X(f) = X(f) \text{ e}$$

$$D_X(df) = dX(f) = dD_X(f)$$

Se $\omega = f$ é uma forma de grau zero temos

$$D_X f = \lim_{t \to 0} \frac{f \circ \phi_t(q) - f(q)}{t} = X_q(f)$$

Se ω é forma de grau 1, basta demonstrar para $\omega = dg$, $g \in \mathfrak{F}$. Então temos

$$D_X(dg) = \lim_{t \to 0} \frac{dg(\varphi_1(t,x_1,\ldots,x_n,\ldots,\varphi_n(t,x_1,\ldots,x_n)) - dg(x_1,\ldots,x_n)}{t} =$$

$$= d \lim_{t \to 0} \frac{g(\varphi_1(t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_n(t,x_1,\ldots,x_n)) - g(x_1,\ldots,x_n)}{t} =$$

$$= d\, D_X g = dX(g)$$

Como $\phi_t^* : T_q \to T_{q'}$ então $\phi_{-t}^* : T_{q'} \to T_q$. Sendo Y uma transformação infinitesimal, $D_X Y$ é definida por

$$D_X Y = \lim_{t \to 0} \frac{\phi_{-t}^* Y - Y}{t}$$

Teorema 4. $D_X\langle Y,\omega\rangle = \langle Y, D_X\omega\rangle + \langle D_X Y,\omega\rangle$

Demonstração. Com efeito,

$$D_X\langle Y,\omega\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{\langle \phi^*_{-t} Y, \phi^*_t\omega\rangle - \langle Y,\omega\rangle}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\langle \phi^*_{-t} Y, \phi^*_t\omega\rangle - \langle \phi^*_{-t} Y,\omega\rangle + \langle \phi^*_{-t},\omega\rangle - \langle Y,\omega\rangle\right. =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\langle \phi^*_{-t} Y, \phi^*_t\omega - \omega\rangle + \langle \phi^*_{-t} Y - Y,\omega\rangle\right] =$$

$$= \langle Y, D_X\rangle \quad - \langle D_X Y,\rangle \quad .$$

Teorema 5. Se Y é transformação infinitesimal, então

$$D_X Y = [X, Y]$$

Demonstração. Com efeito,

$$D_X Y(f) = \langle D_X Y, df\rangle = D_X\langle Y, df\rangle - \langle Y, D_X df\rangle =$$

$$= D_X(Y(f)) - (D_X df)(Y) = XY(f) - d(D_X f)(Y) =$$

$$= XY(f) - d(Xf)(Y) = (XY - YX)f$$

Teorema 6. $dD_X = D_X d$.

Demonstração: pelo teorema 3 dD_X e $D_X d$ são antiderivações no anel graduado das formas diferenciais exteriores; portanto para demonstrar que elas são iguais, basta demonstrar que elas coincidem sôbre as formas do graus 0 e 1 (ver observação que segue o Teor. 3):

$$dD_X f = dX(f) = D_X(df) \qquad \text{e}$$

$$dD_X(f.dg) = d\left(D_X f.dg + f.D_X(dg)\right) = d\left[X(f).dg + f.dX(g)\right] =$$

$$= dX(f)\wedge dg + df\wedge dX(g) = D_X(df)\wedge dg + df\wedge D_X(dg) =$$

$$= D_X(df\wedge dg) = D_X\, d(f.dg)$$

<u>Teorema 7</u>. Se ω é forma de grau 1 então temos

$$D_X < Y, \omega > - D_Y < X, \omega > = < X \wedge Y, d\omega > + < [X,Y], \omega >$$

<u>Demonstração</u>. Basta demonstrar no caso onde $\omega = gdf$. Então temos

$$D_X < Y, gdf > - D_Y < X, gdf > = < D_X Y, gdf > + < Y, D_X gdf > - < D_Y X, gdf > -$$

$$- < X, D_Y gdf > = < [X,Y], gdf > + < Y, (D_X g) df + g D_X df > - < [Y,X], gdf > -$$

$$- < X, (D_Y g) df + g D_Y df > = 2 < [X,Y], gdf > + < Y, X(g) df > + g < Y, D_X df > -$$

$$- < X, Y(g) df > - g < X, D_Y df > = 2 < [X,Y], gdf > + X(g)Y(f) +$$

$$+ g < Y, dD_X f > - Y(g)X(f) - g < X, dD_Y f > =$$

$$= < [X,Y], gdf > + g < [X,Y], df > + X(g)Y(f) + gYX(f) - Y(g)X(f) -$$

$$- gXY(f) = < [X,Y], gdf > + < X \wedge Y, dg \wedge df >.$$

<u>Teorema 8</u>. Seja V variedade diferenciável de dimensão n. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ transformações infinitesimais linearmente independentes em todos os pontos de uma carta local $(U_\alpha, x_1, \ldots, x_n)$, e $\omega_1, \ldots, \omega_n$ formas de grau um tais que nesta carta local

$$< X_j, \omega_i > = \delta_j^i$$

Então temos

$$b_{ij}^{\ell} = c_{ij}^{\ell}$$

onde c_{ij}^{ℓ}, b_{ij}^{ℓ} são funções dadas por

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k \qquad (c_{ij}^k = - c_{ji}^k)$$

$$d\omega_\ell = - \frac{1}{2} \sum_{s,t} b_{st} \omega_s \wedge \omega_t \quad (b_{st} = -b_{ts})$$

Demonstração. Aplicando o teorema 7 obtemos

$$D_{X_i}\delta^j_\ell + D_{X_j}\delta^i_\ell = 0 = \langle X_i \wedge X_j, -\frac{1}{2}\sum_{s,t} b^\ell_{st}\ \omega_s \wedge \omega_t \rangle +$$

$$+ \langle \sum_{k=1}^{n} c^k_{ij}\ X_k, \omega_\ell \rangle$$

donde resulta
$$b^\ell_{ij} = c^\ell_{ij}\ .$$

3. Teorema de Frobenius.

Definição 9. Seja V uma variedade diferenciável e F um sistema diferencial de dimensão r. Dizemos que F é um sistema involutivo se e somente se $X,Y \in F$ implica $[X,Y] \in F$.

Numa carta local $(U_\alpha, x_1,\ldots,x_n)$ o fato de F ser involutivo é expresso por

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} a_k X_k \qquad i,j = 1,2,\ldots,r$$

onde $X_1,\ldots,X_r$ é uma base local de F. Clàssicamente o sistema que satisfaz a estas últimas condições é chamado de sistema Jacobiano completo.

Teorema 9. Seja V uma variedade diferenciável. Um sistema diferencial F é involutivo se e sòmente se F é completamente integrável.

Demonstração. Se o sistema F é completamente integrável, numa carta local $(U_\alpha, x_1,\ldots,x_n)$, $x_{r+1} = \text{cte},\ldots,x_n = \text{cte}$ é uma variedade integral. $(X_1)_x = (\frac{\partial}{\partial x_1})_x$,..., $(X_r) = (\frac{\partial}{\partial x_r})_x$ são vetores tangentes em cada ponto x de U_α que geram o espaço tangente à variedade integral no ponto x. Portanto se $X \in F$, $Y \in F$ êles são vetores tangentes à variedade integral e portanto $[X,Y]$ ainda é tangente à variedade integral (teor. 4 §2). Portanto como sôbre U_α os $X_1,\ldots,X_r$ formam uma base local de F, temos

$$[X,Y] = \sum_{i=1}^{r} c_i X_i \in F.$$

Reciprocamente, suponhamos que F seja involutivo. Existe (teor 2, § 2) uma carta local $(U_\beta, y_1, \ldots, y_n)$ que podemos supor tal que $U_\beta \subset U_\alpha$ tal que $X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}$. Se $r=1$, e $p \in U_\beta$ então

$$\left\{ (y_1, \ldots, y_n) \in U_\beta \;\middle|\; y_2 = y_2(p), \ldots, y_n = y_n(p) \right\}$$

é uma variedade integral de F. Portanto o teorema vale quando $r=1$. Suponhamos que vale para $r-1$. Na carta local $(U_\beta, y_1, \ldots, y_n)$ onde $X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}$ temos:

$$X_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \frac{\partial}{\partial y_i}$$
$$\vdots$$
$$X_r = \sum_{i=1}^{n} a_i^r \frac{\partial}{\partial y_i}$$

Consideremos as transformações infinitesimais

$$X'_2 = X_2 - a_1^2 X_1 = \sum_{i=2}^{n} a_i^2 \frac{\partial}{\partial y_i}$$
$$\vdots$$
$$X'_r = X_r - a_1^r X_1 = \sum_{i=2}^{n} a_i^r \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$X_1, X'_2, \ldots, X'_r$ ainda formam, evidentemente, uma base de F em todo ponto de U_β. Seja a subvariedade

$$\mathcal{X}_p = \left\{ (y_1, \ldots, y_n) \in U_\beta \;\middle|\; y_1 = y_1(p) \right\}.$$

Os vetores $(X'_2)_{q'}, \ldots, (X'_r)_{q'}$ são vetores tangentes a $\mathcal{X}_p$ em todo $q' \in \mathcal{X}_p$. Seja F' um sistema diferencial de dimensão $r-1$ gerado por

$(X_2')_{q'},\dots,(X_r')_{q'}$. Pelo teorema 4 do § 2 resulta que $[X_j', X_i'] \in F'$ e então pela hipótese de que o teorema vale para r-1 conclue-se que existe um sistema de coordenadas $\bar{z}_2,\dots,\bar{z}_n$ para os pontos de uma vizinhança de p em $\mathcal{X}_p$ que por simplicidade ainda indicaremos por $\mathcal{X}_p$ tais que se $q' \in \mathcal{X}_p$

$$\begin{aligned} \bar{z}_{r+1} &= \bar{z}_{r+1}(q') \\ &\vdots \\ \bar{z}_n &= \bar{z}_n(q') \end{aligned}$$

é uma variedade integral de F'.

