Colóquio 19°
Brasileiro de Matemática

# O TEOREMA DE NASH-MOSER E SUAS APLICAÇÕES

Jorge Hounie
Pedro Malagutti

JORGE HOUNIE (UFPe), PEDRO MALAGUTTI (UFSCAR)



ISBN
85-244-0073-0

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Estrada Dona Castorina, 110 – J. Botânico
CEP: 22460.320 – Rio de Janeiro-RJ

# INTRODUÇÃO

Em 1956 John Nash [N] descobriu um novo tipo de Teorema da Função Inversa e aplicou-o com sucesso na demonstração do seu famoso resultado sobre imersões isométricas. O teorema clássico da Função Inversa, conseqüência do princípio da contração e válido em espaços de Banach, permite obter a solução considerada por meio de aproximações sucessivas. Isto requer que a operação que determina a seguinte aproximação a partir da anterior preserve o espaço onde ocorre a convergência. Quando a equação a ser resolvida é uma equação diferencial parcial (a princípio não linear), os espaços naturais medem o número de derivadas (isto é, o tamanho da derivada de maior ordem) que uma função possui em um espaço de Banach fixo usado como base (é o caso dos espaços de Sobolev, de Hölder, etc.). No esquema clássico de aproximação (aparte da honrosa exceção dos problemas elípticos) há uma perda líquida de derivadas em cada nova aproximação e esta reiterada perda de regularidade impede que um espaço fixo contenha a seqüência, que não pode assim ser convergente. A notável idéia de Nash consitiu em: i) partir do método de Newton para aproximação de raízes de uma equação, cuja estimativa quadrática do erro das aproximações sucesssivas garante uma convergência extremamente rápida no caso clássico; ii) modificar o esquema de Newton utilizando operadores de regularização que compensem as derivadas perdidas a cada passo; iii) mostrar que a rápida convergência fornecida pela estimação quadrática do erro é suficiente para controlar o erro adicional introduzido pelos operadores de regularização.

Alguns anos mais tarde Jürgen Moser [M1, M2] sintetizou os princípios básicos que operam nos bastidores da intrincada demonstração do teorema de Nash, obtendo um teorema abstrato em escalas de espaços de Banach de grande alcance e vasta aplicabilidade.

Em 1989, trinta e três anos depois da publicação do resultado de Nash, P. Günther [Gu] mostrou que uma engenhosa modificação das equações relativas ao problema específico do mergulho isométrico permite reduzi-lo a um sistema que se resolve pelo simples expediente do princípio da contração. Na verdade, o sofisticado e corajoso esquema de Nash era dispensável para resolver este problema!

Mas a história da matemática das três últimas décadas já tinha mudado. Nesse lapso, numerosas aplicações tinham ocorrido em diversas áreas, muitas delas originadas em problemas geométricos, mostrando a versatilidade do método. Podemos mencionar, entre outras, as aplicações de Nash [N] e Jacobowitz [J1] a imersões isométricas, de Moser e Zehnder [Z] a problemas de pequenos divisores, de Hörmander [H1] a problemas em gravitação, de Beale [B] à existência de ondas solitárias na água, de Schaeffer [S1, S2] a problemas em eletromagnetismo, de Kuranishi [K1, K2] e Akahori [A] ao problema do mergulho local de estruturas CR fortemente pseudo-convexas. Em 1982 Richard Hamilton [Ha] publicou um importante trabalho de mais de 150 páginas, quase que um tratado, onde a teoria é cuidadosamente exposta incluindo aplicações, o qual passou a ser desde então referência obrigatória. A ênfase é no cálculo manso na categoria dos espaços de Fréchet, que corresponde a procurar soluções de classe $C^\infty$ partindo de dados $C^\infty$.

Recentemente tem surgido numerosas novas aplicações do esquema de Nash-Moser, tanto no tratamento de equações não lineares associadas a problemas da geometria diferencial quanto na teoria geral da resolubilidade local de equações não lineares. Por exemplo, Goodman e Yang [G-Y] estenderam o teorema de resolubilidade local de Hörmander, válido para equações lineares de tipo principal real ao caso não linear. Equações desta natureza aparecem no problema de achar uma estrutura Riemanniana numa variedade tridimensional com tensor de curvatura prescrito [D-Y] ou no problema de mergulhar localmente em $\mathbb{R}^3$ uma variedade Riemanniana de dimensão dois com curvatura prescrita [L1, L2]. No caso de equações complexas não lineares muito pouco sabe-se ainda, mas em duas variáveis [D, A-H] é possível usar o teorema de Nash-Moser para provar resolubilidade. A existência de soluções locais de classe $C^\infty$ para a equação de Monge-Ampère [H-Z] é outra instância do alcance da teoria de Nash-Moser. Mesmo em problemas lineares a teoria pode ser aplicada com sucesso, particularmente em problemas de integrabilidade local de estruturas involutivas [A, K1, K2, W1, W2, H-M].

Estas notas dividem-se em quatro capítulos e pretendem apenas indicar algumas técnicas básicas para a utilização do método e suas variações. Cada capítulo consta de uma breve introdução onde se descreve seu conteúdo. No primeiro capítulo, prova-se a convergência do esquema de Nash-Moser, cuja forma simples e objetiva presta-se a diversas modificações, necessárias nas aplicações que só verificam as hipóteses do teorema de forma aproximada. Este capítulo inclui uma aplicação muito simples — cuja única virtude é ilustrar o funcionamento do teorema em uma situação onde a verificação da hipóteses consegue-se sem maior esforço— e termina discutindo até que ponto é possível substituir estimativas submansas no lugar de estimativas mansas para uma inversa à direita da derivada do operador em estudo.

As escalas mansas de espaços de Banach são o habitat natural do esquema de Nash-Moser e o segundo capítulo estuda duas importantes escalas mansas: os espaços de Sobolev e os espaços de Hölder. O leitor encontrará lá as estimativas mansas que é preciso utilizar nas aplicações e algumas referências adicionais sobre este extenso assunto.

No terceiro capítulo apresentamos três aplicações. A primeira é o belíssimo teorema de Nash que, como era de se esperar, resulta de uma aplicação direta da teoria. A segunda e a terceira lidam com situações onde *não é possível aplicar o teorema básico* e é precisamente nisto que reside seu interesse — ilustram modificações do método quando as hipóteses do teorema verificam-se apenas aproximadamente.

A maleabilidade e facilidade de aplicação do esquema simplificado de Nash-Moser tem um custo: não fornece, em geral, soluções com a melhor regularidade possível, perdendo mais derivadas do que o necessário. Recentemente, Lars Hörmander [H2] introduziu uma variação do esquema de Nash (mais próximo do esquema original de Nash que da variação de Moser) onde se exploram tanto a compacidade das escalas como as técnicas de decomposição diádica usadas em Análise Harmônica e fundamentais no cálculo paradiferencial de Bony [Bo]. No capítulo quarto descrevemos o esquema de Nash-Hörmander com detalhe, obtendo um teorema que aplicado ao problema da imersão dá a melhor regularidade conhecida: mergulhos de classe de Hölder $\Lambda^\alpha$ quando a métrica é de classe $\Lambda^\alpha$, para todo $\alpha > 2$, resultado devido originalmente a Jacobowitz [J1].

Parte dos tópicos destas notas foram lecionados por um dos autores em um curso regular do Programa de Doutorado da UFPE, o qual deseja agradecer a todos seus alunos pela paciência demonstrada, e particularmente a Maria Eulália Moraes Melo, cujos apontamentos contribuíram para a redação destas notas. Ambos autores agradecem ao Programa de Verão 1993 do Departamento de Matemática da UFPE — que fez possível que o autor da outra instituição visitasse o Recife durante janeiro e fevereiro de 1993, facilitando seu trabalho — e à Comissão Organizadora do 19º Colóquio Brasileiro de Matemática pela oportunidade oferecida. Chegamos agora àquele ponto, hoje em vias de extinção, em que tradicionalmente acostumava-se agradecer a alguém "pelo esmerado serviço de datilografia" e que vem sendo vertiginosamente substituído por fórmulas menos obsoletas. Consignamos então nossos agradecimentos ao chip Intel 80386 e a Donald Knuth pela criação do TEX.

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . i

CAPÍTULO I

1. O método de Newton . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
2. Escalas mansas de espaços de Banach . . . . . . . . . . . . . . . . 4
3. O teorema de Nash-Moser . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
4. Soluções regulares . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
5. A escala de Sobolev no toro . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
6. Uma extensão e um contra-exemplo . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

CAPÍTULO II

1. Os Espaços de Sobolev . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
2. Operações mansas em espaços de Sobolev . . . . . . . . . . . . . . 35
3. Os espaços de Hölder . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42

CAPÍTULO III

Aplicações

1. Mergulhos isométricos de Variedades Riemannianas . . . . . . . . . 54
2. Existência de Soluções Locais da Equação de Monge–Ampère . . . . . 61
3. Integrabilidade Local de Estruturas de Mizohata . . . . . . . . . . 80

3.1 Estruturas Formalmente Integráveis . . . . . . . . . . . . . . . . 81
3.2 Estruturas de Mizohata . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
3.3 Fórmulas de Homotopia . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87
3.4 Regularidade dos Operadores de Homotopia . . . . . . . . . . . . . 90
3.5 Operadores de Regularização . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93
3.6 Pertubações de Estruturas Globalmente Integráveis . . . . . . . . . 94
3.7 Integrabilidade Local de Estruturas de Mizohata . . . . . . . . . 115
3.8 Construção de uma solução global para a estrutura perturbada . . . . 119

## CAPÍTULO IV


1. O esquema de Nash-Hörmander . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 121
2. Boas aproximações da identidade . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123
3. Compacidade . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126
4. O teorema de Nash-Hörmander . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 128
5. Redução a um sistema de Fredholm . . . . . . . . . . . . . . . . . 130
6. Existência de pontos fixos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137
7. Mergulhos isométricos e regularidade . . . . . . . . . . . . . . . . 139

**REFERÊNCIAS** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 141

# CAPÍTULO I

Neste capítulo começamos lembrando o método de Newton para aproximar raízes de uma equação. Em seguida, definimos escalas mansas de espaços de Banach e aproximações da identidade e provamos as propiedades de convexidade utilizadas na teoria. Nos §3 e §4 o teorema de Nash-Moser é enunciado e demonstrado, cabendo à segunda destas seções a parte que se refere às soluções infinitamente regulares quando o membro direito da equação é infinitamente regular. Para isto seguimos o método de Sergeraert [Ser]. No §5 estudamos uma equação diferencial parcial não linear no toro, onde é fácil construir escalas mansas usando séries de Fourier. Embora tudo seja muito simples, o exemplo já permite ilustrar a utilidade das propriedades de convexidade e interpolação das normas, e como agir indutivamente para obter estimativas mansas. No §6 discutimos a possibilidade de relaxar as estimativas mansas para a inversa à direita da derivada do operador em estudo, apresentamos uma extensão válida para estimativas submansas para $r < 2$ (o caso manso corresponde a $r \leq 1$) e mostramos com um contra-exemplo a impossibilidade de obter o mesmo resultado se $r > 2$.

## 1. O método de Newton

Começaremos por lembrar o método de Newton para aproximar uma raiz de uma função real duas vezes diferenciável definida em $\mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ e suponhamos que exista uma constante positiva $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\geq \frac{1}{C}, \qquad x \in \mathbb{R}, \\ |f''(x)| &\leq C, \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $f'$ e $f''$ são as derivadas de $f$. É claro que a primeira condição obriga $f$ a ter, de fato, um zero. Com efeito, $f'$ não pode trocar de sinal e podemos supor, por exemplo, que $f'(x) \leq -1/C$ e $f(0) > 0$. Então, $f(x) - f(0) \leq -(1/C)x$ que resulta menor que $-f(0)$ para $x > 0$ suficientemente grande tornando $f(x) < 0$ o que permite concluir que $f$ tem um zero no intervalo $[0, x]$. Entretanto, este raciocínio simples dá uma informação muito vaga sobre a localização do zero de $f$: o zero pertence ao intervalo $[0, x]$, onde $x = Cf(0)$ e isto é tudo, embora a precisão melhore quanto menor for $|f(0)|$. O raciocínio anterior tem a seguinte interpretação geométrica: o gráfico de $f$ à direita da origem fica por baixo da reta que passa pelo ponto de coordenadas $(0, f(0))$ com declividade $-1/C$. Esta reta intercepta o eixo das abscissas no ponto $x = Cf(0)$. O primeiro passo do método de Newton consiste em substituir a reta descrita anteriormente pela reta que passa pelo mesmo ponto $(0, f(0))$ mas, desta vez, com declividade $f'(0)$. Desta forma obtemos um ponto $x_1$ na interseção com o eixo $x$. Agora reiteramos o processo a partir do ponto $x_1$ para obter um ponto $x_2$ e assim por diante. A seqüência assim definida verifica então

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{f'(x_n)} f(x_n), \qquad n = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{1.2}$$

Estudemos a convergência da seqüência. Pela fórmula de Taylor temos

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + R_2(x_n, x_{n+1}) \\ &= O(|x_{n+1} - x_n|^2) \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde usamos (1.2) para observar que os dois primeiros termos do membro direito cancelam-se mutuamente, e (1.1) para estimar o resto $R_2$. Também segue de (1.1) e (1.2) que $|x_{n+1} - x_n| \leq C|f(x_n)|$, o que combinado com a estimativa anterior fornece

$$|x_{n+1} - x_n| \leq C|x_n - x_{n-1}|^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Se escrevermos $|x_1| = L$ teremos imediatamente por indução que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq C^{2^n - 1} L^{2^n}.$$

Vemos então que se $CL < 1$ a seqüência $(x_n)$ será uma seqüência de Cauchy. Considerando que $|x_1| = |f(x_0)/f'(x_0)| \leq C|f(x_0)|$ bastará supor que $|f(x_0)| < 1/C^2$ para garantir que $CL < 1$, isto é, se no primeiro ponto $x_0$ da seqüência a função assumir um valor suficientemente pequeno, o método fornecerá uma seqüência convergente. Em virtude de (1.3), o limite é necessariamente um zero de $f$. É importante notar que a velocidade da convergência é bastante rápida, já que a distância entre termos consecutivos $|x_{n+1} - x_n|$ é estimada pela potência de uma base fixa menor que 1, com expoente $2^n$.

Grande parte do que foi feito no caso de uma função $f$ definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ aplica-se quase sem modificações ao caso de uma aplicação entre dois espaços normados completos, trocando-se o valor absoluto pela normas correspondentes. Um exemplo típico é o seguinte. Seja $X = C^{k+m}$ (o espaço de Banach das funções $k + m$ vezes contínuas e limitadamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^N$ com a norma do supremo da função e suas derivadas de ordem até $k+m$) e seja $Y = C^k$. Um operador não linear de ordem $m$, $\mathcal{F} : X \to Y$ é uma aplicação da forma

$$\mathcal{F}u(x) = F(x, u, \ldots, D^\alpha u, \ldots), \qquad |\alpha| \leq m, \tag{1.4}$$

onde $F$ é uma função infinitamente diferenciável de todos seus argumentos. Digamos que estamos interessados em encontrar uma função $u(x)$ que verifique a equação $\mathcal{F}u = 0$. Para aplicar o esquema de Newton a esta situação devemos considerar uma seqüência $(u_n)$ definida indutivamente por meio de

$$u_{n+1} = u_n - [\mathcal{F}'(u_n)]^{-1}(\mathcal{F}(u_n)), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

onde $\mathcal{F}'(u_n) \in L(X,Y)$ (espaço das transformações lineares limitadas de $X$ em $Y$). No entanto, para que o método funcione devemos exigir que $[\mathcal{F}'(u_n)]^{-1}$ pertença a $L(Y,X)$. Infelizmente, esta exigência é raramente satisfeita por operadores diferenciais (1.4). Com exceção dos operadores elípticos, mesmo quando $\mathcal{F}'(u_n)$ é injetivo, a inversa $[\mathcal{F}'(u_n)]^{-1}$ não é contínua. Mais precisamente, se pensamos em $Y$ como um espaço de funções que possuem $k$ derivadas, podemos ver o operador $\mathcal{F}$ de ordem $m$ como uma aplicação que "perde" $m$ derivadas. Se, como foi dito, é verdade que em geral $[\mathcal{F}'(u_n)]^{-1}$ não recupera as $m$ derivadas perdidas por $\mathcal{F}$, acontece com freqüência que $[\mathcal{F}'(u_n)]^{-1}$ recupera pelo memos um número fixo $r < m$ de derivadas. Nestas circunstâncias, embora não seja possível aplicar o método de Newton, aplica-se a modificação que dele fez Nash em seu trabalho pioneiro [N]. Nesta modificação a perda de derivadas é compensada pela introdução de operadores de regularização. Nash usou os espaços $C^k$ que não gozam de propriedades funcionais muito adequadas e podem ser substituídos com vantagem pelos espaços de Hölder $\Lambda^k$ ou pelos espaços de Sobolev $H^k$. Todas estas famílias de espaços possuem certas características comuns cuja abstração conduz à noção de escalas mansas de espaços de Banach, segundo se descreve na próxima seção.

## 2. Escalas mansas de espaços de Banach

**Definição 2.1.** *Uma escala de espaços de Banach consiste numa coleção $\mathcal{H} = \{H^k\}$, $k = 0, 1, \ldots$, de espaços de Banach, dotados de normas $\| \ \|_k$, que satisfazem*

$$H^{k+1} \subset H^k, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

$$\|u\|_k \leq \|u\|_{k+1}, \quad u \in H^{k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{2.2}$$

*Denotaremos com $H^\infty$ a interseção $\bigcap_k H^k$ com a topologia do limite projetivo, isto é, a topologia de Fréchet fornecida pelas normas $\| \ \|_k$.*

Já mencionamos na seção anterior que certos operadores de regularização desempenham um papel fundamental no esquema modificado de Newton. A versão abstrata destes operadores leva à seguinte

**Definição 2.2.** *Uma escala de espaços de Banach $\mathcal{H} = \{H^k\}$ é dita mansa se existe uma família monoparamétrica de operadores (denominados regularizantes)*

$$T_\theta : H^0 \longrightarrow H^\infty, \qquad \theta \geq 1,$$

*que satisfazem as estimativas seguintes*

$$\|T_\theta u\|_k \leq C_k \theta^{k-j} \|u\|_j, \quad u \in H^j, \quad j \leq k, \tag{2.3}$$

$$\|u - T_\theta u\|_k \leq C_k \theta^{k-j} \|u\|_j, \quad u \in H^j, \quad j \geq k, \tag{2.4}$$

$$\lim_{\theta \to \infty} \|u - T_\theta u\|_k = 0, \quad u \in H^k. \tag{2.5}$$

É conveniente pensar no índice $k$ como representando a ordem de diferenciabilidade dos elementos do espaço $H^k$, o que vale literalmente na maioria das aplicações.

Se $\{E^k\}$,$\{F^k\}$, são escalas mansas de espaços de Banach, o produto cartesiano $E^k \times F^k$ é também uma escala mansa (com a norma do produto cartesiano), bastando regularizar o par $(e, f) \in E^k \times F^k$ componente a componente utilizando os regularizantes das escalas fatores.

Consideraremos agora aplicações entre escalas mansas que preservem propriedades relevantes.

**Definição 2.3.** *Sejam $\{E^k\}$ e $\{F^k\}$ escalas mansas de espaços de Banach, e seja $D^0 \subset H^0$ um aberto limitado. Uma aplicação $F : D^0 \to F^0$ se diz mansa se verifica*

$$F(D^0 \cap E^k) \subset F^k, \tag{2.6}$$

*e*

$$\|F(u)\|_k \leq C_k(1+\|u\|_k), \quad u \in D^0 \cap E^k, \quad k=0,1,\ldots \tag{2.7}$$

Observemos que não se requer a continuidade de $F$ na Definição 2.3, apenas que se verifique a limitação (2.7). Observe-se também que o membro direito de (2.7) é linear afim em $\|u\|_k$. Mais ainda, a seguinte observação é útil: suponhamos que a aplicação $F$ da Definição 2.3 seja a restrição de uma aplicação linear $F : H^0 \to F^0$. É fácil ver que, neste caso, as estimativas (2.7) implicam por homogeneidade (substituindo em (2.7) $u$ por $u/R\|u\|_0$, se $R \geq 1$ for o raio de uma bola de $H^0$ que contenha $D^0$) as estimativas $\|F(u)\|_k \leq C_k(\|u\|_k + R\|u\|_0) \leq 2RC_k\|u\|_k$. Então, para aplicações lineares, a condição de ser mansa é equivalente à continuidade de $E^k$ em $F^k$, para cada $k$.

Se $F : D^0 \cap (E^k \times F^k) \to G^k$ for mansa teremos as estimativas

$$\|F(u,v)\|_k \leq C_k\left(1+\|u\|_k+\|v\|_k\right), \quad k=0,1,\ldots \tag{2.8}$$

No caso em que $F(u,v)$ é linear na segunda variável $v$ estas estimativas reduzem-se a

$$\|F(u,v)\|_k \leq C_k\big(\|v\|_0(1+\|u\|_k)+\|v\|_k\big), \quad k=0,1,\ldots \tag{2.9}$$

onde $u$ varia num conjunto limitado de $E^k$. Finalmente, se $F$ for bilinear e mansa, as estimativas adotam a forma simples

$$\|F(u,v)\|_k \leq C_k(\|u\|_k\|v\|_0+\|u\|_0\|v\|_k), \quad k=0,1,\ldots \tag{2.10}$$

Verifica-se com facilidade que se $F$ e $G$ são aplicações mansas entre escalas de espaços de Banach, de maneira que a composição $F \circ G$ esteja definida, esta composição será também mansa.

Uma desigualdade clássica permite estimar o supremo da primeira derivada de uma função de uma variável pela média geométrica do supremo da função e o supremo das derivadas até ordem 2. É fácil provar que se $u$ é uma função de classe $C^2$ na reta temos (*cf.*, por exemplo, [Hou2,p. 9])

$$\sup|u'|^2 \leq 4(\sup|u|^2+\sup|u|\sup|u''|).$$

Para as normas de uma escala mansa também é possível estimar as normas intermediárias em função de produtos de potências das normas nos extremos.

**Definição 2.4.** *Seja $\mathcal{H} = \{H^k\}$ uma escala de espaços de Banach. Dizemos que $\mathcal{H}$ tem a propriedade de convexidade, ou mais brevemente que $\mathcal{H}$ tem a PC, se, para toda terna de inteiros não negativos $j < k < l$, existe uma constante positiva $C = C(j,k,l) > 0$ tal que*

$$\|u\|_k \leq C\|u\|_j^t \|u\|_l^{1-t}, \quad u \in H^l, \tag{2.11}$$

*onde $k = tj + (1-t)l$, isto é,*

$$t = \frac{l-k}{l-j} \qquad 1-t = \frac{k-j}{l-j}.$$

Quando $C = 1$, a desigualdade (2.11) afirma que para toda $u$ fixa, a função $k \to \|u\|_k$ é logaritmicamente convexa, ou seja que $k \mapsto \ln \|u\|_k$ é uma função convexa, o que justifica que esta condição seja denominada "propriedade de convexidade". Fixado $l$, só há um número finito de inteiros não negativos menores do que $l$, o que mostra que na definição anterior podemos supor que $C$ só depende efetivamente de $l$.

**Lema 2.5.** *Seja $\mathcal{H} = \{H^k\}$ uma escala mansa de espaços de Banach. Então $\mathcal{H}$ tem a propriedade de convexidade.*

**Demonstração:** Sejam $j < k < l$ inteiros não negativos, $u \in H^l$. Usando o operador regularizante $T_\theta$ e as estimativas (2.3) e (2.4) temos

$$\begin{aligned}\|u\|_k &\leq \|u - T_\theta u\|_k + \|T_\theta u\|_k \\ &\leq C(j,k,l)\big(\theta^{k-l}\, \|u\|_l + \theta^{k-j}\, \|u\|_j\big).\end{aligned}$$

Basta agora escolher $\theta$ tal que $\theta^{k-l}\, \|u\|_l = \theta^{k-j}\, \|u\|_j$ para obter a desigualdade desejada.

A propriedade de convexidade permite estimar também produtos de normas como no lema seguinte:

**Lema 2.6.** *Sejam $\mathcal{G} = \{G^k\}$, $\mathcal{H} = \{H^k\}$, escalas de espaços de Banach que possuem a PC e considere inteiros não negativos $i, j, k, l$ tais que $i < j, k < l$, $i + l = j + k$. Então existe $0 < C = C(l)$ tal que*

$$\|g\|_j \|h\|_k \leq C\big(\|g\|_i \|h\|_l + \|g\|_l \|h\|_i\big), \quad g \in G^l, \quad h \in H^l. \tag{2.12}$$

**Demonstração:** Uma conhecida generalização da estimativa da média geométrica pela média aritmética permite concluir que, dados números reais $0 < t < 1$, $x > 0$ e $y > 0$, vale

$x^t y^{1-t} \leq tx + (1-t)y \leq x + y$. Escrevamos $j = ti + (1-t)l$, $k = si + (1-s)l$. Aplicando a estimativa (2.11) temos

$$\|g\|_j \|h\|_k \leq C \|g\|_i^t \|g\|_l^{1-t} \|h\|_i^s \|h\|_l^{1-s}.$$

Como $k - l = i - j$ segue que $t = 1 - s$, assim

$$\begin{aligned}\|g\|_j \|h\|_k &\leq C\big(\|g\|_i \|h\|_l\big)^t \big(\|g\|_l \|h\|_i\big)^{1-t} \\ &\leq C\big(\|g\|_i \|h\|_l + \|g\|_l \|h\|_i\big).\end{aligned}$$

Temos agora definido todos os ingredientes básicos para provar a convergência do esquema modificado de Newton, o que será feito na próxima seção.

## 3. O teorema de Nash-Moser

Seja $\phi : D \cap H^k \to F^k$ uma aplicação entre escalas mansas, onde $D$ é a bola unitária de $H^0$, e suponhamos que desejamos resolver a equação

$$\phi(u) = v,$$

ou seja, queremos encontrar um zero de $u \mapsto \phi(u) - v$. O método de Newton prescreve considerar a seqüência definida indutivamente

$$u_{n+1} = u_n - [\phi'(u_n)]^{-1}(\phi(u_n) - v) = u_n + [\phi'(u_n)]^{-1}\ (v - \phi(u_n)). \tag{3.1}$$

Além de outras hipóteses, é preciso exigir para que possa haver convergência, que se parta de um ponto $u_0$ que verifique aproximadamente a equação, isto é, que $(v - \phi(u_0))$ seja pequeno. Se admitirmos, depois de uma normalização conveniente, que $\phi(0) = 0$, será suficiente escolher $u_0 = 0$ se $v$ for também pequeno. Na versão de Moser da modificação que Nash fez do método de Newton, o esquema (3.1) é substituido por

$$u_{n+1} = u_n + T_{N_{k+1}}[\phi'(u_n)]^{-1}(v - \phi(u_n)), \tag{3.2}$$

onde $T_{N_{k+1}}$ é o operador regularizante $T_\theta$ para o valor do parâmetro $\theta = N_{k+1}$. A seqüência $(N_k)$ será escolhida de maneira que $N_k \to \infty$ quando $k \to \infty$. Considerando que $T_\theta$ converge para a identidade $I$ quando $\theta \to \infty$, podemos pensar neste esquema como uma perturbação de (3.1). Escrevamos $\delta_n = \|u_n - u_{n-1}\|_\alpha$. Como foi discutido no §1, sob certas hipóteses, o método de Newton leva à estimativa quadrática $\delta_{n+1} \leq C\delta_n^2$, na qual reside a sua rápida convergência. Entretanto, a perturbação introduzida pelos operadores regularizantes em (3.2) levará também a uma perturbação da estimativa quadrática, que passará a adotar a forma

$$\delta_{n+1} \leq C\left(N_n^s \delta_n^2 + N_n^{-\lambda} N_{n-1}^{\lambda+a}\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

para certos parâmetros positivos $s$, $\lambda$ e $a$. Por um lado, $N_n$ deve então convergir para infinito rápido o suficiente para que o produto $N_n^{-\lambda} N_{n-1}^{\lambda+a}$ tenda a zero; por outro lado, se $N_n \to \infty$ rápido demais, o produto $N_n^s \delta_n^2$ corre o risco de não tender para zero. A escolha certa que preserva este delicado equilíbrio resulta ser

$$N_k = N_0^{\sigma^k}, \qquad 1 < \sigma < 2, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

onde $N_0 > 1$. Observe que $N_k$ verifica a relação subquadrática, porém superlinear, $N_{k+1} = N_k^\sigma$. Fixemos então, de uma vez para sempre, um valor de $\sigma$ estritamente entre 1 e 2 (o mais eqüitativo parece ser $\sigma = 3/2$). O comportamento de uma seqüência que obedece (3.3) está contido no seguinte Lema de Moser:

**Lema 3.1.** *Sejam $a$, $s$, $\lambda$, $\mu$, $\sigma$, números reais positivos, $1 < \sigma < 2$, e seja $N_n$ a seqüência definida por (3.4). Consideremos uma seqüência $\delta_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, que satisfaz para alguma constante $C > 0$*

$$\delta_{n+1} \leq C\left(N_n^s \delta_n^2 + N_n^{-\lambda} N_{n-1}^{\lambda+a}\right), \quad n = 1, 2, \ldots, p, \tag{3.5}$$

*e suponhamos que valham as relações*

$$\begin{aligned} \sigma s + (\sigma - 2)\mu &\leq -1, \\ a + \sigma\mu + \lambda(1 - \sigma) &\leq -1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

*Então, se*

$$N_0 > 2C \quad \text{e} \quad \delta_1 \leq N_0^{-\mu}, \tag{3.7}$$

*vale*

$$\delta_n \leq N_{n-1}^{-\mu}, \qquad n = 1, 2, \ldots, p + 1. \tag{3.8}$$

**Demonstração:** Escrevamos $\theta_n = \delta_n N_{n-1}^\mu$. Então (3.5) implica que

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &\leq C\left(N_{n-1}^{\sigma s + (\sigma-2)\mu} \theta^2 + N_{n-1}^{a + (1-\sigma)\lambda + \sigma\mu}\right) \\ &\leq C\left(N_0^{-1}\theta^2 + N_0^{-1}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\theta^2 + 1\right), \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde usamos que $N_k$ é uma seqüência crescente, (3.6) e (3.7). Ora, $\theta_1 = \delta_1 N_0^{\mu} \leq 1$, de maneira que (3.9) permite concluir indutivamente que $\theta_n \leq 1$ para $n = 1, 2, \ldots, p+1$, o que prova (3.8).

É interessante observar que (3.8) mostra que a seqüência $\delta_n$ converge ainda bastante rapidamente para zero, sendo estimada pela potência de uma base menor que 1, com expoente $\sigma^n$, apenas um pouco pior que a obtida no caso não perturbado $\delta_{n+1} \leq C\delta_n^2$ que fornece o expoente $2^n$.

A seguir apresentaremos um lema sobre somas de potências positivas e negativas dos termos da seqüência $N_k$ definida por (3.4), que será de utilidade na demonstração do teorema de Nash-Moser.

**Lema 3.2.** *Seja $1 < \sigma < 2$, $N_0 > 1$, $(N_k)$ a seqüência definida por (3.4). Existe $R = R(\sigma) > 1$ tal que para todo $N_0 \geq R$ vale*

*i)*

$$\sum_{i=0}^{\infty} N_i^{-1} < 1.$$

*ii)*

$$\sum_{k=1}^{i} N_j^t \leq 2N_i^t, \quad \textit{para todo} \quad t \geq 1.$$

**Demonstração:** Como $\sigma > 1$ podemos encontrar $\epsilon > 0$ dependendo apenas de $\sigma$, tal que $\epsilon k \leq \sigma^k$, $k = 0, 1, \ldots$ . Então

$$\sum_{i=0}^{\infty} N_i^{-1} \leq N_0^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} N_0^{-i\epsilon} \leq R^{-1} + \frac{1}{R^{\epsilon} - 1} < 1,$$

onde a última desigualdade vale se $R$ for suficientemente grande. Isto prova a primeira afirmação. Analogamente, existe $\epsilon > 0$ tal que $\sigma^i - \sigma^k \geq \epsilon k$, para todo par de inteiros positivos $i > k$. Então

$$\sum_{k=1}^{i} N_k^t = N_i^t + N_i^t \sum_{k=1}^{i-1} N_0^{t(\sigma^k - \sigma^i)}$$

e

$$\sum_{k=1}^{i-1} N_0^{t(\sigma^k - \sigma^i)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} N_0^{-kt\epsilon} \leq \frac{1}{R^{t\epsilon} - 1} \leq 1,$$

com a última estimativa válida para $R$ grande (mas independente de $t \geq 1$).

Antes de enunciar o teorema de Nash-Moser desejamos fazer uma observação. Mesmo no esquema de Newton (3.1) a hipótese de que $\phi'$ seja inversível pode ser parcialmente relaxada. Para desenvolver o argumento formal que leva à solução quando o esquema converge, é suficiente admitir que $\phi'$ possui uma inversa linear à direita, i.e., um operador $v \mapsto Q(u)v$ tal que $\phi'(u)Q(u)v = v$.

**Teorema de Nash-Moser 3.3.** *Sejam $\mathcal{E} = \{E^k\}$, $\mathcal{F} = \{F^k\}$, escalas mansas de espaços de Banach. Seja $D$ a bola unitária de $E^0$ e $\phi : D \cap E^k \to F^k$ uma aplicação mansa duas vezes diferenciável que verifica para $k = 0, 1, \ldots$,*

*i)* $\phi(0) = 0$ *e* $\phi' : (D \cap E^k) \times E^k \to F^k$ *é mansa:*

$$\|\phi'(u)v\|_k \leq C_k\big[(1 + \|u\|_k)\|v\|_0 + \|v\|_k\big], \quad u \in D \cap E^k, \quad v \in E^k; \tag{3.10}$$

*ii)*

$$\|\phi''(u)(v,w)\|_k \leq C_k(1 + \|u\|_k)\|v\|_k\|w\|_k, \quad u \in D \cap E^k, \quad v, w \in E^k; \tag{3.11}$$

*iii) existe um inteiro positivo $\alpha$, uma bola centrada na origem $D^\alpha \subset E^\alpha$ e um operador manso $Q : (D^\alpha \cap E^{k+\alpha}) \times F^{k+\alpha} \to E^k$, linear na segunda variável, tal que $\phi'(u)Q(u) = I$, $u \in D^\alpha$, onde $I$ denota o operador identidade em $F^{k+\alpha}$, e verificam-se as estimativas*

$$\|Q(u)v\|_k \leq C_k\big[(1 + \|u\|_{k+\alpha})\|v\|_\alpha + \|v\|_{k+\alpha}\big], \quad u \in D^\alpha \cap E^{k+\alpha}, \quad v \in F^{k+\alpha} \tag{3.12}$$

*Então, existe um inteiro $\beta > \alpha$ e um raio positivo $\delta > 0$ tal que a equação*

$$\phi(u) = v, \quad v \in \tilde{D} = \big\{v \in F^\beta : \quad \|v\|_\beta < \delta\big\} \tag{3.13}$$

*tem solução $u \in D \cap E^\alpha$. Se $v \in \tilde{D} \cap F^\infty$ podemos escolher $u \in E^\infty$.*

Observemos que as estimativas (3.10) e (3.12) simplesmente exprimem que $\phi'$ e $Q$ são respectivamente mansas enquanto que (3.11) é uma condição mais fraca que exigir que $\phi''$ seja mansa.

**Demonstração:**

Para resolver (3.13) definimos a seqüência

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ u_{j+1} &= u_j + T_{N_{j+1}} v_j, \quad j = 0, 1, \ldots \\ v_j &= Q(u_j)(v - \phi(u_j)), \quad j = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

onde $N_j$ é a seqüência definida em (3.4). Trataremos de escolher os parâmetros $\beta$ e $\delta$ que determinam $\tilde{D}$ de maneira a tornar $(u_j)$ convergente. Começamos por escolher números $\lambda \geq \alpha$ e $\mu > 1$ tais que

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha\sigma) + (\sigma - 2)\mu &\leq -1, \\ (\sigma^2 + 2\sigma)\alpha + \sigma\mu + \lambda(1-\sigma) &\leq -1. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Isto é claramente possível tomando primeiro $\mu$ suficientemente grande para satisfazer a primeira inequação e posteriormente fixando $\lambda$ de maneira que se verifique a segunda. Desta forma, a hipótese (3.6) do Lema de Moser se satisfaz com $s = \alpha\sigma$ e $a = \sigma^2 + 2\sigma$. Agora definimos $\beta = \lambda + \alpha$, o valor $\delta$ será determinado mais adiante. Provaremos por indução que se $\delta > 0$ for suficiente pequeno e $N_0$ for suficientemente grande, valem a seguintes estimativas, para certas constantes $K_1$, $K_2$, e para todo $i = 0, 1, \ldots$

$$\|u_i\|_\alpha \leq (N_0^{-\mu} + \cdots + N_{i-1}^{-\mu}) \leq \sum_{i=0}^{\infty} N_i^{-\mu} < 1, \tag{3.15}$$

$$\|u_i\|_{\alpha+s} \leq K_1(N_1^{\alpha+s} + \cdots + N_i^{\alpha+s}) \leq 2K_1 N_i^{\alpha+s}, \quad s = 1, \ldots, \lambda, \tag{3.16}$$

$$\|v_i\|_0 \leq 1, \tag{3.17}$$

$$\|v_i\|_s \leq K_2 N_i^{\alpha+s}, \quad s = 1, \ldots, \lambda, \tag{3.18}$$

$$\|u_{i+1} - u_i\|_\alpha \leq N_i^{-\mu}. \tag{3.19}$$

Observemos que (3.15) mostra que $u_i \in D$, assim podemos calcular $\phi(u_i)$ e isto permite definir o próximo termo $u_{i+1}$ da seqüência. Observemos também que as estimativas de (3.15), ... , (3.19), uma vez provadas implicarão na convergência de $(u_i)$ e só envolvem um número finito de normas $\| \ \|_s$ da escala, pois $0 \leq s \leq \lambda + \alpha = \beta$. Por isto, embora as constantes $C_k$ que aparecem nas estimativas (3.10), (3.11) e (3.12) dependam de $k$, elas podem ser substituídas por uma única constante, válida para todo $k \leq \beta$. O mesmo pode ser dito das constantes que aparecem nas estimativas (2.3) e (2.4) dos operadores de regularização. Constantes deste tipo serão denotadas com $A$, $A_1$, $A_2$, etc.

Para $i = 0$, as estimativas (3.15) e (3.16) são trivialmente satisfeitas pois $u_0 = 0$. Também $v_0 = Q(0)v$ verificará (3.17) e (3.18) se $\delta$ for suficientemente pequeno e $K_2$ suficientemente grande, já que $\|v_0\|_0 \leq A\|v\|_\alpha \leq A\|v\|_\beta < A\delta$. Finalmente, (3.19) vem de $\|u_1\|_\alpha \leq A\|v_0\|_\alpha \leq A_1\delta$, tomando $\delta$ pequeno.

Suponhamos então que as desigualdades (3.15), ... , (3.19) verificam-se para os índices $i \leq j-1$ e vejamos que continuam válidas para $i = j$ se $K_1$ e $K_2$ são escolhidas adequadamente. Sabemos do Lema 3.2 que $(N_1^{\alpha+s} + \cdots + N_j^{\alpha+s})$ é a soma parcial de uma série divergente que pode ser estimada por $2N_j^{\alpha+s}$, de modo que, verificando-se a primeira desigualdade de (3.16), a segunda é automática para $N_0$ grande. Utilizando (3.15) e (3.19) com $i = j-1$ segue da propriedade triangular que (3.15) se verifica para $i = j$, em particular $\|u_j\| < 1$ . Desejamos estimar agora $\|u_j\|_{\alpha+s}$, $0 \le s \le \lambda$. Temos

$$\|u_j - u_{j-1}\|_{\alpha+s} = \|T_{N_j} v_{j-1}\|_{\alpha+s} \le AN_j^{\alpha+s}\|v_{j-1}\|_0 \le AN_j^{\alpha+s}. \tag{3.20}$$

Então, usando a hipótese indutiva e (3.20)

$$\|u_j\|_{\alpha+s} \le K_1\big(N_1^{\alpha+s} + \cdots + N_{j-1}^{\alpha+s}\big) + AN_j^{\alpha+s}, \quad s = 1, \ldots, \lambda.$$

Vemos assim que se tivermos escolhido $K_1 = A$ podemos completar o passo indutivo e mostrar que (3.16) vale para $i = j$. Em particular, $K_1$ depende das constantes da escala e não depende de $N_0$. Fazendo $s = 0$ e trocando $j$ por $j+1$ em (3.20) obtemos

$$\|u_{j+1} - u_j\|_\alpha = \|T_{N_{j+1}} v_j\|_\alpha \le AN_{j+1}^\alpha\|v_j\|_0 = AN_{j-1}^{\sigma^2\alpha}\|v_j\|_0. \tag{3.21}$$

Por outro lado, para $s = 1, \ldots, \lambda$ verificam-se as estimativas

$$\begin{aligned}\|v_j\|_s &\le A\big(\|v - \phi(u_j)\|_\alpha(1 + \|u_j\|_{s+\alpha}) + \|v - \phi(u_j)\|_{s+\alpha}\big)\\ &\le A_1\big(\|v\|_{s+\alpha} + (1 + \|u_j\|_\alpha)\|u_j\|_{s+\alpha} + 1\big),\\ &\le A_2(1 + \|u_j\|_{s+\alpha}) \le 3A_2K_1N_j^{s+\alpha}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

onde usamos (3.12), a hipótese de $\phi$ ser mansa, e $\|v\|_{s+\alpha} \le \|v\|_\beta < \infty$. Então, a escolha $K_2 = 3A_2K_1$ permite concluir que (3.18) vale para $i = j$ e $K_2$ é independente de $N_0$. A primeira desigualdade obtida para $v_j$ fornece, tomando $s = 0$,

$$\|v_j\|_0 \le 3A\|v - \phi(u_j)\|_\alpha. \tag{3.23}$$

Utilizando a fórmula de Taylor com resto de ordem 2 podemos escrever

$$\begin{aligned}\phi(u_j) &= \phi(u_{j-1}) + \phi'(u_{j-1})(u_j - u_{j-1}) + R\\ &= v + \phi'(u_{j-1})(T_{N_j} - I)v_{j-1} + R,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\|\phi(u_j) - v\|_\alpha &\le \|\phi'(u_{j-1})(T_{N_j} - I)v_{j-1}\|_\alpha + \|R\|_\alpha\\ &\le A\big[(1 + \|u_{j-1}\|_\alpha)\|(T_{N_j} - I)v_{j-1}\|_0 + \|(T_{N_j} - I)v_{j-1}\|_\alpha\big] + \|R\|_\alpha\\ &\le 3AN_j^{-\lambda+\alpha}\|v_{j-1}\|_\lambda + \|R\|_\alpha\\ &\le 3AK_2N_j^{-\lambda+\alpha}N_{j-1}^{\alpha+\lambda} + \|R\|_\alpha\\ &\le 3AK_2N_j^{-\lambda}N_{j-1}^{2\sigma\alpha+\lambda} + A_1\|u_j - u_{j-1}\|_\alpha^2.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Observe que para estimar o resto $R$ utilizamos a estimativa (3.11) de $\phi''$, com $v = w = u_j - u_{j-1}$ e $u$ no segmento ligando $u_j$ e $u_{j-1}$. Usando (3.19) com $i = j - 1$ para estimar o termo quadrático vem

$$\begin{aligned}\|\phi(u_j) - v\|_\alpha &\leq 3AK_2 N_j^{-\lambda} N_{j-1}^{2\sigma\alpha+\lambda} + A_1 N_{j-1}^{-2\mu} \leq 3AK_2 N_{j-1}^{2\sigma\alpha+\lambda(1-\sigma)} + A_1 N_{j-1}^{-2\mu} \\ &\leq (3AK_2 + A_1) N_{j-1}^{-1} \leq (3AK_2 + A_1) N_0^{-1},\end{aligned}$$

tendo em vista a segunda desigualdade de (3.14), que mostra que o expoente de $N_{j-1}$ é negativo. Inserindo esta estimativa em (3.23) e assumindo que $N_0$ foi escolhido convenientemente grande vem

$$\|v_j\|_0 \leq 3A(3AK_2 + A_1) N_0^{-1} \leq 1.$$

Isto prova que (3.17) vale para $i = j$.

Combinando agora (3.21), (3.23) e (3.24) e escrevendo $\delta_j = \|u_j - u_{j-1}\|_\alpha$ temos

$$\delta_{j+1} \leq 9A^3 A_1 K_2 \left[ N_j^{\sigma\alpha} \delta_j^2 + N_j^{-\lambda} N_{j-1}^{\lambda+(\sigma^2+2\sigma)\alpha} \right]. \tag{3.25}$$

Se soubermos que $\|u_1\|_\alpha \leq N_0^{-\mu}$ e $N_0 > 18A^3 A_1 K_2$, poderemos usar o Lema 3.1 com $s = \sigma\alpha$ e $a = \sigma^2 + 2\sigma$ e assim concluir que $\delta_{j+1} \leq N_j^{-\mu}$, isto é, que (3.19) vale para $i = j$. Com efeito, (3.14) mostra que as hipóteses do lema verificam-se. Basta então partir de um $N_0 > \max(18A^3 A_1 K_2, 3A(3AK_2 + A_1))$ e depois escolher $\delta > 0$ pequeno de maneira que

$$\|u_1\|_\alpha = \|T_{N_1} v_0\|_\alpha \leq A\|v_0\|_\alpha \leq A_1 \|v\|_{2\alpha} \leq A_1 \|v\|_\beta < A_1 \delta < N_0^{-\mu}.$$

Ficam então provadas para todo $i$ as estimativas (3.15), ... , (3.19). A seqüência $u_j$ é de Cauchy em $E^\alpha$ e converge para um certo $u \in D \cap E^\alpha$. Já vimos que $\|\phi(u_j) - v\|_\alpha \leq C N_{j-1}^{-1}$ o que mostra que $\phi(u) \to v$. Para concluir a demonstração do teorema devemos mostrar que se $v \in \tilde{D} \cap F^\infty$ a seqüência $(u_j)$ converge em $E^\infty$, o que faremos na próxima seção.

## 4. Soluções regulares

Começaremos por estabelecer um lema semelhante ao Lema 3.1 que permite estimar o crescimento de uma seqüência definida indutivamente.

**Lema 4.1.** *Seja $N_n$ a seqüência (3.4) e consideremos uma seqüência $\rho_n = \rho_n(\lambda) \geq 0$, $n = 0, 1, \ldots$, dependendo de um parâmetro positivo $\lambda$, que satisfaz para algumas constantes $C \geq 1$ e $\alpha > 0$:*

$$\begin{aligned} &\rho_0 \equiv 1, \\ &\rho_{n+1} \leq C N_n^{\alpha} (\rho_n + \lambda), \quad n = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{4.1}$$

*Então existe $K = K(C)$ e $t > 0$ independente de $C$ e $\lambda$ tais que*

$$\rho_n(\lambda) \leq K N_n^t (1 + \lambda), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.2}$$

**Demonstração:** Escrevamos $\theta_n = N_n^{-s} \rho_n$ com $s$ a ser escolhido. Temos as desigualdades

$$\theta_{n+1} \leq C N_n^{\alpha - s\sigma} (N_n^s \theta_n + \lambda), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.3}$$

Escolhendo $s$ suficientemente grande para que $\alpha - s\sigma \leq \alpha + s(1-\sigma) \leq -1$, vem $C N_n^{\alpha - s\sigma} \leq 1$ e $C N_n^{\alpha + s(1-\sigma)} \leq 1$ para $n \geq n_0$, se $n_0$ for escolhido suficientemente grande. Assim,

$$\theta_{n+1} \leq (\theta_n + \lambda), \quad n = n_0, n_0 + 1, \ldots$$

que implica facilmente por indução que

$$\rho_n \leq N_n^s (\theta_{n_0} + (n - n_0)\lambda) \leq n N_n^s (\theta_{n_0} + \lambda) \leq K_1 N_n^{s+1} (\theta_{n_0} + \lambda) \quad n \geq n_0. \tag{4.4}$$

Por outro lado, (4.3) implica $\theta_{n+1} \leq C(\theta_n + \lambda)$ para todo $n$, o que permite concluir por indução que $\theta_n \leq C^n (1 + \lambda) + C^{n-1} \lambda \leq 2C^n (1 + \lambda)$. Em particular, $\theta_n \leq 2C^{n_0}(1 + \lambda)$, $n \leq n_0$, que equivale a $\rho_n \leq N_n^s C^{n_0} (1 + \lambda)$. Usando esta cota de $\theta_{n_0}$ em (4.4) podemos obter (4.2) com $t = s + 1$ e $K = (2C^{n_0} + 1) K_1$.

Voltemos agora ao fim da demonstração do teorema de Nash-Moser. Já mostramos que se $v \in \tilde{D}$, a seqüência definida por

$$\begin{aligned} &u_0 = 0, \\ &u_{j+1} = u_j + T_{N_{j+1}} Q(u_j)(v - \phi(u_j)), \quad j = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

converge em $E^\alpha \cap D$. Escrevamos $u_j = U_j(v)$ para enfatizar a dependência de $v \in \tilde{D}$. Segue imediatamente por indução que $U_j(v) \in E^\infty$, $j = 0, 1, \ldots$ . Supondo agora que $v \in \tilde{D} \cap F^\infty$ desejamos estimar $\|U_j(v)\|_s$ para qualquer $s \geq \alpha$.

$$\begin{aligned}\|U_{j+1}(v)\|_s &\leq \|U_j(v)\|_s + \|U_{j+1}(v) - U_j(v)\|_s \leq \|U_j(v)\|_s + A_s N_{j+1}^\alpha \|Q(u_j)(v - \phi(u_j))\|_{s-\alpha} \\ &\leq \|U_j(v)\|_s + N_{j+1}^\alpha A'_s ((1 + \|U_j\|_s)\|v - \phi(U_n)\|_\alpha + \|v - \phi(U_n)\|_s) \\ &\leq \|U_j(v)\|_s + N_j^{\sigma\alpha} B_s ((1 + \|U_j\|_s + \|v\|_s)\,.\end{aligned}$$

Escrevamos $\rho_j = 1 + \|U_j\|_s$. Das estimativas anteriores obtemos

$$\rho_{j+1} \leq C(s) N_j^{\sigma\alpha}(\rho_j + \|v\|_s), \quad j = 0, 1, \ldots,$$

e do Lema 4.1 vem que

$$\|U_j(v)\|_s \leq 1 + \|U_j(v)\|_s \leq K(s) N_j^t (1 + \|v\|_s), \quad j = 0, 1, \ldots,$$

e portanto

$$\|U_{j+1}(v) - U_j(v)\|_s \leq K(s) N_{j+1}^t (1 + \|v\|_s), \quad j = 0, 1, \ldots \tag{4.5}$$

Fixemos agora um inteiro $k > \alpha$. Pela propriedade de convexidade que a escala $\mathcal{E}$ possui em virtude do Lema 2.5 (*cf.* Definição 2.4), temos que para qualquer inteiro $s > k$, com $r = (s - k)/(s - \alpha)$,

$$\begin{aligned}\|U_{j+1}(v) - U_j(v)\|_k &\leq C(s)\|U_{j+1}(v) - U_j(v)\|_\alpha^r \|U_{j+1}(v) - U_j(v)\|_s^{1-r} \\ &\leq C'(s) N_j^{-\mu r} N_j^{\sigma t(1-r)} (1 + \|v\|_s)^{1-r}\end{aligned}$$

onde usamos (4.5) e (3.19). Tomando $s$ suficientemente grande para que

$$t\frac{k-\alpha}{s-\alpha} - \mu\frac{s-k}{s-\alpha} < 0$$

vemos que $U_j(v)$ é uma seqüência de Cauchy em todos os espaços $E^k$, $k > \alpha$. Assim, a solução $\lim_{j\to\infty} U_j(v) \in E^\infty$.

