Colóquio 19°
Brasileiro de Matemática

COMPACIDADE COMPENSADA APLICADA ÀS LEIS DE CONSERVAÇÃO

Hermano Frid Neto

HERMANO FRID NETO
(UFRJ)

ISBN
85-244-0071-4

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Estrada Dona Castorina, 110 – J. Botânico
CEP: 22460.320 – Rio de Janeiro-RJ

À memória de meu pai

Armando Pereira Frid

(1926 – 1992)

Prefácio

A teoria da Compacidade Compensada surgiu a partir de resultados obtidos por L.Tartar e F.Murat (veja [**39-42**],[**28-31**]) no decorrer de estudos em teoria da Homogenização. Esta última pode ser definida como um instrumento matemático que permite estudar as propriedades macroscópicas de certos meios a partir de suas propriedades microscópicas. Matematicamente isto pode ser traduzido como um problema de entender como oscilações de coeficientes de equações diferenciais parciais criam oscilações em suas soluções. Mesmo no caso de equações lineres, questões de interesse prático como a medição de certas observáveis relativas a um certo processo físico (por exemplo, a energia de um campo eletromagnético) nos remetem naturalmente ao problema de saber como funcões não-lineares das variáveis dependentes se comportam em relação as oscilações das soluções de equações com coeficientes oscilantes. Os resultados mencionados acima, que deram origem a teoria da Compacidade Compensada, mostravam que certas funcões não-lineares, cuja forma dependia do sistema de equações em estudo, se comportavam bem em relação às oscilações das soluções, isto é: se uma sequência de soluções oscilantes convergia fracamente para uma certa função, as compostas daquelas funções não-lineares com os membros da sequência convergiam fracamente para a composta com o limite fraco. Desde logo Tartar percebeu a importância que tais resultados poderiam ter no estudo de equações diferenciais parciais não-lineares, principalmente aquelas provenientes da Física e Mecânica do Contínuo. Ele próprio forneceu as primeiras aplicações deste gênero da teoria, em particular, sua aplicação ao estudo das leis de conservação escalares [**41**]. Mas, segundo palavras do próprio Tartar [**43**], " o primeiro sucesso real deste programa foi a aplicação por R.DiPerna à existência global para alguns sistemas de leis de conservação [**11-12**], estendendo sua análise anterior para uma equação escalar".

O objetivo destas notas é fazer uma exposição da aplicação da teoria da Compacidade Compensada ao estudo dos sistemas de leis de conservação, incluindo aí os dois célebres trabalhos de DiPerna [**11-12**] que abriram caminho a esta linha de pesquisa. O que nos levou a idéia de realizar este mini-curso no 19º Colóquio Brasileiro de Matemática foi a convicção de se tratar de um capítulo de grande importância na Matemática que se desenvolve nos dias presentes, e que, embora já tenha dado luz a resultados de grande expressão tem aberto caminhos a outras tantas possibilidades cujo alcance ainda não é possível prever. Aliado a este caráter objetivo, a teoria se reveste de um aspecto estético verdadeiramente impressionante, representado por uma engenhosa concatenação de resultados sofisticados da análise matemática, da teoria das fuções, além daqueles provenientes do estudo teórico geral das equações diferenciais parciais. Acreditamos que esta componente de beleza, fortalecida pela aplicabilidade, representa um estímulo à dedicação à pesquisa matemática que, por si só, dispensa ganhos adicionais.

Aproveitamos a oportunidade para fazer alguns agradecimentos. À Comissão Organizadora do 19º Colóquio Brasileiro de Matemática por proporcionar a oportunidade de dar este curso. A Marcelo Martins dos Santos, meu parceiro em dois trabalhos nesta área que incluí nesta monografia, pelas idéias trocadas e discussões frutíferas. Aos colegas Helena Nussenzveig Lopes, Milton Lopes e Severino Toscano que contribuíram com sugestões, idéias e questionamentos. Um agradecimento especial a Ana Maria Amarillo Martins dos Santos que gentilmente editou grande parte destas notas, contribuindo também com várias correções. A Leonardo Rendón e Jorge Araújo que também contribuíram com correções. A Laís Ventura, Michael Mota e Rogério Dias que colaboraram no trabalho de editoração. À minha família pelo verão um tanto sacrificado em prol da feitura destas notas.

Conteúdo

Notações

$\mathbb{R}^n$ – espaço euclidiano de dimensão $n \geq 2$.

Ω – subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ limitado com fronteira suave.

$M(B)$ – espaço das medidas de Radon sobre B.

$\mathbb{P}(B)$ – espaço das medidas borelianas de probabilidade sobre B.

$C_0(\Omega)$ – espaço das funções contínuas reais de suporte compacto contido em Ω.

$C_b(\Omega)$ – espaço das funções contínuas limitadas em Ω.

$W^{m,p}(\Omega)$ – espaço de Sobolev das distribuições com derivadas até a ordem m em $L^p(\Omega)$ dotado da topologia usual.

$W_0^{m,p}(\Omega)$ – fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

$H^{-1}(\Omega)$ – espaço dual de $W_0^{1,2}(\Omega)$.

$W^{-1,q}(\Omega)$ – espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

$\|\cdot\|_p$ – norma usual de L^p.

Spt – suporte

$\rightharpoonup$ – convergência fraca em L^p, $p \in (1, \infty)$, ou convergência fraca $*$ em L^∞, ou convergência no sentido das distribuições, ou ainda convergência fraca em $M(B)$.

$\stackrel{*}{\rightharpoonup}$ – convergência fraca $*$ em L^∞.

ε – como índice denota uma sequência de números convergindo a zero.

$C, c, const.$ – constantes.

Capítulo I

Compacidade Compensada

1. Introdução.

Freqüentemente em mecânica do contínuo e física nos deparamos com equações diferencias parciais não–lineares em que os termos de ordem mais alta ocorrem com coeficientes bastantes pequenos. Um exemplo disso se dá em dinâmica dos fluidos quando são considerados fluidos compressíveis de pequena viscosidade e de pequena condutividade de calor. Situação igual também surge quando através de reescalamento procura–se estudar o que acontece quando passamos de um ponto de vista microscópico para um ponto de vista macroscópico na análise de um determinado processo físico. Podemos visualizar isto melhor através de um exemplo simples. Suponhamos que microscopicamente um certo processo possa ser descrito por meio da equação

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}f(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u. \tag{1.1}$$

Se quisermos estudar o mesmo processo numa escala macroscópica no tempo e no espaço, isto implica numa diminuição dos valores absolutos das variáveis de espaço e tempo, o que podemos representar a título de exemplo por uma mudança do tipo $y = \varepsilon x$, $\tau = \varepsilon t$. Assim, (1.1) se transforma em

$$\frac{\partial}{\partial \tau}u^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial y}f(u^\varepsilon) = \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial y^2}u^\varepsilon. \tag{1.1 $-\ \varepsilon$}$$

Duas questões surgem imediatamente:

(i) dada uma sequência u^ε satisfazendo equações como $(1.1-\varepsilon)$ onde os termos de ordem mais alta dependem do parâmetro ε, em que sentido podemos obter uma função u tal que as u^ε convergem para u quando $\varepsilon \to 0$?.

(ii) a função limite u é solução da equação obtida quando $\varepsilon = 0$?

Na maior parte dos casos de interesse nas aplicações, especialmente quando estamos lidando com sistemas (p.ex. quando u e f são funções vetoriais em (1.1)), o único objeto sobre o qual conseguimos ter controle a respeito da sequência $\{u^\varepsilon\}$ é a norma L^p (geralmente L^2 ou L^∞) dos elementos desta sequência. Em geral é impossível um controle pleno sobre a norma das derivadas dos elementos da sequência, devido a fenômenos como, por exemplo, a intensificação de oscilações quando ε tende a zero. Por isto, o tipo de convergência que pode responder a primeira questão é a convergência fraca em espaços L^p (fraca $*$ no caso de L^∞). O teorema de Banach–Alaoglu aplicado aos espaços L^p nos diz que se tivermos $\|u^\varepsilon\|_p$ uniformemente limitada, com $1 < p \leq \infty$, então podemos obter uma subsequência que continuamos denotando por $\{u^\varepsilon\}$ e uma função u tal que $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ ($u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u$ no caso L^∞).

A resposta à segunda questão, quando o máximo que podemos dizer é que $u^\varepsilon \rightharpoonup u$, redunda em saber se compostas de funções não lineares com as u^ε convergem fracamente para a composta destas funções com o limite fraco u. Por exemplo, no caso das equações $(1.1-\varepsilon)$ a questão seria saber se $f(u^\varepsilon) \rightharpoonup f(u)$ uma vez tendo que $u^\varepsilon \rightharpoonup u$.

Em geral, para funções não–lineares não é válido que $f(u^\varepsilon) \rightharpoonup f(u)$ se $u^\varepsilon \rightharpoonup u$. Isto pode ser melhor visto com auxílio do seguinte resultado.

1.1. Lema. *Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período T, mensurável e limitada. Denotemos $h^\varepsilon(x) = h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Então $h^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{h}$ em $L^\infty(\mathbb{R})$ onde*

$$\overline{h} = \frac{1}{T}\int_0^T h(s)\ ds = \text{ constante.} \tag{1.2}$$

Prova: : Se $h(x) = \cos(\frac{2\pi}{T}x)$ ou $h(x) = \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}x)$ o resultado segue diretamente do lema de Riemann–Lebesgue . Se h é uma função C^2, periódica de período T, a série de Fourier de h converge uniformemente e, portanto, o resultado neste caso também segue do lema de Riemann–Lebesgue. O caso geral é então facilmente obtido por aproximação. □

Pelo lema acima, se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período T mensurável e limitada, então $h^\varepsilon(x) = h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ satisfaz $h^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{h}$, com $\overline{h}$ definido por (1.2), assim como $(h^\varepsilon)^2 \rightharpoonup \overline{(h^2)}$, com

$$\overline{(h^2)} = \frac{1}{T}\int_0^T h^2(s)\ \mathrm{ds},$$

e temos $\overline{(h^2)} \neq \left(\overline{h}\right)^2$, exceto se h for constante.

O problema de saber se compostas de função não–lineares com elementos de uma sequência fracamente convergente convergem fracamente às compostas destas funções com o limite fraco da sequência, ocorre em diversas outras situações além dos exemplos simples que demos acima. Mais adiante daremos um exemplo de um problema de medição em física que é típico desta problemática. Em matemática aplicada esta questão surge freqüentemente em problemas variacionais, quando, por exemplo, queremos minimizar um funcional não–linear, bem como em esquemas numéricos para aproximar soluções de equações diferenciais parciais não–lineares. Por ora vamos nos contentar com esses breves comentários.

Ocorre que, em um grande número de casos de interesse em aplicações, embora não tenhamos controle sobre cada uma das derivadas dos elementos da sequência $\{u^\varepsilon\}$, a estrutura das equações ou dos sistemas de equações em estudo permite um certo controle sobre determinadas combinações envolvendo as derivadas dos elementos da sequência. A teoria da compacidade compensada de Tartar e Murat (veja [**28** – **31**], [**40** – **42**]) fundamenta–se no fato de que na presença de um tal controle parcial, em certos casos é possível encontrarmos funções não–lineares cujas compostas com os elementos da sequência convergem fracamente para as compostas com o limite fraco da sequência. O seguinte resultado, cuja demonstração numa versão mais geral será o objetivo da seção 3 deste capítulo, ilustra bem este fato e constitui um dos alicerces desta teoria.

1.2. Teorema (Lema do div–rot). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\{u^\varepsilon\}$ uma sequência limitada em $L^2(\Omega;\mathbb{R}^{2n})$, com $u^\varepsilon = (v^\varepsilon, w^\varepsilon)$, tal que $u^\varepsilon \rightharpoonup u = (v,w) \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^{2n})$. Suponhamos que*

(i) $\operatorname{div} v^\varepsilon$ é limitada em $L^2(\Omega)$,

(ii) $(\operatorname{rot} w)_{ij} = \frac{\partial w_i^\varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j^\varepsilon}{\partial x_i}$ é limitada em $L^2(\Omega)$, $i,j = 1,2\ldots,n$.

então se $f(u) = < v, w >$, para $u = (v,w) \in \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, onde $<\ ,\ >$ é o produto interno de $\mathbb{R}^n$, vale

$$f(u^\varepsilon) \rightharpoonup f(u)$$

no sentido das distribuições.

Uma aplicação direta e bastante ilustrativa do resultado acima encontramos num problema simples de medição em eletrostática (veja [41]). Seja

$$u(x) = \text{ potencial eletrostático,}$$

$$E = -\ \mathrm{grad}\, u = \text{ campo elétrico,}$$

e suponhamos que

$$u(x) = u^{\varepsilon}(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

onde u_0, u_1 são suaves, u_1 é periódica de período T e ε pequeno. Então

$$E = E^{\varepsilon} = -\ \mathrm{grad}\, u_0 - \ \mathrm{grad}\, u_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Observemos que enquanto u pode ser aproximado por u_0, E é muito diferente de $\mathrm{grad}\, u_0$ na topologia forte. No entanto, na topologia fraca temos

$$\mathrm{grad}\, u_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup 0 \ \text{ quando } \varepsilon \to 0\,.$$

Portanto, a topologia "natural" deve ser a topologia fraca (recordemos ainda que em conjuntos limitados a topologia fraca é metrizável). O espaço "natural" para se trabalhar aqui é o espaço de energia associado com $\int_{\Omega} |E|^2\, dx$. Portanto, necessitamos que $E \in L^2(\Omega)$ e assim $u \in H^1(\Omega)$ (espaço de Sobolev de ordem 1), de modo que o espaço "natural" deve ser $H^1(\Omega)$.

As equações constitutivas são:

$$\begin{cases} E = -\ \mathrm{grad}\, u\,, \\ D = aE\,, \\ \mathrm{div} D = \rho\,, \end{cases}$$

onde D é o campo de indução elétrica, ρ é a densidade de carga e a uma constante. A densidade de energia eletrostática é $E \cdot D = e$. Suponhamos que possamos medir ρ, e, D, e u:

isto significa que

$$
\begin{aligned}
u^\varepsilon &\rightharpoonup u_0 \quad \text{em } H^1(\Omega)\,,\\
E^\varepsilon &\rightharpoonup E_0 \quad \text{em } L^2(\Omega)\,,\\
D^\varepsilon &\rightharpoonup D_0 \quad \text{em } L^2(\Omega)\,,\\
\rho^\varepsilon &\rightharpoonup \rho \quad\ \ \text{em } L^2(\Omega)\,.
\end{aligned}
$$

O problema é: podemos medir e, i.e.,

$$e^\varepsilon = E^\varepsilon \cdot D^\varepsilon \rightharpoonup e_0 = E_0 \cdot D_0 \ ?$$

O teorema 1.1 diz que sim. Por outro lado, é sabido também que se um experimento depende de uma função não –linear $f(E^\varepsilon, D^\varepsilon)$ diferente de $E^\varepsilon \cdot D^\varepsilon$, então será impossível deduzir o resultado da medição de $f(E^\varepsilon, D^\varepsilon)$ a partir das medições de E^ε eD^ε.

Os fatos mencionados acima apontam para a necessidade de termos uma maneira conveniente de representarmos o limite fraco das compostas $f(u^\varepsilon)$ de uma função não–linear genérica f com os elementos de uma seqüência de funções fracamente convergente $\{u^\varepsilon\}$. Isto nos é fornecido pelas *medidas parametrizadas de Young* cuja existência é garantida por um teorema de Tartar [41] que generaliza resultados anteriores de L.C. Young [45] e MacShane[27]. Em resumo, o teorema de Tartar sobre medidas parametrizadas nos diz que dada uma seqüência $\{u^\varepsilon\}$ uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ então existe uma subseqüência, que também denotaremos por $\{u^\varepsilon\}$, e uma família de medidas de probabilidade ν_x, $x \in \Omega$, definidas sobre $\mathbb{R}^m$ tais que se $f \in C_b(\mathbb{R}^m)$ e

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(x) &= < \nu_x, f(\lambda) > \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda)\, d\nu_x(\lambda),
\end{aligned}
$$

então $f(u^\varepsilon) \rightharpoonup \overline{f}$ em $L^\infty(\Omega)$ fraco $*$.

Este resultado bem como uma extensão do mesmo para espaços L^p, com $1 < p < \infty$, constituirão o tema da seção 2 deste capítulo. Com a introdução das medidas ν_x, o problema de saber se $f(u^\varepsilon) \rightharpoonup f(u)$, uma vez tendo que $u^\varepsilon \rightharpoonup u$, para uma f particular, se reduz a tentarmos obter informações sobre o suporte das medidas ν_x.

Por exemplo, se para quase todo x o suporte de ν_x está contido num conjunto sobre o qual f é afim, então teremos $f(u^\varepsilon) \rightharpoonup f(u)$. Estas questões serão melhor desenvolvidas nas próximas seções.

Uma vez que já comentamos por alto o material que se encontra nas seções 2 e 3 deste capítulo, vamos concluir esta introdução dizendo algo sobre as seções 4 e 5. Na seção 4 apresentamos uma versão generalizada de um resultado devido a Murat [**31**] que é uma ferramenta extremamente útil na comprovação das hipóteses do lema do div–rot apresentado na seção 3. Na seção 5 expomos uma primeira aplicação (devida a Tartar [**41**]) da teoria da compacidade compensada às leis de conservação, no caso mais simples em que temos apenas uma equação.

2. Medidas de Young.

Como foi dito na seção anterior, um recurso de grande utilidade na teoria da compacidade compensada é a representação de limites fracos das compostas de uma função qualquer com os membros de uma seqüência fracamente convergente por meio das medidas parametrizadas de Young. Nesta seção mostraremos como esta representação é obtida. Mais especificamente, estaremos aqui prioritariamente ocupados com a demonstração do seguinte resultado devido a Tartar [41]:

2.1. TEOREMA. *Suponhamos que K é limitado em $\mathbb{R}^m$ e Ω é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Seja $\{u^\varepsilon\}$ uma seqüência de funções mensuráveis, com $u^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^m$, tal que $u^\varepsilon(x) \in K$ q.t.p. $x \in \Omega$. Então existe uma subseqüência $\{u^{\varepsilon_k}\}$ e uma família de medidas de probabilidade ν_x, $x \in \Omega$, sobre $\mathbb{R}^m$ com $Spt\,\nu_x \subset \overline{K}$ tal que se f é uma função contínua em $\mathbb{R}^m$ e*

$$\overline{f}(x) = < \nu_x, f(\lambda) > \quad q.t.p.$$

então

$$f(u^{\varepsilon_k}) \rightharpoonup \overline{f} \text{ em } L^\infty(\Omega) \text{ fraco } * .$$

Observação: O teorema acima possui uma recíproca que aqui omitiremos (veja [**41**]). Os exemplos abaixo se encontram em [**41**].

Exemplos:

(1) Se $f =$ identidade e se $u_n \rightharpoonup u$ então

$$u(x) = < \nu_x, \lambda > \quad \text{q.t.p.}$$

(2) Seja $\theta_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{q} \theta_i = 1$, e $v(x) = a_i$ para x no i–ésimo intervalo, $\sum_{j=0}^{i-1} \theta_j \leq x < \sum_{j=0}^{i} \theta_j$.

Estendamos v periodicamente com período 1 a toda a reta $\mathbb{R}$, e façamos

$$u^\varepsilon(x) = v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Como

$$f(u^\varepsilon) \rightharpoonup \sum_{i=1}^{q} \theta_i f(a_i) \quad \text{em } L^\infty(\Omega) \text{ fraco } *,$$

tomamos

$$\nu_x = \sum_{i=1}^{q} \theta_i \delta_{a_i},$$

onde δ_{a_i} é a medida de Dirac concentrada em a_i, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(3) Seja $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua de período 1. Então se definimos ν por

$$< \nu, f(\lambda) > = \int_0^1 f(v(x))\, dx$$

e se $u^\varepsilon(x) = v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, podemos tomar $\nu_x = \nu$, $x \in \mathbb{R}$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e μ uma medida de Radon finita em $\Omega \times \mathbb{R}^m$. Denotaremos por $\text{proj}_\Omega \mu$ a projeção canônica de μ sobre Ω, isto é, $\text{proj}_\Omega \mu(E) = \mu(E \times \mathbb{R}^m)$ para cada boreliano $E \subset \Omega$.

A proposição seguinte é um resultado geral de teoria da medida que será útil na demonstração do teorema 2.1.

2.2. Proposição (Fatiamento de medidas). *Seja μ como acima e ponhamos $\sigma = \text{proj}_\Omega \mu$. Para $x \in \Omega$, $\sigma -$ q.t.p., existe uma medida $\nu_x \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$, conjunto das medidas* *de probabilidade sobre* $\mathbb{R}^m$, *tal que*

(*i*) *a aplicação* $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\nu_x(y)$

é $\sigma-$ *mensurável e*

(*ii*) $\int_{\Omega\times\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int_{\Omega} (\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\nu_x(y) \ )\, d\sigma(x)$

para cada função f *contínua e limitada.*

PROVA: Seja $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ um subconjunto enumerável denso de funções em $C_0(\mathbb{R}^m)$. Definimos então as medidas de Radon

$$\gamma^{\,k}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{E\times\mathbb{R}^m} f_k(y)\, d\mu(x,y)\,,$$

para borelianos $E \subset \Omega$. Claramente $\gamma^k \prec\!\prec \sigma$. Conseqüentemente, para $\sigma-$ q.t.p. $x \in \Omega$, os limites

$$D_\sigma\gamma^k = \lim_{r\to 0} \frac{\gamma^{\,k}(B(x,r))}{\sigma(B(x;r))}\,, \ k = 1,2,\dots\,,$$

existem, as aplicações $x \longmapsto D_\sigma\gamma^k(x)$, $k = 1,2,\dots$, são limitadas, $\sigma-$mensuráveis e

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{aligned} \int_{E\times\mathbb{R}^m} f_k(y)\, d\mu(x,y) &= \gamma^{\,k}(E) \\ &= \int_E D_\sigma\gamma^k(x)\, d\sigma(x)\,, \end{aligned}$$

$k = 1,2,\dots$, para cada boreliano $E \subset \Omega$ (estamos aqui invocando a teoria de derivadas simétricas de Federer, veja e.g. [**14**]).

Seja W o espaço gerado por $\{f_k\}$. Para $\sigma-$ q.t.p. $x \in \Omega$ temos definidos sobre W os funcionais

$$\Gamma_x\left(\sum_{i=1}^{N} a_i f_{k_i}\right) = \sum_{i=1}^{N} a_i\ D_\sigma\gamma^{\,k_i}(x)\,.$$

Como W é denso em $C_0(\mathbb{R}^m)$ e os Γ_x são limitados em W (com a topologia herdada de $C_0(\mathbb{R}^m)$), podemos estendê-los a $C_0(\mathbb{R}^m)$. A aplicação $f \longmapsto \Gamma_x(f)$ é um fucional linear limitado sobre $C_0(\mathbb{R}^m)$. Além disso pela definição de Γ_x vemos facilmente que este é de um funcional positivo. Logo existe uma medida de Radon ν_x em $\mathbb{R}^m$ satisfazendo

$$\Gamma_x(f) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, d\nu_x(y)\,, \tag{2.2}$$

para toda $f \in C_0(\mathbb{R}^m)$. Mais ainda,

$$x \longmapsto \Gamma_x(f)\,,$$

com $f \in C_0(\Omega)$ fixa, é limitada e $\sigma-$mensurável. Portanto, de (2.1) e (2.2) deduzimos que

$$\int_{E\times\mathbb{R}^m} f(y)\, d\mu(x,y) = \int_E \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, d\nu_x(y)\ \Big)\, d\sigma(x) \tag{2.3}$$

para todos f, E como acima. Usando aproximações por funções simples vemos de (2.3) que

$$\int_{\Omega\times\mathbb{R}^m} g(x) f(y)\, d\mu(x,y) = \int_\Omega g(x) \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, d\nu_x(y)\ \Big)\, d\sigma(x)\,,$$

para f e g contínuas limitadas. Pondo $f \equiv 1$ deduzimos que $\nu_x(\mathbb{R}^m) = 1$, $\sigma-$ q.t.p.. Como toda função contínua limitada f definida em $\Omega \times \mathbb{R}^m$ pode ser localmente uniformemente aproximada por somas finitas da forma $\sum_{i=1}^r g^i(x) f^i(y)$ (para g^i, f^i contínuas e limitadas, $i = 1, 2, \ldots, N$) seguem as afirmações (i) e (ii). □

Em seguida demonstraremos o teorema 2.1.

PROVA DO TEOREMA 2.1: Definimos as medidas de Radon μ^ε por

$$\mu^\varepsilon(E) = \int_\Omega \chi_E(x, u^\varepsilon(x))\, dx$$

para cada boreliano $E \subset \Omega \times \mathbb{R}^m$. Como para cada compacto $K = K_1 \times K_2 \subset \Omega \times \mathbb{R}^m$, temos $\mu^\varepsilon(K) \leq \mu^\varepsilon(K_1 \times \mathbb{R}^m) = L^n(K_1 \cap \Omega) \equiv$ const. (independente de ε), onde L^n é a medida de Lebesgue $n-$ dimensional, existe uma subseqüência $\{u^{\varepsilon_k}\}$ e uma medida μ tal que $\mu^{\varepsilon_k} \rightharpoonup \mu$ em $M(\Omega \times \mathbb{R}^m)$ (espaço das medidas de Radon sobre $\Omega \times \mathbb{R}^m$).

Afirmamos que $\sigma =$ projμ é igual a $L^n|\Omega$ (L^n restrita a Ω). Para isto notemos que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto então

$$\begin{aligned}\sigma(A\ ) &= \mu(A \times \mathbb{R}^m) \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \mu^{\varepsilon_k}(A \times \mathbb{R}^m) \\ &= L^n(A \cap \Omega)\,,\end{aligned}$$

e assim $\sigma \leq L^n|\Omega$. Por outro lado, seja $K \subset \Omega$ compacto. Como $\{u^{\varepsilon_k}\}$ é limitada em $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ existe $R > 0$ tal que Spt$\mu \subset \Omega \times B(0;R)$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\sigma(K) &= \mu(K \times \mathbb{R}^m) \\ &= \mu(K \times B(0;R\,)\,) \\ &\geq \limsup \mu^{\varepsilon_k}(K \times B(0;R\,)\,) \\ &= L^n(K \cap \Omega)\,,\end{aligned}$$

e, portanto, $\sigma \geq L^n|\Omega$.

Do teorema 2.1 deduzimos que existe para q.t.p. $x \in \Omega$ uma medida $\nu_x \in P(\mathbb{R}^m)$ tal que

$$\int_{\Omega\times\mathbb{R}^m} g(x,y)\,d\mu(x,y) = \int_\Omega \Big(\int_{\mathbb{R}^m} g(x,y)\,d\nu_x(y)\ \Big)\,dx$$

para cada função g contínua limitada.

Seja $g(x,y) = \zeta(x)f(y)$, onde $\zeta \in C_0(\Omega)$ e $f \in C_o(\mathbb{R}^m)$. Então

$$\begin{aligned}\int_\Omega \zeta(x) f(u^{\varepsilon_k}(x))\,dx &= \int_\Omega g(x, u^{\varepsilon_k}(x))\,dx \\ &= \int_{\Omega\times\mathbb{R}^m} g(x,y)\,d\mu^{\varepsilon_k}(x,y)\,,\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \zeta(x) f(u^{\varepsilon_k}(x))\,dx &= \int_{\Omega\times\mathbb{R}^m} g(x,y)\,d\mu(x,y) \\ &= \int_\Omega \zeta(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,d\nu_x(y)\Big)\,dx \\ &= \int_\Omega \zeta(x)\overline{f}(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Ou seja, $f(u^{\varepsilon_k}) \rightharpoonup \overline{f}$ em $L^\infty(\Omega)$ fraco estrela. Finalmente, se tomarmos f qualquer se anulando em $\overline{K}$ teremos $f(u^{\varepsilon_k}) \equiv 0$ e assim $<\nu_x, f>= 0$, o que mostra que $\mathrm{Spt}\nu_x \subset \overline{K}$.

□

Observação. Se ν_x é uma medida de Dirac para q.t.p. $x \in \Omega$, então (passando a uma subseqüência se necessário) temos que $\{u^{\varepsilon_k}\}$ converge q.t.p..

De fato pondo $u(x) = \int_{\mathbb{R}^m} y\, d\nu_x(y)$, temos

$$\begin{aligned}\|u\|_2^2 &= \int_\Omega \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |y|^2\, d\nu_x(y) \Big)\, dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u^{\varepsilon_k}(x)|^2\, dx\,,\end{aligned}$$

de modo que $u^{\varepsilon_k} \longrightarrow u$ fortemente em $L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

2.3. Definição. *Chamamos a família ν_x, $x \in \Omega$, de medida parametrizada de Young ou função generalizada de Young.*

As medidas ν_x poderiam ter sido construídas diretamente do modo que expomos a seguir. Primeiro extraímos uma subseqüência u^{ε_k} tal que para todo polinômio com coeficientes racionais p, $p(u^{\varepsilon_k})$ converge em L^∞ fraco $*$ a $\overline{p}$. Seja $\widetilde{\Omega}$ o conjunto dos pontos de Lebesgue de todas as funções $\overline{p}$, isto é, dos pontos $x \in \Omega$ tais que

$$\overline{p}(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{L^n(B(x;r))} \int_{B(x;r)} \overline{p}(z)\, dz\,.$$

Temos que $\Omega - \widetilde{\Omega}$ tem medida nula (veja [**32**]) e é fácil ver que para todo $x \in \widetilde{\Omega}$ temos

$$|\overline{p}(x)| \le \sup_{\lambda\in\overline{K}} |p(\lambda)|\,.$$

Portanto, a aplicação $p \longmapsto \overline{p}(x)$ define para cada $x \in \widetilde{\Omega}$ um funcional linear contínuo sobre o conjunto dos polinômios com coeficientes racionais e pode, portanto, ser estendida de modo único a um funcional linear (positivo) sobre $C(\overline{K})$. Assim, a cada $x \in \widetilde{\Omega}$ podemos associar uma medida de Radon ν_x. Verificamos facilmente que ν_x é medida de probabilidade e que se f é uma função contínua sobre $\mathbb{R}^m$ então $f(u^\varepsilon) \rightharpoonup \overline{f}$, onde $\overline{f}(x) =< \nu_x, f >$, q.t.p. $x \in \Omega$. Omitimos os detalhes.

Concluímos esta seção com uma versão L^p, $1 < p < \infty$, do teorema 2.1, devida a M.E. Schonbek (veja [34]).

2.4. TEOREMA. *Seja $\{u^\varepsilon\}$ uma seqüência uniformemente limitada em $L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$, para algum $p > 1$. Então existe uma subseqüência $\{u^{\varepsilon_k}\}$ e uma família de medidas de probabilidade $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ sobre $\mathbb{R}^m$ tal que se $f \in C(\mathbb{R}^m)$ e satisfaz $f(u) = o(|u|^p)$ quando $|u| \to \infty$ então*

$$f(u^{\varepsilon_k}) \rightharpoonup < \nu_x, f(\lambda) >= \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)$$

no sentido das distribuições.

PROVA: A prova consiste de dois passos. Primeiro vamos dar um esboço de ambos.

(1) Para cada $M > 0$ definimos uma nova seqüência $\{v_M^\varepsilon\} \subset L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ que coincide com $\{u^\varepsilon\}$ em $|u^\varepsilon(x)| \leq M$ e é zero no restante. Aplicamos o teorema 2.1 e obtemos para cada M uma família de medidas de probabilidade ν_x^M e uma subseqüência $v_M^{\varepsilon_k}$ tal que para toda $f \in C(\mathbb{R}^m)$

$$f(v_M^{\varepsilon_k}) \rightharpoonup < \nu_x^M, f(\lambda) > \quad \text{em } L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m) \text{ fraco } * .$$

(2) Definimos uma nova família de medidas $\{\nu_x\}$ como limite das $\{\nu_x^M\}$ quando $M \to \infty$ e mostramos que essa família de medidas satisfaz a conclusão de teorema.

Passo 1. Seja $\Gamma_M^\varepsilon(x)$ a função de corte associada a $u^\varepsilon(x)$ definida por $\Gamma_M^\varepsilon(x) = 1$ se $|u^\varepsilon(x)| \leq M$, $\Gamma_M^\varepsilon(x) = 0$ se $|u^\varepsilon(x)| > M$. Seja

$$v_M^\varepsilon(x) = \Gamma_M^\varepsilon(x)\, u^\varepsilon(x),$$

então $v_M^\varepsilon(x) \in B_M = \{\lambda \in \mathbb{R}^m : |\lambda| \leq M\}$. Pelo teorema 2.1 existe para cada M uma família de medidas de probabilidade $\{\nu_x^M\}_{x\in\Omega}$ com suporte em B_M tal que para qualquer $f \in C(\mathbb{R}^m)$

$$f(v_M^\varepsilon) \rightharpoonup \langle \nu_x^M, f(\lambda)\rangle \quad \text{em } L^\infty(\Omega) \text{ fraco } * .$$

Passo 2. Definimos

$$\langle \nu_x, \phi\rangle = \lim_{M\to\infty} \langle \nu_x^M, \phi\rangle, \tag{2.4}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. O limite (2.4) existe já que pelo teorema 2.1

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle \nu_x^M, \phi\rangle \varphi(x)\, dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \phi(v_M^\varepsilon(x))\varphi(x)\, dx \\ &= \int_\Omega \langle \nu_x^{M_0}, \phi\rangle \varphi(x)\, dx\,,\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_0(\Omega)$ e todo $M \geq M_0$, onde M_0 é tal que $\operatorname{Spt}\phi \subset B(0; M_0)$.