Consideremos a seguinte transformação de coorodenadas em U_β (é imediato que ela é compatível)

$$\begin{aligned} z_1(q) &= y_1(q) \\ z_2(q) &= \bar{z}_2(q') \\ &\vdots \\ z_n(q) &= \bar{z}_n(q') \end{aligned}$$

onde $q' = (y_1(p), y_2(q), \dots, y_n(q))$ (q' é a "projeção" de q sôbre $\mathcal{X}_p$). Notando que

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial z_1}$$

e que $z_{r+1},\dots, z_n$ não envolvem y_1, obtemos

$$X_1(z_{r+h}) = 0 \qquad 1 \leq h \leq n-r$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\,(X_i'(z_{r+h})) = X_1 X_i'(z_{r+h}) = [X_1, X_i']\ (z_{r+h})\ .$$

Por outro lado, $[X_1, X_i'] = a\, X_1 + \sum_{j=2}^{r} a_j^i\, X_j'$ (por termos um sistema involutivo) onde os a_j^i são funções diferenciáveis. Então

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(X_i'(z_{r+h})\right) = \sum_{j=2}^{r} a_j^i \, X_j'(z_{r+h}),$$

que é um sistema de equações diferenciais nas variáveis $X_i'(z_{r+h})$. No ponto $z_1 = y_1(p)$, $X_i'(z_{r+h}) = 0$ pois $z_2 = \bar{z}_2(q), \ldots, z_n = \bar{z}_n(q)$ é variedade integral de F' e portanto para todo $z_1 \neq y_1(p)$ devemos ter $X_i'(z_{r+h}) = 0$ em virtude da unicidade da solução do sistema. De $X_i'(z_{r+h}) = 0$ resulta que X_i' não depende de z_{r+h} $(1 \leq h \leq n-r)$ o que mostra que z_{r+h} = constante nos dá uma variedade integral.

<u>Definição 10</u>. Seja Ω uma forma de grau n-r. Dizemos que a forma Ω satisfaz à condição (C) quando e sòmente quando existir uma forma de grau um ω tal que

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega$$

Se $\lambda \in \mathcal{F}$ é uma função tal que $\lambda(x) \neq 0$ para todo $x \in V$ e Ω é uma forma que satisfaz à condição (C) então a forma $\Omega^* = \lambda\Omega$ também satisfará à condição (C). De fato, $d\Omega^* = d\lambda \wedge \Omega + \lambda\, d\Omega =$

$$= d\lambda \wedge \lambda^{-1}\Omega^* + \lambda\omega\wedge\Omega = \lambda^{-1} d\lambda \wedge \Omega^* + \omega \wedge \Omega^* =$$
$$= (\lambda^{-1} d\lambda + \omega) \wedge \Omega^*.$$

Se F é um sistema diferencial de dimensão r, a F corresponde uma forma Ω de grau n-r. Se tivermos outra forma Ω^* que corresponde a F então Ω e Ω^* estão relacionadas por

$$\Omega^* = \lambda\Omega$$

Portanto, se Ω satisfaz à condição (C), Ω^* também a satisfará, do que se conclue que a condição (C) é uma propriedade de F.

<u>Teorema 10</u>. Seja Ω uma forma de grau n-r, e $\omega_{r+1}\wedge\ldots\wedge\omega_n$ uma sua expressão local; Ω satisfaz à condição (C) se e sòmente se $d\omega_j \wedge \omega_{r+1}\wedge\ldots\wedge\omega_n = 0$, $j = r+1,\ldots,n$.

<u>Demonstração</u>. É imediato que $d\Omega = \omega\wedge\Omega$ é equivalente a $d\Omega\wedge\omega^j = 0$, $j = r+1,\dots,n$. Mas $d\Omega = (-1)^{j+r-1} d\omega^j \wedge \omega^{r+1}\wedge\dots\wedge\widehat{\omega^j}\wedge \wedge\dots\wedge\omega^n$. Logo $d\Omega\wedge\omega^j = \pm\, d\omega^j\wedge\omega^{r+1}\wedge\dots\wedge\omega^n = \pm\, d\omega^j\wedge\Omega$ donde segue o nosso resultado.

<u>Lema</u>. $\Omega = \omega_{r+1}\wedge\dots\wedge\omega_n$ satisfaz à condição (C) se e sòmente se

$$d\omega_j = \sum b^j_{st}\,\omega_s\wedge\omega_t, \quad r+1\leq s<t\leq n$$

<u>Teorema 11</u>. (Frobenius) Seja F um sistema diferencial de dimensão r; seja Ω a froma que corresponde a F. Então, o sistema F é completamente integrável se e sòmente se Ω satisfaz à condição (C).

<u>Demonstração</u>. Se F é completamente integrável existe para todo ponto $q\in V$ uma carta local $(U_\alpha, x_1,\dots,x_n)$ $(q\in U_\alpha)$ tal que $x_{r+1} = \text{const.}$, $\dots$, $x_n = \text{const.}$ define uma variedade integral. Neste caso

$$\Omega = dx_{r+1}\wedge\dots\wedge dx_n$$

localmente, e portanto $d\Omega = 0$. Recìprocamente, se Ω satisfaz à condição (C) então considerando uma expressão local $\Omega = \omega_{r+1}\wedge\dots\wedge\omega_n$, pelo corolário acima

$$(1) \qquad d\omega_j = \sum b^j_{st}\,\omega_s\wedge\omega_t, \qquad r+1\leq s\leq t\leq n.$$

$\omega_{r+1},\dots,\omega_n$ fazem parte da base dual $\omega_1,\dots,\omega_n$ da base $X_1,\dots,X_n$ que se obtém completando a base $X_1,\dots,X_r$ do subespaço $W^r\in F$ (Def. 2, §3). Se $1\leq i\leq\ell\leq r$ então

$$[X_i, X_\ell] = \sum_{k=1}^{n} c^k_{i\ell}\, X_k \quad ;$$

a relação (1) nos diz que

$$b^j_{i\ell} = 0 \text{ se } \quad 1\leq i\leq\ell\leq r, \quad r+1\leq j\leq n$$

Como (Teor. 8)

$$b^j_{i\ell} = c^j_{i\ell} = 0$$

então temos

$$[X_i, X_\ell] = \sum_{k=1}^{r} c_{i\ell}^k X_k$$

isto é, $[X_i, X_\ell] \in F$. Do Teorema 9 resulta que F é completamente integrável.

<u>Corolário</u>. Se a um sistema dieferencial F corresponde a forma $\omega = \omega_{r+1} \wedge \dots \wedge \omega_n$ então F é completamente integrável se e sòmente se $d\omega_j \wedge \omega_{r+1} \wedge \dots \wedge \omega_n = 0$, $j = r+1, \dots, n$.

<u>Demonstração</u>. Consequência dos Teoremas 10 e 11.

Clàssicamente para determinar as condições de integrabilidade da equação

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$$

escrevemos

$$dz = -\frac{P}{R}\,dx - \frac{Q}{R}\,dy$$

e supomos que existe uma função $z = z(x,y)$ que verifica a esta equação. Para isto devemos ter

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R}$$

e portanto

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

que em função de P, Q, R se escreve

$$R(Q_x - P_y) + Q(P_x - R_x) + P(R_y - Q_z) = 0$$

Esta condição é equivalente à condição obtida aplicando a $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ o Corolário acima, isto é, que

$$d\omega \wedge \omega = 0$$

$$d\omega = (P_x dx + P_y dy + P_z dz)\wedge dx + (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz)\wedge dy +$$
$$+ (R_x dx + R_y dy + R_z dz)\wedge dz =$$
$$= (P_y - Q_x)\ dy\wedge dx + (P_z - R_x)\ dz\wedge dx + (Q_z - R_y)\ dz\wedge dy$$

e

$$0 = d\omega\wedge\omega = \left[R(Q_x - P_y) + Q(P_z - R_x) + P(R_y - Q_z)\right]\ dx\wedge dy\wedge dz$$

nos dá

$$R(Q_x - P_y) + Q(P_z - R_x) + P(R_y - Q_z) = 0$$

No caso de um sistema de equações

$$dx_j = \sum_{i=1}^{r} a_j^i\ (x_1,\ldots,x_n)\ dx_i \quad , \qquad j= r+1,\ldots,n$$

escrevemos

$$\omega_j = dx_j - \sum_{i=1}^{r} a_j^i\ dx_i \ , \qquad j= r+1,\ldots,n$$

e as condiçõesde integrabilidade que são obtidas das igualdades

$$d\omega_j\wedge\omega_{r+1}\wedge\ldots\wedge\omega_n = 0 \ , \qquad j + r+1,\ldots,n$$

são equivalentes às condições clássicas de integrabilidade completa de um sistema de equações de diferenciais totais.

O teorema de Frobenius tem caráter local. Chevalley (Theory of Lie Groups, § VIII, Cap. III) demonstra a existência de uma variedade integral global, de um sistema F, passando por cada ponto de V.