Terminaremos esta seção com algumas observações sobre o enunciado do Teorema 3.1. Deve ficar claro que as estimativas (3.10) e (3.11), que expressam que $\phi'$ é mansa e $\phi''$ cresce moderadamente, podem ser relaxadas e substituídas por estimativas análogas onde se perde um número fixo de derivadas, por exemplo, em lugar de (3.10) poderíamos ter

$$\|\phi'(u)v\|_k \leq C_k\big[\big(1+\|u\|_{k+a}\big)\|v\|_0 + \|v\|_{k+a}\big], \quad u \in D \cap E^k, \quad v \in E^k.$$

Bastará considerar a escala $\{F^{k+a}\}$ em lugar da escala $\{F^k\}$ para estar nas hipóteses da versão demonstrada. Teremos ocasião de utilizar estas ligeiras variações do enunciado, o que será feito sem maiores comentários. É bom pensar no Teorema 3.1 apenas como uma versão normalizada de um teorema mais flexível.

Outro ponto que merece menção é o seguinte: a principal propriedade de uma escala mansa é possuir uma família de operadores regularizantes satisfazendo (2.3), (2.4) e (2.5). Examinando a demonstração do teorema vemos que: i) não precisamos de operadores regularizantes na escala de chegada $\mathcal{F}$, apenas em $\mathcal{E}$, ii) não utilizamos a propriedade (2.5) dos operadores regularizantes de $\mathcal{E}$, apenas (2.3) e (2.4). Isto tem a seguinte aplicação prática. Suponhamos que temos uma escala mansa $\mathcal{E}$ com normas $\|\ \|_k$ e outra escala $\mathcal{G}$ com normas $|\ |_k$, e que para um certo inteiro positivo $a$, vale

$$E^{k+a} \subset G^k \subset E^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

onde as inclusões são contínuas, i.e., valem as desigualdades $|u|_k \leq C_k\|u\|_{k+a}$, $\|u\|_k \leq C_k|u|_k$ quando ambos membros estão definidos. Os operadores regularizantes $T_\theta$ de $\mathcal{E}$ podem ser utilizados para definir operadores regularizantes em $\mathcal{G}$. Estes operadores terão as propriedades

$$|T_\theta u|_k \leq C_k\theta^{k-j+a}, \quad u \in G^j, \quad j \leq k, \tag{4.6}$$

$$|u - T_\theta u|_k \leq C_k\theta^{k-j+a}, \quad u \in G^j, \quad j \geq k, \tag{4.7}$$

mais fracas que (2.3) e (2.4), e não há substituto para a propriedade (2.5). Estas propriedades, contudo, são suficientes para que a demonstração do teorema de Nash-Moser funcione, como é fácil verificar.

## 5. A escala de Sobolev no toro

Usamos aqui a notação usual do cálculo de várias variáveis: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ denota um multi-índice de $n$ inteiros e $|\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$ seu comprimento. A variável em $\mathbb{R}^n$ é $x = (x_1, \ldots, x_n)$, o produto interno entre os vetores $x$ e $y$ denota-se por $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$, e escrevemos as derivadas

$$D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Seja $\mathbf{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi \mathbf{Z}^n$ o toro $n$-dimensional, quociente de $\mathbb{R}^n$ pelo subgrupo reticulado dos pontos cujas coordenadas são múltiplos inteiros de $2\pi$. Podemos identificar as funções definidas em $\mathbf{T}^n$ com as funções definidas em $\mathbb{R}^n$, $2\pi$-periódicas em cada variável, $x_1, \ldots, x_n$. Se $Q = [0, 2\pi)^n \subset \mathbb{R}^n$, podemos também identificar $Q$ com $T^n$, já que cada classe do quociente $\mathbb{R}^n / 2\pi \mathbf{Z}^n$ possui exatamente um representante em $Q$. Desta maneira, a medida de Lebesgue em $Q$ fornece uma medida, invariante pelas translações de $\mathbf{T}^n$, ou seja, trata-se da medida de Haar do grupo. Se $f \in L^2(Q) = L^2(\mathbf{T}^n)$, os coeficientes de Fourier de $f$ são dados por

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-ix \cdot \xi} f(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbf{Z}^n. \tag{5.1}$$

Se $f \in C^\infty(\mathbf{T}^n)$, a série de Fourier de $f$ se define como

$$\sum_\xi \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi}, \quad x \in \mathbf{T}^n,$$

onde $\xi$ percorre os pontos de $\mathbf{Z}^n$. Esta série converge para $f$ na topologia de $C^\infty(\mathbf{T}^n)$, e podemos escrever neste caso

$$f(x) = \sum_\xi \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi}, \quad x \in \mathbf{T}^n. \tag{5.2}$$

Se $f \in L^2(\mathbf{T}^n)$, i.e., se $\|f\|^2 = \int_Q |f|^2\, dx < \infty$, a série converge em $L^2(\mathbf{T}^n)$ e vale a identidade de Parseval

$$\|f\|^2 = \int_Q |f|^2\, dx = (2\pi)^n \sum_\xi |\hat{f}(\xi)|^2, \tag{5.3}$$

já que $\{(2\pi)^{-n} e^{ix \cdot \xi} : \xi \in \mathbf{Z}^n\}$ é um sistema ortonormal completo no espaço de Hilbert $L^2(\mathbf{T}^n)$. Derivando (5.2) obtemos

$$D^\alpha f(x) = \sum_\xi \xi^\alpha \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi}, \quad x \in \mathbf{T}^n, \tag{5.4}$$

onde $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$. Se aplicarmos (5.1) com $D^\alpha f$ no lugar de $f$ e levarmos em consideração as relações de ortogonalidade

$$\int_Q e^{ix\cdot\xi}\, e^{-ix\cdot\xi'}\, dx = \int_Q e^{ix\cdot(\xi-\xi')}\, dx = 0, \quad \xi \neq \xi',$$

segue da fórmula (5.4) que

$$(D^\alpha f)\hat{}(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbf{T}^n. \tag{5.5}$$

Então, aplicando (5.3) a $D^\alpha f$ vem

$$\|D^\alpha f\|^2 = \int_Q |D^\alpha f|^2\, dx = (2\pi)^n \sum_\xi |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)|^2. \tag{5.6}$$

Retornemos à fórmula (5.4). Para que o membro direito de (5.4) defina um elemento de $L^2(\mathbf{T}^n)$ é suficiente que $\sum |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)|^2 < \infty$. Neste caso, podemos usar (5.4) para *definir* $D^\alpha f$ mesmo que a derivada de $f$ não exista no sentido usual. Esta noção fraca de derivada coincide com a definição de derivada no sentido das distribuições, mas não nos utilizaremos deste fato. Definimos para $s = 0, 1, \dots$ , os espaços de Sobolev

$$H^s = \{f \in L^2(\mathbf{T}^n) : \quad \sum_\xi |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)|^2 < \infty, \quad |\alpha| \le s\}. \tag{5.7}$$

Tendo em vista (5.7), uma norma natural para $H^s$ seria

$$\sum_\xi \sum_{|\alpha|\le s} |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)|^2,$$

porém é possível definir uma norma equivalente mais simples e de mais fácil manuseio. Usaremos a notação

$$\langle\xi\rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbf{Z}^n.$$

Observamos que para certas constantes $A_s$, $B_s$,

$$A_s\langle\xi\rangle^{2s} \le \sum_{|\alpha|\le s} |\xi^\alpha|^2 \le B_s\langle\xi\rangle^{2s},$$

e definimos a norma em $H^s$ por

$$\|f\|_s^2 = (2\pi)^n \sum_\xi \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 \tag{5.8}$$

o que torna $H^s$ num espaço de Hilbert. Note-se que de acordo com (5.3) as normas $\| \;\|$ de $L^2(Q)$ e $\| \;\|_0$ de $H^0$ coincidem, de maneira que $L^2(Q) = L^2(\mathbf{T}^n) = H^0$. Mais geralmente,

$$H^s = \{f \in L^2(\mathbf{T}^n): \quad D^\alpha f \in L^2(\mathbf{T}^n), \quad |\alpha| \leq s\}.$$

Vemos que $s$ mede até que ordem os elementos de $H^s$ podem ser derivados (no sentido definido acima) de maneira que o resultado pertença a $L^2(\mathbf{T}^n)$. Naturalmente, é de interesse conhecer como se relaciona esta noção de regularidade em $L^2$ com a noção clásssica de regularidade, o que é o objeto do Lema de Sobolev. Em sua demonstração faremos uso do seguinte lema.

**Lema 5.1.** *Seja $N = [n/2] + 1$, onde $[n/2]$ denota a parte inteira do número $n/2$. Então a série*

$$S = \sum_\xi \langle\xi\rangle^{-2N}$$

*onde $\xi$ percorre os pontos de $\mathbf{Z}^n$, é convergente.*

**Demonstração:** Seja $Q_\xi = \xi + Q_0$, $\xi \in \mathbf{Z}^n$, o transladado do cubo $Q_0 = [0,1)^n$. Então, para uma certa constante $A$, vale

$$\langle\xi\rangle^{-2N} \leq A(1 + |x|^2)^{-N}, \quad x \in Q_\xi.$$

Integrando esta estimativa no cubo de volume unitário $Q_\xi$ em relação a $dx$ temos

$$\langle\xi\rangle^{-2N} \leq A \int_{Q_\xi} (1 + |x|^2)^{-N}\, dx,$$

estimativas que somadas em $\xi \in \mathbf{Z}^n$ fornecem

$$S \leq A \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |x|^2)^{-N}\, dx$$

já que os cubos cobrem $\mathbf{R}^n$ e são mutuamente disjuntos. Mas a integral pode ser facilmente estimada em coordenadas polares por

$$\int_0^\infty (1 + r^2)^{-N}\, r^{n-1}\, dr < \infty$$

onde usamos que $-2N + n - 1 < -1$.

**Lema de Sobolev 5.2.** *Seja $N = [n/2]+1$. Então, $H^N \subset C^0(\mathrm{T}^n)$. Mais precisamente, se $f \in H^N \subset L^2(\mathrm{T}^n)$, podemos corrigir $f$ num conjunto de medida nula para torná-la contínua e, para uma constante $C > 0$ independente de $f$, vale*

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in Q} |f(x)| \leq C\|f\|_N. \tag{5.9}$$

**Demonstração:** Seja $f \in H^N$. Como elemento de $L^2(Q)$, $f$ está definida a menos de um conjunto de medida nula. Consideremos a série de Fourier de $f$, que converge para $f$ em norma quadrática. Temos, em virtude da desigualdade de Schwarz e do Lema 5.1,

$$\begin{aligned}\sum_\xi |\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}| &\leq \sum_\xi \langle\xi\rangle^{-N/2}\langle\xi\rangle^{N/2}|\hat{f}(\xi)| \\ &\leq \Big(\sum_\xi \langle\xi\rangle^{-N}\Big)^{1/2}\Big(\sum_\xi \langle\xi\rangle^{N}|\hat{f}(\xi)|^2\Big)^{1/2} \leq C\|f\|_N.\end{aligned}$$

Assim, a série converge absoluta e uniformemente a um limite contínuo pois as somas parciais são contínuas. Esta função contínua define o mesmo elemento de $L^2(Q)$ que $f$ —uma subseqüência da somas parciais converge para $f$ em quase toda parte— e só pode diferir de $f$ em um conjunto desprezível. O argumento mostra também a validade de (5.9).

Se agora consideramos $f \in H^{N+k}$, $k = 0, 1, \dots$ , podemos aplicar o Lema 5.2 a $D^\alpha f$, $|\alpha| \leq k$ e obter

**Corolário 5.3.** *Seja $N = [n/2]+1$. Então*

$$H^{N+k} \subset C^k(\mathrm{T}^n) \subset H^k, \quad k = 0, 1, \dots \tag{5.10}$$

$$H^\infty = C^\infty(\mathrm{T}^n). \tag{5.11}$$

Observemos que a primeira das inclusões em (5.10) vem do Lema 5.2 e a outra é imediata já que se $f \in C^k$, todas suas derivadas até ordem $k$ serão limitadas em $Q$ e, portanto, de quadrado integrável. É igualmente claro que (5.10) implica (5.11). Vale a pena enfatizar que a continuidade de $f$ em $\mathrm{T}^n$ significa, além da continuidade em $Q$, que $f$ se estende continuamente ao fecho de $Q$ de forma que $f$ assume o mesmo valor em pontos correspondentes de faces opostas, i.e., é a restrição a $Q$ de uma função contínua e $2\pi$-periódica de $\mathbb{R}^n$.

**Proposição 5.4.** *A escala dos espaços de Sobolev $\{H^s\}$ no toro $\mathbf{T}^n$ é mansa.*

**Demonstração:** Definimos os operadores regularizantes

$$T_\theta f(x) = \sum_{\langle\xi\rangle\leq[\theta]} \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}, \quad f\in H^0, \quad \theta>1 \tag{5.12}$$

e desejamos provar que verificam-se as condições (2.3), (2.4) e (2.5). Considerando inteiros $0\leq j\leq k$,

$$\begin{aligned}\|T_\theta f\|_k^2 &= \sum_{\langle\xi\rangle\leq[\theta]} \langle\xi\rangle^{2k}|\hat{f}(\xi)|^2 \leq \sum_{\langle\xi\rangle\leq[\theta]} \langle\xi\rangle^{2j}|\hat{f}(\xi)|^2[\theta]^{2(k-j)}\\ &\leq \theta^{2(k-j)}\|f\|_j^2, \quad f\in H^j,\end{aligned}$$

podemos concluir que a condição (2.3) é satisfeita. Análogamente, se $0\leq k\leq j$,

$$\begin{aligned}\|f-T_\theta f\|_k^2 &= \sum_{\langle\xi\rangle\geq[\theta]+1} \langle\xi\rangle^{2k}|\hat{f}(\xi)|^2 \leq \sum_{\langle\xi\rangle\geq[\theta]+1} \langle\xi\rangle^{2j}|\hat{f}(\xi)|^2|\theta|^{2(k-j)}\\ &\leq \theta^{2(k-j)}\|f\|_j^2, \quad f\in H^j.\end{aligned}$$

Finalmente, (2.5) vem de

$$\|f-T_\theta f\|_k^2 = \sum_{\langle\xi\rangle\geq[\theta]+1} \langle\xi\rangle^{2k}|\hat{f}(\xi)|^2 \longrightarrow 0, \quad \langle\xi\rangle\to\infty,$$

pois a série de termo geral $\langle\xi\rangle^{2k}|\hat{f}(\xi)|^2$ é convergente se $f\in H^k$.

Veremos agora uma aplicação do teorema de Nash-Moser à resolução de uma equação não linear em $\mathbf{T}^2$. Este exemplo é muito simples mas ilustra o funcionamento do teorema. Consideremos primeiro o operador linear

$$Lu = \partial_1^2 u + \partial_2 u + \frac{1}{2}u. \tag{5.13}$$

Partindo de $u_0\in C^\infty(\mathbf{T}^2)$, escrevemos $f_0 = Lu_0$, e desejamos resolver a equação não linear

$$Lu + (u-u_0)^2 = f \tag{5.14}$$

com $f$ próxima de $f_0$ (em algum sentido a ser estabelecido). Escrevendo $u+u_0$ em lugar de $u$ e $f+f_0$ em lugar de $f$, (5.14) leva a

$$\phi(u) = Lu + u^2 = f, \tag{5.15}$$

com $f$ pequena. Começaremos por provar que $u \mapsto \phi(u)$ é mansa como aplicação de $H^{s+2}$ em $H^s$. Segue de $(Lu)\hat{}(\xi) = (-\xi_1^2 + i\xi_2 + 1/2)\hat{f}(\xi)$ que $\|Lu\|_s \leq C\|u\|_{s+2}$. Por outro lado, denotando por $C$ uma constante positiva que pode mudar de valor a cada ocorrência mas não depende de $u$,

$$\begin{aligned}
\|u^2\|_s &\leq C \sum_{|\alpha|\leq s} \|D^\alpha(u^2)\| \leq C \sum_{|\alpha+\beta|\leq s} \|D^\alpha u D^\beta u\| \\
&\leq C \sum_{|\alpha+\beta|\leq s} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} \|D^\beta u\| \leq C \sum_{|\alpha+\beta|\leq s} \|u\|_{|\alpha|+2} \|D^\beta u\| \\
&\leq C \sum_{j+k\leq s} \|u\|_{j+2} \|u\|_k \leq C\|u\|_{s+2}\|u\|_2.
\end{aligned}$$

Usamos aqui a regra de Leibniz para calcular as derivadas do produto $u^2 = uu$, o Lema de Sobolev 5.2 com $N = [n/2]+1 = 1+1 = 2$ e o Lema 2.6 na última desigualdade para estimar os diferentes produtos de normas por um produto fixo. Desta forma vemos que, se $D$ é a bola unitária de $H^2$, vale

$$\|\phi(u)\|_s \leq C\|u\|_{s+2}, \quad u \in D \cap H^{s+2}, \quad s = 0, 1, \ldots \tag{5.16}$$

Daqui por diante tomaremos sempre $u \in D$ mesmo que isto não seja explicitamente mencionado. Computando agora as derivadas obtemos

$$\begin{aligned}
\phi'(u)v &= Lv + 2uv, \\
\phi''(u)(v,w) &= Lw + 2(uv + vw).
\end{aligned}$$

Então estas expressões permitem facilmente obter

$$\|\phi'(u)v\|_s \leq C\big(\|v\|_{s+2}(1 + \|u\|_2) + \|u\|_{s+2}\big), \tag{5.17}$$

e

$$\|\phi''(u)(v,w)\|_s \leq C\big((1 + \|u\|_{s+2})\|v\|_2\|w\|_2 + \|v\|_2\|w\|_{s+2} + \|v\|_{s+2}\|w\|_2\big). \tag{5.18}$$

Percebemos assim que $\phi$, $\phi'$ e $\phi''$ satisfazem as condições adequadas à aplicação do Teorema 3.3, entre as escalas $E^k = H^{k+2}$ e $F^k = H^k$. A hipótese que falta ainda estabelecer é a existência de uma inversa à direita mansa para $\phi'$. Examinemos primeiro o comportamento de $\phi'(0)v = Lv$. Tomando a série de Fourier da equação $Lv = f$ obtemos

$$(-\xi_1^2 + i\xi_2 + 1/2)\hat{v}(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbf{Z}^2,$$

o que permite escrever

$$\hat{v}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{-\xi_1^2 + i\xi_2 + 1/2}, \quad \xi \in \mathbf{Z}^2,$$

já que o denominador não se anula quando $\xi_1$ e $\xi_2$ são inteiros, e de fato,

$$|\hat{v}(\xi)| \leq 4\langle\xi\rangle^{-1}|\hat{f}(\xi)|, \quad \xi \in \mathbf{Z}^2.$$

Isto implica imediatamente que

$$\|v\|_{s+1} \leq 4\|f\|_s, \quad f \in H^s, s = 0, 1, \ldots \tag{5.19}$$

Noutras palavras, $\phi'(0) = L$ possui uma inversa à direita $K : H^0 \to H^1$ que aplica $H^s$ em $H^{s+1}$ com norma $\leq 4$. Vemos que $K$ recupera apenas uma derivada enquanto $L$ perde duas, situação padrão nas aplicações do teorema de Nash-Moser. Trataremos agora $\phi'(u)v = Lv + uv$ como uma perturbação de $L$. Se a norma de $u$ em $H^2$ for suficientemente pequena, $\|u\|_2 < \delta$, o Lema 5.2 garante que o supremo de $u$ em $\mathbf{T}^2$ será menor que $1/8$, a norma de $v \to uv$ em $L^2(\mathbf{T}^2)$ será também $< 1/8$ e a norma de $uK$ em $L^2(\mathbf{T}^2)$ será $< 1/2$. Segue que o operador $I + uK$ é inversível em $L^2(\mathbf{T}^2)$ (com norma $\leq 2$). Verificamos que o operador $K(u) = K(I + uK)^{-1} : H^0 \to H^1$ satisfaz

$$(L + u)K(u)f = f, \quad f \in H^0. \tag{5.20}$$

Este argumento mostra que $K(u)$ é uma inversa à direita de $\phi'(u)$, quando $\|u\|_2 < \delta$ e $\|K(u)f\|_1 \leq 8\|f\|_0$. Para estimar normas mais altas de $K(u)v$ não poderemos tratar $I + uK$ diretamente como uma perturbação da identidade em $H^s$, pois mesmo sendo o supremo de $u$ pequeno, suas derivadas poderão ser grandes. Suponhamos que $u \in H^{s+2}$ e ainda $\|u\|_2 < \delta$. Se $f \in H^s$, $s \geq 1$ e escrevemos $v = K(u)v$, vale $\|v\|_0 \leq 8\|f\|_0$ e $(L + u)v = f$. Derivando esta equação em relação a $x_j$, $j = 1, 2$,

$$L\partial_j v = \partial_j f - v\partial_j u - u\partial_j v = g.$$

Então,

$$\begin{aligned}\|\partial_j v\|_1 &\leq 4\|g\|_0 \leq 4\|f\|_1 + 4\|v\|_0\|\partial_j u\|_{L^\infty} + \|\partial_j v\|_0\|u\|_{L^\infty} \\ &\leq 4\|f\|_1 + C(\|v\|_0\|u\|_3 + \|v\|_1\|u\|_2) \\ &\leq C(\|f\|_1 + \|f\|_0\|u\|_3).\end{aligned}$$

Somando as desigualdades correspondentes a $j = 1$ e $j = 2$ com a estimativa conhecida para $\|v\|_0$ obtemos

$$\|v\|_2 \leq C\big(\|f\|_1 + \|f\|_0(\|u\|_3 + 1)\big)$$

que fornece a estimativa desejada para $s = 2$. Continuando com este processo podemos obter indutivamente para todo $s = 0, 1, \ldots$

$$\|v\|_{s+1} \leq C_s\big(\|f\|_s + \|f\|_0(\|u\|_{s+2} + 1)\big).$$

Estas são as estimativas requeridas para a inversa à direita de $\phi'(u)$. O Teorema 3.3 permite concluir que se $f$ tem norma pequena em $H^\beta$ (para um certo $\beta$), a equação $\phi(u) = f$ tem solução. Ainda, se $f$ é de classe $C^\infty$ a solução fornecida pelo teorema é também de classe $C^\infty$.

## 6. Uma extensão e um contra-exemplo

Quando se deseja fazer um estudo mais fino da regularidade das soluções de uma equação é conveniente introduzir escalas de espaços de Banach $\{H^s\}$ onde $s \geq 0$ varia continuamente em lugar de assumir apenas valores discretos. Seja $\{H^s\}$, $0 \leq s < \infty$ uma escala de espaços de Banach. Dizemos que $T_\theta : H^0 \to H^\infty = \bigcap_s H^s$, $\theta \geq 1$, é uma aproximação da identidade se satisfaz as estimativas

$$\|T_\theta u\|_s \leq C_{st}\theta^{s-t}\|u\|_t, \quad u \in H^t, \quad t \leq s, \tag{6.1}$$

$$\|u - T_\theta u\|_s \leq C_{st}\theta^{s-t}\|u\|_t, \quad u \in H^t, \quad t \geq s, \tag{6.2}$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \|u - T_\theta u\|_s = 0, \quad u \in H^s, \tag{6.3}$$

onde as constantes $C_{st}$ são limitadas uniformemente quando $s$ e $t$ permanecem limitados. Já vimos no Lema 2.5 do Capítulo I que a existência de aproximações da identidade verificando as estimativas (6.1) e (6.2) implicava na validade da PC (*cf.* Definição I.2.4) para escalas discretas de espaços de Banach. A mesma demonstração prova a propriedade de convexidade para escalas contínuas, onde o índice $s$ assume valores reais. Uma escala contínua dotada de uma aproximação da identidade é dita uma escala mansa, como no caso discreto.

Consideremos a escala mansa de espaços de Banach reais $\{E^s\}$, $s \geq 0$, definida por

$$E^s = \big\{f \in C^0[1,\infty) : \quad f(1) = 0, \quad \sup(|f(x)|e^{x(s+1)}) < \infty\big\},$$

com a norma dada por

$$\|f\|_s = \sup_{x\geq 1}(|f(x)|e^{x(s+1)}).$$

Seja $\psi \in C^0(\mathbb{R})$ tal que $\psi(x) = 1$ se $x \leq 2$ e $\psi(x) = 0$ se $x \geq 3$. Verifica-se facilmente que

$$T_\theta u(x) = \psi(e^x\theta)u(x), \qquad \theta \geq 1,$$

é uma família de operadores regularizantes na escala $\{E^s\}$, que é portanto mansa. Seja $B$ a bola unitária de $H^0$, em particular, $|u(x)| \leq e^{-x}$ se $u \in B$. Fixemos um número $r > 1$ e consideremos o operador $\phi : B \cap H^s \to H^s$ dado por

$$\phi(u)(x) = u(rx) - u^2(x). \tag{6.4}$$

Verificaremos que $\phi$, $\phi'$ e $\phi''$ são operadores mansos. Com efeito, para todo $s \geq 0$

$$\sup(|u(rx)|e^{x(s+1)}) \leq \sup(|u(rx)|e^{rx(s+1)}) \leq \|u\|_s$$

e

$$\|u^2\|_s \leq \sup|u|\,\|u\|_s \leq \|u\|_0\|u\|_s,$$

o que mostra que $\phi$ é mansa e

$$\|\phi(u)\|_s \leq \|u\|_s + \|u\|_0\|u\|_s.$$

Por outro lado,

$$\phi'(u)v(x) = v(rx) - 2u(x)v(x)$$

e

$$\|\phi(u)v\|_s \leq \|v\|_s + 2\|u\|_0\|v\|_s.$$

Finalmente, $\phi''(u)(v,w) = \phi''(v,w) = -2vw$ e

$$\|\phi''(v,w)\|_s \leq 2\|v\|_0\|w\|_s.$$

Construiremos agora uma inversa à direita de $\phi'(u)$ assumindo que $u$ pertence à bola $D$ de $H^0$: $\|u\|_0 < \delta$. Dados $u$ e $v$ em $E^s$, $\|u\|_0 < \delta$, devemos achar $w(x)$ tal que

$$w(rx) = v(x) + 2u(x)w(x), \quad x \geq 1. \tag{6.5}$$

Definimos $w(x) = 0$ para $1 \leq x \leq r$, o que é compatível com (6.5) para $x = 1$ já que $v(1) = 0$. Agora (6.5) determina $w(x)$ no intervalo $[r, r^2]$ e, agindo indutivamente, em todos os intervalos $[r^n, r^{n+1}]$, $n = 1, 2, \ldots,$ . Escolhendo $\delta$ suficientemente pequeno para que $2 \sup |u(x)| < 1/2$, vem de (6.5) que $\sup |w(x)| \leq \sup |v(x)| + \sup |w(x)|/2$ o que mostra que $\sup |w(x)| \leq 2 \sup |v(x)| < \infty$. Então

$$\begin{aligned}\|w\|_s &= \sup_{x \geq 1} |w(rx)| e^{(s+1)rx} \leq \sup_{x \geq 1} |v(x)| e^{(s+1)rx} + 2 \sup |w(x)| \sup_{x \geq 1} |u(x)| e^{(s+1)rx} \\ &\leq \|v\|_{rs+r-1} + 2 \sup |w(x)| \|u\|_{rs+r-1} \leq \|v\|_{rs+r-1} + 4 \|v\|_0 \|u\|_{rs+r-1}.\end{aligned}$$

Escrevendo $w = Q(u)v$, $\alpha = r - 1$, temos uma estimativa do tipo

$$\|Q(u)v\|_s \leq C_s \big[(1 + \|u\|_{rs+\alpha}) \|v\|_\alpha + \|v\|_{rs+\alpha}\big], \quad u \in D \cap E^{rs+\alpha}, \quad v \in E^{rs+\alpha}, \tag{6.6}$$

mais fraca que (3.12), devido à presença do fator $r > 1$. Diremos que se trata de uma estimativa submansa. É natural perguntar-se se o teorema de Nash-Moser ainda continua válido sob esta hipótese mais fraca. A resposta é sim para $1 < r < 2$ e vem, em última instância, da possibilidade de concluir a rápida convergência de uma seqüência $\delta_n \geq 0$ que satisfaça com $r < 2$ (*cf.* Lema 3.1) a seguinte estimativa:

$$\delta_{n+1} \leq C \left( N_n^s \delta_n^2 + N_n^{-\lambda} N_{n-1}^{r\lambda + a} \right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

onde $N_n$ está definida por (3.4), e assumimos que existem $\mu > 0$ e $\sigma$ satisfazendo $r < \sigma < 2$ de maneira que valham as relações

$$\begin{gathered}\sigma s + (\sigma - 2)\mu \leq -1, \\ a + \sigma\mu + \lambda(r - \sigma) \leq -1,\end{gathered}$$

sempre que $N_0$ seja suficientemente grande e $\delta_1$ suficientemente pequeno. Uma modificação adequada da demonstração do Teorema 3.3, que não envolve nenhuma idéia nova, permite obter a seguinte extensão do teorema de Nash-Moser:

**Teorema 6.1.** *Sejam $\mathcal{E} = \{E^s\}$, $\mathcal{F} = \{F^s\}$, $0 \leq s < \infty$, escalas mansas de espaços de Banach. Seja $D$ a bola unitária de $E^0$ e $\phi : D \cap E^s \to F^s$ uma aplicação mansa duas vezes diferenciável que verifica para $s \geq 0$*

*i)* $\phi(0) = 0$ *e* $\phi' : (D \cap E^s) \times E^s \to F^s$ *é mansa:*

$$\|\phi'(u)v\|_s \leq C_s \big[(1 + \|u\|_s) \|v\|_0 + \|v\|_s\big], \quad u \in D \cap E^s, \quad v \in E^s;$$

*ii)*

$$\|\phi''(u)(v,w)\|_s \leq C_s(1+\|u\|_s)\|v\|_s\|w\|_s, \quad u \in D \cap E^s, \quad v,w \in E^s;$$

*iii) existe um inteiro positivo $\alpha$, um número real $r < 2$, uma bola centrada na origem $D^\alpha \subset E^\alpha$ e um operador manso $Q : (D^\alpha \cap E^{rs+\alpha}) \times F^{rs+\alpha} \to E^s$, linear na segunda variável, tal que $\phi'(u)Q(u) = I$, $u \in D^\alpha$, onde $I$ denota o operador identidade em $F^{rs+\alpha}$, e verificam-se as estimativas (6.6).*

*Então, existe um inteiro $\beta > \alpha$ e um raio positivo $\delta > 0$ tal que a equação*

$$\phi(u) = v, \quad v \in \tilde{D} = \{v \in F^\beta : \quad \|v\|_\beta < \delta\}$$

*tem solução $u \in D \cap E^\alpha$. Se $v \in \tilde{D} \cap F^\infty$ podemos escolher $u \in E^\infty$.*

Tecnicamente, a hipótese $r < 2$ nas estimativas submansas de $Q(u)$ no teorema acima, está vinculada ao fato do esquema de Newton envolver um controle *quadrático* do erro. Veremos agora, por meio de um contra-exemplo, que quando $r > 2$ o teorema correspondente é falso (trata-se de uma variação de um contra-exemplo similar devido a Hamilton [Ha]).

**Contra-exemplo.** Voltemos à escala $E^s$ e ao operador (6.4) definido acima, assumindo agora que $r > 2$. Sejam $\beta > 0$, $\delta > 0$ e $f \in E^\beta$ com $\|f\|_\beta < \delta$. Suponhamos que exista $u \in E^0$ tal que $\phi(u) = f$. Então,

$$u(rx) = f(x) + u^2(x), \qquad x \geq 1. \tag{6.7}$$

É claro que qualquer que seja $\delta > 0$ podemos tomar $f \in E^\beta$ com $\|f\|_\beta < \delta$ que verifique $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 1$ e $f(r) > 0$. Vem de (6.7) que $u(r^2) \geq f(r) = \gamma > 0$. Usando indutivamente (6.7) temos

$$u(r^{n+2}) \geq \gamma^{2^n} = \exp(2^n \ln \gamma) \quad n = 0, 1 \ldots$$

Então,

$$\|u\|_0 = \sup |u(x)e^x| \geq u(r^{n+2})\exp(r^{n+2}) \geq \exp(r^{n+2} + 2^n \ln \gamma),$$

e o membro direito tende para infinito quando $n \to \infty$, contradizendo que $u \in E^0$.

## CAPÍTULO II

Como vimos no capítulo anterior, a possibilidade de aplicar o teorema de Nash-Moser para resolver uma equação depende fortemente da existência de escalas mansas no espaço ambiente onde as operações envolvidas resultem mansas. No toro, onde desenvolvemos uma aplicação na última seção do Capítulo I, a construção de uma escala mansa foi facilitada pela expansão das funções em série de Fourier. Para construir escalas mansas com boas propriedades em outras variedades, será necessário proceder por localização e colagem. Isto nos leva a considerar escalas em $\mathbb{R}^n$. Na seção 1 estudamos as escalas de Sobolev em $\mathbb{R}^n$ e descrevemos aproximações da identidade. Na seção 2 consideramos vários tipos de operações mansas de grande utilidade nas aplicações, e descrevemos a construção das escalas de Sobolev em uma variedade compacta. A última seção é dedicada à escala dos espaços de Hölder e suas operações mansas. Trata-se, evidentemente, de um capítulo de construção de ferramentas.

### 1. Os espaços de Sobolev

As escalas de Sobolev em $\mathbb{R}^n$ fornecem uma forma de aferir a regularidade de uma função em termos do número de derivadas que pertencem ao espaço $L^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Lembremos que $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ de potência $p$ integrável e constitui um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \qquad u \in L^p,$$

quando $1 \leq p < \infty$ e com a norma do supremo essencial para $p = \infty$.

Consideremos agora o espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$. Dado um inteiro positivo $k$ podemos equipar $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a norma

$$\|\phi\|_{L_k^p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \phi\|_p. \tag{1.1}$$

É claro que esta norma determina uma topologia mais fina que aquela dada pela norma de $L^p$, já que a norma (1.1) domina a norma $L^p$. Assim, podemos identificar o completamento de $(C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \| \ \|_{L_k^p})$ com um subespaço do completamento de $(C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \| \ \|_{L^p})$. Por sua vez, este último pode identificar-se com o próprio $L^p$, se $p < \infty$, ou com o espaço das funções contínuas que tendem para zero no infinito, se $p = \infty$. Em todos os casos, podemos considerar o completamento de $(C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \| \ \|_{L_k^p})$ com um subespaço de $L^p$. Denotaremos este completamento com $L_k^p$, $k = 1, 2, \ldots$. Para $p$ fixo, a norma $\| \ \|_{L_k^p}$ é uma função crescente de $k$, o que permite identificar $L_{k+1}^p$ com um subespaço de $L_k^p$, i.e.,

$$L_{k+1}^p \subset L_k^p.$$

A definição dos espaços $L_k^p$ por meio da noção de completamento — que é um procedimento um tanto abstrato — pode parecer pouco satisfatória. Outra forma equivalente de definir os mesmos espaços é a seguinte: define-se $L_k^p$ como o espaço dos elementos de $L^p$ cujas derivadas no sentido das distribuições de ordem menor ou igual a $k$ pertencem a $L^p$. O leitor familiarizado com a noção de distribuições percebe que os completamentos antes mencionados se identificam imediatamente com os espaços definidos desta segunda maneira (*cf.* [Hou1]).

Lembramos que a transformada de Fourier de uma função integrável em $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx,$$

e é uma função contínua que tende para zero no infinito (em particular é limitada). Se $\hat{f}$ for também integrável, podemos inverter a transformada de Fourier

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Assim, as fórmulas da transformada de Fourier e sua inversa são essencialmente iguais e gozam das mesmas propriedades.

A transformada de Fourier de uma função não identicamente nula de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não pertence a este mesmo espaço, pois embora seja infinitamente diferenciável, nunca terá suporte compacto já que é analítica. Entretanto, pertence ao espaço de Schwartz $\mathcal{S}$ das funções de decrescimento rápido, isto é, das funções $f$ infinitamente deriváveis tais que, para todo $N = 1, 2, \ldots$, e todo multi-índice $\alpha$,

$$|x|^N |D^\alpha f(x)| \longrightarrow 0, \quad x \to \infty.$$

O espaço de Schwartz $\mathcal{S}$ é invariante pela transformada de Fourier. Grande parte da utilidade da transformada de Fourier vem das fórmulas

$$(D^\alpha f)\hat{}(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \qquad (x^\alpha f(x))\hat{}(\xi) = (-D)^\alpha \hat{f}(\xi), \tag{1.2}$$

que mostram que a derivação se transforma em multiplicação por monômios e vice-versa.

Consideramos agora a escala de espaços de Banach $\mathcal{H}^k = L_k^p$, $k \geq 1$, $H^0 = L^p$.

**Proposição 1.1.** *A escala* $\{\mathcal{H}^k = L^p_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$ , *é mansa se* $1 \leq p < \infty$, *i.e. satisfaz as condições (I.2.3), (I.2.4), (I.2.5) da Definição I.2.2 do Capítulo I. Em particular, esta escala tem a propriedade de convexidade. Mais precisamente, existe uma família monoparamétrica de operadores regularizantes*

$$T_\theta : \mathcal{H}^0 \longrightarrow \mathcal{H}^\infty, \qquad \theta \geq 1,$$

*dependendo diferenciavelmente de* $\theta$, *que satisfazem as estimativas seguintes*

$$\|T_\theta u\|_{\mathcal{H}^k} \leq C_k \theta^{k-j} \|u\|_{\mathcal{H}^j}, \quad u \in \mathcal{H}^j, \quad j \leq k, \tag{1.3}$$

$$\|u - T_\theta u\|_{\mathcal{H}^k} \leq C_j \theta^{k-j} \|u\|_j, \quad u \in \mathcal{H}^j, \quad j \geq k, \tag{1.4}$$

$$\lim_{\theta \to \infty} \|u - T_\theta u\|_{\mathcal{H}^k} = 0, \quad u \in \mathcal{H}^k, \tag{1.5}$$

$$\|\frac{d}{d\theta} T_\theta u\|_{\mathcal{H}^k} \leq C_{jk} \theta^{k-j-1} \|u\|_{\mathcal{H}^j} \quad u \in \mathcal{H}^j. \tag{1.6}$$

**Demonstração:** Seja $\phi \geq 0$ uma função de $\mathcal{S}$ cuja transformada de Fourier $\hat{\phi}(\xi)$ é igual a 1 em uma vizinhança da origem. Usando a segunda fórmula de (1.2) (para $\xi = 0$) e a fórmula integral da transfomada de Fourier, segue que

$$\int \phi(x)\, dx = 1, \qquad \int x^\alpha \phi(x)\, dx = 0, \quad \alpha \neq 0.$$

Escrevemos $\phi_\theta(x) = \theta^n \phi(\theta x)$, $\theta \geq 1$, e definimos $T_\theta u = \phi_\theta * u$, i.e.,

$$T_\theta u(x) = \int \phi_\theta(y) u(x-y)\, dy = \int \phi_\theta(x-y) u(y)\, dy. \tag{1.7}$$

Já que $T_\theta$ se exprime em termos de uma convolução será útil lembrar o seguinte caso particular das desigualdades de Young:

**Desigualdade de Young.** *Sejam* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$\|f * u\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|u\|_{L^p}.$$

A mundança de variável $y = \theta x$ mostra que $\|\phi_\theta\|_{L^1} = \|\phi\|_{L^1} = 1$, de maneira que temos $\|T_\theta u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}$. Para provar (1.4), consideremos dois inteiros não negativos $j < k$ e tomemos primeiro uma função $u \in \mathcal{S}$. Sabemos que a norma em $\mathcal{H}^j = L^p_j$ é

$$\sum_{\|\alpha\| \leq j} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Seja $v = D^\alpha u$ para $|\alpha| \le j$ e escrevamos, de acordo com (1.7),

$$T_\theta v(x) = \int v(x - y/\theta)\phi(y)\,dy.$$

Expandindo $v$ em série de Taylor até ordem $k-j$ no ponto $x$ obtemos

$$\begin{aligned} T_\theta v(x) = &\sum_{|\beta|<k-j} \frac{\partial^\beta v}{\partial x^\beta}(x)\frac{(-\theta)^{-|\beta|}}{\beta!}\int y^\beta \phi(y)\,dy \\ &+ \frac{(-\theta)^{-(k-j)}}{(k-j-1)!}\sum_{|\beta|=k-j}\int_0^1 \int (1-s)^{k-j} y^\beta \phi(y) \frac{\partial^\beta v}{\partial x}(x - sy/\theta)\,dyds. \end{aligned}$$

A primeira soma se reduz a $v(x)$ de maneira que podemos estimar $|D^\alpha(T_\theta u(x) - u(x))|$ pela expressão

$$C\theta^{j-k}\sum_{|\beta|=k-j}\int_0^1 \int (1-s)^{k-j}|y^\beta\phi(y)D^\beta v(x-sy/\theta)|\,dyds.$$

Ora, exceto pela presença do fator $s$, $0 < s < 1$, no argumento da função $D^\beta v$, a integral em $y$ representa a convolução de $\psi_\beta(y) = |y^\beta \phi(y)|$ com $|D^\beta v|$. Isto sugere utilizar uma variação da desigualdade de Young. Com efeito, repetindo a demonstração para esta situação percebe-se que a presença do fator $s$ não interfere na obtenção da estimativa análoga. Obtemos então, depois de integrar em $s$ entre 0 e 1,

$$\|D^\alpha(T_\theta u - u)\|_{L^p} \le C\theta^{j-k}\sum_{\|\beta\|=k-j}\|\psi_\beta\|_{L^1}\|D^\beta v\|_{L^p} \le C\theta^{j-k}\|u\|_{\mathcal{H}^k}. \tag{1.8}$$

Somando as estimativas (1.8) para todos os $|\alpha| \le j$ obtemos

$$\|T_\theta u - u\|_{\mathcal{H}^j} \le C\theta^{j-k}\|u\|_{\mathcal{H}^k}$$

como desejado. Como $p < \infty$, $\mathcal{S}$ é denso em $\mathcal{H}^k$ para qualquer $k$, de maneira que mostramos a validade de (1.4) num conjunto denso de $\mathcal{H}^j$, o que implica sua validade em $\mathcal{H}^j$.

A demonstração de (1.3) é similar e mais simples: quando diferenciamos $u * \phi_\theta$ basta deixar atuar apenas $k-j$ derivadas no fator $\phi_\theta$ e $j$ derivadas em $u$. Para provar (1.5), será suficiente checar que $T_\theta u \to u$ em $\mathcal{H}^k$ quando $u \in \mathcal{S}$ e depois se utilizar da densidade de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{H}^k$. De fato, se $u \in \mathcal{S}$ é simples verificar que $T_\theta u$ converge para $u$ na topologia de $\mathcal{S}$, em particular, também em $L^p_k$. Finalmente, para provar (1.6) observemos que

$$\frac{\partial\phi_\theta(x)}{\partial\theta} = n\theta^{n-1}\phi(\theta x) + \theta^n x\cdot\nabla\phi(\theta x) = \theta^{-1}(n\phi_\theta(x) + \psi_\theta(x)) = \theta^{-1}\gamma_\theta(x),$$

onde escrevemos $\psi(x) = x \cdot \nabla\phi(x) \in \mathcal{S}$, $\gamma = n\phi + \psi$, $\psi_\theta(x) = \theta^n\psi(\theta x)$, $\gamma_\theta(x) = \theta^n\gamma(\theta x)$ . Segue que

$$\left\|\frac{\partial\phi_\theta(x)}{\partial\theta}\right\|_{L^1} = \frac{1}{\theta}\|\gamma\|_{L^1} = \frac{C}{\theta}.$$

Vemos que $\partial_\theta T_\theta$ é um operador inteiramente análogo a $T_\theta$, obtido por convolução com $\partial_\theta\phi_\theta$, o que equivale a convolucionar com $\gamma_\theta$ e multiplicar o resultado por $\theta^{-1}$. Então, repetindo com $\partial_\theta T_\theta$ o argumento que permite provar as estimativas (1.3) válidas para $T_\theta$, obtemos (1.6) para $j \leq k$. Para provar (1.6) com $j > k$, começamos derivando a identidade $\hat{\phi}_\theta(\xi) = \hat{\phi}(\xi/\theta)$ com respeito de $\theta$ para obter $(\partial_\theta\phi_\theta)\hat{}(\xi) = -\theta^{-2}\xi \cdot \nabla\hat{\phi}(\xi)$. Isto mostra que a transformada de Fourier de $\partial_\theta\phi_\theta$ se anula em uma vizinhança da origem para todo $\theta$. Para $\theta = 1$, temos que $\gamma(x) = n\phi(x) + \psi(x)$ verifica para todo $\alpha$

$$\int x^\alpha\,\gamma(x)\,dx = 0.$$

Seja $v = D^\alpha u$ para $|\alpha| \leq j$ e escrevamos

$$\partial_\theta T_\theta v(x) = \theta^{-1}\int v(x - y/\theta)\gamma(y)\,dy.$$

Expandindo $v$ em série de Taylor até ordem $k - j$ no ponto $x$ obtemos

$$\theta\partial_\theta T_\theta v(x) = \frac{(-\theta)^{-(k-j)}}{(k-j-1)!}\sum_{|\beta|=k-j}\int_0^1\int(1-s)^{k-j}y^\beta\gamma(y)\frac{\partial^\beta v}{\partial x}(x - sy/\theta)\,dyds,$$

pois, com exceção da parcela correspondente ao resto, as integrais dos outros termos se anulam, já que contem fatores da forma $\int y^\beta\gamma(y)\,dy = 0$. Usando uma variação da desigualdade de Young, como fizemos anteriormente, e procedendo em forma análoga à demonstração de (1.4), podemos obter (1.6) para $j > k$. A demonstração da Proposição 1.1 está completa.

A propriedade (1.6) é irrelevante para a convergência do esquema de Moser discutido no capítulo anterior. Entretanto, é essencial no esquema de Nash que discutiremos mais adiante no capítulo IV, e não é difícil provar que (1.6) implica (1.3) e (1.4) para $j \neq k$ por integração em $\theta$. Devemos considerar então que (1.6) é, essencialmente, uma forma forte de (1.3) e (1.4).

Embora a escala $\{L_k^\infty\}$ não seja mansa, devido à impossibilidade de aproximar funções arbitrárias de $L^\infty$ por funções contínuas na norma do supremo, ela ainda tem a propriedade de convexidade.

**Proposição 1.2.** *A escala* $\{L^\infty_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$ *tem a propriedade de convexidade.*

**Demonstração:** Comecemos por observar que se soubermos que a desigualdade (I.2.11) é válida toda vez que os inteiros $j < k < l$ são contíguos, ou seja, quando $l = k + 1 = j + 2$, iterando este resultado, obteremos a desigualdade no caso geral. Além disso, se tivermos provado a desigualdade para os inteiros contíguos $j, j+1, j+2$ e aplicarmos este resultado a uma função $u$ e às suas derivadas de primeira ordem $D_1 u, \ldots, D_n u$, obteremos a desigualdade de convexidade para os inteiros $j+1, j+2, j+3$. Concluimos que é suficiente mostrar a desigualdade no caso $j = 0$, $k = 1$, $l = 2$. Neste caso $t = 1 - t = 1/2$ e devemos provar que

$$\|u\|_{L^\infty_1} \leq C\|u\|^{1/2}_{L^\infty}\|u\|^{1/2}_{L^\infty_2}, \quad u \in L^\infty_2.$$

Tomando a expansão de Taylor até ordem 2 da função $u$ na variável $x_j$, $1 \leq j \leq n$, enquanto mantemos fixas as outras variáveis, temos

$$u(y) = u(x) + \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)(y_j - x_j) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x + \theta(y-x))(y_j - x_j)^2,$$

onde $0 < \theta < 1$. Isto implica

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right| \leq 2\|u\|_{L^\infty}|x_j - y_j|^{-1} + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x + \theta(y-x))\right||y_j - x_j|. \tag{1.9}$$

Dado $x$, podemos escolher $y$ tal que

$$\begin{aligned} x_k &= y_k, \qquad k \neq j, \\ x_j &= y_j + 2\|u\|^{1/2}_{L^\infty}\|u\|^{-1/2}_{L^\infty_2}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Substituindo agora os valores escolhidos em (1.10) na desigualdade (1.9) obtemos

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right| \leq 2\|u\|^{1/2}_{L^\infty}\|u\|^{1/2}_{L^\infty_2}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Como $|u(x)| \leq \|u\|^{1/2}_{L^\infty}\|u\|^{1/2}_{L^\infty_2}$ trivialmente, tomando supremo em $x$ e somando esta estimativa com as obtidas para o supremo das derivadas de $u$, chegamos à desigualdade procurada.

As escalas $\{L^p_k\}$ podem ser usadas para medir a regularidade de uma função $f$: quanto maior o inteiro $k$ tal que $f \in L^p_k$, mais regular será $f$. Esta regularidade pode ser comparada com a regularidade usual, que se interessa com a continuidade das derivadas até uma certa ordem, por meio do Lema de Sobolev.

**Lema de Sobolev 1.3.** *Seja $k$ um inteiro positivo, $p \geq 1$, e $1/q = 1/p - k/n$.*

*i) Se $p < n/k$, então*

$$L_k^p(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$$

*e a inclusão é contínua.*

*ii) Se $p > n/k$, então toda $u$ de $L_k^p$ pode ser modificada em um conjunto de medida nula de maneira a torná-la contínua, i.e.,*

$$L_k^p(\mathbb{R}^n) \subset C^0(\mathbb{R}^n),$$

*e a inclusão é contínua.*

*iii) Se $j$ é um inteiro positivo, $1/q = 1/p - (k-j)/n$ e $p > n/(k-j)$, então toda $u$ de $L_k^p$ pode ser modificada em um conjunto de medida nula de maneira a torná-la contínua, com derivadas contínuas até ordem $j$, ou seja que*

$$L_k^p(\mathbb{R}^n) \subset C^j(\mathbb{R}^n),$$

*e a inclusão é contínua.*

A demonstração dos itens i) e ii) pode ser consultada, por exemplo, em ou [Au] ou [St,p.124] . Por outro lado, iii) segue facilmente de ii) quando aplicado às derivadas até ordem $j$ de uma função de $L_k^p$. A continuidade das inclusões acima se exprime naturalmente por desigualdades entre as normas dos espaços correspondentes. Por exemplo, a última inclusão é equivalente à estimativa

$$\sum_{|\alpha| \leq j} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L_k^p}, \quad u \in L_k^p. \tag{1.11}$$

## 2. Operações mansas em espaços de Sobolev

Para aliviar a notação é conveniente denotar com $\| \quad \|_{p,k}$ a norma em $L^p_k$, coisa que faremos. Quando $k = 0$ escrevemos simplesmente $\| \quad \|_p$ em lugar de $\| \quad \|_{p,0}$.