Seja $f \in C(\mathbb{R}^m)$ satisfazendo a condição de crescimento

$$f(\lambda) = o(|\lambda|^p) \quad \text{quando } |\lambda| \to \infty\,. \tag{2.5}$$

Definamos

$$\langle \nu_x, f\rangle = \lim_{N\to\infty}\langle \nu_x, f^N\rangle \quad \text{q.t.p. } x\,, \tag{2.6}$$

onde $\{f^N\}$ é uma seqüência de funções que aproximam f e satisfazem:

$f^N(\lambda) = f(\lambda)$ se $|\lambda| \leq N$, $f^N(\lambda) = 0$ se $|\lambda| \geq N+1$ e $|f^N(\lambda)| \leq |f(\lambda)|$ para todo λ.

Para estabelecer a existência do limite (2.6) mostramos que $\langle \nu_x, f^N\rangle$ é uma seqüência de Cauchy q.t.p. $x \in \Omega$. Sem perda de generalidade podemos supor que $f(0) = 0$ e $f \geq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned}\langle \nu_x, f^N\rangle - \langle \nu_x, f^M\rangle &= \left[\langle \nu_x, f^N\rangle - \langle \nu_x^S, f^N\rangle\right] \\ &\quad + \left[\langle \nu_x^S, f^N\rangle - \langle \nu_x^S, f^M\rangle\right] + \left[\langle \nu_x^S, f^M\rangle - \langle \nu_x, f^M\rangle\right]\,.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Portanto, basta mostrar que $\langle \nu_x^S, f^N\rangle$ é de Cauchy q.t.p. em x, uniformemente em S. Seja $\varphi \in C_0(\Omega)$. Se $N_0 \leq N \leq M$ então

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[\langle \nu_x^S, f^M\rangle - \langle \nu_x^S, f^N\rangle\right]\, \varphi(x)\, dx &= \int_\Omega \lim_{\varepsilon\to 0}\left[f^M(v_S^\varepsilon(x)) - f^N(v_S^\varepsilon(x))\right]\, \varphi(x)\, dx \\ &\leq 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |f(v_S^\varepsilon(x))|\, |\varphi(x)|\, dx\,,\end{aligned} \tag{2.8}$$

onde $\Omega_N^\varepsilon = \{x \in \Omega \ : \ |u^\varepsilon(x)| \geq N\}$. Agora, pela condição de crescimento de f (2.5), temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_N^\varepsilon} |f(v_S^\varepsilon(x))|\, |\varphi(x)|\, dx &\leq \rho(N_0^{-1}) \int_\Omega |\varphi(x)|\, |u^\varepsilon(x)|^p\, dx \\ &\leq \rho(N_0^{-1})\, \|\varphi\|_\infty\,,\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $\rho > 0$ é tal que $\lim_{t\to 0+}\rho(t) = 0$. Portanto, $\langle \nu_x^S, f^N\rangle$ é de Cauchy em N uniformemente em $S > 0$, q.t.p. $x \in \Omega$, passando a uma subseqüência em N se necessário. Para completar a prova precisamos mostrar que o limite da composição $f(u^{\varepsilon_k})$ existe e $\lim_{\varepsilon_k\to 0} f(u^{\varepsilon_k}) = \langle \nu_x, f(\lambda)\rangle$ no sentido das distribuições para alguma subseqüência $\{u^{\varepsilon_k}\}$. De novo, sem perda de generalidade podemos supor que $f(0) = 0$.

Para cada N, existe uma subseqüência ε_k^N tal que para toda $f \in C(\mathbb{R}^m)$ vale

$$f(v_N^{\varepsilon_k^N}) \rightharpoonup \langle \nu_x^N, f(\lambda)\rangle \quad \text{em } L^\infty(\Omega) \text{ fraco}* \tag{2.10}$$

Daqui até o final da prova consideremos M inteiro positivo e façamos $\varepsilon_k = \varepsilon_k^k$. Por conveniência na notação fazemos $u^{\varepsilon_k} = u^\varepsilon$ e $v_M^{\varepsilon_k} = v_M^\varepsilon$. Seja $\phi \in C_0(\Omega)$. Temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega [f(u^\varepsilon) - \langle \nu_x, f(\lambda)\rangle]\ \phi(x)\ dx \le &\int_\Omega [f(u^\varepsilon) - f(v_M^\varepsilon)]\ \phi(x)\ dx\\ &+ \int_\Omega \left[f(v_M^\varepsilon) - \langle \nu_x^M, f(\lambda)\rangle\right]\ \phi(x)\ dx\\ &+ \int_\Omega \left[\langle \nu_x^M, f(\lambda)\rangle - \langle \nu_x^M, f^N(\lambda)\rangle\right]\ \phi(x)\ dx\\ &+ \int_\Omega \left[\langle \nu_x^M, f^N(\lambda)\rangle - \langle \nu_x^M, f^S(\lambda)\rangle\right]\ \phi(x)\ dx\\ &+ \int_\Omega \left[\langle \nu_x, f^S(\lambda)\rangle - \langle \nu_x, f(\lambda)\rangle\right]\ \phi(x)\ dx\,.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Notemos que por (2.6), (2.9) e (2.10) segue que as quatro últimas integrais podem ser feitas arbitrariamente pequenas escolhendo–se N suficientemente grande e fazendo ε tender a zero. Usamos a ordem do crescimento de f para tornar pequena a primeira integral. Mais especificamente, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega [f(u^\varepsilon) - f(v_M^\varepsilon)]\ \phi(x)\ dx &\le \rho(M^{-1}) \int_{\Omega_M^\varepsilon} |u^\varepsilon|^p\ |\phi(x)|\ dx\\ &\le \rho(M^{-1})\, \|\phi\|_\infty\end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_0(\Omega)$, onde ρ é como em (2.9). Isto conclui a prova. □

3. Lema do Divergente–Rotacional.

Nesta seção demonstramos o resultado devido a Tartar e Murat que constitui o núcleo da teoria da compacidade compensada (veja [28 − 31], [39 − 42]). Primeiramente, daremos uma demonstração direta que se acha em [13] da formulação mais simples deste resultado. Após isto, daremos sua formulação mais geral e a repectiva demonstração como originalmente expostas em [41] (veja também [10]).

3.1. Teorema (Lema do div–rot). *Sejam $\{v^\varepsilon\}$, $\{w^\varepsilon\}$ duas seqüências limitadas em $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ tais que*

(i) $\operatorname{div} v^\varepsilon$ é pré–compacto em $W^{-1,2}(\Omega)$ e

(ii) $\{\operatorname{rot} w^\varepsilon\}$ é pré–compacto em $W^{-1,2}(\Omega;M^{n\times n})$,

onde $M^{n\times n}$ é o espaço das matrizes $n\times n$ e denotamos

$$(\operatorname{rot} w)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} w^i - \frac{\partial}{\partial x_i} w^j ,$$

$1 \le i,j \le n$.

Suponhamos ainda que $v^\varepsilon \rightharpoonup v$ e $w^\varepsilon \rightharpoonup w$ em $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Então

$$v^\varepsilon \cdot w^\varepsilon \rightharpoonup v \rightharpoonup v\cdot w$$

no sentido das distribuições.

Prova: Consideremos os campos vetoriais $u^\varepsilon \in W^{2,2}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, soluções de

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon = w^\varepsilon & \text{em } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

no sentido fraco. Como $\{w^\varepsilon\}$ é limitada em $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $\{u^\varepsilon\}$ é limitada em $W^{2,2}(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Agora, ponhamos $z^\varepsilon = -\operatorname{div} u^\varepsilon$ e $y^\varepsilon = w^\varepsilon - \nabla z^\varepsilon$. Então $\{z^\varepsilon\}$ é limitada em $W^{-1,2}(\Omega)$.

Além disso, se $1 \leq i \leq n$,

$$
\begin{aligned}
y_i^\varepsilon &= w_i^\varepsilon - (z^\varepsilon)_{x_i} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \{ (u_i^\varepsilon)_{x_j x_j} - (u_j^\varepsilon)_{x_j x_i} \} \qquad (3.2) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \{ (u_j^\varepsilon)_{x_i} - (u_i^\varepsilon)_{x_j} \}_{x_j} .
\end{aligned}
$$

Em vista da hipótese (ii), inferimos de (3.1) que $\{ \operatorname{rot} u^\varepsilon \}$ fica num subconjunto compacto de $W^{1,2}(\Omega; M^{n\times n})$. Logo, de (3.2) segue que $\{y^\varepsilon\}$ está contida num subconjunto compacto de $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Portanto, podemos supor após passagem a uma subseqüência se necessário, que

$$
\begin{aligned}
&z^\varepsilon \rightharpoonup z \quad \text{em} \quad W^{1,2}(\Omega) \quad \text{e} \\
&y^\varepsilon \longrightarrow y \text{ fortemente em } L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) ,
\end{aligned} \qquad (3.3)
$$

onde $z = -\operatorname{div} u$ e $y = w - \nabla z$, para $u \in W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ solução de

$$
\begin{cases} -\Delta u = w & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}
$$

Agora, se $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos

$$
\int_\Omega v^\varepsilon . y^\varepsilon \phi \, dx \longrightarrow \int_\Omega v . y \phi \, dx .
$$

Além disso,

$$
\int_\Omega v^\varepsilon . \nabla z^\varepsilon \phi \, dx = -\int_\Omega (v^\varepsilon . \nabla \phi) z^\varepsilon \, dx - \langle \operatorname{div} v^\varepsilon, z^\varepsilon \phi \rangle .
$$

onde $\langle \, , \, \rangle$ denota o pareamento de $W^{-1,2}(\Omega)$ e $W^{1,2}(\Omega)$. Portanto, a hipótese (i) e (3.3) permitem–nos concluir que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega v_\varepsilon . \nabla z^\varepsilon \phi \, dx &\longrightarrow -\int_\Omega (v . \nabla \phi) \, z \, dx - \langle \operatorname{div} v, z \, \phi \rangle \\
&= \int_\Omega (v . \nabla z) \, \phi \, dx .
\end{aligned}
$$

Assim temos

$$\int_\Omega (v^\varepsilon \, . \, w^\varepsilon \, \phi) \; dx \longrightarrow \int_\Omega v \, . \, (y + \nabla z) \, \phi \; dx$$
$$= \int_\Omega v \, . \, w \, \phi \; dx \, .$$

□

A seguir apresentamos a generalização do resultado acima como originalmente apresentada em [41] (veja também [10]).

3.2. TEOREMA. *Seja $M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma matriz simétrica e seja*

$$f(u) = \langle M \, u, \; u \rangle$$

onde $U \in \mathbb{R}^m$ e $\langle \; , \; \rangle$ denota o produto escalar de $\mathbb{R}^m$. Suponhamos que

$$\begin{cases} u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ em } L^2(\Omega; \mathbb{R}^m) \, , \; \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ f(u^\varepsilon) \rightharpoonup l \text{ no sentido das distribuições}, \\ (A \, u^\varepsilon)_i = \sum_{j,k} a_{ij\,k} \dfrac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_k} \text{ é precompacto em } W^{-1,2}(\Omega), \text{ para } i = 1, \ldots , q \, , \end{cases}$$

e seja

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{R}^m \; : \; \exists \, \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\} \text{ tal que } \sum_{j,k} a_{ij\,k} \lambda_j \xi_k = 0, \; i = 1, \ldots , q \} \, .$$

Valem

(i) Se $f(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$ então $l \geq f(u)$;

(ii) Se $f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$ então $l = f(u)$.

PROVA: Claramente (ii) é conseqüência de (i).

Passo 1. Começamos fazendo uma translação e então a localização do problema. Seja

$$v^\varepsilon = u^\varepsilon - u \tag{3.4}$$

e para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ façamos

$$w^\varepsilon = \phi\, v^\varepsilon \,. \tag{3.5}$$

Assim transformamos o problema em mostrar que se

$$\begin{cases} w^\varepsilon \rightharpoonup 0 \ \text{ em } L^2(\Omega;\mathbb{R}^m) \\ \displaystyle\sum_{j,k} a_{ij\,k} \frac{\partial w_j^\varepsilon}{\partial x_k} \longrightarrow 0 \ \text{ em } W^{-1,2}(\Omega),\ i=1,\dots,q \\ w^\varepsilon \text{ tem suporte num compacto fixo } K \subset \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.6}$$

então

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \langle M w^\varepsilon, w^\varepsilon\rangle \, dx \geq 0 \,. \tag{3.7}$$

Passo 2. Aplicamos a transformada de Fourier obtendo

$$\widehat{w}^\varepsilon(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} w^\varepsilon(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \xi . x}\, dx \,. \tag{3.8}$$

Usando as hipóteses (3.6) obtemos (uma vez que $\mathrm{e}^{-2\pi i\xi.x} \in L^2(K)$).

$$\begin{cases} \widehat{w}^\varepsilon(\xi) \longrightarrow 0 \ \text{ q.t.p.} \\ |\widehat{w}^\varepsilon(\xi)| \leq \sigma \end{cases} \tag{3.9}$$

onde σ é uma constante. Assim

$$\widehat{w}^\varepsilon(\xi) \longrightarrow 0 \ \text{ (fortemente) em } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \,. \tag{3.10}$$

Além disso, se usarmos as hipóteses (3.6) sobre as derivadas de w^ε obtemos

$$\frac{1}{1+|\xi|} \sum_{i,j} a_{ij\,k} \widehat{w}_j^\varepsilon(\xi)\xi_k \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n)\,,\ i=1,\dots,q \,. \tag{3.11}$$

Passo 3. Estendemos $f(w) = \langle M\, w, w\rangle$ de $\mathbb{R}^m$ para $\mathbb{C}^m$ por

$$\widetilde{f}(w) = \langle M\, w, \overline{w}\rangle \,.$$

Observemos que

$$\mathrm{Re}\widetilde{f}(\lambda) = \langle M\,\lambda, \overline{\lambda}\rangle \geq 0 \quad \text{se } \lambda \in \Lambda + i\Lambda$$

uma vez que se $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \Lambda + i\Lambda$, então

$$\mathrm{Re}\langle M\,\lambda, \overline{\lambda}\rangle = \langle M\,\lambda_1, \lambda_1\rangle + \langle M\,\lambda_2, \lambda_2\rangle$$

que é positivo já que assumimos que $\langle M\,\lambda, \lambda\rangle \geq 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Agora usamos a fórmula de Plancherel para obter

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(w^\varepsilon(x))\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\widehat{w}^\varepsilon(\xi))d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}\widetilde{f}(\widehat{w}^\varepsilon(\xi))d\xi\,.$$

Portanto, resta provar que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}\widetilde{f}(\widehat{w}^\varepsilon(\xi))d\xi \geq 0\,, \tag{3.12}$$

para obtermos (3.5) e daí o teorema.

Passo 4. Para todo $\alpha > 0$ existe uma constante $c_\alpha > 0$ tal que

$$\mathrm{Re}\widetilde{f}(\lambda) \geq -\alpha|\lambda|^2 - c_\alpha \left(\sum_{i=1}^{q}\left|\sum_{j,k} a_{ij\,k}\lambda_j\eta_k\right|^2\right) \tag{3.13}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}^m$ e para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$ com $|\eta| = 1$.

Para provar (3.13) procedemos por contradição. Suponhamos que existe $\alpha_0 > 0$, $c_\alpha = \nu$, $\lambda^\nu \in \mathbb{C}^m$ com $|\lambda^\nu| = 1$ e $\eta^\nu \in \mathbb{R}^n$ com $|\eta^\nu| = 1$ tais que

$$\mathrm{Re}\widetilde{f}(\lambda^\nu) < -\alpha_0|\lambda^\nu|^2 - \nu\left(\sum_i\left|\sum_{j,k} a_{ij\,k}\lambda_j^\nu\eta_k^\nu\right|^2\right) \tag{3.14}$$

Então, extraímos subseqüências convergentes (denotadas ainda por λ^ν e η^ν) de modo que

$$\lambda^\nu \longrightarrow \lambda^\infty\,, \quad \eta^\nu \longrightarrow \eta^\infty\,. \tag{3.15}$$

Agora usamos (3.14) para obter que

$$\sum_{i=1}|\sum_{j,k} a_{ij\,k}\lambda_j^\nu\eta_k^\nu|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{quando } \nu \to \infty\,;$$

portanto,

$$\sum_{j,k} a_{ij\,k}\lambda_j^\infty \eta_k^\infty = 0 \tag{3.16}$$

e assim segue que

$$\lambda^\infty \in \Lambda + i\Lambda. \tag{3.17}$$

Usando a hipótese sobre f e (3.17) deduzimos que

$$\mathrm{Re}\widetilde{f}(\lambda^\infty) \geq 0. \tag{3.18}$$

Mas retornando a (3.14) vemos que

$$\mathrm{Re}\widetilde{f}(\lambda^\infty) \leq -\alpha_0 < 0$$

o que nos dá uma contradição. Portanto, vale (3.13).

Passo 5. Vamos concluir a prova. Retornando a (3.12) temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}\widetilde{f}(\widehat{w}^\varepsilon(\xi))d\xi = \int_{|\xi|\leq 1} \mathrm{Re}\widetilde{f}(\widehat{w}^\varepsilon(\xi))d\xi + \int_{|\xi|>1} \mathrm{Re}\widetilde{f}(\widehat{w}^\varepsilon(\xi))d\xi.$$

Usando (3.10) (i.e., $\widehat{w}^\varepsilon \longrightarrow 0$ em ${L^2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$) obtemos

$$\int_{|\xi|\leq 1} \mathrm{Re}\widetilde{f}(\widehat{w}^\varepsilon(\xi))d\xi \longrightarrow 0 \quad \text{quando } \varepsilon \to 0. \tag{3.19}$$

Usando o Passo 4 (desigualdade (3.15)) obtemos

$$\mathrm{Re}\widetilde{f}(\widehat{w}^\varepsilon(\xi)) \geq -\alpha|\widehat{w}^\varepsilon(\xi)|^2 - c_\alpha \sum_i \left| \sum_{j,k} a_{ij\,k}\widehat{w_j^\varepsilon}(\xi)\frac{\xi_k}{|\xi|}\right|^2.$$

Após integração obtemos

$$\int_{|\xi|>1} \mathrm{Re}\widetilde{f}(\widehat{w}^\varepsilon(\xi))d\xi \geq -\alpha \int_{|\xi|>1} |\widehat{w}^\varepsilon(\xi)|^2 d\xi - c_\alpha \int_{|\xi|>1} \sum_i \left| \sum_{j,k} a_{ij\,k}\widehat{w_j^\varepsilon}(\xi)\frac{\xi_k}{|\xi|}\right|^2. \tag{3.20}$$

Usando (3.11) deduzimos que

$$(3.21) \qquad \liminf \int_{|\xi|>1} \operatorname{Re}\widetilde{f}(\widehat{w}^\varepsilon(\xi))d\xi \geq -\alpha \liminf \int_{|\xi|>1} |\widehat{w}^\varepsilon(\xi)|^2 d\xi\,;$$

mas como α é arbitrário e $\int_{|\xi|>1} |\widehat{w}^\varepsilon(\xi)|^2 d\xi$ é limitada, obtemos que

$$(3.22) \qquad \liminf \int_{|\xi|>1} \operatorname{Re}\widetilde{f}(\widehat{w}^\varepsilon(\xi))d\xi \geq 0$$

Combinando (3.19) e (3.22) obtemos o resultado. □

O teorema que acabamos de provar implica o teorema 3.1. Neste caso temos $u^\varepsilon = (v_1^\varepsilon, \dots, v_n^\varepsilon, w_1^\varepsilon, \dots, w_n^\varepsilon) \in \mathbb{R}^{2n}$, e $A\,u^\varepsilon$ que aparece em (H) é dado por

$$\begin{cases} \operatorname{div} v^\varepsilon = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} v_i^\varepsilon \\ (\operatorname{rot} w^\varepsilon)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} w_i^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x_i} w_j^\varepsilon \quad , \quad i,j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

O conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$ é o conjunto dos vetores (λ, μ) para os quais existe $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$ tal que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i = 0 \\ \mu_j \xi_i - \mu_i \xi_j = 0 \quad , \quad i,j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Vemos então facilmente que

$$\Lambda = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{2n} \ : \ \lambda \perp \mu\}\,.$$

Tomando

$$f(v, w) = \langle v, w \rangle$$

vemos que f satisfaz $f(u) = 0$, $u \in \Lambda$. Assim, pelo teorema 3.2 segue a conclusão do teorema 3.1.

Uma outra conseqüência do teorema 3.2 é o resultado seguinte.

3.3. Corolário. *Seja $u^\varepsilon(x_1, x_2) = (v^\varepsilon(x_1, x_2), w^\varepsilon(x_1, x_2)) \rightharpoonup (v, w)$ em $L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ e suponhamos que $\{\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_1}\}$ e $\{\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_2}\}$ são pré–compactos em $W^{-1,2}(\Omega)$. Então*

$$v^\varepsilon\, w^\varepsilon \rightharpoonup v\, w \text{ no sentido das distribuições.}$$

PROVA: O conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ é o conjunto dos $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tais que existe $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $\xi \neq 0$, com $\xi_1 \lambda = 0$, $\xi_2 \mu = 0$. É fácil ver que neste caso temos

$$\Lambda = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \lambda = 0 \ \text{ ou } \mu = 0\}$$

e $f(v, w) = v\, w$ satisfaz as hipóteses de teorema 3.2. □

Concluimos esta seção fornecendo um último exemplo de aplicação do teorema 3.2.

3.4. COROLÁRIO. *Seja d a dimensão do subespaço E gerado por Λ (assim $d \leq m$) e suponhamos que escolhemos coordenadas tais que $E = \{u \in \mathbb{R}^m \ : \ u_{d+1} = \ldots = u_m = 0\}$. Se $u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{u}$ em $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ e $f : \mathbb{R}^{m-d} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então*

$$f(u^\varepsilon_{d+1}, \ldots, u^\varepsilon_m) \longrightarrow f(\overline{u}_{d+1}, \ldots, \overline{u}_m)$$

fortemente em ${L^1}_{loc}(\Omega)$.

PROVA: Usando teorema 3.2 obtemos que

$$(u_j^\varepsilon)^2 \rightharpoonup \overline{u}_j^{\,2} \quad \text{em } \ L^2 \ , \ \ j = d+1, \ldots, m,$$

mas isto e o fato de que $u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{u}$ nos dá que

$$u_j^\varepsilon \to \overline{u}_j \quad \text{fortemente em } \ L^2 \ , \ \ j = d+1, \ldots, m,$$

□

4. Compacidade para Medidas.

Nesta seção apresentamos como resultado principal uma generalização de um resultado devido a F. Murat (veja [**31**]) que é extremamente útil nas aplicações da teoria da compacidade compensada aos sistemas de leis de conservação; mais especificamente, sua utilidade tem a ver com a demonstração da hipótese de pré–compacidade em $W^{-1,2}$ que consta do lema do div–rot. Iniciamos com um teorema que é em certo sentido o dual de um caso das tão famosas imersões em espaços de Sobolev.

4.1. TEOREMA. *Para cada* $1 \leq q < 1^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n}{n-1}$,

$$M(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega)$$

com inclusão compacta.

PROVA: Seja $\{\mu_k\}$ uma seqüência limitada em $M(\Omega)$. Então existe uma subseqüência $\{\mu_{k_j}\}$ tal que $\mu_{k_j} \rightharpoonup \mu$ em $M(\Omega)$. Ponhamos $q' = \frac{q}{q-1}$ e denotemos por B a bola unitária fechada de $W_0^{1,q'}(\Omega)$. Como $1 \leq q < 1^*$, temos $q' > n$, logo B é compacta em $C_b(\Omega)$ (veja teorema de Rellich–Kondrachov, partes II e IV em [**1**], pg. 114). Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existem funções $\{\phi_i\}_{i=1}^{N(\varepsilon)} \subset C_b(\Omega)$ tais que

$$\min_{i \leq i \leq N(\varepsilon)} \|\phi - \phi_i\|_\infty < \varepsilon$$

para toda $\phi \in B$. Conseqüentemente, se $\phi \in B$,

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \phi\, d\mu_{k_j} - \int_\Omega \phi\, d\mu\right| &\leq \left|\int_\Omega (\phi - \phi_i)\; d\mu_{k_j}\right| + \left|\int_\Omega \phi_i\, d\mu_{k_j} - \int_\Omega \phi_i\, d\mu\right| + \left|\int_\Omega (\phi - \phi_i)\; d\mu\right| \\ &\leq \varepsilon\left(\sup_j |\mu_{k_j}|(\Omega) + |\mu|(\Omega)\right) + \left|\int_\Omega \phi_i\, d\mu_{k_j} - \int_\Omega \phi_i\, d\mu\right| \end{aligned}$$

para algum índice $i \in \{1, \ldots, N(\varepsilon)\}$. Assim, temos

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{\phi \in B} \left|\int_\Omega \phi\, d\mu_{k_j} - \int_\Omega \phi\, d\mu\right| = 0,$$

i.e., $\mu_{k_j} \longrightarrow \mu$ em $W^{-1,q}(\Omega)$. □

Enunciamos a seguir o principal resultado desta seção

4.2. TEOREMA. *Seja* $1 < q \leq p < r \leq \infty$. *Então*

$$\{\textit{compacto de } W^{-1,q}_{loc}(\Omega)\} \cap \{\textit{limitado de}\, W^{-1,r}_{loc}(\Omega)\} \subset \{\textit{compacto de } W^{-1,p}_{loc}(\Omega)\}.$$

Seguindo G.-Q. Chen [5], para demonstrar este teorema usaremos o lema abaixo.

4.3. LEMA. *Seja N a solução fundamental do Laplaciano em $\mathbb{R}^n$, i.e.,*

$$N(y) = \begin{cases} c_n|y|^{2-n} & se \quad n > 2, \\ \frac{1}{2\pi} \, log|y| & sen{=}2. \end{cases}$$

onde

$$c_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(2-n)2\,\pi^{\frac{n}{2}}}\,.$$

Para qualquer $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ com $Spt\, f \subset\subset \Omega$, onde $1 < p < \infty$, temos

$$u = N * f \in W^{1,p}(\Omega)$$

e

$$\|u\|_{1,p} \leq c\|f\|_{-1,p}\,.$$

PROVA: Seja q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para obtermos o resultado desejado basta provarmos que para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos

(4.1) $$|\langle u, \phi\rangle| \leq c\|f\|_{-1,p}\,\|\phi\|_q\,,$$

(4.2) $$\left|\langle \frac{\partial}{\partial x_j} u, \phi\rangle\right| \leq c\|f\|_{-1,p}\,\|\phi\|_q\,, \quad j = 1, \ldots, n,$$

onde

$$\langle g, h\rangle = \int_\Omega g(x)h(x)\,dx\,.$$

Agora, como $\mathrm{Spt}\, f \subset\subset \Omega$, temos

$$\langle u, \phi\rangle = \langle f, N * \widetilde{\phi}\rangle\,,$$

onde $\widetilde{\phi}(x) \equiv \phi(-x)$. Daí segue que

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq \|f\|_{-1,p}\,\|N * \widetilde{\phi}\|_{1,q}\,,$$

e como $N \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, bem como $\frac{\partial}{\partial x_i} N \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \ldots, n$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|N * \widetilde{\phi}\|_{1,q} &\leq \|N * \widetilde{\phi}\|_q + \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial}{\partial x_i} N * \phi\|_q \\
&\leq C\|\widetilde{\phi}\|_q \\
&= C\|\phi\|_q \,.
\end{aligned}$$

Daí segue (4.1). Para obter (4.2) inicialmente procedemos de modo análogo. Começamos com

$$\begin{aligned}
|\langle \frac{\partial}{\partial x_j} u, \phi \rangle| &\leq \|f\|_{-1,p} \|\frac{\partial}{\partial x_i}(N * \widetilde{\phi})\|_{1,q} \\
&\leq \|f\|_{-1,p} \| \|N * \widetilde{\phi}\|_{2,q} \,.
\end{aligned}$$

Agora

$$\|N * \widetilde{\phi}\|_{2,q} \leq \|N * \widetilde{\phi}\|_q + \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial}{\partial x_i} N * \widetilde{\phi}\|_q + \sum_{i,j} \|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} N * \widetilde{\phi}\|_q \,.$$

Portanto, para obtermos a desigualdade afirmada, basta mostrarmos que

$$\left\| \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} N \right) * \widetilde{\phi} \right\|_q \leq c\|\widetilde{\phi}\|_q \,, \tag{4.3}$$

para algum $c > 0$. Esta desigualdade é freqüentemente conhecida como *Desigualdade de Calderón–Zigmund.* Sua prova é conseqüência do fato de que a transformada de Riez é um operador limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, e da seguinte relação (veja Capítulo III de [38]):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} N \right) * \varphi = -(2\pi)^{-n} R_i R_j \varphi \,, \tag{4.4}$$

$i, j = 1, \ldots, n$, onde R_k é a $k-$ésima transformada de Riez definida por

$$R_k(g)(x) = a_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_k}{|y|^{n+1}} g(x - y) dy \,,$$

onde $a_n \equiv \Gamma(\frac{n+1}{2})/\pi^{(\frac{n+1}{2})}$. Para provar (4.4), mostramos que as transformadas de Fourier de ambos os lados coincidem. Para o membro à esquerda temos

$$\widehat{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} N} * \psi = -\frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} (\widehat{\Delta N}) \widehat{\psi}$$
$$= -\frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \widehat{(\delta_0)}\, \widehat{\psi}$$
$$= (2\pi)^{-n} \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \widehat{\psi}.$$

Obtemos o mesmo resultado para a transformada de Fourier do membro à direita usando o fato de que

$$(\widehat{R_k(g)})(\xi) = i \frac{\xi_k}{|\xi|} \widehat{g}(\xi) .$$

$\square$

PROVA DO TEOREMA 4.2: Seja $\{f_i\}$ uma qualquer em

$$S = \{ \text{ compacto de } W^{-1,2}_{\text{loc}}(\Omega)\} \cap \{\text{limitado de } W^{-1,2}_{\text{loc}}(\Omega)\} .$$

Existe uma subseqüência que continuaremos a denotar por $\{f_i\}$ que é de Cauchy em $W^{-1,q}_{\text{loc}}(\Omega)$. Provaremos que

$$\|\phi f_i - \phi f_j\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \to 0 \, , \; i, \; j \to \infty \, ,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Sejam $\bar{f}_i = \phi f_i$ e $u_i = N * \bar{f}_i$.

Recordemos que o operador Laplaciano Δ é contínuo de $W^{1,s}(\Omega)$ em $W^{-1,s}(\Omega)$, $1 \leq s \leq \infty$, e que vale a seguinte desigualdade de interpolação, que é conseqüência direta da desigualdade de Hölder,

$$\| \cdot \|_{1,p} \leq \| \cdot \|_{1,r}^{1-\alpha} \| \cdot \|_{1,q}^{\alpha} ,$$

onde $\frac{1}{p} = \alpha \frac{1}{q} + (1-\alpha) \frac{1}{r}$.

Então, usando o lema 4.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\phi f_i - \phi f_j\|_{W^{-1,p}(\Omega)} &= \|\Delta u_i - \Delta u_j\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \\
&\le \|u_i - u_j\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\le \|u_i - u_j\|^{\alpha}_{W^{1,q}(\Omega)} \|u_i - u_j\|^{1-\alpha}_{W^{1,r}(\Omega)} \\
&\le C\|\bar f_i - \bar f_j\|^{\alpha}_{W^{-1,q}(\Omega)} \|\bar f_i - \bar f_j\|^{1-\alpha}_{W^{-1,r}(\Omega)} \\
&\le C\|\bar f_i - \bar f_j\|^{\alpha}_{W^{-1,q}(\Omega)} \to 0\,,
\end{aligned}$$

i, $j \to \infty$, onde C denota qualquer constante positiva. □

Encerramos esta seção com o lema de Murat na sua versão mais simples.

4.4. Corolário (Lema de Murat). *Seja $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência limitada em $W^{-1,r}_{\text{loc}}(\Omega)$ para algum r, com $2 < r \le \infty$, tal que $f_k = g_k + h_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ onde $\{g_k\}$ é uma seqüência pré–compacta em $W^{-1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\{h_k\}$ é uma seqüência limitada em $M(\Omega)$. Então, $\{f_k\}$ é pré–compacta em $W^{-1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Prova: Pelo teorema 4.1, $\{h_k\}$ é pré–compacta em $W^{-1,q}_{\text{loc}}(\Omega)$, $1 \le q < 1^*$. Como $1^* < 2$, temos que $W^{-1,2}_{\text{loc}}(\Omega) \subset W^{-1,q}_{\text{loc}}(\Omega)$ com a inclusão contínua, logo, $\{f_k\}$ é pre–compacta em $W^{-1,q}_{\text{loc}}(\Omega)$. Sendo $\{f_k\}$ limitada em $W^{-1,r}_{\text{loc}}(\Omega)$ e $q < 2 < r$, o resultado segue do teorema 4.2. □

5. Aplicação às Leis de Conservação: Caso Escalar.

Consideremos a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}f(u) = 0\,, \tag{5.1}$$

onde f é uma função $C^1(\mathbb{R})$ e $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Recordemos que $u(x, t)$ é dita solução fraca de (5.1) se u e $f(u) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ e para toda $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ temos

$$\iint_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} \{u\phi_t + f(u)\phi_x\}\, dx\, dt = 0\,.$$

A questão de que trataremos aqui é a seguinte. Suponhamos que u^ε é uma seqüência de soluções aproximadas de (5.1), i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial t}u^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x}f(u^\varepsilon) = R^\varepsilon,$$

onde $R^\varepsilon \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$, no sentido das distribuições. Suponhamos ainda que u^ε é uniformemente limitada em $L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ e que, neste caso, possamos encontrar $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ tal que

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \quad \text{fraco} \; *.$$

Pergunta: u satisfaz (5.1)? Isto redunda em saber (exceto no caso em que u é constante) se $f(u^\varepsilon) \rightharpoonup f(u)$ em $L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ fraco $*$. A seguir apresentamos um teorema devido a Tartar que fornece condições necessárias para que tenhamos $f(u^\varepsilon) \rightharpoonup f(u)$. (veja **[41]**).