§ 4 - Teorema de Stokes.

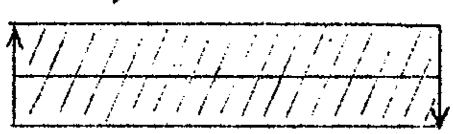
1. Integração de formas.

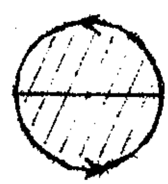
Sejam V uma variedade diferenciável de dimensão n e (W, φ) uma subvariedade de dimensão $n-1$, fechada e regularmente imersa em V. Dizemos que W é <u>localmente bilateral</u> em V ou simplesmente <u>bilateral</u> em V se e sòmente se $\varphi(W)$ tem uma vizinhança conexa U tal que $U - \varphi(W)$ tem duas componentes conexas. Em caso contrário dizemos que W é <u>localmente unilateral</u> em V ou simplesmente <u>unilateral</u> em V, isto é, se dado qualquer vizinhança conexa U de $\varphi(W)$, $U - \varphi(W)$ ainda é conexo. Dizemos que W é <u>globalmente bilateral</u> em V (<u>globalmente unilateral</u> em V) se e sòmente se $V - \varphi(W)$ possue duas componentes conexas (é conexo).

Em geral não há relação entre o fato de W ser unilateral ou bilateral em V e o fato dela ser orientável ou não. Por exemplo:

a) a superfície esférica em R^3 é bilateral e orientável;

b) a circunferência C na faixa de Moebius abaixo é unilateral e orientável;





Idem a reta C no plano projetivo.

c) o plano projetivo P^2 é não orientável e é bilateral na variedade $T^1 \times P^2$;

d) o plano projetivo é unilateral no espaço projetivo e não orientável.

Idem a faixa de Moebius no R^3.

Temos porém:

<u>Teorema 1</u>. Sejam V variedade diferenciável orientável de dimensão

n, e W subvariedade fechada regularmente imersa de dimensão n-1. Então W é orientável se e sòmente se W é bilateral em V.

Demonstração. Seja W orientável e indiquemos por $(U_\alpha, u_1, \ldots, u_n)$ as cartas locais definidas nos pontos de W tais que $U_\alpha \cap W$ seja dado por $u_n = 0$. $u_1, \ldots, u_{n-1}$ são então coordenadas locais de $U_\alpha \cap W$ e supomos que as cartas locais em W assim obtidas sejam coerentemente orientadas. Mudando eventualmente o sinal de u_n podemos supor também que as cartas locais $(U_\alpha, u_1, \ldots, u_n)$ sejam coerentemente orientadas. Portanto

$$\left|\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right|_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{vmatrix} \dfrac{u}{v_r} & * \\ 0 \ldots 0 & \dfrac{\partial u_n}{\partial v_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial u_n}{\partial v_n}\left|\frac{\partial u_\ell}{\partial v_r}\right|_{\ell, r = 1,\ldots,n-1} > 0 \quad ;$$

como por hipótese $\left|\frac{\partial u}{\partial v_r}\right|_{\ell, r=1,\ldots,n-1}$ 0 então $\frac{\partial u_n}{\partial v_n} > 0$ em $U_\alpha \cap U_\beta$.

Portanto, se $u_n(p) > 0$ para $p \in U_\alpha$ então $v_n(p) > 0$ se $p \in U_\beta$. Se $U = \bigcup U_\alpha$, U - W tem duas componentes conexas: o conjunto dos pontos onde algum u_n é positivo e o conjunto dos pontos onde algum u_n é negativo.

Reciprocamente, seja W bilateral e tomemos as cartas U_α como acima com os u_n positivos numa mesma componente de U - W. Trocando eventualmente o sinal de u_1 podemos supor as cartas $(U_\alpha, u_1, \ldots, u_n)$ coerentemente orientadas. De $\frac{\partial u_n}{\partial v_n} > 0$ e $\left|\frac{\partial u_i}{\partial v_j}\right| > 0$ $i,j = 1,\ldots,n$ segue da igualdade anterior que $\left|\frac{\partial u_\ell}{\partial v_r}\right| > 0$ $r, \ell = 1,\ldots,n-1$, isto é, a orientação das cartas $U_\alpha \cap W$ é coerente.

Corolário. Uma variedade diferenciável de dimensão 2 que tem uma subvariedade regularmente imersa fechada de dimensão 1 unilateral é não orientável (pode-se demonstrar que a recíproca é verdadeira).

<u>Demonstração</u>. Basta lembrar que qualquer variedade de dimensão um é orientável.

Para a noção de partição contínua da unidade, espaço paracompacto, etc., ver o Apêndice.

<u>Teorema 2</u>. Seja V uma variedade diferenciável paracompacta. Se $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é um recobrimento aberto de V então existe uma partição diferenciável da unidade $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ onde f_α é função diferenciável, de suporte compacto $D_\alpha \subset U_\alpha$.

(Suporte de uma aplicação $f: V \longrightarrow E$ é o conjunto $\{x\in V \mid f(x)\neq 0\}$).

<u>Teorema 3</u>. Seja V uma variedade diferenciável de dimensão n paracompacta e orientável. Existe um e um só funcional que associa a tôda forma diferencial contínua ω de grau n de suporte compacto um número real $\int\omega$ com as seguintes propriedades:

(a): $\int\omega_1+\omega_2 = \int\omega_1 + \int\omega_2$;

(b): se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é o atlas que dá a orientação de V, e se o suporte compacto D de ω está contido em U_α (e portanto na carta local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ com coordenadas locais $u_1,\dots,u_n$, $\omega = \psi(u_1,\dots,u_n)du_1\wedge\dots\wedge du_n$) então temos

$$\int\omega = \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}\dots\int (u_1,\dots,u_n)du_1\dots du_n$$

onde a integral do segundo membro é integral de Riemann.

<u>Demonstração</u>. Sendo $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ um atlas (localmente finito) que dá a orientação de V, seja $\{f_\alpha\}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$. Seja ω uma forma de grau n contínua e com suporte D compacto. Para todo $x\in U$ existe uma vizinhança W_x de x tal que em-

contra sòmente um número finito de U_α com função f_α não idênticamente nula em W_x. Como U é compacto, e portanto um número finito de W_x recobre U, resulta que sòmente um número finito de U_α são tais que a função f_α correspondente é não idênticamente nula em U. Sejam êles $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_p}$. Então

$$\omega = \sum_{\alpha} f_\alpha \omega = \sum_{i=1}^{p} f_{\alpha_i} \omega$$

e definimos

$$\int \omega = \sum_{\alpha} \int f_\alpha \omega = \sum_{i=1}^{p} \int f_{\alpha_i} \omega$$

onde

$$\int f_{\alpha_i} = \int \cdots \int_{\varphi_\alpha(U_{\alpha_i})} f_{\alpha_i} \psi \, du_1 \ldots du_n$$

sendo $\omega = \psi(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$ a expressão de ω na carta local $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Esta definição não depende do sistema de coordenadas. Com efeito, seja (U_β, φ_β) uma outra carta local, com coordenadas locais $v_1, \ldots, v_n$, tal que o suporte $f_{\alpha_i} \psi = \theta$ esteja contido em $U_{\alpha_i} \cap U_\beta$. Então temos

$$\int \theta(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n = \int \cdots \int_{\varphi_\alpha(U_{\alpha_i} \cap U_\beta)} \theta(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n =$$

$$= \int \cdots \int_{\varphi_\beta(U_{\alpha_i} \cap U_\beta)} \theta\left(u_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, u_n(v_1, \ldots, v_n)\right) \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(v_1, \ldots, v_n)}\, dv_1 \ldots dv_n =$$

$$= \int \theta\left(u_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, u_n(v_1, \ldots, v_n)\right) \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(v_1, \ldots, v_n)}\, dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_n$$

o que mostra a independência, pois

$$\theta \, du_1 \wedge \dots \wedge du_n = \theta \, \frac{\partial(u_1,\dots,u_n)}{\partial(v_1,\dots,v_n)} \; dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n$$

Observemos que a mudança de variáveis efetuada na integral múltipla

$$\int \cdots \int_{\varphi_\alpha(U_{\alpha} \cap U_\beta)} \theta(u_1,\dots,u_n) \, du_1 \dots du_n$$

é permissível pois o jacobiano $\dfrac{\partial(u_1,\dots,u_n)}{\partial(v_1,\dots,v_n)}$ é positivo em vista de ser V orientável. A definição não depende do atlas. De fato, seja (W_β, ψ_β) outro atlas que dá orientação a V, e seja $\{g_\beta\}$ a partição da unidade subordinada a $\{W_\beta\}$. Notando que $\{f_\alpha g_\beta\}$ é a partição da unidade subordinada ao recobrimento $\{U_\alpha \cap W_\beta\}$ de V obtemos

$$\sum_\alpha \int f_\alpha \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int f_\alpha \, g_\beta \, \omega = \sum_\beta \int g_\beta \, \omega$$

donde resulta também a unicidade.

2. Domínio com fronteira regular.

Seja V uma variedade diferenciável de dimensão n.