**Proposição 2.1.** *A aplicação*

$$\{L^p_k \times L^\infty_k\} \ni (u,v) \longrightarrow uv \in \{L^p_k\}$$

*é mansa. Mais precisamente, existem constantes $C_k = C_k(n,p)$ tais que*

$$\|uv\|_{p,k} \leq C_k(\|u\|_{p,k}\|v\|_\infty + \|u\|_p\|v\|_{\infty,k}) \qquad u \in L^p_k, \quad v \in L^\infty_k. \tag{2.1}$$

**Demonstração:** Foi demonstrado na seção anterior que as escalas $\{L^p_k\}$ verificam a PC para $1 \leq p \leq \infty$. Então, usando a regra de Leibniz para derivar o produto, a desigualdade de Hölder, e o Lemma I.2.6, tem-se

$$\|uv\|_{p,k} \leq C_k \sum_{j=0}^{k} \|u\|_{p,k-j}\|v\|_{\infty,j} \leq C_k(\|u\|_{p,k}\|v\|_\infty + \|u\|_p\|v\|_{\infty,k}).$$

Segue da desigualdade (1.11) que $\|v\|_\infty \leq C\|v\|_{p,\tau}$ se $\tau > n/p$ e $\|v\|_{\infty,k} \leq C\|v\|_{p,k+\tau}$ se $\tau > n/p$ e $v \in L^p_{k+\tau}$. Aplicando esta observação às estimativas (2.1) obtem-se

**Corolário 2.2.** *A aplicação*

$$\{L^p_k \times L^\infty_k\} \ni (u,v) \longrightarrow uv \in \{L^p_k\}$$

*é mansa e existem estimativas*

$$\|uv\|_{p,k} \leq C_k(\|u\|_{p,k+\tau}\|v\|_{p,\tau} + \|u\|_{p,\tau}\|v\|_{p,k+\tau}), \qquad u,v \in L^p_{k+\tau}, \tag{2.2}$$

*com $\tau = [n/p] + 1$.*

**Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg.** *Sejam $1 \leq q, r \leq \infty$ números reais, $l \leq j \leq k$ inteiros não negativos e escrevamos*

$$j = al + (1-a)k,$$
$$\frac{1}{p} = a\frac{1}{q} + (1-a)\frac{1}{r}.$$

*Existe uma constante positiva $C = C(q,r,k,t)$ tal que*

$$\|f\|_{p,j} \leq C\|f\|_{q,l}^{a}\|f\|_{r,k}^{(1-a)}, \quad f \in \mathcal{S}. \tag{2.3}$$

**Demonstração:** O resultado segue por indução em $k$ uma vez provado para $k = 2$. Quando $k = 2$ apenas o caso $l = 0$, $j = 1$, $k = 2$ não é trivial. Neste caso temos que $a = 1/2$ e $1/p = 1/2q + 1/2r$. Devemos provar que

$$\|f\|_{L_1^p} \leq C\|f\|_{L^q}^{1/2}\|f\|_{L_2^r}^{1/2}.$$

Comecemos observando que se $p = \infty$, necessariamente também tem-se $q = r = \infty$. Neste caso, a desigualdade procurada segue da PC para a escala $\{L_k^\infty\}$, que já vimos. Faremos a demostração apenas no caso $2 \leq p < \infty$ quando é uma aplicação direta da desigualdade de Hölder; o leitor interessado pode consultar as demonstrações originais ([G], [Ni1]), válidas para qualquer valor de $p$, $1 \leq p \leq \infty$. Como o argumento é essencialmente unidimensional suporemos que $n = 1$ o que simplifica a notação. Tomemos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ analítica real, em particular, os zeros de $f'$ são isolados, constituindo um conjunto discreto de $\mathbb{R}$. Nos pontos onde $f'$ não se anula vale

$$\frac{d}{dx}(f|f'|^{p-2}\overline{f'}) = |f'|^p + (p-2)f|f'|^{p-4}\text{Re }(f'\overline{f''})\overline{f'} + f|f'|^{p-2}\overline{f''}.$$

Integramos agora esta identidade na reta. Usando o teorema fundamental do cálculo entre zeros consecutivos de $f'$ e observando que $f$ decresce rapidamente no infinito, vemos que a integral do membro direito é zero e obtemos a estimativa

$$I = \int |f'|^p\,dx \leq (p-1)\int |f||f'|^{p-2}|f''|\,dx.$$

Como $1/q+1/r+(p-2)/p = 1$, podemos aplicar a desigualdade de Hölder iterada para obter

$$I \leq (p-1)\|f\|_q\|f'\|_p^{p-2}\|f''\|_r$$

que mostrã que

$$\|f'\|_p^2 \leq (p-1)\|f\|_q\|f\|_{r,2}. \tag{2.4}$$

Por outro lado $1/p = 1/2q + 1/2r$ e aplicando novamente a desigualdade de Hölder temos

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q^{1/2}\|f\|_r^{1/2} \leq \|f\|_q^{1/2}\|f\|_{r,2}^{1/2}. \tag{2.5}$$

Somando a raiz quadrada de (2.4) com (2.5) tem-se

$$\|f\|_{p,1} \leq C\|f\|_q^{1/2}\|f\|_{r,2}^{1/2}. \tag{2.6}$$

A estimativa (2.6) pode ser estendida por densidade para qualquer $f \in S$ e isto termina a demonstração.

Destacamos agora um caso particular da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg que será usada mais adiante. Se escolhermos $q = \infty$ and $l = 0$ in (2.3) tem-se

$$\|f\|_j^p \leq C\|f\|_\infty^{1-b}\|f\|_{r,k}^b, \qquad b = \frac{j}{k} = \frac{r}{p}, \qquad f \in S. \tag{2.7}$$

A seguir, consideraremos a composição $\phi \circ u$ quando $\phi \in L_k^\infty$ e $u \in L_k^p$, e mostraremos que se trata de uma operação mansa. Para incluir o caso em que que $\phi$ depende de várias variáveis será conveniente considerar espaços de Sobolev com valores vetoriais que serão denotados $L_k^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Seja $\Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^m$ contendo a origem. Suponhamos que $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ tem derivadas limitadas de todas as ordens, $\phi(0) = 0$, e que $u \in L_k^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ satisfaz $u(\mathbb{R}^n) \subset \Omega$. Sob estas hipóteses a aplicação $u \mapsto \phi \circ u$ aplica $L_k^p$ em $L_k^p$ e a composição resulta uma aplicação mansa. De fato,

**Proposição 2.3.** *Sob as hipóteses enunciadas acima vale a estimativa*

$$\|\phi \circ u\|_{p,k} \leq C_k(1 + \|\nabla u\|_\infty)^{k-1}(\|\phi\|_{\infty,1}\|u\|_{p,k} + \|\phi\|_{\infty,k}\|u\|_{p,1}) \tag{2.8}$$

**Demonstração:** Consideremos uma bola $B$ de raio $r$ centrada na origem e contida em $\Omega$. Usando a fórmula de Taylor de primeira ordem (a possibilidade de assim representar uma função é conhecida às vezes como Lema de Hadamard)

$$\phi(u) = \sum_{j=1}^{m} u_j\psi_j(u), \qquad u \in B, \qquad \|\psi_j\|_\infty \leq \|\nabla\phi\|_\infty.$$

Usando uma função de corte suportada em $B$ podemos escrever $\phi = \phi_1 + \phi_2$ com $|\phi_1(u)| \leq C\|\nabla\phi\|_\infty|u|$, $\|\phi_2\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty$ e $\phi_2$ suportada em $B$. Se $u \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a medida de $\{|u| < r\}$ está limitada por $r^{-p}\|u\|_p^p$. Podemos assim concluir que

$$\|\phi \circ u\|_p \leq C\|\phi\|_{\infty,1}\|u\|_p. \tag{2.9}$$

Seja $\alpha$ um multi-índice de comprimento $k > 0$. Então $D_x^\alpha(\phi \circ u) = \sum_{j=1}^k F_j$ onde $F_j$ é uma soma de termos da forma

$$\sum_{\substack{|\beta_1|+\cdots+|\beta_j|=k \\ |\gamma|=j,\ |\beta_l|>0}} C_{\beta,\gamma,j}\ \left((D^\gamma\phi)\circ u\right)\ D^{\beta_1}u_{i_1}\cdots D^{\beta_j}u_{i_j},$$

onde $i_l \in \{1,\ldots,m\}$. Aplicando a desigualdade de Hölder iterada a cada termo da soma obtemos

$$\|D_x^\alpha(\phi\circ u)\|_p \le C\sum_{j,\delta}\|\phi\|_{\infty,j}\ \|D^{\delta_1}\nabla u\|_{q_1}\cdots\|D^{\delta_j}\nabla u\|_{q_j},$$

onde $|\delta_l| = |\beta_l|-1$ e $q_l = p(k-j)/|\delta_l|$. A desigualdade vale devido a que $1/q_1+\cdots+1/q_j = 1/p$. Aplicando a desigualdade (2.7) temos

$$\|D^{\delta_l}\nabla u\|_{q_l} \le \|\nabla u\|_{q_l,|\delta_l|} \le C\|\nabla u\|_\infty^{1-b_l}\|\nabla u\|_{p,k-j}^{b_l}\ ,$$

onde $b_l = |\delta_l|/(k-j) = p/q_l$. Note que se verifica: $\sum_{l=1}^j|\delta_l| = \sum_{l=1}^j(|\beta_l|-1) = k-j$ de maneira que vale $b_1+\cdots+b_j = 1$. Isto implica que

$$\begin{aligned}\|D^\alpha(\phi\circ u)\|_p &\le C\sum_{j=1}^{|\alpha|}\|\phi\|_{\infty,j}\|\nabla u\|^{j-1}\|\nabla u\|_{p,k-j}\\ &\le C(1+\|\nabla u\|_\infty)^{|\alpha|-1}(\|\phi\|_{\infty,1}\|u\|_{p,k}+\|\phi\|_{\infty,k}\|u\|_{p,1}),\end{aligned} \tag{2.10}$$

onde usamos o Lema I.2.6 para obter a segunda desigualdade. Somando as desigualdades (2.10) para $0 < |\alpha| \le k$ e levando em conta (2.9) obtemos ( 2.8).

Estudemos agora o comportamento sob mudanças de coordenadas. Seja $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo com inversa $\Psi$ e suponhamos que $\det\Psi' \ge c > 0$. Se $\Phi$ tem derivadas limitadas de todas as ordens o mesmo acontecerá com $\Psi$. A mudança de variáveis $f \to f\circ\Phi$ aplica $L_k^p$ em $L_k^p$ e é mansa. Temos

**Proposição 2.4.** *Se $\Phi$ for como acima e $f \in L_k^p$, valem as estimativas*

$$\|f\circ\Phi\|_{p,k} \le C_k(1+\|\nabla\Phi\|_\infty)^{k-1}(\|f\|_p\|\nabla\Phi\|_{\infty,k}+\|f\|_{p,k}\|\nabla\Phi\|_\infty) \tag{2.11}$$

**Demonstração:** Se $|\alpha| = k > 0$ sabemos que $D^\alpha(f\circ\Phi)$ é uma soma de termos da forma

$$\sum_{\substack{|\beta_1|+\cdots+|\beta_j|=k \\ |\gamma|=j,\ |\beta_l|>0}} C_{\beta,\gamma,j}\ \left((D^\gamma f)\circ\Phi\right)\ D^{\beta_1}\Phi i_1\cdots D^{\beta_j}\Phi_{i_j},$$

onde $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ são as componentes de $\Phi$ e $1 \leq j \leq k$. Então,

$$|D^\alpha (f \circ \Phi)(x)| \leq C \sum_{j,\gamma,\beta} \|\nabla \Phi\|_{\infty, |\beta_1|-1} \cdots \|\nabla \Phi\|_{\infty, |\beta_j|-1} \; |(D^\gamma f) \circ \Phi(x)|.$$

Seja $\delta_l = |\beta_l| - 1$ de maneira que $\delta_1 + \cdots + \delta_j = k - j$. Usando a propriedade de convexidade das normas em escalas de Sobolev temos

$$\|\nabla \Phi\|_{\infty, \delta_l} \leq C \|\nabla \Phi\|_{\infty}^{1-\delta_l/(k-j)} \|\nabla \Phi\|_{\infty, k-j}^{\delta_l/(k-j)}$$

donde

$$\begin{aligned} |D^\alpha (f \circ \Phi)(x)| &\leq C \sum_{j=1}^{k} \sum_{|\gamma|=j} \|\nabla \Phi\|_{\infty}^{j-1} \|\nabla \Phi\|_{\infty, k-j} \; |(D^\gamma f) \circ \Phi(x)| \\ &\leq C (1 + \|\nabla \Phi\|_{\infty})^{k-1} \sum_{j=1}^{k} \sum_{|\gamma|=j} \|\nabla \Phi\|_{\infty, k-j} \; |(D^\gamma f) \circ \Phi(x)|. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Escrevamos $g = f \circ \Phi$. Vem

$$\|g\|_{p,k}^p \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha g(y)|^p \, dy.$$

Estimando o integrando com (2.12) e introduzindo a mudança de variáveis $y = \Phi(x)$ obtemos imediatamente

$$\|g\|_{p,k}^p \leq C (1 + \|\nabla \Phi\|_{\infty})^{p(k-1)} \sum_{j=0}^{k} \|f\|_{p,j}^p \|\nabla \Phi\|_{\infty, j}^p$$

o que, depois de usar, como sempre nestes casos, o Lema 2.6 do Capítulo I, permite provar (2.11).

As Proposições 2.1 e 2.4 permitem definir os espaços $L_k^p(M)$ para uma variedade compacta $M$ de classe $C^\infty$ e dimensão $n$. Para isto será suficiente considerar uma cobertura finita de $M$ por vizinhanças coordenadas $(U_j, x_j)$, $j = 1, \ldots, N$, e uma partição da unidade $\psi_j$ subordinada a esta cobertura. Uma função $u$ definida em $M$ estará, por definição, em $L_k^p(M)$ se $(\psi_j u) \circ x_j^{-1} \in L_k^p(\mathbb{R}^n)$ para cada $j = 1, \ldots, N$. A norma de $u$ será

$$\|u\|_{p,k} = \sum_{j=1}^{N} \|(\psi_j u) \circ x_j^{-1}\|_{L_k^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Esta definição de $L^p_k$ não depende da cobertura escolhida nem da partição da unidade. Qualquer mudança nesta escolha apenas fornece uma norma diferente mas equivalente em $L^p_k(M)$. Podemos supor então que uma cobertura e uma partição da unidade foram fixadas de uma vez por todas, o que fixa a escolha da norma. Se agora fixamos $p < \infty$ e deixamos variar $k = 0, 1, \ldots$ obteremos uma escala de espaços de Banach. Para ver que se trata, como no caso de $\mathbb{R}^n$, de uma escala mansa, será preciso definir operadores regularizantes. Seja $u \in L^p_k(M)$, $u_j = \psi_j u$, $v = u_j \circ x_j^{-1}$. Então, $v \in L^p_k(\mathbb{R}^n)$ e está suportada em um compacto fixo $K$. Consideremos uma função $\chi \in C_c^\infty(x_j(U_j))$, $\chi = 1$ numa vizinhança de $K$. Se $T_\theta$ denota os operadores regularizantes da Proposição 2.1, vemos que o produto $\chi T_\theta v$ converge em $L^p_k(\mathbb{R}^n)$ para $\chi v = v$. Das estimativas que $T_\theta$ verifica, e do fato do produto ser uma operação mansa, segue facilmente que $\chi T_\theta$ verifica as desigualdades análogas a (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) quando atua em funções suportadas em $K$. Podemos transferir este operador às funções suportadas em $U_j$ por composição com $x_j$ e denotar este operador com $T_{\theta,j}$. Verifica-se facilmente que

$$T_\theta u = \sum_{j=1}^{N} T_{\theta,j}(\psi_j u)$$

é uma família monoparamétrica de operadores com as propriedades requeridas para que $L^p_k(M)$ seja uma escala mansa. Temos

**Proposição 2.5.** *Seja $M$ uma variedade compacta. A escala $\{\mathcal{H}^k = L^p_k(M)\}$, $k = 0, 1, \ldots$, é mansa se $1 \le p < \infty$, em particular, tem a propriedade de convexidade. Existe uma família monoparamétrica de operadores regularizantes*

$$T_\theta : \mathcal{H}^0 \longrightarrow \mathcal{H}^\infty, \qquad \theta \ge 1,$$

*dependendo diferenciavelmente de $\theta$, que satisfaz as estimativas*

$$\|T_\theta u\|_{\mathcal{H}^k} \le C_k \theta^{k-j} \|u\|_{\mathcal{H}^j}, \quad u \in \mathcal{H}^j, \quad j \le k, \tag{2.13}$$

$$\|u - T_\theta u\|_{\mathcal{H}^k} \le C_k \theta^{k-j} \|u\|_j, \quad u \in \mathcal{H}^j, \quad j \ge k, \tag{2.14}$$

$$\lim_{\theta \to \infty} \|u - T_\theta u\|_{\mathcal{H}^k} = 0, \quad u \in \mathcal{H}^k, \tag{2.15}$$

$$\|\frac{d}{d\theta} T_\theta u\|_{\mathcal{H}^k} \le C_{jk} \theta^{k-j-1} \|u\|_{\mathcal{H}^j}, \quad u \in \mathcal{H}^j. \tag{2.16}$$

No estudo da regularidade de soluções de equações diferenciais parciais, a mudança de regularidade representada pela passagem de um espaço de Sobolev $H^k$ para o seguinte $H^{k+1}$

pode ser muito grande para determinados problemas, onde é necessŕio considerar mudanças fraccionárias de regularidade. Por exemplo, nos espaços de Sobolev discretos, a inversa de um operador diferencial de ordem um apenas tem como escolhas possíveis recuperar 1 derivada (o que implica que o operador diferencial é elíptico) ou não recuperar nenhuma derivada. Entretanto, há exemplos intereressantes onde se recupera 1/2 derivada (implicando na hipoelipticidade do operador). Isto motiva a definição dos espacos de Sobolev $L^p_s(M)$, $0 \leq s < \infty$. Isto pode ser feito de diversas formas. Uma possibilidade é definir $L^p_s(M) = L^p_k(M)$ para valores inteiros $s = k = 0, 1, \ldots$, enquanto para valores intermediários $k < s < k+1$, $L^p_s(M)$ se define como o espaço de interpolação (digamos complexa) entre $L^p_k(M)$ e $L^p_{k+1}(M)$. A propriedade de interpolação permite definir as aproximações da identidade $T_\theta$ nos espaços $L^p_s(M)$ as quais verificarão as propriedades (2.13), ... , (2.16) para todo $j$ e $k$ reais, com as constantes $C_k$, $C_{jk}$ limitadas, toda vez que $j$ e $k$ pertencem a um intervalo limitado da reta. Uma segunda possibilidade é definir primeiro os operadores $L^p_s(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} J^s(L^p(\mathbb{R}^n))$, onde $J^s$ é o operador de Bessel dado por $(J^s f)\hat{}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi)$ (*cf.* [St]) e depois proceder por localização para transferir as normas a uma variedade compacta $M$. Finalmente, uma terceira possibilidade, utilizando o cálculo de operadores pseudo-diferenciais, é definir $L^p_s(M) = (1+\Delta)^{s/2}L^p(M)$ onde $L^p(M)$ se define relativamente a uma medida de classe $C^\infty$ $d\mu$ (isto significa que em cada carta $(x, U)$ é possível escrever $d\mu = \mu(x)dx$, onde $dx$ é a medida de Lebesgue e $\mu \in C^\infty(U)$), $\Delta = -d^*d$, com $d$ denotando a derivada exterior atuando em funções e $d^*$ o transposto de $d$ relativo à dualidade fornecida por $\langle f, g\rangle = \int fg\, d\mu$. O operador $(1+\Delta)^{s/2}$ pode ser substituído por qualquer operador pseudo-diferencial elíptico injetivo de ordem $s$ e tipo $(1,0)$. Quando a variedade é orientável e $d\mu$ é a forma de volume, $\Delta$ é o operador de Laplace-Beltrami atuando em funções. Todos estes métodos fornecem os mesmos espaços para $1 < p < \infty$. Temos

**Proposição 2.6.** *Seja $M$ uma variedade compacta. A escala $\{\mathcal{H}^s = L^p_s(M)\}$, $1 < p < \infty$, $0 \leq s < \infty$ , é mansa, em particular, tem a propriedade de convexidade. Existe uma família monoparamétrica de operadores regularizantes*

$$T_\theta : \mathcal{H}^0 \longrightarrow \mathcal{H}^\infty, \qquad \theta \geq 1,$$

*dependendo diferenciavelmente de $\theta$, que satisfaz as estimativas*

$$\|T_\theta u\|_{\mathcal{H}^s} \leq C_{st}\theta^{s-t}\|u\|_{\mathcal{H}^t}, \quad u \in \mathcal{H}^t, \quad t \leq s, \tag{2.17}$$

$$\|u - T_\theta u\|_{\mathcal{H}^s} \leq C_{st}\theta^{s-t}\|u\|_t, \quad u \in \mathcal{H}^t, \quad t \geq s, \tag{2.18}$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \|u - T_\theta u\|_{\mathcal{H}^s} = 0, \quad u \in \mathcal{H}^s, \tag{2.19}$$

$$\|\frac{d}{d\theta} T_\theta u\|_{\mathcal{H}^s} \le C_{ts}\theta^{s-t-1}\|u\|_{\mathcal{H}^t}, \quad u \in \mathcal{H}^t, \tag{2.20}$$

*onde as constantes $C_{st}$ são limitadas uniformemente quando $s$ e $t$ permanecem limitados.*

## 3. Os Espaços de Hölder

Vamos desenvolver nesta seção uma nova escala mansa de espaços de Banach, constituida pelos espaços de Hölder que nos permitirão dar sentido e medir a $\alpha$-ésima derivada de uma função mesmo quando $\alpha$ não é um inteiro.

Seja $A$ um subconjunto compacto, convexo e com interior não vazio de $\mathbb{R}^n$. Se $u : A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, definimos

$$|u|_0 = \sup_{x\in A} |u(x)|$$

$$|u|_\alpha = \sup_{x,y\in A} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}, \qquad 0 < \alpha \le 1 \tag{3.1}$$

Se $k < \alpha \le k+1$, $k \in \mathbf{Z}$ e $u \in C^k(A)$,

$$|u|_\alpha = \sum_{\sigma=k} |\partial^\sigma u|_{\alpha-k} \tag{3.2}$$

**Definição 3.1.** *Se $k < \alpha \le k+1$, $k$ inteiro positivo, então o espaço de Hölder $\Lambda^\alpha(A)$ é definido por*

$$\Lambda^\alpha(A) = \{u \in C^k(A) : |u|_\alpha < \infty\}$$

*$\Lambda^k(A)$ é um espaço vetorial normado por*

$$\|u\|_\alpha = |u|_\alpha + |u|_0 \tag{3.3}$$

*e $\Lambda^0(A)$ é simplesmente o espaço das funções contínuas munido da norma do sup.*

Como $\Lambda^0(A)$ é um espaço completo, segue facilmente que $\Lambda^\alpha$ são espaços de Banach $\forall \alpha > 0$. Além disso

$$C^\infty(A) = \bigcap_{\alpha \geq 0} \Lambda^\alpha$$

Para provar que os espaços de Hölder formam uma escala mansa, precisamos construir uma família de operadores regularizantes $T_\theta : \Lambda^0(A) \longrightarrow C^\infty(A)$ satisfazendo as estimativas (I.2.3), (I.2.4) e (I.2.5). Estas propriedades serão decorrentes da propriedade de convexidade das normas $\| \quad \|_\alpha$ enunciadas no Lema a seguir. Daqui para frente, a letra $C$ será usada para denotar várias constantes universais.

**Lema 3.2.** *Se* $0 \leq \alpha \leq \beta$ *e* $0 < t < 1$, *então*

a)

$$\|u\|_{t\alpha+(1-t)\beta} \leq C\|u\|_\alpha^t \|u\|_\beta^{1-t} \tag{3.4}$$

b)

$$\|u\|_\alpha \leq C\|u\|_\beta \tag{3.5}$$

**Demonstração:** Como $\|u\|_\alpha = \|u\|_0 + |u|_\alpha$, vamos provar primeiramente que

$$|u|_{t\alpha+(1-t)\beta} \leq C|u|_\alpha^t(|u|_\alpha + |u|_\beta)^{1-t} \tag{3.6}$$

Esta estimativa pode ser provada diretamente se não existir um inteiro entre $\alpha$ e $\beta$. Assim, é suficiente prová-la quando $t\alpha + (1-t)\beta$ é um inteiro. Com isto em mente, vamos provar inicialmente que

$$\text{Se } k \in \mathbf{Z},\ \alpha \leq k \leq \beta \text{ e } |u|_\alpha \leq 1,\ |u|_\beta \leq 1 \quad \text{então} \quad \sup|\partial^\sigma u| \leq C, \quad |\sigma| = k \tag{3.7}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade que $\alpha \leq 1$ (senão, se $k < \alpha \leq k+1$, trabalhamos com $\partial^\beta u$, $|\beta| = k$ no lugar de $u$ e a conclusão em (3.7) será a mesma).

Se $\alpha \leq 1$, existe $C > 0$ tal que $|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha$, $\forall x, y \in A$. Como $A$ é compacto, $|u(x) - u(y)|$ é limitado e portanto podemos supor que

$$\exists C_1 > 0 : |u|_0 \leq C_1$$

(se $\alpha \neq 0$ a adição de uma constante não altera o conteúdo de (3.7)).

Seja $P(y)$ o polinômio de Taylor de $u$ em torno de $x$ de ordem $m$ = maior inteiro menor que $\beta$. Então o resto da série de Taylor de $u$, $u(y) - P(y)$ é tem norma limitada por uma constante $C_2$ visto que ela pode ser estimada pelo supremo das $m-$ésimas derivadas de $u$ e, como por hipótese $|u|_\beta \leq 1$, então

$$\sup_{x,y\in B} \frac{|\partial^\sigma u(x) - \partial^\sigma u(y)|}{|x-y|^{\beta-m}} \leq 1,\ |\sigma| = m.$$

Logo $|P(y)| \leq |P(y) - u(y)| + |u(y)| \leq C_1 + C_2, \forall y \in A$. Desta desigualdade segue que todas as derivadas de ordem $\leq m$ de $u$ devem ser limitadas. Com efeito, se temos uma família de polinômios de grau limitado e, ainda, os polinômios da família são uniformemente limitados em um compacto de $A$ de $\mathbb{R}^n$, podemos encontrar uma constante fixa que limita todos os coeficientes dos polinômios da família. Para ver isto podemos raciocinar da forma seguinte: o espaço das restrições a $A$ dos polinômios de grau menor ou igual a $m$ constitui um subespaço normado de dimensão finita com a norma do supremo (é claro que a restrição é injetiva se $A$ tem interior não vazio). Por exemplo, uma base está constituída pelos monômios de grau menor ou igual a $m$.

A correspondência

$$P \longmapsto a_\alpha$$

que a cada polinômio faz corresponder seu $\alpha$-ésimo coeficiente é um funcional linear, e todo funcional linear em um espaço normado de dimensão finita é limitado. Isto prova nossa afirmação.

Retornemos agora à prova de (3.6). Basta prová-la quando $t\alpha + (1-t)\beta$ é um inteiro e $|u|_\alpha \neq 0$. Dividimos agora a prova em 2 casos:

i) $|u|_\beta \leq |u|_\alpha$. Neste caso tomamos $v = u/|u|_\alpha$ e usamos (3.7). Temos que $|\partial^\sigma v| \leq C$, $|\sigma| = t\alpha + (1-t)\beta$. O Teorema do Valor Médio fornece que $|v|_{t\alpha+(1-t)\beta}$ é limitado e portanto $|u|_{t\alpha+(1-t)\beta} \leq C|u|_\alpha$ de onde segue imediatamente (3.6).

ii)$|u|_\alpha < |u|_\beta$. Neste caso, para cada $x$ fixado em $A$, efetuamos a mudança de variáveis:

$$u_s(y) = u((1-s)x + sy), \quad y \in A, 0 < s < 1.$$

Isto nos conduz à: $|u_s(y)|_\sigma \leq s^\sigma |u|_\sigma, \forall \sigma \geq 0$. Escolhemos $s$ tal que

$$s^\beta |u|_\beta = s^\alpha |u|_\alpha. \tag{3.8}$$

Então

$$|u|_{t\alpha+(1-t)\beta} \leq \sum_{|\sigma|=t\alpha+(1-t)\beta} |\partial^\sigma u|_0 = \frac{1}{s^{t\alpha+(1-t)\beta}} \sum_{|\sigma|=t\alpha+(1-t)\beta} |\partial^\sigma u_s|_0$$

A escolha de s em (3.8) permite usar (3.7) com $v = u_s/s^\alpha|u|_\alpha$ e obter

$$\begin{aligned} |u|_{t\alpha+(1-t)\beta} &\leq \frac{C}{s^{t\alpha+(1-t)\beta}} s^\alpha |u|_\alpha \\ &= \frac{C}{s^{t\alpha+(1-t)\beta}} (s^\alpha|u|_\alpha)^t (s^\beta|u|_\beta)^{1-t} \\ &= C|u|_\alpha^t |u|_\beta^{1-t} \end{aligned}$$

Isto conclui a prova de (3.6).
Provemos a parte b) do Lema. Se $0 \leq \alpha \leq \beta$, usando (3.6),

$$\begin{aligned} \|u\|_\alpha &\leq |u|_\alpha + \|u\|_\beta \\ &\leq C|u|_0^t(|u|_0 + |u|_\beta)^{1-t} + \|u\|\beta \\ &\leq C\|u\|_\beta^t \|u\|_\beta^{1-t} + \|u\|_\beta \\ &\leq (C+1)\|u\|_\beta \end{aligned}$$

Provemos agora a parte a) do Lema. Se $0 \leq \alpha \leq \beta$ e $0 < t < 1$, usando novamente (3.6),

$$\|u\|_{t\alpha+(1-t)\beta} \leq C|u|_\alpha^t(|u|_\alpha + |u|_\beta)^{1-t} + |u|_0$$

Usando agora a parte b) já demonstrada,

$$\|u\|_{t\alpha+(1-t)\beta} \leq C\|u\|_\alpha^t \|u\|_\beta^{1-t}$$

**Corolário 3.3.** *Se* $\alpha = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2$ *e* $t\beta_1 + (1-t)\beta_2$, $0 < t < 1$, *então:*

$$\|u\|_\alpha \|u\|_\beta \leq C(\|u\|_{\alpha_1}\|v\|_{\beta_1} + \|u\|_{\alpha_2}\|v\|_{\beta_2}) \tag{3.9}$$

**Demonstração:** vide Lema I.2.6.

**Observação 3.4.** É claro que $C^1(A) \subset \Lambda^1(A)$ e $\|u\|_1 \leq \|u\|_{C^1(A)}$, pelo Teorema do Valor Médio. No entanto a inclusão contrária não é verdadeira, como mostra o exemplo $f(x) = |x|$. Além disso, se $u \in \Lambda^{k+\epsilon}(B)$ então

$$\|u\|_{C^k} \leq \|u\|_{k+\epsilon},\ \epsilon > 0,\ k \in \mathbf{Z}_+$$

devido à (3.7).

**Observação 3.5.** Se $\alpha < \beta$, a inclusão $\Lambda^\alpha(A) \to \Lambda^\beta(A)$ é compacta. De fato, seja $(u_j)$ uma seqüência de funções satisfazendo $\|u_j\|_\alpha \leq 1$. Então $u_j$ tem uma subseqüência uniformemente convergente para uma função contínua $u$, pelo Teorema de Arzela-Ascoli. Denotemos esta seqüência por $(u_{j_k})$. Como $u_j$ é limitada em $\Lambda^\alpha(A)$, segue que $u \in \Lambda^\alpha(A)$. Usando a propriedade de convexidade, obtemos

$$\|u_{j_k} - u_{j_l}\|_\beta \leq C\|u_{j_k} - u_{j_l}\|_0^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \|u_{j_k} - u_{j_l}\|_\alpha^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Logo $u_{j_k} \to u$ em $\Lambda^\beta$.

## Operações em espaços de Hölder

Estudaremos agora algumas operações em espaços de Hölder que nos permitirão provar que podemos formar escalas mansas de espaços de Hölder e que muitos dos operadores que usualmente aparecem nas aplicações são mansos nestas escalas. O próximo resultado diz que $\Lambda^\alpha(A)$ é um anel e que a operação produto resulta mansa.

**Proposição 3.5.** *Se $u, v \in \Lambda^\alpha(A)$, então*

$$\|uv\|_\alpha \leq C(\|u\|_\alpha \|v\|_0 + \|u\|_0 \|v\|_\alpha) \tag{3.9}$$

**Demonstração:** Primeiramente analisamos o caso $0 < \alpha \leq 1$. A desigualdade

$$\frac{|u(x)v(x) - u(y)v(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq |v(x)| \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} + |u(y)| \frac{v(x) - v(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

fornece imediatamente o resultado.

Agora, se $k < \alpha \leq k+1$, $0 < k \in \mathbb{Z}^+$, ao derivarmos o produto $uv$, obteremos uma soma de produtos do tipo $\partial^p u \partial^q v$ com $|p| + |q| = k$. O caso já demostrado permite estimar

$$|\partial^p u \partial^q v|_{\alpha-k} \leq \|\partial^p u\|_0 \|\partial^q v\|_{\alpha-k} + \|u\partial^q u\|_{\alpha-k} \|\partial^q v\|_0$$

Vamos estimar somente o primeiro termo do segundo membro pois o segundo termo tem estimativa análoga. Para isto basta usar o Corolário (3.3) com as substituições $(\alpha_1, \beta_1) = (a, 0)$ , $(\alpha_2, \beta_2) = (0, \alpha)$ e $t = |p|/\alpha$, que o resultado segue imediatamente.

Passaremos a estudar agora a operação de composição de funções entre espaços de Hölder a fim de definir os espaços de Hölder em variedades, o que é feito por localização e colagem. Com este intuito vamos definir a norma de Hölder para funções a valores em $\mathbb{R}^N$ e obter estimativas sobre a composta de funções em espaços de Hölder. Se $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$, definimos

$$\|u\|_\alpha = \sum_{j=1}^{N} \|u\|_\alpha.$$

**Proposição 3.6.**

*a) Se $\alpha, \beta \in (0, 1]$ então*

$$\|u \circ v\|_{\alpha\beta} \leq \|u\|_\alpha \|v\|_\beta^\alpha + \|u\|_0 \tag{3.10}$$

*b) Se $u, v \in \Lambda^\alpha$, $\alpha \geq 1$, então*

$$\|u \circ v\|_\alpha \leq C(\|u\|_\alpha \|v\|_1^\alpha + \|u\|_1 \|v\|_\alpha + \|u\|_0) \tag{3.11}$$

**Demonstração:**

a) segue imediatamente de

$$\frac{|u(v(x)) - u(v(y))|}{|x-y|^{\alpha\beta}} = \frac{|u(v(x)) - u(v(y))|}{|v(x) - v(y)|^\alpha} \frac{|v(x) - v(y)|^\alpha}{|x-y|^{\alpha\beta}}$$

b) Usando a Prop. (3.5),

$$\begin{aligned} |u \circ v|_\alpha &= |(u' \circ v)v'|_{\alpha-1} \\ &\leq C(\|u' \circ v\|_{\alpha-1} \|v'\|_0 + \|u' \circ v\|_0 \|v'\|_{\alpha-1} \\ &\leq (\|u' \circ v\|_{\alpha-1} \|v'\|_0 + \|u\|_1 \|v\|_\alpha) \end{aligned}$$

Se $\alpha \leq 2$, o resultado segue devido à seguinte estimativa:

$$\|u' \circ v\|_{\alpha-1}\|v'\|_0 \leq \|u\|_\alpha \|v\|_1^\alpha$$

pois $\alpha \geq 1$. Indutivamente, podemos assumir que o resultado está provado para $\alpha - 1$ no lugar de $\alpha$. Então

$$\begin{aligned}\|u' \circ v\|_{\alpha-1}\|v'\|_0 &\leq C[\|u'\|_{\alpha-1}\|v\|_1^{\alpha-1} + \|u\|_1\|v\|_{\alpha-1} + \|u'\|_0]\|v'\|_0 \\ &\leq C(\|u'\|_{\alpha-1}\|v\|_1^\alpha + \|u'\|_1\|v\|_{\alpha-1}\|v\|_1 + \|u'\|_0\|v\|_1)\end{aligned}$$

O único termo que precisamos estimar é $\|u'\|_1\|v\|_{\alpha-1}\|v\|_1$. Usando a propriedade de convexidade,

$$\begin{aligned}\|u'\|_1\|v\|_{\alpha-1}\|v\|_1 &\leq \|u\|_1^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}\|u\|_\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}\|v\|_\alpha^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}\|v\|_1^{\frac{1}{\alpha-1}}\|v\|_1 \\ &\leq (\|u\|_1\|v\|_\alpha)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}(\|u\|_\alpha\|v\|_1^\alpha)^{\frac{1}{\alpha-1}}\end{aligned}$$

Como a média geométrica pode ser trocada pela média aritmética (veja a demonstração do Lema (I.2.6)), o resultado fica provado.

A seguir vamos mostrar que a operação de inversão também resulta mansa em $\Lambda^\alpha$ se $\alpha > 1$. Mais precisamente,

**Proposição 3.7.** *Sejam $A$ e $B$ conjuntos compactos, conexos com interior não vazio de $\mathbb{R}^N$. Sejam $u : A \longrightarrow B$ e $u^{-1} : B \longrightarrow \mathbb{R}^N$ funções que satisfazem*

$$(u^{-1} \circ u)(x) = x, \quad \forall x \in A$$

*Suponha que $\|u\|_1$ e $\|u^{-1}\|_1$ são limitados. Se $\alpha \geq 1$ então*

$$\|u\|_\alpha \leq C\|u^{-1}\|_\alpha \tag{3.12}$$

**Demonstração:** Pela regra da cadeia, $u'(x) = [(u^{-1})'(u(x))]^{-1}$. Como a operação de inversão de matrizes é de classe $C^\infty$ e $(u^{-1})' \circ u$ pertence a um conjunto compacto de matrizes invertíveis, se $\beta > 0$,

$$\begin{aligned}\|u'\|_\beta &\leq C(\|(u^{-1})' \circ u\|_\beta + 1) \\ &\leq C\|(u^{-1})' \circ u\|_\beta\end{aligned}$$

Suponhamos primeiramente que $\beta = \alpha - 1 \leq 1$. Pela Prop. (3.6)a), segue que

$$\|u'\|_{\alpha-1} \leq C(\|(u^{-1})'\|_{\alpha-1}\|u\|_1^{\alpha-1} + 1) \leq C\|(u^{-1})'\|_{\alpha-1}$$

pois por hipótese $\|u\|_1$ é limitado e a proposição fica provada neste caso.

Suponhamos agora que $\beta = \alpha - 1 > 1$. Usando a parte b) da Prop. (3.6), podemos escrever

$$\|u'\|_\beta \leq C(\|(u^{-1})'\|_\beta\|u\|_1^\beta + \|(u^{-1})'\|_1\|u\|_\beta + \|u^{-1}\|_1)$$

O primeiro e o terceiro termos do segundo membro podem ser estimados por uma constante vezes $\|u^{-1}\|_\alpha$, pois $\|u^{-1}\|_1$ é limitada. Para estimar o segundo termo vamos proceder por indução. Admitamos então o resultado verdadeiro para $\alpha - 1$. Segue que

$$\begin{aligned}\|(u^{-1})'\|_1\|u\|_\beta &\leq C\|u^{-1}\|_2\|u^{-1}\|_{\alpha-1} \\ &\leq C\|u^{-1}\|_1\|u^{-1}\|_\alpha + \|u^{-1}\|_\alpha\|u^{-1}\|_1\end{aligned}$$

onde usamos o Corol. (3.3). Como $\|u^{-1}\|_1$ é por hipótese limitado, o resultado fica demonstrado.

Finalmente vamos mostrar que os operadores diferenciais (não lineares) são mansos com relação aos espaços de Hölder. Este fato será essencial para as aplicações que veremos no Capítulo 3.

Seja $K$ um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $C^1$ e seja

$$f : B \in K \times (\mathbb{R}^p)^I \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

uma função contínua, onde $B$ é um aberto de $K \times (\mathbb{R}^p)^I$ e $I$ é a cardinalidade do conjunto de índices $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ tais que $|\sigma| \leq m$, para um dado inteiro positivo $m$.

Seja $\mathcal{O} = \{u \in C^m(K, \mathbb{R}^p) : (x, (\partial^\sigma u(x))_{\sigma\in I}) \in B\}$. Este conjunto é um aberto de $C^m(K, \mathbb{R}^p)$. Definamos

$$F : \mathcal{O} \longrightarrow C^0(K, \mathbb{R}^q)$$

$$u \mapsto f(., (\partial^\sigma u)_{\sigma\in I}$$

Como $f$ é uniformemente contínua em compactos, segue que $F$ é contínua.

Seja agora $B_0$ um subconjunto compacto de $K \times (\mathbb{R}^p)^I$. Definamos

$$\mathcal{O}_0 = \{u \in C^m(K, \mathbb{R}^p) : (x, (\partial^\sigma u(x))_{\sigma\in I}) \in B_0\}$$

**Proposição 3.8.** *Com as notações acima, suponha que $f$ é uma função de classe $C^\infty$. Então $F$ é mansa com relação aos espaços de Hölder, isto é*

$$\forall \alpha \geq 0, \quad \|F(u)\|_\alpha \leq C(1 + \|u\|_{m+\alpha}), \quad \forall u \in \mathcal{O}_0 \cap \Lambda^{m+\alpha} \tag{3.13}$$

**Demonstração:** Vamos aplicar as estimativas sobre composição de funções fornecidas pela Prop. (3.6). O operador $F$ pode ser escrito como composta da aplicação $f$ com $g : x \mapsto (x, (\partial^\sigma u(x))_{\sigma \in I})$.

Se $\alpha \leq 1$, pela parte a) da prop. (3.6),

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_\alpha &\leq \|f\|_1 \|g\|_\alpha + \|f\|_0 \\ &\leq (1 + \|u\|_{m+\alpha}) \end{aligned}$$

Se $\alpha > 1$, usamos a parte b) da Prop. (3.6) para obter

$$\|F(u)\|_\alpha \leq (\|f\|_\alpha \|g\|_1^\alpha + \|f\|_1 \|g\|_\alpha + \|f\|_0) \tag{3.14}$$

Os dois últimos termos do segundo membro não trazem problemas. Quanto ao primeiro termo, sua estimativa pode ser feita provando-se primeiro que

$$\|u\|_{m+1} \leq C \|u\|_{m+\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad u \in \Omega_0$$

Como $u \in \Omega_0$, esta propriedade segue da propriedade de convexidade

$$\|u\|_{m+1} \leq C \|u\|_0^{1-\frac{1}{\alpha}} \|u\|_{m+\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}$$

Levando esta estimativa em (3.14), o resultado segue imediatamente.

## Regularização e escalas mansas de Espaços de Hölder

Nesta seção provaremos que os espaços de Hölder constituem uma escala mansa; para isto, percorreremos o caminho contrário do que foi feito no Capítulo 1, onde a propriedade de convexidade resultou como uma conseqüência da mansidão da escala envolvida: aqui necessitamos da propriedade fornecida pelo Lema (3.2) para provar que as classes de Hölder formam uma escala mansa.

Seja $K$ um compacto de $\mathbb{R}^n$ e seja $\chi$ uma função de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que vale 1 numa vizinhança de $K$. Escolhemos $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\hat{\phi} = 1$ numa vizinhança da origem. Aqui $\hat{\phi}$ denota a transformada de Fourier de $\phi$ em $\mathbb{R}^n$.

Se $u$ está suportada em $K$, definamos

$$T_\theta u = \chi.(\phi_\theta * u), \qquad \phi_\theta(x) = \theta^n \phi(\theta x), \quad \theta \geq 1 \tag{3.15}$$

**Teorema 3.9.** *Se $u \in \Lambda^\alpha$, os operadores de regularização descritos em (3.15) satisfazem as seguintes estimativas*

*a)* $\|T_\theta u\|_\beta \leq C\|u\|_\alpha, \quad \beta \leq \alpha$

*b)* $\|T_\theta u\|_\beta \leq C|\theta^{\beta-\alpha}\|u\|_\alpha, \quad \alpha \leq \beta$

*c)* $\|u - T_\theta u\|_\beta \leq C\theta^{\beta-\alpha}\|u\|_\alpha, \beta \leq \alpha$

*d)* $\|\frac{d}{d\theta}T_\theta u\|_\beta \leq C\theta^{\beta-\alpha-1}\|u\|^\alpha$

*e)* $\lim_{\theta\to\infty}\|u - T_\theta u\|_\alpha = 0.$

**Demonstração:** a) Como $\beta \leq \alpha$, $\|T_\theta u\|_\beta \leq C\|T_\theta u\|_\alpha$ e assim basta estimar $|\phi_\theta * u|_\alpha$.

Se $\alpha \leq 1$,

$$\begin{aligned}|\phi_\theta * u|_\alpha &\leq \sup \int \frac{|u(x-z) - u(y-z)|}{|x-y|^\alpha}\phi_\theta(z)dz \\ &\leq \|u\|_\alpha \|\phi_\theta\|_{L_1} = \|u\|_\alpha\|\phi\|_{L_1}\end{aligned}$$

Se $\alpha > 1$, usamos o fato que $\partial^l(\phi_\theta * u) = \phi_\theta * \partial^l u$ e o resultado segue de modo análogo.

b) Neste caso, devido à propriedade de convexidade, podemos supor que $\beta = \alpha + k$, $k$ inteiro positivo. De fato, se $\beta = t\alpha + (1-t)(\alpha+k)$, assumindo o resultado para $\alpha + k$ e usando a)

$$\|T_\theta u\|_\beta \leq C\|T_\theta u\|_\alpha^t \|T_\theta u\|_{\alpha+k}^{1-t} \leq C\theta^{(1-t)k}\|u\|_\alpha = C\theta^{\beta-\alpha}\|u\|_\alpha$$

Tomemos então um multiíndice $\sigma$ com $|\sigma| = k$. Temos

$$|\partial^\sigma \phi_\theta * u|_\alpha = |\theta_k \psi_\theta * u|$$

onde $\psi = \partial^\sigma \phi$. Logo

$$|\partial^\sigma \phi_\theta * u|_\alpha \leq \theta^k \|\partial^\sigma \psi_\theta\|_{L^1}\|u\|_\alpha$$

e desta desigualdade segue imediatamente o resultado.

c) Se $\alpha = \beta$ a desigualdade que queremos provar é óbvia devido à desigualdade triangular e a parte a). Além disso, pela propriedade de convexidade, não há perda de generalidade em supor que $\beta = 0$.

Novamente precisamos dividir a demonstração em $\alpha \leq 1$ e $\alpha > 1$.

Se $\alpha \leq 1$, a estimativa a ser provada é conseqüência das seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} |u(x) - (\phi_\theta * u)(x)| &\leq |\int (u(x) - u(x-y))\phi_\theta(y)dy| \\ &\leq \|u\|_\alpha \int |y|^\alpha \theta^n |\phi(\theta y)| dy \\ &\leq C\|u\|_\alpha \theta^{-\alpha} \end{aligned}$$

Suponhamos que $k < \alpha \leq k+1$, onde $k$ é um inteiro positivo e consideremos a seguinte fatoração:

$$1 - \hat{\phi}(\xi) = \sum_{|\sigma|=k} \xi^\sigma \hat{\phi}_\alpha(\xi)$$

onde

$$\hat{\phi}_\alpha(\xi) = \frac{\xi^\alpha(1 - \hat{\phi}(\xi))}{\sum_{|\sigma|=k} \xi_k^2}$$

Como $\hat{\phi}_\alpha$ se anula numa vizinhança da origem (onde $\hat{\phi} = 1$) e é homogênea de grau $k$ no infinito, segue que $\phi_\alpha$ é rapidamente decrescente no infinito e, próximo da origem tem crescimento controlado por $|x|^{k-n} ln|x|$, sendo portanto integrável. Usando as propriedades da transformada de Fourier relativas à convolução e denotando por $\mathcal{F}^{-1}$ a transformada inversa de Fourier podemos escrever:

$$\mathcal{F}^{-1}(u(x) - \phi_\theta * u) = \mathcal{F}^{-1}((1 - \hat{\phi}_\theta)\hat{u})$$

Como $\hat{\phi}_\theta(\xi) = \hat{\phi}(\xi/\theta)$, lembrando que o produto por monômios transforma-se em derivação mediante a transformada de Fourier e que a derivada da convolução é a convolução com a derivada de um dos fatores, segue que

$$\begin{aligned} |(u - \phi_\theta * u)(x)| &= |(i\theta)^{-k} \sum_{|\alpha|=k} (\phi_\alpha)_\theta * \partial u(x)| \\ &= (i\theta)^{-k} \sum_{|\alpha|=k} \left| \int (\partial^\alpha u(x-y) - \partial^\alpha u(x))\phi_\alpha(\theta y)\theta^n dy \right| \end{aligned}$$

$$\leq \theta^{-k} \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u|_{\alpha-k} \int |y|^{\alpha-k} |\phi_\alpha(\theta y)| \theta^n \, dy$$
$$\leq C\theta^{-\alpha} |\partial^\alpha u|_{\alpha-k}$$

Com isto provamos c).

d) Notemos que

$$\frac{d}{d\theta}(\phi_\theta * u) = \frac{d}{d\theta}\mathcal{F}^{-1}(\hat{\phi}_\theta \hat{u})$$

e

$$\hat{\phi}_\theta(\xi) = \hat{\phi}(\frac{\xi}{\theta})$$

Assim

$$\frac{d}{d\theta}\hat{\phi}_\theta(\xi) = \frac{1}{\theta} a_1(\frac{\xi}{\theta})$$

onde

$$a_1(\xi) = -\sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \xi_j}(\xi)$$

A função $a_1(\xi)$ tem suporte compacto e se anula numa vizinhança da origem. Observemos que ganhamos a potência necessária $\theta^{-1}$. Usando novamente as propriedades da convolução e da transformada de Fourier, a prova de b) pode ser usada (com $a_1$) para provar o resultado que queremos no caso $\alpha \leq \beta$ e a prova de c) pode ser aplicada (também com $a_1$) no caso $\beta \leq \alpha$.