5.1. TEOREMA. *Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$. Seja $\{u^\varepsilon\}$ uma seqüência de soluções aproximadas de (5.1), uniformemente limitadas, satisfazendo $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ em $L^\infty(\Omega)$ fraco $*$, e suponhamos que para toda função convexa $\eta \in C^2(\mathbb{R})$, tenhamos*

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}q(u^\varepsilon) \in \{ \text{ compacto de } W^{-1,2}(\Omega)\}$$

onde $q'(\lambda) = f'(\lambda)\,\eta'(\lambda)$. Então,

$$f(u^\varepsilon) \rightharpoonup f(u) \, \text{em} \; L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty)), \quad \text{fraco} \; *.$$

Além disso, temos

$$f'(u^\varepsilon) \to f'(u),$$

fortemente, em $L^1{}_{loc}(\Omega)$.

PROVA: Seja (η, q) um par de funções como no enunciado (a que nos referimos como *par entropia–fluxo*). No contexto das medidas de Young (passando a uma subseqüência se necessário) temos

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u, \; f(u^\varepsilon) \rightharpoonup \xi, \; \eta(u^\varepsilon) \rightharpoonup v, \; q(u^\varepsilon) \rightharpoonup w,$$

onde

$$u(x,t) = \langle \nu_{x,t}, \lambda \rangle\,,$$

$$\xi(x,t) = \langle \nu_{x,t}, f(\lambda) \rangle\,,$$

$$v(x,t) = \langle \nu_{x,t}, \eta(\lambda) \rangle\,,$$

$$w(x,t) = \langle \nu_{x,t}, q(\lambda) \rangle\,,$$

q.t.p. $(x,t) \in \Omega$. Aplicando o lema do div–rot (teorema 3.1) aos campos $(u^\varepsilon, f(u^\varepsilon))$ e $(q(u^\varepsilon), -\eta(u^\varepsilon))$ obtemos

$$u^\varepsilon q(u^\varepsilon) - f(u^\varepsilon)\eta(u^\varepsilon) \rightharpoonup uw - \xi v\,,$$

ou seja, pondo $\nu = \nu_{x,t}$,

$$\langle \nu, \lambda q(\lambda) - f(\lambda)\eta(\lambda) \rangle = \langle \nu, \lambda \rangle \langle \nu, q(\lambda) \rangle - \langle \nu, f(\lambda) \rangle \langle \nu, \eta(\lambda) \rangle\,. \tag{5.2}$$

Vamos mostrar que (5.2) implica que $\xi = f(u)$.

Como $u = \langle \nu, \lambda \rangle$ e $\xi = \langle \nu, f(\lambda) \rangle$, (5.2) pode ser reescrita na forma

$$\langle \nu, (\lambda - u)q(\lambda) - (f(\lambda) - \xi)\eta(\lambda) \rangle = 0\,, \tag{5.3}$$

para toda função convexa $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ e $q' = \eta' f'$. Por aproximação obtemos que (5.3) vale para

$$\eta(\lambda) = |\lambda - u|\,, \quad q(\lambda) = \operatorname{sgn}(\lambda - u)(f(\lambda) - f(u))\,.$$

Com esta escolha temos

$$(\lambda - u)q - (f(\lambda) - \xi)\eta = (\xi - f(u))|\lambda - u|\,,$$

portanto,

$$(\xi - f(u))\langle \nu, |\lambda - u| \rangle = 0\,.$$

Assim, se $\langle \nu, |\lambda - u| \rangle \neq 0$, então $\xi = f(u)$ e, se $\langle \nu, |\lambda - u| \rangle = 0$, então $\nu = \delta_u$ (medida de Dirac concentrada em u) e de novo temos $\xi = f(u)$.

Provaremos agora que $\operatorname{Spt} \nu$ está contido num intervalo onde f é afim e, portanto, $f'(u^\varepsilon) \to f'(u)$ q.t.p. em Ω.

Fazendo uma translação tal que em (x, t) tenhamos $u = f(u) = 0$, (5.3) se transforma em

$$\langle \nu, \lambda q(\lambda) - f(\lambda)\eta(\lambda)\rangle = 0 \tag{5.4}$$

e, como $u = \langle \nu, \lambda\rangle$ e $f(u) = \xi = \langle \nu, f(\lambda)\rangle$,

$$\langle \nu, \lambda\rangle = \langle \nu, f(\lambda)\rangle = 0\,. \tag{5.5}$$

Seja $\operatorname{conv}(\operatorname{Spt}\nu) = [\alpha, \beta]$, onde denotamos por $\operatorname{conv}(A)$ o menor conjunto convexo fechado contendo A. Como (5.5) vale temos $\alpha \leq 0 \leq \beta$. Notemos que se $\alpha = 0$ então $\beta = 0$ e, portanto, ν é uma medida de Dirac. Assim, o problema fica resolvido neste caso. Portanto, não há perda de generalidade em supor $\alpha < 0 < \beta$.

Seja $A \in BV$ (o conjunto das funções de variação limitada) definida por $A' = \lambda\nu$. Por (5.5) pode-se escolher A sendo 0 fora de $[\alpha, \beta]$. De modo semelhante, definimos B por $B' = f(\lambda)\nu$ e $B = 0$ fora de $[\alpha, \beta]$. Então $A(\lambda) < 0$ em (α, β) pois α e β são os extremos do suporte de ν. A equação (5.4) nos dá

$$\langle A', q\rangle - \langle B', \eta\rangle = 0$$

para toda η convexa. Portanto,

$$-\langle A, q'\rangle + \langle B, \eta'\rangle = 0\,,$$

e assim

$$\langle B - Af', \eta'\rangle = 0\,.$$

Aqui η' pode ser a derivada de qualquer função convexa, isto é η' pode ser qualquer função crescente. Por linearidade o mesmo é verdade para toda diferença de funções crescentes e assim para qualquer função suave. Logo,

$$B - Af' = 0\,. \tag{5.6}$$

Mas pelas definições de A e B temos

$$f(\lambda)A' - \lambda B' = 0\,. \tag{5.7}$$

Logo,

$$\begin{aligned}(f(\lambda)A - \lambda B)\,' &= (f(\lambda)A' - \lambda B') + (f'(\lambda)A - B) \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(\lambda)A - \lambda B = \text{ constante.} \tag{5.8}$$

Mas como A, B têm suporte compacto em $[\alpha,\beta]$ a constante tem que ser 0, i.e.,

$$f(\lambda)A - \lambda B = 0\,. \tag{5.9}$$

Usando (5.9) e (5.6) deduzimos (já que $A \neq 0$ em (α,β))

$$f(\lambda) - \lambda f'(\lambda) = 0 \quad \text{em} \quad [\alpha,\beta]\,. \tag{5.10}$$

Portanto,

$$f(\lambda) = c\lambda \quad \text{em} \quad [\alpha,\beta]\,, \tag{5.11}$$

e assim $f'(u^\varepsilon) \to f'(u)$ q.t.p. em Ω. □

5.2. COROLÁRIO. *Sejam u_0 e $W^{2,2}(\mathbb{R})$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$. Então*

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0\,, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x)\,, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.12}$$

possui uma solução fraca $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

OBSERVAÇÃO: O problema de Cauchy para uma lei de conservação, como em (5.12), em várias variáveis de espaço e com dados iniciais satisfazendo condições bastante gerais foi resolvido bem antes do aparecimento da teoria da compacidade compensada por Conway – Smoller [7] (existência), Volpert [44] (existência e unicidade), ambos para dados iniciais em BV e Kruzhov [24] (existência e unicidade) para dados iniciais funções mensuráveis.

PROVA: Consideremos a aproximação parabólica de (5.12)

$$(5.12-\varepsilon) \qquad \begin{cases} u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon\,, \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0(x)\,. \end{cases}$$

Seja Ω um aberto limitado em $\mathbb{R} \times (0,\infty)$. É bem sabido que $(5.12-\varepsilon)$ possui solução fraca $u^\varepsilon \in W^{2,2}(\mathbb{R} \times (0,T))$ para todo $T > 0$. Multiplicando $(5.12-\varepsilon)$ por u^ε, obtemos

$$(5.13) \qquad \left(\frac{(u^\varepsilon)^2}{2}\right)_t + q(u^\varepsilon)_x = \varepsilon\left(\frac{(u^\varepsilon)^2}{2}\right)_{xx} - \left(\sqrt{\varepsilon}u_x^\varepsilon\right)^2,$$

onde $q'(\lambda) = \lambda f'(\lambda)$. Logo, integrando (5.13) sobre uma faixa $\mathbb{R} \times (0,T)$ contendo Ω obtemos que

$$(5.14) \qquad \sqrt{\varepsilon}u_x^\varepsilon \quad \text{é limitada em} \quad L^2(\Omega)\,.$$

Pelo princípio do máximo, temos que $\{u^\varepsilon\}$ é uniformemente limitada em $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ e por passagem a uma subseqüência se necessário obtemos $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ tal que $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ em $L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ fraco $*$.

Mostraremos que u resolve (5.12). Pelo teorema anterior isto será verdade se conseguirmos mostrar que

$$(5.15) \qquad \eta(u^\varepsilon)_t + q(u^\varepsilon)_x \in \{\text{compacto de } W^{-1,2}(\Omega)\}\,,$$

para todo par entropia – fluxo com $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ convexa.

Agora, multiplicando $(5.12-\varepsilon)$ por $\eta'(u^\varepsilon)$ e reescrevendo o membro à direita resultante, obtemos

$$\eta(u^\varepsilon)_t + q(u^\varepsilon)_x = \varepsilon\eta(u^\varepsilon)_{xx} - \eta''(u^\varepsilon)\left(\sqrt{\varepsilon}u_x^\varepsilon\right)^2.$$

Vamos mostrar que $\varepsilon\eta(u^\varepsilon)_{xx} \in \{\text{compacto de } W^{-1,2}(\Omega)\}$ e $\eta''(u^\varepsilon)\left(\sqrt{\varepsilon}u_x^\varepsilon\right)^2 \in \{\text{limitado de } M(\Omega)\}$. Como as u^ε são uniformemente limitadas, $\eta(u^\varepsilon)_t + q(u^\varepsilon)_x$ é limitada em $W^{-1,2}(\Omega)$ e o lema de Murat nos dará (5.14). O fato de que $\eta''(u^\varepsilon)\left(\sqrt{\varepsilon}u_x^\varepsilon\right)^2 \in \{\text{limitado de } M(\Omega)\}$ segue direto de (5.13). Por outro lado, (5.13) também nos dá facilmente que $\varepsilon\eta(u^\varepsilon)_{xx} \in \{\text{compacto de } W^{-1,2}(\Omega)\}$ uma vez que u^ε é uniformemente limitada. Assim, o teorema 5.1 nos dá que $f(u^\varepsilon) \rightharpoonup f(u)$ em $L^\infty(\Omega)$ fraco $*$ e isto conclui a prova do corolário. □

Capítulo II

Sistemas 2 X 2 de Leis de Conservação, Estritamente Hiperbólicos

1. Introdução.

O objetivo deste capítulo é fazer uma exposição detalhada dos resultados obtidos por DiPerna em [11], trabalho no qual são apresentados resultados gerais sobre existência de solução para sistemas 2×2 de leis de conservação, estritamente hiperbólicos, com o uso da teoria da compacidade compensada. Os resultados obtidos por DiPerna neste artigo tiveram importância decisiva na consolidação da teoria de Tartar e Murat pois constituíram um primeiro momento em que a mesma era responsável pela primazia na resolução de problemas até então não acessíveis por nenhuma outra técnica. Nesta seção ainda apresentaremos uma breve recordação dos fatos básicos a respeito de sistemas de leis de conservação. Na seção 2 vamos expor o teorema de DiPerna para sistemas 2×2 estritamente hiperbólicos. Na seção 3 falaremos sobre o método da viscosidade nula e recordaremos alguns resultados sobre sistemas parabólicos. Na seção 4 falaremos sobre métodos de aproximação por esquemas em diferenças finitas.

Passemos agora à recordação de alguns fatos básicos sobre sistemas de leis de conservação. Aqui nos restringiremos aos sistemas 2×2.

Consideremos o sistema

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}f(u) = 0, \tag{1.1}$$

com $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, onde $u = (u_1, u_2)$ e $f = (f_1, f_2)$ é uma função em $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Uma solução fraca de (1.1) é uma função $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$ mensurável tal que u e $f(u)$ estão em $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times (0, \infty); \mathbb{R}^2)$ e

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \{u\frac{\partial}{\partial t}\zeta + f(u)\frac{\partial}{\partial x}\zeta\} dx dt = 0, \tag{1.2}$$

para toda $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$. Dizemos que o sistema (1.1) é estritamente hiperbólico se para cada $u \in \mathbb{R}^2$ a matriz 2×2 $\nabla f(u)$ tem autovalores reais e distintos $\lambda_1(u) < \lambda_2(u)$.

Seja $r_i(u)$ um autovetor à direita associado a $\lambda_i(u)$, i. e.,

$$\nabla f(u) r_i(u) = \lambda_i(u) r_i(u), \tag{1.3}$$

$i = 1$ ou 2, $u \in \mathbb{R}^2$. Dizemos que o campo r_i é *genuinamente não-linear* se

$$\nabla \lambda_i(u) \cdot r_i(u) \neq 0, \tag{1.4}$$

para todo $u \in \mathbb{R}^2$. O sistema é dito genuinamente não-linear se ambos os campos r_i o são.

Uma *entropia* η para (1.1) e seu *fluxo de entropia* q, associado a η, são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ satisfazendo

$$\nabla q(u) = \nabla \eta(u) \nabla f(u). \tag{1.5}$$

Denominamos um par (η, q) satisfazendo (1.5) um par entropia-fluxo, abreviadamente, um *par e-f.*

É possível provar (veja [26]) que sistemas 2×2 estritamente hiperbólicos são dotados de *invariantes de Riemann* globalmente definidos, i. e., funções diferenciáveis. z, w, definidas em $\mathbb{R}^2$, cujos gradientes ∇z, ∇w são autovetores à esquerda de ∇f, i. e.,

$$\nabla z \nabla f = \lambda_1 \nabla z \quad , \qquad \nabla w \nabla f = \lambda_2 \nabla w.$$

Podemos considerar r_1 e r_2 normalizados de modo a termos

$$\begin{cases} \nabla z \cdot r_1 = 1, & \nabla z \cdot r_2 = 0 \\ \nabla w \cdot r_1 = 0, & \nabla w \cdot r_2 = 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

As funções z, w fornecem uma mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e, em virtude de (1.6), temos que para qualquer ψ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ vale o seguinte:

$$\psi_z = \nabla \psi \cdot r_1 \quad , \qquad \psi_w = \nabla \psi \cdot r_2. \tag{1.7}$$

Em particular, a condição de não-linearidade genuína toma a forma

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} \neq 0 \quad , \qquad \frac{\partial \lambda_2}{\partial w} \neq 0. \tag{1.8}$$

Multiplicando (1.5) por $r_1(u)$ e por $r_2(u)$, e usando (1.7) obtemos

$$(1.9) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} q = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} \eta \\ \\ \frac{\partial}{\partial w} q = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial w} \eta \end{cases}$$

Após eliminarmos q em (1.9) chegamos a

$$(1.10) \qquad \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \eta - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \frac{\partial \lambda_1}{\partial w} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial w} \right\} = 0 .$$

Em vista das relações (1.9) podemos pensar em obter formalmente pares de entropia (η_k, q_k), para $k \in \mathbb{R}$, da forma

$$(1.11) \qquad \eta_k = e^{kz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n}{k^n} \quad , \qquad q_k = e^{kz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{k^n} \quad ,$$

o mesmo podendo ser feito pondo w em lugar de z. Por (1.9) obtemos

$$(1.12) \qquad \begin{cases} \text{(a)} \quad \lambda_1 V_0 - H_0 = 0 \\ \\ \text{(b)} \quad \frac{\partial}{\partial w} H_{n-1} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial w} V_{n-1} = 0 \\ \\ \text{(c)} \quad \lambda_1 V_n - H_n = \frac{\partial}{\partial z} H_{n-1} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} V_{n-1} \quad . \end{cases}$$

Em (1.12) a partir de (a) as equações (b) e (c) podem ser resolvidas recursivamente para $n \geq 1$. Este esquema foi realizado por Lax em [**26**]. Lax construiu soluções exatas de (1.12) e provou que, para cada $N \in \mathbb{N}$, e para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^2$, existem numa vizinhança de K soluções (η_k, q_k) que satisfazem

$$(1.13) \qquad \eta_k = e^{k\phi} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{V_n}{k^n} + O\left(\frac{1}{k^{N+1}} \right) \right) ,$$

$$(1.14) \qquad q_k = e^{k\phi} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{H_n}{k^n} + O\left(\frac{1}{k^{N+1}} \right) \right) ,$$

para k suficientemente grande, onde ϕ representa z ou w, ou qualquer outro invariante de Riemann. O dado inicial para (η_k, q_k) é tomado ao longo de uma curva não-característica que não possua interseção com K e que seja propriamente orientada relativamente a K (veja [26]). O coeficiente dominante V_0 pode ser tomado como uma solução positiva de (1.12 - a, b) pondo-se dados positivos ao longo da curva não-característica.

Segue de (1.12), após derivarmos a equação (a) em relação a z e substituir em (c), que

$$\lambda_1 V_1 - H_1 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} V_0. \tag{1.15}$$

Da mesma forma que para $\phi = w$ em (1.13), (1.14) obtemos de (1.13) que

$$\lambda_2 V_1 - H_1 = \frac{\partial \lambda_2}{\partial w} V_0. \tag{1.16}$$

De (1.15), (1.16) obtemos

$$\frac{q_k}{\eta_k} = \lambda_1 - \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial z}\right)\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \tag{1.17}$$

se $\phi = z$ em (1.13), (1.14) e

$$\frac{q_k}{\eta_k} = \lambda_2 - \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial w}\right)\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \tag{1.18}$$

se $\phi = w$ em (1.13), (1.14). Estes fatos serão de grande importância no que virá adiante.

2. O Teorema de DiPerna para Sistemas Estritamente Hiperbólicos.

Suponhamos que $\{u^\varepsilon\}$ é uma seqüência de soluções aproximadas de (1.1), i.e., u^ε satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial t} u^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} f(u^\varepsilon) = R^\varepsilon \tag{2.1}$$

onde $R^\varepsilon \rightharpoonup 0$ no sentido das distribuições.

2.1. TEOREMA. *Seja u^ε uma seqüência de soluções aproximadas de (1.1), uniformemente limitada, e $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ tal que $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ em $L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ fraco $*$. Suponhamos que para todo Ω aberto limitado em $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ e todo par e-f $(\eta, q) \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ vale:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}q(u^\varepsilon) \in \{ \text{ compacto de } W^{-1,2}(\Omega)\}. \tag{2.2}$$

Então u é solução de (1.1) nos seguintes casos:

(i) o sistema é estritamente hiperbólico e genuinamente não-linear;

(ii) o sistema é estritamente hiperbólico e existe uma curva no espaço dos invariantes de Riemann $w = g(z)$, com g estritamente monótona, fora da qual o sistema é genuinamente não-linear.

PROVA: Por passagem a uma subseqüência se necessário, consideremos as medidas de Young $\nu_{x,t}$ associada à seqüência u^ε. Dados dois pares e-f, suaves, em vista de (2.2) e do lema do div-rot aplicado aos campos $(\eta_1(u^\varepsilon), q_1(u^\varepsilon))$, $(q_2(u^\varepsilon), -\eta_2(u^\varepsilon))$ temos, fazendo $\nu = \nu_{x,t}$,

$$\langle \nu, \eta_1 q_2 - \eta_2 q_1\rangle = \langle \nu, \eta_1\rangle\langle \nu, q_2\rangle - \langle \nu, \eta_2\rangle\langle \nu, q_1\rangle. \tag{2.3}$$

Provaremos que em ambos os casos (i) e (ii) do teorema ν tem de ser uma medida de Dirac.

Seja R o menor retângulo no plano dos invariantes de Riemann (z, w), com os lados paralelos aos eixos coordenados,

$$R = \{(z, w) \,|\, z_- \leq z \leq z_+, \quad w_- \leq w \leq w_+\}$$

contendo o suporte de ν (supomos ν definida no plano z-w de maneira óbvia). Sejam $(\eta_{\pm k}, q_{\pm k})$ pares e-f como em (1.13) e (1.14) definidos digamos numa bola contendo R com $\phi = \pm z$:

$$\eta_{\pm k} = e^{\pm kz}\left\{ V_0 + \frac{V_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\} \tag{2.4}$$

$$q_{\pm k} = \mathrm{e}^{\pm kz}\left\{\lambda_1 V_0 + \frac{H_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\}. \tag{2.5}$$

Usando esses pares provaremos que $z_+ = z_-$. Uma análise idêntica com $\phi = \pm w$ nos dará que $w_+ = w_-$. Sejam $\mu_k^\pm$ as medidas de probabilidade em R definidas por

$$\langle \mu_k^\pm, h\rangle = \frac{\langle \nu, h\eta_{\pm k}\rangle}{\langle \nu, \eta_{\pm k}\rangle},$$

para toda função contínua $h(z,w)$ definida em R. Como conseqüência da compacidade fraca $*$ de qualquer subconjunto limitado de $M(R)$, existem medidas de probabilidade $\mu^\pm$ sobre R tais que

$$\langle \mu^\pm, h\rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle \mu_k^\pm, h\rangle$$

após seleção de uma subseqüência apropriada. As medidas $\mu^\pm$ satisfazem:

$$\mathrm{Spt}\,\mu^+ \subset R \cap \{(z,w) \,|\, z = z_+\}; \qquad \mathrm{Spt}\,\mu^- \subset R \cap \{(z,w) \,|\, z = z_-\}. \tag{2.6}$$

De fato, se h é uma função contínua não-negativa em R e $\mathrm{Spt}\, h \subset \{(z,w) \,|\, z_- \le z \le z_+ - \varepsilon\}$, para algum $\varepsilon > 0$, então temos que

$$\begin{aligned}\langle \mu^+, h\rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle \mu_k^+, h\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\langle \nu, h\eta_{+k}\rangle}{\langle \nu, \eta_{+k}\rangle} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\langle \nu, h\,\mathrm{e}^{kz}\{\dots\}\rangle}{\langle \nu, \mathrm{e}^{kz}\{\dots\}\rangle}\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}0 &\le \frac{\langle \nu, h\,\mathrm{e}^{kz}\{\dots\}\rangle}{\langle \nu, \mathrm{e}^{kz}\{\dots\}\rangle} \\ &= \frac{\int h\mathrm{e}^{kz}\{\dots\}\mathrm{d}\nu}{\int \mathrm{e}^{kz}\{\dots\}\, d\nu} \\ &\le \frac{\|h\|_\infty\, \mathrm{e}^{k(z_+-\varepsilon)} \int\{\dots\}\, d\nu}{\mathrm{e}^{k(z_+-\varepsilon/2)} \int_{\{z\ge z_+-\varepsilon/2\}\cap R}\{\dots\}\mathrm{d}\nu} \le C\,\mathrm{e}^{-k\varepsilon/2} \to 0,\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $V_0 > 0$ e, portanto, $\{\dots\} > 0$ para k suficientemente grande. Dessa forma temos a primeira afirmação em (2.6) seguindo a outra de modo inteiramente análogo.

A seguir provaremos que para todo par e-f temos

$$\langle \mu^+, q - \lambda_1 \eta \rangle = \langle \nu, q - \lambda_1^+ \eta \rangle \tag{2.7}$$

e

$$\langle \mu^-, q - \lambda_1 \eta \rangle = \langle \nu, q - \lambda_1^- \eta \rangle \,, \tag{2.8}$$

onde

$$\lambda_1^{\pm} = \langle \mu^{\pm}, \lambda_1 \rangle \,.$$

Para obter (2.7) e (2.8) aplicamos a relação (2.3) a (η_{+k}, q_{+k}) e (η, q), dividimos ambos os membros da igualdade por $\langle \nu, \eta_{+k} \rangle$ e obtemos

$$\langle \nu, q \rangle - \langle \nu, \eta \rangle \frac{\langle \nu, q_{+k} \rangle}{\langle \nu, \eta_{+k} \rangle} = \frac{\langle \nu, q\eta_{+k} - q_{+k}\eta \rangle}{\langle \nu, \eta_{+k} \rangle} \,. \tag{2.9}$$

Como por (1.17)

$$q_{+k} = \left(\lambda_1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) \eta_{+k} \,,$$

obtemos de (2.9) passando ao limite quando $k \to +\infty$

$$\langle \nu, q \rangle - \langle \nu, \eta \rangle \langle \mu^+, \lambda_1 \rangle = \langle \mu^+, q - \lambda_1 \eta \rangle \,.$$

A identidade (2.8) é obtida de modo análogo usando-se (η_{-k}, q_{-k}) em lugar de (η_{+k}, q_{+k}). Agora afirmamos que

$$\lambda_1^+ = \lambda_1^- \tag{2.10}$$

e, por conseguinte,

$$\langle \mu^+, q - \lambda_1 \eta \rangle = \langle \mu^-, q - \lambda_1 \eta \rangle \,. \tag{2.11}$$

Apliquemos novamente (2.3) aos pares (η_{+k}, q_{+k}) e (η_{-k}, q_{-k}) , dividindo em seguida ambos os membros da igualdade por $\langle \nu, \eta_{+k} \rangle \langle \nu, \eta_{-k} \rangle$. Obtemos assim que

$$\text{(2.12)} \qquad \frac{\langle \nu, q_{+k} \rangle}{\langle \nu, \eta_{+k} \rangle} - \frac{\langle \nu, q_{-k} \rangle}{\langle \nu, \eta_{-k} \rangle} = \frac{\langle \nu, q_{+k}\eta_{-k} - q_{-k}\eta_{+k} \rangle}{\langle \nu, \eta_{+k} \rangle \langle \nu, \eta_{-k} \rangle}.$$

Se $z_+ = z_-$ a igualdade (2.10) é imediata. Se $z_+ \neq z_-$ então para $\varepsilon < \frac{z_+ - z_-}{2}$, suficientemente pequeno, temos

$$\langle \nu, \eta_{+k} \rangle \geq \text{ const. } e^{k(z_+ - \varepsilon)},$$

$$\langle \nu, \eta_{-k} \rangle \geq \text{ const. } e^{-k(z_- + \varepsilon)},$$

para $k > 0$ suficientemente grande, e daí o denominador do membro à direita de (2.12) tende a infinito. O numerador é em geral $O\left(\frac{1}{k}\right)$. Então o membro à direita de (2.12) tende a zero enquanto o membro à esquerda tende a $\lambda_1^+ - \lambda_1^-$. Agora, por (2.4), (2.5) temos

$$\langle \mu^+, q_{+k} - \lambda_1 \eta_{+k} \rangle = e^{kz_+} \left\langle \mu^+, \frac{H_1 - \lambda_1 V_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\rangle$$

e

$$\langle \mu^-, q_{+k} - \lambda_1 \eta_{+k} \rangle = e^{kz_-} \left\langle \mu^-, \frac{H_1 - \lambda_1 V_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\rangle.$$

Então, aplicando (2.11) obtemos facilmente que

$$\text{(2.13)} \qquad \langle \mu^+, H_1 - \lambda_1 V_1 \rangle = 0.$$

Analogamente temos

$$\langle \mu^+, q_{-k} - \lambda_1 \eta_{-k} \rangle = e^{-kz_+} \left\langle \mu^+, \frac{H_1 - \lambda_1 V_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\rangle$$

e

$$\langle \mu^-, q_{-k} - \lambda_1 \eta_{-k} \rangle = e^{-kz_-} \left\langle \mu^-, \frac{H_1 - \lambda_1 V_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\rangle.$$

Assim, por (2.11) obtemos também que

$$\text{(2.14)} \qquad \langle \mu^-, H_1 - \lambda_1 V_1 \rangle = 0.$$

Por (1.15) temos então que

$$\left\langle \mu^{\pm}, \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} V_0 \right\rangle = 0\,. \tag{2.15}$$

No caso (i) do enunciado do teorema, (2.15) contradiz o fato de que $\mu^{\pm}$ são medidas de probabilidade e $\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} V_0 \neq 0$. Portanto, segue a afirmação no caso (i).

No caso (ii) temos que cada lado vertical, e por analogia cada lado horizontal, de R deve possuir interseção com a linha $w = g(z)$. Portanto, a linha tem de ir de um certo vértice P de R ao seu oposto Q. Assim, μ^- e μ^+ devem ser medidas de Dirac concentradas nestes pontos, respectivamente. Por (2.11) segue que

$$q(Q) - \lambda_1(Q)\eta(Q) = q(P) - \lambda_1(P)\eta(P)\,, \tag{2.16}$$

para todo par e-f. Por analogia, no caso em que trocamos z por w obteremos também que

$$q(Q) - \lambda_2(Q)\eta(Q) = q(P) - \lambda_2(P)\eta(P)\,. \tag{2.17}$$

Diminuindo (2.17) de (2.16) chegamos a

$$(\lambda_2(Q) - \lambda_1(Q))\,\eta(Q) = (\lambda_2(P) - \lambda_1(P))\,\eta(P)\,, \tag{2.18}$$

para toda entropia η. Tomando η uma função afim se anulando em Q, como o sistema é estritamente hiperbólico, temos um absurdo se $P \neq Q$. Isto nos dá a afirmação no caso (ii) e conclui a prova do teorema. □

Comentários:

1. O resultado mais geral sobre existência de soluções do problema de Cauchy para sistemas estritamente hiperbólicos genuinamente não-lineares é o teorema de Glimm (veja [**18**]) válido para sistemas $n \times n$. A hipótese deste teorema é que os lados iniciais devem satisfazer

$$\|u_0\|_\infty + \text{ Var. } (u_0) < \delta$$

para uma constante δ suficientemente pequena. O teorema acima pode ser usado para resolver problemas de Cauchy para sistemas 2×2 com hipóteses sobre os dados iniciais menos restritivas, desde que consigamos uma seqüência de soluções aproximadas $\{u^\epsilon\}$ satisfazendo as hipóteses do teorema. Como veremos nas seções seguintes a hipótese mais difícil de se comprovar é a limitação uniforme da seqüência.

2. Os p-sistemas, i.e., sistemas 2×2 do tipo

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} v - \frac{\partial}{\partial x} u = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} p(v) = 0 ,
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

onde $p(v)$ é uma função C^2 satisfazendo $p' < 0$, $p'' > 0$, são exemplos típicos de sistemas estritamente hiperbólicos genuinamente não-lineares. O sistema da dinâmica dos gases isentrópicos em coordenadas Lagrangeanas é deste tipo. Neste caso, v representa o volume específico ($= (densidade)^{-1}$), u representa a velocidade e $p(v)$ é a pressão, que no caso de um gás politrópico é dada por $p(v) = v^{-\gamma}$, $\gamma > 1$.

Para o sistema (2.19) temos para autovalores

$$
\lambda_1 = -\sqrt{-p'} \,, \quad \lambda_2 = \sqrt{-p'} \,, \tag{2.20}
$$

e invariantes de Riemann dados por

$$
\begin{aligned}
z &= u + \int^v (-p'(\xi))^{1/2} \, d\xi \,, \\
w &= u - \int^v (-p'(\xi))^{1/2} \, d\xi \,.
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

3. Um exemplo típico do caso (ii) do teorema 2.1 é fornecido pelo sistema da elasticidade não-linear dado por

$$
\begin{aligned}
&u_t - \sigma(v)_x = 0 \\
&v_t - u_x = 0 ,
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

onde u representa a velocidade, v o gradiente de deformação ("*strain*") e $\sigma(v)$ é o esforço nas seções transversais ("*stress*"). Para um grande número de materiais podemos supor σ uma função suave satisfazendo

$$
\begin{cases} \sigma'(v) > 0 & , v \in \mathbb{R} \text{ e} \\ v\sigma''(v) > 0 & \text{se } v \neq 0 \,. \end{cases} \tag{2.23}
$$

Os autovalores de (2.22) são

$$\lambda_1 = -\sqrt{\sigma'} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \sqrt{\sigma'} \,. \tag{2.24}$$

Para invariantes de Riemann podemos tomar as funções

$$\begin{aligned} z &= u + \int_0^v (\sigma'(s))^{1/2}\, ds \,, \\ w &= u - \int_0^v (\sigma'(s))^{1/2}\, ds \,. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Sob as hipóteses (2.23) temos que (2.22) satisfaz o caso (ii) do teorema 2.1 sendo a curva ali mencionada a reta $w = z$.

3. O método da Viscosidade Nula: Sistemas Parabólicos.

Consideremos a aproximação do sistema (1.1) dada pelos sistemas parabólicos

$$\frac{\partial}{\partial t} u^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} f(u^\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^\varepsilon \,. \tag{3.1}$$

Suponhamos que estejamos interessados em encontrar uma solução do problema de valor inicial para (1.1) com dados iniciais

$$u(x,0) = u_0(x) \,, \quad u \in \mathbb{R} \,. \tag{3.2}$$

Uma forma de tentar achar a solução para este problema é resolver o problema (3.1), (3.2), para $\varepsilon > 0$ pequeno, encontrando assim funções $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$, verificar se esta seqüência é uniformemente limitada e tentar provar que vale (2.2) para aplicar o teorema 2.1 no caso em que (1.1) satisfaça (i) ou (ii) deste teorema. Para fixar idéias podemos tomar o caso concreto do sistema (2.22), com as hipóteses (2.23), onde este programa pode ser inteiramente cumprido com sucesso, como será mostrado ao longo desta seção.

Os passos para a obtenção de soluções globais de (3.1), (3.2), u^ε, $\varepsilon > 0$, limitadas em $L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ uniformemente em relação a ε, são:

1. Existência local de solução de (3.1), (3.2), i.e., uma solução definida apenas numa faixa $\mathbb{R} \times [0, T]$;
2. Existência de *regiões invariantes limitadas* para (3.1), tendo por conseqüência a possibilidade de estender as soluções locais a soluções globais (i.e.,definidas para todo $t > 0$) e a limitação uniforme da seqüência u^ε.