Definição 4. Seja $D \subset V$ um domínio, isto é, um conjunto aberto e conexo. Dizemos que a fronteira $\bar{D} - D$ é regular quando e sòmente quando para todo $x \in \bar{D}$ temos uma das duas seguintes condições:

(a) existe uma carta local $(U_\alpha, u_1,\dots,u_n)$ tal que $x \in U_\alpha$ e $U_\alpha \subset D$;

(b) existe uma carta local $(U_\alpha, u_1,\dots,u_n)$ tal que $x \in U_\alpha$, $U_\alpha \cap (\bar{D} - D) \neq \emptyset$, $U_\alpha \cap (\bar{D} - D)$ é dado por $u_n = 0$, e se $y \in U_\alpha \cap D$ então $u_n(y) > 0$.

Os pontos de $\bar{D}$ que satisfazem à condição (a) são pontos interiores e os que satisfazem à condição (b) são os pontos de fronteira.

A fronteira $\bar{D} - D$ é fechada e é uma subvariedade de dimensão n-1, regularmente imersa. Vê-se fàcilmente que $\bar{D} - D$ é localmente bilateral. Portanto, se V for orientável e paracompacto resulta que (Teor. 1) $\bar{D} - D$ é orientável.

Seja ω uma forma diferenciável de grau n. Podemos definir integral de ω sôbre um domínio $D \subset V$ relativamente compacto (isto é, $\bar{D}$ compacto). Com efeito, seja $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ um atlas que dá a orientação de V, e seja $\{f_\alpha\}$ a partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$. Sendo ϕ_D a função característica de D então

$$\phi_D \omega = \sum_\alpha f_\alpha \phi_D \omega .$$

$\phi_D \omega$ é idênticamente nula fora de D e desde que $\bar{D}$ é compacto, com raciocínio análogo ao feito na demonstração do teorema 3, concluimos que sòmente um número finito de U_α : $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_p}$ são tais que as funções f_α são não idênticamente nulas em $\bar{D}$. Portanto,

$$\phi_D \omega = \sum_{i=1}^{p} f_{\alpha_i} \phi_D \omega$$

Então definimos

$$\int_D \omega = \sum_{i=1}^{p} \int f_{\alpha_i} \phi_D \omega$$

onde

$$\int f_{\alpha_i} \phi_D \omega = \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} \!\!\cdots \int f_{\alpha_i}(u_1, \ldots, u_n)\, \phi_D \omega(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n$$

3. <u>Teorema de Stokes</u>.

<u>Teorema 4</u>. (Stokes) Seja V variedade diferenciável de dimensão n, paracompacta e orientável. Seja $D \subset V$ um domínio relativamente compacto com fronteira $B = \bar{D} - D$ regular. Se ω é uma forma diferenciável de grau n-1 então temos

$$\int_D d\omega = \int_B \omega$$

Demonstração. Seja $\{(U_\alpha, u_1, \ldots, u_n)\}$ o atlas que dá a orientação do V. Podemos supor que as cartas locais $(U_\alpha, u_1, \ldots, u_n)$ sejam "cúbicas", isto é, dadas por $|u_j| < m_\alpha$, e que se $U_{\alpha'} \cap B \neq \emptyset$ então $B \cap U_{\alpha'}$ é dado por $u_n = 0$ e se $y \in U_{\alpha'} \cap D$, $u_n(y) > 0$. Indicamos por $\{f_\alpha\}$ a partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$. Sendo D relativamente compacto, B é compacto e então

$$\int_B \omega = \int_B \sum_\alpha f_\alpha \omega = \sum \int_B f_\alpha \omega$$

onde a soma é feita sob um número finito de índices α. Por outro lado

$$\int_D d\omega = \int_D d\left(\sum_\alpha f_\alpha \omega\right) = \sum_\alpha \int_D d(f_\alpha \omega)$$

e então basta demonstrar que

$$\int_B f_\alpha \omega = \int_D d(f_\alpha \omega) .$$

Neste caso, tudo se reduz a integral de formas que são idênticamente nulas fora do U_α que é um cubo (mais rigorosamente a imagem de um cubo). Seja

$$f_\alpha \omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_j \, du_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{du_j} \wedge \ldots \wedge du_n \quad ;$$

então

$$d(f_\alpha \omega) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial u_j}\right) du_1 \wedge \ldots \wedge du_n .$$

Precisamos examinar três casos:

1º caso: $U_\alpha \cap \bar{D} = \emptyset$. Neste caso $\int_B f_\alpha \omega = 0$

e também $\int_D d(f_\alpha \omega) = 0$ pois $\phi_D = 0$ em U_α.

2º caso: $U_\alpha \subset D$. Como no caso anterior $\int_B f_\alpha \omega = 0$ e como $\phi_D = 1$ temos

$$\int_D d(f_\alpha \omega) = \int_D \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_1 \wedge \dots \wedge du_n =$$

$$= (-1)^{j-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_1 \dots du_n = (-1)^{j-1} \sum_{j=1}^{n} du_1 \dots \widehat{du_j} \dots du_n \int_{-m_\alpha}^{m} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_j =$$

$$= (-1)^{j-1} \sum_{j=1}^{n} du_1 \dots \widehat{du_j} \dots du_n \left[a_j(u_1, \dots, m \quad , \dots, u_n) - a_j(u_1, \dots, -m_j, \dots, u_n) \right] =$$

$$= 0$$

pois a_j calculada na fronteira do cubo U_α é zero. (O suporte do f_α é compacto e está contido em U_α).

3º caso: $U_\alpha \cap B \neq \emptyset$. Aqui $\phi_D(p) = 1$ se $u_n(p) > 0$. Como no caso anterior, se $j=1,2,\dots,n-1$ temos

$$\int_D \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_1 \wedge \dots \wedge du_n = 0 \quad ;$$

para $j=n$ temos:

$$\int_D \frac{\partial a_n}{\partial u_n} du_1 \wedge \dots \wedge du_n = \int \frac{\partial a_n}{\partial u_n} du_1 \dots du_n =$$

$$= (-1)^{n+1} \int \left[\int \frac{\partial a_n}{\partial u_n} du_n \right] du_1 \dots du_{n-1} =$$

$$= (-1)^{n+1} \int a_n(u_1, \dots, u_{n-1}, 0)\, du_1 \dots du_{n-1} = \int_B f_\alpha \omega, \text{ pois}$$

$$\int_B f_\alpha \omega = \int_B \sum (-1)^{j-1} a_j \; du_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{du_j} \wedge \ldots \wedge du_n =$$

$$= \sum (-1)^{j-1} \int_{u_n=0} a_j du_1 \ldots \widehat{du_j} \ldots du_n = (-1)^{n-1} \int \ldots \int du_1 \ldots du_{n-1} a_n (u_1 \ldots u_{n-1}, 0)$$

<u>Corolário</u>. Dada uma variedade V compacta, orientável de dimensão n, e uma (n-1)-forma diferenciável , então temos

$$\int_V d\omega = 0$$

<u>Demonstração</u>. Tomemos uma bola D numa carta local e seja S^{n-1} o seu bordo que supomos ser uma variedade diferenciável. Então

$$\int_V d\omega = \int_D d\omega + \int_{\complement D} d\omega = \int_{S^{n-1}} \omega - \int_{S^{n-1}} \omega = 0$$

pois D e $\complement D$ induzem orientações contrárias no seu bordo S^{n-1}.

4. <u>Interpretação do teorema de Stokes em R^2 e R^3</u>.

Seja $V = R^2$ com coordenadas naturais x,y. Sejam $Pdx + Qdy$ uma forma de grau 1 diferenciável, e D um domínio com fronteira B regular. Temos

$$d(Pdx + Qdy) = P_y dy \quad dx + Q_x dx \quad dy = (Q_x - P_y) \; dx \quad dy \quad .$$

Aplicando o teorema de Stokes temos

$$\int_D (Q_x - P_y) \; dx \quad dy = \int_B Pdx + Qdy$$

ou ainda

$$\int_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \int_B P dx + Q dy$$

fórmula essa que em Análise Clássica é conhecida como fórmula de Green.

Seja $V = R^3$ com coordenadas x, y, z. Consideremos uma forma diferenciavel de grau 2 $X dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy$ e um domínio D com fronteira regular S. Então temos

$$\int_D d(X dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy) = \int_D (X_x + Y_y + Z_z) dx \wedge dy \wedge dz =$$

$$= \int_S X dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy \text{ , ou}$$

$$\int_D (X_x + Y_y + Z_z)\, dx\, dy\, dz = \int_S X dy\, dz + Y\, dz\, dx + Z\, dx\, dy$$

Considerando o campo de vetores axiais

$$\vec{v} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}$$

correspondente à 2-forma dada ainda podemos escrever

$$\int_D \operatorname{div} \vec{v} \, .\, dx\, dy\, dz = \int_S \vec{v} \times \vec{N}\, dS$$

que é a fórmula de Ostrogradsky (ver de La Valée Poussin - Cours d'Analyse - I).

Sejam $X dx + Y dy + Z dz$ uma forma de grau 1 diferenciável em R^3, S uma superfície regular com fronteira regular L. Então temos

$$\int_S d(X dx + Y dy + Z dz) =$$

$$= \int_S (Z_y - Y_z)\,dy \wedge dz + (X_z - Z_x)\,dz \wedge dx + (Y_x - X_y)\,dx \wedge dy =$$

$$= \int_L Xdx + Ydy + Zdz$$

ou seja

$$\int_S (Z_y - Y_z)\,dydz + (X_z - Z_x)\,dzdx + (Y_x - X_y)\,dxdy =$$

$$= \int_L Xdx + Ydy + Zdz$$

Sendo $\vec{v} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}$ uma função vetorial correspondente à 1-forma dada, temos

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{N}\, dS = \int_L Xdx + Ydy + Z\,dz = \int_L \vec{v} \cdot \overrightarrow{d\tau}$$

que é a fórmula de Stokes da Análise Clássica (ver de La Valée Poussin).