Mostremos finalmente e). Basta provar que $|u - T_\theta u|_\alpha \to 0$ quando $\theta \to \infty$.

Ora,

$$\frac{|(u - \phi_\theta * u)(x) - (u - \phi_\theta * u)(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \int \frac{|u(x) - u(x - \frac{z}{\theta}) - u(y) - u(y - \frac{z}{\theta})|}{|x-y|^\alpha} \phi(z) dz$$
$$\leq \sup_z \frac{|u(x) - u(y) + u(y - \frac{z}{\theta}) - u(x - \frac{z}{\theta})|}{|x-y|^\alpha}$$

Este último termo é limitado e converge para 0 uniformemente em compactos quando $\theta \to \infty$. Disto segue o resultado.

# CAPÍTULO III
## Aplicações

Este é um capítulo muito longo, em compensação, suas três seções são completamente independentes, podendo ser lidas (ou omitidas) em qualquer ordem.

Os resultados e técnicas desenvolvidos nos dois primeiros capítulos tiveram origem no trabalho de Nash ([N]) a respeito da existência de mergulhos isométricos de variedades Riemannianas compactas em algum $\mathbb{R}^N$. Devido a sua beleza e importância histórica, esta será nossa primeira aplicação e o assunto da seção 1. O Teorema II.3.3 pode ser aqui aplicado bastante diretamente para obter o resultado procurado.

Na primeira aplicação, a hipótese do Teorema II.3.3 que mais engenho requer para sua verificação é a existência de uma inversa à direita mansa. Isto não é mero acaso: a maior dificuldade na aplicação do teorema de Nash-Moser normalmente se origina nessa construção, mesmo porque às vezes simplesmente o linearizado do operador em estudo *não é sobrejetivo e não pode possuir* uma inversa à direita. Nas duas aplicações seguintes, enfrentamos este tipo de problema e a solução básica consiste em utilizar no esquema de aproximação uma *inversa aproximada*. É claro que deixando de verificar-se as hipóteses do teorema de Nash-Moser, a convergência do esquema não estará garantida e será preciso prová-la em cada caso.

Na segunda aplicação, que trata da construção de soluções locais da equação de Monge-Ampère com membro direito não negativo, o linearizado do operador muda de caráter em uma vizinhança do ponto estudado, sendo ora elíptico, ora parabólico, ora hiperbólico, mas ficando sempre próximo de um operador elíptico positivo, o que faz com que a adição de um múltiplo pequeno do operador de Laplace o torne elíptico degenerado. É este operador perturbado que se inverte à direita. A perturbação pode escolher-se cada vez menor a cada passo e tende a zero no limite.

A última aplicação é de natureza inteiramente diferente. Trata-se de resolver uma equação homogênea, linear, superdeterminada. Ela é inicialmente aproximada por uma outra cuja solução se conhece. Esta solução satisfaz aproximadamente a equação original e se deseja absorver o erro. Para isto devemos resolver uma equação superdeterminada não homogênea, o que resulta impossível se o termo que se deseja absorver deixa de satisfazer certas condições de compatibilidade (isto corresponde à inexistência de uma inversa à direita). Entretanto, é possível usar fórmulas de homotopia que simultaneamente fornecem uma inversa à direita aproximada e uma estimativa quadrática do erro. Isto permite que o esquema de Nash-Moser resulte convergente.

## 1. Mergulhos Isométricos de Variedades Riemannianas

Seja $M$ uma variedade Riemanniana compacta de classe $C^\infty$ e dimensão $n$, munida de uma métrica $g$. Pelo teorema de Whitney, sabemos que $M$ pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^{2n+1}$. De acordo com o trabalho de Nash citado acima, é possível mergulhar isometricamente $M$ em algum $\mathbb{R}^N$, em outras palavras, existe uma função injetora

$$u : M \longrightarrow \mathbb{R}^N \tag{1.1}$$

que satisfaz

$$g_P(X,Y) = \langle du_P(X), du_P(Y)\rangle_{u(P)}, \qquad \forall X, Y \in T_PM \tag{1.2}$$

onde $\langle\ \ ,\ \ \rangle_{u(P)}$ denota o produto escalar usual de $\mathbb{R}^N$ e $T_PM$ o espaço tangente a $M$ em $P$. Em um sistema local de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$, a métrica está representada pela forma quadrática

$$g = \sum g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j.$$

Tomando em (1.2) $X = \partial/\partial x_i$ e $Y = \partial/\partial x_j$ teremos

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}.$$

Abreviadamente escreveremos (1.2) na seguinte forma:

$$g = \langle du, du\rangle \tag{1.3}$$

Sabemos que toda imersão é localmente injetora; no entanto, escolhendo $N$ suficientemente grande, bastará encontrar $u$ satisfazendo (1.3) para que a injetividade global esteja automaticamente verificada. De fato, seja $u_1 : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ um mergulho e escolha $t \in \mathbb{R}$ tal que $t^2 g_1 < g$ onde $g_1 = \langle du_1, du_1\rangle$. Isto é possível pois $M$ é compacta. Definamos $g_2 = g - t^2 g_1$ e suponhamos que a equação (1.3) esteja satisfeita para a métrica $g_2$, i.e, que $g_2 = \langle du_2, du_2\rangle$, para alguma imersão $u_2 : M \longrightarrow \mathbb{R}^{N_2}$.

Então $g = t^2 g_1 + g_2$ é proveniente da imersão $u = (tu_1, u_2)$ que é um mergulho em $\mathbb{R}^{2n+1+N_2}$. É muito importante aqui não termos limitantes para $N$.

Consideremos agora a aplicação $\Phi$ do conjunto dos mergulhos de $M$ em algum $\mathbb{R}^N$ no conjunto das métricas definidas em $M$, dada por $\Phi(u) = \langle du, du \rangle$.

Na categoria $C^\infty$, vamos provar que a sobrejetividade de $\Phi$ é conseqüência da resolubilidade da equação (1.3) para todas as métricas $g$ numa $C^\infty$-vizinhança de uma métrica $g_0$ convenientemente escolhida. Para ver isto, escolhemos $t \in \mathbb{R}$ tal que $t^2 g_0 < g$ e escrevemos:

$$g = t^2(g_0 + h) + k, \qquad \text{onde} \qquad k = g - t^2 g_0 - t^2 h. \tag{1.4}$$

Assumamos que seja possível encontrar um mergulho $u_1$ tal que $\Phi(u_1) = g_0 + h$, se $h \in C^\infty$ for suficientemente pequeno. Basta provar então que é possível escolher $h$ pequeno de modo que exista um mergulho $u_2$ com $\Phi(u_2) = k$. Este fato é conseqüência da densidade do conjunto das métricas de classe $C^\infty$ que satisfazem (1.3) no espaço de todas as métricas de classe $C^\infty$. A prova desta densidade é feita do seguinte modo: dada uma métrica $g$ em $M$, precisamos escrevê-la como soma de quadrados de diferenciais de funções reais, $\langle df, df \rangle$. Em coordenadas, podemos aproximar $g$ por uma integral obtida pela convolução da métrica com uma função de classe $C^\infty$ e suporte compacto, como é usualmente feito para regularizar funções. O resultado segue então passando-se para somas de Riemann e usando-se uma partição da unidade para colar as funções obtidas em diferentes sistemas de coordenadas. Observe que como $C^\infty$ é denso em $C^j$, obtemos a densidade das métricas da forma $\langle du, du \rangle$ $u \in C^\infty$, também no espaço das métricas de classe $C^j$. Descreveremos agora mais detalhadamente esta abordagem. Consideremos uma partição finita da unidade $\{\psi_j^2\}$, $j = 1, \ldots, p$, subordinada a uma cobertura de $M$ constituída por vizinhanças coordenadas, i.e., $\sum \psi_j^2 = 1$, e cada $\psi_j$ está suportada em alguma vizinhança coordenada. Escrevamos $g_j = \psi_j^2 g$, de maneira que cada $g_j$ é uma forma semi-definida suportada numa vizinhança coordenada. Suponhamos que conseguimos encontrar funções $u_j : M \to \mathbb{R}^{N_j}$ tais que $g_j = \langle du_j, du_j \rangle$. Então, a imersão $u = (u_1, \ldots, u_p)$ verificará $\langle du, du \rangle = \langle du_1, du_1 \rangle + \cdots + \langle du_p, du_p \rangle = g_1 + \cdots + g_p = g$. Analogamente, se encontramos funções $u_j$ que satisfazem aproximadamente $g_j = \langle du_j, du_j \rangle$ teremos que $u = (u_1, \ldots, u_p)$ satisfará aproximadamente $\langle du, du \rangle = g$. Isto permite localizar a questão da densidade das métricas que são somas de quadrados $\langle df, df \rangle$, $f$ real. Fixemos um $k$ e vejamos como aproximar $g_k$ por somas de quadrados de diferenciais de funções reais. Na vizinhança onde $\psi_k$ está suportada, $g$ está dada por uma matriz autoadjunta $\{g_{ij}\}$ definida positiva, que possue uma raiz quadrada autoadjunta positiva $A_k$. Podemos escrever, nesta vizinhança, $g_k = \psi_k^2 A_k^t A_k$ onde $A^t$ indica a adjunta de $A$. Nosso problema é agora aproximar uma forma semi-definida positiva da forma $\psi^2(x) A(x)^t A(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, onde $A(x)$

é inversível, $A(x)$ e $A^{-1}(x)$ são diferenciáveis e $\psi$ está suportada numa bola de raio $R$. Seja $\chi(x) = \phi(|x|) \geq 0$ uma função radial em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, suportada na bola de raio 1. Fixando $y$ e tomando diferencial com respeito a $x$, vemos que a forma $\langle d\chi(x-y), d\chi(x-y)\rangle$ corresponde — na base $dx_i \otimes dx_j$ — à matriz $(\chi')^t\chi'(x-y)$, onde $\chi'$ denota a matriz quadrada cuja primeira fila é $\nabla\chi$ sendo as restantes nulas. Integrando em relação a $y$ obtemos uma matriz cujos coeficientes são

$$\int \phi'(|x|)^2\, x_i x_j\, dx = \delta_{ij} \int \phi'(|x|)^2\, dx/n.$$

Escolhendo $\phi$ convenientemente para que a integral no membro esquerdo seja 1, a matriz obtida é a identidade. Para $\epsilon > 0$ pequeno consideremos a matriz

$$\int A^t(y)[(\chi')^t\chi'](A(y)(x-y)/\epsilon)A(y)|\det A(y)|\psi^2(y)\epsilon^{-n}\, dy =$$
$$\int A^t(x-\epsilon z)[(\chi')^t\chi'](A(x-\epsilon z)z)A(x-\epsilon z)|\det A(x-\epsilon z)|\psi^2(x-\epsilon z)\, dz.$$

Esta matriz está suportada na bola de raio $R + C\epsilon$ e converge uniformemente com todas as suas derivadas para a matriz $\psi^2(x)A^t(x)A(x)$ quando $\epsilon \to 0$ (fazer $\epsilon = 0$ na segunda expressão e introduzir a mudança de variáveis $z' = A(x)z$ na integral resultante). Tomando uma soma de Riemann próxima da integral do membro esquerdo, para $\epsilon$ pequeno, encontramos uma matriz que também aproxima $\psi^2 A^t A$, e além disso é por construção, uma soma de quadrados de diferenciais de funções em $C_c^\infty$. Com efeito, o termo genérico da soma de Riemann, considerado como função de $x$, é da forma

$$C^2 A^t[(\chi')^t\chi'](Ax + x_0)A$$

que é a matriz correspondente à forma $\langle dh, dh\rangle$, $h(x) = C\chi(Ax + x_0)$, onde a matriz $A$ independe de $x$. Isto prova a densidade das métricas que satisfazem (1.3) no espaço de todas as métricas.

Deste modo chegamos à seguinte situação: encontrar uma função $u_0$ de classe $C^\infty$ tal que $g_0 = \langle du_0, du_0\rangle$ seja uma métrica e tal que a equação (1.3) tenha solução para toda métrica $g$ suficientemente próxima de $g_0$, ou seja, queremos provar que, sob estas condições, $\Phi$ possui uma inversa.

Um argumento geométrico bastante simples mostra que o Teorema das Funções Inversas Clássico para espaços de Banach *não* se aplica neste caso, como veremos a seguir. Se $u : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é um mergulho de classe $C^{j+1}$ e $g = \langle du, du\rangle$, então $g$ é de classe $C^j$. Entretanto, podemos escolher $g \in C^j$ tal que $u$ é tão somente de classe $C^{j-2}$. De fato, isto segue da fórmula de Gauss:

$$k(x,y) - \bar{k}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - |B(x,y)|^2, \tag{1.6}$$

para $x, y$ ortonormais, onde $k$ (respectivamente $\bar{k}$) é a curvatura seccional de $M$ (de $\mathbf{R}^N$), $B(x,y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y$ e $\nabla$ (respectivamente $\bar{\nabla}$) é a conexão Riemanniana de $M$ (de $\mathbf{R}^N$) (ver [Ca1]).

Em termos de coordenadas, o primeiro membro envolve derivadas segundas das componentes de $g$ (só depende da primeira forma fundamental) e o segundo membro é um operador diferencial de segunda ordem nas componentes de $u$ (só depende da segunda forma fundamental associada ao mergulho $u$). Se $g$ é de classe $C^j$ mas não é de classe $C^{j+1}$ então $K(x,y)$ é somente de classe $C^{j-2}$ e portanto $u$ não pode ser de classe $C^{j+1}$. Assim, o Teorema das Funções Inversas Clássico não pode ser usado para achar uma inversa da aplicação:

$$\Phi : \{\text{mergulhos} \quad C^{j+1}\} \longrightarrow \{\text{ métricas} \quad C^j\} \tag{1.7}$$

dada por $\Phi(u) = \langle du, du\rangle$, porque ocorre irremediavelmente perda de derivadas que o esquema clássico não recupera.

Vamos aplicar o teorema de Nash-Moser à função $\Phi$ descrita acima com $j = \infty$. Sua derivada é dada por:

$$\Phi'(u)v = \frac{d}{dt}\Phi(u+tv)\bigg|_{t=0} = 2\langle du, dv\rangle. \tag{1.8}$$

Para encontrar uma inversa desta aplicação, façamos $\Phi'(u)v = h$. Obtemos assim um sistema de equações diferenciais nas componentes de $v$. Se consideramos apenas perturbações $v$ normais à subvariedade mergulhada via $u$, i.e, se

$$\langle du, v\rangle = 0, \tag{1.9}$$

obtemos por derivação

$$\langle d^2u, v\rangle + \langle du, dv\rangle = 0. \tag{1.10}$$

Isto reduz o problema de encontrar soluções do sistema de equações diferenciais

$$2\langle du, dv\rangle = h$$

ao de encontrar $v$ satisfazendo o seguinte sistema *algébrico* de equações em $v$:

$$\begin{aligned} \langle d^2u, v\rangle &= -\frac{h}{2} \\ \langle du, v\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Consideremos um sistema local de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$, em $M$. Podemos obter $v$ na vizinhança coordenada a partir destas equações desde que os vetores

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial_2 u}{\partial x_j \partial x_k}, \qquad j, k = 1, \ldots, n, \qquad j \leq k \tag{1.12}$$

sejam linearmente independentes. Ainda mais, a solução $v$ é única com a exigência adicional de que $v$ pertença ao plano gerado por $\partial_j u$, $\partial_{jk} u$ (denominado plano osculador). É claro que exigir que o plano osculador tenha a dimensão máxima possíel de $n+n(n+1)/2$ depende apenas do mergulho $u$ e não do sistema de coordenadas local em $M$. Existem mergulhos que satisfazem esta condição de, em todo ponto de $u(M)$, ter o plano osculador dimensão máxima (são chamados mergulhos livres): basta compor o mergulho $M \longrightarrow \mathbf{R}^{2n+1}$ fornecido pelo teorema de Whitney com o mergulho $\mathbf{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^N$, $x \mapsto (x_i, \dot{x}_j x_k)_{j \leq k}$, $N = (2n+1)(2n+4)/2$, usando $n$ coordenadas como coordenadas locais da variedade mergulhada. Ainda, qualquer mergulho suficientemente próximo de um mergulho livre na topologia $C^2$ também será livre.

Suponhamos que $u$ seja um mergulho livre. Então $\Phi'(u)$ admite uma inversa que pode ser escrita na seguinte forma:

$$v = \Psi(u).h \tag{1.13}$$

onde $\Psi(u)$ é uma matriz cujas entradas são operadores de segunda ordem em $u$ e $v$ é a única solução de (1.11) que pertence ao plano osculador. A forma de $\Psi(u)$ em coordenadas locais vem de resolver

$$\langle \partial_j u, v\rangle = 0, \quad \langle \partial_{jk} u, v\rangle = -h_{jk}/2,$$

com $v(x)$ no plano osculador que passa por $u(x)$.

Vamos usar o teorema da Nash-Moser I.3.3 para obter uma solução da equação diferencial

$$\Phi(u) = g \tag{1.14}$$

onde g é uma métrica em $M$ que está próxima de $\Phi(u_0) = \langle du_0, du_0\rangle$ e $u_0$ é um mergulho livre (satisfaz (1.12)). Escolhemos como escalas mansas as seguintes classes de espaços de Hölder:

$$\mathcal{E} = \Big\{E^k = \{\text{Mergulhos de classe } \Lambda^{k+\gamma+1} \text{ em } \mathbb{R}^N\},\ k = 1, 2, \ldots\Big\}, \tag{1.15}$$

$$\mathcal{F} = \left\{ F^k = \{\text{métricas de classe de Hölder}\, \Lambda^{\gamma+k}\},\ k = 1, 2, \ldots \right\}. \tag{1.16}$$

para $0 < \gamma < 1$ fixo.

É claro que $\Phi$ leva $E^k$ em $F^k$. Vamos provar que $\Phi$ é uma aplicação mansa entre as escalas $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ e que as desigualdades I.3.10 e I.3.11 se verificam. Para isto suponhamos que $u$ esteja numa vizinhança de $u_0$ no espaço $\Lambda^2$. De agora em diante a letra $C_k$ será usada para denotar várias constantes que só dependem de $k$. A desigualdade

$$\|\Phi(u)\|_{F^k} \leq C_k(1 + \|u\|_{E^k}) \tag{1.17}$$

que mostra que $\Phi$ é mansa segue diretamente da Proposição II.3.8 visto que $\Phi$ é um operador diferencial da forma $F(., (\partial^\sigma u)_{|\sigma|\leq 1})$ e $u$ está próximo de $u_0$ em $\Lambda^2$.

Como $\Phi'(u)v = \sum_{|\sigma|\leq 1} F'_{\partial^\sigma u}(., \partial^\sigma u)\partial^\sigma v$, verificamos que $\Phi'(u)v$ não "gasta" mais derivadas com relação a $u$ do que $\Phi(u)$. Combinamos a Proposição II.3.8 com a estimativa do produto fornecida pela Proposição II.3.5 e obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi'(u)v\|_{F^k} &\leq C_k\left((1 + \|u\|_{E^k})\|v\|_{\Lambda^0} + (1 + \|u\|_{\Lambda^2})\|v\|_{E^k}\right) \\ &\leq C_k\left((1 + \|u\|_{E^k})\|v\|_{E^0} + \|v\|_{E^k}\right) \end{aligned} \tag{1.18}$$

para $u$ próximo de $u_0$ em $\Lambda^2$. Em outras palavras $\Phi'(u)v$ é mansa e linear em $v$ (veja I.2.9).

Raciocinando de modo análogo, obteremos também que $\Phi''(u)(v, w) = \Phi''(v, w)$ é mansa e bilinear em $(v, w)$ valendo portanto a seguinte estimativa

$$\|\Phi''(v, w)\|_{F^k} \leq C_k\big((1 + \|u\|_{E^k})(\|v\|_{E^k}\|w\|_{E^0} + \|v\|_{E_0}\|w\|_{E_k})\big) \tag{1.19}$$

para $u$ próximo de $u_0$ na norma $\Lambda^2$. Desta desigualdade segue imediatamente (I.3.11). Resta verificar que $\Phi'(u)$ tem uma inversa à direita que satisfaz (I.3.12). Se $\|u - u_0\|_{\Lambda^2}$ é suficientemente pequeno, sabemos que a inversa de $\Phi'(u)$ está dada por $\Psi(u)$ descrita em (1.13). ) Como $\Psi(u)$ é, em coordenadas locais, uma multiplicação por uma matriz cujas entradas são operadores de segunda ordem em $u$, combinando mais uma vez as proposições II.3.5 e II.3.8, segue que

$$\|\Psi(u)v\|_{E^k} \leq C_k(\|v\|_{F^{k+1}} + \|v\|_{F^0}\|u\|_{E^{k+2}}) \tag{1.20}$$

e assim a desigualdade (I.3.12) está satisfeita com $\alpha = 2$.

Pelo Teorema I.3.3, existe $\beta > 4$ tal que a equação $\Phi(u) = \Phi(u_0) + g$ tem solução $u \in E^\alpha$, desde que $\|g\|_{F^\beta}$ seja suficientemente pequeno (se $\alpha = 2$ e $\sigma = 3/2$, as inequações (3.14) se verificam se escolhermos $\mu = 7$, $\lambda = 11$, fornecendo $\beta = \alpha + \lambda = 13$). Ainda, se $g \in C^\infty$, podemos escolher a solução $u$ de classe $C^\infty$. Isto encerra a demonstração de que $M$ pode ser isométricamente mergulhada em algum $\mathbb{R}^N$.

**Observações**

1) A idéia de acrescentar a equação (1.9) para poder resolver (1.8), embora muito engenhosa, prende-se ao seguinte fato elementar: se $P : X \to Y$ é uma aplicação linear, $Z \subset X$ um subespaço de $X$ e $\tilde{P}$ é a restrição $P/Z$ de $P$ a $Z$, é imediato que uma inversa á direita de $\tilde{P}$ também será uma inversa à direita de $P$. No caso, $P = \Phi'(u)$ e $Z$ é o subespaço das imersões ortogonais a $du$.
2) O procedimento desenvolvido acima para provar a existência de mergulhos isométricos não fornece informações precisas sobre a regularidade de $u$ em função da regularidade da métrica, nem apresenta limitantes para a dimensão do espaço euclidiano onde a variedade foi mergulhada. No Capítulo IV, §7, mostraremos usando o esquema de aproximação de Nash-Hörmander, um resultado mais preciso sobre a regularidade: é possível obter mergulhos isométricos de classe $\Lambda^\alpha$, $\alpha > 2$, se a métrica é de classe $\Lambda^\alpha$. Sobre o problema do tamanho de $N$ ver [G-R].

## 2. Existência de Soluções Locais da Equação de Monge–Ampère

Nesta seção, vamos aplicar o método de Nash-Moser para mostrar a existência de soluções locais da equação de Monge-Ampère

$$\det(u_{ij}) = f(y, u, \operatorname{grad} u) \tag{2.1}$$

em um aberto de $\mathbb{R}^n$. Aqui $u_{ij}$ denotam as derivadas parciais $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j}$ e $f$ é uma função não negativa.

Tal equação aparece por exemplo no problema de imersão isométrica em $\mathbb{R}^3$ de uma variedade Riemanniana de dimensão 2 com curvatura Gaussiana não negativa ([L1]). Este trabalho inspirou Hong e Zuily [H-Z] a demonstrarem o seguinte teorema:

**Teorema 2.1.** *Suponha que $f$ seja uma função suave e não negativa numa vizinhança de um ponto $P_0 = (y_0, u_0, p_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Se $s$ é um inteiro tal que $s > [\frac{n}{2}] + 3$, então a equação (2.1) tem uma solução $u \in H^s$ definida numa vizinhança de $y_0$.*

Vamos provar primeiramente uma série de lemas que nos permitirão aplicar confortavelmente o método de Nash-Moser. A versão do teorema de Nash-Moser que usaremos aqui não necessita que o operador linearizado tenha uma inversa; de fato este operador será modificado de modo a torná-lo elítico, fornecendo assim uma inversa aproximada.

Podemos supor sem perda de generalidade que $P_0 = (0,0,0)$. Façamos a seguinte mudança de variáveis:

$$u = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i y_i^2 + \epsilon^5 w, \qquad y_i = \epsilon^2 x_i, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.2}$$

com $\epsilon > 0$ pequeno e $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ constantes escolhidas de modo que $1 = \sigma_{n-1} < \ldots < \sigma_2 < \sigma_1$.

Efetuada a mudança, a equação (2.1) passa a ter a seguinte forma:

$$\det(\Phi_{ij}) = \tilde{f} \tag{2.3}$$

onde

$$\Phi_{ij} = ((1 - \delta_{in})\delta_{ij}\sigma_i + \epsilon w_{ij}) \tag{2.4}$$

e onde $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$. Definamos agora o seguinte operador

$$G(w) = \frac{1}{\epsilon}\det(\Phi_{ij}) - \frac{\tilde{f}}{\epsilon}\chi(x') \tag{2.5}$$

em $\Omega = \{(x', x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x'| < \pi, |x_n| < x_0\}$, onde $\chi$ é uma função suave em $\Omega$, não negativa que se anula nos pontos próximos de onde alguma coordenada de $x'$ valha $\pi$ ou $-\pi$ e é igual a 1 numa vizinhança da origem.

O operador linearizado de $G$ em torno de $w$ é:

$$L_G(w)u = \sum_{i,j=1}^{n} \phi^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au \tag{2.6}$$

onde $(\Phi^{ij})$ é a matriz cofatora de $(\Phi_{ij})$ (de fato, o determinante é multilinear).

Agora, como $(\Phi_{ij})$ é uma matriz simétrica (supondo $w$ de classe $C^2$), é possível encontrar uma matriz ortogonal $T(x, \epsilon)$ satisfazendo:

$$T(x,\epsilon)(\Phi_{ij})T^t(x,\epsilon) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{2.7}$$

As propriedades de regularidade da matriz $T(x, \epsilon)$ estão contidas no seguinte lema:

**Lema 2.2.** *Suponha que $w$ é uma função suave que satisfaz $|w|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq 1$. Então*

*i) Existe $\epsilon_0$ tal que $T(x,\epsilon)$ é suave para $x \in \bar{\Omega}$ e $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$.*

*ii) Existe $C > 0$ tal que*

$$|T_{nn}(x,\epsilon)-1| + \sum_{i,j=1}^{n} |\mathrm{grad}_x T_{ij}(x,\epsilon)| + \sum_{l=1}^{n-1} |\lambda_l(x,\epsilon)-\sigma_l| + |\lambda_n(x,\epsilon)| + \sum_{l=1}^{n-1} |T_l(x,\epsilon)| \leq C\epsilon, \tag{2.8}$$

*se $\epsilon \leq \epsilon_0$.*

**Demonstração:** Como

$$\det((\Phi_{ij}) - \lambda I)(x,0) = -\lambda \prod_{i=1}^{n-1} (\sigma_i - \lambda) \tag{2.9}$$

e como os $\sigma_i$ são distintos, então os $\lambda_j(x,\epsilon)$ são suaves e distintos. As operações envolvidas para determinar $T(x,\epsilon)$ são todas suaves, portanto $T(x,\epsilon)$ é suave para $\epsilon$ pequeno. Além disso como $T_{ln}(x,0) = 0$, $l = 1,\ldots,n-1$ e $T_{nn}(x,0) = 1$, a desigualdade (2.8) segue por continuidade.

Para encontrar uma inversa aproximada do operador linearizado precisaremos de outro lema:

**Lema 2.3.** *Suponha que $|w|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq 1$ e seja $\theta = \max_{\bar{\Omega}} |G(u)|$. Então o operador*

$$-L_G(w) - \theta\Delta$$

*onde $\Delta$ é o Laplaciano em $\mathbb{R}^n$, é um operador elítico degenerado se $\epsilon$ for suficientemente pequeno.*

**Demonstração:**

Consideremos o símbolo:

$$S = \theta|\xi|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \Phi^{ij}\xi_i\xi_j, \qquad (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n, \tag{2.10}$$

de $-L_G(w) - \theta\Delta$.

Queremos provar que $S \geq 0$. Definindo $\tilde{\xi} = T(\xi) = T(x,\epsilon)\xi$ e substituindo em (2.10), obteremos

$$
\begin{aligned}
S &= \theta|\tilde{\xi}|^2 + ((\Phi^{ij})T^t\tilde{\xi}, T^t\tilde{\xi}) \\
&= \theta|\tilde{\xi}|^2 + (T(\Phi^{ij})T^t\tilde{\xi}, \tilde{\xi})
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

onde ( , ) denota o produto escalar em $\mathbb{R}^n$. Como $T$ é ortogonal,

$$\det(\Phi_{ij})I = T(\Phi_{ij})T^tT(\Phi^{ij})T^t = \mathrm{diag}(\lambda_i)T(\Phi^{ij})T^t$$

devido à (2.7).

Mas,

$$T(\Phi^{ij})T^t = \det(\Phi_{ij})\mathrm{diag}(\frac{1}{\lambda_i}) = (\epsilon G + \chi\tilde{f})\mathrm{diag}(\frac{1}{\lambda_i})$$

devido à (2.5).

Por outro lado, $\det(\Phi_{ij}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ e assim

$$
\begin{aligned}
S &= \theta|\tilde{\xi}|^2 + \det(\Phi_{ij})\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\tilde{\xi}_i^2}{\lambda_i} + \det(\Phi_{ij})\frac{\tilde{\xi}_n^2}{\lambda} \\
&= \theta|\tilde{\xi}|^2 + \det(\Phi_{ij})\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\tilde{\xi}_i^2}{\lambda_i} + (\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i)\xi_n^2 \\
&= (\theta + \prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i)\tilde{\xi}_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(\frac{\epsilon G + \chi\tilde{f} + \theta\lambda_i}{\lambda_i})\tilde{\xi}_i^2.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Basta então provar que $\epsilon G + \theta\lambda_i \geq 0$ se $\epsilon$ for pequeno. Se $\theta = 0$ então $G(w) = 0$ e portanto $S \geq 0$ já que $\chi$ e $\tilde{f}$ são positivas. Se $\theta > 0$, pelo lema anterior

$$\epsilon G + \theta\lambda_i \geq \epsilon G + \theta\lambda_{n-1} \geq \epsilon G + \theta\sigma_{n-1} - C\theta\epsilon \geq 0$$

desde que $\epsilon$ seja suficientemente pequeno (observe que $G(w)$ e portanto $\theta$ mantêm-se limitados quando $\epsilon \to 0$). O Lema 2.3 fica assim provado.

Para que o método de Nash-Moser possa ser aplicado, precisamos obter uma inversa do problema linear associado. Como já salientamos, obteremos tão somente uma inversa aproximada através do estudo do problema de valor de fronteira do operador perturbado $L_G(w) + \theta\Delta$.

Com este intuito, vamos considerar os espaços de Sobolev $H^s$ de funções $2\pi$ periódicas nas variáveis $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, ou seja, $H^s$ será o completamento do espaço dos polinômios trigonométricos

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_l(x_n) e^{i<l,x'>}, \quad \bar{\alpha}_{-l} = \alpha_l \in C^\infty([-x_0, x_0])$$

vendo $x_n$ como um parâmetro. $H^s$ será munido da seguinte norma:

$$\|u\|_s^2 = \sum_{t+j \leq s} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (1 + |l|^2)^t \|\alpha_l\|^2_{H^j((-x_0,x_0))} \tag{2.13}$$

$H^j((-x_0, x_0))$ denota o espaço de Sobolev usual em $(-x_0, x_0)$, como descrito no Capítulo II.

Podemos definir da mesma maneira $H_0^s$, tomando $\alpha_l \in C_c^\infty((-x_0, x_0))$. Isto inclui no espaço a seguinte condição de fronteira: $u \in H_0^s$ implica que $u(x', x_0) = u(x', -x_0) = 0$, para $(x', x_0)$ e $(x', -x_0)$ pertencentes à $\Omega$.

O lema a seguir garante a existência de soluções em $H_0^s$ do problema linear perturbado.

**Lema 2.4.** *Suponha que $w$ seja uma função suave $2\pi$ periódica em cada uma das variáveis $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Se*

$$\|w\|_{C^{[\frac{n}{2}]+3}} \leq 1 \tag{2.14}$$

*então, para todo $s_0 \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $\epsilon = \epsilon(s_0)$ tal que a equação:*

$$L_G(w)u + \theta \Delta u = g, \quad g \in H^s, \tag{2.15}$$

*possui uma única solução $u \in H_0^s$, desde que $0 \leq s \leq s_0$ e $0 < \epsilon < \epsilon(s_0)$. Além disto, vale a seguinte desigualdade:*

$$\|u\|_s \leq C(s)(\|g\|_s + \|\underline{w}\|_{s+4}\|u\|_{L^\infty}) \tag{2.16}$$

*onde $\|\underline{w}\|_{s+4} = 0$ se $s \leq [\frac{n}{2}] + 1$ e $\|\underline{w}\|_{s+4} = \|w\|_{s+4}$ se $s > [\frac{n}{2}] + 1$.*

Antes de demonstrar este lema, façamos a seguinte mudança de variáveis $u^\# = u e^{\lambda x_n^2}$ na equação (2.15). Aqui $\lambda$ é um parâmetro grande que escolheremos futuramente. Após esta mudança a equação (2.15) torna-se:

$$L(w)u^\# = \sum_{i,j=1}^{n} (\Phi^{ij} + \delta_{ij}\theta)\partial_i \partial_j u^\# + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u^\# + c u^\# = e^{\lambda x_n^2} g \tag{2.17}$$

onde

$$b_i = a_i - 4\lambda x_n (\Phi^{in} + \delta_{in}\theta),$$

$$c = a + (\Phi^{nn} + \theta)(4\lambda^2 x_n^2 - 2\lambda) - 2\lambda x_n a_n.$$

Os problemas (2.15) e (2.17) são equivalentes. Por isto podemos trocar no enunciado do Lema 2.4 a equação (2.15) por (2.17) e, a título de simplificação, voltamos a chamar $u^{\#}$ de $u$.

Para provar o Lema 2.4 faremos uso de um artifício que modifica a equação (2.17) tornando-a elítica. Isto está afirmado de modo mais preciso no seguinte lema:

**Lema 2.5.** *Podemos encontrar constantes positivas $x_0, \lambda$ e $\epsilon_0$ de modo que se $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e se $g \in C^\infty(\bar{\Omega})$ então o problema regularizado*

$$L_\nu u = L(w)u + \nu \Delta u = g \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.18}$$

$$u \in H_0^1,$$

*tem uma única solução $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ para cada $\nu > 0$.*

**Demonstração:** Nosso objetivo será mostrar que $- < L_\nu u, u >$ é coerciva e usar o teorema de Lax-Milgram (ver [T3]) (aqui $<\,,\,>$ denota o produto interno de $L^2(\Omega)$). Para isto vamos fazer algumas considerações iniciais. Vamos escolher $\lambda$ e $x_0$ de modo que $\lambda x_0 = 1$. Esta escolha será essencial futuramente. Seja $M = \max_{\bar{\Omega}}\{\tilde{f}, \mathrm{grad}_x \tilde{f}\}$. Então

$$\theta = \max_{\bar{\Omega}} |G(u)| = \max_{\bar{\Omega}} |\frac{1}{\epsilon}\det(\Phi_{ij}) - \frac{1}{\epsilon}\tilde{f}\chi| \leq 2M + O(\epsilon) \tag{2.19}$$

Se $i \neq n$ e $j \neq n$, temos que

$$\Phi^{ij} = O(\epsilon) \tag{2.20}$$

juntamente com todas suas derivadas primeiras. Além disso

$$\Phi^{nn} = \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \prod_{i=1}^{n-1} \sigma_i + O(\epsilon). \tag{2.21}$$

Analisando a expressão de $b_i$ dada após (2.17), concluimos que $b_i = O(\epsilon)$ se $i = 1, 2, \ldots, n-1$ e

$$|b_n| \leq |a_n| + 4(\theta + \prod_{i=1}^{n-1} \sigma_i)\lambda |x_n| + O(\epsilon) \tag{2.22}$$

e assim $b_n$ é limitada. Usando agora a expressão de $c$, podemos escrever

$$c = (\Phi^{nn} + \theta)(4\lambda^2 x_n^2 - 2\lambda) + O(\epsilon) = 2\lambda(\prod_{i=1}^{n-1} \sigma_i + \theta)(2\lambda x_n^2 - 1) + O(\epsilon). \tag{2.23}$$

Passemos agora à estimativa de $- < L_\nu u, u >$.

Como $u$ é periódica e se anula nos pontos onde $x_n = x_0$ ou $x_n = -x_0$ então, integrando por partes,

$$- < L_\nu u, u >= \int [\nu|\mathrm{grad} u|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} (\Phi^{ij} + \delta_{ij}\theta)\partial_i u \partial_j u - \sum_{i=1}^{n} b_i u \partial_i u - (c + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j \Phi^{ij}) u^2] dx \tag{2.24}$$

pois $2\int \partial_i \Phi^{ij} u \partial_j u dx = -\int \partial_j \partial_i \Phi^{ij} u^2 dx$.

Vamos utilizar daqui para frente a seguinte notação: $\tilde{u} = T(\mathrm{grad} u)$. Segue de (2.12) que

$$\int \sum_{i,j=1}^{n} (\Phi^{ij} + \delta_{ij} + \theta)\partial_i u \partial_j u dx = \int [(\theta + \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i)|\tilde{u}_n|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\epsilon G + \theta\lambda_i + \chi\tilde{f}}{\lambda_i} |\tilde{u}_i|^2] dx. \tag{2.25}$$

Passamos ao terceiro termo do segundo membro de (2.24). Novamente integrando por partes,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i u \partial_i u dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \int \frac{\partial b_i}{\partial x_i} u^2 dx - \int b_n u \partial_n u dx. \tag{2.26}$$

A expressão que define $b_i$ permite concluir que $\dfrac{\partial b_i}{\partial x_i} = O(\epsilon)$, para $i = 1, \ldots, n-1$. Por outro lado, como $\mathrm{grad}\, u = T^t \tilde{u}$, então

$$\begin{aligned}
\partial_n u &= \sum_{l=1}^{n} T_{ln} \tilde{u}_l \\
&= T_{nn}\tilde{u}_n + \sum_{l=1}^{n-1} (\sum_{j=1}^{n} T_{ln} T_{lj} \partial_j u) \\
&= T_{nn}\tilde{u}_n + \sum_{j,l=1}^{n-1} T_{ln} T_{lj} \partial_j u + \sum_{l=1}^{n-1} T_{ln}^2 \partial_n u.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Somando e subtraindo $T_{nn}^2 \partial_n u$ ao último termo e usando o fato que $T$ é ortogonal, segue que

$$\partial_n u = \frac{1}{T_{nn}^2}(T_{nn}\tilde{u}_n + \sum_{j,l=1}^{n-1} T_{ln}T_{lj}\partial_j u). \tag{2.28}$$

Portanto

$$-\int b_n u \partial_n u dx = -\int b_n u \frac{1}{T_{nn}^2}(T_{nn}\tilde{u}_n + \sum_{j,l=1}^{n-1} T_{ln}T_{lj}\partial_j u)dx. \tag{2.29}$$

Podemos majorar o segundo termo do segundo membro desta última igualdade usando integração por partes

$$\begin{aligned}
\Big|\int \sum_{j,l=1}^{n-1} T_{ln}T_{lj}\partial_j u dx\Big| &= \Big| -\frac{1}{2}\int b_n u \frac{1}{T_{nn}^2}\sum_{j,l=1}^{n-1} T_{ln}T_{lj}\partial_j u dx\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n-1}\int \partial_j(\frac{b_n T_{ln}T_{lj}}{T_{nn}^2})u^2 dx\Big| \\
&\leq C\epsilon \int u^2 dx
\end{aligned} \tag{2.30}$$

devido ao Lemma 2.2 e $T_{nn} = 1 + O(\epsilon)$.

Passamos agora ao primeiro termo do segundo membro de (2.29). Para isto basta usar a estimativa $ab \leq \alpha a^2 + \frac{1}{4\alpha}b^2$ com $\alpha = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i$, obtendo

$$-\int \frac{b_n u \tilde{u}_n}{T_{nn}}dx \leq \frac{1}{2}\int (\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i)|\tilde{u}_n|^2 dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i)}\frac{b_n^2}{T_{nn}^2}u^2 dx. \tag{2.31}$$

Usando o fato que $b$ é limitada (portanto $b = O(\frac{1}{\epsilon})$) e que $T_{nn} = 1 + O(\epsilon)$, tem-se

$$-\int \frac{b_n u \tilde{u}_n}{T_{nn}}dx \leq \frac{1}{2}\int (\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i)|\tilde{u}_n|^2 dx + C\int u^2 dx. \tag{2.32}$$

Resta estimar somente o último termo de (2.24). Para isto usamos (2.23)

$$\begin{aligned}
-\int (c + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\partial_i\partial_j\Phi^{ij})u^2 dx &= \int [2\lambda(\prod_{i=1}^{n-1}\sigma_i + \theta)(1 - 2\lambda x_n^2) + O(\epsilon) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\partial_i\partial_j\Phi^{ij}]u^2 dx \\
&\geq \int [2\lambda(\prod_{i=1}^{n-1}\sigma_i + \theta) - C(1 + \lambda^2 x_n^2) + O(\epsilon)]u^2 dx
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Coletando (2.25), (2.32) e (2.33) e levando-as em (2.24), chegamos à seguinte desigualdade

$$-<L_\nu u, u>\geq \int [\nu |\text{grad} u|^2 + \frac{1}{2}(\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i)|\tilde{u}_n|^2 + \{(\prod_{i=1}^{n-1}\sigma_i + \theta)\lambda - C(1+\lambda^2 x_n^2) + O(\epsilon)\}]u^2 dx. \tag{2.34}$$

Nesta estimativa vamos tomar $\lambda$ grande. Ocorre que o termo que contem $\lambda^2$ prepondera sobre os demais, não permitindo obter a coercividade; entretanto, lembrando que $\lambda x_0 \leq 1$ e que $|x_n| < x_0$, podemos escrever

$$-<L_\nu u, u>\geq \nu \int |\text{grad}\, u|^2 dx + C\int |u|^2 dx \tag{2.35}$$

desde que $\lambda$ seja suficientemente grande. O teorema de Lax-Milgram garante que o problema (2.18) tem uma única solução em $H_0^1$. Mas como $L_\nu$ é elítico, resultados standard de hipoeliticidade mostram que esta solução está em $C^\infty(\bar{\Omega})$. O Lema (2.5) encontra-se assim demonstrado.

Estamos aptos agora a demonstrar o Lema 2.4.

**Demonstração do Lema 2.4:** Suponhamos que $u_\nu$ seja a solução do problema regularizado (2.18) e que satisfaça a seguinte estimativa:

$$\|u_\nu\|_s \leq C(s)(\|g\|_s + \|\underline{w}\|_{s+4}\|u_\nu\|_{L^\infty}) \tag{2.36}$$

onde $C(s)$ é uma constante que depende de $s$ mas independe de $\nu$, $0<\nu\leq 1$.

Para provar o lema, notemos que fazendo $\nu \to 0$ e passando a uma subseqüência se necessário, obteremos uma solução de (2.15) satisfazendo a estimativa (2.16). Observemos que tomando $s=0$ em (2.36) temos garantida a unicidade de soluções do problema linearizado. Afim de simplificar a notação voltamos a chamar $u_\nu$ de $u$.

Para mostrar que a solução $u$ do problema perturbado satisfaz a desigualdade desejada, usaremos indução sobre $s$. Segue de (2.34) com $\lambda$ grande que

$$\int |\tilde{u}_n|^2 dx + \|u\|_{L^2}^2 \leq C_0 \|g\|_0^2 \tag{2.37}$$

(utilizamos a desigualdade de Hölder e a estimativa $ab \leq \alpha a^2 + \frac{1}{4\alpha}b^2$. Portanto $\|u\|_0 \leq C\|g\|_0$ e (2.36) vale com $s=0$).

Vamos provar que se no estágio $s-1$ vale

$$\sum_{|\alpha|\leq s-1,\, \alpha_n=0} \int |(\widetilde{\partial^\alpha u})_n|^2 dx + \|u\|_{s-1}^2 \leq C(s-1)(\|g\|_{s-1} + \|\underline{w}\|_{s+3}\|u\|_{L^\infty})^2, \quad 0 < \epsilon \leq \epsilon_0, \tag{2.38}$$

para $0 \leq s-1 \leq s_0$ então o mesmo vale no estágio $s$, possivelmente com um outro valor de $\epsilon_0$. Isto implica imediatamente a validade de (2.36) para todo $s \leq s_0$. Analisemos primeiramente o caso de $\alpha$ ser um multi-índice tal que $|\alpha| = s$ e $\alpha_n = 0$. Devido novamente à (2.34) (com $\lambda$ grande ), podemos escrever

$$-< L_\nu \partial^\alpha u, \partial^\alpha u >\geq \int [(\partial^\alpha u)^2 + \frac{1}{2}(\prod_{i=1}^{n-1})\lambda_i(\widetilde{\partial^\alpha u})_n^2]dx. \tag{2.39}$$

Mas,

$$\begin{aligned} -< L_\nu \partial^\alpha u, \partial^\alpha u > &= -< \partial^\alpha L_\nu u, \partial^\alpha u > - < [L_\nu, \partial^\alpha]u, \partial^\alpha u > \\ &= -< \partial^\alpha g, \partial^\alpha u > - < [L_\nu, \partial^\alpha]u, \partial^\alpha u > \end{aligned} \tag{2.40}$$

onde $[X,Y] = XY - YX$. Vamos estimar primeiramente o termo $< [L_\nu, \partial^\alpha]u, \partial^\alpha u >$. O operador $[L_\nu, \partial^\alpha]$ pode ser escrito na seguinte forma:

$$[L_\nu, \partial^\alpha] = -\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\beta\leq\alpha,\, |\beta|\geq 1} C(\alpha,\beta)[\partial^\beta(\Phi^{ij})\partial_i\partial_j + \partial^\beta b_i + \partial^\beta c]\partial^{\alpha-\beta}. \tag{2.41}$$

O segundo membro desta igualdade é formado por três termos. Precisamos estimá-los um a um. O primeiro destes termos, levado em $-< [L_\nu, \partial^\alpha]u, \partial^\alpha u >$, fornece:

i) Para $|\beta| = 1$,

$$-< \partial^\alpha u, \partial^\beta(\Phi^{ij})\partial_i\partial_j\partial^{\alpha-\beta}u >= \int \partial^\alpha u(\partial_i\partial^\beta\Phi^{ij})\partial_j\partial^{\alpha-\beta}u dx + \int \partial_i\partial^\alpha u(\partial^\beta\Phi^{ij})\partial_j\partial^{\alpha-\beta}u dx \tag{2.42}$$

e assim

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} < \partial^\alpha u, \partial^\beta(\Phi^{ij})\partial_i\partial_j\partial^{\alpha-\beta}u > &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} < \partial_i\partial^{\alpha-\beta}u, \partial^\beta\partial^\beta(\Phi^{ij})\partial_j\partial^{\alpha-\beta}u > + \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{n}\int \partial^\alpha u(\partial_i\partial^\beta\Phi^{ij})\partial_j\partial^{\alpha-\beta}u dx \\ &\leq C\epsilon\|u\|_s^2 \end{aligned} \tag{2.43}$$

devido à desigualdade de Hölder.

ii) Se $2 \leq |\beta| \leq [\frac{n}{2}] + 1$, temos

$$< \partial^\alpha u, \partial^\beta(\Phi^{ij})\partial_i\partial_j\partial^{\alpha-\beta} > \leq C\epsilon\|u\|_s^2 \tag{2.44}$$

pois por hipótese $\|w\|_{C^{[\frac{n}{2}]+3}} \leq 1$ e $|\alpha| - |\beta| + 2 \leq s$, já que $|\alpha| = s$.

iii) Se $\beta > [\frac{n}{2}] + 1$,

$$\begin{aligned} | < \partial^\alpha u, \partial^\beta(\Phi^{ij})\partial_i\partial_j\partial^{\alpha-\beta}u > | &\leq \|\partial^\alpha u\|_{L^2}\|\partial^\beta(\Phi^{ij})\partial_i\partial_j\partial^{\alpha-\beta}u\|_{L^2} \\ &\leq C\|\partial^\alpha u\|_{L^2}(\epsilon\|w\|_{C^4}\|u\|_s + \|u\|_{L^\infty}\|w\|_{s+4}) \end{aligned} \tag{2.45}$$

devido à seguinte desigualdade de interpolação:

$$\|\partial^p a \partial^q b\|_{L^2} \leq C(\|a\|_{L^\infty}\|b\|_{|p+q|} + \|b\|_{L^\infty}\|a\|_{|p+q|}), \qquad a, b \in H^{|p+q|}, \tag{2.46}$$

que é uma conseqüência da propriedade de convexidade das normas de Sobolev (tomamos em (2.45) $p = |\beta|$ e $|q| = |\alpha| - |\beta|$ observando o fato que $\Phi^{ij}$ envolve derivadas segundas de $w$).

Os termos de ordem mais baixa de (2.41) podem ser estimados de modo inteiramente análogo ao que fizemos acima para estimar os termos de ordem mais alta. Retornando à (2.40), temos

$$\begin{aligned} | < L_\nu\partial^\alpha u, \partial^\alpha u > | &\leq | < \partial^\alpha g, \partial^\alpha u > + | < [L_\nu, \partial^\alpha]u, \partial^\alpha u > | \\ &\leq C\{\epsilon\|u\|_s^2 + \|\partial^\alpha u\|_{L^2}(\|\partial^\alpha g\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}\|\underline{w}\|_{s+4})\} \end{aligned} \tag{2.47}$$

devido à hipótese $\|w\|_{C^{[\frac{n}{2}]+3}} \leq 1$ e às estimativas obtidas em i), ii) e iii). Observe que na estimativa que queremos provar ( i.e, em (2.38) com $s$ no lugar de $s-1$) comparece $\|u\|_s^2$ e as derivadas estimadas até aqui são do tipo $\partial^\alpha u$ com $|\alpha| = s$ e $\alpha_n = 0$. Precisamos então majorar $\partial_n^k\partial^\gamma u$, $k = 1, \ldots, s$, $|\gamma| = s - k$, $\gamma_n = 0$.