No final do parágrafo sobre existência local daremos ainda um resultado devido a Hoff–Smoller (veja [**20**]) que permite a extensão de soluções locais a soluções globais de (3.1), (3.2) sem o uso de regiões invariantes. Neste caso, em geral, não teremos limitação uniforme em L^∞, nem mesmo localmente.

Estudaremos agora cada um destes passos.

Passo 1. Existência local.

Seja $K(x, t)$ a solução fundamental associada ao operador $\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, isto é,

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \; e^{-x^2/4\varepsilon t} .$$

A solução de (3.1), (3.2) então satisfaz a equação integral

$$u(t) = K(t) * u_0 - \int_0^t K_x(t-s) * f(u(s)) \; ds \; ,$$

onde $*$ denota convolução no espaço tomada componente a componente, e para uma função $u(x, t)$ denotamos por $u(t)$ a função de x dada por $u(t)(x) = u(x, t)$.

É fácil verificar que

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} K(\,.\,, t) \right\|_1 \leq \frac{C(k)}{t^{k/2}} \, , \quad k = 0, \, 1, \, 2, \, \ldots \tag{3.3}$$

Suponhamos que f está definida e é de classe C^3 numa bola fechada $\overline{B}_r(\bar{u})$ de raio r em torno de um ponto $\bar{u}$, e que $f(\bar{u}) = 0$.

Definamos o conjunto de funções $\mathcal{G}_T$ por

$$\mathcal{G}_T = \{ u \in L^\infty \left([0, T] \times \mathbb{R}\right) \mid \|u(t) - \bar{u}\|_\infty \leq r \} \; ,$$

e o operador $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{G}_T$ por

$$(3.4) \qquad \mathcal{L}(u)(t) = K(t) * u_0 - \int_0^t K_x(t-s) * f(u(s))\, ds\,, \quad u \in \mathcal{G}_T\,.$$

O resultado de existência local segue das propriedades de $\mathcal{L}$ dadas pelo seguinte lema (veja [**20**]):

3.1. LEMA. *Suponhamos que* $u_0 - \bar{u} \in L^\infty \cap L^2$ *e que* $\|u_0 - \bar{u}\|_\infty = s < r$. *Então se* $T > 0$ *é suficientemente pequeno (dependendo de* s*), valem as seguintes afirmações:*

a) $\mathcal{L}$ *aplica* $\mathcal{G}_T$ *em si próprio.*

b) $\mathcal{L}$ *é uma contração na topologia* L^∞ *sobre* $\mathcal{G}_T$.

c) *Existe uma constante* C_0 *dependendo somente de* K *e* f*, tal que sempre que* $u \in \mathcal{G}_T$ *satisfizer*

$$(3.5) \qquad \|u(t)\|_2 \le C_0 \|u_0\|_2\,, \quad t \in [0, T]\,,$$

então $\mathcal{L}(u)$ *também satisfaz (3.5).*

d) *Existe uma constante* C_1 *dependendo apenas de* K *e* f*, tal que sempre que* $u \in \mathcal{G}_T$ *satisfizer*

$$(3.6) \qquad \|u_x(t)\|_p \le \frac{C_1 \|u_o\|_p}{\sqrt{t}}\,, \quad 0 < t \le T\,,$$

para $p = 2$ *ou* $p = \infty$*, então* $\mathcal{L}(u)$ *também satisfaz (3.6).*

e) *Dado* $t_0 \in (0, T)$*, existe uma constante* C_2 *dependendo apenas de* K*,* f *e* t_0*, tal que, sempre que* $u \in \mathcal{G}_T$ *satisfizer (3.6) e*

$$(3.7) \qquad \|u_{xx}(t)\|_2 \le \frac{C_2\left(\|u_0\|_2 + \|u_0\|_2^2\right)}{\sqrt{t - t_0}}\,, \quad t_0 < t \le T\,,$$

então $\mathcal{L}(u)$ *também satisfaz (3.7).*

f) *Dado* $t_1 \in (t_0, T)$ *existe uma constante* C_3 *dependendo apenas de* K*,* f*,* t_0 *e* t_1*, tal que, sempre que* $u \in \mathcal{G}_T$ *satisfizer (3.6), (3.7) e*

$$(3.8) \qquad \|u_{xxx}(t)\|_2 \le \frac{C_3\left(\|u_0\|_2 + \|u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^3\right)}{\sqrt{t - t_1}}\,, \quad t_1 < t \le T\,,$$

então $\mathcal{L}(u)$ também satisfaz (3.8).

A prova do lema acima, que aqui omitiremos, se baseia fortemente em (3.3) fazendo-se estimativas sobre os termos do membro à direita em (3.4) (veja [20]). Uma observação importante é que com exceção do ítem f) todas as outras afirmações fazem uso apenas da hipótese $f \in C^2(\overline{B}_r(\bar{u}))$.

O teorema do ponto fixo para contrações e resultados clássicos sobre a equação do calor nos dão como conseqüência do lema 3.1 o seguinte teorema de existência local cuja prova omitiremos (veja [20]).

3.2. TEOREMA. *Suponhamos que $u_0 - \bar{u} \in L^\infty \cap L^2$ e $\|u_0 - \bar{u}\|_\infty = s < r$. Então existe uma única solução u de (3.1), (3.2) definida numa faixa $[0, T] \times \mathbb{R}$, onde T depende somente de K, f e s. Mais ainda, u_t, u_x e u_{xx} são Hölder contínuas em $t \geq t_0 > 0$; $u_t(t)$, $u_x(t)$, $u_{xx}(t)$, $u_{tx}(t)$ e $u_{xxx}(t)$ estão em $L^2(\mathbb{R})$ para $t > 0$; e valem as seguintes estimativas:*

$$\|u(t) - \bar{u}\|_2 \leq C_0 \|u_0 - \bar{u}\|_2, \tag{3.9}$$

e

$$\|u_x(t)\|_2 \leq \frac{C_1 \|u_0 - \bar{u}\|_2}{\sqrt{t}} . \tag{3.10}$$

Aqui C_0 e C_1 são definidos como no lema 2.1.

Chamamos atenção para o fato de que o teorema acima, exceto quanto às afirmações sobre u_{tx} e u_{xxx}, ainda vale se $f \in C^2(\bar{B}_r(\bar{u}))$.

Fica claro pelos resultados acima que se tivermos uma estimativa *a priori* do tipo

$$\|u(t)\|_\infty \leq s < r, \quad t \in [0, T], \tag{3.11}$$

obtida, por exemplo, pela existência de regiões invariantes, podemos automaticamente estender a solução local a uma solução global com a aplicação reiterada do teorema 2.2.

Para completar nossos comentários sobre a existência de solução para o problema (3.1), (3.2) vamos enunciar, sem dar a prova, dois resultados que se acham em [20] e que nos permitem estender a solução local a uma solução global mesmo quando não existe uma estimativa *a priori* do tipo (3.11).

Suponhamos η_* uma entropia para (1.1) estritamente convexa satisfazendo

$$\delta|u-\bar{u}|^2 \le \eta_*(u) \le \frac{1}{\delta}|u-\bar{u}|^2\,, \quad u \in \bar{B}_r(\bar{u})\,, \tag{3.12}$$

para alguma constante $\delta > 0$.

3.3. LEMA. *Suponhamos que exista uma entropia para (1.1) estritamente convexa satisfazendo (3.12). Então existem constantes positivas C_4, e C_5 tais que sempre que u for uma solução suave de (3.1) em $(t_0, t_1) \times \mathbb{R}$ (no sentido de que $u(t) - \bar{u}$, $u_t(t)$ e $u_{xx}(t)$ são contínuas para $t > 0$, e $u(t) - u(t_0) \to 0$ em $L^2(\mathbb{R})$ quando $t \downarrow t_0$), então*

$$\|u(t)-\bar{u}\|_2 \le C_4\|u(t_0)-\bar{u}\|_2\,, \quad t_0 \le t \le t_1\,. \tag{3.13}$$

Se além disso, $u_{xxx}(t)$ e $u_{xx}(t)$ estão em $L^2(\mathbb{R})$ para $t > t_0$, então

$$\|u_x(t)\|_2 \le C_5\left(\|u_x(t_0)\|_2 + \|u(t_0)\|_2\right)\,, \quad t_0 \le t \le t_1\,, \tag{3.14}$$

desde que tenhamos $u_x(t_0) \in L^2(\mathbb{R})$.

Com a ajuda do lema acima prova-se (veja [20]) o seguinte resultado de existência global.

3.4. TEOREMA. *Suponhamos que exista uma entropia para (1.1) estritamente convexa, satisfazendo (3.12). Seja $u_0 - u_1 \in L^\infty \cap L^2$ com $\|u_0 - \bar{u}\|_\infty = s < r$ e $C_0 - C_5$ e T definidos como nos lemas 3.1 e 3.3. Então o problema (3.1), (3.2) possui uma solução global desde que tenhamos*

$$\left[2C_4\overline{C_5}\left(\frac{C_1}{\sqrt{T}} + C_4\right)\right]^{\frac{1}{2}} \|u_0 - \bar{u}\|_2 \le s\,.$$

Aqui $\overline{C_5} = \max\ (C_5, 1)$.

Passo 2. Regiões invariantes.

Junto com o sistema (3.1), consideremos uma pequena perturbação do mesmo, dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}f(u) = \varepsilon\frac{\partial^2}{x^2}u + \delta N\,, \tag{3.15}$$

onde N é uma função suave de (x, t) e $\delta > 0$ pequeno. Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ uma região dada por

$$B = \bigcap_{i=1}^{N} B_i,$$

com

$$B_i = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid G_i(u) \leq 0\}\,,$$

onde $G_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave $i = 1, \ldots, N$.

Suponhamos que $u(t)$ é uma solução suave de (3.15), (3.2) para $t \in [0, T]$, $T > 0$. Suponhamos ainda que u satisfaz a seguinte hipótese:

(H1) existe um intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$ e um conjunto compacto K contido no interior de B tal que $u(x, t) \in K$ se $x \in \mathbb{R} \setminus I$, para todo $t \in [0, T]$.

Sobre as funções G_i fazemos as seguintes hipóteses:

(H2) ∇G_i sobre $\partial B_i \cap \partial B$ é um autovetor à esquerda de ∇f;

(H3) $\nabla^2 G_i$ sobre $\partial B_i \cap \partial B$ é uma matriz positiva;

(H4) $\nabla G_i \cdot N < 0$ sobre $\partial B_i \cap \partial B$.

A seguir estabelecemos um resultado sobre regiões invariantes devido a Chueh, Conley e Smoller (veja [6]).

3.5. Teorema. *Seja $u(t)$ uma solução suave de (3.15), (3.2) satisfazendo a hipótese (H1) e suponhamos que $u_0(x) \in B$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde B é uma região como acima com as G_i, $i = 1 \ldots, N$,satisfazendo (H1), (H2), (H3) e (H4). Então $u(t)$ toma valores em B para todo $t \in [0, T]$. Além disso se, quando $\delta \to 0$, as soluções de (3.15), (3.2) convergem pontualmente à solução de (3.1), (3.2), então o mesmo resultado vale também para esta última.*

Prova: Podemos supor sem perda de generalidade que u_0 toma valores no interior de B (o caso geral é obtido deste por aproximação). Além disso, é suficiente analisarmos o caso em que $N = 1$, onde então fazemos $G_1 = G$. Procedemos à prova por contradição.

Suponhamos que não seja válida a conclusão do teorema. Neste caso, por (H1) podemos afirmar que existe um tempo $t_0 \in (0, T)$ e um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $G(u(x_0, t_0)) = 0$ e $G(u(x, t)) < 0$ se $t < t_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, em (x_0, t_0) teremos

$$\frac{\partial}{\partial t} G(u(x_0, t_0)) \geq 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial x} G(u(x_0, t_0)) = 0\,, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(u(x_0, t_0)) \leq 0\,. \tag{3.16}$$

Agora, multiplicando (3.15) por ∇G e usando (H2) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} G + \lambda \frac{\partial}{\partial x} G = \varepsilon \nabla G \cdot u_{xx} + \delta \nabla G \cdot N\,. \tag{3.17}$$

Avaliando (3.17) no ponto (x_0, t_0), reescrevendo o termo $\varepsilon \nabla G \cdot u_{xx}$ usando a regra da derivação do produto e fazendo uso da segunda relação em (3.16), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} G(u(x_0, t_0)) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(u(x_0, t_0)) - \varepsilon \nabla^2 G \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \delta \nabla G \cdot N. \tag{3.18}$$

Agora, usando as hipóteses (H3) e (H4) e as outras relações em (3.16), chegamos enfim a uma contradição. A última parte da conclusão do teorema é óbvia. □

Com isto damos por concluído nosso estudo sobre existência de soluções globais para o problema (3.1), (3.2). Vamos agora aplicar os fatos vistos para obter uma solução do problema de Cauchy para o sistema da elasticidade não–linear (2.22) sob as hipóteses (2.23).

Solução do problema de Cauchy para o sistema (2.22) com as hipóteses (2.23):

Começamos supondo dadas as condições iniciais

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x))\,, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

Tomemos a seqüência aproximadora $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ de soluções do problema de Cauchy para

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} \sigma(v^\varepsilon) &= \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^\varepsilon \\ \frac{\partial}{\partial t} v^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} u^\varepsilon &= \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v^\varepsilon\,, \end{aligned} \tag{3.20}$$

com condições iniciais (3.19). A existência de soluções globais de (3.20), (3.19) seguirá, pelo que vimos acima, da existência de regiões invariantes limitadas para (3.20). Recordemos os invariantes de Riemann para (2.22) dados em (2.25). temos

$$\nabla^2 z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma''(v)}{2}(\sigma'(v))^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

e

$$\nabla^2 w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sigma''(v)}{2}(\sigma'(v))^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Consideremos as funções

$$G_1(u,v) = \begin{cases} z(u,v)\,, & v \geq 0 \\ u + \sigma'(0)^{\frac{1}{2}} v\,, & v < 0, \end{cases}$$

$$G_2(u,v) = \begin{cases} -u - \sigma'(0)^{\frac{1}{2}} v\,, & v \geq 0 \\ -z(u,v)\,, & v < 0 \end{cases}$$

$$G_3(u,v) = \begin{cases} u - \sigma'(0)^{\frac{1}{2}} v\,, & v \geq 0 \\ w(u,v)\,, & \text{v<0}, \end{cases}$$

$$G_4(u,v) = \begin{cases} -w(u,v)\,, & v \geq 0 \\ -u + \sigma'(0)^{\frac{1}{2}} v\,, & v < 0. \end{cases}$$

Dado $N > 0$, consideremos as regiões

$$B_i = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid G_i(u,v) - N \leq 0\}\,,$$

$i = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4$. É fácil verificar que cada uma das G_i satisfaz as hipóteses do teorema 3.5. Portanto, se $B = \cap_{i=1}^4 B_i$, temos que B é uma região invariante limitada para (3.20), i.e., as regiões

$$B = \{(u,v) \mid |z| \leq N\,,\ |w| \leq N\}\,,$$

são regiões invariantes para (3.20).

Agora desejamos aplicar o teorema 2.1 à seqüência de aproximações $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$, soluções de (3.20), (3.19), para obter então uma solução de (2.22), (3.19). O ponto crucial aqui é a verificação da hipótese (2.2).

Observemos que (η_*, q_*) dadas por

$$
(3.23) \qquad \begin{aligned} \eta_*(u,v) &= \frac{u^2}{2} + \int_0^v \sigma(s)\,ds\,, \\ q_*(u,v) &= -u\sigma(v)\,, \end{aligned}
$$

formam um par e-f para (2.22) e, por (2.23), η_* é estritamente convexa. A hipótese (2.2) no caso geral de uma seqüência uniformemente limitada de soluções de (3.1), $\{ u^\varepsilon \}$, quando (1.1) possui uma entropia estritamente convexa, η_*, se verifica do seguinte modo. Supomos que as u^ε sejam suficientemente regulares, convergindo a zero (ou outro estado constante) juntamente com suas derivadas u^ε_x quando $|u| \to \infty$, para cada $t > 0$. Multiplicando (3.1) por $\nabla\eta_*$ e reescrevendo convenientemente o segundo membro resultante, obtemos

$$
(3.24) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\eta_* + \frac{\partial}{\partial x}q_* = \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\eta_* - \varepsilon\nabla^2\eta_*\,(u^\varepsilon_x, u^\varepsilon_x)\,.
$$

Integrando numa faixa $\pi_T = \mathbb{R} \times [0, T]$, obtemos

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \{\eta_*\,(u^\varepsilon(x,t)) - \eta_*\,(u_0(x))\}\,dx = -\varepsilon \iint\limits_{\pi_T} \nabla^2\eta_*\,(u^\varepsilon_x, u^\varepsilon_x)\,dx\,dt.
$$

Daí e do fato de que η_* é estritamente convexa obtemos que

$$
(3.25) \qquad \sqrt{\varepsilon}\,u^\varepsilon_x \quad \textit{é uniformemente limitada em} \quad L^2(\mathbb{R} \times [0,T])\,.
$$

Agora, para qualquer par e-f para (1.1), (η, q), temos

$$
\frac{\partial}{\partial t}\eta + \frac{\partial}{\partial x}q = \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\eta - \varepsilon\nabla^2\eta\left(\frac{\partial}{\partial x}u^\varepsilon, \frac{\partial}{\partial x}u^\varepsilon\right).
$$

Usando (3.25) obtemos imediatamente que $\{\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\eta\}$ é pré-compacto em $W^{-1,2}_{loc}$, com o uso da desigualdade de Schwarz. Além disso, (3.25) nos dá também que $\{\varepsilon\nabla^2\eta(u^\varepsilon_x, u^\varepsilon_x)\}$ é limitado em $M(\Omega)$. Assim, o lema de Murat nos dá a comprovação da hipótese (2.2).

Com isto fica concluída a aplicação do teorema 2.1 aos sistemas de elasticidade não – linear.

4. Esquemas em Diferenças Finitas.

Nesta seção vamos mostrar como o teorema 2.1 pode ser aplicado para provar a convergência de seqüências de soluções aproximadas, construídas por esquemas em diferenças finitas de Lax – Friedrichs ou Godunov, a uma solução fraca do problema de Cauchy para (1.1). Iniciamos com uma breve discussão sobre um tipo particular de problema de valor inicial.

Chama-se *problema de Riemann* o problema de valor inicial para (1.1) onde os dados iniciais são da forma

$$u(x,0) = \begin{cases} u^-, & x < 0 \\ u^+, & x > 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

onde u^- e u^+ são vetores constantes em $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ no nosso caso).

Recordemos brevemente a estrutura das soluções do problema de Riemann para (1.1). Suponhamos inicialmente que (1.1), (4.1) seja resolvido por uma "*onda de choque*", i.e., que a solução $u(x,t)$ seja constante igual a u^- para $x > x(t)$, $t > 0$, e constante igual a u^+ para $x > x(t)$, $t > 0$, com $x(t)$ diferenciável. Como $u(x,t)$ satisfaz (1.2) para toda $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ vemos facilmente que $(x(t), t)$ é uma reta partindo da origem $(0,0)$ cuja inclinação s satisfaz a relação de *Rankine – Hugoniot*:

$$s[u] = [f(u)] \,, \tag{4.2}$$

onde $[u] = u^- - u^+$, $[f(u)] = f(u^-) - f(u^+)$ e, em geral, o colchete denotará a diferença entre os valores, à esquerda e à direita da linha de choque, da função que estiver dentro, sempre que o contexto permitir esta interpretação.

No caso de um sistema 2×2, estritamente hiperbólico genuinamente não-linear, a que nos restringiremos nesta seção, dado um estado $u^- \in \mathbb{R}^2$, os estados u^+ para os quais a solução de (1.1), (4.1) é um choque como descrito acima, podem ser obtidos em função de s a partir de (4.2) e formam duas curvas que se cruzam em u^- e cujos vetores tangentes em u^- são paralelos aos autovetores à direita de ∇f (veja Lax **[25]**). O choque é chamado um i-choque se o vetor tangente à curva em que u^+ se encontra (solução de (4.2)), em u^-, for paralelo ao i-ésimo autovetor $r_i(u^-)$. Seguindo Lax (veja [**25**]) chamamos um i-choque *admissível* se tivermos:

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_i(u^+) < s < \lambda_i(u^-)\\ \lambda_{i-1}(u^-) < s < \lambda_{i+1}(u^+)\end{array}\right. , \tag{4.3}$$

onde tomamos por conveniência $\lambda_0 = -\infty$, $\lambda_{n+1} = +\infty$, e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de ∇f.

Suponhamos agora que (1.1), (4.1) seja resolvido por uma função $u(x, t)$ tal que tenhamos

$$u(x,t) = v\left(\frac{x}{t}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{4.4}$$

com $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável, i.e., u no domínio $t > 0$ é função do quociente $\xi = \frac{x}{t}$. Substituindo em (1.1) obtemos

$$(\nabla f - \xi I)\,\frac{dv}{d\xi} = 0. \tag{4.5}$$

Isto nos diz que neste caso $\frac{dv}{d\xi}$ deve ser um autovetor de ∇f associado ao autovalor ξ. Resolvendo os problemas de valor inicial dados por

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{dv}{d\xi} = r_i(v), \quad \xi > \lambda_i(u^-)\\ v\,(\xi = \lambda_i(u^-)) = r_i(u^-),\end{array}\right. \tag{4.6}$$

obtemos n curvas partindo de u^- cujos pontos são estados u^+ para os quais o problema (1.1), (4.1) admite uma solução do tipo (4.4). Essas soluções são chamadas ondas de rarefação. Os ramos das curvas de choque obtidas de (4.2), correspondentes aos choques admissíveis (i.e., satisfazendo (4.3)) se juntam em u^- às curvas de rarefação formando um sistema de n curvas de classe C^2 se cortando mutuamente em u^-.

Combinando os dois tipos de solução vistos acima, Lax [**25**] provou o seguinte resultado cuja demonstração aqui omitiremos.

4.1. TEOREMA. *Suponhamos que (1.1) é estritamente hiperbólico e genuinamente não – linear. Então, dado $u^- \in \mathbb{R}^n$, existe uma vizinhança V de u^- tal que, para todo $u \in V$, o* *problema (1.1), (4.1), com $u^+ = u$, possui uma única solução constituída de $n+1$ estados constantes u_i, $i = 0, 1, \dots, n$, com $u_0 = u^-$, $u_n = u^+$, separados por choques admissíveis ou rarefações.*

Um fato importante que será usado mais adiante, relacionando ondas de choque e entropia, provado por Lax em **[26]**, é que se (1.1) possui um par e-f (η_*, q_*) com η_* estritamente convexa, então ao longo de um choque admissível de amplitude pequena devemos ter

$$s\,[\eta_*] + [q_*] \geq 0\,. \tag{4.7}$$

Vamos agora descrever os métodos em diferenças finitas de Lax-Friedrichs e Godunov. Começaremos com o método de Lax-Friedrichs.

Consideremos uma malha em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ com os lados de cada retângulo da estrutura medindo Δx, na variável espacial, e Δt, na variável tempo. Nos restringimos ao sub-reticulado

$$\{(j\Delta x, n\Delta t) \,:\, j + n = par\}\,.$$

Denotemos $u_j^n = u(j\Delta x, n\Delta t)$. Seja $\lambda = \Delta t/\Delta x$.

O método de Lax-Friedrichs é dado por

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) + \frac{\lambda}{2}\left(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)\right)\,. \tag{4.8}$$

Assumimos a condição CFL (Courant-Lax-Friedrichs)

$$\lambda \leq \sup_{\substack{u \in \mathbb{R}^2 \\ i=1,\dots,n}} |\lambda_i(u)|\,. \tag{4.9}$$

Denotemos por $w(x, t; a, b)$ a solução do problema de Riemann avaliada em (x, t) com $u^- = a$, $u^+ = b$. É fácil ver, pelo teorema de Green, que u_j^{n+1} determinado por (4.8) pode ser interpretado como o valor médio da solução do problema de Riemann com dados $u^- = u_{j-1}^n$, $u^+ = u_{j+1}^n$, no tempo $t = \Delta t$:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2\Delta x}\int_{-\Delta x}^{\Delta x} w\left(x, \Delta t; u_{j-1}^n, u_{j+1}^n\right)\, dx\,.$$

Logo, dada uma função-reticulado $\{u_j^n\}$ gerada pelo esquema Lax-Friedrichs, pode-se associar uma solução aproximada $u = u(x, t; \Delta x)$ com as propriedades seguintes. A função u é uma solução exata (no sentido fraco) em cada faixa da forma

$$S_n = \{(x, t)\ :\ n\Delta t \leq t < (n+1)\Delta t\},$$

e coincide com a solução $w(x, t; u_{j-1}^n, u_{j+1}^n)$ no retângulo

$$S_n \cap \{(x, t)\ :\ (j-1)\Delta x < x < (j+1)\Delta x\}.$$

Se ϕ é uma função suave com suporte compacto na faixa $0 \leq t \leq T = n\Delta t$, então (fazendo $\pi_T = \mathbb{R} \times [0, T]$)

$$\begin{aligned}\iint_{\pi_T} \{\phi_t u + \phi_x f(u)\}\, dx\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi u(x, T)\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} \phi u(x, 0)\, dx \\ + \sum_{m=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, m\Delta t)[u^m]\, dx,\end{aligned} \tag{4.10}$$

onde

$$[u^m] = u(x, m\Delta t - 0) - u(x, m\Delta t + 0).$$

Identidade semelhante vale para um par $e - f$ (η, q) arbitrário:

$$\begin{aligned}\iint_{\pi_T} \{\phi_t \eta(u) + \phi_x q(u)\}\, dx\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi\eta(x, T)\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} \phi\eta(x, 0)\, dx \\ + \sum_{m=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, m\Delta t)[\eta^m]\, dx + \int_0^T \sum(\phi)\, dt.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Aqui

$$[\eta^m] = \eta(u(x, m\Delta t - 0)) - \eta(u(x, m\Delta t + 0)),$$

e

$$\sum(\phi) = \sum_{\gamma} \{s[\eta] - [q]\}\phi(x(t), t),$$

onde γ varia sobre todas as linhas de choque $(x(t), t)$. Observemos de passagem que se η é convexa então

$$\int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} [\eta^m]\, dx \geq 0\,, \tag{4.12}$$

pela desigualdade de Jensen.

Vejamos agora o método de Godunov. Neste caso consideramos todo o reticulado $\{(j\Delta x, n\Delta t)\ :\ j \in \mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{N}\}$. De novo assumimos a condição CFL (4.9). Supondo definidos u_j^n, pomos

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{(j-\frac{1}{2})\Delta x}^{(j+\frac{1}{2})\Delta x} u(x, (n+1)t - 0)\, dx\,, \tag{4.13}$$

onde consideramos a solução u definida na faixa S_n, coincidindo no retângulo

$$S_n \cap \{(x, t)\ :\ j\Delta x < x < (j+1)\Delta x\}$$

com a solução do problema de Riemann $w(x, t; u_j^n, u_{j+1}^n)$. A solução aproximada $u(x, t; \Delta x)$ fica definida em toda parte se fizermos $u(x, t; \Delta x) = u_j^n$ no conjunto

$$\{(x, t)\ :\ (j - \frac{1}{2})\Delta x < x < (j + \frac{1}{2})\Delta x\,, \quad t = n\Delta t\}\,.$$

A seguir apresentamos um teorema devido a DiPerna sobre a convergência das soluções aproximadas, construídas pelo método de Lax-Friedrichs ou pelo método de Godunov, a uma solução fraca do problema de Cauchy para (1.1) (cf. [11]).

4.2. Teorema. *Consideremos um sistema estritamente hiperbólico genuinamente não-linear dotado de uma entropia não-negativa estritamente convexa. Seja u^ε uma seqüência de soluções aproximadas geradas pelo método de Lax-Friedrichs ou pelo método de Godunov, e suponhamos que u^ε tem oscilação uniformemente pequena, i.e.,*

$$\|u^\varepsilon\|_\infty \leq M\,, \tag{4.14}$$

onde M é uma constante suficientemente pequena. Então existe uma subseqüência convergindo q. t. p. a uma solução exata u.

Observação: A restrição no tamanho das oscilações se deve ao teorema 4.1 (existência de solução do problema de Riemann) e ao domínio de validade da desigualdade (4.7).

PROVA: Mostraremos que para todos os pares e-f (η, q) as medidas

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}q(u^\varepsilon) \tag{4.15}$$

ficam num compacto de $W^{-1,2}_{loc}$. Para fixar as idéias vamos supor que u^ε foi construída pelo esquema de Lax-Friedrichs e que o dado inicial tem suporte compacto.

Escrevamos a identidade (4.9) na forma

$$\int\!\!\int \{\phi_t\eta + \phi_x q\}\, dx\, dt = M(\phi) + L(\phi) + \Sigma(\phi)\,, \tag{4.14}$$

onde o erro de interface L é decomposto como segue:

$$L = \sum L_{jn}\,, \quad L_{jn}(\phi) = \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} \phi(x, n\Delta t)[\eta^n]\, dx\,.$$

Por simplicidade suprimimos a dependência dos operadores M, L e Σ em relação a u^ε. Inicialmente, supondo η_* uma entropia não-negativa estritamente convexa, e fazendo $\phi(x,t) = \chi_{[0,T]}(t)$ (por aproximação) obtemos (aqui C denotará qualquer constante positiva)

$$\begin{aligned}
\sum_{j,n}\int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x}[\eta_*^n]\,dx + \int_0^T \sum_\gamma \{s[\eta_*] - [q_*]\}\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_*\,(u^\varepsilon(x,0))\,dx \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \eta_*\,(u^\varepsilon(x,T))\,dx \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} \eta_*\,(u^\varepsilon(x,0))\,dx \le C\,,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

ao passo que

$$
(4.18) \qquad \begin{aligned} &\sum_{j,n} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} \left(\eta_*(u_-^n) - \eta_*(u_j^n)\right)\, dx = \\ &\sum_{j,n} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} dx \int_0^1 (1-\theta)\, {}^t(u_-^n - u_j^n) \nabla^2 \eta_*(u_j^n(\theta))(u_-^n - u_j^n)\, d\theta\,, \end{aligned}
$$

pela fórmula de Taylor com resto integral, onde $u_-^n = u(x, n\Delta t{-}0)$ e $u_j^n(\theta) = u_j^n + \theta(u_-^n - u_j^n)$.

Assim, por (4.17), (4.18) levando-se em conta (4.7), para η_* não-negativa estritamente convexa obtemos

$$
(4.19) \qquad \int_0^T \sum_\gamma \{s[\eta_*] - [q_*]\}\, dt \leq C\,,
$$

e

$$
(4.20) \qquad \sum_{j,n} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} dx \int_0^1 (1-\theta)(u_-^n - u_j^n) \nabla^2 \eta_*(u_j^n(\theta))(u_-^n - u_j^n)\, d\theta \leq C\,.
$$

Em particular, como para algum $C_0 > 0$ temos $\nabla^2 \eta_*(v, v) \geq C_0 |v|^2$, obtemos

$$
(4.19) \qquad \sum_{j,n} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} |u_-^n - u_j^n|^2\, dx \leq C\,.
$$

Agora, dado um choque admissível de amplitude moderada, Lax em [**26**] provou que para um par e-f qualquer temos

$$
|s[\eta] - [q]| \leq C|[u]|^3\,,
$$

e, no caso em que η_* é não – negativa estritamente convexa,

$$
s[\eta_*] - [q_*] \geq C|[u]|^3\,.
$$

Das duas últimas desigualdades obtemos então que existe uma constante positiva C, dependendo de (η, q), tal que

$$
(4.20) \qquad |\, s[\eta] - [f]| \leq C\{s[\eta_*] - [q_*]\}\,.
$$

Assim, para qualquer par $e - f$ (4.17) nos dá que

$$\begin{aligned}\left|\sum(\phi)\right| &\leq \|\phi\|_\infty \int_0^T \sum_\gamma |s[\eta] - [q]|\, dt \\ &\leq C\|\phi\|_\infty \int_0^T \sum_\gamma \{s[\eta_*] - [q_*]\} \\ &\leq C\|\phi\|_\infty .\end{aligned}$$

Além disso, claramente temos

$$|M(\phi)| \leq C\|\phi\|_\infty .$$

Portanto, M e $\sum$ ficam num conjunto limitado de $M\,(\Omega)$ e, logo, num subconjunto compacto de $W_{loc}^{-1,q}$, $1 \leq q < 2$ (teorema I.4.1). Vamos provar que L também fica num compacto de $W_{loc}^{-1,q}$ para algum $1 \leq q < 2$. Como claramente $\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}q(u^\varepsilon)$ é limitado em $W^{-1,\infty}$, o teorema I.4.2 nos dará a compacidade em $W_{loc}^{-1,2}$. Fazemos $L = L_1 + L_2$, onde

$$L_1 = \sum_{j,n} L_{1jn}, \quad L_{1jn} = \phi_j^n \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} [\eta^n]\, dx$$

e

$$L_2 = \sum_{j,n} L_{2jn}, \quad L_{2jn} = \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} \left(\phi(x, n\Delta t) - \phi_j^n\right) [\eta^n]\, dx ,$$

com $\phi_j^n = \phi(j\Delta x, n\Delta t)$. Mostraremos que

$$\begin{aligned}|L_1(\phi)| &\leq C\|\phi\|_\infty , \\ |L_2(\phi)| &\leq C\,(\Delta x)^\beta\, \|\phi\|_{C^\alpha} ,\end{aligned}$$

para α e β apropriados. Pelo teorema de imersão de Sobolev

$$|L_2(\phi)| \leq C\,(\Delta x)^\beta\, \|\phi\|_{W^{1,p}} ,$$

para algum p apropriado.