Apêndice:

ESPAÇOS PARA COMPACTOS E APLICAÇÕES.

1. Espaços normais.

Seja E um espaço separado. São equivalentes as seguintes propriedades:

(a) Se F_1, F_2 são subconjuntos fechados de E com $F_1 \cap F_2 = \phi$, então existem conjuntos abertos U_1, U_2 tais que $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \phi$.

(b) Se F_1, F_2 são subconjuntos fechados com $F_1 \cap F_2 = \phi$ então existe função contínua $f: E \to [0,1]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in F_1 \\ 0 & \text{para } x \in F_2 . \end{cases}$$

(c) Se $F \subset U$ onde F é fechado e U aberto, então existe um conjunto aberto V tal que

$$F \subset V \subset \bar{V} \subset U .$$

(d) Sendo F fechado, se $\bar{f}: F \to R$ é uma função contínua contínua, então existe uma função contínua $f: E \to R$ tal que

$$f(x) = \bar{f}(x) \quad \text{para todo } x \in F.$$

A demonstração destas equivalências pode ser encontrada em Lourbaki Topologie Generale Cap.9.

Def.1.

Um espaço E separado é normal se e somente se satisfaz a uma das quatro condições acima.

De (b) resulta imediatamente que qualquer sub-espaço fechado de um espaço normal é normal.

Def.2. Um espaço separado E é regular, se e sòmente se, dado qualquer subconjunto fechado F de E, e sendo $x \in E$ tal que $x \notin F$ então existem conjuntos abertos O e V_x tais que $F \subset O$, $x \in V_x$ e $O \cap V_x = \phi$.

É fácil verificar que um espaço separado E é regular se e sòmente se para todo $x \in E$, dada uma vizinhança V_x de x, existe vizinhança U_x de x tal que

$$\bar{U}_x \subset V_x .$$

É imediato que todo espaço normal é regular.

Exemplos de espaços normais:

1) Todo espaço métrico é normal. Com efeito, basta considerar os conjuntos:

$$U_1 = \{x \in E \mid d(x,F_1) < d(x,F_2)\}$$
$$U_2 = \{x \in E \mid d(x,F_2) < d(x,F_1)\} .$$

U_1, U_2 são abertos, $U_1 \cap U_2 = \phi$ e $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$.

2) Todo espaço compacto é normal. Com efeito, sejam F, O subconjuntos de um espaço compacto E onde F é fechado e O aberto, com $F \subset O$. Como E é regular, se $p \in \complement O$ existem vizinhança W_p de p e aberto V^p com $F \subset V^p$ tais que $W_p \cap V^p = \phi$.

$\{W_p\}_{p\in \complement O}$ é um recobrimento de $\complement O$ e como êste é fechado e portanto existe um subrecobrimento finito $W_{p_1}, W_{p_2}, \ldots, W_{p_n}$ de O.

Seja $V = \bigcap_{i=1}^{n} V^{p_i}$; V é aberto e $F \subset V$. Por outro lado, $\complement O \subset W = \sum_{i=1}^{n} W_{p_i}$ de onde resulta que $\complement W \subset O$. Também temos $V \subset \complement W$, pois se $x \in V$, $x \in V^{p_i}$ qualquer que seja i, e então $x \notin W_{p_i}$, $x \in \complement W_{p_i}$, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \complement W_{p_i} = \complement(\bigcup_{i=1}^{n} W_{p_i}) = \complement W$. Portanto temos

$$F \subset V \subset \complement W \subset O$$

e como $\complement W$ é fechado,

$$F \subset V \subset \bar{V} \subset O \quad .$$

<u>Teorema 1</u>. Sejam E espaço normal, F subconjunto fechado de E, e $\{U_n\}_{n=1,..,p}$ um recobrimento aberto de F. Então existe um recobrimento aberto $\{U'_n\}_{n=1,..,p}$ de F tal que

$$\bar{U}'_n \subset U_n \ , \ n = 1,2,\ldots,p \ .$$

<u>Dem.</u> Ver Bourbaki - 9.

<u>Def. 3.</u> Seja E um espaço topológico. Uma familia $\{f_i\}_{i=1,2,..,p}$ de funções contínuas $f_i : E \to R$ tais que $f_i(x) \geqslant 0$ para todo $x \in E$, $i = 1,2,\ldots,p$ é chamada de <u>partição contínua finita da unidade</u> se e sòmente se para todo x E tivermos

$$\sum_{i=1}^{p} f_i(x) = 1.$$

Def. 4. Dados um recobrimento finito $\{U_i\}_{i=1,\ldots,p}$ de E e uma partição contínua finita da unidade $\{f_i\}_{i=1,\ldots,p}$, então a partição $\{f_i\}_{i=1,\ldots,p}$ se diz subordinada ao recobrimento $\{U_i\}_{i=1,\ldots,p}$ quando e somente quando

$$f_i(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \notin U_i.$$

Teorema 2. Sejam E um espaço normal, e $\{U_i\}_{i=1,\ldots,p}$ um recobrimento aberto (finito) de E. Então, existe uma partição contínua finita da unidade subordinada a $\{U_i\}_{i=1,2,\ldots p}$.

Dem. Existe (teorema 1) um recobrimento aberto $\{U_i'\}_{i=1,\ldots,p}$ de E tal que $\bar{U}_i' \subset U_i$, $i=1,\ldots,p$. Desde que E é normal, existem funções contínuas $\varphi_i\colon E \to [0,1]$, $i=1,\ldots,p$, tais que

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in U_i' \\ 0 & \text{para } x \notin U_i \ . \end{cases}$$

Definindo

$$f_j = \frac{\varphi_j}{\sum_{i=1}^{p} \varphi_i},$$

a família $\{f_i\}_{i=1,2,\ldots,p}$ de funções contínuas satisfaz às condições exigidas.

Recìprocamente, demonstra-se fàcilmente que se E é separado e todo recobrimento $\{U_i\}_{i=1,\ldots,p}$ admite uma partição contínua finita da unidade subordinada a êle, então E é normal.

Teorema 3. Seja E um espaço normal que satisfaz ao 2º axioma de enumerabilidade (isto é, que possue uma base enumerável de conjuntos abertos). Então E é metrizável.

Dem. Ver Bourbaki - 9.

2. Espaços paracompactos.

Def. 5. Sejam $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $\{V_\beta\}_{\beta\in J}$ dois recobrimentos abertos de um espaço topológico E. Dizemos que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é um refinamento de $\{V_\beta\}_{\beta\in J}$ quando e sòmente quando dado um U_α qualquer de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ existe um $V_\beta \in \{V_\beta\}_{\beta\in J}$ tal que

$$U_\alpha \subset V_\beta \quad .$$

Def. 6. Um recobrimento aberto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de E é localmente finito se e sòmente se para todo $x\in E$ existe uma vizinhança V_x de x tal que $V_x \cap U_\alpha \neq \phi$ sòmente para um número finito de índices α.

Def. 7. Um espaço separado E é paracompacto se e sòmente se todo recobrimento aberto $\mathcal{V}$ de E admite um refinamento localmente finito U.

A definição de paracompacto generaliza de certo modo, as noções de espaços normais, compactos e métricos.

Teorema 4. Todo espaço compacto E é paracompacto.

Dem. Imediata.

Pode-se demonstrar que tôdo espaço métrico é paracompacto.

Teorema 5. Se E é paracompacto então E é regular.

Dem. Sejam $p \in E$ e O um conjunto aberto tal que $p \in O$. Se $y \in \complement O$, existem vizinhanças V_p^y e W_y de p e y respectivamente tais que $V_p^y \cap W_y = \phi$. $\{O\} \cup \{W_y\}_{y \in \complement O}$ é um recobrimento de E que admite um refinamento localmente finito $\{T_\beta\} \cup \{R_\gamma\}$ onde $T_\beta \subset O$, $R_\alpha \subset W_y$. Existe uma vizinhança N_p de p que encontra sòmente um número finito de elementos de $\{T_\beta\} \cup \{R_\gamma\}$. Sejam $R_{\gamma_1}, \ldots, R_{\gamma_n}$ os elementos de $\{R_\alpha\}$ que encontram N_p. Então $R_{\gamma_i} \subset W_{y_i}$. Seja

$$V = N_p \bigcap_{i=1}^{n} V_p^{y_i} .$$

V é uma vizinhança de p, e é fácil verificar que

$$V \subset \complement \bigcup_\gamma R_\gamma \subset O$$

donde resulta que

$$p \in V \subset \bar{V} \subset O,$$

pois $\complement \bigcup_\gamma R_\gamma$ é fechado. Portanto, E é regular.

Teorema 6. Se E é paracompacto então E é normal.