Segue de (2.27) que

$$\partial_n(\partial^\gamma u) = \frac{1}{T_{nn}^2}[T_{nn}(\widetilde{\partial^\gamma u})_n + \sum_{l,j=1}^{n-1} T_{ln}T_{lj}\partial_j\partial^\gamma u].$$

Portanto

$$\|\partial_n\partial^\gamma u\|_{L^2} \leq C(\|(\widetilde{\partial^\gamma u})_n\|_{L^2} + \epsilon\|u\|_s). \tag{2.48}$$

Utilizando agora a hipótese de indução (2.38), chegamos à

$$\|\partial_n \partial^\gamma u\|_{L^2}^2 \le C(\|g\|_{s-1} + \|\underline{w}\|_{s+3}\|u\|_{L^\infty} + \epsilon\|u\|_s)^2 \tag{2.49}$$

Agora, isolando $\partial_n^2 u$ na equação (2.18), observamos que $\partial_n^2 u$ se escreve como uma combinação linear de $\partial^\alpha u$ com $|\alpha| = 2$, $\alpha_n = 0$ ou 1, cujos coeficientes dependem de $\Phi^{ij}$ e portanto das primeiras e segundas derivadas de $w$. Isto permite obter como acima

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{s} \|\partial_n^k \partial^\gamma u\|_{L^2}^2 &= \sum_{k=2}^{s} \|\partial_n^{k-2} \partial^\gamma \partial_n^2 u\|_{L^2}^2 \\ &\le C(\epsilon\|u\|_s + \|g\|_s + \|\underline{w}\|_{s+4}\|u\|_{L^\infty})^2. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Juntando agora as estimativas (2.39), (2.43), (2.44), (2.46), (2.49) e (2.50), obtemos

$$\sum_{|\alpha| \le s,\, \alpha_n = 0} \int |(\widetilde{\partial^\alpha u})_n|^2 dx + \|u\|_s^2 \le C(s)(\|g\|_s + \|\underline{w}\|_{s+4}\|u\|_{L^\infty})^2. \tag{2.51}$$

Desta desigualdade segue imediatamente que

$$\|u\|_s \le C(s)(\|g\|_s + \|\underline{w}\|_{s+4}\|u\|_{L^\infty})$$

com $C(s)$ independente de $\nu$, $0 < \nu \le 1$, desde que $0 \le s \le s_0$ e $\le \epsilon \le \epsilon(s_0)$. O lema 2.4 fica então demonstrado fazendo $\nu \to 0$.

Antes de passarmos efetivamente à demonstração do Teorema 2.1, onde utilizaremos o esquema de Nash-Moser, vamos preparar as ferramentas adequadas para a resolução do problema em questão.

A escala mansa que utilizaremos será a escala de Sobolev das funções definidas em $\bar{\Omega}$ que são periódicas nas $n-1$ primeiras variáveis $x' = (x_1, \ldots, x_n)$, normados por (2.13). Os operadores de regularização, aqui denotados por $S_\theta$, serão definidos por truncamento da série

$$\sum_l T_\theta(\alpha_l(x_n)) e^{i<l,x'>}$$

como foi feito no Capítulo I, onde $T_\theta$ é um operador de regularização em uma variável (vide Proposição II.1.1).

Consideremos constantes a determinar $\kappa$, $1 < \kappa < 2$, e $N_0 > 1$ e definamos

$$N_{\nu+1} = N_0^{\kappa^\nu}, \qquad \nu = 0, 1, \dots$$

Sejam $S_\nu = S_{N_\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$. As propriedades que necessitaremos dos operadores de regularização serão somente os seguintes

$$\|S_\nu u\|_{s_1} \le C\|u\|_{s_2}, \qquad s_1 \le s_2 \tag{2.52}$$

$$\|S_\nu u\|_{s_1} \le C N_\nu^{s_1 - s_2}\|u\|_{s_2}, \qquad s_1 \ge s_2 \tag{2.53}$$

$$\|S_\nu u - u\|_{s_1} \le C N_\nu^{s_1 - s_2}\|u\|_{s_2}, \qquad s_1 \le s_2 \tag{2.54}$$

De acordo com o método de Nash-Moser, definamos

$$w_0 = 0, \qquad w_{\nu+1} = w_\nu + S_\nu u_\nu \tag{2.55}$$

onde

$$L(w_\nu)u_\nu = L_G(w_\nu)u_\nu + \theta_\nu \Delta u_\nu = g_\nu \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2.56}$$

$$u_\nu = 0 \quad \text{nos pontos onde} \quad x = x_0 \quad \text{ou} \quad x = -x_0 \tag{2.57}$$

e $u_\nu$ é $2\pi$ periódica nas variáveis $x'$.

$$g_\nu = -G(w_\nu), \qquad \theta_\nu = \sup_{\bar{\Omega}} |G(w_\nu)| \tag{2.58}$$

Para tornar este processo indutivo convergente, vamos precisar de mais um lema.

**Lema 2.6.** *Suponha que $\|w_k\|_{C^{[\frac{n}{2}]+3}} \le 1$, para $k = 0, 1, \dots, \nu$. Então, valem as seguintes estimativas para todo $k = 1, \dots, \nu$:*

$$\|g_k\|_s \le C(s)(\|g_0\|_s + \|w_k\|_{s+2}) \tag{2.59}$$

$$\|w_{k+1}\|_{s+4} \le [C(s)]^{k+1} N_{k+1}^{\beta} \|g_0\|_s \quad \textit{para algum} \quad \beta > \frac{4}{\kappa - 1} \tag{2.60}$$

$$\|g_{k+1}\|_{L^2} \le N_{k+1}^{-t}\|g_0\|_{s^*} \quad \textit{para algumas constantes positivas } t \quad \text{e} \quad s^*. \tag{2.61}$$

**Demonstração:** Como $\|g_k\|_s \le \|g_0\|_s + \|G(w_k) - G(w_0)\|_s$, fatorando $w_k - w_0 = w_k$ no segundo membro (é possível usando a fórmula de Taylor de $G$) e utilizando a fórmula de interpolação (2.46), concluimos que (2.59) é verdadeira.

Passamos então à prova de (2.60).

$$\|w_{k+1}\|_{s+4} = \|w_k + S_k u_k\|_{s+4} \le \|w_k\|_{s+4} + CN_k^4\|u_k\|_s. \tag{2.62}$$

Dividimos agora a demonstração em dois casos:

i) $s \le [\frac{n}{2}] + 1$.

Neste caso $\underline{w} = 0$ e (2.16) juntamente com (2.59) fornecem

$$\|u_k\|_s \le C\|g_k\|_s \le C(\|g_0\|_s + \|w_k\|_{s+2}). \tag{2.63}$$

Portanto

$$\|w_{k+1}\|_{s+4} \le C(s)N_k^4(\|w_k\|_{s+4} + \|g_0\|_s). \tag{2.64}$$

ii) $s > [\frac{n}{2}] + 1$

Obtemos de (2.16)

$$\|u_k\|_s \le C(\|g_k\|_s + \|w_k\|_{s+4}\|u_k\|_{L^\infty}). \tag{2.65}$$

Como $\|u_k\|_{L^\infty} \le C\|u_k\|_{[\frac{n}{2}]+1)}$, então

$$\|u_k\|_s \le C(\|g_k\|_s + \|w_k\|_{s+4}\|u_k\|_{[\frac{n}{2}]+1}). \tag{2.66}$$

Usando novamente (2.16) com $s = [\frac{n}{2}] + 1$ teremos $\|u_k\|_{[\frac{n}{2}]+1} \le C\|g_k\|_{[\frac{n}{2}]+1}$. Segue de (2.59) e da hipótese $\|w_k\|_{C^{[\frac{n}{2}]+3}} \le 1$ que (2.64) é válida também neste caso.

Iterando sucessivas vezes, obtemos

$$\begin{aligned}\|w_{k+1}\|_{s+4} &\le [C(s)]^k(k+1)N_0^4 \dots N_k^4\|g_0\|_s \\ &\le [C(s)]^k(k+1)N_0^{4\frac{\kappa^{k+1}-1}{\kappa-1}}\|g_0\|_s\end{aligned} \tag{2.67}$$

pois $w_0 = 0$. Desta desigualdade segue imediatamente (2.60), já que $\beta > \frac{4}{\kappa-1}$.

Provemos finalmente a estimativa mais delicada (2.61).

Como $L_G$ é o linearizado de $G$, devido à (2.56) e (2.58), tem-se

$$g_{k+1} = -G(w_{k+1}) = -G(w_k) - L_G(w_k)S_k u_k - R_k \tag{2.68}$$

onde $R_k$ é o erro de ordem 2. Fazendo a mudança $u^\# = ue^{\lambda x_n^2}$ e voltando a chamar $u^\#$ de $u$, obtemos

$$-g_{k+1} = G(w_k) + L(w_k)u_k + L(w_k)(S_k - I)u_k + \theta_k \Delta S_k u_k + R_k. \tag{2.69}$$

Como $L(w_k)u_k = g_k = -G(w_k)$, temos

$$\|g_{k+1}\|_0 \leq \|L(w_k)(S_k - I)u_k\|_0 + \theta_k \|\Delta S_k u_k\|_0 + \|R_k\|_0. \tag{2.70}$$

Agora,

$$\|L(w_k)(S_k - I)u_k\|_0 \leq C(s^*) N_k^{-(s^*-2)} \|u_k\|_{s^*} \tag{2.71}$$

devido à (2.54). O valor de $s^*$ será escolhido mais adiante.

Temos também

$$\|\Delta S_k u_k\|_0 \leq C N_k^2 \|u_k\|_0. \tag{2.72}$$

O resto $R_k$ envolve derivadas segundas de produtos de $w_k$ com $S_k u_k$ e como por hipótese $\|w_k\|_{C^{[\frac{n}{2}]+1}} \leq 1$, usando novamente a fórmula de interpolação (2.46), obtemos

$$\|R_k\|_0 \leq C \|S_k u_k\|_{L^\infty} \|S_k u_k\|_4. \tag{2.73}$$

Estas três últimas estimativas jutamente com (2.16) tomando $s = s^*$ produzem

$$\|g_{k+1}\|_0 \leq C(s^*)\{N_k^{-(s^*-2)}(\|g_k\|_{s^*} + \|w_k\|_{s^*+4}) + \theta_k N_k^2 \|g_k\|_0 + N_k^{[\frac{n}{2}]+5} \|g_k\|_0^2\} \tag{2.74}$$

(para obter esta estimativa usamos (2.16) com $s = 0$ e duas vezes (2.53)).

Combinando agora as estimativas já demonstradas (2.59) e (2.60),

$$\|g_k\|_{s^*} + \|w_k\|_{s^*+4} \leq C(\|g_0\|_{s^*} + \|w_k\|_{s*+4}) \leq \tilde{C}[C(s^*)]^k N_k^{\beta} \|g_0\|_{s^*}. \tag{2.75}$$

Portanto

$$\|g_{k+1}\|_0 \leq \tilde{C}(s^*)\{N_k^{-(s^*-2-\beta)}[C(s^*)]^k \|g_0\|_{s^*} + \theta_k N_k^2 \|g_k\|_0 + N_k^{[\frac{n}{2}]+5} \|g_k\|_0^2\} \tag{2.76}$$

Por outro lado, $\theta_{k+1} = \|G(w_k)\|_{L^\infty} = \|g_{k+1}\|_{L^\infty} \leq C \|g_{k+1}\|_{[\frac{n}{2}]+1}$. Portanto

$$\theta_{k+1} \leq \|L(w_k)(S_k - I)u_k\|_{[\frac{n}{2}]+1} + \theta_k \|\Delta S_k u_k\|_{[\frac{n}{2}]+1} + \|R_k\|_{[\frac{n}{2}]+1}. \tag{2.77}$$

Agora, procedendo do mesmo modo que foi feito de (2.70) até (2.74), obteremos

$$\theta_{k+1} \leq \tilde{C}(s^*)\{N_k^{-(s^*-[\frac{n}{2}]-3-\beta)}[C(s^*)]^k \|g_0\|_{s^*} + \theta_k N_k^{[\frac{n}{2}]+3} \|g_k\|_0 + N_k^{8+2[\frac{n}{2}]} \|g_k\|_0^2\}. \tag{2.78}$$

Escolhemos $s^*$ e $t$ de modo que

$$(2-\kappa)t - 8 - 2[\frac{n}{2}] > 0 \tag{2.79}$$

e

$$s^* - 3 - [\frac{n}{2}] - \beta - t\kappa > 0. \tag{2.80}$$

Colocamos agora $d_{k+1} = \max\{N_{k+1}^t \|g_{k+1}\|_0, N_{k+1}^t \theta_{k+1}\}$. Usando $N_{k+1} = N_k^\kappa$ em (2.76), teremos

$$N_{k+1}^t \|g_{k+1}\|_0 \leq C(N_k^{\kappa t-(s^*-2-\beta)}[C(s^*)]^k \|g_0\|_{s^*} + N_k^{\kappa t+2}\theta_k \|g_k\|_0 + N_k^{\kappa t+[\frac{n}{2}]+5}\|g_k\|_0^2). \tag{2.81}$$

As escolhas que fizemos de $\kappa$ e $t$ permitem concluir que

$$N_{k+1}^t \|g_{k+1}\|_0 \leq C(s^*)^{k+1} N_k^{-1-[\frac{n}{2}]} \|g_0\|_{s^*} + \frac{1}{2} N_k^{2t}\theta_k \|g_k\|_0 + \frac{1}{2} N_k^{2t}\|g_k\|_0^2. \tag{2.82}$$

De fato, segue de (2.79) e (2.80) que $\kappa t + 2 < 2t - 1$ e $\kappa t + [\frac{n}{2}] + 5 < 2t - 1$. Assim, se $N_0$ for escolhido suficientemente grande,

$$N_{k+1}^t \|g_{k+1}\|_0 \leq \frac{1}{4}\|g_0\|_{s^*} + d_k^2. \tag{2.83}$$

Analogamente, usando novamente (2.79) e (2.80) agora em (2.78), teremos

$$N_{k+1}^t \theta_{k+1} \leq \frac{1}{4}\|g_0\|_{s^*} + d_k^2. \tag{2.84}$$

Deste modo

$$d_{k+1} \leq \frac{1}{4}\|g_0\|_{s^*} + d_k^2. \tag{2.85}$$

Como $g_0 = -G(w_0) = -\frac{1}{\epsilon} f(y, u_0, \operatorname{grad} u_0)$, $(y = \epsilon^2 x, \quad u_0 = \frac{1}{2}\sum \sigma_i y_i^2)$, como f é suave e como $f(0,0,0) = 0$, podemos assumir que

$$\|g_0\|_{s^*} \leq 1, \qquad N_0^{2t}\theta_0 \leq \frac{1}{10} \quad \text{e} \quad N_0^{2t}\|g\|_0 \leq \frac{1}{10} \tag{2.86}$$

se $N_0$ for suficientemente grande.

Segue de (2.82) que $N_2^t \|g_2\|_0 \leq \frac{1}{2}\|g_0\|_{s^*}$ e podemos derivar de modo análogo de (2.84) que $N_2^t \theta_2 \leq \frac{1}{2}\|g_0\|_{s^*}$ Portanto $d_1 \leq \|g_0\|_{s^*}$. Usando (2.85), segue por indução que

$$d_{k+1} \leq \frac{1}{2}\|g_0\|_{s^*}. \tag{2.87}$$

Logo $N_{k+1}^t \|g_{k+1}\|_0 \leq \|g_0\|_{s^*}$ e o lema está provado.

Finalmente chegamos à

**Demonstração do Teorema 2.1**: Vamos provar por indução sobre $k$ que existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|w_k\|_{2[\frac{n}{2}]+4} \leq L. \tag{2.88}$$

Se $k = 0$ então $w_0 = 0$ e nada temos a provar. Assumamos que o resultado seja verdadeiro para $k = 1, \ldots, \mu$. Iterando (2.55) e utilizando (2.52) tem-se

$$\|w_{\mu+1}\|_s = \|w_\mu + S_\mu u_\mu\|_s \leq \sum_{k=0}^{\mu} \|S_k u_k\|_s \leq C \sum_{k=0}^{\mu} \|u_k\|_s. \tag{2.89}$$

Usando a PC obtemos $\|w_{\mu+1}\|_s \leq C \sum_{k=0}^{\mu} \|u_k\|_{s^*}^{s/s^*} \|u_k\|_0^{1-s/s^*}$.

Devido à (2.16) com $s = s^*$, $\|u_k\|_{s^*} \leq C(\|g_0\|_{s^*} + \|w_k\|_{s^*+4})$ (ver i) e ii) na demonstração do Lema 2.6). Usando (2.60), tem-se

$$\|u_k\|_{s^*} \leq C(\|g_0\|_{s^*} + [C(s^*)]^{k+1} N_k^\beta \|g_0\|_{s^*}) \leq C_\#^k N_k^\beta \|g_0\|_{s^*} \tag{2.90}$$

Por outro lado, como $\|u_k\|_0 \leq C\|g_k\|_0$, o uso de (2.61) nos leva à $\|u_k\|_0 \leq CN_k^{-t}\|g_0\|_{s^*}$. Retornando à (2.89)

$$\|w_{\nu+1}\|_s \leq C \sum_{k=0}^{\mu} [C_\#]^{ks/s^*} N_k^{\beta s/s^* - t(1-s/s^*)} \|g_0\|_{s^*} \tag{2.91}$$

Escolhamos finalmente as constantes $\kappa$, $\beta$ e $t$. Tomamos

$$\kappa = \frac{4}{3}, \quad \beta = 12 + \delta \tag{2.92}$$

$\delta$ pequeno e

$$t = 12 + 3[\frac{n}{2}] + \delta \tag{2.93}$$

Assim (2.79) está satisfeita. Precisamos escolher $s^*$ para que (2.80) também esteja satisfeita.

Para que $s^* > 3 + [\frac{n}{2}] + \beta + t\kappa$, basta tomar $s^* > 31 + 5[\frac{n}{2}]$. Com estas escolhas, fazendo $s^*$ e $N_0$ grandes, a série (2.91) torna-se convergente e além disso

$$\|w_{\mu+1}\|_s \leq C(s^*)\|g_0\|_{s^*} \tag{2.94}$$

Tomemos finalmente $\epsilon = \epsilon(s^*)$ tão pequeno de modo que $C(s^*)\|g_0\|_{s^*} \leq L$ (é possível pois $\|g_0\|_{s^*}$ é limitado). Isto prova a desigualdade (2.88) para $k = 0, 1, \ldots, \mu + 1$.

Se $s \geq [\frac{n}{2}] + 3$, passando a uma subseqüência se necessário, podemos supor que $w_k$ converge em $H^s(\Omega)$ para uma função $w$. Segue de (2.61) que

$$\|G(w_{k+1})\|_0 \leq N_{k+1}^{-t}\|g_0\|_{s^*} \to 0 \tag{2.95}$$

quando $k \to \infty$. Portanto $G(w) = 0$. Retornando às variáveis originais obtemos uma solução da equação de Monge-Ampère (2.1).

É possível obter também uma solução de classe $C^\infty$ da equação (2.1), mas para isto precisamos fazer uso da teoria dos operadores paradiferenciais de [Bo]. Este fato não pode ser provado com as técnicas desenvolvidas até aqui pois o domínio de existência da solução decresce a medida que $s$ cresce. Esta é uma séria limitação dos esquemas de Nash-Moser. Para ver como este fato pode ser contornado, indicamos a consulta de [H-Z].

As equações de Monge-Ampère estão intimamente ligadas ao estudo da curvatura de variedades Riemannianas. Vimos na seção 1 deste capítulo o resultado de Nash que garante que toda variedade Riemanniana pode ser mergulhada isométricamente em algum espaço Euclidiano. Este resultado deu impulso a toda uma linha de pesquisa em Geometria Diferencial. Quando pré-fixamos a dimensão do espaço Euclidiano, o problema da existência de mergulhos isométricos é não trivial, mesmo localmente. Por exemplo, consideremos uma variedade Riemanniana $M$ de dimensão 2 munida de uma métrica

$$g = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{2.96}$$

É natural perguntar se existe uma isometria local de $M$ em $\mathbb{R}^3$ (isometrias globais não existem se a variedade for completa com curvatura constante negativa (Teorema de Hilbert)). Isto é equivalente ao problema de encontrar funções $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$ de modo que

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.97}$$

(mais rigorosamente, se existe um mergulho local de $M$ em $\mathbb{R}^3$ tal que o pull-back da métrica usual de $\mathbb{R}^3$ coincida localmente com a métrica da variedade mergulhada).

Pode-se mostrar que se a curvatura de $M$ for estritamente positiva (ou estritamente negativa), sempre existe um mergulho isométrico local de $M$ em $\mathbb{R}^3$ [J2]. Neste caso, o problema resume-se ao estudo da existência de soluções de um sistema elítico de equações diferenciais parciais. Esta técnica não funciona entretanto se a curvatura se anular. Existe um exemplo de Pogorelov onde a métrica tem regularidade baixa e a variedade não pode ser mergulhada ([Pog]). Se a curvatura for maior ou igual a zero e exigirmos uma certa regularidade na métrica, Lin ([L1]) mostrou que é possível obter um mergulho isométrico de $M$ em $\mathbb{R}^3$; mais precisamente vale o seguinte teorema:

**Teorema [L1].** *Se a curvatura gaussiana associada a uma métrica de classe $C^k$, $k \geq 10$, em uma variedade Riemanniana $M$ é não negativa, existe um mergulho de classe $C^{k-6}$ de $M$ em $\mathbb{R}^3$.*

A idéia principal para a demonstração deste teorema é a seguinte: procuramos uma função $z$ de modo que

$$\tilde{g} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 - dz^2 \tag{2.98}$$

seja uma métrica tal que a cuvatura $\tilde{K}$ de $M$ associada à $\tilde{g}$ seja zero (quando isto acontece dizemos que a métrica é flat). Isto impõe que $z$ satisfaça a seguinte equação de Monge-Ampère:

$$\begin{aligned}(z_{uu} - \Gamma^1_{11}z_u - \Gamma^2_{11}z_v)(z_{vv} - \Gamma^1_{22}z_u - \Gamma^2_{22}z_v) - (z_{uv} - \Gamma^1_{12}z_u - \Gamma^2_{12}z_v)^2 = \\ = K(EG - F^2 - Ez_v^2 - Gz_u^2 + 2Fz_uz_v)\end{aligned} \tag{2.99}$$

onde $K$ é a curvatura de $M$ segundo a métrica $g$ e $\Gamma^k_{ij}$ são símbolos de Christoffel de $M$ também associados à $g$. As técnicas desenvolvidas nesta seção foram baseadas neste trabalho de Lin que obteve a existência de soluções de (2.98). Se $z$ é uma tal solução, como $\tilde{g}$ é flat, $M$ é localmente isométrica ao plano (ver [Ca2], pg. 288), portanto

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 - dz^2 = dx^2 + dy^2 \tag{2.100}$$

assim (2.96) fica solucionado. Em outro trabalho mais recente, Lin mostrou que a existência de mergulhos isométricos ainda ocorre, mesmo se a curvatura mude de sinal, mas de uma maneira especial (ver [L2]).

### 3. Integrabilidade Local de Estruturas de Mizohata

Nesta seção mostraremos que o esquema de Nash-Moser também pode ser aplicado com sucesso para demonstrar a existência de soluções não triviais de sistemas *lineares não determinados* de equações a derivadas parciais.

A resolubilidade local de sistemas de campos vetoriais tem sido estudada com alguma generalidade assumindo que a estrutura gerada pelos campos vetoriais é localmente integrável e tem codimensão 1. Nesta seção vamos provar que uma estrutura formalmente integrável (i.e. involutiva ) de codimensão 1 e dimensão $n > 2$ é localmente integrável se for fortemente pseudo-convexa, um resultado análogo ao de Kuranishi e Akahori ([K1], [K2],[A]) sobre estruturas CR. Estas estruturas são chamadas estruturas de Mizohata e são localmente geradas, num conveniente sistema de coordenadas $(t_1, t_2, \ldots, t_n, x)$ por $n$ campos vetoriais:

$$M_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - it_j\frac{\partial}{\partial x} + \rho_j\frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, \ldots n$$

onde $i^2 = -1$ e $\rho_j$ é flat em $t = 0$ ($\rho_j$ anula- se juntamente com todas as suas derivadas em $t = 0$) , ou seja, são perturbações flat dos campos de Mizohata. O problema de integrabilidade local é equivalente ao problema de achar novas coordenadas onde a estrutura é gerada pelos campos vetoriais acima com $\rho_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Para $n = 1$, [Ni2] mostrou que é possível escolher $\rho_1$ tal que a correspondente estutura não é localmente integrável. Mostraremos que ocorre integrabilidade local quando $n > 2$. O caso $n = 2$ continua em aberto.

Para provar tal fato, vamos seguir em linhas gerais o método de Kuranishi que consiste em aproximar uma dada estrutura por uma seqüência de estruturas localmente integráveis. Esta seqüência será construida usando o esquema de Nash-Moser aliado com a existência de fórmulas de homotopia ao nível de 1-formas para cada uma das estruturas aproximantes.

Na demonstração que faremos, ao invés de trabalharmos diretamente com a estrutura $\mathcal{M}$ gerada pelos campos $M_j$ descritos acima, primeiro introduziremos coordenadas polares na variável $t$. Esta mudança de variáveis torna-se singular precisamente nos pontos característicos de $\mathcal{M}$. Isto faz desaparecer os pontos não elíticos de $\mathcal{M}$ e ficamos com uma estrutura elítica $\mathcal{L}$ gerada pelos seguintes campos vetoriais:

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \sigma_1\frac{\partial}{\partial z}$$
$$L_j = \frac{\partial}{\partial \theta_{j-1}} + \sigma_j\frac{\partial}{\partial z}, \quad j = 2, \ldots n$$

onde $z = x + is = x + (|t|^2/2)$ e as $\sigma_j$'s são funções suaves de $s$ que se anulam para $s \leq 0$. A esta estrutura $\mathcal{L}$ aplicaremos a método de Kuranishi. Os operadores de homotopia para a estrutura que aproxima $\mathcal{L}$ têm expressões integrais explícitas e resultarão mansas com relação a uma escala de espaços de Hölder apropriadamente escolhida. Neste ponto, a prova desenvolve-se de maneira próxima à prova dos teoremas de Kuranishi e Newlander- Nirenberg dadas por Webster ([W1], [W2]). O preço que devemos pagar por considerar a estrutura elítica bem comportada $\mathcal{L}$ é que devemos provar a integrabilidade de $\mathcal{L}$ *globalmente* em $\theta \in S^{n-1}$. Feito isto, é fácil mostrar que a integrabilidade global de $\mathcal{L}$ implica a integrabilidade local de $\mathcal{M}$. O esquema de Nash-Moser deve ser ligeiramente modificado neste caso devido ao uso dos operadores de homotopia e devido ao fato que os domínios onde obtemos estimativas diminuem em cada passo da indução e precisamos cuidar para que estes domínios contenham todos um aberto fixo.

A respeito do caso de dimensão $n = 2$, [N-R] provaram recentemente a não existência de fórmulas de homotopia para estruturas CR do tipo hipersuperfície, explicando porque este caso não pode ser trabalhado como os casos de dimensão mais alta. Este argumento pode ser adaptado para mostrar que fórmulas de homotopia também não existem para estruturas de Mizohata localmente integráveis de dimensão 2 e por isto o método que desenvolveremos aqui também não funciona neste caso.

## 3.1 Estruturas Formalmente Integráveis

Seja $\Omega$ uma variedade paracompacta de classe $C^\infty$ e dimensão $N$ e consideremos um subfibrado $\mathcal{L}$ de

$$\mathbb{C}T\Omega = \mathbb{C} \otimes T\Omega$$

Dizemos que $\mathcal{L}$ é uma *estrutura formalmente integrável* se $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$, ou seja, se o colchete de Lie de duas seções locais de $\mathcal{L}$ ainda for uma seção local de $\mathcal{L}$.

Seja $\mathcal{L}^\perp \subset \mathbb{C}T^*\Omega = \mathbb{C} \otimes T^*\Omega$ o subfibrado ortogonal a $\mathcal{L}$ e sejam $n$ a dimensão (sobre $\mathbb{C}$ das fibras) de $\mathcal{L}$ e $m$ a dimensão de $\mathcal{L}^\perp$. Então $N = m + n$.

O *conjunto característico* de $\mathcal{L}$ é definido como sendo

$$C(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^\perp \cap T^*\Omega$$

isto é, $C(\mathcal{L})$ é a parte puramente real de $\mathcal{L}^\perp$. A projeção natural de $C(\mathcal{L}) \setminus \{0\}$ sobre a base $\Omega$ é o conjunto fechado dos *pontos não elíticos*.

Se $C(\mathcal{L}) = \{0\}$, a estrutura formalmente integrável $\mathcal{L}$ é chamada elítica. Se $\mathcal{L} \cap \bar{\mathcal{L}} = \{0\}$ a estrutura é chamada CR (Cauchy–Riemann).

Seja $(p, \xi) \in C(\mathcal{L}), \xi \neq 0$. Dados $u, v \in \mathcal{L}_p$, escolhemos seções locais de $\mathcal{L}$ definidas numa vizinhança de $p$ de modo que $L(p) = v$, $M(p) = w$ e definimos:

$$\Theta_{(p,\xi)}(v, w) = \frac{1}{2i}\xi([L, \bar{M}])(p)$$

Esta definição independe da escolha das seções locais $L$ e $M$.

A *forma de Levi* associada à estrutura formalmente integrável $\mathcal{L}$ no ponto característico $(p, \xi)$ é definida como sendo a forma quadrática:

$$v \longrightarrow \Theta_{(p,\xi)}(v, v), \ v \in \mathcal{L}_p$$

Como a forma bilinear $\Theta_{(p,\xi)}$ é hermitiana, ela possui somente autovalores reais e portanto a forma de Levi tem sempre uma representação diagonal real.

A uma estrutura formalmente integrável $\mathcal{L}$ sobre $\Omega$ podemos associar um complexo de operadores diferenciais da seguinte maneira: Seja $\mathcal{J}$ o ideal gerado pelas seções de $\mathcal{L}^\perp$ no anel $\Sigma_{k=0}^N \wedge^k (\Omega)$ de todas as formas suaves com coeficientes complexos. Então $\mathcal{L}$ satisfaz a condição de involução $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$ se e somente se $\mathcal{J}$ é fechado com relação à derivação exterior.

Sejam

$$\mathcal{L}^*(\Omega) = \frac{\mathbb{C}T^*\Omega}{\mathcal{L}^\perp}$$

$$\wedge^k \mathcal{L}^*(\Omega) = \frac{\wedge^k(\Omega)}{\mathcal{J} \cap \wedge^k(\Omega)}, \ k = 1, \ldots, N .$$

A derivada exterior induz naturalmente um complexo de operadores diferenciais:

$$C^\infty(\Omega) \xrightarrow{\delta_0} C^\infty(\Omega, \mathcal{L}^*(\Omega)) \xrightarrow{\delta_1} C^\infty(\Omega, \wedge^2 \mathcal{L}^*(\Omega)) \xrightarrow{\delta_2} \ldots$$

através da passagem ao quociente.

**Definição 3.1.1.** *Uma estrutura formalmente integrável $\mathcal{L}$ definida em $\Omega$ é chamada localmente integrável se, dado $p \in \Omega$, existir uma vizinhança $U$ de $p$ e funções de classe $C^\infty$ $z_k : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, m$ cujos diferenciais geram $\mathcal{L}^\perp$ sobre $U$.*

É claro que a condição de involução $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$ é necessária para a integrabilidade local de $\mathcal{L}$. Isto segue por exemplo da identidade $dw(X, Y) = Xw(Y) - Yw(X) - w([X, Y])$ que é válida para todas as 1–formas $w$ e todos os campos vetoriais $X$ e $Y$.

A pergunta natural que surge é se a condição de involutividade é também suficiente para a integrabilidade local. A resposta é negativa, como demonstra o exemplo de Nirenberg. No entanto, para algumas estruturas particulares esta questão é respondida afirmativamente. Este é essencialmente o conteúdo dos teoremas clássicos de Frobenius e de Newlander–Nirenberg. [T1] demonstrou também que este último teorema implica a integrabilidade local de estruturas elíticas. Portanto, basta estudar a integrabilidade local de estruturas formalmente integráveis em pontos não elíticos.

Outro resultado sobre integrabilidade local conhecido é o seguinte:

**Teorema de Kuranishi 3.1.2.** *Seja $\Omega$ uma variedade de dimensão $N = 2n+1 > 7$. Toda estrutura CR sobre $\Omega$ de dimensão $n$ que seja fortemente pseudoconvexa, isto é, cuja forma de Levi tenha somente autovalores positivos, é localmente integrável.*

Mais recentemente Akahori [A] utilizando as mesmas técnicas que Kuranishi demonstrou o resultado para $N = 7$ e Webster [W2] deu uma nova demonstração para $N \geq 7$. O caso $N = 3$ é falso devido também a um exemplo de Nirenberg e o caso $N = 5$ ainda está em aberto.

### 3.2 Estruturas de Mizohata

Seja $\mathcal{M}$ uma estrutura formalmente integrável de dimensão $n$ sobre uma variedade $\Omega$ de dimensão $n+1$. $\mathcal{M}$ é chamada uma *estrutura de Mizohata* se $C(\mathcal{M}) \neq \{0\}$ e a forma de Levi associada a $\mathcal{M}$ for não degenerada em todo ponto de $C(\mathcal{M})\backslash\{0\}$.

O exemplo típico de tal estrutura é a gerada pelo operador de Mizohata:

$$M = \frac{\partial}{\partial t} - it\frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{em} \qquad \mathbb{R}^2_{(x,t)} .$$

O objetivo principal desta seção é demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 3.2.1.** *Seja $\mathcal{M}$ uma estrutura de Mizohata definida sobre uma variedade $\Omega$ de dimensão $n+1$, $n > 2$. Se $\mathcal{M}$ é fortemente pseudo-convexa, i.e., se todos os autovalores da forma de Levi associada a $\mathcal{M}$ são positivos (ou todos negativos), então $\mathcal{M}$ é localmente integrável.*

Comecemos por enunciar um lema que coloca uma dada estrutura de Mizohata numa forma standard através de uma mudança de coordenadas:

**Lema 3.2.2.** *Seja $\mathcal{M}$ uma estrutura de Mizohata de dimensão $n$ sobre uma variedade $\Omega$. Existem coordenadas numa vizinhança $U$ de um ponto não elítico arbitrário $p \in \Omega$, uma forma quadrática não degerada $Q$ em $\mathbb{R}^n$ e funções $\rho_j$ definidas em $U$, $j = 1, \dots, n$ de modo que:*

*i) $\rho_j$ anula-se de ordem infinita em $t = 0$, $j = 1, \dots, n$.*

*ii) Existe uma base de $\mathcal{M}$ sobre $U$ formada pelos campos de vetores*

$$M_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i\frac{\partial Q}{\partial t_j}\frac{\partial}{\partial x} - \rho_j\frac{\partial}{\partial x} \qquad j = 1, \dots, n \ . \tag{3.2.1}$$

*Além disso, $\mathcal{M}$ é localmente integrável numa vizinhançade $p$, se e somente se, existem coordenadas $(x, t_1, \dots, t_n)$ e uma forma quadrática $Q$ como acima tal que $\rho_j \equiv 0$, $j = 1, \dots, n$.*

A demonstração deste lema combina o Lema de Morse com resolução formal por séries de potências e pode ser encontrada em [T2]. Quando $\mathcal{M}$ é fortemente pseudo-convexa, podemos tomar $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{2}(t_1^2 + \dots + t_n^2)$.

Para estudar a integrabilidade local de estruturas de Mizohata fortemente pseudoconvexas não existe então perda de generalidade em supor que $p = 0$ seja não elítico, que $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ e que $\mathcal{M}$ seja (globalmente) gerada por:

$$M_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i\ t_j\frac{\partial}{\partial x} + \rho_j\frac{\partial}{\partial x} \qquad j = 1, \dots, n \ . \tag{3.2.2}$$

onde $\rho_j$ anula-se de ordem infinita em $t = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Nosso objetivo é encontrar uma função $Z$ de classe $C^\infty$ numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$M_j Z = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

e $dZ \neq 0$ nesta vizinhança.

Vamos utilizar coordenadas polares na variável $t \in \mathbb{R}^n$:

$$r = \sqrt{t_1^2 + \dots + t_n^2}$$
$$\theta \in S^{n-1} \ .$$

Fixemos por ora uma carta $(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ de $S^{n-1}$. Então, no domínio desta carta, a estrutura $\mathcal{M}$ fica gerada pelos campos:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 &= \frac{\partial}{\partial r} - ir\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\rho}_1\frac{\partial}{\partial x} \\ \tilde{M}_j &= \frac{\partial}{\partial \theta_{j-1}} + \tilde{\rho}_j\frac{\partial}{\partial x}, \qquad j = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

onde $\tilde{\rho}_j$ são funções flat em $r = 0$. Isto decorre do fato de que a estrutura gerada por

$$\frac{\partial}{\partial t_1} - it_1\frac{\partial}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n} - it_n\frac{\partial}{\partial x}$$

coincide com a gerada por

$$\frac{\partial}{\partial r} - ir\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}}$$

pois ambas são ortogonais ao diferencial de

$$z = x + i\frac{|t|^2}{2} = x + i\frac{r^2}{2} \ .$$

Façamos agora

$$s = \frac{r^2}{2}, \ \theta = \theta \quad \text{e} \quad x = x \ .$$

Para $r > 0$ isto define uma mudança de coordenadas que coloca o sistema (3.2.3) numa forma bastante simples:

$$\begin{aligned} M_1^{\#} &= -i\sqrt{2s}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial s}\right) + \tilde{\rho}_1(x, \sqrt{2s}, \theta)\frac{\partial}{\partial x} \\ M_j^{\#} &= \frac{\partial}{\partial \theta_{j-1}} + \tilde{\rho}_1(x, \sqrt{2s}, \theta)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad j = 2, \ldots, n \ . \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Notemos que esta "mudança de variáveis" é singular em $r = 0$. Não podemos esperar que os sistemas (3.2.3) e (3.2.4) tenham as mesmas soluções posto que $r \mapsto s = \frac{r^2}{2}$ faz desaparecer o comportamento singular em $r = 0$ inerente ao sistema (3.2.3). No entanto, uma análise mais detalhada em $s = 0$ de uma solução de (3.2.4) nos levará a uma solução de (3.2.3), como veremos.

Como $\rho_1$ é flat em $r = 0$, a função

$$\tilde{\tilde{\rho}}_1(x, s, \theta) = \frac{i\tilde{\rho}_1(x, \sqrt{2s}, \theta)}{\sqrt{2s}}$$

é também flat em $s = 0$ e portanto é suficiente estudar a estrutura gerada pelos campos:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{M}}_1 &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \tilde{\tilde{\rho}}_1\frac{\partial}{\partial x}, \quad z = x + is \\ \tilde{\tilde{M}}_j &= \frac{\partial}{\partial \theta_{j-1}} + \tilde{\tilde{\rho}}_j\frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

onde $\tilde{\tilde{\rho}}_j$ são funções flat em $s = Imz = 0,\ j = 1, \ldots, n$.

Fazemos agora uma extensão de $\tilde{\tilde{\rho}}_j$ a $\mathbb{C} \times S^{n-1}$ pondo $\tilde{\tilde{\rho}}_j \equiv 0$ se $s < 0$. Podemos pensar assim que $\tilde{\tilde{\rho}}_j \in C^\infty(\mathbb{C} \times S^{n-1})$. Obviamente elas continuam flat em $s = 0,\ j = 1, \ldots, n$.

Usando que $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$, precisamos estudar então a estrutura gerada pelos campos

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial z} \\ L_j &= \frac{\partial}{\partial \theta_{j-1}} + \sigma_j \frac{\partial}{\partial z}, \quad j = 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

que estão definidos em $\mathbb{C} \times S^{n-1}$ e onde $\sigma_j$ são funções $C^\infty$ que se anulam quando $Imz \leq 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Os campos dados em (3.2.6) definem uma estrutura elítica e toda estrutura elítica é localmente integrável mas não podemos usar este fato aqui porque isto acarretaria uma localização na variável $\theta \in S^{n-1}$ e devemos ter sempre em mente o caráter global desta variável pois ela é proveniente do uso de coordenadas polares.

Para evitar o uso da carta $\theta$ de $S^{n-1}$, vamos escrever o sistema (3.2.6) de uma maneira independente de coordenadas, usando o complexo associado à estrutura definida por ele. Para este fim, fixemos uma carta global $z$ de $\mathbb{C}$ e consideremos em $\mathbb{C} \times S^{n-1}$ a estrutura

$$\mathcal{A} = < dz >^\perp .$$

Então a estrutura $\mathcal{L}$ gerada pelos campos (3.2.6) pode ser vista como uma pertubação flat de $\mathcal{A}$, ou seja,

$$\mathcal{L} = < w >^\perp, \quad w = dz - \sigma_1 d\bar{z} - \sigma$$

onde $\sigma$ é uma 1-forma suave em $S^{n-1}$ dependendo de $z$ como parâmetro, $\sigma_1$ é uma função $C^\infty$ definida em $\mathbb{C} \times S^{n-1}$ e ambas são flat em $Imz = 0$.

Seja $\delta_0$ o primeiro operador do complexo associado à estrutura $\mathcal{L}$. Usando a decomposição

$$\mathbb{C}T^*(\mathbb{C} \times S^{n-1}) = < w > \oplus < d\bar{z} > \oplus \mathbb{C}T^* S^{n-1},$$

se $f \in C^\infty(\mathbb{C} \times S^{n-1})$, $\delta_0(f)$ é um elemento de

$$\frac{\mathbb{C}T^*(\mathbb{C} \times S^{n-1})}{\mathcal{L}^\perp}$$

que pode ser identificado com

$$\delta_0(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \sigma_1 \frac{\partial f}{\partial z}\right) d\bar{z} + d_{S^{n-1}}(f) + \sigma \frac{\partial f}{\partial z}$$

onde $d_{S^{n-1}}$ é a derivada exterior em $S^{n-1}$. De fato,

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} + d_{S^{n-1}}(f) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \sigma_1 \frac{\partial f}{\partial z}\right) d\bar{z} + \left(d_{S^{n-1}}(f) + \sigma \frac{\partial f}{\partial z}\right) + w \frac{\partial f}{\partial z} \ . \end{aligned}$$

Assim as equações

$$L_j f = 0 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{3.2.7}$$

onde $L_j$ são os campos dados em (3.2.6), podem ser escritas de modo independente do sistema de coordenadas na seguinte forma

$$\delta_0 f = 0 \ . \tag{3.2.8}$$

De fato, tomando uma carta $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ de $S^{n-1}$ e $\sigma = \Sigma_{j=2}^n \sigma_j d\theta_{j-1}$, (3.2.7) é a expressão de (3.2.8) utilizando-se estas coordenadas.

## 3.3 Fórmulas de Homotopia

Seja $S$ uma variedade compacta orientável simplesmente conexa, de dimensão $n - 1 > 2$. Fixemos uma métrica Riemanniana em $S$.

Em $\mathbb{C} \times S$ consideremos a estrutura globalmente integrável

$$\mathcal{A} = < dz >^\perp$$

onde $z$ é a carta canônica de $\mathbb{C}$.

Seja

$$\mathcal{A}^* = \frac{\mathbb{C}T^*(\mathbb{C} \times S)}{\mathcal{A}^\perp}$$

e consideremos o complexo

$$C^\infty(\mathbb{C} \times S) \xrightarrow{\delta_0^{\mathcal{A}}} C^\infty(\mathbb{C} \times S, \mathcal{A}^*) \xrightarrow{\delta_1^{\mathcal{A}}} C^\infty(\mathbb{C} \times S, \wedge^2 \mathcal{A}^*) \xrightarrow{\delta_2^{\mathcal{A}}} \cdots \tag{3.3.1}$$

associado à $\mathcal{A}$.

Desejamos construir operadores

$$C^\infty(\mathbb{C} \times S, \wedge^2 \mathcal{A}^*) \xrightarrow{K_2} C^\infty(\mathbb{C} \times S, \mathcal{A}^*) \xrightarrow{K_1} C^\infty(\mathbb{C} \times S)$$

de modo que

$$K_2 \delta_1^{\mathcal{A}} F + \delta_0^{\mathcal{A}} K_1 F = F \quad \text{em} \quad \Delta \times S \tag{3.3.2}$$

$\forall F \in C^\infty(\mathbb{C} \times S, \mathcal{A}^*)$, onde $\Delta$ é a bola de raio 1 em $\mathbb{C}$ centrada na origem.

De acordo com o teorema de Hodge, é possível achar operadores $K_1^S$ e $K_2^S$ tais que

$$d_S K_1^S + K_2^S d_S = I \tag{3.3.3}$$

pois $S$ é simplesmente conexa. Aqui $d_S$ é a derivada exterior em $S$,

$$K_1^S = d_S^* G_1 \qquad \text{and} \qquad K_2^S = d_S^* G_2 \tag{3.3.4}$$

onde $G_i$ é o operador de Green para o Laplaciano em $S$, $i = 1, 2$.

Se $F \in C^\infty(\mathbf{C} \times S, \wedge^j \mathcal{A}^*(\mathbf{C} \times S))$ então $F$ tem a seguinte decomposição única:

$$F = w + \phi \wedge d\bar{z} \tag{3.3.5}$$

$$w \in C^\infty(\mathbf{C}, C^\infty(S, \wedge^j S)) \qquad \text{e} \qquad \phi \in C^\infty(\mathbf{C}; C^\infty(S, \wedge^{j-1} S))$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta_j^{\mathcal{A}} F &= \delta_j^{\mathcal{A}}(w + \phi \wedge d\bar{z}) \\ &= d_S w + (-1)^j \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \wedge d\bar{z} + d_S \phi \wedge d\bar{z} \, . \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Agora definimos

$$Tf(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\int_{|\tau|<1} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau \wedge d\bar{\tau}, \quad z \in \Delta. \tag{3.3.7}$$

Sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(Tf)(z) = f(z),\ z \in \Delta \tag{3.3.8}$$

.

Definamos então:

$$K_1 F = K_1^S(\omega - d_S T\phi) + T\phi \tag{3.3.9}$$

para $F = \omega + \phi d\bar{z} \in C^\infty(\mathbf{C} \times S; \wedge^1 \mathcal{A}^*(\mathbf{C} \times S))$, e

$$K_2 F = K_1^S \phi d\bar{z} + K_2^S \omega \tag{3.3.10}$$

para $F = \omega + \phi \wedge d\bar{z} \in C^\infty(\mathbf{C} \times S, \wedge^2 \mathcal{A}^*(\mathbf{C} \times S))$.

Como $K_1^S$ comuta com o Laplaciano de $S$, também comuta com $d_S$ e com $\partial/\partial\bar{z}$. Por (3.3.6), (3.3.9), (3.3.3), e (3.3.8),

$$\begin{aligned}
\delta_0{}^{\mathcal{A}}(K_1 F) &= d_S K_1 F + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(K_1 F) d\bar{z} \\
&= d_S K_1^S(\omega - d_S T\phi) + d_S T\phi + [K_1^S \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} - K_1^S d_S \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(T\phi) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(T\phi)] d\bar{z} \\
&= \omega - d_S T\phi - K_2^S d_S(\omega - d_S T\phi) + d_S T\phi + +[K_1^S(\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} - d_S\phi) + \phi] d\bar{z} \\
&= \omega - K_2^S d_S \omega - K_1^S(d_S \phi - \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}}) + \phi d\bar{z}
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

em $\Delta \times S$, pois $d_S{}^2 = 0$. Assim, (3.3.2) está provado.

Por outro lado, podemos colocar (3.3.9) na seguinte forma:

$$K_1 F = K_1^S \omega + \frac{1}{\sigma(S)} \int_S T\phi \, d\sigma \tag{3.3.12}$$

para $F = \omega + \phi d\bar{z} \in C^\infty(\mathbf{C} \times S, \wedge^1 A^*(\mathbf{C} \times S))$, onde $d\sigma$ é o elemento de volume de $S$. De fato, consideremos $v = d_S^* G_1(\omega)$, $\omega = d_S f$. Então (3.3.3) implica que $\omega = d_S d_S^* G_1 \omega$ e $d_S(v - f) = 0$.

Segue de (3.3.4) que

$$K_1^S d_S f - f = d_S^* G_1 d_S f - f = c \tag{3.3.13}$$

$c$ constante. Mas

$$\int_S v d\sigma = < v, 1 >_{L^2(S)} = < d_S{}^* G_1 \omega, 1 >_{L_2(S)} = 0 \tag{3.3.14}$$

então (3.3.12) segue de (3.3.9).

## 3.4 Regularidade dos Operadores de Homotopia

As propriedades fornecidas pela Proposições (II.3.5) e (II.3.6) permitem definir os espaços de Hölder em uma variedade compacta $\Omega$ de classe $C^\infty$, utilizando-se cartas e partições da unidade como é usual. Podemos provar que as normas provenientes de cada cobertura por coordenadas locais e cada partição da unidade são equivalentes. Podemos também definir os espaços de Hölder das seções de um fibrado vetorial $E$ sobre $\Omega$ — aqui denotados por $C^\alpha(\Omega; E)$ em lugar de $\Lambda^\alpha(\Omega; E)$ devido à semelhança entre a letra $\Lambda$ e símbolo $\wedge$ usado na notação de produto exterior — utilizando as proposições citadas acima para cuidar das mudanças de trivializações sobre vizinhanças coordenadas.

Desejamos agora definir os espaços $C^\alpha(\Delta \times S), C^\alpha(\mathbb{C} \times S), C^\alpha(\mathbb{C} \times S, \wedge^j T^*(\mathbb{C} \times S))$, etc..., onde $S$ é uma variedade compacta. Para isto fixamos uma carta $z$ em $\mathbb{C}$, uma cobertura por vizinhanças coordenadas $\{U_j\}$ e cartas $\theta_j$ de $S$ com imagem convexa e uma partição da unidade $\{\chi_j\}$ subordinada a esta cobertura. Definamos

$$\|u\|_{\substack{\alpha, z \\ \Delta \times S}} = \sum_j \|\chi_j u\|_\alpha$$

onde cada termo no somatório é definido expressando-se $\chi_j u$ na carta $(z, \theta_j)$ e tomando-se então a norma de Hölder em $\Delta \times \theta_j(U_j)$.

Fixada a carta $z$ de $\mathbb{C}$, as normas provenientes de diferentes coberturas e partições da unidade de $S$ são equivalentes.

Vamos estudar agora propriedades de regularidade dos operadores de homotopia com relação aos espaços de Hölder definidos acima. Daqui para frente a letra $C$ denotará várias constantes universais.

Fixemos uma carta $z$ de $\mathbb{C}$.

Seja $F = w + \phi d\bar{z} \in C^\alpha(\mathbb{C} \times S, \mathcal{A}^*)$ onde $w$ é uma 1-forma em $S$ e $\phi$ uma função em $S$ ambas dependendo de $z$ como parâmetro. $F$ é de classe $C^\alpha$ se e somente se $w$ e $\phi$ são de classe $C^\alpha$.