O análogo de (4.18) para η nos dá que

$$\sum\left|\int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x}[\eta^n]\,dx\right|\leq C\,,$$

e assim obtemos

$$|L_1(\phi)|\leq\sum\left|L_{1jn}(\phi)\right|\leq C\|\phi\|_\infty\,.$$

Por outro lado,

$$\left|L_{2jn}(\phi)\right|\leq\|\phi\|_{C^\alpha}\int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x}(\Delta x)^\alpha\;|[\eta^n]|\,dx\,.$$

Aplicando a desigualdade trivial

$$ab\leq\frac{a^2}{\delta}+\delta b^2\,,$$

com $\delta=(\Delta x)^\theta$, obtemos

$$\left|L_{2jn}(\phi)\right|\leq\|\phi\|_{C^\alpha}\int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x}\left(\frac{(\Delta x)^{2\alpha}}{(\Delta x)^\theta}+(\Delta x)^\theta\,[\eta^n]^2\right)\,dx\,.$$

Segue que

$$|L_2(\phi)|\leq\|\phi\|_{C^\alpha}\left(\frac{(\Delta x)^{2\alpha+1}}{(\Delta x)^{2+\theta}}+C\,(\Delta x)^\theta\right)\,,$$

já que existem somente da ordem de $1/(\Delta x)^2$ termos na soma $\sum L_{2jn}$ se ϕ tem suporte compacto. A estimativa desejada é obtida escolhendo-se $\alpha>1/2$ e θ suficientemente pequeno. Isto completa a prova. □

Para as equações da elasticidade (2.22) pode-se estabelecer a convergência dos esquemas de Lax-Friedrichs e de Godunov com dados iniciais possuindo oscilação arbitrariamente grande. Isto se deve ao fato de que as regiões invariantes que vimos na seção anterior para os sistemas parabólicos associados (3.20), são regiões invariantes também para as soluções de problemas de Riemann e, por serem convexas, são, portanto, invariantes pelos esquemas de Lax-Friedrichs e Godunov. É sabido que, para estes sistemas, o problema de Riemann tem solução para quaisquer dois estados do plano, e que vale (4.7) ao longo dos choques admissíveis, onde η_* é a entropia estritamente convexa dada em (3.23). Assim temos o seguinte resultado (veja [**11**]).

4.3. TEOREMA. *Consideremos o sistema (2.22) com as hipóteses (2.23). Suponhamos dadas as condições iniciais em* L^∞, *constantes fora de um intervalo limitado. Então qualquer seqüência de soluções aproximadas geradas pelo esquema de Lax-Friedrichs ou pelo esquema de Godunov para o sistema (2.22) contém uma subseqüência convergindo q.t.p. a uma solução fraca do problema de Cauchy para (2.22).*

Capítulo III

Análise das Medidas de Young : Uma Abordagem Alternativa

1. Introdução

Neste capítulo, apresentamos um método alternativo para a análise das medidas de Young, devido a D. Serre [35]. Aqui, fazemos uma pequena modificação na conclusão do resultado principal (teorema 5.4 de [35]) que nos permitirá estender o método a problemas onde o suporte da medida de Young é ilimitado. Novamente, consideramos o sistema 2×2

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}f(u) = 0, \tag{1.1}$$

com $u = (u_1, u_2)$, $f = (f_1, f_2)$ e vamos supor que o mesmo é *estritamente hiperbólico* e *genuinamente não-linear.*

Como vimos nos dois capítulos anteriores, se tivermos uma sequência $\{u^\varepsilon\}$ de soluções aproximadas de (1.1), uniformemente limitadas, podemos obter uma família parametrizada $\nu_{x,t}$ de medidas de Young tais que para toda f contínua em $\mathbb{R}^2$ temos

$$f(u^\varepsilon) \rightharpoonup \langle \nu_{x,t}, f \rangle \quad \text{em} \quad L^\infty(\mathbb{R}_\times(0,\infty)) \quad \text{fraco} *.$$

Por outro lado, se para todo par e-f (η, q), suave, tivermos

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(u^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}q(u^\varepsilon) \in \Big\{ \text{ compacto de } \quad W^{-1,2}_{\text{loc}} \Big\},$$

então, pelo lema do div-rot, dados dois pares e-f (η, q), $(\overline{\eta}, \overline{q})$ teremos a seguinte relação para $\nu = \nu_{x,t}$

$$\langle \nu, \eta\overline{q} - \overline{\eta}q \rangle = \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, \overline{q} \rangle - \langle \nu, \overline{\eta} \rangle \langle \nu, q \rangle. \tag{1.2}$$

A pergunta então é: Dada uma medida de probabilidade ν , com suporte em $\mathbb{R}^2$, satisfazendo (1.2) para quaisquer dois pares e-f suaves $(\eta, q), (\overline{\eta}, \overline{q})$, para o sistema estritamente hiperbólico genuinamente não-linear (1.1), podemos mostrar que ν é uma medida de Dirac?

Vimos, no capítulo anterior, como DiPerna foi capaz de responder positivamente a essa questão. D. Serre em [**35**] propõe um método alternativo para se chegar a mesma conclusão. A importância desta abordagem é que ela tem permitido adaptações de modo a torná-la aplicável a sistemas não-estritamente hiperbólicos, como veremos no próximo capítulo.

2. Estudo dos Pares Entropia-Fluxo.

Os pares e-f são as soluções do sistema

$$\frac{\partial q}{\partial w_i} = \lambda_i \frac{\partial \eta}{\partial w_i} \quad , \quad 1 \leq i \leq 2, \tag{2.1}$$

onde (w_1, w_2) é um sistema de coordenadas formado por um par de invariantes de Riemann para (1.1) definidos numa bola suficientemente grande, contendo o suporte de $\nu_{x,t}$ para q.t.p. (x, t). Eliminando q em (2.1), as entropias se tornam soluções da equação linear de segunda ordem estritamente hiperbólica:

$$\frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial w_2}\eta + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_2}\frac{\partial \eta}{\partial w_1} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial w_1}\frac{\partial \eta}{\partial w_2}\right) = 0. \tag{2.2}$$

As características são as retas paralelas aos eixos w_1 e w_2.

O *problema de Goursat* é encontrar uma solução η de (2.2) cujo valor é conhecido sobre duas características concorrentes:

$$\begin{cases} \eta(w_1, \overline{w}_2) = \varphi_1(w_1) \\ \eta(\overline{w}_1, w_2) = \varphi_2(w_2) \end{cases} \tag{2.3}$$

Recordemos o resultado clássico (Sobolev [**37**]).

2.1. TEOREMA. *O problema (2.2), (2.3) possui uma solução única, tão regular quanto os dados* φ_1, φ_2.

O fluxo q é então determinado a menos de uma constante aditiva por (2.1).

Suponhamos que, em (2.3), $\varphi_2 \equiv 0$ e $\varphi_1(w_1) = 0$ para $w_1 \leq \overline{w}_1$. Seja η a solução do problema de Goursat (2.2), (2.3), e q seu fluxo, normalizado por $q(\overline{w}) = 0$, $\overline{w} = (\overline{w}_1, \overline{w}_2)$.

De (2.1) temos

$$\frac{d}{dw_2} q(\overline{w}_1, w_2) = \lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dw_2} = 0,$$

donde $q(\overline{w}_1, w_2) \equiv 0$. Ponhamos, então

$$E(w) = \begin{cases} \eta(w) & , \quad \text{se} \quad w_1 \geq \overline{w}_1 \\ 0 & , \quad \text{se} \quad w_1 \leq \overline{w}_1 \end{cases}$$

$$F(w) = \begin{cases} q(w) & , \quad \text{se} \quad w_1 \geq \overline{w}_1 \\ 0 & , \quad \text{se} \quad w_1 < \overline{w}_1 \,. \end{cases}$$

As funções E, F são contínuas em $\mathbb{R}^2$ (se φ_1 o é) e satisfazem as equações (2.1) para $w_1 \neq \overline{w}_1$: à direita porque $(E, F) = (\eta, q)$ e à esquerda porque $(E, F) = (0, 0)$. Estas equações são de 1ª ordem, portanto são verificadas por (E, F) em $D'(\mathbb{R}^2)$. Então E é solução de (2.2). Como E também satisfaz (2.3), a unicidade da solução do problema de Goursat implica $E \equiv \eta$. Temos então o resultado:

2.2. PROPOSIÇÃO. *Seja* η *uma entropia verificando* $\eta(w) \equiv 0$ *para* $w_1 = \overline{w}_1$, *bem como para* $w_1 < \overline{w}_1$ $w_2 = \overline{w}_2$. *Então* $\eta(w) \equiv 0$ *para* $w_1 < \overline{w}_1$.

A proposição acima motiva a seguinte definição.

2.3. DEFINIÇÃO. *Dizemos que uma entropia* η *é do tipo 1 (respectivamente Leste, resp. Oeste) de limite* $\overline{w}_1$ *se* $\eta(w) = 0$ *para* $w_1 = \overline{w}_1$ *(resp.* $w_1 < \overline{w}_1$, *resp* $w_1 > \overline{w}_1$*). Se o fluxo* q *é normalizado por* $q(w_1, \overline{w}_2) = 0$, *dizemos que o par* (η, q) *é do tipo 1 (resp. Leste , resp Oeste) de limite* $\overline{w}_1$.

Definimos de maneira semelhante as entropias e pares e-f do tipo 2, Norte e Sul, de limite $\overline{w}_2$.

A solução do problema de Goursat mostra então:

2.4. Proposição. *Seja $\overline{w}$ um ponto de $\mathbb{R}^2$. Toda entropia η se escreve de maneira única como soma $\eta_L + \eta_O + \eta_N + \eta_S + Cte$ onde η_L é de tipo Leste de limite $\overline{w}_1$, etc....*

Observemos que esta decomposição depende da origem $\overline{w}$ escolhida. Em geral, uma entropia do tipo 1 para $\overline{w}_1$, não o é para um outro valor w_1^*. No entanto, uma entropia de tipo Leste para $\overline{w}_1$ é ainda de tipo Leste para todo $w_1^* \leq \overline{w}_1$.

Vamos agora obter uma fórmula integral para as entropias acima. Fixemos $\overline{w} \in \mathbb{R}^2$ e consideremos o problema de Goursat para uma entropia η do tipo Leste: $\eta(w_1, \overline{w}_2) = \varphi(w_1)$, $w_1 > \overline{w}_1$ com $\varphi(\overline{w}_1) = 0$. A proposição 2.2 mostra que o valor de $\eta(w)$ depende apenas da restrição de φ ao intervalo $(\overline{w}_1, w_1)$, o que nos sugere a fórmula integral seguinte:

$$\eta(w) = I(w)\varphi(w_1) + \int_{\overline{w}_1}^{w_1} J(\xi; w)\varphi(\xi)d\xi \,. \tag{2.4}$$

Procuraremos o fluxo normalizado sob a mesma forma:

$$q(w) = K(w)\varphi(w_1) + \int_{\overline{w}_1}^{w_1} L(\xi; w)\varphi(\xi)d\xi \,. \tag{2.5}$$

Substituímos então no sistema (2.1). O índice $i = 1$ fornece:

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial w_1}\varphi + K\varphi' + L(w_1; w)\varphi + \int_{\overline{w}_1}^{w_1} \frac{\partial L}{\partial w_1}(\xi; w)\varphi(\xi)d\xi \\ = \lambda_1(w)\left\{\frac{\partial I}{\partial w_1}\varphi + I\varphi' + J(w_1; w)\varphi + \int_{\overline{w}_1}^{w_1} \frac{\partial I}{\partial w_1}(\xi; w)\varphi(\xi)d\xi\right\} ,\end{aligned}$$

isto é:

$$K = \lambda_1 I, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial K}{\partial w_1}(w) + L(w_1; w) = \lambda_1(w)\left\{\frac{\partial I}{\partial w_1}(w) + J(w_1; w)\right\} , \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_1}(\xi; w) = \lambda_1(w)\frac{\partial J}{\partial w_1}(\xi; w) \,. \tag{2.8}$$

O índice $i = 2$ fornece mais simplesmente

$$\frac{\partial K}{\partial w_2} = \lambda_2 \frac{\partial I}{\partial w_2}, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2}(\xi; w) = \lambda_2(w) \frac{\partial J}{\partial w_2}(\xi; w). \tag{2.10}$$

Enfim, a condição de Goursat $\eta(w_1, \overline{w}_2) = \varphi(w_1)$ fornece:

$$I(w_1, \overline{w}_2) = 1\,, \tag{2.11}$$

$$J(\xi; w_1, \overline{w}_2) = 0\,. \tag{2.12}$$

2.5. TEOREMA. *O sistema (2.6) - (2.12) possui uma solução única (I, J, K, L), regular. As fórmulas (2.4) e (2.5) resolvem o problema de Goursat para um par e-f de tipo Leste de limite $\overline{w}_1 : \eta(w_1, \overline{w}_2) = \varphi(w_1)$ para $w_1 > \overline{w}_1$.*

PROVA: O fato de que (2.4) e (2.5) resolvem o problema de Goursat decorre da regularidade de I, J, K e L com respeito a (ξ, w) que aparece na demonstração da existência. Provemos a existência e unicidade para o problema (2.6)-(2.12). Eliminemos K em (2.6) e (2.9), obtendo assim

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{\partial I}{\partial w_2} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial w_2} I = 0\,. \tag{2.6'}$$

Esta equação diferencial ordinária possui uma única solução verificando $I(w_1, \overline{w}_2) = 1$, para cada w_1. Assim, o sistema (2.6), (2.9) e (2.11) possui uma solução única (I, K). Rescrevamos então (2.7)

$$L(w_1; w) - \lambda_1(w) J(w_1; w) = -\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} I(w)\,. \tag{2.7'}$$

Derivemos (2.7') com respeito a w_2. Com (2.10) segue:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(w)\frac{\partial J}{\partial w_2}(w_1, w) - \frac{\partial \lambda_1}{\partial w_2} J(w_1; w) = -\frac{\partial}{\partial w_2}(I \frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1})\,. \tag{2.13}$$

Esta equação diferencial ordinária define, com a condição (2.12) (para $\xi = w_1$) uma única função $j(w_1; w)$. Consideremos então, para ξ fixado, o sistema (2.8), (2.12) e :

$$J(\xi; \xi, w_2) = j(\xi; \xi, w_2). \tag{2.14}$$

Este é o problema de Goursat para a entropia $J(\xi; \cdot)$ cujos dados estão sobre as retas $w_1 = \xi$ e $w_2 = \overline{w}_2$. Ele possui uma única solução. Seu fluxo $L(\xi; \cdot)$ é definido a menos de uma constante $l(\xi)$.

Resta verificar que com uma escolha apropriada de $l(\xi)$ temos (2.7'). Agora, de (2.10) e (2.13), deduzimos

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\left(L(w_1; w) - \lambda_1(w)J(w_1; w) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} I\right) = 0\,,$$

donde

$$L(w_1; w) - \lambda_1(w)J(w_1; w) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} I = a(w_1)\,.$$

Pondo $\tilde{L}(\xi; w) = L(\xi; w) - a(\xi)$, verificamos então (2.7), e, em qualquer circunstância, (2.8) e (2.10).

□

Observações:

1. As funções (I, J, K, L) não dependem de $\overline{w}_1$, e as fórmulas (2.4) e (2.5) fornecem para toda $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um par e-f verificando

$$\eta(w_1, \overline{w}_2) = \varphi(w_1) \quad , \quad q(\overline{w}_1, w_2) = I(\overline{w}_1, w_2)\varphi(\overline{w}_1).$$

   Quando $\varphi(\overline{w}_1) = 0$ este par é do tipo 1.

2. Ao contrário, as funções (I, J, K, L) dependem de $\overline{w}_2$, e para evitar confusão podemos denotar

$$I = I(\overline{w}_2, w) \quad , \quad J = J(\xi, \overline{w}_2; w) \quad , \quad K = K(\overline{w}_2; w) \quad , \quad L = L(\xi, \overline{w}_2; w).$$

3. Temos que $K(w_1, \overline{w}_2) = \lambda_1(w_1, \overline{w}_2)$ e $\frac{\partial L}{\partial w_1}(\xi; w_1, \overline{w}_2) = 0$. Portanto, $L(\xi, w_1, \overline{w}_2) = L(\xi; \xi, \overline{w}_2)$. De (2.7') deduzimos:

$$L(\xi, w_1, \overline{w}_2) = -\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1}(\xi; \overline{w}_2).$$

4. Temos fórmulas análogas resolvendo o problema de Goursat para uma entropia do tipo 2. Existem então, em toda generalidade, funções I_1, J_1, K_1, L_1 (que acabamos de estudar) e funções I_2, J_2, K_2, L_2.

3. Análise da Relação de Comutatividade (1.2).

Seja $R = [w_1^-, w_1^+] \times [w_2^-, w_2^+]$ o menor retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados contendo Sptν. Tomemos $\overline{w}_1 \in (w_1^-, w_1^+)$ como limite e escolhamos um par e-f (η_L, q_L) de tipo Leste e um par (η_O, q_O) de tipo Oeste, cada um de limite $\overline{w}_1$. Apliquemos (1.2) a estes pares. Como $\eta_L q_O - \eta_O q_L$ é trivialmente nulo, temos

$$\langle \nu, \eta_L \rangle \langle \nu, q_O \rangle = \langle \nu, \eta_O \rangle \langle \nu, q_L \rangle. \tag{3.1}$$

3.1. LEMA. *Podemos escolher o par (η_L, q_L) de modo que*

$$\eta_L > 0 \quad \textit{para} \quad w_1^* < w_1 \leq w_1^+,$$

$$\eta_L \equiv 0 \quad \textit{para} \quad w_1 \leq w_1^*,$$

sendo w_1^* arbitrariamente próximo de w_1^+.

PROVA: Escolhamos arbitrariamente $\overline{w}_2$ e tomemos para (η_L, q_L) o par e-f de tipo Leste, de limite $w_1^* \in [w_1^-, w_1^+]$ verificando

$$\eta_L(w_1, \overline{w}_2) = (w_1 - w_1^*)^+.$$

temos para $w_1 > w_1^*$ (omitindo o argumento w_2):

$$\eta_L(w) = I(w)(w_1 - w_1^*) + \int_{w_1^*}^{w_1} J(\xi; w)(\xi - w_1^*) d\xi.$$

Portanto,

$$|\eta_L(w) - I(w)(w_1 - w_1^*)| \leq \frac{M}{2}(w_1 - w_1^*)^2,$$

onde M majora $|J(\xi; w)|$ sobre $[w_1^*, w_1^+] \times \mathbb{R}$.

A função I, solução de (2.6') e (2.11) é positiva em toda parte:

$$I(w) \geq N > 0 \quad , \quad w \in \mathbb{R}.$$

Assim, para $w_1 > w_1^*$:

$$\eta_L(w) \geq (w_1 - w_1^*) \left(N - \frac{M}{2}(w_1 - w_1^*) \right).$$

Portanto, $\eta_L > 0$ para $w_1^* < w_1 \leq w_1^+$ desde que $0 < w_1^+ - w_1^* < \frac{2N}{M}$.

□

Graças ao lema 3.1, a relação (3.1) nos dá que

$$\langle \nu, q_O \rangle = c_1(\eta_L)\langle \nu, \eta_0 \rangle, \tag{3.2}$$

para todo par e-f de tipo Oeste, onde $c_1(\eta_L) = \frac{\langle \nu, q_L \rangle}{\langle \nu, \eta_L \rangle}$. Com efeito, $\nu \geq 0$ e a interseção do suporte de ν com $\{w; \eta_L(w) > 0\}$ é não vazio pela definição de R.

O lema 3.1 possui um análogo para os pares e-f do tipo Oeste, de modo que

$$c_1(\eta_L) = \frac{\langle \nu, q_O \rangle}{\langle \nu, \eta_O \rangle},$$

para pelo menos um par e-f de tipo Oeste, de limite $\overline{w}_1$. Deduzimos daí que $c_1(\eta_L)$ não depende do para e-f (η_L, q_L) do tipo Leste. Temos então que $c_1(\eta_L) = c_1(\overline{w}_1)$ e

$$\langle \nu, q \rangle = c_1(\overline{w}_1)\langle \nu, \eta \rangle$$

para todo par e-f de tipo Leste ou Oeste, de limite $\overline{w}_1$.

Uma nova aplicação do lema 3.1 e o fato de que (η_L, q_L) é então um par de limite w_1^* mostra que $c_1(\overline{w}_1)$ não depende de $\overline{w}_1$. Portanto, existe uma constante $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\langle \nu, q \rangle = c_1\langle \nu, \eta \rangle$ para todo par e-f de tipo Leste ou Oeste, de limite em (w_1^-, w_1^+). Fica então provado o seguinte resultado.

3.2. PROPOSIÇÃO. *Existe uma constante* $c_1 \in \mathbb{R}$ *tal que para todo par e-f* (η, q) *do tipo 1, de limite em* (w_1^-, w_1^+)*, temos*

$$\langle \nu, q \rangle = c_1 \langle \nu, \eta \rangle. \tag{3.3}$$

Observações:

1. A proposição 3.2 foi demonstrada sob a hipótese $w_1^- < w_1^+$. Ela é ainda válida se $w_1^- = w_1^+$, mas neste caso é trivial já que

$$\langle \nu, q \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \nu, \eta \rangle = 0.$$

2. Se η é uma entropia de tipo 1 de limite $\overline{w}_1 \in [w_1^-, w_1^+]$, então se seu fluxo q não está normalizado ele é constante sobre a reta $w_1 = \overline{w}_1$. Deduzimos (já que ν é uma medida de probabilidade)

$$\langle \nu, q \rangle = c_1 \langle \nu, \eta \rangle + q(\overline{w}).$$

3. Um raciocínio análogo mostra que existe uma constante $c_2 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo par e-f (η, q) do tipo 2, de limite $\overline{w}_2 \in [w_2^-, w_2^+]$, temos

$$\langle \nu, q \rangle = c_2 \langle \nu, \eta \rangle. \tag{3.4}$$

3.3. COROLÁRIO. *Se* (η, q) *é um par e-f de tipo 1,* $(\overline{\eta}, \overline{q})$ *é um outro par e-f de tipo 1 e* (η^*, q^*) *é um par e-f de tipo 2 temos:*

$$\langle \nu, \eta\overline{q} - \overline{\eta}q \rangle = 0, \tag{3.5}$$

$$\langle \nu, \eta q^* - \eta^* q \rangle = (c_2 - c_1) \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, \eta^* \rangle \tag{3.6}$$

Consideremos agora a medida $\widetilde{\nu}$, absolutamente contínua em relação a ν, definida por

$$\langle \widetilde{\nu}, h \rangle = \langle \nu, I^2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial w_1} h \rangle,$$

para toda $h \in C_b(R)$, onde I é dado por (2.6'), (2.11). Dada uma medida μ sobre o plano $w_1 w_2$, denotemos por $\pi_1 \mu$ a projeção de μ sobre o eixo w_1. Chegamos agora ao resultado mais importante deste capítulo.

3.4. Teorema. *Para todo $\alpha \in (w_1^-, w_1^+)$ temos*

$$D\pi_1\widetilde{\nu}(\alpha) = 0,$$

onde D representa a derivação em relação a medida de Lebesgue na reta .

Observação: Definindo $\widetilde{\widetilde{\nu}} = I_2^2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial w_2}\nu$ obtemos de modo análogo que

$$D\pi_2\widetilde{\widetilde{\nu}}(\beta) = 0,$$

para todo $\beta \in (w_2^-, w_2^+)$.

Prova: Seja $\alpha \in (w_1^-, w_1^+)$ e façamos $w_1^* = \alpha - \varepsilon$, $\overline{w}_1 = \alpha + \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ será feito tender a zero.

Fixemos um limite $\overline{w}_2$ e consideremos dois pares e-f de tipo 1 (η, q) e $(\overline{\eta}, \overline{q})$ definidos da maneira seguinte:

(i) (η, q) é de tipo Leste, de limite w_1^*, e $\eta(w_1, \overline{w}_2) = w_1 - w_1^*$, para $w_1 > w_1^*$.

(ii) $(\overline{\eta}, \overline{q})$ é de tipo Oeste, de limite $\overline{w}_1$, e $\overline{\eta}(w_1, \overline{w}_2) = w_1 - \overline{w}_1$, para $w_1 < \overline{w}_1$.

As expansões seguintes são imediatas e uniformes para $w_2 \in [w_2^-, w_2^+]$:

$$\eta(w) = I(w)(w_1 - w_1^*)^+ + \frac{1}{2}J(\alpha; w)\left[(w_1 - w_1^*)^+\right]^2 + O\left(\left[(w_1 - w_1^*)^+\right]^3\right),$$

$$q(w) = K(w)(w_1 - w_1^*)^+ + \frac{1}{2}L(\alpha; w)\left[(w_1 - w_1^*)^+\right]^2 + O\left(\left[(w_1 - w_1^*)^+\right]^3\right),$$

$$\overline{\eta}(w) = -I(w)(\overline{w}_1 - w_1)^+ - \frac{1}{2}J(\alpha; w)\left[(\overline{w}_1 - w_1)^+\right]^2 + O\left(\left[(\overline{w}_1 - w_1)^+\right]^3\right),$$

$$\overline{q}(w) = -K(w)(\overline{w}_1 - w_1)^+ - \frac{1}{2}J(\alpha; w)\left[(\overline{w}_1 - w_1)^+\right]^2 + O\left(\left[(\overline{w}_1 - w_1)^+\right]^3\right).$$

O suporte de $\eta\overline{q} - \overline{\eta}q$ está contido na faixa $w_1^* \le w_1 \le \overline{w}_1$, e dentro desta faixa temos:

$$(\eta\overline{q} - \overline{\eta}q)(w) = \frac{1}{2}(\overline{w}_1 - w_1^*)(\overline{w}_1 - w_1)(w_1 - w_1^*)\big(J(\alpha; w)K(w)$$

$$- L(\alpha; w)I(w)\big) + O\big((\overline{w}_1 - w_1^*)(\overline{w}_1 - w_1)(w_1 - w_1^*)\big)$$

$$= \quad \text{por } (2.6)$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{w}_1 - w_1^*)(\overline{w}_1 - w_1)(w_1 - w_1^*)I(\alpha, w_2)(\lambda_1(\alpha, w_2)J(\alpha; \alpha, w_2)$$

$$- L(\alpha; \alpha, w_2)\big) + O\big((\overline{w}_1 - w_1^*)^2(\overline{w}_1 - w_1)(w_1 - w_1^*)\big)$$

$$= \quad \text{por } (2.7)$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{w}_1 - w_1^*)(\overline{w}_1 - w_1)(w_1 - w_1^*)\left(I^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial w_1}\right)(\alpha, w_2)$$

$$+ O\big((\overline{w}_1 - w_1^*)^2(\overline{w}_1 - w_1)(w_1 - w_1^*)\big).$$

Assim, por (3.5) obtemos

$$0 = \langle\nu, (\overline{w}_1 - w_1)^+(w_1 - w_1^*)^+\left(I^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial w_1}\right)(\alpha, w_2)\rangle \tag{3.7}$$

$$+ \langle\nu, O\left((\overline{w}_1 - w_1^*)(\overline{w}_1 - w_1)^+(w_1 - w_1^*)^+\right)\rangle.$$

Dividindo a relação acima por ε^3 e fazendo estimativas óbvias chegamos a

$$\frac{1}{\varepsilon}\langle\nu, \left(I^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial w_1}\right)\chi_{\left[\alpha-\frac{\varepsilon}{2},\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right]}(w_1)\rangle \le C\langle\nu, \chi_{\left[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon\right]}(w_1)\rangle$$

para alguma constante $C > 0$. Tomando lim sup quando $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$0 \leq \overline{D}\pi_1\tilde{\nu}(\alpha) \leq C\pi_1\nu(\alpha). \tag{3.8}$$

Como o membro à direita da última desigualdade em (3.8) é finito, temos que se $\overline{D}\pi_1\tilde{\nu}(\alpha) > 0$ então necessariamente $\overline{D}\pi_1\tilde{\nu}(\alpha) < +\infty$. Agora, por (3.8) se $\overline{D}\pi_1\tilde{\nu}(\alpha) > 0$ então $\pi_1\nu(\alpha) > 0$. Como $I^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial w_1} > 0$, então segue, neste caso, que $\pi_1\tilde{\nu}(\alpha) > 0$. Mas então $\overline{D}\pi_1\tilde{\nu}(\alpha) = +\infty$, já que neste caso α é ponto singular de $\pi_1\tilde{\nu}$ em relação a medida de Lebesgue. Portanto, temos uma contradição e, assim, devemos ter $\overline{D}\pi_1\tilde{\nu}(\alpha) = 0$, i.e., $D\pi_1\tilde{\nu}(\alpha) = 0$. Fica provado o teorema.

□

Como consequência imediata do teorema acima temos o seguinte resultado.

3.5. Corolário.

$$Spt\nu \subset \left\{(w_1^-, w_2^-), (w_1^+, w_2^-), (w_1^-, w_2^+), (w_1^+, w_2^+)\right\}.$$

Prova: Do teorema 3.4 e das propriedades da derivação de medidas em relação a medida de Lebesque na reta (veja [**32**, Cap.8]), segue que $\pi_1\tilde{\nu}\left\{(w_1^-, w_1^+)\right\} = 0$, i.e., $\tilde{\nu}\left\{(w_1^-, w_1^+) \times [w_2^-, w_2^+]\right\} = 0$. Como $I^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial w_1} > 0$, pelo fato do sistema ser genuinamente não-linear, então segue que $\nu\left\{(w_1^-, w_1^+) \times [w_2^-, w_2^+]\right\} = 0$, ou seja,

$$\mathrm{Spt}\nu \subset \left\{w_1^-, w_1^+\right\} \times \left[w_2^-, w_2^+\right].$$

Analogamente, usando a observação que acompanha o enunciado do teorema 3.4, obtemos

$$\mathrm{Spt}\nu \subset \left[w_1^-, w_1^+\right] \times \left\{w_2^-, w_2^+\right\},$$

e assim fica provado o corolário.

□

Observações:

1. O análogo do teorema 3.4 na versão original de D. Serre tem por tese a afirmação de que

$$\mathrm{Spt}\nu \cap \left\{w_1 = \alpha\right\} = \emptyset, \tag{3.9}$$

para todo $\alpha \in (w_1^-, w_1^+)$. A demonstração segue exatamente a prova do teorema 3.4 até a fórmula (3.7). Chegando aí, dividimos os termos da equação por $\langle \nu, (\overline{w}_1 - w_1)^+(w_1 - w_1^*)^+\rangle$ que é sempre positivo se (3.9) não for válido e fazemos $\overline{w}_1 \to \alpha + 0$, $w_1^* \to \alpha - 0$ obtendo

$$\text{(3.10).} \qquad \lim_{\substack{\overline{w}_1 \to \alpha+0 \\ w_1^* \to \alpha-0}} \frac{\langle \nu, I^2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} (\overline{w}_1 - w_1)^+ (w_1 - w_1^*)^+ \rangle}{\langle \nu, (\overline{w}_1 - w_1)^+ (w_1 - w_1^*)^+ \rangle} = 0$$

Agora, as medidas $\mu_{\overline{w}_1, w_1^*}$ definidas sobre $\{w_1 = \alpha\}$ por

$$\langle \mu_{\overline{w}_1, w_1^*}, h \rangle = \frac{\langle \nu, h(\overline{w}_1 - w_1)^+ (w_1 - w_1^*)^+ \rangle}{\langle \nu, (\overline{w}_1 - w_1)^+ (w_1 - w_1^*)^+ \rangle},$$

para toda função contínua $h = h(w_2)$, são medidas de probabilidade. Assim, por passagem a uma subsequência se necessário sabemos que existe μ tal que $\mu_{\overline{w}_1, w_1^*} \rightharpoonup \mu$ quando $\overline{w}_1 \to \alpha + 0$ e $w_1^* \to \alpha - 0$. Como as $\mu_{\overline{w}_1, w_1^*}$ são medidas de probabilidade com suporte contido no intervalo limitado $[w_2^-, w_2^+]$, ν também será medida de probabilidade. Agora, (3.10) nos dá

$$\langle \mu, I^2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} \rangle = 0,$$

o que é uma contradição já que $I^2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} > 0$.

2. Ao contrário do que acontece na demonstração do teorema de D. Serre, na prova do teorema 3.4 não foi usado o fato do suporte de ν ser limitado. Este fato nos permite usar esta mesma técnica em alguns casos em que o suporte de ν não é necessariamente limitado, como veremos no capítulo V.

3. Aproveitamos a oportunidade para agradecer a Prof. Helena N. Lopes da UNICAMP, por ter-nos chamado a atenção para a impossibilidade de se aplicar o procedimento de D. Serre, descrito na observação 1 acima, nos casos em que o suporte de ν é ilimitado, o que nos motivou a propor a adaptação apresentada no teorema 3.4.

4. Usando-se dois pares de entropia de tipo Leste com limites tendendo a w_1^- e, depois, dois pares de entropia Oeste com limites tendendo a w_1^+, em ambos os casos supondo $w_1^- < w_1^+$ e procedendo da mesma forma que na prova do teorema 3.4, chegamos a um absurdo dado

pela conclusão $\nu(R) = 0$. Isto nos mostra que necessariamente $w_1^- = w_1^+$. Procedendo de modo análogo com entropias Sul e Norte obtemos $w_2^- = w_2^+$. Assim, chega-se a conclusão de que ν é uma medida Dirac. Ao invés de dar os detalhes desta forma, sem dúvida mais direta, de mostrar que ν é uma medida de Dirac, preferimos apresentar em seguida uma maneira indireta, baseada num resultado de D. Serre (teorema 3.6 abaixo). A razão é que o procedimento que apresentamos a seguir pode ser adaptado a casos em que há perda de não-linearidade genuína, ou hiperbolicidade estrita, ou ambos.