Dem. Sejam F fechado e U uma vizinhança aberta de F. Como E é regular (Teorema 5) todo $x \in F$ possue uma vizinhança V_x tal que $\bar{V}_x \subset U$. $\{\complement F\} \cup \{V_x\}_{x \in F}$ é um recobrimento aberto de E que admite um sub-recobrimento localmente finito $\{T_\beta\} \cup \{R_\gamma\}$ onde $T_\beta \subset V_x$, $R_\gamma \subset \complement F$. $T = \bigcup_\beta T_\beta$ é uma vizinhança de F. Mostremos que $\bar{T} \subset U$. Com efeito, suponha -

mos que exista $y \in \bar{T}$, $y \in \complement U$. O ponto y tem uma vizinhança N' que encontra sòmente um número finito $T_{\beta_2}, \dots, T_{\beta_r}, R_{\gamma_1}, \dots$ $\dots R_{\gamma_s}$ de elementos de $\{T_\beta\} \cup \{R_\gamma\}$. Por outro lado, $y \notin \bar{T}_{\beta_i}$, $i = 1,2,\dots,r$ pois $\bar{T}_{\beta_i} \subset V_{\bar{x}} \subset U$. Como E é regular, existe uma vizinhança N'' de y que não encontra $\bar{T}_{\beta_i}$. $N = N' \cap N''$ é uma vizinhança de y e desde que $y \in \bar{T}$, $N \cap \bar{T} \neq \phi$ o que implica que $N \cap T_{\beta_j} \neq \phi$ (para um certo j) ou ainda, $N'' \cap T_{\beta_j} \neq \phi$ o que é uma contradição pois N'' não encontra $\bar{T}_{\beta_i}$, $i = 1,2,\dots,r$.

Anteriormente definimos (Def.3) partição contínua finita da unidade. Vamos agora generalizar esta noção.

Def. 8. Sejam E um espaço topológico, e $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de aplicações contínuas

$$f_\alpha : E \to R$$

tais que $f_\alpha(x) \geq 0$ para todo $x \in E$ $(\alpha \in I)$. A família $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é uma partição contínua da unidade se e sòmente se para todo $x \in E$ existe sòmente um número finito de índices $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ para os quais $f_{\alpha_i}(x) \neq 0$ e

$$\sum_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}(x) = 1 .$$

Def. 9. Dado um recobrimento aberto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de E, a partição contínua da unidade $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se diz subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ quando e sòmente quando

$$f_\alpha(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \notin U_\alpha \ .$$

Teorema 7. Sejam E um espaço paracompacto, e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ um recobrimento aberto de E. Então existe uma partição contínua da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Dem. Dado $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ podemos determinar um refinamento localmente finito $\{W_\gamma\}_{\gamma \in J}$ tal que para cada $\gamma \in J$ existe um $\alpha \in I$ de modo que $\bar{W}_\gamma \subset U_\alpha$. De fato, para todo $x \in E$, existe α tal que $x \in U_\alpha$; como E é regular (Teorema 5) existe vizinhança V_x de x de modo que

$$\bar{V}_x \subset U_\alpha \ .$$

Por outro lado, $\{V_x\}_{x \in E}$ é um recobrimento de E e portanto admite um sub-recobrimento localmente finito $\{W_\gamma\}_{\gamma \in J}$. Então temos: para todo γ existe um x tal que

$$W_\gamma \subset V_x \subset \bar{V}_x \subset U_\alpha \ .$$

Para cada γ escolhemos um $\alpha(\gamma)$ tal que

$$\bar{W}_\gamma \subset U_{\alpha(\gamma)} \ .$$

Pelo fato de ser E normal (Teorema 6) existe uma função contínua $f_{\alpha(\gamma)}: E \to [0,1]$ tal que

$$f_{\alpha(\gamma)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in W_\gamma \\ 0 & \text{para } x \notin U_{\alpha(\gamma)} \end{cases} \ .$$

Qualquer $x \in E$ possue uma vizinhança que encontra sòmente um número finito de elementos de $\{W_\gamma\}_{\gamma\in J}$; então tem sentido considerar a soma

$$\Sigma\ f_{\alpha(\gamma)}$$

que certamente será diferente de zero no ponto x o que possibilita definir

$$\varphi_{\alpha(\gamma)} = \frac{f_{\alpha(\gamma)}}{\sum_\gamma f_{\alpha(\gamma)}} .$$

A função $\varphi_{\alpha(\gamma)}$ é iguaç a zero fora de $U_{\alpha(\gamma)}$. Quando α não provem de um γ, definimos $\varphi_\alpha(x) = 0$. Portanto $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é uma partição contínua da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Def. 10. Um recobrimento $\{V_\beta\}_{\beta\in I}$ de um espaço topológico E é de tipo finito se e sòmente se cada V_β encontra sòmente um número finito de elementos de $\{V_\beta\}_{\beta\in I}$.

Todo recobrimento de tipo finito é localmente finito mas a recìproca não é verdade.

Teorema 8. Seja E um espaço localmente compacto e paracompacto. Então, dado um recobrimento aberto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ existe um refinamento $\{V_\beta\}_{\beta\in J}$ de tipo finito tal que V_β é ralativamente compacto (isto é, $\bar{V}_\beta$ é compacto).

Dem. U_α é localmente compacto, portanto x possue uma vizinhança O_x tal que $\bar{O}_x$ é compacto e $\bar{O}_x \subset U_\alpha$. $\{O_x\}_{x\in E}$ é um recobrimento aberto de E e como êste é paracompacto, existe um refinamento localmente finito $\{V_\beta\}_{\beta\in J}$ de $\{O_x\}_{x\in E}$.

Cada $\bar{V}_\beta$ é compacto. Com efeito,

$$V_\beta \subset O_x \subset \bar{O}_x$$

donde resulta que $\bar{V}_\beta \subset \bar{O}_x$.

Cada V_{β_o} encontra sòmente um número finito de elementos de $\{V_\beta\}_{\beta\in J}$, pois se $x \in \bar{V}_{\beta_o}$ existe uma vizinhança W_x de x que encontra sòmente um número finito de elementos de $\{V_\beta\}_{\beta\in J}$. $\{W_x\}_{x\in\bar{V}_{\beta_o}}$ é um recobrimento de $\bar{V}_{\beta_o}$ e como êste é compacto $\{W_{x_i}\}_{i=1,2,\dots,p}$ recobre $\bar{V}_{\beta_o}$, donde resulta que V_{β_o} encontra sòmente um número finito de elementos de $\{V_\beta\}_{\beta\in J}$.

<u>Teorema 9</u>. Seja E um espaço localmente compacto. Então E é paracompacto se e sòmente se fôr uma soma de espaços localmente compactos enumeráveis no infinito.

<u>Dem</u>. Ver Bourbaki - Topologie Generale, Chap. I.

<u>Observação</u>. Quando o espaço E do teorema 9 fôr conexo, não podemos ter mais do que uma parcela E_i na soma topológica $E = \bigcup_i E_i$ pois cada E_i é aberto e fechado.

<u>Teorema 10</u>. Seja V uma variedade topológica de dimensão n. Então, são equivalentes as seguintes propriedades:

(a): V é paracompacto ;

(b): V é localmente compacto enumerável no infinito;

(c): V satisfaz ao 2º axioma de enumerabilidade;

(d): V é metrizável.

Demonstração standard.

Teorema 11. Seja V uma variedade diferenciável paracompacta. Se $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é um recobrimento aberto de V, então existe uma partição contínua da unidade $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ subordinada à $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ onde f_α $(\alpha\in I)$ é função diferenciável.

Dem. Usar o Exercício 1 do par. 1.

3. Aplicações de espaços paracompactos.

A técnica da partição da unidade nos permite, em geral, de estender de modo muito facil resultados globais nos espaços paracompactos. Assim, se todo ponto x de um espaço paracompacto tem uma vizinhança O_x em que uma determinada propriedade ou construção é valida (nas variedades diferenciáveis isto dá, por exemplo, com as propriedades e construções habituais do R^n, pois numa variedade diferenciável de dim. n todo ponto tem uma vizinhaça homeomorfa a um aberto de R^n) então tomando um refinamento localmente finito do recobrimento (O_x) e uma conveniente partição da unidade, pode-se estender à propriedade ou construção desejada a todo espaço. Vamos ver alguns exemplos disto:

I. Teorema de Stokes: ver par. 4 precedente.

II. Orientação de uma variedade e existência de uma n-forma que não se anula sôbre a variedade.

Teorema 12. Seja V uma variedade diferenciável de dimensão n, paracompacta. São equivalentes as seguintes proposições:

(a): V é orientável;

(b): existe uma n-forma diferenciável $\omega(x)$ tal que $\omega(x) \neq 0$ para todo x V.