Agora, afirmamos que existe uma constante $C = C(\alpha) > 0$ tal que

$$\|K_1 F\|_{\substack{\alpha,z \\ \Delta\times S}} \leq C\|F\|_{\substack{\alpha,z \\ \Delta\times S}} \tag{3.4.1}$$

para toda $F \in C^\alpha(\mathrm{C} \times S, \wedge^1 \mathcal{A}^*(\mathrm{C} \times S))$, $m < \alpha < m+1$, $m$ inteiro positivo ($\Delta$ é a bola unitária de C). De fato, fixemos uma cobertura $\{U_j, \theta_j\}$ de $S$ por vizinhanças coordenadas subordinadas à partição da unidade $\{\chi_j\}$ . Então

$$\|K_1 F\|_{\substack{\alpha,z \\ \Delta\times S}} \leq \|K_1^S \omega\|_{\substack{\alpha,z \\ \Delta\times S}} + \frac{1}{\sigma(S)}\| \int_S T\phi\, d\sigma\|_{C^\alpha(\Delta)} \tag{3.4.2}$$

e assim

$$\|K_1 F\|_{\substack{\alpha,z \\ \Delta\times S}} \leq \|K_1^S \omega\|_{\substack{\alpha,z \\ \Delta\times S}} + C\|\phi\|_{\substack{\alpha,z \\ \Delta\times S}} \tag{3.4.3}$$

pois

$$\frac{1}{\pi z} * \cdot$$

leva $C^\alpha(\Delta)$ em $C^{1+\alpha}(\Delta)$ ([Au]) e a regularidade nas variáveis de $S$ continua a mesma.

Agora,

$$\|K_1^S \omega\|_{\substack{\alpha,z \\ \Delta\times S}} = \sup_{\Delta\times S} |K_1^S \omega(z,\theta)| + \tag{3.4.4}$$

$$+\sum_j \sum_{|\beta|+|\gamma|=m} \sup_{\Delta\times S} \frac{|\partial_z^\beta \partial_\theta^\gamma \chi_j K_1^S \phi(z,\theta_j) - \partial_z^\beta \partial_\theta^\gamma \chi_j K_1^S \phi(z',\theta_j')|}{(|z-z'| + |\theta_j - \theta_j'|)^{\alpha-m}}$$

Como

$$\frac{|\partial_\theta^\gamma \chi_j(K_1^S \partial_z^\beta \omega)(z,\theta_j) - \partial_\theta^\gamma \chi_j(K_1^S \partial_z^\beta \omega)(z,\theta_j')|}{|\theta_j - \theta_j'|^{\alpha-m}} \leq C\|K_1^S \partial_z^\beta \omega(z,.)\|_{C^{|\gamma|+\alpha-m}(S)} \tag{3.4.5}$$

e

$$|\partial_\theta^\gamma \chi_j K_1^S (\frac{\partial_z^\beta \omega(z,\theta_j') - \partial_z^\beta \omega(z',\theta_j')}{|z-z'|^{\alpha-m}})| \leq C\|K_1^S (\frac{\partial_z^\beta \omega(z,.) - \partial_z^\beta \omega(z',.)}{|z-z'|^{\alpha-m}})\|_{C^{|\gamma|}(S)} \tag{3.4.6}$$

usando o fato $K_1^S$ é um operador linear contínuo de $C^\eta(S)$ em $C^{\eta+1}(S)$, $\eta > 0$, $\eta \notin \mathbf{N}$, obtemos (3.4.1). A prova desta continuidade pode ser encontrada em ([Au]).

Similarmente, podemos achar outra constante $C = C(\alpha) > 0$ tal que

$$\|K_2 F\|_{\substack{\alpha,z \\ \Delta\times S}} \leq C\|F\|_{\substack{\alpha,z \\ \Delta\times S}}, \quad F \in C^\alpha(\mathbf{C}\times S, \wedge^2 \mathcal{A}^*(\mathbf{C}\times S)) \tag{3.4.7}$$

Devemos notar que $K_1$ e $K_2$ não ganham uma derivada como no teorema de Newlander-Nirenberg, mas não precisamos murchar o domínio $\Delta \times S$ para obter as estimativas (3.4.1) and (3.4.6).

Agora, sabemos que existe um operador de extensão linear e contínuo ([Se]):

$$\epsilon : C^\alpha(\Delta \times S) \longrightarrow C^\alpha(\mathbf{C} \times S) \tag{3.4.8}$$

Então tomamos

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= \eta.(\epsilon_1 \circ K_1) \\ \tilde{K}_2 &= \eta.(\epsilon_2 \circ K_2) \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

onde $\eta$ é uma função suave suportada emn $\Delta_2$, a bola de raio 2 na origem de $\mathbf{C}$ e $\epsilon_i$ é o operador de extensão atuando em $C^\alpha(\Delta \times S, \wedge^i \mathcal{A}^*(\mathbf{C}\times S))$, $i = 1, 2$, como em (3.4.8).

Assim, para $F \in C^\infty(\mathbf{C} \times S, \wedge^1 \mathcal{A}^*(\mathbf{C}\times S))$, ainda temos

$$\delta_0^{\mathcal{A}} \tilde{K}_1 F + \tilde{K}_2 \delta_1^{\mathcal{A}} F = F \qquad \text{em} \qquad \Delta \times S \tag{3.4.10}$$

Logo os suportes $S(\tilde{K}_1 F)$, $S(\tilde{K}_2 F)$estão contidos em $\Delta_2 \times S$, e as desigualdades (3.4.1) e (3.4.6) são válidas também para $\tilde{K}_1$ e $\tilde{K}_2$, respectivamente.

### 3.5 Operadores de Regularização

Para aplicar o método de Nash-Moser, precisamos regularizar funções que estejam definidas em $\mathbb{C} \times S$ e que tenham suporte em $K \times S$ onde $K$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Consideremos uma cobertura $\{U_j\}$ de $S$ por vizinhanças coordenadas e cartas $\theta_j$ definidas em $U_j$ com imagens na bola $B_1$ de centro 0 e raio 1 de $\mathbb{R}^{n-1}$. Seja $\{\varphi_j\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_j\}$. Seja $\psi_j(z,\theta) = \varphi_j(\theta)$.

Fixemos a carta canônica $z$ de $\mathbb{C}$. Dada $f \in C^0(\mathbb{C} \times S)$ com suporte $S(f) \subset K \times S$, escrevemos

$$f = \sum_j f_j, \quad f_j = \psi_j f$$

Seja $F_j$ a expressão de $f_j$ na carta $(z, \theta_j)$.

Então $S(F_j) \subset K \times B_1$. Consideremos também uma função $\chi \in S(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que $\hat{\chi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ e $\chi \equiv 1$ numa vizinhança da origem. Aqui $\hat{}$ denota a transformada de Fourier em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definimos

$$S_N F_j = \eta(\chi_N * F_j),$$

onde $\chi_N(x) = N^{n+1}\chi(Nx), N \geq 1$ e $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $\eta \equiv 1$ numa vizinhança de $K \times B_1$.

Pondo $S_N f_j = (S_N F_j) \circ (z, \theta_j)$,

$$S_N f = \sum_j S_N f_j$$

é chamada de regularizada de $f$.

Utilizando as mesmas cartas fixadas acima para agora definir a norma de $C^\alpha(\mathbb{C} \times S)$, obtemos as seguintes estimativas para uma função $f \in C^\alpha(\mathbb{C} \times S)$ suportada em $K \times S$:

$$\|S_N f\|_{\substack{\beta,z \\ C\times S}} \leq C N^{\beta - \alpha} \|f\|_{\substack{\alpha,z \\ C\times S}}, \ \alpha \leq \beta \tag{3.5.1}$$

$$\|(I - S_N)f\|_{\substack{\beta,z\\ \mathbb{C}\times S}} \leq CN^{\beta-\alpha}\|f\|_{\substack{\alpha,z\\ \mathbb{C}\times S}}, \; \beta \leq \alpha . \tag{3.5.2}$$

A demonstração destas propriedades pode ser feita de modo inteiramente análogo à prova do Teorema (II.3.9).

## 3.6 Pertubações de Estruturas Globalmente Integráveis

Seja $S$ uma variedade compacta orientável de dimensão $n-1 \geq 1$. Em $\mathbb{C}\times S$ consideremos a estrutura globalmente integrável:

$$\mathcal{A}_0 =< dz >^{\perp}$$

onde $z$ é a carta canônica de $\mathbb{C}$.

Consideremos também a estrutura perturbada

$$\mathcal{L} =< w >^{\perp}, \quad w = dz - \sigma_1 d\bar{z} - \sigma$$

onde $\sigma_1$ é uma função $C^\infty$ definida em $\mathbb{C}\times S$ e $\sigma$ uma $1-$forma suave em $S$, ambas dependendo suavemente de $z$ como parâmetro.

Nosso objetivo é demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 3.6.1.** *Considere a estrutura perturbada $\mathcal{L}$ descrita acima e suponha que $\alpha \in (0,1)$. Então é possível achar $\epsilon_0 > 0$ tal que*

$$\|\sigma_1\|_{\substack{1+\alpha,z\\ \mathbb{C}\times S}} < \epsilon_0 \quad e \quad \|\sigma\|_{\substack{1+\alpha,z\\ \mathbb{C}\times S}} < \epsilon_0 \; . \tag{3.6.1}$$

*implicam que $\mathcal{L}$ é semi-globalmente integrável isto é, dado $R > 0$, podemos encontrar uma função $Z_\infty$ definida em $\Delta_{\frac{R}{4}}$ com diferencial não nulo aí, satisfazendo*

$$\delta_0 Z_\infty = 0 \qquad \text{em} \qquad \Delta_{\frac{R}{4}}$$

*onde $\Delta_{\frac{R}{4}}$ é a bola de raio $R/4$ centrada na origem.*

Seguirá como corolário deste teorema a integrabilidade global de $\mathcal{L}$, desde que $\epsilon_0$ seja pequeno.

Tomaremos primeiramente $R = 1$; o caso $R > 0$ pode ser feito de modo completamente análogo.

Consideremos o complexo

$$C^{\infty}(\mathbb{C}\times S)\xrightarrow{\delta_0}C^{\infty}(\mathbb{C}\times S,\mathcal{L}^*)\xrightarrow{\delta_1}C^{\infty}(\mathbb{C}\times S,\wedge^2\mathcal{L}^*)\xrightarrow{\delta_2}\cdots \tag{3.6.2}$$

associado a $\mathcal{L}$. Aqui $\mathcal{L}^* = \frac{\mathbb{C}T^*(\mathbb{C}\times S)}{\mathcal{L}^{\perp}}$.

Nosso objetivo é encontrar $f$ com diferencial não nulo tal que $\delta_0 f = 0$ em $\Delta_{\frac{1}{4}} \times S$.

Como $\mathcal{L} =< w >^{\perp}$, usando a decomposição:

$$\mathbb{C}T^*(\mathbb{C}\times S) =< w > \oplus < d\bar{z} > \oplus \mathbb{C}T^*S\ , \tag{3.6.3}$$

obtemos:

$$\delta_0 f = (L_1 f d\bar{z}, L_\sigma f) \tag{3.6.4}$$

onde

$$L_1 f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \sigma_1 \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{e} \quad L_\sigma f = d_S f + \frac{\partial f}{\partial z}\sigma$$

$L_1(f)d\bar{z}$ é uma $1-$forma em $\mathbb{C}$ dependendo de $\theta$ como parâmetro e $L_\sigma(f)$ é uma $1-$forma em $S$ vendo agora $z$ como parâmetro.

Se, ao invés da carta $z$, utilizássemos uma outra carta global $\zeta$ para $\mathbb{C}$, a expressão de $\delta_0$ na decomposição (3.6.4) seria

$$\delta_0 f = \left(L_1(\zeta)\frac{\partial f}{\partial \zeta} + L_1(\bar{\zeta})\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}},\, d_{S,z}(\zeta)\frac{\partial f}{\partial \zeta} + d_{S,z}(\bar{\zeta})\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} + d_{S,\zeta} + \sigma \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z}\right)\right) \tag{3.6.5}$$

onde $d_{S,z}$ é a derivada exterior em $S$, vendo $z$ como parâmetro.

Gostaríamos de ver o complexo (3.6.2) como uma perturbação de um complexo associado a uma estrutura globalmente integrável. Para que isto fique mais claro, vamos trocar os geradores de $\mathcal{L}$ por novos geradores que são obtidos a partir dos anteriores através da multiplicação por uma matriz não singular e então definir o operador $\delta_0$ adaptado à carta $\zeta$ por:

$$\delta_0^{\zeta} f = \left(L_1(\bar{\zeta})^{-1}L_1 f,\ L_\sigma f - L_1(\bar{\zeta})^{-1}L_1(f)L_\sigma(\bar{\zeta})\right)\ . \tag{3.6.6}$$

Ele está definido onde $L_1(\overline{\zeta}) \neq 0$. Esta definição depende do sistema fixado em $\mathbb{C}$ mas é independente de sistemas de coordenadas de $S$. Veremos adiante (em (3.6.15)) que quando $\zeta$ for convenientemente escolhida $\delta_0^{\zeta}$ pode ser decomposto como soma de um operador associado a uma estrutura globalmente integrável padrão mais uma perturbação.

Vamos definir uma seqüência de funções

$$z_v : \mathbb{C} \times S \longrightarrow \mathbb{C}$$

de classe $C^\infty$ e uma seqüência de números reais $\{r_v\}$, $\frac{1}{4} < r_{v+1} < r_v$ de modo que

$$z_0 = z, \quad r_0 = 1$$

e as seguintes hipóteses indutivas estejam verificadas:

$$(z,\theta) \mapsto (z_v(z,\theta),\theta) \quad \text{é um difeomorfismo global de} \quad \mathbb{C} \times S \quad \text{sobre} \quad \mathbb{C} \times S. \qquad (H1)_v$$

$$L_1 \bar{z}_v \neq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{C} \times S \qquad (H2)_v$$

$$\bar{\Omega}_v \subset \Omega_{v-1}, \quad \text{onde} \quad \Omega_v = \{(z,\theta) \in \mathbb{C} \times S / |z_v(z,\theta)| < r_v\}\ . \qquad (H3)_v$$

Fixemos uma carta local $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ para $S$. $(H1)_v$ diz que $(z_v, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ pode ser utilizada como uma carta local para $\mathbb{C} \times S$.

Seja $\mathcal{A}_v = < dz_v >^{\perp}$ e consideremos o complexo associado:

$$C^\infty(\mathbb{C} \times S) \xrightarrow{\delta_0^{\mathcal{A}_v}} C^\infty(\mathbb{C} \times S, \mathcal{A}_v^*) \xrightarrow{\delta_1^{\mathcal{A}_v}} C^\infty(\mathbb{C} \times S, \wedge^2 \mathcal{A}_v^*) \longrightarrow \cdots \qquad (3.6.7)$$

onde $\mathcal{A}_v^* = \frac{\mathbb{C}T^*(\mathbb{C} \times S)}{<dz_v>}$.

Admitamos que já tivéssemos definido $z_0, z_1, \ldots, z_v$ satisfazendo as hipóteses $(H1)_v$, $(H2)_v$ e $(H3)_v$. Queremos definir $z_{v+1}$. A definição que daremos a seguir é análoga à proposta por Kuranishi para estruturas CR. Definamos:

$$z_{v+1} = z_v + w_v, \quad w_v = -S_{N_{v+1}} \tilde{K}_1^v \delta_0^v z_v \qquad (3.6.8)$$

onde $\delta_0^v = \delta_0^{z_v}$ é o operador adaptado à carta $z_v$ definido em (3.6.6); $S_{N_{v+1}}$ é o operador de regularização definido em $\mathbb{C} \times S$ utilizando-se a carta $z_v$ de $\mathbb{C}$, uma cobertura de $S$ por vizinhanças coordenadas e uma partição da unidade de $S$ subordinada a esta cobertura que fixamos de uma vez por todas. Aqui $N_{v+1} = N_v^{3/2}$ e $N_0$ é um número real suficientemente grande que fixaremos futuramente. É bom salientar a diferença expressa pelas notações $\delta_0^v$ e $\delta_0^{\mathcal{A}_v}$: $\delta_0^v$ é o operador associado à estrutura $\mathcal{L}$ que queremos provar ser globalmente integrável enquanto que $\delta_0^{\mathcal{A}_v}$ é o operador associado à estrutura globalmente integrável $\mathcal{A}_v =< dz_v >^{\perp}$.

Note a semelhança de (3.6.8) com a seqüência $u_j$ definida no Teorema I.3.3. O operador $Q$ é substituido pelo operador de homotopia que funciona como uma inversa aproximada do operador $\delta_0$, cuja solução desejamos encontrar.

O operador $\tilde{K}_1^\nu$ é obtido por extensão do seguinte operador

$$K_1^\nu(F) = K_1^S\omega + \frac{1}{\sigma(S)}\int_S T_{r_\nu}\phi d\sigma\,, \qquad F = \omega + \phi d\bar{z} \in C^\infty(\mathbf{C}\times S, \wedge^1\mathcal{A}_\nu^*) \tag{3.6.9}$$

onde

$$T_{r_\nu}\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\int_{\zeta\in\Delta_{r_\nu}} \frac{\phi(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta\wedge d\bar{\zeta}\,, \qquad z\in\Delta_{r_\nu} = \{z\in\mathbf{C} : |z| < r_\nu\} \tag{3.6.10}$$

e

$$K_2^\nu(F) = K_1^S\phi d\bar{z}_\nu + K_2^S\omega\,, \qquad F = \omega + \phi d\bar{z}_\nu \in C^\infty(\mathbf{C}\times S, \wedge^2\mathcal{A}_\nu^*), \tag{3.6.11}$$

pondo

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1^\nu &= \chi D_{r_\nu}\epsilon_1 D_{\frac{1}{r_\nu}} K_1^\nu, \\ \tilde{K}_2^\nu &= \chi D_{r_\nu}\epsilon_2 D_{\frac{1}{r_\nu}} K_1^\nu \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

onde $\chi\in C_c^\infty(\mathbf{C})$, $\chi\equiv 1$ numa vizinhança de $\Delta_1$ e $\chi\equiv 0$ fora de $\Delta_2$,

$$D_r f = f(rz)\,,\ z\in\mathbf{C} \tag{3.6.13}$$

e $\epsilon_i$ é o operador de extensão descrito em (3.4.8).

Agora, usando a seguinte notação:

$$\|F\|_{\substack{\alpha,\nu\\ \Omega_\nu}} = \|F\|_{\substack{\alpha,z_\nu\\ \Omega_\nu}} = \|F\circ\mathcal{Z}_\nu^{-1}\|_{\substack{\alpha,z\\ \Delta_{r_\nu}\times S}}\,, \qquad \mathcal{Z}_\nu(z,\theta) = (z_\nu(z,\theta),\theta) \tag{3.6.14}$$

Segue de (3.4.1) e (3.4.7) que

$$\|\tilde{K}_1^\nu F\|_{\mathbf{C}\times S}^{\alpha,\nu} \leq C.\|F\|_{\Omega_\nu}^{\alpha,\nu}, \qquad F \in C^\alpha(\mathrm{C}\times S, \wedge^1 \mathcal{A}_\nu^*) \tag{3.6.15}$$

$$\|\tilde{K}_2^\nu F\|_{\mathbf{C}\times S}^{\alpha,\nu} \leq C.\|F\|_{\Omega_\nu}^{\alpha,\nu}, \qquad F \in C^\alpha(\mathrm{C}\times S, \wedge^2 \mathcal{A}_\nu^*) \tag{3.6.16}$$

É claro que a fórmula de homotopia

$$\delta_0^{\mathcal{A}_\nu}\tilde{K}_1^\nu + \tilde{K}_2^\nu\delta_1^{\mathcal{A}_\nu} = I \tag{3.6.17}$$

continua válida em $\Delta_{r_\nu} \times S$.

Olhando a definição (3.6.8), vemos que $z_{v+1}$ depende somente da função $z_v$ e independe do sistema de coordenadas que fixarmos na variedade $S$. Isto será útil futuramente quando tomarmos $S = S^{n-1}$, e desejarmos manter o caráter global da variável $\theta \in S^{n-1}$ advinda do uso de coordenadas polares, como fizemos na subseção 3.2 para estudar a estrutura de Mizohata.

Queremos provar que $(z_v)$ converge para uma função $z_\infty$ no espaço $C^{1+\alpha}(\mathbb{C}\times S)$.

Seja $(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$ uma carta da cobertura de $S$ fixada anteriormente e $z$ a coordenada usual de $\mathbb{C}$.

Nas coordenadas $(z,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$ a equação $\delta_0 f = 0$ torna-se

$$\begin{aligned} L_1 f &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \sigma_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ L_j f &= \frac{\partial}{\partial \theta_{j-1}} + \sigma_j \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad j = 2,\ldots,n\ . \end{aligned} \tag{3.6.18}$$

Nas coordenadas $(z_v,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$, o operador $\delta_0^v$ adaptado à carta $z_v$ tem a forma

$$\delta_0^v f = \begin{pmatrix} L_1^v f \\ \vdots \\ L_n^v f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_v} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_{n-1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1(z_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}\frac{\partial f}{\partial z_v} \\ [L_2(z_v) - L_2(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v)]\frac{\partial f}{\partial z_v} \\ \vdots \\ [L_n(z_v) - L_n(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v)]\frac{\partial f}{\partial z_v} \end{pmatrix} = \delta_0^{\mathcal{A}_v} f + R_v f\ . \tag{3.6.19}$$

Isto explica porque definimos o complexo associado a $\mathcal{L}$ adaptado à coordenada $z_v$: em cada passo de indução, $\mathcal{L}$ pode ser pensada como uma perturbação da estrutura globalmente integrável $\mathcal{A}_v = < dz_v >^{\perp}$. Dois fenômenos interessantes podem ser constatados aqui: a estrutura aproximante $\mathcal{A}_v$ tem sempre o mesmo aspecto qualquer que seja $v$ e o resto $R_v$ contém termos que permitem obter uma estimativa quadrática, resquício do método de Newton, que será fundamental para obtermos a convergência do esquema de Nash-Moser.

Como os campos $L_j^v$ comutam entre si, podemos definir

$$\delta_1^v f = (L_j^v f_i - L_i^v f_j)_{1\leq i<j\leq n}, \quad f \in C^\infty(\mathbb{C}\times S, \mathcal{L}^*) \tag{3.6.20}$$

e todos os outros operadores do complexo adaptado à base $\{L_1^v, \ldots, L_n^v, \frac{\partial}{\partial z_v}\}$.

Observemos que

$$\delta_0^v f = \begin{pmatrix} L_1^v f \\ \vdots \\ L_n^v f \end{pmatrix} = M_v \begin{pmatrix} L_1 f \\ \vdots \\ L_n f \end{pmatrix} \tag{3.6.21}$$

onde

$$M_v = \begin{pmatrix} L_1(\bar{z}_v)^{-1} & 0\ldots 0 \\ -L_2(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1} & 1\ldots 0 \\ \vdots & \vdots\ \ \vdots \\ -L_n(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1} & 0\ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Gostaríamos de provar que $(z_v)$ é uma seqüência de Cauchy em $C^{1+\alpha}(\mathbb{C}\times S), 0<\alpha<1$. Vamos usar a notação $\|\ \|_{\substack{\alpha,v\\ U}}$ para indicar a norma em $C^\alpha(U), U\subset \mathbb{C}\times S$, utilizando a carta $z_v$ em $\mathbb{C}$ e a cobertura e partição da unidade que fixamos em $S$, ou seja $\|\ \|_{\substack{\alpha,v\\ U}} = \|\ \|_{\substack{\alpha,z_v\\ z_v(U)\times S}}$.

$$\begin{aligned} \|z_{v+1}-z_v\|_{\substack{1+\alpha,v\\ \mathbb{C}\times S}} &= \|w_v\|_{\substack{1+\alpha,v\\ \mathbb{C}\times S}} = \|-S_{N_{v+1}}\tilde{K}_1^v\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha,v\\ \mathbb{C}\times S}} \leq \\ &\leq C\ N_{v+1}\|\tilde{K}_1^v\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \mathbb{C}\times S}} \leq C\ N_{v+1}\|K_1^v\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} \leq \\ &\leq C\ N_{v+1}\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} \end{aligned} \tag{3.6.22}$$

devido às estimativas (3.5.1) e (3.6.15).

Precisamos estudar então como se comporta indutivamente $\delta_0^v z_v$. Para isto escrevemos:

$$\begin{aligned} \delta_0^v z_{v+1} &= \delta_0^v z_v + \delta_0^v w_v = (\delta_0^{\mathcal{A}_v}K_1^v + K_2^v\delta_1^{\mathcal{A}_v})(\delta_0^v z_v) + (\delta_0^{\mathcal{A}_v} + R_v)(w_v) \\ &= \delta_0^{\mathcal{A}_v}K_1^v\delta_0^v z_v + K_2^v\delta_1^{\mathcal{A}_v}\delta_0^v z_v - (\delta_0^{\mathcal{A}_v} + R_v)(S_{N_{v+1}}K_1^v\delta_0^v z_v) \end{aligned} \tag{3.6.23}$$

em $\Omega_v$. Isto segue da fórmula de homotopia (3.6.17) e de (3.6.19).

Sejam

$$\begin{aligned}
A &= \delta_0^{A_v}(I - S_{N_{v+1}})K_1^v \delta_0^v z_v \\
B &= -R_v S_{N_{v+1}} K_1^v \delta_0^v z_v \\
C &= K_2^v \delta_1^{A_v} \delta_0^v z_v \ .
\end{aligned}$$

Agora usando (3.5.2) e (3.6.15)

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} &\le C\|(I - S_{N_{v+1}})K_1^v \delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha,v\\ \Omega_v}} \\
&\le C\ N_{v+1}^{-\lambda}\|K_1^v \delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\lambda+\alpha,v\\ \Omega_v}} \\
&\le C\ N_{v+1}^{-\lambda}\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\lambda+\alpha,v\\ \Omega_v}}
\end{aligned} \tag{3.6.24}$$

onde $\lambda$ é um parâmetro a ser determinado.

Como

$$R_v(f) = \begin{pmatrix} L_1(z_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}\frac{\partial f}{\partial z_v} \\ [L_2(z_v) - L_2(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v)]\frac{\partial f}{\partial z_v} \\ \vdots \\ [L_n(z_v) - L_n(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v)]\frac{\partial f}{\partial z_v} \end{pmatrix}$$

segue das estimativas (3.5.1) e (3.6.15) que

$$\begin{aligned}
\|B\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} &= \|R_v S_{N_{v+1}} K_1^v \delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} \\
&\le C\Big[\|L_1(z_v)\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\|L_1(\bar{z}_v)\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} + \\
&+ \sum_{j=2}^{n}\Big(\|L_j(z_v)\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} + \|L_j(\bar{z}_v)\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\|L_j(\bar{z}_v)\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\Big)\Big]\|S_{N_{v+1}}K_1^v\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha,v\\ \Omega_v}} \\
&\le C\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\left(1 + \|\delta_0\bar{z}_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\right)\|\delta_0 z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} N_{v+1}\|K_1^v\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} \\
&\le CN_{v+1}\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\left(1 + \|\delta_0\bar{z}_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\right)\|\delta_0 z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} \ .
\end{aligned} \tag{3.6.25}$$

Usando que $\delta_1^v \delta_0^v = 0$,

$$\begin{aligned}\|C\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} &= \|K_2^v \delta_1^{A_v} \delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} = \|K_2^v(\delta_1^{A_v} - \delta_1^v)\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} \\ &\leq C\|(\delta_1^{A_v} - \delta_1^v)\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\end{aligned}$$

devido à (3.6.16).

De acordo com (3.6.20), $(\delta_1^v - \delta_1^{A_v})f$ identifica-se com a matriz anti-simétrica $(a_{ij})$, onde

$$\begin{aligned}
a_{12} &= L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v)\frac{\partial f_2}{\partial z_v} - (L_2(z_v) - L_2(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v))\frac{\partial f_1}{\partial z_v} \\
a_{13} &= L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v)\frac{\partial f_3}{\partial z_v} - (L_3(z_v) - L_3(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v))\frac{\partial f_1}{\partial z_v} \\
&\vdots \\
a_{1n} &= L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v)\frac{\partial f_n}{\partial z_v} - (L_n(z_v) - L_n(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v))\frac{\partial f_1}{\partial z_v} \\
a_{23} &= (L_2(z_v) - L_2(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v))\frac{\partial f_3}{\partial z_v} - (L_3(z_v) - L_3(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v))\frac{\partial f_2}{\partial z_v} \\
&\vdots \\
a_{2n} &= (L_2(z_v) - L_2(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v))\frac{\partial f_n}{\partial z_v} - (L_n(z_v) - L_n(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v))\frac{\partial f_2}{\partial z_v} \\
&\vdots \\
a_{n-1\ n} &= (L_{n-1}(z_v) - L_{n-1}(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v))\frac{\partial f_n}{\partial z_v} \\
&\quad - (L_n(z_v) - L_n(\bar{z}_v)L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v))\frac{\partial f_{n-1}}{\partial z_v}\ .
\end{aligned}$$

Logo

$$\|C\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} \leq C\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}(1 + \|\delta_0 \bar{z}_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}})\|\delta_0 z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha,v\\ \Omega_v}}\ .$$

Nesta estimativa há perda de uma derivada. Para remediar isto façamos

$$\delta_0^v z_v = S_{N_{v+1}}\delta_0^v z_v + (I - S_{N_{v+1}})\delta_0^v z_v\ .$$

Segue então de (3.5.1) e (3.5.2) que

$$\|S_{N_{v+1}}\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha,v\\ \Omega_v}} \leq C\ N_{v+1}\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}$$

$$\|(I - S_{N_{v+1}})\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha,v\\ \Omega_v}} \leq C\ N_{v+1}^{-\lambda}\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\lambda+\alpha,v\\ \Omega_v}}\ .$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|C\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} &\leq C\ N_{v+1}\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}(1 + \|\delta_0\bar{z}_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}})\|\delta_0 z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}+\\ &+ C\ N_{v+1}^{-\lambda}\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}(1 + \|\delta_0\bar{z}_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}})\|\delta_0 z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\lambda+\alpha,v\\ \Omega_v}}\ .\end{aligned} \tag{3.6.26}$$

Juntado (3.6.24), (3.6.25) e (3.6.26) obtemos

$$\begin{aligned}\|\delta_0^v z_{v+1}\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} &\leq C\ N_{v+1}\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}(1 + \|\delta_0\bar{z}_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}})\|\delta_0 z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}})\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}+\\ &+ C\ N_{v+1}^{-\lambda}\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}(1 + \|\delta_0\bar{z}_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}})\|\delta_0 z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\lambda+\alpha,v\\ \Omega_v}}+\\ &+ C\ N_{v+1}^{-\lambda}\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\lambda+\alpha,v\\ \Omega_v}}\ .\end{aligned} \tag{3.6.27}$$

Vamos precisar agora de um lema:

**Lema 3.6.1.** *Seja* $\mathcal{Z} : \mathbb{C} \times S \to \mathbb{C} \times S,\quad (p,\theta) \mapsto (z(p,\theta)),\theta)$ *um difeomorfismo global. Usando a cobertura por sistemas de coordenadas fixada em* $S$*, podemos definir* $\|\ \|_{\substack{1+\alpha,z\\ \mathbb{C}\times S}}, 0 < \alpha < 1$. *Seja* $(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$ *uma carta desta cobertura. Seja* $w : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma aplicação de classe* $C^\infty$ *tal que* $\|w\|_{\substack{1+\alpha,z\\ \mathbb{C}\times S}} < \frac{1}{2}$*. Então:*

*i)* $\mathcal{Z}' : \mathbb{C}\times S \to \mathbb{C}\times S,\quad (z,\theta) \mapsto (z'(z,\theta),\theta) = (z + w(z,\theta),\theta)$ *é também um difeomorfismo global e portanto* $(z',\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$ *é um sistema de coordenadas para* $\mathbb{C}\times S$.

*ii) As normas de Hölder em* $C^{1+\alpha}(\mathbb{C}\times S)$*, utilizando-se* $(z,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$ *ou* $(z',\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$ *como coordenadas são equivalentes.*

**Demonstração:**

i) Por hipótese

$$\|I - D\mathcal{Z}'\|_{C^\alpha(\mathbb{C}\times S)} < \frac{1}{2} \tag{3.6.28}$$

onde I é a matriz identidade e $D\mathcal{Z}'$ é a matriz jacobiana de $\mathcal{Z}'$ nas coordenadas

$(z,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$. Então $D\mathcal{Z}'$ é não singular em $\mathbb{C}\times S$ e se $\mathcal{Z}'(z,\theta)=\mathcal{Z}'(\tilde{z},\tilde{\theta})$, obtemos

$$|z-\tilde{z}| = |w(z,\theta)-w(\tilde{z},\theta)| \le \|w\|_{\substack{1,z\\ \mathbb{C}\times S}} |z-\tilde{z}| < \frac{1}{2}|z-\tilde{z}| \,. \tag{3.6.29}$$

ii) Seja $f$ em $C^{1+\alpha}(\mathbb{C}\times S)$ e denotemos por $F$ a expressão de $f$ nas coordenadas $(z',\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$. Então

$$\begin{aligned}\|f\|_{\substack{1+\alpha,z\\ \mathbb{C}\times S}} &= \|F\circ\mathcal{Z}'\|_{\substack{1+\alpha,z\\ \mathbb{C}\times S}}\\ &\le C\left(\|F\|_0 + \|F\|_{C^{1+\alpha}(\mathbb{C}\times S)}\|D\mathcal{Z}'\|_0^{1+\alpha} + \|F\|_{C^1(\mathbb{C}\times S)}\|D\mathcal{Z}'\|_{C^\alpha(\mathbb{C}\times S)}\right)\\ &\le C\|F\|_{C^{1+\alpha}(\mathbb{C}\times S)} = C\|f\|_{\substack{1+\alpha,z'\\ \mathbb{C}\times S}}\end{aligned}$$

pois $\|D\mathcal{Z}'\|_{C^\alpha(\mathbb{C}\times S)} < \frac{3}{2}$ (veja (3.6.28)).

Para a desigualdade oposta, observemos que ${\mathcal{Z}'}^{-1}$ é do mesmo tipo que $\mathcal{Z}'$, isto é

$$(\mathcal{Z}')^{-1}(p,\theta) = ((z')^{-1}(p,\theta),\theta)\,, \tag{3.6.30}$$

onde

$$(z')^{-1}(z,\theta) = z' - \omega((\mathcal{Z}')^{-1}(z',\theta)) = z' - \omega'(z',\theta). \tag{3.6.31}$$

Como $\|D(\mathcal{Z}')^{-1}\|_{C^\alpha(\mathbb{C}\times S)} \le 2\,$, obtemos similarmente a outra desigualdade.

**Observação 3.6.1**: Usando o fato que

$$\begin{aligned}\|w'\|_{\substack{1+\alpha,z'\\ \mathbb{C}\times S}} &= C\left(\|w\|_{\substack{1+\alpha,z\\ \mathbb{C}\times S}}\|D(\mathcal{Z}')^{-1}\|_0^{1+\alpha} + \|w\|_{\substack{1,z\\ \mathbb{C}\times S}}\|D(\mathcal{Z}')^{-1}\|_{C^\alpha(\mathbb{C}\times S)} + \|w\|_0\right)\\ &\le C\|w\|_{\substack{1+\alpha,z\\ \mathbb{C}\times S}}\end{aligned} \tag{3.6.32}$$

obtemos para um subconjunto compacto $K$ de $\mathbb{C}$, uma constante $C(K)$ tal que

$$\|\mathcal{Z}'\|_{C^1(K\times S)} \le C(\|z\|_{\substack{1,z\\ K\times S}} + \|w_\nu\|_{\substack{1,z\\ K\times S}} + 1) \le C(K) \tag{3.6.33}$$

e

$$\|(\mathcal{Z}')^{-1}\|_{C^1(K\times S)} \le C(\|z'\|_{\substack{1,z'\\ K\times S}} + \|w'_\nu\|_{\substack{1,z'\\ K\times S}} + 1) \le C(K) \tag{3.6.34}$$

Vamos acrescentar agora às hipóteses $(H1)_v, (H_2)_v$ e $(H_3)_v$ as seguintes hipóteses indutivas:

$$\|\delta_0^{v-1} z_v\|_{\substack{\alpha, v-1 \\ \Omega_{v-1}}} \leq C_4 \left[ N_v \|\delta_0^{v-2} z_{v-1}\|^2_{\substack{\alpha, v-2 \\ \Omega_{v-2}}} + N_v^{-\lambda} N_{v-1}^{\lambda+1} \right] \tag{$H4$}_v$$

$$\|\delta_0 \bar{z}_v\|_{\substack{\alpha, v \\ \Omega_v}} \leq C_5 \tag{$H5$}_v$$

$$\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{\alpha, v \\ \Omega_v}} \leq C_6 \tag{$H6$}_v$$

$$\|w_{v-1}\|_{\substack{1+\alpha, v-1 \\ C \times S}} \leq N_v^{-1} \text{ e } \|w_{v-1}\|_{\substack{1+\alpha, 0 \\ C \times S}} \leq N_v^{-1} \tag{$H7$}_v$$

$$\|z_v\|_{\substack{1+\alpha+j, 0 \\ \Omega_0}} \leq N_v^j, \; j = 0, 1, \ldots, \lambda + 1 \; . \tag{$H8$}_v$$

Aqui $C_4, C_5$ e $C_6$ são constantes independentes de $v$, $N_v = N_{v-1}^{3/2}$ e $N_0 > 1$ será escolhido posteriormente. Notemos que escolhendo $N_0$ suficientemente grande, é possível fazer $\Sigma_{v=0}^{\infty} N_v^{-1}$ arbitrariamente pequeno (ver a demonstração do Lema I.2i)).

Notemos também que algumas da hipóteses indutivas não fazem sentido se $v = 0$. Para que $(H4)_v$ faça sentido quando $v = 1$, colocamos

$$\delta_0^{-1} = \delta_0^0, \; \Omega_{-1} = \Omega_0 \qquad \text{e}$$

$$\|\delta_0^0 z_1\|_{\substack{\alpha, 0 \\ \Omega_0}} \leq C_4 \left[ N_1 \|\delta_0^0 z_0\|^2_{\substack{\alpha, 0 \\ \Omega_0}} + N_1^{-\lambda} N_0^{\lambda+1} \right] \; . \tag{$H4$}_1$$

Vamos mostrar que se escolhermos

$$z_0 = z, \quad \Omega_0 = \Delta \times S \; ,$$

$N_0$ suficientemente grande e $\epsilon_0$ em (3.6.1) suficientemente pequeno, então a seqüência definida por $z_v = z_{v-1} + w_{v-1}$ onde $w_{v-1} = -S_{N_v} \tilde{K}_1^{v-1} \delta_0^{v-1} z_{v-1}$ cumpre, para $v = 1, 2, \ldots$ , todas as hipóteses indutivas $(H1)_v, \ldots, (H8)_v$.

Vamos verificar primeiro que as hipóteses nos estágios $\leq v$ implicam as hipóteses no estágio $v + 1$. Posteriormente verificaremos que as hipóteses são verdadeiras quando $v = 1$, com as escolhas anteriores.

Como $z_v = z_0 + \Sigma_{j=0}^{v+1} w_j$, a hipótese $(H7)_v$ implica que

$$\sum_{j=0}^{v-1} \|w_j\|_{\substack{1+\alpha,0 \\ C\times S}} \leq \sum_{j=0}^{\infty} N_j^{-1} \ .$$

Se $N_0$ for suficientemente grande a soma da série acima é $< \frac{1}{2}$ e portanto pelo Lema anterior, todas as normas $\| \ \|_{\substack{\alpha,j \\ C\times S}}, j = 0, \ldots, v$ são uniformemente equivalentes.

Comecemos mostrando $(H7)_{v+1}$. Segue de (3.6.22) que

$$\|w_v\|_{\substack{1+\alpha,v \\ C\times S}} \leq C \ N_{v+1} \|\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v \\ \Omega_v}} \ .$$

Como $\delta_0^v = M_v \ M_{v-1}^{-1} \delta_0^{v-1}$, nas entradas de $M_v$ e $M_{v-1}^{-1}$ comparecem somente termos que podem ser majorados por $C_5$ ou $C_6$ e como $\Omega_v \subset \Omega_{v-1}$ devido à $(H_3)_v$, obtemos:

$$\begin{aligned} \|w_v\|_{\substack{1+\alpha,v \\ C\times S}} &\leq C(5,6) N_{v+1} \|\delta_0^{v-1} z_v\|_{\substack{\alpha,v \\ \Omega_v}} \\ &\leq C(5,6) N_{v+1} \|\delta_0^{v-1} z_v\|_{\substack{\alpha,v-1 \\ \Omega_{v-1}}} \ , \end{aligned} \tag{3.6.35}$$

usamos a notação $C(5,6)$ para denotar uma constante que depende somente de constantes universais e das constantes $C_5$ e $C_6$.

A hipótese $(H4)_v$ permite utilizar o Lema de Moser I.3.1 com as seguintes escolhas:

$$p_v = \|\delta_0^{v-1} z_v\|_{\substack{\alpha,v-1 \\ \Omega_{v-1}}}$$

$$s = 1, \ \mu = 2, \ t = 1 \quad \text{e} \quad \lambda = 14$$

Se $N_0$ for suficientemente grande, $N_1^{-1} \leq \frac{1}{(2C_4)^2}$.

Como $\delta_0^0 z_0 = M_0 \delta_0 z_0 = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix}$ e (3.6.1) implicam que $\|\sigma_1\|_{\substack{1+\alpha,0 \\ C\times S}} < \epsilon_0, j = 1, \ldots, n$, podemos tomar $p_0 = \|\delta_0^0 z_0\|_{\substack{\alpha,0 \\ \Omega_0}}$ menor que $\frac{N_1^{-2}}{2C_4}$, se $\epsilon_0$ for escolhido suficientemente pequeno.

Pelo Lema de Moser,

$$p_v \leq \frac{N_{v+1}^{-2}}{2C_4} . \tag{3.6.36}$$

Logo (3.6.35) implica que

$$\|w_v\|_{\substack{1+\alpha, v \\ C\times S}} \leq C(5,6) N_{v+1} \frac{N_{v+1}^{-2}}{2C_4} = \frac{C(5,6)}{C_4} N_{v+1}^{-1} .$$

Como as normas $\| \, \|_{\substack{1+\alpha, j \\ C\times S}}$ $j = 0, \ldots, v$ são equivalentes, existe $\tilde{C} > 1$ tal que

$$\|w_v\|_{\substack{1+\alpha, 0 \\ C\times S}} \leq \tilde{C} \frac{C(5,6)}{C_4} N_{v+1}^{-1} .$$

Escolhemos $C_4$ suficientemente grande para que $\tilde{C}\frac{C(5,6)}{C_4} < 1$. Assim $C_4$ passa a depender de $C_5$ e $C_6$ e, se necessário, teremos que aumentar $N_0$ e diminuir $\epsilon_0$ para que as hipóteses do Lema de Moser ainda continuem satisfeitas.

Concluímos então a validade de $(H7)_{v+1}$. Logo, utilizando novamente o Lema 3.6.1, podemos concluir que todas as normas $\| \, \|_{\substack{1+\alpha, j \\ C\times S}}$, $j = 0, \ldots, v+1$ são equivalentes.

Além disso, a parte (i) do Lema 3.6.1 diz que $(z, \theta) \longmapsto (z_{v+1}, \theta) \in \mathbb{C} \times S$ é um difeomorfismo, ou seja $(H1)_{v+1}$ é verdadeira.

Provemos $(H3)_{v+1}$. Conclui-se de $(H7)_{v+1}$ que

$$\sup_{C\times S} \|z_{v+1} - z_v\| \leq N_{v+1}^{-1}$$

e portanto

$$|z_v| \leq |z_{v+1}| + N_{v+1}^{-1} .$$

Tomemos

$$r_{v+1} = r_v - 2N_{v+1}^{-1}, \qquad r_0 = 1 . \tag{3.6.37}$$

Se $|z_{v+1}| < r_{v+1}$, temos que

$$|z_v| \leq |z_v| - N_{v+1}^{-1} < r_v$$

ou seja, com esta escolha de $r_{v+1}$ podemos garantir que $\tilde{\Omega}_{v+1} \subset \Omega_v$. Portanto vale $(H3)_{v+1}$.

Como $r = \inf r_v \leq 1 - 2\Sigma_{v=0}^{\infty} N_{v+1}^{-1}$, para que $r > \frac{1}{2}$, devemos exigir que $\Sigma_{v=0}^{\infty} N_{v+1}^{-1} < \frac{1}{4}$, o que é possível tomando-se $N_0$ suficientemente grande.

Passemos agora a prova de $(H4)_{v+1}$.

Devemos ter sempre em mente que $\|\sigma_j\|_{\substack{1+\lambda+\alpha,0\\ \Omega_0}}$, $j = 1, \ldots, n$ são limitadas.

Como

$$\|\delta_0 z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} \leq \|\delta_0 z_0\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} + C \sum_{j=0}^{v-1} \|w_j\|_{\substack{1+\alpha,v\\ \Omega_v}}$$

então $\|\delta_0 z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}}$ é limitada independentemente de $v$.

Usamos agora a estimativa (3.6.27), as hipóteses $(H5)_v, (H6)_v$ e o fato que $\delta_0 = M_v^{-1}\delta_0^v$ para concluir que

$$\|\delta_0^v z_{v+1}\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} \leq C(5,6)\left(N_{v+1}\|\delta_0^v z_v\|^2_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} + N_{v+1}^{-\lambda}\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,v\\ \Omega_v}}\right) .$$

Utilizando que $\delta_0^v = M_v M_{v-1}^{-1}\delta_0^{v-1}$ e que $\tilde{\Omega}_v \subset \Omega_{v-1}$,

$$\|\delta_0^v z_{v+1}\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} \leq C(5,6)\left(N_{v+1}\|\delta_0^{v-1} z_v\|^2_{\substack{\alpha,v-1\\ \Omega_{v-1}}} + N_{v+1}^{-\lambda}\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,v\\ \Omega_v}}\right) . \tag{3.6.38}$$

Para concluir $(H4)_{v+1}$, basta provar que

$$\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,v\\ \Omega_v}} \leq C(5,6) N_v^{\lambda+1} . \tag{3.6.39}$$

Lembremos que

$$\delta_0^v z_v = \delta_0^{\mathcal{A}_v} z_v + R_v z_v = R_v z_v .$$

Seja $\mathcal{Z}_v : \mathbb{C} \times S \to \mathbb{C} \times S, \quad (z,\theta) \mapsto (z_\nu, \theta)$. Pela Proposição II.3.6b),

$$\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,v\\ \Omega_v}} = \|R_v z_v \circ \mathcal{Z}_v^{-1}\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,v\\ \Omega_v}} \leq$$

$$\leq C\left(\|R_v z_v\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}}\|\mathcal{Z}_v^{-1}\|^{1+\alpha+\lambda}_{C^1(\Delta_{r_v}\times S)} + \|R_v z_v\|_{\substack{1,0\\ \Omega_0}}\|\mathcal{Z}_v^{-1}\|_{C^{1+\alpha+\lambda}_{(\Delta_{r_v}\times S)}} + \|R_v z_v\|_0\right) .$$

Como observamos anteriormente em (3.6.33) e (3.6.34), verifica-se que tanto a norma $\|\mathcal{Z}_v\|_{C^1(K\times S)}$ como a norma $\|\mathcal{Z}_v^{-1}\|_{C^1(K\times S)}$ são uniformemente limitadas. Podemos então usar a desigualdade Proposição II.3.7 e obter:

$$\|\mathcal{Z}_v^{-1}\|_{C^{1+\alpha+\lambda}(\Delta_{r_v}\times S)} \le C\|\mathcal{Z}_v\|_{C^{1+\alpha+\lambda}(\Delta_{r_0}\times S)} \, .$$

Logo

$$\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,v\\ \Omega_v}} \le C\left(\|R_v z_v\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}} + \|R_v z_v\|_{\substack{1,0\\ \Omega_0}}\|\mathcal{Z}_v\|_{C^{1+\alpha+\lambda}_{(\Delta_{r_0}\times S)}}\right) \, .$$

Como $\mathcal{Z}_v(z,\theta) = (z_v(z,\theta),\theta)$,

$$\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,v\\ \Omega_v}} \le C\left(\|R_v z_v\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}} + \|R_v z_v\|_{\substack{1,0\\ \Omega_0}}\|z_v\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}}\right) \, . \tag{3.6.40}$$

Para majorar $R_v z_v$ usamos a Proposição II.3.5. Por exemplo a primeira linha da $R_v z_v$ é majorada por

$$\begin{aligned}\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v)\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}} \le \|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}}\|L_1(z_v)\|_0 + \\ + \|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_0\|L_1(z_v)\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}} \, .\end{aligned} \tag{3.6.41}$$

Afirmamos que

$$\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}} \le C(5,6)\|L_1(\bar{z}_v)\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}} \, . \tag{3.6.42}$$

De fato, isto seguirá por indução sobre $\lambda$. Primeiramente notemos que

$$|L_1(\bar{z}_v)| \ge |L_1(\bar{z}_0)| - \sum_{j=0}^{v-1}|L_1\bar{w}_j| \ge 1 - C\sum_{j=0}^{v-1}\|w_j\|_{\substack{1+\alpha,0\\ C\times S}} \ge \frac{1}{2}$$

se $N_0$ for suficientemente grande. Agora

$$\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}} = \|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_0 + \sup_{(z,\theta),(z',\theta)\in\Omega_0} \frac{|L_1(\bar{z}_v)^{-1}(z,\theta) - L_1(\bar{z}_v)^{-1}(z',\theta')|}{|(z,\theta)-(z',\theta')|^\alpha} =$$
$$= 2 + \sup_{(z,\theta),(z',\theta)\in\Omega_0} \frac{1}{|L_1(\bar{z}_v)(z,\theta)||L_1(\bar{z}_v)(z',\theta')|} \frac{|L_1(\bar{z}_v)(z,\theta) - L_1(\bar{z}_v)(z',\theta')|}{|(z,\theta)-(z',\theta')|^\alpha} \leq$$
$$\leq 2 + 4\|L_1(\bar{z}_v)\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}} \leq C\|L_1(\bar{z}_v)\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}} \,,$$

pois $|L_1(\bar{z})| \geq \frac{1}{2}$. A título de simplificação omitimos na definição da norma $\| \quad \|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}}$ as funções da partição da unidade que fixamos em $S$. No restante deste trabalho faremos também esta omissão. Isto provoca somente uma alteração no valor das constantes que aparecem nas estimativas.

Notemos que com a mesma técnica podemos provar que

$$\|L_1(\bar{z}_v)^{-j}\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}} \leq C_j\|L_1(\bar{z}_v)^j\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}}, \quad j = 1,2,\ldots$$

e usando novamente a Proposição II.3.5,

$$\|L_1(\bar{z}_v)^{-j}\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}} \leq C_j(5,6)\|L_1(\bar{z}_v)\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}}, \quad j = 1,2,\ldots \tag{3.6.43}$$

onde $C_j(5,6)$ é uma constante que depende de $j$, de $C_5$ e $C_6$.

Um cálculo simples mostra que

$$\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{1+\alpha,0\\ \Omega_0}} \leq C\left(\|\frac{-1}{L_1(\bar{z})^2}\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}}\|L_1(\bar{z}_v)\|_{\substack{1,0\\ \Omega_0}} + \|\frac{-1}{L_1(\bar{z}_v)^2}\|_0\|L_1(\bar{z}_v)\|_{\substack{1+\alpha\\ \Omega_0}}\right) .$$

Usando (3.6.43) com $j = 2$,

$$\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{1+\alpha,0\\ \Omega_0}} \leq C_2(5,6)\|L_1(\bar{z}_v)\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}}\|L_1(\bar{z}_v)\|_{\substack{1,0\\ \Omega_0}} + 4\|L_1(\bar{z}_v)\|_{\substack{1+\alpha,0\\ \Omega_0}} \leq$$
$$\leq C(5,6)\|L_1(\bar{z}_v)\|_{\substack{1+\alpha,0\\ \Omega_0}} \,,$$

devido à $(H5)_v$.