Numeremos os vértices de R pondo

$$A_1 = (w_1^-, w_2^-), \quad A_2 = (w_1^-, w_2^+), \quad A_3 = (w_1^+, w_2^-), \quad A_4 = (w_1^+, w_2^+).$$

O teoremos abaixo é devido a D. Serre [**35**] e mostra que ν não pode pôr massa não-nula em todos os quatro vértices.

3.6. Teorema. *Suponhamos*

$$\nu = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \delta_{A_i} \quad , \quad \alpha_i > 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 1.$$

Então uma das duas alternativas abaixo é válida:

(i) $\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} \equiv 0$ *sobre* A_1A_3 *e* A_2A_4;

(ii) $\frac{\partial \lambda_2}{\partial w_2} \equiv 0$ *sobre* A_1A_2 *e* A_3A_4.

Prova: A relação (1.2) pode ser escrita na forma

$$(3.11) \quad \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \Big\{ \big(\eta(A_i) - \eta(A_j)\big)\big(\overline{q}(A_i) - \overline{q}(A_j)\big) - \big(\overline{\eta}(A_i) - \overline{\eta}(A_j)\big)\big(q(A_i) - q(A_j)\big) \Big\} = 0.$$

Com efeito, façamos $V_i = (\eta(A_i), q(A_i))$, $\overline{V}_i = (\overline{\eta}(A_i), \overline{q}(A_i))$ e $w(V_i, V_j) = \det(V_i, V_j)$. A relação (1.2) então nos dá

$$(3.12) \qquad \sum_{i=1}^{4} \alpha_i w(V_i, \overline{V}_i) = \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j w(V_i, \overline{V}_i).$$

Como $\sum_{i=1}^{4}\alpha_i = 1$ podemos multiplicar o membro à esquerda de (3.12) por $\sum_{i=1}^{4}\alpha_i$ sem alterá-lo, obtendo assim

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4}\alpha_i w(V_i,\overline{V}_i)\right) = \sum_{ij}\alpha_i\alpha_j w(V_i,\overline{V}_j).$$

Passando os somatórios para um mesmo lado da equação e rearranjando os termos, obtemos

$$\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j\left(w(V_i,\overline{V}_i) + w(V_j,\overline{V}_j) - w(V_i,\overline{V}_j) - w(V_j,\overline{V}_i)\right) = 0.$$

Daí, usando-se as propriedades do determinante, segue

$$\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j w\left(V_i - V_j, \overline{V}_i - \overline{V}_j\right) = 0\,,$$

que é a equação (3.11).

Seja θ a aplicação definida sobre o conjunto dos pares e-f, a valores em $\mathbb{R}^8$, por :

$$\theta(\eta, q) = (\eta(A_1), \ldots, \eta(A_4), q(A_1), \ldots, q(A_4))\,.$$

A imagem de θ é um subespaço vetorial $X \subset \mathbb{R}^8$.

Denotemos um ponto genérico do $\mathbb{R}^8$ por (x,y), com $x \in \mathbb{R}^4$, $y \in \mathbb{R}^4$. Seja f a forma bilinear definida sobre $\mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8$ por

$$f\left((x,y),(\overline{x},\overline{y})\right) = \sum_{i,j=1}^{4}\alpha_i\alpha_j\left\{(x_i - x_j)(\overline{y}_i - \overline{y}_j) - (\overline{x}_i - \overline{x}_j)(y_i - y_j)\right\}.$$

Esta forma é anti-simétrica. Afirmamos que o posto de f é igual 6, ou, o que é equivalente, a dimensão do núcleo de f é igual a 2. Seja $T\colon \mathbb{R}^8 \to (\mathbb{R}^2)^{16}$ dada por $T(x,y) = \left\{(x_i - x_j, y_i - y_j)\right\}_{i,j=1}^{4}$. Consideremos também o isomorfismo $A : (\mathbb{R}^2)^{16} \to (\mathbb{R}^2)^{16}$ dado por

$$A\left\{\,(a_{ij}, b_{ij})\,\right\}_{i,j} = \left\{\alpha_i\alpha_j\,(-b_{ij}, a_{ij})\,\right\}.$$

É fácil ver então que

$$f\left((x,y),(\overline{x},\overline{y})\right) = \langle AT(x,y), T(\overline{x},\overline{y})\rangle,$$

onde $\langle , \rangle$ é o produto escalar canônico de $(\mathbb{R}^2)^{16} \cong \mathbb{R}^{32}$.

Portanto, temos (levando em conta que A é $1-1$ sobre a imagem de T)

$$N(f) = N(T)$$

$$= \left\{(x,y) | T(x,y) = \{(0,0)\}_{i,j} \in (\mathbb{R}^2)^{16}\right\}$$

$$= \{(x,y) | x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \text{ e } y_1 = y_2 = y_3 = y_4\}$$

$$= \text{espaço gerado por } \{(1,1,1,1,0,0,0,0),(0,0,0,0,1,1,1,1)\}\ .$$

Agora, se X é a imagem da aplicação θ definida acima, então $f(a,b) = 0$ para todo $(a,b) \in X$. Afirmamos que

$$\dim X \leq 5.$$

Com efeito, seja $B = T^* A T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$. Temos,

$$\dim(BX) \geq \dim X - 2,$$

uma vez que $\dim N(B) = 2$. Agora, claramente, $BX \subset X^{\perp}$. Isto implica que

$$\dim(BX) \leq 8 - \dim X.$$

Logo,

$$\dim X - 2 \leq 8 - \dim X \Rightarrow \dim X \leq 5.$$

Seja $\ell \in \{1,2,3,4\}$. As formas lineares $(\eta, q) \longmapsto \eta(A_i), (\eta, q) \longmapsto q(A_i), i \neq \ell$, em número de 6, são então linearmente dependentes sobre o conjunto dos pares e-f. Existem, portanto, números $a_{i\ell}, b_{i\ell}, i \neq \ell$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{i \neq \ell} ((a_{i\ell} q(A_i) + b_{i\ell} \eta(A_i)) = 0, 1 \leq \ell \leq 4,$$

para todo par e-f (η, q).

Tomemos inicialmente um par de tipo Leste com limite w_1^-. Então $\eta(A_1) = q(A_1) = \eta(A_2) = q(A_2) = 0$.

Para $\ell = 4$ obtemos $a_{34}q(A_3) + b_{34}\eta(A_3) = 0$, ou seja,

$$b_{34}\eta(A_3) = -a_{34}\int_{A_1}^{A_3} \frac{\partial q}{\partial w_1} dw_1 = -a_{34}\int_{A_1}^{A_3} \lambda_1 \frac{\partial \eta}{\partial w_1} dw_1,$$

$$\big(b_{34} + a_{34}\lambda_1(A_3)\big)\eta(A_3) = a_{34}\int_{A_1}^{A_3} \frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1}\,\eta dw_1.$$

Como a restrição de η a A_1A_3 é arbritária, desde que $\eta(A_1) = 0$ segue que

$$a_{34}\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} = 0 \quad \text{sobre} \quad A_1A_3,$$

(3.13)

$$b_{34} + a_{34}\lambda_1(A_3) = 0.$$

Da mesma forma, utilizando um par de tipo Norte e limite w_2^-, obtemos

$$a_{24}\frac{\partial \lambda_2}{\partial w_2} = 0 \quad \text{sobre} \quad A_1A_2,$$

(3.14)

$$b_{24} + a_{24}\lambda_2(A_2) = 0.$$

Agora, suponhamos que $\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} \not\equiv 0$ sobre A_1A_3 e $\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} \not\equiv 0$ sobre A_1A_2. Então (3.13) e (3.14) implicam $a_{24} = b_{24} = a_{34} = b_{34} = 0$ e resulta que

$$a_{14}\eta(A_1) + b_{14}q(A_1) = 0$$

para todo par e-f, o que é absurdo.

Temos então que $\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1} \equiv 0$ sobre A_1A_3 ou $\frac{\partial \lambda_2}{\partial w_2} \equiv 0$ sobre A_1A_2 . Fazendo o índice ℓ variar obtemos o resultado desejado.

□

Assim, o resultado acima e o corolário 3.5 nos dizem que, de fato, a medida ν deve estar concentrada em, no máximo, 3 vértices do retângulo R. Agora fica fácil de mostrar que ν é uma medida de Dirac.

Com efeito, suponhamos, para fixar idéias, que

$$\mathrm{Spt}\nu \in \{A_1, A_2, A_3\}.$$

Tomemos dois pares e-f do tipo Leste com limite w_1^- e dados sobre a reta $w_2 = w_2^-$, (η, q), $(\overline{\eta}, \overline{q})$, satisfazendo $\eta(A_3)\overline{q}(A_3) - \overline{\eta}(A_3)q(A_3) \neq 0$. Usando a relação (1.2) obtemos

$$\alpha_3\left(\eta(A_3)\overline{q}(A_3) - \overline{\eta}(A_3)q(A_3)\right) = \alpha_3^2\left(\eta(A_3)\overline{q}(A_3) - \overline{\eta}(A_3)q(A_3)\right),$$

donde $\alpha_3 = 1$ ou $\alpha_3 = 0$. Se $\alpha_3 = 1$ ν está concentrada apenas em A_3 e é, portanto, uma medida de Dirac. Se $\alpha_3 = 0$ ν está concentrada em A_1 e A_2. Neste último caso, consideramos dois pares de tipo Norte com limite w_2^- e dados sobre a reta $w_1 = w_1^-$, (η, q), $(\overline{\eta}, \overline{q})$, satisfazendo $\eta(A_2)\overline{q}(A_2) - \overline{\eta}(A_2)q(A_2) \neq 0$. Novamente, usando a relação (1.2) obtemos

$$\alpha_2\left(\eta(A_2)\overline{q}(A_2) - \overline{\eta}(A_2)q(A_2)\right) = \alpha_2^2\left(\eta(A_2)\overline{q}(A_2) - \overline{\eta}(A_2)q(A_2)\right),$$

donde $\alpha_2 = 1$ ou $\alpha_2 = 0$. Em qualquer um dos dois casos temos que ν é uma medida de Dirac.

Capítulo IV

Sistemas Não Estritamente Hiperbólicos de Tipo Conjugado

1. Introdução.

Neste capítulo, bem como nos seguintes, estaremos interessados na aplicação da teoria apresentada nos capítulos anteriores a sistemas não–estritamente hiperbólicos.

Começaremos com a apresentação de uma classe de sistemas para os quais a determinação de invariantes de Riemann pode ser feita mais facilmente. Para isto, consideremos um sistema da forma

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}z + \dfrac{\partial}{\partial x}f(z,w) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}w + \dfrac{\partial}{\partial x}g(z,w) = 0 \end{cases}$$

onde $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ e (z,w), $(f,g) \in F^2$, com $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A discussão que faremos no restante desta seção será essencialmente heurística mas nos conduzirá a uma série de observação interessantes.

DEFINIÇÃO. *Diremos que (1.1) é de tipo conjugado se*

$$(1.2) \qquad \frac{\partial}{\partial z}f = \frac{\partial}{\partial w}g$$

e

$$(1.3) \qquad \frac{\partial}{\partial w}f \Big/ \frac{\partial}{\partial z}g = \zeta^2(w) / \xi^2(z)$$

para certas funções $\zeta(w)$, $\xi(z)$ definidas num domínio de F e tomando valores em F.

Para esses sistemas a procura de invariantes de Riemann se torna mais fácil. Isto fica mais claro quando usamos o método para obter tais invariantes descrito em [8]. Com efeito, escrevamos (1.1) na forma

$$z_t + f_z z_x + f_w w_x = 0, \tag{1.4}$$

$$w_t + g_z z_x + g_w w_x = 0. \tag{1.5}$$

Multiplicando (1.5) por λ e somando com (1.4) obtemos, após rearranjar os termos

$$z_t + (f_z + \lambda g_z) z_x + \lambda w_t + (f_w + \lambda g_w) w_x = 0. \tag{1.6}$$

Assim, para que na expressão (1.6) tenhamos derivadas em apenas uma direção, que denotamos por γ, deve ocorrer:

$$x_\gamma = (f_z + \lambda g_z) t_\gamma, \tag{1.7}$$

$$\lambda x_\gamma = (f_w + \lambda g_w) t_\gamma; \tag{1.8}$$

ou seja,

$$\lambda (f_z + \lambda g_z) = f_w + \lambda g_w. \tag{1.9}$$

As condições (1.2), (1.3) implicam então

$$\lambda = \pm \zeta(w) / \xi(z).$$

Ponhamos

$$\lambda^+ = \zeta(w) / \xi(z), \qquad \lambda^- = -\zeta(w) / \xi(z), \tag{1.10}$$

denotando por α o campo de direções associado a λ^+ e β aquele associado a λ^-. Os autovalores de (1.1), nesse caso, são dados por

$$\lambda_1 = f_z + \lambda^- g_z, \qquad \lambda_2 = f_z + \lambda^+ g_z. \tag{1.11}$$

Especificando em (1.7) $\lambda = \lambda^-$, $\gamma = \beta$ e $\lambda = \lambda^+$, $\gamma = \alpha$, respectivamente, obtemos

$$x_\beta = \lambda_1 t_\beta \,, \tag{1.12}$$

$$x_\alpha = \lambda_2 t_\alpha \,. \tag{1.13}$$

Se supusermos $j = t_\alpha x_\beta - t_\beta x_\alpha \neq 0$, obtemos, multiplicando (1.12) e (1.13) por j^{-1},

$$\alpha_t + \lambda_1 \alpha_x = 0 \,,$$

$$\beta_t + \lambda_2 \beta_x = 0 \,,$$

o que mostra que (α, β) é um par de invariantes de Riemann para (1.1), i.e., as funções α, β satisfazem

$${}^t\nabla\alpha \, \nabla F = \lambda_1 \, {}^t\nabla\alpha \,,$$

$${}^t\nabla\beta \, \nabla F = \lambda_2 \, {}^t\nabla\beta \,,$$

onde pomos $F = (f, g)$. A equação (1.6) para $\lambda = \lambda^+$ e $\lambda = \lambda^-$, respectivamente, fornece

$$\begin{aligned} z_\alpha + \frac{\zeta(w)}{\xi(z)} w_\alpha &= 0 \,, \\ z_\beta - \frac{\zeta(w)}{\xi(z)} w_\beta &= 0 \,. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Definimos

$$\widetilde{z} = \int^z \xi(z) dz \,, \qquad \widetilde{w} = \int^w \zeta(w) dw \,.$$

Assim, (1.14) se torna

$$\begin{aligned} \widetilde{z}_\alpha + \widetilde{w}_\alpha &= 0 \,, \\ \widetilde{z}_\beta - \widetilde{w}_\beta &= 0 \,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Agora, supondo que $\widetilde{j} = \widetilde{x}_\alpha \widetilde{w}_\beta - \widetilde{z}_\beta \widetilde{w}_\alpha \neq 0$ e multiplicando cada equação em (1.15) por $\widetilde{j}^{-1}$ chegamos a

$$\beta_{\widetilde{w}} - \beta_{\widetilde{z}} = 0\,,$$

$$\alpha_{\widetilde{w}} + \alpha_{\widetilde{z}} = 0\,.$$

Portanto, obtemos

$$\alpha = \rho_1(\widetilde{z} - \widetilde{w})\,,$$

$$\beta = \rho_2(\widetilde{z} + \widetilde{w})\,,$$

donde $\rho_1\,,\,\rho_2$ representam quaisquer funções de uma variável.

Exemplos

Ex.1. Os 2×2 sistemas da forma

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0 \\ u_t - p(v)_x = 0\,, \end{cases}$$

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$, englobam, como vimos no capítulo II, os sistemas da dinâmica dos gases isentrópicos em coordenadas Lagrangeanas, com $p(v) = -k^2 v^{-\gamma}$, k e v constantes, $\gamma > 1$, no caso dos gases politrópicos, e os sistemas da elasticidade não-linear unidimensional, onde, geralmente $p'(v) > 0$ e $v \cdot p''(v) > 0\,(\text{ou} < 0)$ se $v \neq 0$. É imediato ver que eles são de tipo conjugado com $F = \mathbb{R}$.

Ex.2. Consideremos os sistemas 2×2

$$z_t + (\overline{z}^\gamma)_x = 0, \tag{1.16}$$

onde $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $z = u + iv \in \mathbb{C}$ e $\gamma \geq 1$ é uma constante. Em coordenadas (u, v) os sistemas (1.16) são exemplos de sistema 2×2 não–estritamente hiperbólicos, como veremos mais adiante. O caso $\gamma = 2$ nos dá o sistema quadrático

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2)_x = 0 \\ \\ v_t - (2uv)_x = 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Vejamos o que acontece quando aplicamos a operação de conjugação a toda a equação (1.16), obtendo uma nova equação, e juntamos estas duas equações fazendo $\overline{z} = w$. Obtemos o seguinte sistema nas variáveis $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

$$(1.18) \qquad \begin{aligned} z_t + (w^\gamma)_x &= 0\,, \\ w_t + (z^\gamma)_x &= 0\,. \end{aligned}$$

Este sistema é de tipo conjugado, pois

$$f_z = 0 = g_w\,,$$

e

$$f_w \,/\, g_w = \gamma w^{\gamma-1}/\gamma z^{\gamma-1} = (\,w^{\frac{\gamma-1}{2}}\,)^2 \,/\, (\,z^{\frac{\gamma-1}{2}}\,)^2\,.$$

Assim neste caso temos

$$\xi(z) = z^{\frac{\gamma-1}{2}}\,, \qquad \zeta(w) = w^{\frac{\gamma-1}{2}}\,.$$

e, portanto,

$$\widetilde{z} = \frac{2}{\gamma+1} z^{\frac{\gamma+1}{2}}\,, \qquad \widetilde{w} = \frac{2}{\gamma+1} w^{\frac{\gamma+1}{2}}\,.$$

Façamos

$$\alpha = \frac{(\gamma+1)^2}{16}(\widetilde{z} - \widetilde{w})^2 = \frac{1}{4}(z^{\frac{\gamma+1}{2}} - w^{\frac{\gamma+1}{2}})^2\,,$$

$$\beta = \frac{(\gamma+1)^2}{16}(\widetilde{z} + \widetilde{w})^2 = \frac{1}{4}(z^{\frac{\gamma+1}{2}} + w^{\frac{\gamma+1}{2}})^2\,.$$

Os autovalores de (1.18) são

$$\lambda_1 = w^{\frac{\gamma-1}{2}} z^{\frac{\gamma-1}{2}} = -c(\gamma)(\alpha - \beta)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = -\lambda_2\,,$$

onde $c(\gamma)$ é uma constante positiva dependendo apenas de γ.

A equação geral da entropia nas coordenadas (α, β) é

$$(1.19) \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\{\frac{\partial\lambda_2}{\partial\alpha}\frac{\partial\eta}{\partial\beta} - \frac{\partial\lambda_1}{\partial\beta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\} = 0.$$

Substituindo no caso do sistema (1.18) obtemos

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{k}{\alpha-\beta}\{\frac{\partial\eta}{\partial\beta}-\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\}=0. \tag{1.20}$$

com $k=\frac{1}{2}\frac{\gamma-3}{\gamma-1}$, equação que é conhecida como Equação de Euler–Poisson–Darboux.

Se pusermos de volta $w=\overline{z}$, obtemos os invariantes de Riemann reais para (1.16)

$$\alpha = -r^{\gamma+1}\sin^{\frac{\gamma+1}{2}}\theta,$$

$$\beta = r^{\gamma+1}\cos^{\frac{\gamma+1}{2}}\theta,$$

onde r e θ são coordenadas polares dadas por $u=r\cos\theta$, $v=r\sin\theta$ e $z=u+iv$.

A solução do problema de Cauchy para o sistema (1.16) é apresentada em [**33**], [**15**] e será o tema do próximo capítulo.

Ex.3. Em geral, se tivermos um sistema 2×2 de leis de conservação nas variáveis dependentes (u,v) podemos escrevê–lo nas variáveis complexas $z=u+iv$ e $\overline{z}=u-iv$, de modo que o mesmo aparecerá na forma

$$z_t+f(z,\overline{z})_x=0. \tag{1.21}$$

Se aplicarmos a conjugação a (1.21), definirmos $g(z,\overline{z})=\overline{f(z,\overline{z})}$ e denotarmos $w=\overline{z}$, obtemos um sistema como (1.1) com $(z,w)\in\mathbb{C}^2$. Observamos que, se o sistema original nas variáveis reais (u,v) é simétrico, então o sistema em $(z,w)\in\mathbb{C}^2$, obtido do modo que acabamos de descrever, satisfaz (1.2).

Um exemplo de esta situação é fornecido pelo seguinte tipo de sistema que aparece, por exemplo, no estudo de vibrações de cordas elásticas (veja [**23**]):

$$\begin{aligned} u_t+(\phi(r^2)u)_x&=0,\\ v_t+(\phi(r^2)v)_x&=0, \end{aligned} \tag{1.22}$$

onde $r^2=u^2+v^2$ e $\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Seguindo a receita dada acima transformamos (1.22) no sistema em varáveis complexas (z,w)

$$\begin{aligned} z_t+(\phi(zw)z)_x&=0,\\ w_t+(\phi(zw)w)_x&=0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Neste caso obtemos

$$f_z = \phi'(zw)zw + \phi(zw) = g_w,$$

e

$$f_w / g_z = \phi'(zw)\, z^2 / \phi'(zw)\, w^2 = z^2 / w^2 .$$

Portanto, (1.23) é um sistema do tipo conjugado com

$$\xi(z) = \frac{1}{z}, \qquad \zeta(w) = \frac{1}{w}.$$

Assim temos

$$\widetilde{z} = \log z, \qquad \widetilde{w} = \log w .$$

Façamos

$$\alpha = -i(\widetilde{z} - \widetilde{w}) = -i \log\frac{z}{w},$$

$$\beta = \exp(\widetilde{z} + \widetilde{w}) = \exp\log zw = zw .$$

Assim,

$$\lambda_1 = 2\phi'(zw)\, zw + \phi(zw) = 2\phi'(\beta)\,\beta + \phi(\beta),$$

e

$$\lambda_2 = \phi(zw) = \phi(\beta).$$

Como vemos, ambos os autovalores de (1.23) dependem de somente um dos invariantes de Riemann. Em particular, o primeiro campo, correspondente a λ_1, é linearmente degenerado, isto é,

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha} \equiv 0$$

Estes fatos continuam válidos quando pomos de volta $w = \overline{z}$, obtendo assim os invariantes para (1.22)

$$\alpha = \theta, \quad \beta = r^2 .$$

Esta situação torna particularmente fácil a solução de problema de Cauchy para (1.22) com o uso da teoria da compacidade compensada (veja [4], onde também se faz o estudo da propagação de oscilações).

Na próxima seção vamos analisar um outro exemplo de sistema de tipo conjugado para o qual o problema de Cauchy será estudado.

2. O Problema de Cauchy para os Sistemas $z_t + \left(z\overline{z}^{\gamma-1} + \frac{z^\gamma}{\gamma}\right)_x = 0$.

Aqui estudamos o problema de Cauchy para os sistemas

$$z_t + \left(z\overline{z}^{\gamma-1} + \frac{z^\gamma}{\gamma}\right)_x = 0. \tag{2.1}$$

onde $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $z = u + iv \in \mathbb{C}$, no caso $2 \leq \gamma \leq 3$. Os resultados desta seção se encontram em [**16**].

Se fizermos $\gamma = 2$ em (2.1) obtemos o sistema quadrático

$$\begin{cases} u_t + (\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2)_x = 0 \\ v_t + (uv)_x = 0 \end{cases} \tag{2.1'}$$

cujo problema de Cauchy foi resolvido por P.T. Kan em [**22**], usando a teoria da compacidade compensada, com método cuja extensão aqui apresentaremos, para a análise do problema de Cauhy para o sistema (2.1) com γ variando no intervalo $[2,3]$. Junto com (2.1) consideremos o seguinte dado inicial

$$z(x,0) = z_0(x), \tag{2.2}$$

sobre o qual imporemos algumas restrições mais adiante.

Como nos exemplos 2 e 3 da seção anterior, tomando o conjugado em (2.1) e fazendo $w = \overline{z}$, obtemos um sistema como (1.1) com $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ e

$$\begin{aligned} f(z,w) &= w^{\gamma-1}z + \frac{z^\gamma}{\gamma}, \\ g(z,w) &= z^{\gamma-1}w + \frac{w^\gamma}{\gamma}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Temos

$$\frac{\partial}{\partial z} f = w^{\gamma-1} + z^{\gamma-1} = \frac{\partial}{\partial w} g.$$

e

$$\frac{\partial}{\partial w} f \,/\, \frac{\partial}{\partial z} g = (\gamma-1) w^{\gamma-2} z \,/\, (\gamma-1) z^{\gamma-2} w = w^{\gamma-3} \,/\, z^{\gamma-3}.$$

Assim, o sistema (2.1) é do tipo conjugado com

$$\xi(z) = z^{\frac{\gamma-3}{2}}, \qquad \zeta(w) = w^{\frac{\gamma-3}{2}}.$$

Para $\gamma > 1$ temos

$$\widetilde{z} = \frac{2}{\gamma-1} z^{\frac{\gamma-1}{2}}, \qquad \widetilde{w} = \frac{2}{\gamma-1} w^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

Façamos

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(\gamma-1)^2}{16}(\widetilde{z} - \widetilde{w})^2 = \frac{1}{4}(z^{\frac{\gamma-1}{2}} - w^{\frac{\gamma-1}{2}})^2, \\ \beta &= \frac{(\gamma-1)^2}{16}(\widetilde{z} + \widetilde{w})^2 = \frac{1}{4}(z^{\frac{\gamma-1}{2}} + w^{\frac{\gamma-1}{2}})^2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Quanto aos autovalores temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= f_z - \sqrt{f_w g_z} = w^{\gamma-1} + z^{\gamma-1} - (\gamma-1) w^{\frac{\gamma-1}{2}} z^{\frac{\gamma-1}{2}} \\ &= 2(\alpha+\beta) + (\gamma-1)(\alpha-\beta) = (\gamma+1)\alpha - (\gamma-3)\beta. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\lambda_2 = (\gamma+1)\beta - (\gamma-3)\alpha. \tag{2.5}$$

A equação geral de entropia (1.19), neste caso é uma Euler–Poisson–Darboux

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{k}{\alpha-\beta}\{\frac{\partial\eta}{\partial\beta} - \frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\} = 0. \tag{2.6}$$

com $k = \frac{1}{2}\frac{\gamma-3}{\gamma-1}$.

Pondo de volta $w = \overline{z}$ obtemos os invariantes de Riemann reais para o sistema (2.1):

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -r^{\gamma-1}\sin^2\frac{\gamma-1}{2}\theta\,, \\
\beta &= r^{\gamma-1}\cos^2\frac{\gamma-1}{2}\theta\,,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

onde r, θ, são as coordenadas polares para $z = u + iv$.

Motivados pela formula dos invariantes em (2.7) vamos procurar restringir nosso problema ao cone

$$
K \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \ \arg(z) \leq \frac{\pi}{\gamma-1}\}\,,
\tag{2.8}
$$

onde o par de invariantes (α,β) é $1-1$ tomando valores no segundo quadrante do plano $\mathbb{R}^2$ $(\alpha \leq 0,\, \beta \geq 0)$.

Supomos então que $z_0(x)$ toma valores em K, q.t.p. $x \in \mathbb{R}$. Além disso, assumimos $z_0 \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}^2)$. Em suma, impomos a condições

$$
z_0 \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}^2)\,, \quad z_0(x) \in K \ \text{ q.t.p. } x \in \mathbb{R}\,.
\tag{2.9}
$$

Vamos resolver o problema (2.1) , (2.2), para $2 \leq \gamma \leq 3$, usando o método da viscosidade nula (regularização parabólica) com o auxílio da teoria da compacidade compensada. Assim, estudamos a convergência das soluções $z^\varepsilon(x,\, t)$ dos sistemas parabólicos

$$
\frac{\partial}{\partial t}z + \frac{\partial}{\partial x}(z\,\overline{z}^{\gamma-1} + \frac{z^\gamma}{\gamma}) = \varepsilon\, z_{xx}\,,
\tag{2.10}
$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Vamos esboçar, inicialmente, a demonstração da existência de uma seqüência de funções $\{z^\varepsilon\}$, soluções do problema (2.10), (2.2) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, uniformemente limitadas em $L^\infty(\mathbb{R}\times;\mathbb{R}^2)$, quando $\varepsilon \to 0$.

A construção da solução global para o problema (2.10), (2.2) segue o esquema geral visto na seção 3 do capítulo II. De início é aconselhável perturbarmos também o dado inicial, jogando–o inteiramente no interior do cone K, adicionando ao mesmo o vetor constante

εV, onde V é um vetor apontando para o interior de K. Podemos também, por meio de uma regularização (via um "mollificador", por exemplo) supor que o novo dado inicial z_0^ε é suave.

Começamos obtendo uma solução local com o uso do teorema 3.2, capítulo II. Para isto estendemos $F(z) = z\bar{z}^{\gamma-1} + \frac{z^\gamma}{\gamma}$, definida desta forma no cone K, como uma função C^2 em todo o plano.

Consideremos as regiões

$$B_i \equiv \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid G_i(u,v) \leq 0\}\ ,\ i = 1,2,3,4\,,$$

onde

$$G_1(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} -v, \qquad G_2(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} -v + (\tan\frac{\pi}{\gamma-1})u,$$

$$G_3(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha(u,v) - c_1 \quad \text{e} \quad G_4(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(u,v) - c_2\,.$$

com α, β dados em (2.7) e c_1, c_2 constantes positivas. Para $2 \leq \gamma \leq 3$ as funções G_i satisfazem as hipóteses (H2) e (H3) do teorema 3.5, capítulo II, sobre regiões invariantes. A região

$$B = \bigcap_{i=1}^{4} B_i$$

será, então, uma região invariante limitada para o problema (2.10), (2.2), desde que a solução $z^\varepsilon(x,t)$ seja suficientemente regular no intervalo $[0,T]$ onde está definida, isto é, desde que possamos comprovar a hipótese (H1) do teorema 3.5, capítulo II. Isto não é tão imediato uma vez que a função de fluxo $F(z)$ de (2.10) é apenas C^2.

A comprovação de (H1) é obtida provando-se que a solução local $z(t)$ de (2.10), (2.2) satisfaz $z(t) \in W^{2,2}(\mathbb{R})$, para $t \in [0,T]$ e $z(t)$ é uniformemente Hölder contínua em $[0,T]$ em relação a variável t. Isto se faz de modo simples, porém evitaremos entrar em detalhes aqui (veja [16]).

Uma vez que conseguimos uma região invariante limitada para (2.10), independente de ε, podemos estender a solução local de (2.10), (2.2) a uma solução global e assim obtemos uma seqüência $\{z^\varepsilon\}$ de soluções de (2.10), (2.2) indexadas por ε, uniformemente limitadas em $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^2)$.

A demonstração de que para qualquer par e–f (η, q), C^2, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(z^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}q(z^\varepsilon) \in \{\text{compacto de } W^{-1,2}_{\text{loc}}\} \tag{2.11}$$

se faz do mesmo modo como foi exposto na seção 3 do capítulo II. Uma observação importante neste ponto é que o sistema (2.1) sendo simétrico (i.e ∇F é uma matriz simétrica) é, por isso, dotado da entropia estritamente convexa

$$\eta_*(u, v) = u^2 + v^2\,, \tag{2.12}$$

(veja Lax [**26**]).

Assim, por passagem a uma subseqüência se necessário, podemos considerar a família parametrizada de medidas de Young $\nu_{x,t}$, associada a $\{z^\varepsilon\}$. Vamos provar que $\nu_{x,t}$ é uma medida de Dirac para q.t.p. $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

3. Entropias para (2.1).

O estudo das entropias para o sistema (2.1), que faremos aqui, seguindo [**33**], baseado na análise feita por P.T. Kan em [**22**] para o sistema (1.17), é bastante técnico e, com alguma justiça, pode ser classificado como enfadonho. A razão de o fazermos em detalhes é que ele será importante também para o problema que trataremos no próximo capítulo.

A análise das medidas de Young que será feita na próxima seção seguirá, essencialmente, o método de D. Serre visto no capítulo anterior. Para isto, vamos resolver o problema de Goursat para a equação das entropias (2.6) e procurar obter fórmulas integrais semelhantes às obtidas por Serre, no caso de sistemas estritamente hiperbólicos, para entropias do tipo Leste, Oeste, Sul e Norte, definidas no capítulo anterior.

Inicialmente, observemos que os invariantes de Riemann α, β satisfazem $\alpha(u,v) \le 0 \le \beta(u, v)$, $\forall\,(u, v) \in K$. Logo, precisamos nos preocupar apenas em conhecer o comportamento das entropias no quadrante $\alpha \le 0 \le \beta$. Os limites α^* das entropias de tipo 1 e β^*

das entropias de tipo 2 que aqui nos interessam devem, portanto, satisfazer $\alpha^* \leq 0 \leq \beta^*$. Seja

$$Q = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \leq 0 \leq \beta\}.$$

O estudo da regularidade em Q das entropias de tipo Oeste, com limite $\alpha^* < 0$ e dados em $\beta = \beta^* \geq 0$, e das entropias de tipo Norte, com limite $\beta^* > 0$ e dados em $\alpha = \alpha^* \leq 0$, não traz qualquer dificuldade já que a equação (2.6) é perfeitamente regular em $Q \cap \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \leq \alpha^* < 0\}$ e $Q \cap \{(\alpha,\beta) \mid \beta \geq \beta^* > 0\}$. A dificuldade aparece no estudo das entropias Leste e Sul, por causa da singularidade nos coeficientes de (2.6) no ponto $(0,0) \in Q$. Vamos passar ao estudo das entropias de tipo Leste; o estudo das de tipo Sul se faz de modo inteiramente análogo.

Para fixar idéias estudaremos as entropias de tipo Leste com limite $\alpha^* < 0$ e dados em $\beta = 0$. Estas entropias são soluções do problema

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{k}{\beta - \alpha}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\beta} - \frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right) = 0 \tag{3.1}$$

$$\eta(\alpha^*,\beta) = 0\,,\ \eta(\alpha, 0) = \phi(\alpha)\ , \tag{3.2}$$

com $\phi(\alpha) = 0$, par $\alpha \leq \alpha^*$.