Dem.(a) implica (b). Com efeito, dado um atlas $\{(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ que dá a orientação de V, seja $\{(U_\alpha)\}$ um refinamento de tipo finito de $\{(U'_\alpha)\}$ (Teorema 8). Para cada U_α existe um U'_α tal que $U_\alpha \subset U'_\alpha$; seja φ_α a restrição de φ'_α a U_α. Então $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é um atlas que dá a orientação de V. Em U_α temos coordenadas $u_{\alpha,1}, \ldots, u_{\alpha,n}$ e consideremos

$$\omega_\alpha = du_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge du_{\alpha,n} \;.$$

Seja $\{\varphi_\alpha\}$ a partição contínua diferenciável da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$ (Teorema 11). A n-forma

$$\omega = \Sigma \varphi_\alpha \omega_\alpha$$

é definida sôbre V e é diferenciável. Por outro lado, $\omega(x) \neq 0$ para todo $x \in V$ pois

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_{\beta,1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_{\beta,n}}\right) = \varphi_\beta + \sum_{\alpha \neq \beta} \varphi_\alpha \det\left(\frac{\partial u_{\alpha,i}}{\partial u_{\beta,j}}\right) > 0$$

em virtude de $\det\left(\frac{\partial u_{\alpha,i}}{\partial u_{\beta,j}}\right) > 0$ por ser V orientável. (b) implica (a). Com efeito , se $\omega(x) \neq 0$, sendo $(U_\alpha, x_1, \ldots, x_n)$ uma carta local então $\omega(x)$ nessa carta local pode ser expressa por

$$\omega(x) = \lambda(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \quad \text{com} \quad \lambda(x) \neq 0 \;.$$

Podemos fazer uma mudança de coordenadas em U_α de modo que $\omega(x) = d\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{x}_n$ onde $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ são as novas coordenadas. Seja $(U_\beta, y_1, \ldots, y_n)$ uma outra carta local tal que $U_\beta \cap U_\alpha \neq \phi$. Depois de feita a mudança acima indicada em U_β, temos

$$\omega(x) = d\bar{y}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{y}_n \quad .$$

O determinante funcional da mudança de coordenadas $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ para $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ na intersecção $U_\alpha \cap U_\beta$ é positivo pois

$$1 = \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n}, d\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{x}_n \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n}, d\bar{y}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{y}_n \right\rangle =$$

$$= \det \left(\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial \bar{x}_j} \right) \quad .$$

As cartas locais $(U_\alpha, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ definem um atlas que dão a orientação de V.

Resta mostrar a possibilidade da mudança $x_1, \ldots, x_n \rightarrow \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. Para isto, basta ver que a mudança

$$x_1, \ldots, x_n \longrightarrow \gamma(x), x_2, \ldots, x_n$$

tal que

$$\lambda\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = d\gamma \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

é possível, pois γ deve satisfazer à equação diferencial

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} = \lambda$$

que tem solução; esta mudança é permissível pois seu determinante funcional é igual a $\lambda \neq 0$.

III. Sub-variedades de uma variedade paracompacta .

Dada uma variedade de cimensão n diferenciável e r funções numéricas diferenciáveis definidas em V: $f_1, \dots f_r$, tais que o determinante funcional tenha característica máxima nos pontos onde elas se anulam simultaneamente então êstes pontos definem uma subvariedade fechada regularmente imersa de dimensão n-r. É natural perguntar se toda subvariedade regularmente imersa pode ser obtida de modo semelhante.

Teorema 13. Seja V variedade diferecniável de dimensão n, paracompacta. Seja (W, Φ) subvariedade fechada regularmente imersa em V, de dimensão n-1. Então existe uma aplicação diferenciável $F: V \to R$ tal que $F^{-1}(0) = \Phi(W)$.

Dem. Para todo $y \in \Phi(W)$ seja $(U_\alpha, y_1^\alpha, \dots, y_n^\alpha)$ uma carta local tal que $U_\alpha \cap \Phi(W)$ é dado por $y_n^\alpha = 0$. Se $y \notin \Phi(W)$ existe carta local $(U_\alpha, y_1^\alpha, \dots y_n^\alpha)$ tal que $U_\alpha \cap \Phi(W) = \emptyset$. $\{U_\alpha\}$ é um recobrimento de V que admite um refinamento localmente finito que indicaremos por $\{U_\alpha\}$. Seja $\{\varphi_\alpha\}$ a partição diferenciável da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$. Então definimos:

$$F_\alpha = y_n^\alpha \qquad \text{se} \qquad U_\alpha \cap \Phi(W) \neq \emptyset ;$$
$$F_\alpha = 1 \qquad \text{se} \qquad U_\alpha \cap \Phi(W) = \emptyset .$$

A função

$$F = \sum_\alpha \varphi_\alpha F_\alpha^2$$

satisfaz às condições exigidas. Com efeito, é definida em (todo) V, é diferenciável, e temos: $F \geqslant 0$ e se $F(z) = 0$, então existe α_o tal que $\varphi_{\alpha_o}(z) \neq 0$ donde resulta que $F^2_{\alpha_o}(z) = 0$ ou seja $z \in \Phi(W) \cap U_{\alpha_o}$; se $z \notin \Phi(W)$, z está sòmente num número finito de $_\alpha$ e portanto $F_\alpha(z) = 0$ donde resulta $F(z) = 0$.

Teorema 14. Seja V variedade diferenciável de dimensão n, paracompacta. Seja (W, Φ) subvariedade fechada de dimensão m n, regularmente imersa em V. Então existem n-m aplicações $F_1, \ldots, F_{n-m}: V \to R$ diferenciáveis tais que

$$\Phi(W) = \bigcap_{i=1}^{n-m} F_i^{-1}(0) .$$

Dem. Êste teorema é uma generalização do teorema anterior e se demonstra de maneira análoga.

É natural perguntar em que condições a função F do teorema 13 pode ser tal que $dF \neq 0$ em $\Phi(W)$. Nem sempre uma subvariedade é dado por $F(x) = 0$ com $df \neq 0$ sôbre a subvariedade. Por exemplo, seja V uma circunferência e W um subconjunto de V constituido apenas de um ponto x_o. É impossível termos W dado por $F(x_o) = 0$ com $dF \neq 0$ em x_o, onde F é uma função real diferenciável definida sôbre V, pois do contrário existiria um outro ponto $x_1 \neq x_o$ em V tal que $F(x_1) = 0$ (teorema do anulamento de uma função contínua).

Teorema 15. Sejam V variedade diferenciável de dimensão n, e (W,Φ) subvariedade fechada regularmente imersa em V, de dimensão n-1. Então $V - \Phi(W)$ ou é conexa ou tem apenas duas componentes conexas.

Dem. Se $O = V - \Phi(W)$, e sendo O_i as componentes conexas de O então $\bar{O}_i \cap \Phi(W) \neq \phi$. Com efeito, O_i é aberto (pois V é localmente conexo) e se tivéssemos $\bar{O}_i \cap \Phi(W) = \phi$ então $\bar{O}_i \subset O$, e como $\bar{O}_i$ é conexo $\bar{O}_i \subset O_i$ ou seja $\bar{O}_i = O_i$ o que implicaria que $O_i = \phi$ ou $O_i = V$ (V é conexo) o que é absurdo.

Por outro lado temos $\bar{O}_i \cap \Phi(W) = \Phi(W)$ qualquer que seja i; para mostrar isto, notemos que todo ponto $x \in \bar{O}_i \cap \Phi(W)$ (e portanto $x \in \Phi(W)$) tem uma vizinhança U_x (em V) homeomorfa a uma bola aberta do R^n e $U_x \cap \Phi(W)$ é dado em U_x com coordenadas $(x_1,\dots,x_n)$ por $x_n = 0$, isto é $U_x \cap \Phi(W)$ é homeomorfa a um pedaço de plano; consequentemente $U_x - \Phi(W)$ tem duas componentes U_1, U_2 tais que $\overline{U}_j \cap \Phi(W) = \overline{U}_x \cap \Phi(W)$, $j = 1,2$. Feita esta observação notemos que $\bar{O}_i \cap \Phi(W)$ é fechado em $\Phi(W)$. Também temos que $\bar{O}_i \cap \Phi(W)$ é aberto em $\Phi(W)$. De fato, seja $x \in \bar{O}_i \cap \Phi(W)$; x possue vizinhança U_x tal que $U_x - \Phi(W)$ tem duas componentes U_1, U_2; $U_x \cap O_i \neq \phi$ do que resulta, ou $U_1 \subset O_i$ ou $U_2 \subset O_i$; como $\overline{U}_j \cap \Phi(W) = \overline{U}_x \cap \Phi(W)$ segue que $U_x \cap \Phi(W) \subset \bar{O}_i \cap \Phi(W)$, isto é $\bar{O}_i \cap \Phi(W)$

é aberto em $\Phi(W)$. Sendo $\Phi(W)$ conexo devemos ter $\bar{O}_i \cap \Phi(W) = \Phi(W)$ (já que não podemos ter $= \phi$). Suponhamos agora $V - \Phi(W)$ tenha mais do que duas componentes O_i ; $x \in \Phi(W)$ tem vizinhança U_x tal que $U_x - \Phi(W)$ possue duas componentes conexas U_1 e U_2; então, ou U_1 ou U_2 deveria estar contido em mais do que uma componente conexa O_i, o que é absurdo. Se acontecer de um ponto $x \in \Phi(W)$ possuir uma vizinhança U_x tal que U_1, U_2 estejam contidas na mesma componente conexa O_i então vemos claramente que $V - \Phi(W)$ é conexo, ficando assim demonstrado o teorema.

Ignoramos se êste teorema vale quando, V e W são apenas variedades topológicas.

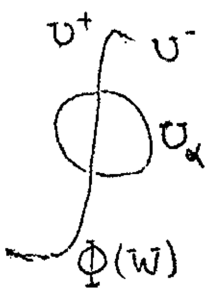
Def. 11. Sejam V variedade diferenciável de dimensão n, e (W, Φ) subvariedade fechada regularmente imersa em V, de dimensão n-1. Dizemos que W é localmente bilateral em V ou , simplesmente, bilateral em V(globalmente bilateral) se e sòmente se $\Phi(W)$ possue uma vizinhança conexa U tal que $U - \Phi(W)$ possue duas componentes conexas ($V - \Phi(W)$ possue duas componentes conexas). Em caso contrário, isto é quando qualquer vizinhança conexa de $\Phi(W)$ for tal que $U - \Phi(W)$ é conexo ($V - \Phi(W)$ é conexo) dizemos que W é localmente unilateral ou, simplesmente unilateral em V (globalmente unilateral).