O caso geral segue por indução usando que a derivada de $L(\bar{z}_v)^{-1}$ de ordem $k$ é uma soma finita de derivadas de ordens menores ou iguais a $k$ da função $z \mapsto \frac{1}{z}$ calculada em

$L_1(\bar{z}_v)$ com derivadas de $L_1(\bar{z}_v)$ de ordens $k_1, k_2, \ldots$ com $k_1 + k_2 + \cdots \leq k$ e em cada termo desta soma usamos a estimativa para o produto Proposição II.3.5 juntamente com (3.6.43).

Portanto, segue de (3.6.41) que

$$\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v)\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}} \leq C(5,6)\left(\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}} + \|L_1(z_v)\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}}\right)$$

onde usamos $(H6)_v$ e o fato que

$$\|L_1(z_v)\|_0 \leq \|L_1(z_0)\|_0 + \left\|L_1\left(\sum_{j=0}^{v-1} w_j\right)\right\|_0$$

é limitado.

Logo

$$\|L_1(\bar{z}_v)^{-1}L_1(z_v)\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}} \leq C(5,6)\|z_v\|_{\substack{2+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}} .$$

Podemos estimar deste mesmo modo todos os outros termos de $R_v Z_v$. Voltando a (3.6.40),

$$\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,v\\ \Omega_v}} \leq C(5,6)\left(\|z_v\|_{\substack{2+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}} + \|z_v\|_{\substack{2,0\\ \Omega_0}}\|z_v\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}}\right) .$$

Utilizamos agora a hipótese $(H8)_v$

$$\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,v\\ \Omega_v}} \leq C(5,6)(N_v^{\lambda+1} + N_v N_v^{\lambda}) .$$

Retornando a (3.6.38)

$$\|\delta_0^v z\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} \leq C(5,6)\left(N_{v+1}\|\delta_0^{v-1} z_v\|^2_{\substack{\alpha,v-1\\ \Omega_{v-1}}} + N_{v+1}^{-\lambda} N_v^{\lambda+1}\right) .$$

Se escolhermos $C_4$ maior que esta última constante $C(5,6)$ (para isto novamente $\epsilon_0$ e $N_0^{-1}$ podem diminuir), obteremos $(H4)_{v+1}$.

Provemos agora $(H8)_{v+1}$. Seja $j \leq \lambda + 1,\ j \in \mathbf{Z}_+$

$$\|z_{v+1}\|_{\substack{\alpha+1+j,0\\ \Omega_0}} \leq \|z_v\|_{\substack{\alpha+1+j,0\\ \Omega_0}} + \|w_v\|_{\substack{\alpha+1+j,0\\ \Omega_0}} = N_v^j + \|w_v\|_{\substack{\alpha+1+j,0\\ \Omega_0}} .$$

devido à $(H8)_v$.

Agora

$$\|w_v\|_{\substack{1+\alpha+j,0\\ \Omega_0}} \leq C\left(\|w_v\|_{\substack{1+\alpha+j,v\\ C\times S}}\|\mathcal{Z}_v\|^{1+\alpha+j}_{C^1(\Delta_{r_v}\times S)} + \|w_v\|_{\substack{1,v\\ C\times S}}\|\mathcal{Z}_v\|_{C^{1+\alpha+j}_{(\Delta_{r_v}\times S)}} + \|w_v\|_0\right) .$$

Como $\mathcal{Z}_v(z,\theta) = (z_v,\theta)$

$$\|w_v\|_{\substack{1+\alpha+j,0\\ \Omega_0}} \leq C\left(\|w_v\|_{\substack{1+\alpha+j,v\\ C\times S}}\left(1+\|z_v\|_{\substack{1,0\\ \Omega_0}}\right)^{1+\alpha+j} + \right.$$

$$\left. +\|w_v\|_{\substack{1,v\\ C\times S}}\left(1+\|z_v\|_{\substack{1+\alpha+j,0\\ \Omega_0}}\right) + \|w_v\|_0\right) .$$

Sabemos que $\|z_v\|_{\substack{1,0\\ \Omega_0}}$ e $\|w_v\|_{\substack{1,v\\ C\times S}}$ são limitados, portanto

$$\|w_v\|_{\substack{1+\alpha+j,0\\ \Omega_0}} \leq C\left(\|w_v\|_{\substack{1+\alpha+j,v\\ C\times S}} + N_v^j\right) ,$$

devido novamente à $(H8)_v$.

Por outro lado, (3.5.1) e (3.6.15) implicam que

$$\begin{aligned}\|w_v\|_{\substack{\alpha+1+j,v\\ C\times S}} = \|S_{N_{v+1}}\tilde{K}_0^v\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha+1+j,v\\ C\times S}} &\leq C\ N_{v+1}^{j+1}\|\tilde{K}_1^v\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ C\times S}} \leq \\ &\leq C\ N_{v+1}^{j+1}\|\delta_0^v z_v\|_{\substack{\alpha,v\\ \Omega_v}} \leq \\ &\leq C(5,6)N_{v+1}^{j+1}\|\delta_0^{v-1}z_v\|_{\substack{\alpha,v-1\\ \Omega_{v-1}}} .\end{aligned}$$

Usamos agora a desigualdade (3.6.36)

$$\|w_v\|_{\substack{\alpha+1+j,v\\ C\times S}} \leq C(5,6)N_{v+1}^{j+1}\frac{N_{v+1}^{-2}}{2C_4} .$$

Assim

$$\begin{aligned}\|z_{v+1}\|_{\substack{1+\alpha+j,0\\ \Omega_0}} &\leq C(5,6)\left(N_{v+1}^{j-1} + N_v^j\right) \\ &= C(5,6)\left(N_{v+1}^{-1} + \left(\frac{N_v}{N_{v+1}}\right)^j\right)N_{v+1}^j \\ &\leq N_{v+1}^j\end{aligned}$$

se $N_0$ for escolhido suficientemente grande pois $N_{v+1} = N_v^{3/2}$. Isto prova $(H8)_{v+1}$.

Passemos agora a $(H5)_{v+1}$.

$$\|\delta_0 \bar{z}_{v+1}\|_{\substack{\alpha,v+1\\ \Omega_{v+1}}} \leq C\|\delta_0 \bar{z}_{v+1}\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}} \leq C\left(\|\delta_0 \bar{z}_0\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}} + \sum_{j=0}^{v} \|w_j\|_{\substack{1+\alpha,0\\ \mathbb{C}\times S}}\right) . \tag{3.6.44}$$

Como $\delta_0 \bar{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\sum_{j=0}^{v} \|w_j\|_{\substack{1+\alpha,0\\ \mathbb{C}\times S}} \leq \sum_{j=0}^{\infty} N_j < \frac{1}{2}$, basta tomar $C_5$ maior que $\frac{3}{2}C$ onde $C$ é a constante que comparece no último termo (3.6.44) para obtermos $(H5)_{v+1}$.

Finalmente como $L_1(\bar{z}_0) = 1$,

$$\begin{aligned} |1 - L_1 \bar{z}_{v+1}| &= |L_1(\bar{z}_0) - L_1(\bar{z}_{v+1})| \leq |\delta_0(\bar{z}_0 - \bar{z}_{v+1})| \\ &\leq C\sum_{j=0}^{v} \|w_j\|_{\substack{1+\alpha,0\\ \mathbb{C}\times S}} \leq C\sum_{j=0}^{\infty} N_j^{-1} < \frac{1}{2} , \end{aligned} \tag{3.6.45}$$

se $N_0$ for suficientemente grande.

Então $L_1(\bar{z}_{v+1}) \neq 0$ em $\mathbb{C} \times S$, provando assim $(H2)_{v+1}$.

Observamos também que pelo mesmo motivo

$$\left|1 - \frac{\partial}{\partial x}\bar{z}_{v+1}\right| < \frac{1}{2} \quad \text{em} \quad \mathbb{C} \times S . \tag{3.6.46}$$

Resta mostrar somente $(H6)_{v+1}$.

Como

$$|L_1(\bar{z}_{v+1})| \geq |L_1(\bar{z}_0)| - \left|\sum_{j=0}^{v} L_1 w_j\right| > \frac{1}{2} \quad \text{em} \quad \mathbb{C} \times S$$

e

$$\|L_1(\bar{z}_{v+1})^{-1}\|_{\substack{\alpha,v+1\\ \Omega_{v+1}}} = \|L_1(\bar{z}_{v+1})^{-1}\|_0 +$$

$$+ \sup_{(z,\theta),(z',\theta')\in\Omega_{v+1}} \frac{|L_1(\bar z_{v+1})^{-1}(z,\theta) - L_1(\bar z_{v+1})^{-1}(z',\theta')|}{|(z,\theta)-(z',\theta')|^\alpha} \leq 2+$$

$$+ \sup_{(z,\theta),(z',\theta)\in\Omega_{v+1}} \frac{1}{|L_1(\bar z_{v+1})(z,\theta)||L_1(\bar z_{v+1})(z',\theta')|} \frac{|L_1(\bar z_{v+1})(z,\theta) - L_1(\bar z_{v+1})(z',\theta')|}{|(z,\theta)-(z',\theta')|^\alpha} \leq$$

$$\leq 2 + 4\|L_1(\bar z_{v+})\|_{\substack{\alpha,v+1\\ \Omega_{v+1}}} \leq 2 + 4C_5 < C_6$$

se tomarmos $C_6$ suficientemente grande.

Vamos mostrar agora que a partir de

$$z_0 = z, \quad \Omega_0 = \Delta \times S$$

e com as constantes $C_4, C_5$ e $C_6$ obtidas acima, as hipóteses indutivas valem quando $v = 1$. Devido à (3.6.35) e (3.6.1),

$$\begin{aligned}(H7)_1 : \|w_0\|_{\substack{1+\alpha,0\\ C\times S}} &\leq CN_1\|\delta_0^0 z_0\|_{\substack{\alpha,0\\ C\times S}} \\ &= CN_1\| \begin{pmatrix}\sigma_1\\ \vdots \\ \sigma_n\end{pmatrix} \|_{\substack{\alpha,0\\ C\times S}} \\ &\leq CN_1\epsilon_0 \leq N_1^{-1}\end{aligned}$$

se $\epsilon_0 < \frac{N_1^{-2}}{C}$.

Segue do Lema 3.6.1 a hipótese $(H1)_1$, pois $N_1^{-1} < \frac{1}{2}$.

Como $r_1 = 1 - 2N_1^{-1}$ então $\bar\Omega_1 \subset \Omega_0$ pois $|z_0| \leq |z_1| + |w_0| < 1 - N_1^{-1} < 1$.

$(H4)_1$ é expressa por

$$\|\delta_0^0 z_1\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}} \leq C_4[N_1\|\delta_0^0 z_0\|^2_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}} + N_1^{-\lambda}N_0^{\lambda+1}]$$

segue da desigualdade (3.6.27) que

$$\|\delta_0^0 z_1\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}} \leq CN_1\|\delta_0 z_0\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}}\|\delta_0^0 z_0\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}} + CN_1^{-\lambda}\|\delta_0^0 z_0\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}}.$$

Mas $\delta_0^0 = M_0\delta_0$ e $M_0$ é a matriz identidade, logo

$$\|\delta_0^0 z_1\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}} \leq CN_1\|\delta_0 z_0\|^2_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}} + CN_1^{-\lambda}\|\delta_0 z_0\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}}.$$

Basta então mostrar que $\|\delta_0 z_0\|_{\substack{1+\alpha+\lambda,0\\ \Omega_0}} \leq N_0^{\lambda+1}$. Isto é óbvio pois $\delta_0 z_0 = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix}$ tem norma $C^{1+\alpha+\lambda}$ limitada e $N_0$ pode ser tomado tão grande quanto se queira.

$$(H2)_1 : |L_1(\bar{z}_1) - L_1(\bar{z}_0)| \leq C\|\bar{w}_0\|_{\substack{1+\alpha,0\\ \mathbb{C}\times S}} < CN_1^{-1} < \frac{1}{2}$$

como $L_1(\bar{z}_0) = 1$ então $L_1(\bar{z}_1) \neq 0$ em $\mathbb{C} \times S$.

$$(H5)_1 : \|\delta_0 \bar{z}_1\|_{\substack{\alpha,1\\ \Omega_1}} \leq C\|\delta_0 \bar{z}_1\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}},$$

devido ao Lema 3.6.1 e $(H7)_1$. Portanto

$$\|\delta_0 \bar{z}_1\|_{\substack{\alpha,1\\ \Omega_1}} \leq C\left(\|w_0\|_{\substack{1+\alpha,0\\ \Omega_0}} + \|\delta_0 \bar{z}_0\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}}\right) \leq C_5$$

$$(H6)_1 : |L_1(\bar{z})| \geq |L_1(\bar{z}_0)| - |L_1 \bar{w}_0| > \frac{1}{2},$$

logo

$$\|L_1(\bar{z}_1)^{-1}\|_{\substack{\alpha,1\\ \Omega_1}} \leq 2 + 4\|L_1(\bar{z}_1)\|_{\substack{\alpha,1\\ \Omega_1}} \leq 2 + 4C_5 \leq C_6$$

$(H8)_1$ segue do fato que $z_1 = z_0 + w_0$, $\|w_0\|_{\substack{1+\alpha+j,0\\ \Omega_v}} \leq C\ N_1^{j+1}\|\delta_0^0 z_0\|_{\substack{\alpha,0\\ \Omega_0}}$ (ver (3.6.22)) e $\delta_0 z_0 = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix}$ tem norma menor que $\epsilon_0$ que podemos eventualmente diminuir uma vez mais.

Assim, tomando-se $N_0$ suficientemente grande e $\epsilon_0$ suficientemente pequeno, as hipóteses indutivas valem para $v = 1, 2, \ldots$

Notemos agora que

$$\Delta_{\frac{1}{4}} \times S \subset \Omega_v,\ v = 1, 2, \ldots\ .$$

De fato, se $|z_0| \leq \frac{1}{4}$,

$$|z_v| \leq |z_0| + \sum_{j=0}^{v-1} N_j^{-1} \leq |z_0| + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} < \inf\ r_v\ .$$

Agora $(H7)_{v+1}$ diz que $\|z_{v+1} - z_v\|_{\substack{1+\alpha,0\\ \mathbb{C}\times S}} \leq N_{v+1}^{-1}$ e como $\sum_{j=1}^{\infty} N_j^{-1} < \frac{1}{4}$, $(z_v)$ é uma seqüência de Cauchy em $C^{1+\alpha}(\Delta_{\frac{1}{4}} \times S)$ que deve então convergir para alguma função $z_\infty \in C^{1+\alpha}(\Delta_{\frac{1}{4}} \times S)$.

Segue de $(H4)_v$ e (3.6.36) que

$$\|\delta_0 z_v\|_{\substack{\alpha,0\\ \Delta_{\frac{1}{4}}\times S}} \leq C\|\delta_0 z_v\|_{\substack{\alpha,v-1\\ \Omega_{v-1}}} \leq C(5,6)\|\delta_0^{v-1} z_v\|_{\substack{\alpha,v-1\\ \Omega_{v-1}}} \leq \frac{C(5,6)}{2C_4} \cdot N_{v+1}^{-2}$$

Como $N_{v+1} \longrightarrow \infty$ quando $v \longrightarrow \infty$, segue que

$$\delta_0(z_\infty) = 0 \quad \text{em} \quad \Delta_{\frac{1}{4}} \times S$$

Segue de (3.6.46) que $dz_\infty \neq 0$ em $\Delta_{\frac{1}{4}} \times S$. Logo $z_\infty$ é uma solução do sistema anterior em $\Delta_{\frac{1}{4}} \times S$ com diferencial não nulo aí. Como este sistema é elítico, $z_\infty \in C^\infty(\Delta_{\frac{1}{4}} \times S)$, devido à teoremas clássicos de regularidade que podem ser encontrados por exemplo em [Au].

Com isto mostramos a integrabilidade de semi–global da estrutura perturbada $\mathcal{L}$; isto é, a partir de $\Delta \times S$ e da carta canônica de $\mathbb{C}$ construimos em $\Delta_{\frac{1}{4}} \times S$ uma função $C^\infty$ com diferencial não nulo tal que $\delta_0(z_\infty) = 0$. Uma demonstração inteiramente análoga permite construir a partir de $\Delta_R \times \mathbb{C}$, $R > 0$ e da carta canônica de $\mathbb{C}$ uma solução $z_{R,\infty}$ de classe $C^\infty$ e com diferencial não nulo em $\Delta_{\frac{R}{4}} \times \mathbb{C}$ do mesmo sistema. O Teorema 3.6.1 fica assim demonstrado.

## 3.7 Integrabilidade Local de Estruturas de Mizohata

Antes de construirmos uma solução global para a estrutura perturbada $\mathcal{L}$, mostraremos que a estrutura de Mizohata $\mathcal{M}$ gerada pelos campos (3.2.2) em $\mathbb{R}^{n+1}$ é localmente integrável se $n > 1$.

Mostraremos primeiramente usando o resultado semi-global que o sistema (3.2.6) tem uma solução $C^\infty$ com diferencial não nulo numa vizinhança da origem.

Como (3.2.6) é dado pelos campos

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial \bar z} + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial z}$$
$$L_j = \frac{\partial}{\partial \theta_{j-1}} + \sigma_j \frac{\partial}{\partial z}, \quad j = 2, \ldots, n$$

com $\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix}$ flat em $Im\ z = 0$, dado $N \in \mathbf{N}$ existem $C = C(N)$ e $R = R(N) < 1$ de modo que

$$\left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} \right\|_{\substack{1+\alpha,0 \\ \Delta_r \times S^{n-1}}} < C\, r^N, \quad r \leq R\,.$$

Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, $\psi \equiv 1$ em $\Delta_{\frac{R}{2}}, \psi \equiv 0$ fora de $\Delta_R$ e consideremos $\chi(z) = \psi(\frac{z}{R})$. Então

$$\left\| \chi \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} \right\|_{\substack{1+\alpha,0 \\ \mathbb{C} \times S^{n-1}}} = \left\| \chi \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} \right\|_{\substack{1+\alpha,0 \\ \Delta_R \times S^{n-1}}} \leq \|\chi\|_{C^{1+\alpha}(\Delta_R)} \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} \right\|_{\substack{1+\alpha,0 \\ \Delta_R \times S^{n-1}}} .$$

Mas $\|\chi\|_{C^{1+\alpha}(\Delta_R)} \leq r^{-(1+\alpha)} \|\psi\|_{C^{1+\alpha}(\mathbb{C})}$, logo

$$\left\| \chi \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} \right\|_{\substack{1+\alpha,0 \\ \mathbb{C} \times S^{n-1}}} \leq C\ R^N \cdot R^{-(1+\alpha)} < \epsilon_0\ .$$

Se $N \geq 2$ e $R$ for escolhido suficientemente pequeno.

Podemos aplicar os resultados do parágrafo anterior ao sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \bar z} + \chi \sigma_1 \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta_{j-1}} + \chi \sigma_j \dfrac{\partial}{\partial z},\ j = 2, \ldots, n\ . \end{cases}$$

e obter uma solução $C^\infty$ deste sistema com diferencial não nulo em $\Delta_{\frac{R}{4}} \times S^{n-1}$.

Como $\chi \equiv 1$ em $\Delta_{\frac{R}{4}} \times S$, $z_\infty$ é então uma solução de (3.2.6) com diferencial não nulo em $\Delta_{\frac{R}{4}} \times S^{n-1}$. Podemos concluir também que $z_\infty$ é uma solução dos sistemas (3.2.4) e (3.2.5) pois estes sistemas são obtidos de (3.2.6) pela multiplicação por uma matriz inversível e pela extensão de seus coeficientes. Notemos que esta solução foi obtida localizando apenas em $z$, mantendo a dependência global em $\theta \in S^{n-1}$.

Consideremos agora

$$Z(x,t) = z_\infty\left(x, \frac{|t|^2}{2}, \theta(t)\right)$$

onde $\theta(t) = t/|t| \in S^{n-1}$, $t \neq 0$.

Vamos verificar que $Z(x,t)$ está definida numa vizinhança $U$ da origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, que é de classe $C^\infty$, $dZ \neq 0$ nesta vizinhança e satisfaz o sistema (3.2.2) em $U$.

Notemos que para $t \neq 0, Z(x,t)$ é uma função de classe $C^\infty$ pois $z_\infty$ assim o é. Devemos estudar o comportamento de $Z(x,t)$ em $t = 0$.

Em primeiro lugar $Z$ é contínua em $t = 0$. De fato, $z_\infty$ satisfaz (3.2.6) e $\sigma_j$ é identicamente nula quando $s \leq 0$. Portanto

$$\frac{\partial z_\infty}{\partial \theta_j} + \rho_j \frac{\partial z_\infty}{\partial z} = \frac{\partial z_\infty}{\partial \theta_j} \equiv 0 \quad \text{se} \quad s \leq 0\ .$$

Logo $z_\infty(x,0,\theta)$ independe de $\theta$ e assim $Z(x,t)$ pode ser definida de modo a se tornar uma função contínua em toda uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Notemos também que

$$\frac{\partial}{\partial x} Z(x,t) = \frac{\partial z_\infty}{\partial x}\left(x, \frac{|t|^2}{2}, \theta(t)\right)$$

pode ser definida continuamente até $t = 0$ pois

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} z_\infty(x,s,\theta) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} z_\infty(x,s,\theta) \equiv 0 \quad \text{para} \quad s \leq 0\ .$$

As derivações com relação às variáveis $t_j$ são mais delicadas

$$\frac{\partial}{\partial t_j} Z = t_j \frac{\partial z_\infty}{\partial s} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial z_\infty}{\partial \theta_k}\frac{\partial \theta_k}{\partial t_j} \qquad j = 1, \ldots, n\ .$$

Como $\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial z_\infty}{\partial s} \equiv 0$ para $s \leq 0$, é suficiente provar que $\frac{\partial z_\infty}{\partial \theta_k}\frac{\partial \theta_k}{\partial t_j}$ pode ser definida conti nuamente até a origem. Para isto vamos utilizar o fato que $\frac{\partial z_\infty}{\partial \theta_k}$ anula–se de ordem infinita quando $s = \frac{|t|^2}{2} = 0$. Isto implica que, dado $N \in \mathbb{N}$, existe uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^{n+1}$ e uma constante $C_N$ de modo que

$$\left|\frac{\partial z_\infty}{\partial \theta_k}\right| \leq C_N|s|^N = \frac{C_N}{2}|t|^{2N} \tag{3.7.1}$$

nesta vizinhança.

É fácil ver que é possível encontrar uma constante $C$ tal que

$$\left|\frac{\partial \theta_k}{\partial t_j}\right| \leq C|t|^{-M}$$

numa certa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^{n+1}$ e para um certo $M \in \mathbb{N}$. Tomando $N > \frac{M}{2}$ vemos que $\frac{\partial z}{\partial t_j}$ pode ser definida continuamente até a origem. Assim $Z$ é uma função de classe $C^\infty$ fora da origem que pode ser estendida juntamente com sua derivada primeira continuamente até a origem; logo $Z$ é de classe $C^1$ numa vizinhança da origem. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para demonstrar que as derivadas de todas as ordens de $Z$ podem ser definidas de modo contínuo até a origem; as derivadas com relação a $t$ vêm sempre multiplicadas por um termo que se anula de ordem infinita quando $s = 0$.

Portanto $Z$ é de classe $C^\infty$ numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^{n+1}$.

A regra da cadeia implica que

$$M_j(Z) = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

nesta vizinhança, já que $z_\infty$ satisfaz o sistema (3.2.4).

Segue de (3.6.46) que $\frac{\partial}{\partial x} z_\infty(x, s, \theta) \neq 0$ para todo $(x + is, \theta) \in \Delta_{\frac{R}{4}} \times S$. Logo

$$\frac{\partial}{\partial x} Z(x,t) = \frac{\partial z_\infty}{\partial x}\left(x, \frac{|t|^2}{2}, \theta(t)\right) \neq 0$$

e portanto $dZ$ é não nulo numa vizinhaça da origem.

Concluimos assim que toda estrutura de Mizohata fortemente pseudo-convexa em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n > 1$, é localmente integrável pois pelo Lema 3.2.2 ela pode sempre ser colocada na forma (3.2.2).

## 3.8 Construção de uma solução global para a estrutura perturbada

Vamos mostrar agora que a estrutura perturbada $\mathcal{L} =< dz - \sigma_1 d\bar{z} - \sigma >^{\perp}$ é globalmente integrável. Dado $R > 0$, vimos que é possível construir uma solução $z_R \in C^\infty(\Delta_{\frac{R}{4}} \times S)$ de

$$\delta_0 z_R = 0 \quad \text{em} \quad \Delta_{\frac{R}{4}} \times S$$

.

Lembremos que se $\alpha' < \alpha$, a injeção $C^{1+\alpha}(\Delta_{\frac{R}{4}} \times S) \hookrightarrow C^{1+\alpha'}(\Delta_{\frac{R}{4}} \times S)$ é compacta (Observação II.3.5).

Para $N \in \mathrm{N}$, as funções $z_1, \ldots, z_N, \ldots$ estão todas definidas em $\Delta_{\frac{1}{4}} \times S$ e pertencem a $C^{1+\alpha}(\Delta_{\frac{R}{4}} \times S)$.

Como $\|z_N - z\|_{\substack{1+\alpha,r \\ \mathbb{C}\times S}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} N_j^{-1} < \frac{1}{4}$ , $(z_N)$ é uma seqüência limitada em $C^{1+\alpha}(\Delta_{\frac{1}{4}} \times S)$ e portanto admite uma subseqüência $(z_{N_j})$ convergente em $C^{1+\alpha'}(\Delta_{\frac{1}{4}} \times S)$ para $z_1^{\#}$.

Todas estas funções $z_{N_j}$ exceto um número finito estão em $C^{1+\alpha}(\Delta_{\frac{2}{4}} \times S)$. Usando novamente a compacidade da imersão, podemos extrair de $(z_{N_j})$ uma nova subseqüência $(z_{N_{j_k}})$ convergente para $z_2^{\#}$ em $C^{1+\alpha'}(\Delta_{\frac{2}{4}} \times S)$. Pela unicidade do limite $z_1^{\#}$ coincide com $z_2^{\#}$ em $\Delta_{\frac{1}{4}} \times S$.

Se continuarmos desta maneira e denotarmos por $(\tilde{z}_N)$ a subseqüência de $(z_N)$ obtida pelo processo de diagonalização, então $(\tilde{z}_N)$ converge para uma função $z_\infty^{\#}$ que está definida em $\mathbb{C} \times S$ e pertence a $C^{1+\alpha}(\Delta_{\frac{N}{4}} \times S)$, $\forall N \in \mathrm{N}$.

Como

$$\delta_0 \tilde{z}_N = 0 \quad \text{em} \quad \Delta_{\frac{N}{4}} \times S$$

então

$$\delta_0(z_\infty^{\#}) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{C} \times S \, .$$

Devido à eliticidade do sistema segue que $z_{\infty}^{\#}$ é de classe $C^{\infty}$ em $\mathbb{C} \times S$.

$$\text{Como} \quad \|\tilde{z}_N - z\|_{\substack{1+\alpha,z \\ \mathbb{C}\times S}} < \frac{1}{4} \quad \text{então}$$

$\|z_{\infty}^{\#} - z\|_{\substack{1+\alpha,z \\ \mathbb{C}\times S}} < \frac{1}{2}$, donde concluimos como antes que $dz_{\infty}^{\#} \neq 0$ em $\mathbb{C} \times S$.

Assim $z_{\infty}$ é uma solução global $C^{\infty}$ com diferencial não nulo do sistema perturbado $\mathcal{L}$.

Gostaríamos de finalizar com um comentário sobre a regularidade:

Observemos que do processo de Nash–Moser é possível retirar informações sobre a regularidade da solução $z_{\infty}^{\#}$. Se partirmos de um sistema cujos coeficientes estão em $C^{15+\alpha}(\mathbb{C}\times S)$, o método mostra que é possível ainda construir uma solução de classe $C^{1+\alpha}$.

# CAPÍTULO IV

O esquema de Moser que apresentamos no Capítulo I tem uma demonstração natural e curta e é relativamente simples de aplicar mas não permite obter, em geral, a melhor regularidade das soluções. Entretanto, o esquema original de Nash — embora complicado — já permitia obter imersões de classe $\Lambda^\alpha$, se a métrica fosse de classe $\Lambda^\alpha$, $\alpha > 3$, o que não resulta possível com o método de Moser para $\alpha < \infty$ (para $\alpha = \infty$ ambos métodos fornecem soluções infinitamente diferenciáveis) . Posteriormente, Jacobowitz [J1] melhorou a regularidade para o teorema de imersão de Nash, obtendo imersões de classe $\Lambda^\alpha$, para métricas de classe $\Lambda^\alpha$, $\alpha > 2$.

Apresentaremos neste capítulo uma versão recente do esquema de Nash devida a Hörmander [H2], válida em escalas compactas de espaços de Banach. Na seção 1 lembramos brevemente o esquema original de Nash e descrevemos sumariamente o esquema e Nash-Hörmander. Na seção seguinte consideramos aproximações da identidade que gozam de propriedades um pouco melhores que as exigidas no Teorema de Nash-Moser, aqui denominadas boas aproximações. Na seção 3 demonstramos o Teorema do ponto fixo de Schauder e consideramos escalas mansas compactas. Na seção 4 enunciamos o Teorema de Nash-Hörmander, cuja demonstração ocupa as duas seguintes seções, na primeira delas reduzimos o problema a encontrar um ponto fixo de um sistema de Fredholm não linear e na segunda mostramos a existência de pontos fixos e finalizamos a demonstração do teorema. Finalmente, na seção 7 aplicamos o teorema de Nash-Hörmander ao problema do mergulho isométrico, obtendo o resultado de regularidade de Jacobowitz.

## 1. O esquema de Nash-Hörmander

O método de Nash tem por base a idéia seguinte: digamos que $\Phi(0) = 0$ e que desejamos resolver $\Phi(u) = f$ com $f$ pequeno. No método de Newton, as aproximações sucessivas $u_n$ verificam $\Delta_{n+1}u = u_{n+1} - u_n = \Psi(u_n)(f - \Phi(u_n))$, onde $\Psi(u)$ é uma inversa à direita de $\Phi'(u)$. Uma versão contínua disto seria substituir a seqüência $u_n$ por uma curva $u(t)$ verificando a equação diferencial $u' = \Psi(u)(f - \Phi(u))$. Quando o membro direito não é uma função lipschitziana em algum espaço de Banach, não podemos esperar que a equação tenha solução. Por isto, Nash modificou esta equação e considerou o sistema

$$u'(t) = \Psi(v(t))g(t), \qquad v(t) = T_t u(t), \qquad u(1) = 0, \tag{1.1}$$

onde $T_t$, $t \geq 1$, são operadores regularizantes que aproximam a identidade. Ainda deve escolher-se $g(t)$ convenientemente para que $\Phi(u(t)) \to f$ quando $t \to \infty$. Temos

$$\frac{d}{dt}\Phi(u(t)) = \Phi'(u(t))u'(t) = (\Phi'(u(t)) - \Phi'(v(t)))u'(t) + g(t)$$

pois $\Phi'(v)\Psi(v) = I$. Escrevendo

$$e(t) = (\Phi'(u(t)) - \Phi'(v(t)))u'(t)$$

é preciso que

$$\int_1^\infty e(t)\,dt + \int_1^\infty g(t)\,dt = f. \tag{1.2}$$

Nash colocou

$$\int_1^t g(s)\,ds = h(t-1)T_t f - T_t E(t),$$

onde $h(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ é nula para $t < 1/3$ e identicamente 1 para $t > 2/3$, enquanto $E$ é o erro acumulado

$$E(t) = \int_1^t e(s)h(t-s)\,ds.$$

Derivando (1.2) podemos obter $g(t)$ em termos de $f$ e dos valores de $u(s)$ definidos para $s < t - 1/3$ o que permite considerar $g$ como uma função conhecida em (1.1). O problema se reduz a mostrar a existência de soluções do sistema definidas para todo $t \geq 1$ e a provar que quando $t \to \infty$, $u(t)$ converge a um limite em algum espaço.

Recentemente, Hörmander [H2] introduziu uma modificação neste esquema inspirado na semelhança existente entre as decomposições diádicas de muitos espaços em Análise Harmônica e as aproximações da identidade nas escalas mansas. Estas decomposições são essenciais no cálculo paradiferencial de Bony [Bo]; as técnicas usadas para definir "paraproduto" e "paracomposição" e substituir uma equação diferencial por uma equação paradiferencial constituem o pano de fundo deste novo esquema de aproximação. É possível, porém, definir o esquema e provar sua convergência de forma completamente independente do cálculo paradiferencial, o que aqui faremos. A idéia básica do esquema de Nash-Hörmander é essencialmente a seguinte: em lugar de construir uma função $u(t)$ que convirja para $f$ quando $t \to \infty$ trata-se de construir $u(t)$ convergente para uma função $g$, de maneira que o erro $f - g$ resulte uma operação compacta, o que é possível quando a escala é compacta. As aproximações $u(t)$ são construídas — como nos esquemas de Nash e Nash-Moser — a partir de aproximações da identidade e da inversa à direita de $\Phi'(u)$. Para absorver o erro compacto aplica-se o teorema do ponto fixo de Schauder.

## 2. Boas aproximações da identidade

Seja $\{H^s\}$, $0 \le s < \infty$ uma escala mansa de espaços de Banach. Dizemos que $T_\theta : H^0 \to H^\infty = \bigcap_s H^s$, $\theta \ge 1$, é uma boa aproximação da identidade se satisfaz as estimativas

$$\|T_\theta u\|_s \le C_{st}\theta^{s-t}\|u\|_t, \quad u \in H^t, \quad t \le s, \tag{2.1}$$

$$\|u - T_\theta u\|_s \le C_{st}\theta^{s-t}\|u\|_t, \quad u \in H^t, \quad t \ge s, \tag{2.2}$$

$$\lim_{\theta\to\infty} \|u - T_\theta u\|_s = 0, \quad u \in H^s, \tag{2.3}$$

$$\|\frac{d}{d\theta}T_\theta u\|_s \le C_{ts}\theta^{s-t-1}\|u\|_t, \quad u \in H^t, \tag{2.4}$$

onde as constantes $C_{st}$ são limitadas uniformemente quando $s$ e $t$ permanecem limitados. Já vimos no Lema 2.5 do Capítulo I que a existência de aproximações da identidade verificando as estimativas (2.1) e (2.2) implicava na validade da PC (*cf.* Definição I.2.4) para escalas discretas de espaços de Banach. A mesma demonstração prova a propriedade de convexidade para escalas contínuas, onde o índice $s$ assume valores reais.

A propriedade (2.4) exige, em particular, que para todo $u \in H^0$ e todo $s \ge 0$, a aplicação $\theta \mapsto T_\theta u \in H^s$ seja continuamente diferenciável. Usaremos a notação $T'_\theta u$ para indicar esta derivada em relação a $\theta$. Salvo menção em contrário, sempre suporemos que as escalas mansas estão equipadas com uma boa aproximação da identidade. Neste caso, é possível definir uma nova escala $\{H^s_*\}$ associada à escala original de modo que estes espaços $H^s_*$ verificam as inclusões $H^s \subset H^s_* \subset H^{s-\epsilon}$, $s > \epsilon > 0$, e podem ser considerados então como uma leve modificação da escala original. A vantagem desta modificação decorre de certa propiedade adicional de decomposição e interpolação que a nova escala possui (de fato, os espaços $H^s_*$ podem ser obtidos interpolando entre $H^0$ e e $H^{s+1}$ com métodos standard adequados (*cf.* [Mi]), mas não faremos uso disto).

**Definição 2.1.** *Seja $\{H^s\}$, $0 \le s < \infty$, uma escala mansa com uma boa aproximação da identidade $T_\theta$, $\theta \ge 1$. Se $s > 0$ definimos $H^s_*$ como o conjunto dos $u \in H^0$ tais que, para alguma constante $M > 0$*

$$\|u\|_0 \le M, \qquad \|T'_\theta u\|_0 \le M\theta^{-s-1}, \qquad \|T'_\theta u\|_{s+1} \le M, \quad \theta \ge 1, \tag{2.5}$$

*e definimos $\|u\|^*_s$ como o menor $M$ que verifica (2.5).*

É fácil verificar que $\|u\|^*_s$ é uma norma no espaço $H^s_*$ que o torna um espaço de Banach.

**Lema 2.1.** *Sejam $0 \leq t < s < \infty$. Valem as inclusões contínuas*

$$H^s \subset H^s_* \subset H^t.$$

**Demonstração:** Se $u \in H^s \subset H^0$ temos trivialmente que $\|u\|_0 < \infty$ e, usando a propriedade (2.4), também valem as desigualdades $\|T'_\theta u\|_0 \leq C_1 \theta^{-s-1} \|u\|_s$ e $\|T'_\theta u\|_{s+1} \leq C_2 \|u\|_s$ , de maneira que tomando $M = \max(\|u\|_0, C_1\|u\|_s, C_2\|u\|_s)$ verifica-se (2.5). Vemos também que $M$ está dominado por $C\|u\|_s$ o que mostra que $\|u\|^*_s \leq C\|u\|_s$.

Seja agora $0 \leq t < s$, $u \in H^s_* \subset H^0$. Escrevendo $t = (t/(s+1))(s+1) = \alpha(s+1)$ e usando a PC

$$\begin{aligned} \|T'_\theta u\|_t &\leq C \|T'_\theta u\|_0^\alpha \|T'_\theta u\|_{s+1}^{1-\alpha} \\ &\leq C\|u\|^*_s \theta^{t-s-1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Como o expoente é menor do que $-1$ em (2.6), a integral em

$$T_\theta u = T_1 u + \int_1^\theta T'_\rho u \, d\rho$$

converge em $H^t$ quando $\theta \to \infty$. Por outro lado, (2.3) mostra que o membro esquerdo converge para $u$ em $H^0$ donde

$$u = T_1 u + \int_1^\infty T'_\rho u \, d\rho \in H^t$$

e $\|u\|_t \leq C\|u\|^*_s$.

A seguinte Proposição mostra uma importante propriedade da escala $\{H^s_*\}$ que, de fato, é a principal motivação para que ela tenha sido introduzida.

**Proposição 2.2.** *Seja $[0, \infty) \ni t \mapsto u(t) \in H^0$ uma função contínua tal que para certos $0 \leq s_1 < s_2 < \infty$ valham as estimativas*

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{s_1} &\leq C\, t^{\lambda_1 - 1}, \qquad t \geq 1, \\ \|u(t)\|_{s_2} &\leq C\, t^{\lambda_2 - 1}, \qquad t \geq 1, \end{aligned} \tag{2.7}$$

*onde $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Escrevamos $0 = \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2$, (ou seja, $\alpha = \lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1)$, $1 - \alpha = -\lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1)$), e seja $s = \alpha s_1 + (1-\alpha)s_2 \in (s_1, s_2)$. Então,*

$$U = \int_1^\infty u(t)\, dt \quad \in \quad H^s_* \tag{2.8}$$

e

$$\|T'_\theta U\|_b \leq C_b \theta^{b-s-1}, \qquad \theta \geq 1, \quad b \geq 0. \tag{2.9}$$

**Demonstração:** Será suficiente provar que $U \in H^0$ e que vale (2.9), pois esta estimativa implica (2.8) tomando $b = 0$ para mostrar que $\|T'_\theta U\|_0 \leq C\theta^{-s-1}$ e $b = s+1$ para mostrar que $\|T'_\theta U\|_{s+1} \leq C$. Partindo de $\|T'_\theta u(t)\|_b \leq C_{bs}\theta^{b-s-1}\|u(t)\|_s$ com $s = s_1, s_2$ e usando (2.7) vem

$$\|T'_\theta u(t)\|_b \leq C_b \min(\theta^{b-s_1-1}t^{\lambda_1-1}, \theta^{b-s_2-1}t^{\lambda_2-1}) = \min(f(t), g(t)).$$

Seja $t_0 = t_0(\theta)$ definido por $\theta^{s_2-s_1} = t_0^{\lambda_2-\lambda_1}$; tem-se $f(t_0) = g(t_0)$, para $t < t_0$ o mínimo é fornecido por $g(t)$ e para $t > t_0$ o mínimo é fornecido por $f(t)$. Para ver que $U \in H^0$ é suficiente observar que, de fato, $U \in H^{s_1}$, já que

$$\int_1^\infty \|u(t)\|_0\, dt \leq \int_1^\infty \|u(t)\|_{s_1}\, dt \leq C\int_1^\infty t^{\lambda_1-1}\, dt < \infty.$$

Ainda,

$$\begin{aligned}\|T'_\theta U\|_b &\leq C\theta^b \left[\int_1^{t_0(\theta)} \theta^{-s_2-1}t^{\lambda_2-1}\, dt + \int_{t_0(\theta)}^\infty \theta^{-s_1-1}t^{\lambda_1-1}\, dt\right] \\ &\leq C\theta^b\left[\theta^{-s_2-1+\alpha(s_2-s_1)} + \theta^{-s_1-1+(1-\alpha)(s_2-s_1)}\right] = C\theta^{b-s-1},\end{aligned}$$

o que prova (2.9).

Dado $u \in H^s_*$ podemos escrever

$$u = T_1 u + \int_1^\infty T'_t u\, dt = T_1 u + U$$

onde $u(t) = T'_t u$ verifica as hipóteses da Proposição 2.2 com $s_1 = 0$, $\lambda_1 = -a$, $s_2 = s+1$, $\lambda_2 = 1$. Com efeito, a definição de $H^s_*$ implica que $\|u(t)\|_0 \leq \|u\|^*_s t^{-s-1}$ e $\|u(t)\|_{s+1} \leq \|u\|^*_s$ e vem de (2.9) que $\|T'_\theta U\|_b \leq C_b\theta^{b-s-1}$, $\theta \geq 1$, $b \geq 0$. Por outro lado, $\|T'_\theta T_1 u\|_b \leq C_b\theta^{b-s-1}\|T_1 u\|_s \leq C_b\theta^{b-s-1}\|u\|_0 \leq C_b\theta^{b-s-1}\|u\|^*_s$ de maneira que a decomposição $u = T_1 u + U$ prova o seguinte

**Corolário 2.3.** *Seja $s > 0$ e $u \in H^s_*$. Então*

$$\|T'_\theta u\|_b \leq C_b\|u\|^*_s\theta^{b-s-1}, \qquad \theta \geq 1, \quad b \geq 0. \tag{2.10}$$

Obsevemos que a definição dos espaços $H^s_*$ implica na validade de (2.10) para $b = 0$ e $b = s+1$; o corolário mostra que a estimativa se estende automaticamente para todos os outros valores de $b$.

## 3. Compacidade

Seja $B$ a bola unitária em $\mathbb{R}^n$, $S^{n-1}$ sua fronteira. O teorema de ponto fixo de Brower, que aprendemos nos cursos de topologia, afirma que uma função contínua $f : B \to B$ possui sempre um ponto fixo, isto é, existe $x_0 \in B$ tal que $f(x_0) = x_0$. Com efeito, se $f(x) - x \neq 0$ para todo $x \in B$ seria possível construir outra aplicação contínua $\phi(x)$, $\phi : B \to S^{n-1}$, definida como a (única) interseção da semi-reta determinada por $f(x)$ e $x$ (partindo de $f(x)$ e passando por $x$) com $S^{n-1}$. Se $i : S^{n-1} \to B$ denota a inclusão $S^{n-1} \subset B$ temos que a composição das aplicações

$$S^{n-1} \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\phi} S^{n-1}$$

é a identidade, $\phi \circ i = I$. Os homomorfismos correspondentes nas classes de homologia inteira $H_{n-1}$ seriam

$$\mathbf{Z} = H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) = 0 \xrightarrow{\phi_*} H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbf{Z},$$

uma contradição pois $0 = \phi_* \circ i_* = (\phi \circ i)_* = I$, provando assim o teorema de Brower. Como a existência de pontos fixos para uma aplicação é obviamente invariante por homeomorfismos, podemos substituir $B$ por qualquer espaço homeomorfo a uma bola, em particular, $B$ pode ser qualquer conjunto convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$ com interior não vazio. Se $B$ for convexo compacto e tiver interior vazio ele estará contido numa variedade afim $F \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão mínima $k < n$, $B$ tem interior não vazio em $F$, é homeomorfo à bola de $\mathbb{R}^k$ e vale novamente o teorema de ponto fixo neste caso.

O teorema de ponto fixo de Schauder estende o teorema de Brower para aplicações compactas em espaços de Banach.

**Teorema de Schauder 3.1.** *Seja $B$ um subconjunto convexo, limitado e fechado de um espaço de Banach $X$. Se $f : B \to B$ é contínua e $f(B)$ tem fecho compacto, $f$ possui um ponto fixo.*

**Demonstração:** Seja $\epsilon > 0$. Mostraremos primeiro a existência de um "ponto fixo aproximado" $x_\epsilon \in B$ tal que $\|f(x_\epsilon) - x_\epsilon\| < \epsilon$. Consideremos uma cobertura finita de $f(B)$ por bolas $B(x_j, \epsilon)$ de $X$, , $j = 1, \ldots, n$, $x_j \in B$ e uma partição contínua da unidade $\phi_j(x)$ em $f(B)$, subordinada a esta cobertura. Isto significa que $\sum \phi_j(y) = 1$, $y \in f(B)$, e o suporte de $\phi_j$ está contido em $B(x_j, \epsilon) \cap f(B)$. Seja $F$ o subespaço gerado por $x_1, \ldots, x_n$ e definamos a função contínua

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(f(x))x_j, \qquad x \in B \cap F.$$

Como $g(x)$ é uma combinação convexa de pontos de $B \cap F$ temos que $g(B \cap F) \subset B \cap F$ e, pelo teorema de Brower, existe $x_0 \in B \cap F$ tal que $g(x_0) = x_0$. Ora,

$$f(x_0) - x_0 = f(x_0) - g(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(f(x_0))(f(x_0) - y_j),$$

onde as parcelas não nulas correspondem aos índices tais que $\|f(x_0) - y_j\| < \epsilon$, de maneira que a propriedade triangular da norma mostra que $\|f(x_0) - x_0\| < \epsilon$.

Podemos agora construir uma seqüência $(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ em $B$ tal que $f(x_k) - x_k$ convirja para zero. Por compacidade podemos supor, passando a uma subseqüência, que $f(x_k) \to x_0 \in B$. Então $x_k \to x_0$ e $f(x_k) \to f(x_0) = x_0$ o que prova o teorema.

**Corolário 3.2.** *Seja $X$ um espaço de Banach, $K$ uma aplicação contínua da bola unitária fechada $B$ de $X$ na bola de raio $1/2$, aqui denotada por $B/2$, onde $K(B)$ tem fecho compacto. Para todo $v \in B/2$ a equação $u = v + K(u)$ tem solução $u \in B$ com $\|u\| \leq \|v\| + \|K(u)\| \leq \|v\| + 1/2$.*

**Demonstração:** Seja $f : B \to B$ dada por $f(u) = v + K(u)$, $u \in B$. Pelo teorema de Schauder, existe $u \in B$ tal que $u = v + K(u)$ e vale $\|u\| \leq \|v\| + \|K(u)\| \leq \|v\| + 1/2$.

**Definição 3.3.** *Uma escala $\{H^s\}$, $0 \leq s < \infty$, diz-se compacta se, para todo $t > s \geq 0$ a inclusão $H^t \subset H^s$ é compacta, isto é, a bola unitária de $H^t$ é um subconjunto pré-compacto de $H^s$.*

**Exemplos.**

a) Se $M$ é uma variedade compacta, os espaços $L^p_s(M)$, $s \geq 0$, $1 < p < \infty$ constituem uma escala compacta (teorema de Relich).

b) A escala dos espaços de Hölder , quer em uma variedade compacta, quer em um convexo compacto do espaço Euclidiano com interior não vazio, é compacta (vide Observação II.3.5).

**Proposição 3.4.** *Seja $\{H_s\}$, $0 \leq s < \infty$, uma escala mansa de espaços de Banach dotada de uma boa aproximação da identidade $T_\theta$, $\theta \geq 1$. Se existem $s_2 > s_1 \geq 0$ tais que $H^{s_2} \subset H^{s_1}$ é compacta, então a escala é compacta.*

**Demonstração:** Seja $t > s \geq 0$, e consideremos a bola unitária $B$ de $H^t$. $T_1$ aplica continuamente $H^t$ em $H^{s_2}$ e as hipóteses nos permitem concluir que $T_1 B$ é pré-compacto em $H^{s_1}$, logo também em $H^0$. Se $u_j \in B$ é uma seqüência, $T_1 u_j$ é limitada em $H^s$ para qualquer $s$ e, além disso, possui uma subseqüência convergente em $H^0$. A PC mostra que a mesma subseqüência é convergente em todos os $H^s$. Isto mostra que $T_1 B$ é pré-compacto em todos os $H^s$. Analogamente, para cada $M > 1$ fixo, $\bigcup_{\theta \leq M} T'_\theta B$ é limitado em todos os $H^s$ e pré-compacto em $H^{s_2}$, logo pré-compacto em todos os $H^s$.

Se $u \in B$ e escrevemos para $M > 1$ fixo

$$u = T_1 u + \int_1^M T'_\theta u \, d\theta + \int_M^\infty T'_\theta u \, d\theta = u_1 + u_2 + u_3,$$

onde a integral converge em $H^s$, vemos que os dois primeiros termos variam num compacto de $H^s$ quando $u \in B$, enquanto a norma da terceira parcela verifica $\|u_3\|_s \leq CM^{s-t}$. Então, para todo $\epsilon > 0$, $B$ está contido na soma de um compacto de $H^s$ e um conjunto de diâmetro $< \epsilon$, o que mostra que é pré-compacto.

## 4. O teorema de Nash-Hörmander

Enunciamos agora o teorema referido no início do capítulo.