Seja $\delta > 0$ arbitrariamente pequeno, satisfazendo $-\delta > \alpha^*$. Pedimos que ϕ em (3.2) satisfaça, $\phi(\alpha) = 0$ se $-\delta \leq \alpha \leq 0$. Mais abaixo imporemos ainda condições integrais sobre ϕ.

Usando o método de Riemann para resolver o problema (3.1), (3.2) obtemos (veja [**37**])

$$\begin{aligned}\eta(\alpha,\beta) &= \eta(\alpha^*,0)R(\alpha^*,0,\alpha^*,0)\\ &\quad + \int_{(\alpha^*,0)}^{(\alpha^*,\beta)} \left(\eta_\beta - \frac{k}{\alpha-\beta}\eta\right) |_{\alpha=\alpha^*} R\, d\beta\\ &\quad + \int_{(\alpha^*,0)}^{(\alpha,0)} \left(\eta_\alpha - \frac{k}{\alpha-\beta}\eta\right) |_{\beta=0}\, R\, d\alpha\,,\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $R = R(x, y, \alpha, \beta)$ satisfaz

$$R_{\alpha\beta} + \frac{k}{\alpha - \beta}(R_\alpha - R_\beta) = 0$$

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{aligned} R(\alpha, 0, \alpha, 0) &= 1 \\ R_\alpha(\alpha^*, \beta, \alpha, \beta) &= \frac{-k}{\beta - \alpha^*} R(\alpha, 0, \alpha, \beta) \\ R_\beta(\alpha, 0, \alpha, \beta) &= \frac{-k}{\alpha} R(\alpha^*, \beta, \alpha, \beta) \end{aligned}$$

Resolvendo as duas últimas equações em (3.4), obtemos

$$\text{(3.5)} \qquad \begin{aligned} R_\alpha(\alpha^*, \beta, \alpha, \beta) &= \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha^*}\right)^{-k}, \\ R(\alpha, 0, \alpha, \beta) &= \left(\frac{\beta - \alpha}{-\alpha}\right)^{-k}. \end{aligned}$$

Agora façamos

$$R(x, y, \alpha, \beta) = \left(\frac{\beta - \alpha}{y - x}\right)^{-k} H(\sigma),$$

onde

$$H(0) = 1,$$

$$\sigma = \frac{(\beta - y)(\alpha - x)}{(y - x)(\beta - \alpha)}.$$

Notamos que R, dado na forma acima, satisfaz (3.5). Substituindo estas expressões em (3.4), obtemos a seguinte equação para H:

$$\text{(3.6)} \qquad \sigma(\sigma - 1)H''(\sigma) + (1 - 2\sigma)H(\sigma) - k(1 - k)H(\sigma) = 0,$$

$$\text{(3.7)} \qquad H(0) = 1.$$

A equação (3.6) é da forma

$$\sigma(\sigma - 1)\frac{d^2}{d\sigma^2} v + \{c - (a + b + 1)\sigma\} \frac{d}{d\sigma} v - abv = 0,$$

qu é conhecida como *equação hipergeométrica.* Ela possui três pontos regulares $\sigma = 0, 1, \infty$, sendo os demais ordinários. A solução analítica em $|\sigma| < 1$ é a *função hipergeométrica de Riemann* $F(a, b, c; \sigma)$, que em $|\sigma| < 1$ é representada pela série

$$1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c}\sigma + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}\sigma^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)}\sigma^3 + \dots$$

(veja [**46**] capítulos X e XIV).

Portanto a única solução de (3.6), (3.7) é

$$H(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} F(1 - k, k; 1; \sigma) \tag{3.8}$$

que em $|\sigma| < 1$ é representada pela série

$$\begin{aligned} 1 + \frac{(1-k)k}{1 \cdot 1}\sigma + \frac{(1-k)(2-k)k(k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}\sigma^2 \\ + \frac{(1-k)(2-k)(3-k)k(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}\sigma^3 + \cdots \end{aligned} \tag{3.9}$$

Assim, usando (3.3) e os dados $\eta(\alpha^*, \beta) = 0$, $\eta(\alpha, 0) = \phi(\alpha)$, obtemos a representação integral

$$\eta(\alpha, \beta) = \int_{\alpha^*}^{\alpha} \left(\frac{\beta - \alpha}{-x}\right)^{-k} H\left(\frac{(\alpha - x)\beta}{-x(\beta - \alpha)}\right) \left(\phi'(x) + \frac{k}{x}\phi(x)\right) dx\,. \tag{3.10}$$

Seja

$$\sigma = \frac{(\alpha - x)\beta}{-x(\beta - \alpha)}\,. \tag{3.11}$$

Recordemos que para o sistema (2.1), $-k = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-\gamma}{\gamma - 1}$, e quando $2 \leq \gamma \leq 3$ temos $0 \leq -k \leq \frac{1}{2}$.

Vemos por (3.10) que η e suas derivadas são potencialmente singulares. O fator $(\beta - \alpha)^{-k}$ sob o sinal de integração se torna singular em $(\alpha, \beta) = (0, 0) \in Q$. Uma outra fonte de singularidade é a função hipergeométrica $H(\sigma)$ em (3.10). $H(\sigma)$ é analítica para $|\sigma| < 1$.

Dentro do disco ela tem a representação por série dada em (3.9). Quando σ se aproxima de 1 ela pode se tornar singular. Em Q vemos que

$$\sigma = 1 \Longleftrightarrow \alpha = 0 \tag{3.12}$$

Usando o método de Frobenius para analisar as soluções da equação (3.6) que rege H, vemos que a equação indicial em $\sigma = 1$ tem raíz dupla igual a zero.Logo, a solução geral é da forma

$$H(\sigma) = A\, H_1(\sigma - 1) + B\, (H_1(\sigma - 1)\, \log(1 - \sigma) + H_2(\sigma - 1))\,, \tag{3.13}$$

onde A eB são constates, H_1 e H_2 são analíticas próximo de 0. Essa representação de H é válida numa $\varepsilon-$vizinhança de $\sigma = 1$ para algum $\varepsilon > 0$.

Por (3.10) vemos claramente que $\eta \equiv 0$ na região $\alpha \leq \alpha^*$ e é suave em $Q \cap \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \leq \alpha_0\}$, para todo $\alpha_0 < 0$. Se tivermos que η é C^2 em

$$Q^{\varepsilon'} = \{(\alpha, \beta) \mid -\varepsilon' \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq \varepsilon'\}\,,$$

para algum $\varepsilon' > 0$, então η será C^2 em toda a região Q. Com efeito, se este for o caso então η será C^2 em $Q \cap \{(\alpha, \beta) \mid 0 \leq \beta \leq \frac{\varepsilon'}{2}\}$. Como η em $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha^* \leq \alpha \leq 0\,,\ \beta \geq \frac{\varepsilon'}{2}\}$ é a única solução do problema de Goursat para a equação (3.1) com dado identicamente zero em $\alpha = \alpha^*$ e dado igual a $\eta(\alpha, \frac{\varepsilon'}{2})$ em $\beta = \frac{\varepsilon'}{2}$, sendo os coeficientes dessa equação suaves nesta região e os dados C^2, então η será também C^2 nesta região.

Portanto, para estudar a regularidade de η basta nos restringirmos a um quadrado $Q^{\varepsilon'}$. Vamos assumir $\varepsilon' < \frac{\delta}{2}$ (recordemos que o dado ϕ foi escolhido se anulando para $\alpha \leq \alpha^*$ e $-\delta \leq \alpha \leq 0$). Neste estudo vamos fazer uso das expansões (3.9) e (3.13). Primeiro vamos identificar em que partes de $Q^{\varepsilon'}$ cada uma dessas expansões é válida. A expressão em (3.13) é válida numa bola de raio ε em torno de $\sigma = 1$. Temos

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - \sigma < \varepsilon &\Longleftrightarrow \frac{-\alpha(\beta - x)}{-x(\beta - \alpha)} < \varepsilon\ \forall \alpha^* \leq x \leq -\delta \\ &\Longleftrightarrow \frac{-\alpha}{\beta - \alpha}\left(1 + \frac{\beta}{\delta}\right) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \beta\alpha + \delta(1 - \varepsilon)\alpha + \delta\varepsilon\beta > 0\,. \end{aligned}$$

A última desigualdade define uma região S_1 limitada por uma hipérbole retangular passando pela origem. Em S_2, o complementar de S_1, $0 \leq \sigma \leq 1 - \varepsilon$ e, portanto, vale a expansão (3.9).

Façamos uma primeira análise do que ocorre em S_1. O termo singular em (3.13) é claramente aquele que contém $\log(1-\sigma)$. Agora

$$1 - \sigma = \frac{-\alpha}{\beta - \alpha}\left(1 + \frac{\beta}{x}\right),$$

e, portanto,

$$\log(1-\sigma) = \log(-\alpha(\beta-\alpha)^{-1}) + \log\left(1 + \frac{\beta}{x}\right). \tag{3.14}$$

Como $\left|\frac{\beta}{x}\right| < \frac{1}{2}$, o segundo termo no membro à direita de (3.14) pode ser expandido como

$$\log\left(1 + \frac{\beta}{x}\right) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j \frac{\beta^j}{x^j} + \frac{\beta^{n+1}}{x^{n+1}} r(\beta, x),$$

com $r(\beta, x)$ uma função suave de β e x.

O primeiro termo do segundo membro em (3.14) não contém a variável x e, portanto, pode passar para fora da integral (3.10) juntamente com o fator $(\beta - \alpha)^{-k}$.

Agora, se $G(\sigma - 1)$ é uma função analítica numa ε—vizinhança de zero, nesta vizinhança temos

$$G(\sigma - 1) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (\sigma - 1)^j. \tag{3.15}$$

Neste ponto é importante observar que o único fator em $\sigma - 1$, assim como em σ, que contém a variável x é

$$\frac{\alpha\beta}{x(\alpha - \beta)}$$

Este termo é $O(|\alpha|)$ em $Q^{\varepsilon'}$ como podemos ver facilmente. Sua n–ésima potência será $O(|\alpha|^n)$ em $Q^{\varepsilon'}$.

A análise em S_2 é mais simples já que ali $H(\sigma)$ é representada pela série de potências de σ (3.9).

A estratégia básica para tornar $\eta(\alpha,\beta)$, dada por (3.10), suave, tanto em S_1 quanto em S_2, será impor condições integrais sobre o dado de Goursat ϕ de modo que na integral em (3.10) só restem termos com potências elevadas de α ou de β para compensar as singularidades produzidas pelos fatores $(\beta-\alpha)^{-k}\log(-\alpha(\beta-\alpha)^{-1})$ e $(\beta-\alpha)^{-k}$ (para o primeiro destes fatores só servem potências de α, para o segundo servem tanto potências de α como de β).

Denotemos

$$T(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\alpha^*}^{-\delta} (-x)^k \widetilde{\phi}(x) v(x)\, dx\,, \tag{3.16}$$

onde

$$\widetilde{\phi}(x) = \phi'(x) + \frac{k}{x}\phi(x)\,. \tag{3.17}$$

Os comentários feitos acima justificam que imponhamos a seguinte condição sobre o dado ϕ: Para algum n, escolhido adequadamente, devemos ter

$$T((-x)^{-j}) = \int_{\alpha^*}^{-\delta} \frac{\widetilde{\phi}(x)}{(-x)^{j-k}}\, dx = 0\,, \tag{3.18}$$

para $j = 0, 1, \ldots, n$. Assim, se pensarmos em H_1, H_2 em (3.13) expandidos em série de potências de $(\sigma - 1)$ em S_1, levando em conta (3.14), (3.15), e H dada pela série (3.9) em S_2, a expressão em (3.10) será tão suave em $Q^{\epsilon'}$ quanto quisermos, desde que escolhamos n em (3.18) suficientemente grande.

Terminamos esta seção apresentando uma representação integral das entropias de tipo Leste e Oeste como foi feito no capítulo anterior.

Integrando (3.10) por partes, obtemos

$$\eta(\alpha,\beta) = I(\alpha,\beta)\phi(\alpha) + \int_{\alpha^*}^{\alpha} J(t,\alpha,\beta)\phi(t)\, dt, \tag{3.19}$$

onde

$$I(\alpha,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right)^k, \tag{3.20}$$

e

$$J(t,\alpha,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-\alpha\beta(-t)^{k-2}}{(\beta-\alpha)^{k+1}} H'(\sigma). \tag{3.21}$$

De

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} q = \lambda_1 \frac{\partial}{\alpha}\eta,$$

segue que

$$q(\alpha,\beta) = K(\alpha,\beta)\phi(\alpha) + \int_{\alpha^*}^{\alpha} L(t,\alpha,\beta)\phi(t)\,dt, \tag{3.22}$$

onde

$$K(\alpha,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1(\alpha,\beta) I(\alpha,\beta) \tag{3.23}$$

e

$$\begin{aligned} L(t,\alpha,\beta) &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1(t,\beta)J(t,t,\beta) - \frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}(t,\beta)I(t,\beta) \\ &+ \int_t^{\alpha} \lambda_1(s,\beta)\frac{\partial J}{\partial\alpha}(t,s,\beta)\,ds. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Representações análogas valem para as entropias de tipo Sul e Norte.

4. Análise das Medidas de Young.

A análise das medidas de Young que fazemos aqui segue o método de Serre visto no capítulo anterior. Pequenas modificações são necessárias devido às restrições impostas sobre os dados nas entropias de tipos Leste e Sul.

Inicialmente, recordemos que dados dois pares e–f (η, q), $(\overline{\eta}, \overline{q})$, pelo que vimos no final da seção 2, podemos aplicar o lema do div–rot aos campos $(\eta(z^\varepsilon), q(z^\varepsilon))$, $(\overline{q}(z^\varepsilon), -\overline{\eta}(z^\varepsilon))$ para obter a relação de comutatividade

$$\langle \nu, \eta\overline{q} - \overline{\eta}q \rangle = \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, \overline{q} \rangle - \langle \nu, \overline{\eta} \rangle \langle \nu, q \rangle \,, \tag{4.1}$$

onde pomos $\nu = \nu_{x,t}$.

O seguinte resultado é o ponto de partida de nossa análise das medidas de Young para o problema que estamos tratando.

4.1. LEMA. *Seja $R = [\alpha^-, \alpha^+] \times [\beta^-, \beta^+]$ o retângulo minimal contendo Spt ν. Então existe $\alpha_0 \in [\alpha^-, \alpha^+]$ satisfazendo o seguinte:*

(i) Para todo par e–f de tipo Leste (η_L, q_L), e limite $\alpha^* \geq \alpha_0$ vale

$$\langle \nu, \eta_L \rangle = \langle \nu, q_L \rangle = 0; \tag{4.2}$$

(ii) Para qualquer dois pares e–f (η_L, q_L), (η_O, q_O), o primeiro de tipo Leste, o segundo de tipo Oeste com limites α^*, $\overline{\alpha} < \alpha_0$ e $\geq \alpha^-$ temos

$$\langle \nu, q_L \rangle = c \langle \nu, \eta_L \rangle \,, \tag{4.3}$$

$$\langle \nu, q_O \rangle = c \langle \nu, \eta_O \rangle \,, \tag{4.4}$$

para uma mesma constante c.

PROVA: Daqui até o restante desta seção vamos nos preocupar apenas com o caso em que $(\alpha^+, \beta^-) = (0, 0)$ já que se $(\alpha^+, \beta^-) \neq 0$ então as entropias de tipos Leste e Sul são também suaves em R sem precisar que imponhamos qualquer condição sobre os dados. A análise neste último caso pode então ser feita exatamente como no capítulo anterior.

Suponhamos $\alpha^- < \alpha^+$. Como as entropias de tipo Oeste e limite < 0 não apresentam nenhuma modificação em relação ao que vimos no capítulo anterior, vale que podemos sempre obter uma entropia Oeste η_O com limite arbitrariamente próximo de α^- tal que $\langle \nu, \eta_O \rangle > 0$. Então, igualmente ao que acontecia no capítulo anterior, para todo par e–f (η_L, q_L) do tipo Leste e limite em (α^-, α^+) temos

$$\langle \nu, q_L \rangle = c \langle \nu, \eta_L \rangle \,, \tag{4.5}$$

para uma certa constante c. Se pudéssemos sempre conseguir uma entropia Leste com limite arbitrariamente próximo de α^+ tal que $\langle \nu, \eta_L \rangle > 0$, então uma relação análoga a (4.5) valeria para todo par e–f de tipo Oeste com a mesma constante c. Assim, teríamos (4.3) e (4.4) com $\alpha_0 = \alpha^-$. Porém, agora, nada nos garante que isto seja verdade.

Seja α_0 o ínfimo dos $\alpha^* \in (\alpha^-, \alpha^+]$ para os quais

$$\langle \nu, \eta_L \rangle = 0\,, \tag{4.6}$$

para toda entropia de tipo Leste e limite α^*. Assim, (4.6) vale para toda entropia de tipo Leste e limite $\alpha^* > \alpha_0$. Por (4.5) obtemos que

$$\langle \nu, q_L \rangle = 0\,, \tag{4.7}$$

para todo fluxo de tipo Leste e limite $\alpha^* > \alpha_0$. Por aproximação (4.6) e (4.7) valem para todos os pares e–f de tipo Leste e limite $\alpha^* \geq \alpha_0$.

Por outro lado, se $\alpha^* < \alpha_0$ então existe uma entropia Leste de limite α^*, η_L, tal que $\langle \nu, \eta_L \rangle > 0$. Assim, do mesmo modo que no capítulo anterior, chegamos à conclusão que para todo par e–f de tipo Oeste (η_O, q_O), de limite $\overline{\alpha} < \alpha_0$, vale

$$\langle \nu, q_O \rangle = c\,\langle \nu, \eta_O \rangle\,,$$

com a mesma constante que em (4.5). Fica provado o lema.

$\square$

Vamos agora provar o análogo do teorema 3.4 do capítulo anterior. Façamos

$$\widetilde{\nu} = I^2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha} \nu\,.$$

4.2. Teorema. *Suponhamos $\alpha^- < \alpha^+$. Então, para todo $\alpha \in (\alpha^-, \alpha^+)$ temos*

$$D\pi_1 \widetilde{\nu}(\alpha) = 0\,. \tag{4.9}$$

Prova: Seja α_0 como no lema 4.1. Se $\alpha \neq \alpha_0$ então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno teremos $\alpha - \varepsilon$, $\alpha + \varepsilon < \alpha_0$ ou $\alpha - \varepsilon$, $\alpha + \varepsilon > \alpha_0$. Assim, tomando dois pares e–f, um de tipo

Leste e limite $\alpha+\varepsilon$, outro de tipo Oeste e limite $\alpha-\varepsilon$, com dados apropriados, usando as representações integrais (3.19), (3.22), e procedendo exatamente como na demonstração do teorema 3.4, capítulo III, aplicando-se o lema 4.1, obtemos (4.9). Fica faltando provar (4.9) quando $\alpha=\alpha_0$.

Vamos provar que $\alpha_0=\alpha^-$. Suponhamos por absurdo que $\alpha^-<\alpha_0$. Então, por (4.4), tomando dois pares e-f de tipo Oeste e limites $\alpha^- -\varepsilon$, $\alpha^- -2\varepsilon$, com $0<\varepsilon<\frac{\alpha_0-\alpha^-}{2}$, (η,q), $(\overline{\eta},\overline{q})$ temos

$$\langle\nu,\eta\widetilde{q}-\widetilde{\eta}q\rangle=0\,. \tag{4.10}$$

Assim, tomando dois pares e-f desta forma, com dados semelhantes aos que aparecem na demonstração do teorema 4.3, capítulo III, e de novo adotando o mesmo procedimento ali adotado, obtemos

$$D\pi_1\widetilde{\nu}(\alpha^-)=0\,. \tag{4.11}$$

Portanto, neste caso temos que (4.9) vale para todo $\alpha\in(-\infty,\alpha_0)$. Mas isto implica que $\pi_1\widetilde{\nu}(-\infty,\alpha_0)=0$, donde facilmente obtemos que $\pi_1\nu(-\infty,\alpha_0)=0$. Isto nos dá uma contradição e, portanto, devemos ter $\alpha_0=\alpha^-$.

□

O teorema acima e o resultado análogo para $\pi_2\widetilde{\widetilde{\nu}}$, com $\widetilde{\widetilde{\nu}}=I_2^2\frac{\partial\lambda_2}{\partial\beta}\nu$ nos dão que

$$\text{Spt}\subset\{(\alpha^-,\beta^-)\,,\ (\alpha^-,\beta^+)\,,\ (\alpha^+,\beta^-)\,,\ (\alpha^+,\beta^+)\}\,.$$

Façamos $A_1=(\alpha^-,\beta^-)$, $A_2=(\alpha^-,\beta^+)$, $A_3=(\alpha^+,\beta^-)$, $A_4=(\alpha^+,\beta^+)$.

Pela demonstração do teorema 3.6, capítulo III, concluímos que se ν põe massa diferente de zero em todos os A_i, $i=1,\ldots,4$, então devemos ter

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}\equiv0\ \text{ sobre } A_1A_3\ \text{ ou }\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial\beta}\equiv0\ \text{ sobre } A_3A_4\,, \tag{4.12}$$

uma vez que para demonstrar (4.12) precisamos usar apenas entropias de tipo Oeste e Norte. Portanto, ν só pode estar concentrada em no máximo 3 dos pontos A_i, $i=1,\ldots,4$.

Se $\nu(A_i) = 0$, para $i \neq 3$, então mostramos, exatamente como foi feito no final do capítulo anterior, que ν, na verdade está concentrada em no máximo dois pontos contíguos. Continuando com o mesmo procedimento que lá, chegamos a que ν está concentrada, de fato, em apenas um ponto.

Se, por outra, tivermos $\nu(A_3) = 0$ e $A_3 = (0,0)$ não podemos usar o mesmo procedimento para mostrar que ν está concentrada em no máximo dois pontos. Neste caso procedemos da seguinte forma. Inicialmente, provamos que $\nu(A_2) = 1$ ou $\nu(A_2) = 0$.

Para isto, tomamos um par e–f de tipo Oeste, (η_O, q_O), de limite $\overline{\alpha} \in (\alpha^-, \alpha^+)$ e dados em $\beta = 0$, de tal modo que $\eta_O(A_1) = q_O(A_1) = 0$. Isto obriga que

$$\int_{\alpha^-}^{\bar{\alpha}} \phi(t)\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}(t,0)\,dt = 0\,, \quad \phi(\alpha^-) = 0\,, \tag{4.13}$$

onde ϕ é o dado sobre $\beta = 0$. Da mesma forma, tomamos um par $e - f$ de tipo Norte, (η_N, q_N), de limite $\bar{\beta} \in (\beta^-, \beta^+)$, e dados em $\alpha = 0$, de tal modo que $\eta_N(A_4) = q_N(A_4) = 0$. Isto obriga que

$$\int_{\bar{\beta}}^{\beta^+} \psi(t)\frac{\partial\lambda_2}{\partial\beta}(t,0)\,dt = 0\,, \quad \psi(\beta^+) = 0\,, \tag{4.14}$$

onde ψ é o dado sobre $\alpha = 0$.

Agora, pedimos que $\eta_O(A_2) = q_N(A_2) = 1$ e $\eta_N(A_2) = 0$. Isto impõe que

$$\int_{\alpha^-}^{\bar{\alpha}} J_1(t, A_2)\phi(t)\,dt = 1\,, \tag{4.15}$$

$$\int_{\bar{\beta}}^{\beta^+} L_2(t, A_2)\psi(t)\,dt = 1\,, \tag{4.16}$$

$$\int_{\bar{\beta}}^{\beta^+} J_2(t, A_2)\psi(t)\,dt = 0\,, \tag{4.17}$$

onde L_i e J_i são as funções L e J das representações integrais dos pares e–f de tipo i, $i = 1,\ 2$.

Se tivermos que os conjuntos de funções

$$\{J_1(\cdot, A_2), \frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}(\cdot, 0)\}$$

e

$$\{J_2(\cdot, A_2), L_2(\cdot, A_2), \frac{\partial\lambda_2}{\partial\beta}(0, \cdot)\},$$

são linearmente independentes, então podemos escolher ϕ e ψ de tal modo a termos (4.13) – (4.17). Esta verificação pode ser feita sem grande dificuldade.

Portanto, tomando (η_O, q_O) e (η_N, q_N) como descrito acima, a relação (4.1) nos dará

$$\nu(A_2)^2 = \nu(A_2)$$

e, assim, $\nu(A_2) = 1$ ou $\nu(A_2) = 0$.

Logo, ou ν está concentrada em A_2 ou

$$\mathrm{Spt}\nu \subset \{A_1\ ,\ A_4\}\,.$$

Neste último caso mostramos que ν está concentrada em apenas um dos dois pontos A_1, A_4. Fazemos isto, simplesmente, tomando, por exemplo, duas entropias de tipo Oeste com limite $\bar{\alpha} > \alpha^-$, (η, q), $(\bar{\eta}, \bar{q})$, e dados na reta $\beta = 0$ satisfazendo

$$\int_{\alpha^-}^{\bar{\alpha}} \frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}(t, 0)\phi(t)\, dt = 0\,, \quad \phi(\alpha^-) = 1\,, \tag{4.18}$$

$$\int_{\alpha^-}^{\bar{\alpha}} \frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}(t, 0)\bar{\phi}(t)\, dt = 1\,, \quad \bar{\phi}(\alpha^-) = 0\,, \tag{4.19}$$

sendo ϕ o dado para η e $\bar{\phi}$ o dado para $\bar{\eta}$. Teremos então $\eta(A_1)\,\bar{q}(A_1) - \bar{\eta}(A_1)\,q(A_1) = 1$ e, pela relação de comutatividade (4.1), segue

$$\nu^2(A_1) = \nu(A_1)\ .$$

De novo, devemos ter $\nu(A_1) = 1$ ou $\nu(A_1) = 0$. Em qualquer caso, chegamos à conclusão desejada de que ν é uma medida de Dirac.

Os resultados desta seção, junto com os das seções 2 e 3, nos dão o seguinte.

4.3. TEOREMA. *Suponhamos que z_0 satisfaça (2.9). Então existe uma seqüência $\{z^\varepsilon\}$ de soluções de (2.10), (2.2) convergindo para uma solução fraca do problema (2.1), (2.2).*

Capítulo V

O Problema de Cauchy para os Sistemas $z_t + (\overline{z}^\gamma)_x = 0$

1. Introdução.

Neste capítulo apresentamos a aplicação da teoria da compacidade compensada à resolução do problema de valor inicial

$$z_t + (\overline{z}^\gamma)_x = 0, \tag{1.1}$$

$$z(x,0) = z_0(x), \tag{1.2}$$

com $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, z = u + iv \in \mathbb{C}$ (veja **[33]**, **[15]**).

Como na seção 2 do capítulo anterior definimos

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} | 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{\gamma+1} \right\}.$$

Provaremos que se $1 \leq \gamma < 2$ e z_0 satisfaz

$$z_0 \in L^\infty \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^2), z_0(x) \in K \;\; q.t.p. \;\; x \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

então o problema (1.1), (1.2) possui uma solução fraca.

Novamente, procuraremos obter uma solução de (1.1), (1.2) como limite de solução para os problemas

$$z_t + (\overline{z}^\gamma)_x = \epsilon z_{xx}, \tag{1.4}$$

$$z(x,0) = z_0^\epsilon(x), \tag{1.5}$$

quando $\epsilon \to 0$, onde $z_0^\epsilon(x) = z_0(x) + \epsilon V$ sendo V um vetor constante apontando para interior de K.

Vimos no exemplo 2 da seção 1 do capítulo anterior que o sistema (1.1) admite como um par de invariantes de Riemann as funções α, β dadas por

$$\alpha = -r^{\gamma+1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\theta\right), \tag{1.6}$$

$$\beta = r^{\gamma+1} \cos^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\theta\right). \tag{1.7}$$

Os autovalores de (1.1) são

$$\lambda_1 = -r^{\gamma-1} = -\lambda_2. \tag{1.8}$$

Vemos assim que (1.1) é não-estritamente hiperbólico, já que em $(0,0)$ temos $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

A equação das entropias para (1.1) é, de novo, a Euler-Poisson-Darboux

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\eta - \frac{k}{\alpha-\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\eta - \frac{\partial}{\partial\beta}\eta\right) = 0, \tag{1.9}$$

com $k = \frac{1}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$. Para $\gamma \geq 1$, temos $0 \leq k < \frac{1}{2}$.

O fato importante que ocorre em relação ao sistema (1.1), que faz com que o estudo do problema (1.1), (1.2) não possa ser feito exatamente como o do problema (2.1), (2.2) do capítulo anterior, e que nos força a restringir γ ao intervalo [1,2), é que as regiões convexas

$$K \cap \{z|\alpha(z) \leq -c_1\} \cap \{z| -\beta(z) \leq -c_2\},$$

com $c_1, c_2 > 0$, desta feita, não são limitadas. Isto faz com que não consigamos regiões invariantes limitadas para (1.4), (1.5). Assim a sequência $\{z^\epsilon\}$ das soluções de (1.4), (1.5) que obtemos aqui não será uniformente limitada em L^∞ mas sim em $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^2)$. Em lugar das medidas de Young obtidas a partir de uma sequência limitada em L^∞ temos que usar aqui medidas de Young construídas a partir de uma sequência limitada em L^∞.

Estas últimas estão definidas apenas para funções de ordem de crescimento menor que 2 no infinito. Por isto, a função de fluxo em (1.1) tem que atender a esta condição sobre a ordem de crescimento, o que impõe $\gamma < 2$. De um modo geral, quando estivermos analisando as medidas de Young, teremos que, a todo momento, estar atentos à ordem de crescimento das funções às quais elas estão sendo aplicadas.

Nas próximas seções vamos proceder à resolução de (1.1), (1.2) que será bastante facilitada pelos resultados já obtidas na solução do problema (2.1), (2.2) do capítulo anterior.

2. O Problema (1.4), (1.5).

A solução do problema (1.4), (1.5) é obtida com base nos resultados da seção 3 do capítulo II. O dado inicial z_0^ϵ toma valores no interior da região K. Assim para c_1^ϵ e c_2^ϵ adequadamente escolhidos temos que z_0^ϵ toma valores na região

$$B^\epsilon = K \cap \{z | \gamma(z) \leq -c_1^\epsilon, -\beta(z) \leq -c_2^\epsilon\}.$$

Definimos $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pondo $F(z) = \overline{z}^\gamma$ se $z \in B^\epsilon$ e fora de B^ϵ de tal modo que F seja de classe C^N em todo $\mathbb{R}^2$ com $N >> 3$. Consideramos inicialmente o problema de valor inicial para o sistema

$$z_t + F(z)_x = \epsilon z_{xx}, \tag{2.1}$$

com dado em $t = 0$ (1.5).

Primeiro, usamos o teorema 3.2, cap II, para obter uma solução local do problema (2.1), (1.5). Então, verificamos, usando as fórmulas para α e β em (1.6), (1.7), que a região B^ϵ satisfaz as hipóteses do teorema 3.5, cap II, sobre regiões invariantes. Como a solução local de (2.1), (1.5) pode ser considerada tão suave quanto quisermos (podemos, se necessário, fazer também uma "mollificação" em z_0), então a região B^ϵ é invariante para o problema (2.1), (1.5). Logo, na verdade, temos uma solução local de (1.4), (1.5), já que $F(z) = \overline{z}^\gamma$ nesta região.

O passo seguinte é usar o teorema 3.4, cap. II, para obter uma solução global de (2.1), (1.5), e, pela invariância da região B^ϵ, concluir que a mesma é solução global de (1.4), (1.5).

Neste ponto devemos ter um cuidado especial com as constantes que aparecem impondo limitações ao dado inicial nas hipóteses do teorema 3.4, cap II, para saber, em particular, se elas dependem ou não de ϵ. Uma verificação cuidadosa que omitiremos aqui (veja [**33**]) prova que estas constantes não dependem de ϵ, se $1 \leq \gamma < 2$, e os dados iniciais podem ser tão grandes quanto quisermos.

De passagem mencionamos que nesta aplicação do teorema 3.4, cap. II, estamos usando de novo o fato de que, por ser simétrico, o sistema (1.1) é dotado das entropias estritamente convexas

$$\eta_*^\epsilon(z) = \|z - \epsilon V\|^2 = (u - \epsilon V_1)^2 + (v - \epsilon V_2)^2, \tag{2.2}$$

onde $V = (V_1, V_2)$ é o vetor constante que usamos para pertubar o dado inicial.

O fato de que η_*^ϵ em (2.2) é uma entropia para (1.1) nos dá também que a sequência $\{z^\epsilon - \epsilon V\}$, formada com as soluções de (1.4), (1.5), obtidas como descrevemos acima, é uniformemente limitada em $L^2(\mathbb{R} \times [0, T]; \mathbb{R}^2)$, para todo $T > 0$. Isto segue dos seguintes cálculos de rotina:

$$\begin{aligned} \eta_*^\epsilon(z^\epsilon)_t + q_*(z^\epsilon)_x &= \epsilon \nabla \eta_*^\epsilon z_{xx}^\epsilon \\ &= \epsilon(\nabla \eta_*^\epsilon z_x^\epsilon)_x - \epsilon \nabla^2 \eta_x^\epsilon (z_x^\epsilon, z_x^\epsilon) \\ &\leq \epsilon(\nabla \eta_x^\epsilon z_x^\epsilon)_x; \end{aligned} \tag{2.3}$$

integrando, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta_*^\epsilon(z^\epsilon(x, t))dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \eta_*^0(z_0(x))dx,$$

e, portanto,

$$\iint_{\mathbb{R}\times[0,T]} \eta_*^\epsilon(z^\epsilon(x, t))dx\ dt \leq T \int_{-\infty}^{\infty} \eta_*^0(z_0(x))dx, \tag{2.4}$$

onde fazemos $\eta_*^0(z) = u^2 + v^2$.