Teorema 16. Sejam V variedade diferenciável de dimen -

são n, paracompacta, e (W,Φ) subvariedade fechada regularmente imersa em V, de dimensão n-1. Então existe uma aplicação $F: V \to R$ diferenciável tal que $\Phi(W)$ é dada por $F(x) = 0$ com $dF \neq 0$ sôbre $\Phi(W)$ se e sòmente se W for globalmente bilateral em V.

Dem. Suponhamos que $\Phi(W)$ seja dada por $F(x) = 0$ com $dF \neq 0$ sôbre $\Phi(W)$. Se W não fosse bilateral, $V - \Phi(W)$ seria conexo e nêste conjunto $F(x)$ o ou $F(x)$ 0. Se $F(x) > 0$ em $V - \Phi(W)$, $\Phi(W)$ seria o conjunto dos pontos de mínimo de F e portanto $dF = 0$ sôbre $\Phi(W)$. Se $F(x) < 0$, $\Phi(W)$ seria o conjunto dos pontos de máximo e então $dF = 0$ sôbre $\Phi(W)$. Portanto W é globalmente bilateral em V.

Recìprocamente, suponhamos que W é globalmente bilateral em V. Então $V - \Phi(W)$ tem duas componentes conexas : U^+, U^-. Se $x \in \Phi(W)$ existe carta local $(U_\alpha, a_1, \ldots, a_n)$ tal que $x \in U_\alpha$, $U_\alpha - \Phi(W)$ tem duas componentes conexas e $\Phi(W) \cap U_\alpha$ é dado por $a_1 = 0$. Mudando eventualmente a_1 por $-a_1$ podemos supor que se $p \in \Phi(W) \cap U^+$ então $a_1(p) > 0$ e consequentemente, se $p \in \Phi(W) \cap U^-$ então $a_1(p) < 0$.



Definimos

$$F_\alpha = a_1.$$

Se $x \notin \Phi(W)$, e como $\Phi(W)$ é fechado, existe $(U_\alpha, a_1, \ldots, a_n)$ tal que $x \in U_\alpha$ e

$U_\alpha \cap \Phi(W) = \phi$. Podemos supor U_α conexo, e então, nêste caso, ou $U_\alpha \subset U^+$ ou $U_\alpha \subset U^-$. Se $U_\alpha \subset U^+$ definimos

$$F_\alpha = 1$$

e se $U_\alpha \subset U^-$ definimos

$$F_\alpha = -1 .$$

$\{U_\alpha\}$ é um recobrimento de V, e como V é paracompacto, existe um refinamento localmente finito de $\{U_\alpha\}$ que podemos supor que seja $\{U_\alpha\}$. Existe a partição contínua diferenciável da unidade $\{\varphi_\alpha\}$ subordinada a $\{U_\alpha\}$. Então a função $F: V \to R$ diferenciável tal que

$$F(x) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x)\, F_\alpha(x)$$

satisfaz as exigências do teorema. Com efeito, é fácil verificar que $F(x) = 0$ se e sòmente se $x \in \Phi(W)$. Mostremos que $dF \neq 0$ sôbre $\Phi(W)$. De fato, se $x \in \Phi(W)$ existe uma vizinhança V_x de x que encontra um número finito de abertos de α. Calculemos

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}$$

onde $a_1, \ldots, a_n$ são as coordenadas em U_α onde $x \in U_\alpha$:

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\sum_\beta \varphi_\beta F_\beta\right) = \frac{\partial}{\partial a_1}(\varphi_\alpha F_\alpha) + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\partial}{\partial a_1}(\varphi_\beta F_\beta) =$$

$$= \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial a_1} F_\alpha + \varphi_\alpha \frac{\partial a_1}{\partial a_1} + \sum_{\beta \neq \alpha}\left(\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial a_1} F_\beta + \varphi_\beta \frac{\partial \beta_1}{\partial a_1}\right) =$$

$$= \varphi_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} \varphi_\beta \frac{\partial \beta_1}{\partial a_1} \quad .$$

Como $(U_\alpha, a_1, \ldots, a_n)$ e $(U_\beta, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ são cartas locais temos

$$0 \neq \det \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial a_j} \right)_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial a_1} & 0 \ldots 0 \\ * & \frac{\partial \beta_i}{\partial a_j} \end{vmatrix}_{i,j=2,\ldots,n}$$

$$= \frac{\partial \beta_1}{\partial a_1} \left| \frac{\partial \beta_i}{\partial a_j} \right|_{i,j=2,\ldots,n}$$

pois β_1 não depende de $a_2, \ldots, a_n$ em virtude de $U_\alpha \cap \Phi(W)$ ser dado por $a_1 = 0$, e $U_\beta \cap \Phi(W)$ ser dado por $\beta_1 = 0$. Portanto $\frac{\partial \beta_1}{\partial a_1} \neq 0$ e como β_1 é função crescente de a_1 devemos ter $\frac{\partial \beta_1}{\partial a_1} > 0$. Finalmente, desde que existe pelo menos um índice γ tal que $\varphi_\gamma(x) \neq 0$, de

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \varphi_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} \varphi_\beta \frac{\partial \beta_1}{\partial a_1}$$

resulta que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a_1} \right)_x \quad 0$$

o que implica que $dF \neq 0$ em $x \in \Phi(W)$.

Para a generalização dos resultados e outros na mesma ordem de ideias, ver o artigo " Sur les sous-variétés régu -

lieres d'une differentiable" de Chaim Samuel Hönig a ser publicado pròximamente.

IV. Estrutura Riemanniana.

Dar uma estrutura riemanniana sôbre uma variedade diferenciável V é dar um campo de tensores duas vezes covariante $g \in T^{0,2}(V)$ que em todo ponto $x \in V$ seja não degenerado, simétrico e definido positivo (para estas noções ver os exercícios 3,4, 45 do par. 1, Produtos Tensoriais, do Cap.1).

Numa carta local $(U, x_1, \ldots, x_n)$ g se exprime como

$$\sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j$$

em que g_{ij} é portanto uma forma bilinear simétrica definida positiva em todo ponto $x \in U$.

Dado um arco diferenciável φ em V, isto é, uma aplicação diferenciável $\varphi : [0,1] \to V$ que supomos ser restrição de uma aplicação diferenciável $\bar{\varphi} :]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\to V$, seja $g' = \delta\bar{\varphi}(g)$ o campo de tensores duas vezes covariante definido por $\bar{\varphi}$ e g sôbre $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ (ver par. 2 e 3), e t a coordenada natural dêste intervalo.

Def. 12. Comprimento do arco φ é a integral

$$\int_0^1 \left[g'\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt} \right) \right]^{\frac{1}{2}} dt .$$

Se $\varphi([0,1]) \subset U$ esta integral se exprime como

$$t) \qquad \int_0^1 \left[\sum_{i,j} g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}\right]^{\frac{1}{2}} dt \quad \text{onde } \varphi(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

Dados dois pontos x e y de V a <u>distância</u> de x a y é o extremo inferior dos comprimentos de arcos φ que ligam x a y (isto é, tais que $\varphi(0) = x$ e $\varphi(1) = y$). Pode-se demonstrar que a distância assim definida goza das propriedades habituais da distância e é compatível com a topologia de V. Portanto, uma variedade riemanniana (isto é, uma variedade munida de uma estrutura riemanniana) é metrizável e portanto paracompacta (ver Teorema 10 Dêste Apêndice).

Vamos demonstrar que reciprocamente toda variedade diferenciável paracompacta pode ser munida de uma estrutura riemanniana.

De fao, seja $\{(U_\alpha, x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)\}$ um recobrimento localmente finito de V por cartas locais. Sôbre cada U_α vamos definir um campo de tensores duas vezes covariante simétrico, definido positivo, isto é, uma estrutura riemanniana:

$$g_\alpha(x) = \sum_i dx_i^\alpha \otimes dx_i^\alpha$$

Se $\{\varphi_\alpha\}$ é a partição diferenciável da unidade subordinada ao recobrimento $\{U_\alpha\}$ definimos:

$$g = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} \, g_{\alpha} \quad .$$

É imediato que $g \in T^{0,2}(V)$ e que satisfaz às condições necessárias para definir uma estrutura riemanniana sôbre V .

Bibliografia de Geometria Diferencial

Álgebra Multilinear(Cálculo Tensorial)

A. Lichnerowicz - Elements de Calcul Tensoriel (Ollec-ction Armand Colin)

N. Bourbaki - Algèbre, Chap. III (Act. Sci. Ind., Librairie Hermann)

S.S.Chern - Differentiable Manifords (Dept. of Mathematics, Univ. of Chiecago)

Curvas e Superfícies

D.J.Struik - Differential Geometry(Addison-Wesley Publ. Co.)

S.S.Chern - Differential Geometry(Dept. of Mathematics Univ. of Chicago)

Blaschke - Einfuhrung in die Differentialgeometrie(So - ringer- Berlim)

Variedades Diferenciáveis

C. Chevalley - Theory of Lie Groups (Princeton Univ . Press)

S.S.Chern - Differentiable Manifolds

De Rham - Variétés Differentiables (Act.Sci.Ind. Hermann)

Nomizu - Lie Groups and Diff. Geom. (The Mathematical Society of Japan)

R.S. Palais - Transformation Groups etc.(Memoirs Am. Math. Soc. n° 22)