**Teorema 4.1.** *Sejam $\{E^s\}$, $\{F^s\}$, $s \geq 0$, escalas mansas de espaços de Banach munidas com boas aproximações da identidade, respectivamente denotadas por $T_\theta$ e $S_\theta$, e suponhamos que a escala $\{E^s\}$ é compacta. Seja $m \geq 0$ um número real, seja $B$ a bola unitária de $E^m$ e $\Phi : B \cap E^{s+m} \to F^s$ uma aplicação diferenciável mansa satisfazendo $\Phi(0) = 0$ bem como as seguintes estimativas para certos parâmetros não negativos $\lambda_1$, $\lambda_2$, $b_1$, $b_2$, e para todo $s \geq 0$*

$$\|\Phi(u)\|_s \leq C_s(1 + \|u\|_{s+m}), \qquad u \in B \cap E^{s+m}, \tag{4.1}$$

$$\|\Phi'(u)v\|_s \leq C_s\big[(1 + \|u\|_{s+m})\|v\|_m + \|v\|_{s+m}\big], \qquad u \in B \cap E^{s+m}, \quad v \in E^{s+m}, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\|(\Phi'(u) - \Phi'(v))w\|_s \leq C_s\big[&(1 + \|u\|_{s+m}) + \|v\|_{s+m})\|u - v\|_m \|w\|_m + \|u - v\|_{s+m}\|w\|_m \\ &+ \|u - v\|_m \|w\|_{s+m}\big], \qquad u, v \in B \cap E^{s+m}, \quad w \in E^{s+m},\end{aligned} \tag{4.3}$$

*além disso, $\Phi'(u)$ possui uma inversa linear à direita $\Psi(u)$, $u \in \tilde{B}$, que satisfaz*

$$\|\Psi(u)g\|_s \leq C_s\big[(1 + \|u\|_{s+\lambda_1})\|g\|_{b_1} + (1 + \|u\|_{b_2})\|g\|_{s+\lambda_2}\big], \qquad \begin{aligned} &u \in \tilde{B} \cap E^{s+\lambda_1} \cap E^{b_2}, \\ &g \in F^{s+\lambda_2} \cap F^{b_1}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

*onde $\tilde{B}$ é uma bola de $E^\mu$ centrada na origem, $\mu = \max(m, \lambda_1, b_2)$. Suporemos que a função $u \mapsto \Psi(u)$ aplica continuamente $\tilde{B} \cap E^\infty$ em $L(F^\infty, E^\infty)$ e satisfaz*

$$\Phi'(u)\Psi(u)g = g, \qquad u \in \tilde{B}, \quad g \in F^{\max(\lambda_2, b_1)}. \tag{4.5}$$

*Se $\alpha$ e $\beta$ são números positivos satisfazendo*

$$\mu = \max(m, \lambda_1, b_2) < \alpha, \qquad \alpha + \max(b_1, \lambda_2) \leq \beta < 2(\alpha - m), \tag{4.6}$$

*existem $\delta > 0$ e $C > 0$ tais que para todo $f \in F_*^\beta$ com $\|f\|_\beta^* < \delta$ a equação*

$$\phi(u) = f, \qquad u \in F_*^\alpha, \quad f \in F_*^\beta,$$

*tem uma solução satisfazendo $\|u\|_\alpha^* \leq C\|f\|_\beta^*$. O método usado para achar $u$ fornece $u \in E^\infty$ se $f \in F^\infty$.*

**Observações**

1) Qualitativamente, o Teorema I.3.3 do primeiro capítulo é muito semelhante ao Teorema 4.1, mas neste último a relação entre $\alpha$ e $\beta$ — parâmetros que determinam os espaços aos quais pertencem o dado $f$ e a solução $u$ — é consideravelmente mais precisa. Note-se que as inclusões $F^\beta \subset F_*^\beta$ e $E^\alpha \subset E_*^{\alpha-\epsilon}$, $\epsilon > 0$, permitem também o controle da regularidade nas escalas originais $\{E^s\}$, $\{F^s\}$.
2) A estimativa (4.3) é uma condição mansa de tipo Lipschitz para $\Phi'$, um pouco menos exigente que supor que $\Phi'' : (B \cap E^{s+m}) \times E^{s+m} \times E^{s+m} \to F^s$ seja mansa, como segue de
$$(\Phi'(u) - \Phi'(v))w = \int \Phi''(tu + (1-t)v)(u - v, w)\, dt.$$
Na prática, isto constitue um critério conveniente para a validade de (4.3).
3) É importante notar que quaisquer que sejam os valores dos parâmetros não negativos $m$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $b_1$, $b_2$, sempre é possível, dado $\beta > 2(\max(b_1, \lambda_2) + \max(m, b_2, \lambda_1))$, fazer $\alpha = \beta - \max(b_1, \lambda_2)$ de maneira que as condições (4.6) sejam satisfeitas.
4) A continuidade de $u \mapsto \Psi(u)$ significa que dados $u \in \tilde{B} \cap E^\infty$, $\rho > 0$ e $s \geq 0$, existem $\delta > 0$ e $\sigma \geq 0$ tais que
$$v \in \tilde{B} \cap E^\infty, \quad \|v - u\|_\sigma < \delta \quad \text{implica} \quad \|[\Psi(v) - \Psi(u)]g\|_s \leq \rho\|g\|_\sigma, \quad g \in F^\infty. \tag{4.8}$$
5) Se a estimativa mansa (4.4) for relaxada a uma condição submansa
$$\|\Psi(u)g\|_s \leq C_s[(1 + \|u\|_{rs+\lambda_1})\|g\|_{b_1} + (1 + \|u\|_{b_2})\|v\|_{rs+\lambda_2}],$$
onde $r < 2$, a conclusão do Teorema 4.1 continua válida sempre que $\alpha$ e $\beta$ sejam escolhidos verificando
$$\mu < \alpha, \qquad r\alpha + \max(b_1, \lambda_2) \leq \beta < 2(\alpha - m). \tag{4.9}$$

O intervalo $I_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha) = [r\alpha, \max(b_1, \lambda_2), 2(\alpha - m))$ é não vazio para $\alpha$ grande e temos essencialmente a mesma situação que no caso $r = 1$.

## 5. Redução a um sistema de Fredholm

A linearização da equação $\Phi(u) = f$ no ponto $u$ é $\Phi'(u)h = g$. Esta equação pode ser resolvida fazendo

$$h = \Psi(u)g = \Psi(u)S_1 g + \int_1^\infty \Psi(u)S_t' g\, dt$$

onde a segunda igualdade vem da decomposição da identidade em termos da aproximação $S_t$ na escala $\{F^s\}$ e é, por enquanto, tomada em sentido formal, sem preocuparmo-nos com a convergência da integral. Deixando provisoriamente o primeiro termo de lado, vemos que o segundo é uma superposição das funções $\Psi(u)S_t'g$, $1 \leq t < \infty$, que regularizam em $g$, isto é, permitem um ganho arbitrário de derivadas na escala $F^s$. Para obter expressões que sejam regularizantes também em $u$ será conveniente modificar o integrando e substitui-lo por $\Psi(T_t u)S_t'u$. Quando $t \to \infty$, $T_t u \to u$ e a modificação é cada vez menor. Voltando ao termo $\Psi(u)S_1 g$, que é regularizante em $g$, a modificação mais simples que o torna regularizante também em $u$ é a substituição por $\Psi(0)S_1 g$. Isto leva a considerar o operador

$$\tilde{u} = \tilde{u}(u, g) = \Psi(0)S_1 g + \int_1^\infty \Psi(T_t u)S_t' g\, dt. \tag{5.1}$$

Para que esteja bem definido, fixamos de uma vez para sempre uma bola centrada na origem $V \subset E_*^\mu$ tal que $T_\theta(V) \subset \tilde{B}$, $\theta \geq 1$, e tomaremos sempre $u \in V$. Definamos

$$U(t) = U[u, g](t) = \Psi(T_t u)S_t' g, \qquad u \in V \cap E_*^\alpha, \quad g \in F_*^\beta, \quad t \geq 1. \tag{5.2}$$

Nosso objetivo agora será estudar o comportamento de $U(t)$. Começaremos por um lema onde se usa a notação $x_+$, $x \in \mathbb{R}$, que denota o número $x_+ = (x + |x|)/2$.

**Lema 5.1.** *Qualquer que seja $0 \leq a \neq \alpha$, $t \geq 1$, verifica-se*

$$\|T_t u\|_a \leq C_a \|u\|_\alpha^* t^{(a-\alpha)_+}, \qquad u \in H_*^\alpha, \quad a - \alpha \neq 0. \tag{5.3}$$

**Demonstração:** Quando $a > \alpha$ podemos escrever

$$T_t u = T_1 u + \int_1^\infty T_\theta'\, d\theta.$$

Com efeito, pelo Corolário 2.3, temos que $\|T'_\theta u\|_a \leq C_a\|u\|^*_\alpha \theta^{a-\alpha-1}$, o que mostra a convergência da integral e prova (5.3) neste caso. Se $a < \alpha$, (5.3) é conseqüência de $\|u\|_a \leq C_a\|u\|^*_\alpha$ (*cf.* Lema 2.1). Assumimos daqui por diante que $\alpha$ e $\beta$ satisfazem a hipóteses (4.6) do Teorema 4.1. Usando (4.4) e (5.2) e (5.3) vem, para $u \in V \cap E^\alpha_*$, $\quad g \in F^\beta_*$,

$$\begin{aligned}\|U(t)\|_a &\leq C_a[(1 + \|T_t u\|_{a+\lambda_1})\|S'_t g\|_{b_1} + (1 + \|T_t u\|_{b_2})\|S'_t v\|_{a+\lambda_2}] \\ &\leq C_a[(1 + \|u\|^*_\alpha t^{(a+\lambda_1-\alpha)_+})\|g\|^*_\beta t^{b_1-\beta-1} + (1 + \|u\|^*_\alpha t^{(b_2-\alpha)_+})\|g\|^*_\beta t^{a+\lambda_2-\beta-1}]\end{aligned}$$

onde tacitamente estamos supondo que $a + \lambda_1 - \alpha \neq 0$ e $b_2 - \alpha \neq 0$. Então,

$$\|U(t)\|_a \leq C_a(1 + \|u\|^*_\alpha)\|g\|^*_\beta t^{a-\beta-1} \max(t^{(a+\lambda_1-\alpha)_+-a+b_1}, t^{(b_2-\alpha)_++\lambda_2}), \qquad a \geq 0.$$

Por outro lado, $\alpha > \lambda_1$, de maneira que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$(a + \lambda_1 - \alpha + \epsilon)_+ \leq a, \qquad a \geq 0.$$

Pela hipótese (4.6), $\alpha > b_2$ e, diminuindo $\epsilon > 0$ se for necessário, podemos supor que $(b_2 - \alpha + \epsilon)_+ = 0$. Trocando $\alpha$ por $\alpha' = \alpha - \epsilon$ ligeiramente menor que $\alpha$ na desigualdade antes obtida vem, para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\|U(t)\|_a \leq C_a(1 + \|u\|^*_{\alpha-\epsilon})\|g\|^*_\beta t^{a-\beta-1} \max(t^{(a+\lambda_1-\alpha+\epsilon)_+-a+b_1}, t^{(b_2-\alpha+\epsilon)_++\lambda_2}), \qquad a \geq 0.$$

Assim

$$\begin{aligned}\|U(t)\|_a &\leq C_a(1 + \|u\|^*_{\alpha-\epsilon})\|g\|^*_\beta \; t^{a-\beta-1+\max(b_1,\lambda_2)} \\ &\leq C_a(1 + \|u\|^*_{\alpha-\epsilon})\|g\|^*_\beta \; t^{a-\alpha-1}, \qquad u \in V \cap E^{\alpha-\epsilon}_*, \quad g \in F^\beta_*, \qquad a \geq 0, \quad (5.4)\end{aligned}$$

onde usamos a hipótese (4.6) para estimar $-\beta$ em termos de $-\alpha$ no expoente. Consideremos agora dois casos particulares da estimativa (5.4), escolhendo $a$ alternativamente menor e maior que $\alpha$, por exemplo, tomamos $a = s_1 = m < \alpha$ e $a = s_2 = \alpha + \beta$. Estamos em condições de aplicar a Proposição 2.2 com $u(t) = U(t)$. A conclusão é que

$$\int_1^\infty U[u, g](s)\, ds = \int_1^\infty \Psi(T_t u) S'_t g\, ds \in E^\alpha_*, \qquad u \in V \cap E^{\alpha-\epsilon}, \quad g \in F^\beta_*,$$

e a demonstração da Proposição permite estimar a norma da integral em termos das normas de $u$ e $g$. Escrevendo

$$T_\Psi(u)g \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^\infty \Psi(T_t u) S'_t g\, dt \in E^\alpha_*, \qquad u \in V \cap E^{\alpha-\epsilon}, \quad g \in F^\beta_*, \qquad (5.5)$$

vale a estimativa

$$\|T_\Psi(u)g\|^*_\alpha \leq C(1 + \|u\|^*_{\alpha-\epsilon})\|g\|^*_\beta, \qquad u \in V \cap E^{\alpha-\epsilon}, \quad g \in F^\beta_*. \qquad (5.6)$$

Observando que $T_\Psi(0)g = \Psi(0)g - \Psi(0)S_1 g$ e que o segundo termo do membro esquerdo pertence a $E^\infty$, vemos que $\Psi(0)g \in E^\alpha_*$ quando $g \in F^\beta_*$.

**Lema 5.2.** *Suponhamos que valham as hipóteses do Teorema 4.1, em particular que $\alpha$ e $\beta$ satisfazem (4.2), e que $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. A aplicação*

$$(E^{\alpha-\epsilon} \cap V) \times F_*^\beta \ni (u, g) \mapsto T_\Psi(u)g \in E_*^\alpha$$

*é contínua. Se $A_1 \subset E^{\alpha-\epsilon} \cap V$ e limitado em $E^{\alpha-\epsilon}$ e $A_2$ é limitado em $F_*^\beta$, a imagem $T_\Psi(A_1 \times A_2)$ de $A_1 \times A_2$ por esta aplicação é um pré-compacto de $E_*^\alpha$.*

**Demonstração:** A estimativa (5.4) com $a = \alpha - \epsilon$ mostra que o integrando de

$$T_\Psi(u)g = \int_1^\infty \Psi(T_t u) S_t' g \, dt$$

pode ser dominado por

$$\|\Psi(T_t u) S_t' g\|_{\alpha-\epsilon} \leq C_a(1 + \|u\|_{\alpha-\epsilon}^*) \|g\|_\beta^* \, t^{-1-\epsilon},$$

o que mostra que

$$\int_R^\infty \|\Psi(T_t u) S_t' g\|_{\alpha-\epsilon} \, dt \leq C R^{-\epsilon} \to 0, \qquad R \to \infty.$$

Então, $T_\Psi(u)g$ é o limite uniforme, quando $u$ e $g$ variam em conjuntos limitados, das aplicações $I_R(u, g) = \int_1^R \Psi(T_t u) S_t' g \, dt$, as quais aplicam continuamente $V \times F^0$ em $E^\infty$, o que prova a afirmação relativa à continuidade. Pela compacidade da inclusão $E^\infty \subset E^{\alpha-\epsilon}$ estas aplicações tem posto pré-compacto; isto permite exprimir por $T_\Psi(A_1 \times A_2)$, para todo $\rho > 0$, como soma de um pré-compacto de $E^{\alpha-\epsilon}$ e um conjunto de diâmetro $< \rho$, o que termina a demonstração do lema.

**Observação.** No Lema 5.2 o critério para que $\epsilon$ seja "suficientemente pequeno" é o seguinte: deve verificar-se

$$(a + \lambda_1 - \alpha + \epsilon)_+ \leq a, \qquad a \geq 0,$$
$$(b_2 - \alpha + \epsilon)_+ = 0,$$

o que é equivalente a exigir que

$$\lambda_1 - \alpha + \epsilon \leq 0,$$
$$b_2 - \alpha + \epsilon \leq 0.$$

Em particular, se $\alpha_0$ e $\beta_0$ verificam as condições do lema e $\epsilon$ for assim escolhido, o mesmo $\epsilon$ pode ser utilizado para qualquer outro par $\alpha$ e $\beta$ satisfazendo as hipóteses, sempre $\alpha \geq \alpha_0$, isto é, podemos tomar $\epsilon$ uniformemente em $\alpha \geq \alpha_0$.

Consideraremos agora as aproximações do operador (5.1) obtidas por integração sobre intervalos finitos

$$\tilde{u}(t) = \Psi(0)S_1 g + \int_1^t \Psi(T_s u)S_s' g\, ds = \tilde{u}(1) + \int_1^t U(s)\, ds. \tag{5.7}$$

É claro que $\tilde{u}(t) \in E^\infty$ e $\tilde{u}'(t) = U(t)$, em particular, $\Phi'(T_t u)\tilde{u}'(t) = \Phi'(T_t u)\Psi(T_t u)S_t' g = S_t' g$. Estamos interessados em estudar o limite

$$\Phi(\tilde{u}) = \lim_{\tau\to\infty} \tilde{u}(\tau).$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{u}(\tau)) &= \Phi(\tilde{u}(1)) + \int_1^\tau \Phi'(\tilde{u}(t))U(t)\, dt \\
&= \Phi(\tilde{u}(1)) + \int_1^\tau [\Phi'(\tilde{u}(t)) - \Phi'(T_t u)]U(t)\, dt + \int_1^\tau S_t' g\, dt \\
&= \Phi(\tilde{u}(1)) + \int_1^\tau [\Phi'(\tilde{u}(t)) - \Phi'(T_t u)]U(t)\, dt + S_\tau g - S_1 g.
\end{aligned}$$

Quando $T \to \infty$, teremos (no caso da integral imprópria ser convergente)

$$\Phi(\tilde{u}) = g + \Phi(\Psi(0)S_1 g) - S_1 g + \int_1^\infty [\Phi'(\tilde{u}(t)) - \Phi'(T_t u)]U(t)\, dt. \tag{5.8}$$

Para estudar a convergência da integral em (5.8) podemos usar as estimativas já determinadas para $U(t)$. A presença da diferença $\Phi'(\tilde{u}(t)) - \Phi'(T_t u)$ não melhora, a princípio, a convergência pois nada indica que este termo convirja para zero. Entretanto, se pudermos escolher $u$ e $g$ de maneira que $\tilde{u} = u$, isto é, de maneira que para um $g$ dado, $u$ seja um ponto fixo da aplicação $u \rightsquigarrow \tilde{u}$,

$$\tilde{u}[u, g] = \Psi(0)S_1 g + T_\Psi(u)g = u, \tag{5.9}$$

então a diferença $\Phi'(\tilde{u}(t)) - \Phi'(T_t u) \to \Phi(\tilde{u}) - \Phi(\tilde{u}) = 0$ o que contribuirá para que o integrando convirja mais rapidamente para zero no infinito. A existência de pontos fixos estará garantida pelo Teorema de Schauder, como veremos mais adiante. Isto nos leva a introduzir

$$R(u, g) = \Phi(\Psi(0)S_1 g) - S_1 g + \int_1^\infty [\Phi'(\tilde{u}(t)) - \Phi'(T_t \tilde{u})]U(t)\, dt. \tag{5.10}$$

Caso a integral seja convergente e valha (5.9), o que permite trocar $u$ por $\tilde{u}$ em (5.8), teremos

$$\Phi(u) = g + R(u, g). \tag{5.11}$$

Para estimar o integrando em (5.10) faremos uso da condição Lipschitz (4.3) que $\Phi'$ satisfaz, obtendo expressões que contêm $\|\tilde{u}(t)\|_a$, $\|T_t\tilde{u}\|_a$, $\|\tilde{u}(t) - T_t\tilde{u}\|_a$ e $\|U(t)\|_a$. Vejamos como estimar estes termos. Para aliviar a notação tomaremos sempre $u$ pertencente a um subconjunto limitado de $E^{\alpha-\epsilon} \cap V$, de maneira que o fator $(1 + \|u\|^*_{\alpha-\epsilon})$ possa ser estimado por uma constante fixa. Temos que

$$\|\tilde{u}'(t) - T'_t\tilde{u}\|_a = \|U(t) - T'_t\tilde{u}\|_a \leq \|U(t)u\|_a + \|T'_t\tilde{u}\|_a \leq C\|g\|^*_\beta t^{a-\alpha-1}, \quad a \geq 0, \tag{5.12}$$

onde fizemos uso de (5.4), (2.4) e o fato de que $\|\tilde{u}\|^*_\alpha \leq C\|g\|^*_\beta$. Com efeito, $\tilde{u} = \tilde{u}(1) + \int_1^\infty U(t)dt$, de modo que a Proposição 2.2 e as estimativas (5.4) permitem obter esta última desigualdade. Tomemos primeiro $m \leq a < \alpha$. Então (5.4) mostra que $\tilde{u}(t) \to \tilde{u}$ em $E^a$; naturalmente, também $T_t\tilde{u} \to \tilde{u}$ em $E^\alpha$ e podemos integrar (5.12) entre $t$ e $\infty$ obtendo

$$\|\tilde{u}(t) - T_t\tilde{u}\|_a \leq C\|g\|^*_\beta\, t^{a-\alpha}, \qquad 0 \leq a < \alpha. \tag{5.13}$$

Se $a > \alpha$ podemos integrar (5.12) entre 1 e $t$

$$\|\tilde{u}(t) - T_t\tilde{u}\|_a \leq \int_1^t \|\tilde{u}'(s) - T'_s\tilde{u}\|_a\, ds + \|\tilde{u}(1)\|_a + \|T_1\tilde{u}\|_a.$$

Ora, $\|\tilde{u}(1)\|_a = \|\Psi(0)S_1 g\|_a \leq C_s\|g\|_s$, $s \geq 0$ e $\|T_1\tilde{u}\|_a \leq C\|\tilde{u}\|^*_\alpha \leq C\|g\|^*_\beta$, o que permite controlar os termos não integrados do membro direito, enquanto o integrando pode ser estimado usando (5.4). O resultado é então

$$\|\tilde{u}(t) - T_t\tilde{u}\|_a \leq C\|g\|^*_\beta\, t^{a-\alpha}, \qquad \alpha < a. \tag{5.14}$$

Vem de (5.13), (5.14) e da PC (lembrar os comentários feitos no início da seção 2 após (2.4)) escrevendo $\alpha$ como combinação convexa de duas escolhas de $a$, digamos $a = 0$ e $a = 2\alpha$ que a estimativa é válida também para $a = \alpha$. Isto prova que

$$\|\tilde{u}(t) - T_t\tilde{u}\|_a \leq C\|g\|^*_\beta\, t^{a-\alpha}, \qquad u \in V \cap E^{\alpha-\epsilon}, \quad g \in F^\beta_*, \quad 0 \leq a, \tag{5.15}$$

Por outro lado, integrando (5.4) temos

$$\|\tilde{u}(t)\|_a \leq C_a\|g\|^*_\beta\, t^{(a-\alpha)_+}, \qquad u \in V \cap E^{\alpha-\epsilon}, \quad g \in F^\beta_*, \quad 0 \leq a, \quad a \neq \alpha. \tag{5.16}$$

Segue de (5.15) e (5.16) que

$$\|T_t\tilde{u}\|_a \leq C_a\|g\|^*_\beta t^{(a-\alpha)_+}, \qquad u \in V \cap E^{\alpha-\epsilon}, \quad g \in F^\beta_*, \quad 0 \leq a, \quad a \neq \alpha. \tag{5.17}$$

Em virtude das estimativas (5.4), (5.15), (5.16) e (5.17) estamos em condições de estimar o integrando em (5.10). Seja $\beta' > \beta$. Aplicando (4.3) com $u = \tilde{u}(t)$, $v = T_t\tilde{u}$ e $w = U(t)$ vem

$$\begin{aligned}\|(\Phi'(\tilde{u}(t)) - \Phi'(T_t\tilde{u}))U(t)\|_{\beta'} &\leq C\big[(1 + \|\tilde{u}(t)\|_{\beta'+m} + \|T_t\tilde{u}\|_{\beta'+m})\|\tilde{u}(t) - T_t\tilde{u}\|_m\|U(t)\|_m \\ &\quad + \|\tilde{u}(t) - T_t\tilde{u}\|_{\beta'+m}\|U(t)\|_m + \|\tilde{u}(t) - T_t\tilde{u}\|_m\|U(t)\|_{\beta'+m}\big] \\ &\leq C\big[(1 + \|g\|^*_{\beta'} t^{\beta'+m-\alpha})\|g\|^{*2}_{\beta'} t^{2(m-\alpha)-1} + \|g\|^{*2}_{\beta'} t^{\beta'+2(m-\alpha)-1}\big].\end{aligned}$$

Note que usamos as estimativas (5.4), (5.15), (5.16) e (5.17) para $a = 0 < \alpha$ e para $a = \beta' + m > \alpha$. Lembrando agora que, em virtude de (4.6), $\beta < 2(\alpha - m) < 3(\alpha - m)$, tomando $\beta' = \beta + \epsilon$ com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos supor que $\beta' + 3(m - \alpha) - 1 < \beta' + 2(m - \alpha) - 1 < -1 - \sigma$, $\sigma > 0$. Como a constante $C$ acima inclui um fator $(1 + \|u\|^*_{\alpha-\epsilon})$, concluímos que para todo $u \in V \cap E^{\alpha-\epsilon}$, $\quad g \in F^\beta_*$ verifica-se

$$\|(\Phi'(\tilde{u}(t)) - \Phi'(T_t\tilde{u}))U(t)\|_{\beta+\epsilon} \leq C(1 + \|u\|^*_{\alpha-\epsilon})(1 + \|g\|^*_\beta)\|g\|^{*2}_\beta t^{-(1+\sigma)}. \tag{5.18}$$

**Lema 5.3.** *Suponhamos que valham as hipóteses do Teorema 4.1 e que $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Seja $R(u, g)$ o operador (5.10). Então, $R$ aplica continuamente $(V \cap E^{\alpha-\epsilon}) \times F^\beta_*$ em $F^{\beta+\epsilon}$. A imagem de $(V \cap \{\|u\|^*_{\alpha-\epsilon} \leq M\}) \times \{\|g\|^*_\beta \leq M\}$, $M > 0$, é precompacta em $F^{\beta+\epsilon}$ e vale a estimativa*

$$\|R(u, g)\|_{\beta+\epsilon} \leq C(1 + \|u\|^*_{\alpha-\epsilon})(1 + \|g\|^*_\beta)\|g\|^{*2}_\beta \qquad u \in V \cap E^{\alpha-\epsilon}, \quad g \in F^\beta_*. \tag{5.19}$$

**Demonstração:** Provaremos inicialmente (5.19). Podemos escrever $R(u, g) = R_1(g) + R_2(u, g)$ onde $R_2$ é o termo correspondente à integral. Por integração de (5.18) vemos que $R_2$ verifica a estimativa desejada. Para estimar $R_1$ escrevamos $v = S_1 g$; temos

$$\begin{aligned}R_1(g) = \Phi(\Psi(0)v) - v &= \int_0^1 \Phi'(s\Psi(0)v)\Psi(0)v\, ds - v \\ &= \int_0^1 [\Phi'(s\Psi(0)v) - \Psi'(0)]\Psi(0)v\, ds.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Usando a estimativa Lipschitz (4.3) para estimar o integrando e integrando entre 0 e 1, obtemos

$$\|R_1(g)\|_{\beta+\epsilon} \leq C(1 + \|g\|^*_\beta)\|g\|^{*2}_\beta$$

o que prova (5.19). Vejamos agora a continuidade e compacidade. Na expressão (5.20) o integrando é uniformemente equicontínuo com imagem contida em um compacto fixo de $F^{\beta+\epsilon}$ se $\|g\|_\beta^*$ permanece limitado. Para comprovar isto basta observar que $g \mapsto \Psi(0)S_1 g$ pode escrever-se como uma composição

$$F_*^\beta \xrightarrow{S_1} F^\infty \xrightarrow{\Psi(0)} E^\infty \longrightarrow E^s$$

onde a última seta é uma inclusão compacta. Então $R_1$ tem as propriedades desejadas. Para analisar $R_2$ é possível escrevê-lo como limite das integrais

$$\int_1^T [\Phi'(\tilde{u}(t)) - \Phi'(T_t\tilde{u})]U(t)\,dt.$$

Para $T > 1$ fixo o integrando é uniformemente equicontínuo se $\|u\|_{\alpha-\epsilon}^*$ e $\|g\|_\beta^*$ permanecem limitados, com imagem contida em um compacto fixo de $F^{\beta+\epsilon}$, já que a aplicação $(u,g) \mapsto (\tilde{u}(t), T_t\tilde{u}, U(t))$ assume valores em $E^\infty$. As integrais $\int_1^T$ aproximam $R_2$ uniformemente se $\|u\|_{\alpha-\epsilon}^*$ e $\|g\|_\beta^*$ permanecem limitados e vemos que $R_2$ tem as propriedades de continuidade e compacidade que procurávamos mostrar.

**Observação.** No Lema 5.3 o critério para que $\epsilon$ seja "suficientemente pequeno" é o seguinte: além de verificar as condições

$$\lambda_1 - \alpha + \epsilon \leq 0,$$

$$b_2 - \alpha + \epsilon \leq 0,$$

requeridas para a validade do Lema 5.2, é preciso que adicionalmente se verifique, para algum $\sigma > 0$,

$$\beta + \epsilon + \sigma \leq 2(\alpha - m).$$

Então, se $\alpha_0$ e $\beta_0$ verificam as condições do lema e $\epsilon$ for assim escolhido, o mesmo $\epsilon$ pode ser utilizado para qualquer outro par $\alpha = \alpha_0 + \rho$ e $\beta = \beta_0 + \rho$, $\rho > 0$, (observe que $\alpha$ e $\beta$ automaticamente satisfazem as hipóteses (4.2) quando $\alpha_0$ e $\beta_0$ as satisfazem.

Fixemos agora $f \in F_*^\beta$ e consideremos a aplicação $\Gamma = \Gamma_f$ dada por

$$(V \cap E^{\alpha-\epsilon}) \times F_*^\beta \ni (u,g) \longmapsto (\Psi(0)S_1 g + T_\Psi(u)g, f - R(u,g)) \in E^{\alpha-\epsilon} \times F_*^\beta.$$

Os Lemas 5.2 e 5.3 mostram que, de fato,

$$\Gamma_f(E^{\alpha-\epsilon} \times F_*^\beta) \subset E^\alpha \times F_*^{\beta+\epsilon}. \tag{5.21}$$

**Lema 5.4.** *Suponhamos que valham as hipóteses do Teorema 4.1 e que $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Seja $f \in F^\beta$ e suponhamos que $(u, g) \in (V \cap E^{\alpha-\epsilon}) \times F_*^\beta$ é um ponto fixo de $\Gamma_f$. Então, $u \in E_*^\alpha$ e $\Phi(u) = f$; se $f \in F^\infty$ segue que $u \in E^\infty$.*

**Demonstração:** Suponhamos que $u = \Psi(0)S_1 g + T_\Psi(u)g$, $g + R(u, g) = f$. A primeira equação significa que $\tilde{u} = u$. Ora, o Lema 5.2 mostra que $u \in E_*^\alpha$. Além disso, $\tilde{u}(t) \to \tilde{u} = u$, $t \to \infty$, em $E^a$ se $a < \alpha$ e $\Phi(\tilde{u}(t)) \to g + R(u, g) = f$ em $F^b$ se $b < \beta$. Como $\Phi(\tilde{u}(t)) \to \Phi(u)$ em $F^0$, isto mostra que $\Phi(u) = f$. Suponhamos agora que $f \in F^\infty$. Vem de (5.21) e de $g = f - R(u, g)$ que $g \in F^{\beta'}$, $\beta' = \beta + \epsilon$. Escrevamos $\alpha' = \alpha + \epsilon$. Então, $\alpha'$ e $\beta'$ satisfazem as hipóteses do Teorema 4.1. A observação que vem depois do Lema 5.2 mostra que podemos aplicar o Lema 5.2 a $\alpha'$, $\beta'$ (com o mesmo $\epsilon$) e concluir que $T_\Psi(u)g \in E^{\alpha'}$. A equação $u = \Psi(0)S_1 g + T_\Psi(u)g$ mostra agora que $u \in E^{\alpha+\epsilon}$ Agora, o Lema 5.3 aplicado com $\alpha'$ e $\beta'$ no lugar de $\alpha$ e $\beta$, mostra que $g \in F^{\beta+2\epsilon}$, o que permite concluir por sua vez que $u \in E^{\alpha+2\epsilon}$. Este processo pode ser continuado indefinidamente, mostrando que $u \in E^\infty$.

O último lema mostra que o problema de encontrar uma solução da equação $\Phi(u) = f$ foi reduzido ao de encontrar um ponto fixo de um operador compacto $\Gamma$. Na próxima seção discutiremos a existência de pontos fixos de $\Gamma$.

## 6. Existência de pontos fixos

Dados $\alpha$ e $\beta$ satisfazendo (4.6), $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para que valham as conclusões do Lema 5.4, e $f \in F_*^\beta$, procuramos soluções $u \in E^{\alpha-\epsilon}$, $g \in F_*^\beta$, do sistema

$$\begin{aligned} u - \Psi(0)S_1 g - T_\Psi(u)g &= 0, \\ g + R(u, g) &= f. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Comecemos reescrevendo a primeira equação do sistema de forma diferente. Temos

$$\begin{aligned} \Psi(0)S_1 g + T_\Psi(u)g &= \Psi(0)S_1 g + \int_1^\infty \Psi(T_t u)S_t' g\, dt \\ &= \Psi(0)S_1 g + \int_1^\infty [\Psi(T_t u) - \Psi(0)]S_t' g\, dt + \Psi(0)g - \Psi(0)S_1 g \\ &= \Psi(0)g + [T_\Psi(u) - T_\Psi(0)]g. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Podemos inserir (6.2) em (6.1) denotando $\Delta(u)g = [T_\Psi(u) - T_\Psi(0)]g$ e obter

$$\begin{aligned} u &= \Psi(0)g + \Delta(u)g, \\ g &= f - R(u, g). \end{aligned} \tag{6.3}$$

A segunda equação de (6.3) mostra que $\Psi(0)g = \Psi(0)f - \Psi(0)R(u,g)$; substituindo este valor na primeira equação obtemos o sistema equivalente

$$\begin{aligned} u &= \Psi(0)f - \Psi(0)R(u,g) + \Delta(u)g = \Psi(0)f + F(u,g), \\ g &= f - R(u,g). \end{aligned} \tag{6.4}$$

É claro que toda solução $(u,g)$ de (6.4) fornece uma solução do sistema original (6.1) e que

$$(u,g) \longmapsto (\Psi(0)f + F(u,g), f - R(u,g))$$

aplica, com a notação do §4, $(V \cap E^{\alpha-\epsilon}) \times F_*^\beta$ em $E^{\alpha-\epsilon} \times F_*^\beta$ (note-se que já foi provado no parágrafo anterior ao Lema 5.2 que $\Psi(0) : F_*^\beta \to E_*^\alpha \subset E^{\alpha-\epsilon}$ continuamente) . Para resolver este sistema poderemos aplicar o Corolário 3.2 — depois de uma normalização adequada — sempre que exista um $\delta > 0$ tal que

$$\|u\|_{\alpha-\epsilon} + \|g\|_\beta^* \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad u \in V, \quad \text{e} \quad \|F(u,g)\|_{\alpha-\epsilon} + \|R(u,g)\|_\beta^* \leq \delta/2, \tag{6.5}$$

e que escolhamos $\|f\|_\beta^* \leq \delta/2$. Lembrando que $V$ é uma bola centrada na origem do espaço $E^\mu$ bastará tomar $\delta$ menor que o raio desta bola para garantir que $u \in V$. Por outro lado, (5.19) mostra que $\|R(u,g)\|_\beta^* \leq C\delta^2$ e será suficiente estudar $\|F(u,g)\|_{\alpha-\epsilon} \leq \|\Psi(0)R(u,g)\|_{\alpha-\epsilon} + \|\Delta(u)g\|_{\alpha-\epsilon} \leq C\delta^2 + \|\Delta(u)g\|_{\alpha-\epsilon}$.

Para estimar $\Delta(u)g$ escrevemos (*cf.* demonstração do Lema 5.2)

$$\Delta(u)g = \int_1^R [\Psi(T_t u) - \Psi(0)]S_t' g\, dt + \gamma_R(u)g = I_R(u)g + \gamma_R(u)g, \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} \|\gamma_R(u)g\|_{\alpha-\epsilon} &\leq C(1 + \|u\|_{\alpha-\epsilon}^*)\,\|g\|_\beta^*\, R^{-\epsilon}, \\ &\leq C(1+\delta)\|g\|_\beta^*\, R^{-\epsilon}. \end{aligned}$$

Dado $\rho > 0$ podemos tomar $R$ grande para que $C(1+\delta)R^{-\epsilon} < \rho$. Agora, usando (4.8) para estimar o integrando em (6.6) vem

$$\|I_R(u)\|_{\alpha-\epsilon} \leq C_R\tilde{\rho}\|g\|_\beta^* \quad \text{se} \quad \|u\|_{\alpha-\epsilon} \leq C_R\tilde{\delta}.$$

Se $\delta$ é pequeno, temos que $\|I_R(u)\|_{\alpha-\epsilon} \leq \rho\|g\|_\beta^*$, logo $\|\Delta(u)g\|_{\alpha-\epsilon} \leq 2\rho\|g\|_\beta^*$. Isto mostra que (6.5) vale para $\delta$ suficientemente pequeno. Então, o Corolário 3.2 garante a existência de uma solução $(u,g)$ de (6.4) com $\|u\|_{\alpha-\epsilon} + \|g\|_\beta^* \leq \delta$, que é necessariamente também solução de (6.1). Finalmente notemos que, pela segunda equação de (6.1) vale $\|g\|_\beta^* \leq C\|f\|_\beta^* + \|R(u,g)\|_\beta^* \leq C\|f\|_\beta^* + C\|g\|_\beta^{*2}$, onde usamos (5.19). Isto implica que $\|g\|_\beta^* \leq C\|f\|_\beta^*$ para $\delta$ pequeno. Agora, a primeira equação de (6.1) e (5.6) mostram que

$$\|u\|_\alpha^* \leq C(1+\delta)\|f\|_\beta^*. \tag{6.7}$$

Resumindo,

**Lema 6.1.** *Suponhamos que valham as hipóteses do Teorema 4.1 e que $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Existe um $\delta > 0$ tal que para todo $f \in F_*^\beta$ com $\|f\|_\beta^* \leq \delta$ existem soluções $u \in E^{\alpha-\epsilon}$, $g \in F_*^\beta$ do sistema (6.1) de modo que se verifica (6.7).*

Combinando os Lemas 5.4 e 6.1 obtemos a demonstração do Teorema 4.1.

## 7. Mergulhos isométricos e regularidade

Nesta seção aplicaremos o Teorema 4.1 para mostrar que toda variedade compacta $M$ de classe $C^\infty$ equipada com uma métrica de classe $\Lambda^\alpha$, $\alpha > 2$ não inteiro, pode ser mergulhada isometricamente em algum $\mathbb{R}^N$ por meio de um mergulho de classe $\Lambda^\alpha$. No Capítulo III vimos como localizar o problema da densidade dos mergulhos isométricos e como construir um operador manso $\Phi$ entre escalas apropriadas de maneira que o problema do mergulho ficasse reduzido a resolver a equação $\Phi(u) = f$. Fixemos um $\gamma > 0$ e consideremos as escalas

$$E^s = \{\text{Mergulhos de } M \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ de classe } \Lambda^{s+\gamma}\}, \quad 0 \leq s < \infty,$$

e

$$F^s = \{\text{métricas em } M \text{ de classe } \Lambda^{s+\gamma}\}, \quad 0 \leq s < \infty,$$

onde $N$ é escolhido suficientemente grande para que as métricas suaves provenientes de mergulhos sejam densas em $E^s$, $s \geq 0$, (*cf.* Capítulo III, §1). Segue por localização do Teorema 3.9 que as escalas mansas $E^s$ e $F^s$ têm boas aproximações da identidade e são também escalas compactas pela Observação II.3.5. A aplicação $\Phi : E^{s+1} \to F^s$, que a cada mergulho faz corresponder o pullback à variedade $M$ da métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n$, $\Phi(u) = \langle du, du\rangle$ é mansa, o que também acontece com sua derivada $\Phi'(u)v = \langle du, dv\rangle$ e sua segunda derivada $\Phi''(v,w) = \langle dv, dw\rangle$. Valem então as estimativas, para todo $s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(u)\|_s \leq C_s(1 + \|u\|_{s+1}), \qquad u \in B \cap E^{s+1},\\
&\|\Phi'(u)v\|_s \leq C_s\big[(1 + \|u\|_{s+1})\|v\|_1 + \|v\|_{s+1}\big], \qquad u \in B \cap E^{s+1}, \quad v \in E^{s+1},\\
&\|(\Phi'(u) - \Phi'(v))w\|_s \leq C_s\big[(1 + \|u\|_{s+1}) + \|v\|_{s+1})\|u - v\|_1\|w\|_1 + \|u - v\|_{s+1}\|w\|_1\\
&\qquad\qquad + \|u - v\|_1\|w\|_{s+1}\big], \qquad u, v \in B \cap E^{s+1}, \quad w \in E^{s+1},
\end{aligned}$$

onde $B$ é uma bola em $E^1$, centrada em um mergulho livre suave. Além disso, para $u$ numa vizinhança $\tilde{B}$ em $E^2$ de um mergulho livre suave, $\Phi'(u)$ possui uma inversa à direita $\Psi(u)$ que se exprime, em coordenadas locais, como uma matriz cujos coeficientes são funções racionais das derivadas de $u$ de ordem não superior a dois. Verificam-se as estimativas

$$\|\Psi(u)g\|_s \leq C_s\big[(1+\|u\|_{s+2})\|g\|_0 + (1+\|u\|_2)\|g\|_s\big], \qquad u \in \tilde{B} \cap E^{s+2}, \quad g \in F^s.$$

Vemos que $\Phi$ satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1 com a seguinte escolha de parâmetros: $m = 1$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 2$. Sempre usando a notação do teorema, vemos que $\mu = 2$ e que (4.6) assume a forma

$$2 < \alpha, \qquad \alpha \leq \beta < 2(\alpha - 1),$$

e é satisfeita se $\alpha = \beta > 2$. O Teorema 4.1 mostra que toda métrica de classe $\Lambda_*^{\alpha+\gamma}$, suficientemente próxima da métrica proveniente do mergulho livre suave $u$ é pullback da métrica euclidiana via um mergulho de classe $\Lambda_*^{\alpha+\gamma}$. Tomando $\gamma$ arbitrariamente pequeno, a condição $\alpha > 2 + \gamma$ não é mais restritiva do que exigir $\alpha > 2$. Finalmente, para os espaços Hölder não inteiros $\Lambda^s$, vale $\Lambda^s = \Lambda_*^s$ como mostra a

**Proposição 7.1.** *Seja $A$ um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, convexo, compacto, com interior não vazio. Se $\alpha > 0$ não é um inteiro, então, com a notação da Definição 2.1, $\Lambda^\alpha(A) = \Lambda_*^\alpha(A)$. Esta propriedade se estende aos espaços de Hölder de seções de um fibrado sobre uma variedade compacta.*

**Demonstração:** É suficiente provar o caso $0 < \alpha < 1$, quando $A \subset \mathbb{R}^n$. Mostraremos que $\Lambda_*^\alpha(A) \subset \Lambda^\alpha(A)$, pois a outra inclusão sempre vale. Seja $u \in \Lambda_*^\alpha(A)$ e consideremos uma boa aproximação da identidade $T_\theta$. Podemos escrever

$$u = T_1 u + \int_1^\infty T_t' u \, dt = T_1 + U$$

e o Corolário 2.3 mostra que vale $\|T_\theta' u\|_s \leq C_s \|u\|_\alpha^* \theta^{s-\alpha-1}$, para $\theta \geq 1$ e $s \geq 0$. Como $T_1 u \in C^\infty(A)$ bastará provar que $U \in \Lambda^\alpha$. Consideremos $0 < s_1 < \alpha < s_2 < 1$, e um par de pontos distintos $x, y \in A$. Então

$$|T_t' u(x) - T_t' u(y)| \leq C\|T_t' u\|_{s_1} |x-y|^{s_1} \leq C\|u\|_\alpha^* |x-y|^{s_1} t^{s_1-\alpha-1},$$
$$|T_t' u(x) - T_t' u(y)| \leq C\|u\|_\alpha^* |x-y|^{s_2} t^{s_2-\alpha-2}.$$

Vem

$$\begin{aligned} |U(x) - U(y)| &\leq \int_1^M |T_t' u(x) - T_t' u(y)| \, dt + \int_M^\infty |T_t' u(x) - T_t' u(y)| \, dt \\ &\leq K(|x-y|^{s_2} M^{s_2-\alpha} + |x-y|^{s_1} M^{s_1-\alpha}) \end{aligned}$$

de maneira que basta tomar $M = |x-y|^{-1}$ para obter $|U(x) - U(y)| \leq 2K|x-y|^\alpha$, o que termina a demonstração.

## REFERÊNCIAS


[A] Akahori, T. *A new approach to the local embedding theorem of CR-structures for $n \geq 4$,* *Memoirs of the AMS*, **366** (1987), Providence, R.I..

[A-H] Alvarez, J. and Hounie, J. *Spectral invariance and tameness of pseudo-differential operators on weighted Sobolev spaces,* J. of Operator Theory, no prelo.

[Au] Aubin, T. *Nonlinear analysis on manifolds. Monge–Ampere equations,* Springer–Verlag, (1982).

[B] Beale, J. *The existence of solitary water waves,* Comm. Pure Applied Math., **30** (1977), 373–389.

[Bo] Bony, J.-M. *Calcul symbolique e propagation des sigularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires,* Ann. Ec. Norm. Sup. **14** (1981), 209–246.

[Ca1] do Carmo, M. *Geometria Riemanniana* Projeto Euclides, *IMPA*, (1979).

[Ca2] do Carmo, M. *Differential geometry of curves and surfaces,* Prentice-Hall, (1976).

[D] Dehman, B. *Resolubilité local pour des equations semi-linéaires complexes,* Can. J. Math. **42** (1990), 126–140.

[D-Y] DeTurck, D. and Yang, D. *Local existence of metrics with prescribed curvature,* Nonlinear problems in geometry, Proc. of an AMS special session, Contemporary Math. **51** (1985), 34–73.

[G] Gagliardo, E. *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili,* Richereche di Mat. Napoli 7 (1958), 102–137.

[G-Y] Goodman, J., and Yang, D. *Local solvability of nonlinear differential equations,* preprint.

[G-R] Gromov, M. and Rholin, V. *Embeddings and immersions in Riemannian geometry,* Usp. Mat. Nauk **25** (1970), 3-62.

[Gu] Günther, M. *On the perturbation problem associated to isometric embeddings of Riemannian manifolds,* Ann. Global Anal. Geom. **7** (1989), 69–77.

[H1] Hörmander, L. *The boundary problems of phisycal geodesy,* Arch. Rational Mech. Anal. **62** (1976), 1–52.

[H2] Hörmander, L. *The Nash-Moser theorem and paradifferential operators,* In: Analysis, Etcetera. Academic Press, (1990), 429–449.

[Ha] Hamilton, R. *The Inverse Funtion Theorem of Nash and Moser,* Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 65–222.

[Hou1] Hounie, J. *Teoria Elementar das Distribuições,* XII Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA , (1979).

[Hou2] Hounie, J. *Introdução aos operadores pseudo-diferenciais, XVI Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA* , (1987).

[H-M] Hounie, J. and Malagutti, P. *Local integrability of Mizohata structures,* Trans. Amer. *Math. Soc.* , no prelo.

[H-Z] Hong, J. and Zuily, C. *Existence of $C^\infty$ solutions for the Monge-Ampère equation,* Invent. *Math.* **89** (1987), 645–661.

[J1] Jacobowitz, H. *Implicit function theorems and isometric imbeddings,* Ann. of *Math.* **95** (1972), 191–225.

[J2] Jacobowitz, H. *Local isometric embeddings,* Ann. of Math. Studies **102** (1982), 381–393.

[K1] Kuranishi, M. *Strongly pseudo-convex CR structures over small balls, Part I,* Ann. of *Math.,* **115** (1982), 451–500.

[K2] Kuranishi, M. *Strongly pseudo-convex CR structures over small balls, Parts II and III* Ann. of *Math.,* **116** (1982), 1–64 and 249–330.

[L1] Lin, C-S. *The local isometric embedding problem in $\mathbb{R}^3$ of two dimensional Riemannian manifolds with non negative curvature,* J. Diff. Geom., **21** (1985),213–230.

[L2] Lin, C-S. *The local Isometric embedding problem in $\mathbb{R}^3$ of two dimensional Riemannian Manifolds with Gaussian curvature changing sign clearly,* Comm. Pure Applied Math., **39** (1986), 867–887.

[Mi] Milman, M. *Extrapolation and optimal decompositions with applications to Analysis,* preprint.

[M1] Moser, J. *A new technique for the construction of solutions of nonlinear PDE,* Proc. *Nat. Acad. Sci. USA* **47** (1961), 1824–1831.

[M2] Moser, J. *A rapidly convergent iteration method and nonlinear differential equations,* Ann. Scuoa Norm. Sup. Pisa **20** (1966), 499–535.

[N] Nash, J. *The imbedding problem for Riemannian manifolds,* Ann. of Math. **63** (1956), 20–63.

[N-R] Nagel, A. and Rosay, J. *Nonexistence of homotopy formula for (0,1) forms on hypersurfaces of $\mathbb{C}^3$,* Duke *Math. J.* **53** (1989), 823–827.

[Ni1] Nirenberg, L. *On elliptic partial differential equations,* Ann. de Pisa **13** (1959), 116–162.

[Ni2] Nirenberg, L. *Lectures on partial differential equations,* Amer. Math. Soc. Region Conf. Series in *Math.* **17** (1973).

[N-R] Nagel, A. and Rosay, J. *Nonexistence of homotopy formula for (0,1) forms onca hypersurfaces of $\mathbb{C}^3$,* Duke *Math. J.* **53** (1989), 823–827.

[Pog] Pogorelov, A. V. *An example of a two-dimensional Riemannian metric admitting no realization in $E^3$* Soviet Math. Dokl. **12** (1971), 729–730.

[S1] Schaeffer, G. *The capacitor problem,* Indiana Univ. Math. **24** (1974/75), 1143–1167.

[S2] Schaeffer, G. *A stability theorem for the obstacle problem,* Adv. en Math., **17** (1975), 34–47.

[Se] Seeley, R. *Extension of $C^\infty$ functions defined in a half space,* Proc. Amer. Math. Soc **15** (1964), 625–626.

[Ser] Sergeraert, M. F. *Une généralization du théoreme des fonctions implicites de Nash,* C. R. Acad. Sci. Paris **270A** (1970), 861–863.

[St] Stein, E. M. *Singular integrals and differentiability properties of functions,* Princeton Univ. Press, (1970).

[T1] Treves, F. *Approximation and Representation of functions an distributions annihilated by a system of complex vector fields,* École Polytech, Centre de Math. Palaiseau, France, (1981).

[T2] Treves, F. *Hypoanalytic strutures,* Princeton Univ. Press, (1991).

[T3] Treves, F. *Basic linear partial differential equations,* Academic Press, (1975).

[W1] Webster, S. M. *A new proof of the Newlander-Nirenberg theorem,* Math. Z. **201** (1989), 303–316.

[W2] Webster, S. M. *On the local solution of the tangential Cauchy-Riemann equations,* Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire **6** (1989), 167–182.

[Z] Zehnder, E. *Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems, parts I and II,* Comm. Pure Applied Math., **28** (1975),331–351; **29** (1976), 49–113.


Impresso na Gráfica do

impa

pelo Sistema Xerox/1065