Como é usual, integrando a segunda equação em (2.3) sobre $\mathbb{R} \times [0, T]$, obtemos que

(2.5) $\{\sqrt{\epsilon}\ z_x^\epsilon\}$ é uniformemente limitada em $L^2(\mathbb{R} \times [0, T]; \mathbb{R}^2)$, para todo $T > 0$.

A propriedade (2.5) nos dá que, para todo par e-f (η, q), de classe C^2, da ordem de crescimento no infinito menor que 2, e tal que as derivadas de η até segunda da ordem sejam limitadas, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(z^2) + \frac{\partial}{\partial_x} q\ (z^\epsilon) \in \left\{ \text{ compacto de } \quad W^{-1,2}_{\text{loc}} \right\}. \tag{2.6}$$

Com efeito, da equação

$$\eta(z^\epsilon)_t + q(z^\epsilon)_x = \epsilon(\nabla \eta z^\epsilon_x)_x - \epsilon \nabla^2 \eta(z^\epsilon_x, z^\epsilon_x), \tag{2.7}$$

vemos, do mesmo modo que no capítulo II, que no membro à direita o fator $\epsilon(\nabla\eta z^\epsilon_x)_x$ fica num compacto de $W^{-1,2}_{\text{loc}}$, e o fator $\epsilon\nabla^2\eta(z^\epsilon_x, z^\epsilon_x)$ fica num subconjunto limitado de $M(\Omega)$, para todo $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, aberto limitado. Isto nos dá que o membro à direita fica num compacto de $W^{-1,p}_{\text{loc}}$, para algum $p \in [1, 2)$ (teorema 4.1, cap I). Por outro lado, como η e q tem ordem de crescimento menor que 2, a desigualdade de Holder nos dá que $\{\eta(z^\epsilon)_t + q(z^\epsilon)_x\}$ é limitada em $W^{-1,r}$, para algum $r > 2$. Logo o teorema 4.2, cap I, nos dá que $\eta(z^\epsilon)_t + q(z^\epsilon)_x$ fica num compacto de $W^{-1,2}_{\text{loc}}$.

2.1 DEFINIÇÃO: Diremos que um par e-f (η, f) para (1.1) é *admissível* se η e q são de classe C^2, têm ordem de crescimento no infinito menor que 1 e η possui derivadas até segunda ordem limitadas.

Seja $\{\nu_{x,t}\}$ a família parametrizada de medidas de Young construída a partir da sequência $\{z^\epsilon\}$, uniformemente limitada em $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^2)$, com base no teorema 2.4, cap. I. Dados dois pares e-f admissíveis para (1.1), $(\eta, q), (\overline{\eta}, \overline{q})$, o lema do div-rot, tendo em vista (2.6), aplicado aos campos (η, q), $(\overline{q}, -\overline{\eta})$, nos dá a relação de comutatividade

$$\langle \nu, \eta\overline{q} - \overline{\eta}q \rangle = \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, \overline{q} \rangle - \langle \nu, \overline{\eta} \rangle \langle \nu, q \rangle, \tag{2.8}$$

onde $\nu = \nu_{(x,t)}$.

Na próxima seção mostraremos que ν é uma medida de Dirac, seguindo de perto o que foi feito nas seções 3 e 4 do capítulo anterior.

3. Análise das Entropias e das Medidas de Young

A equação das entropias (1.9) é da mesma forma que equação (3.1) do capítulo anterior, sendo que agora temos $0 \leq k < \frac{1}{6}$, já que $k = \frac{1}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ e $1 \leq \gamma < 2$.

As entropias de tipo Leste e Oeste são de novo dadas por

$$(3.1) \qquad \eta(\alpha, \beta) = \int_{\alpha^*}^{\alpha} \left(\frac{\beta - a}{-x}\right)^k H\left(\frac{(\alpha - x)\beta}{-x(\beta - \alpha)}\right) \left(\phi'(x) + \frac{k}{x}\phi(x)\right) dx,$$

se o dado ϕ é definido na linha $\beta = 0$, e

$$(3.2) \qquad \eta(\alpha, \beta) = \int_{\alpha^*}^{\alpha} \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta^* - x}\right)^{-k} H\left(\frac{(\alpha - x)(\beta - \beta^*)}{(\beta^* - x)(\beta - \alpha)}\right) \left(\phi(x) + \frac{k}{x}\phi(x)\right) dx$$

se o dado ϕ é definido na linha $\beta = \beta^*$.

Fórmulas análogas valem para as entropias de tipo Sul e Norte.

Um aspecto interessante do caso que estamos tratando é que, desta feita, a função $H(\sigma) = F(1 - k, k, 1; \sigma)$ admite a representação integral

$$(3.3) \qquad H(\sigma) = \frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(1-k)} \int_0^1 s^{k-1}(1-s)^{-k}(1-\sigma s)^{k-1} ds,$$

pois agora temos atendida a condição sobre os parâmetros a, b, c em $F(a, b, c; \sigma), Re(c) > Re(b) > 0$, para que uma tal representação seja válida em $Re(\sigma) < 1$ (veja [46, cap.XIV]).

Em particular, a expressão (3.3) nos diz que o integrando na fórmula para η em (3.1) (ou (1.2)) pode ser feito estritamente positivo em qualquer faixa $(\alpha' - \epsilon, \alpha' + \epsilon) \times [0, \infty)$, com $\alpha' + \epsilon < 0$, desde que tomemos a função

$$\tilde{\phi}(x) = \phi'(x) + \frac{k}{x}\phi(x) = (-x)^{-k}\frac{d}{dx}((-x)^k\phi(x)),$$

sendo estritamente positiva no intervalo $(\alpha' - \epsilon, \alpha' + \epsilon)$. Além disso, η assumirá apenas um sinal desde que isso ocorra com $\tilde{\phi}$. Este fato mostra que sempre é possível conseguir entropias de tipo Oeste positivas e não se anulando numa faixa $(\alpha' - \epsilon, \alpha' + \epsilon) \times [0, \infty)$, com $\alpha' + \epsilon < 0$, arbitrariamente escolhida.

Vamos analisar o crescimento das entropias de tipo Leste e Oeste quando $|\alpha|+|\beta| \to \infty$.

Para as entropias de tipo Leste, $|\alpha|+|\beta| \to \infty$ com $(\alpha,\beta) \in Q$, só é possível se $\beta \to +\infty$. O fator $(\beta-\alpha)^{-k}$ cai a zero com ordem k quando $\beta \to +\infty$. Se $\alpha < 0$, o fator $H(\sigma)$, com $\sigma = \frac{(\alpha-x)\beta}{-x(\beta-\alpha)}$, é limitado quando $\beta \to \infty$, pois nesse caso $\sigma \sim \frac{\alpha-x}{-x}$ e $0 < \frac{\alpha-x}{-x} < 1$. Se $\alpha = 0$ e β é grande, podemos pensar η dada por uma expressão como (3.2) com $\beta^* > 0$. Fazendo $\sigma = \frac{(\alpha-x)(\beta-\beta^*)}{(\beta^*-x)(\beta-\alpha)}$, temos de novo que o fator $H(\sigma)$ é limitado pois quando $\beta \to +\infty$ temos $\sigma \sim \frac{\alpha-x}{\beta^*-x}$ e $0 < \frac{\alpha-x}{\beta^*-x} < 1$. Portanto, temos que as entropias de tipo Leste são $(\beta-\alpha)^{-k}0(1)$ quando $\beta \to +\infty$.

Para as entropias de tipo Oeste a análise do fator $H(\sigma)$ tem que incluir ainda dois outros casos: quando $\alpha \to -\infty$ e β permanece limitado, e quando $\alpha \to -\infty$ e $\beta \to +\infty$. No primeiro caso temos que $\sigma \sim \frac{\beta}{x}$ e $\frac{\beta}{x} \leq 0$. No segundo, $\sigma \sim -\infty$. Em qualquer dos dois casos, pela representação (3.3) vemos que a função $H(\sigma)$ fica limitada.

De novo, então, temos que as entropias de tipo Oeste são $(\beta-\alpha)^{-k}0(1)$.

Pelas fórmulas

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \lambda_1 \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial q}{\partial \beta} = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \beta \eta},$$

$$\lambda_1 = -C(\gamma)(\beta-\alpha)^{2\alpha} = -\lambda_2,$$

vemos que $q = 0(1)(\beta-\alpha)^k$, quando $|\beta|+|\alpha| \to \infty$. Assim, as fórmulas (1.6), (1.7), para α e β, nos dão que q tem ordem de crescimento $k(\gamma+1) < 1$ nas variáveis u, v.

O fato de que as derivadas de η até segunda ordem são limitadas decorre também da fórmula (3.1) e do estudo da regularidade de η próximo de $(0,0)$, feito na seção 3 do capítulo anterior. Assim, temos que os pares e-f de tipo Leste, Oeste, Sul e Norte construídos como na seção 3, cap.IV, são admissíveis.

Recordemos as representações integrais para as entropias de tipo Leste e Oeste:

$$\eta(\alpha,\beta) = I(\alpha,\beta)\phi(\alpha) + \int_{\alpha^*}^{\alpha} J(t,\alpha,\beta)\phi(t)dt, \tag{3.2}$$

com

$$I(\alpha,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right)^k, \tag{3.3}$$

$$J(t,\alpha,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-\alpha\beta(-t)^{k-2}}{(\beta-\alpha)^{k+1}} H'(\sigma), \tag{3.4}$$

e

$$q(\alpha,\beta) = K(\alpha,\beta)\phi(\alpha) + \int_{\alpha^*}^{\alpha} L(t,\alpha,\beta)\phi(t)dt, \tag{3.5}$$

com

$$K(\alpha,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1(\alpha,\beta)I(\alpha,\beta), \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} L(t,\alpha,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} & \lambda_1(t,\beta)J(t,t,\beta) - \frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}(t,\beta)I(t,\beta) \\ & + \int_t^{\alpha} \lambda_1(s,\beta)\frac{\partial J}{\partial\alpha}(t,s,\beta)ds. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Seja $R = [\alpha^-,\alpha^+] \times [\beta^-,\beta^+]$ o retângulo minimal contendo o suporte de ν. Desta feita, podemos ter $\alpha^- = -\infty, \beta^+ = +\infty$. Pelo que dissemos acima, se $\alpha^- < \alpha^+$, sempre é possível conseguir uma entropia de tipo Oeste η_O, tal que $\langle\nu,\eta_O\rangle > 0$. Portanto, um resultado idêntico ao lema 4.1, cap IV, também vale aqui, com demonstração inteiramente idêntica. Mais ainda, temos de novo o seguinte resultado.

3.1 TEOREMA. *Suponhamos $\alpha^- < \alpha^+$. Então, para todo $t \in (\alpha^-,\alpha^+)$ temos*

$$D\pi_1\tilde{\nu}(t) = 0, \tag{3.8}$$

onde $\tilde{\nu} = I^2 \ \frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}\nu$.

PROVA: Seja α_0 como no lema 4.1, cap IV. Fixemos $t \neq \alpha_0$. tomemos $\epsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, tal que ou $t-\epsilon, t+\epsilon < \alpha_0$, ou $t-\epsilon, t+\epsilon > \alpha_0$. Procedemos como na demonstração do teorema 3.4, cap III, tomando um par e-f (η,q) de tipo Leste e limite $t-\epsilon$, e um par e-f $(\tilde{\eta},\tilde{q})$ de tipo Oeste e limite $t+\epsilon$. Pomos os dados de ambos os pares em $\beta = 0$, iguais, no intervalo $(t-\epsilon, t+\epsilon)$, aos dados escolhidos na demonstração de teorema 3.4, cap III. Façamos $\alpha^* = t-\epsilon, \overline{\alpha} = t+\epsilon$. Das definições de I, J, K e L segue que

$$I, I_\alpha, J, J_t, J_\alpha, J_{\alpha\alpha} = 0(1), \tag{3.9}$$

$$(3.10) \qquad K, K_\alpha, L, L_t, L_\alpha, L_{\alpha\alpha} = (\beta-\alpha)^k 0(1),$$

para ϵ' arbitrariamente pequeno. Obtemos então que

$$\begin{aligned}\eta\overline{q} - \overline{\eta}q = {} & \frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)I^2(\alpha,\beta)\rho^\epsilon(\alpha) + 0(\epsilon)\rho^\epsilon(\alpha) \\ & + 0(\epsilon)\rho^\epsilon(\alpha)(\beta-\alpha)^k,\end{aligned}$$

onde

$$\rho^\epsilon(\alpha) = (\overline{\alpha}-\alpha)^+(\alpha-\alpha^*)^+.$$

Aplicando ν e usando que $\langle \nu, \eta\overline{q} - \overline{\eta}q\rangle = 0$, obtemos

$$0 \leq \left\langle \nu, I^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}\rho^\epsilon \right\rangle \leq 0(\epsilon)\left\{\langle\nu,\rho^\epsilon\rangle + \langle\nu,(\beta-\alpha)^k\rho^\epsilon\rangle\right\}.$$

Definimos

$$\nu^* = (\beta-\alpha)^k\nu.$$

Dividindo, por ϵ^3 e fazendo estimativas óbvias obtemos

$$\begin{aligned} 0 & \leq \frac{1}{\epsilon}\left\langle \nu, I^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}\chi_{[t-\frac{\epsilon}{2},t+\frac{\epsilon}{2}]\times\mathbb{R}}\right\rangle \\ & \leq C\left\{\langle\nu,\chi_{[t-\epsilon,t+\epsilon]\times\mathbb{R}}\rangle + \langle\nu,(\beta-\alpha)^k\chi_{[t-\epsilon,t+\epsilon]\times\mathbb{R}}\rangle\right\},\end{aligned}$$

onde χ_A é a função característica de A.

Tomando o lim sup quando $\epsilon \to 0$, obtemos

$$(3.11) \qquad 0 \leq \overline{D}\pi_1\tilde{\nu}(t) \leq C\left\{\pi_1\nu(t) + \pi_1\nu^*(t)\right\} < +\infty.$$

Portanto, se $\overline{D}\pi_1\tilde{\nu}(t) > 0$ então ou $\pi_1\nu(t) > 0$ ou $\pi_1\nu^*(t) > 0$. Em qualquer dos dois casos teremos que t é um ponto singular de $\pi_1\tilde{\nu}$ e, assim, $\overline{D}\pi_1\tilde{\nu}(t) = +\infty$, o que nos dá uma contradição com (3.11). Assim, para $t \neq \alpha_0$ temos $D\pi_1\tilde{\nu}(t) = 0$. Agora, da mesma forma como na demonstração do teorema 4.2, cap. IV, mostramos que, necessariamente, $\alpha_0 = \alpha^-$. □

Os passos restantes para mostrar que ν é uma medida de Dirac são idênticos aos do final do capítulo anterior. Portanto, temos o resultado:

3.2 TEOREMA. *Suponhamos que z_0 satisfaz (1.3). Então existe uma sequência $\{z^\epsilon\}$ de soluções de (1.4), (1.5) convergindo q.t.p. para uma solução fraca de (1.1), (1.2).*

Capítulo VI

O Sistema da Dinâmica dos Gases Isentrópicos

1. Introdução.

Neste capítulo apresentamos aquele que é, talvez, o mais notável resultado obtido com a aplicação da teoria da compacidade compensada aos sistemas de leis de conservação. Trata-se de uma análise devida a DiPerna [11] relacionada com o sistema

$$
\begin{aligned}
&\rho_t + (\rho u)_x = 0 \\
&(\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0\ ,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

que representa as leis de conservação da massa e do momento para um gás isentrópico (entropia constante). Aqui ρ é a densidade de massa, u a velocidade e p a pressão. O gás é dito politrópico se admite uma equação de estado do tipo $p(\rho) = \frac{\rho^\gamma}{\gamma}$, que é o caso que consideraremos aqui :

O sistema (1.1) é equivalente a

$$
\begin{aligned}
&\rho_t + m_x = 0 \\
&m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + p(\rho)\right)_x = 0\ ,
\end{aligned}
\tag{1.1'}
$$

onde $m = \rho u$ é o momento por unidade de volume.

Em coordenadas Lagrangeanas, isto é, coordenadas (y, t), com y dado implicitamente por

$$y = \int_0^{x(y,t)} \rho(s, t) ds,$$

o sistema (1.1) se transforma em

$$
\begin{aligned}
&v_t - u_y = 0 \\
&v_t - p(v)_y = 0\ ,
\end{aligned}
\tag{1.1''}
$$

onde $v = \rho^{-1}$ é o volume específico.

Suponhamos dada a seguinte condição inicial para (1.1)

$$(\rho(x,t), u(x,t))\big|_{t=0} = (\rho_0(x), u_0(x)) \,, \tag{1.2}$$

com $u_0, \rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $\rho_0(x) \geq 0$, q.t.p. $x \in \mathbb{R}$.

O teorema de DiPerna para o sistema (1.1) afirma que, no caso em que $1 < \gamma \leq \frac{5}{3}$, se tivermos uma seqüência de soluções aproximadas de (1.1), (1.2), $\{(\rho^\epsilon, u^\epsilon)\}$ tais que

$$\|\rho^\epsilon\|_\infty + \|u^\epsilon\|_\infty < M \,,$$

e

$$\rho^\epsilon \geq 0 \,,$$

então, passando a uma subseqüência se necessário, temos que $(\rho^\epsilon, u^\epsilon)$ converge fraco-$*$ para uma solução $(\rho(x,t), u(x,t))$ de (1.1), (1.2).

Este resultado é obtido através de uma análise sobre o suporte das medidas de Young associadas à seqüência $\{(\rho^\epsilon, u^\epsilon)\}$, como é usual nesta teoria. Mais especificamente, a análise de DiPerna mostra que o suporte destas medidas ou se reduz a um ponto, ou está totalmente contido na reta $\rho = 0$. Como as funções não-lineares nas variáveis (ρ, u) que aparecem em (1.1) se anulam em $\rho = 0$, estas duas alternativas nos dão a convergência fraco-$*$ de $(\rho^\epsilon, u^\epsilon)$ para uma solução fraca de (1.1).

Inicialmente, podemos facilmente verificar que (1.1) possui autovalores

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u + c \,, \tag{1.3}$$

onde $c = \sqrt{p'(\rho)}$, e admite como invariantes de Riemann o par (α, β) dado por

$$\begin{aligned} \alpha &= u - \int^\rho \frac{c}{\rho}\, d_\rho, \\ \beta &= u + \int^\rho \frac{c}{\rho}\, d_\rho. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Para um gás politrógico temos

$$\begin{aligned} \alpha &= u - \frac{\rho^\theta}{\theta}, \quad \lambda_1 = \frac{(\gamma+1)}{4}\alpha + \frac{(3-\gamma)}{4}\beta, \\ \beta &= u + \frac{\rho^\theta}{\theta}, \quad \lambda_2 = \frac{(\gamma+1)}{4}\beta + \frac{(3-\gamma)}{4}\alpha. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Estes invariantes podem ser obtidos facilmente através do seguinte raciocínio heurístico. O sistema (1.1″) é obtido a partir de (1.1) por uma transformação $(x, t) \mapsto (y, t)$ que, portanto, preserva a variável tempo. Agora, " *o tempo representa todas as entropias*", no sentido seguinte: se tivermos uma solução $(x, t) \mapsto (u, v)$ para um certo sistema 2×2 de leis de conservação, e pudermos tomar a inversa $(u, v) \mapsto (x, t)$, então $t(u, v)$ será uma entropia para este sistema, com fluxo associado $x(u, v)$. Assim, como a transformação $(x, t) \mapsto (y, t)$ que leva (1.1) em (1.1″) preserva o tempo, então concluímos que (1.1) e (1.1″) possuem as mesmas entropias, respeitada a relação $v = \rho^{-1}$. Agora, estas entropias satisfazem uma equação hiperbólica de 2º grau e, de modo geral, os invariantes de Riemann podem ser definidos como as coordenadas (α, β) que põem esta equação para as entropias na forma canônica onde a parte de 2º grau se reduz ao termo com derivada mista $\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}$. Portanto, os sistemas (1.1) e (1.1″) devem possuir os mesmos pares de invariantes de Riemann, sempre levando em conta a relação $v = \rho^{-1}$. Por outro lado, o cálculo dos invariantes para (1.1″) pode ser feito muito rapidamente já que é um sistema de tipo conjugado, o mais simples possível.

Podemos facilmente verificar que a equação das entropias para (1.1) nas variáveis (α, β) é a Euler-Poisson-Darboux

$$\eta_{\alpha\beta} - \frac{k}{(\beta - \alpha)} (\eta_\beta - \eta_\alpha) = 0 \;, \tag{1.6}$$

com índice $k = \frac{-1}{2} \frac{(3-\gamma)}{\gamma - 1}$. No caso que vamos tratar aqui, $1 < \gamma \leq \frac{5}{3}$, temos $k < 0$.

Verifica-se facilmente também que (1.1) admite a entropia (energia mecânica)

$$\eta_*(\rho, u) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho \int^\rho \frac{p}{\rho^2} d\rho, \tag{1.7}$$

que, no caso em que $p(\rho) = \frac{\rho^\gamma}{\gamma}$, tem a forma

$$\eta_*(\rho, u) = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma(\gamma - 1)} = \frac{m^2}{2\rho} + \frac{\rho^\gamma}{\gamma(\gamma - 1)}, \tag{1.7'}$$

e é estritamente convexa nas variáveis (ρ, m) quando $1 < \gamma \leq 2$.

A existência de uma entropia estritamente convexa é um fato de importância decisiva para a demonstração de que

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}q(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon) \in \{ \text{ compacto de } W^{-1,2}\} \tag{1.8}$$

para pares e-f suaves. Recordando a maneira usual de demonstrar (1.8), vemos que para tal devemos ter, nas variáveis (ρ, m),

$$|\nabla^2\eta| \le C_\eta \nabla^2\eta_* \ , \tag{1.9}$$

como formas bilineares, onde η_* é a entropia estritamente convexa associada ao sistema em questão. Quando $\nabla^2\eta$ é limitada, (1.9) decorre imediatamente da convexidade estrita de η_*. No entanto, como em $\rho = 0$ a equação (1.6) é singular ($\beta = \alpha$), em geral, as entropias para (1.1) serão também singulares em $\rho = 0$, i.e., $\nabla^2\eta$ será ilimitada próximo de $\rho = 0$. Como isto também ocorre com η_*, a desigualdade (1.9) será satisfeita para aquelas entropias para as quais

$$(\nabla^2\eta_*)^{-\frac{1}{2}}(\nabla^2\eta)(\nabla^2\eta_*)^{-\frac{1}{2}}$$

for limitada uniformemente, nas variáveis (ρ, m). A limitação

$$\left|(\nabla^2\eta_*)^{-\frac{1}{2}}(\nabla^2\eta)(\nabla^2\eta_*)^{-\frac{1}{2}}\right| \le C, \tag{1.10}$$

pode ser verificada em cada ponto (ρ, m) em qualquer base de $\mathbb{R}^2$. Consideremos os autovetores para (1.1)

$$\begin{aligned} r_1 &= (1, \lambda_1) = (1, \frac{m}{\rho} - c) \ , \\ r_2 &= (1, \lambda_2) = (1, \frac{m}{\rho} + c) \end{aligned} \tag{1.11}$$

De um modo geral, se tivermos um par linearmente independente de autovetores para um sistema 2×2 de leis de conservação como (1.1′), estritamente hiperbólico, se η for uma entropia duas vezes diferenciável para o mesmo vale:

$$\nabla^2\eta(r_1, r_2) = 0 \, . \tag{1.12}$$

Isto se verifica da seguinte maneira. Diferenciando a relação $\nabla q = \nabla\eta\nabla f$, obtemos

$$\nabla^2 q = \nabla^2\eta\nabla f + \nabla\eta\nabla^2 f.$$

Como $\nabla^2 q$ e $\nabla\eta\nabla^2 f$ são matrizes simétricas, temos que $\nabla^2\eta\nabla f$ tembém é simétrica, ou seja,

$$\nabla^2\eta\nabla f = {}^t\nabla f\nabla^2\eta. \tag{1.13}$$

Multiplicando (1.13) por r_1 pela direita e por r_2 pela esquerda obtemos

$$\lambda_1\nabla^2\eta(r_1, r_2) = \lambda_2\nabla^2\eta(r_1, r_2). \tag{1.14}$$

A hiperbolicidade estrita nos dá, então, (1.12). Portanto, denotando $B = (\nabla^2\eta_*)^{1/2}$, temos que $\{\frac{Br_1}{\|Br_1\|}, \frac{Br_2}{\|Br_2\|}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Assim, fazendo

$$A = (\nabla^2\eta_*)^{-1/2}\ \nabla^2\eta(\nabla\eta_*)^{-1/2}$$

a verificação de (1.10) se reduz a obtermos $C > 0$ tal que

$$\left|\left\langle A\frac{Br_i}{\|Br_i\|}, \frac{Br_i}{\|Br_i\|}\right\rangle\right| \leq C, \quad i = 1, 2,$$

ou seja,

$$\left|\nabla^2\eta(r_i, r_i)\right| \leq C\nabla^2\eta_*(r_i, r_i), \quad i = 1, 2. \tag{1.15}$$

Agora, (1.1) deixa de ser estritamente hiperbólico em $\{\rho = 0\}$. No entanto, se (1.10) vale para uma região limitada qualquer em $\{\rho > 0\}$, por continuidade (1.10) valerá no fecho da mesma região.

Assim, satisfeita a condição (1.15), o que nos dá (1.10), obtemos, através de procedimentos descritos em capítulos anteriores, a propriedade (1.8).

A condição (1.10) representa, assim, uma restrição no universo de entropias das quais podemos dispor para a análise das medidas de Young. Ainda assim teremos entropias em número suficiente, como veremos a seguir.

2. Entropias Admissíveis para (1.1).

Dados dois pares e-f (η, q), $(\overline{\eta}, \overline{f})$ com η e $\overline{\eta}$ satisfazendo (1.10), temos a relação de comutatividade

$$(2.1) \qquad \langle \nu, \eta\overline{q} - \overline{\eta}q \rangle = \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, \overline{q} \rangle - \langle \nu, \overline{\eta} \rangle \langle \nu, q \rangle ,$$

onde $\nu = \nu_{x,t}$ é a família de medidas de Young obtida a partir da seqüência aproximadora $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$, como conseqüência de (1.8) e do lema do div-rot. Nesta seção descreveremos como é possível obter pares e-f com esta propriedade, aos quais DiPerna denominou *pares fracos* e as respectivas entropias como *entropias fracas*.

Voltemos a equação da entropia (1.6)

$$\eta_{\alpha\beta} - \frac{k}{\beta - \alpha} (\eta_\beta - \eta_\alpha) = 0 ,$$

onde temos $k = \frac{-1}{2} \frac{3-\gamma}{\gamma-1} < 0$, no caso que tratamos aqui, $1 < \gamma \leq \frac{5}{3}$. Antes de analisar (1.6), consideremos a equação semelhante

$$(2.2) \qquad \eta_{\alpha\beta} - \frac{k'}{\beta - \alpha} (\eta_\beta - \beta_\alpha) = 0 ,$$

com $k' > 0$, desta feita.

Podemos obter infinitas soluções para (2.2), na região $\beta - \alpha \geq 0$, do seguinte modo. Suponhamos que (2.2) admita solução da forma

$$(2.3) \qquad \eta(\alpha, \beta) = \alpha^n f\Big(\frac{\alpha - \beta}{\alpha}\Big).$$

Substituindo em (2.2) e arranjando os termos segue

$$\Big(1 - \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\Big) f'' \Big(\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\Big) + \Big(n - 1 + k'\Big(\frac{2\alpha}{\alpha-\beta} - 1\Big)\Big) f' \Big(\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\Big)$$
$$+ nk' \frac{\alpha}{\alpha-\beta} f \Big(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\Big) = 0.$$

Fazendo $\sigma = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}$, obtemos

$$(2.4) \qquad \sigma(1-\sigma)f''(\sigma) + (2k' - (-n - k' + 1)\sigma)f'(\sigma) + nk'f(\sigma) = 0.$$

Recordemos a equação hipergeométrica (veja [46, cap.XIV])

$$(2.5) \qquad \sigma(1-\sigma)f''(\sigma) + \{c - (a+b+1)\sigma\}f'(\sigma) - abf(c) = 0.$$

A solução de (2.5) analítica em $|\sigma| < 1$, com $f(0) = 1$, é a função hipergeométrica $f(\sigma) = F(a, b, c; \sigma)$. Vemos facilmente que (2.4) é uma equação hipergeométrica onde $a = -n$, $b = k'$, $c = 2k'$. Portanto, (2.4) admite como solução a função $f(\sigma) = F(-n, k', 2k'; \sigma)$. Agora, como já foi mencionado no Capítulo V, quando $Re(c) > Re(b) > 0$, como é o caso já que supomos $k' > 0$, temos para $F(a, b, c; \sigma)$ a representação integral

$$F(a,b,c;\sigma) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \theta^{b-1}(1-\theta)^{c-b-1}(1-\theta\sigma)^{-a} d\theta.$$

Assim temos para $f(\sigma)$ a representação

$$f(\sigma) = \frac{\Gamma(2k')}{\Gamma(k')^2} \int_0^1 \theta^{k'-1}(1-\theta)^{k'-1}(1-\theta\sigma)^n d\theta.$$

Retornando a (2.3) obtemos soluções de (2.2) na forma

$$\eta(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(2k')}{\Gamma(k')^2} \int_0^1 \theta^{k'-1}(1-\theta)^{k'-1}(\alpha - \theta(\overline{\alpha} - \beta))^n d\theta.$$

Assim, por linearidade, para todo polinômio $p(t)$ podemos obter uma solução de (2.2) da forma

$$\eta(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(2k')}{\Gamma(k')^2} \int_0^1 \theta^{k'-1}(1-\theta)^{k'-1} p(\alpha - \theta(\alpha - \beta)) d\theta.$$

Por densidade obtemos que para toda função $C^2, \phi(t)$, temos uma solução de (2.2) da forma

$$(2.6) \qquad \eta(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(2k')}{\Gamma(k')^2} \int_0^1 \theta^{k'-1}(1-\theta)^{k'-1} \phi(\alpha - \theta(\alpha - \beta)) d\theta.$$

Agora, não é difícil ver que $\eta(\alpha,\beta)$ dada em (2.6) é solução do problema de valor inicial para (2.2) com dados

$$\eta(\alpha,\beta)\big|_{\alpha=\beta=t} = \phi(t)\,,$$

$$\lim_{\beta-\alpha\to 0} (\beta-\alpha)^{2k'}(\eta_\beta - \eta_\alpha) = 0\,.$$

Retornemos agora a equação (1.6) onde temos $k < 0$. Suponhamos que

$$\eta(\alpha,\beta) = (\beta-\alpha)^d \tilde{\eta}, \tag{2.7}$$

para algum $d \in \mathbb{R}$. Substituindo em (1.6) obtemos

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} - \frac{k+d}{\beta-\alpha}\,(\tilde{\eta}_\beta - \tilde{\eta}_\alpha) - \frac{d(2k-1+d)}{(\beta-\alpha)^2}\,\tilde{\eta} = 0\,. \tag{2.8}$$

Assim, para que tenhamos o coeficiente do termo de ordem zero em (2.8) igual a zero, devemos ter $d = 0$ ou $d = 1-2k$. Neste último caso $\tilde{\eta}$ satisfaz uma equação como (2.2) com

$$k' = 1 - k > 0\,.$$

Portanto, pelo que vimos acima, (1.6) admite soluções na forma

$$\eta(\alpha,\beta) = \text{const.}(\beta-\alpha)^{1-2k}\int_0^1 \theta^{-k}(1-\theta)^{-k}\phi(\alpha-\theta(\alpha-\beta))d\theta\,, \tag{2.9}$$

para toda função C^2, ϕ.

Agora, não é difícil ver que η dada por (2.9), para "const." adequadamente escolhida, é solução do problema de valor inicial para (1.6) com dados

$$\eta\big|_{\alpha=\beta} = 0\,, \tag{2.10}$$

$$\lim_{\beta-\alpha\to 0} a(\beta-\alpha)^{2k}\,(\eta_\beta - \eta_\alpha)\big|_{\alpha=\beta=t} = \phi(t)\,, \tag{2.11}$$

onde $a = \left(\frac{\gamma-1}{4}\right)^{2k}$, que são equivalentes, em variáveis (ρ,u), aos dados

$$\eta(\rho,u)\big|_{\rho=0} = 0\,, \tag{2.12}$$

$$(2.13) \qquad \lim_{\rho\to 0} \frac{\partial}{\partial \rho}\, \eta(\rho, u) = \phi(u).$$

De passagem observamos que quando $0 < k' < 1$ então a equação (2.2) admite soluções com representação integral da forma (2.6) e da forma (2.9), com $k' = 1 - k$.

Esquecendo a constante em (2.9), estudemos as entropias para (1.1) dadas pela fórmula (2.9). De agora em diante vamos analisar o caso em que γ é da forma

$$\gamma = 1 + \frac{2}{N}, \quad N = 2m+1, \quad m \geq 1, \text{ inteiro }.$$

Os resultados que daremos aqui podem ser estendidos a qualquer γ no intervalo $(1, \frac{5}{3}]$, porém as complicações técnicas aumentam significativamente (veja [**2** − **3**]).

Portanto, temos $-k = m$, e, então,

$$(2.14) \qquad \eta(\alpha,\beta) = (\beta-\alpha)^{2m+1} \int_0^1 [\theta(1-\theta)]^m \phi(\alpha + (\beta-\alpha)\theta) d\theta.$$

Fazendo $s = \alpha + (\alpha,\beta)\theta$, obtemos

$$(2.15) \qquad \eta(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta [(\beta-s)(s-\alpha)]^m \phi(s) ds.$$

Estudemos a expressão em (2.14) para a escolha $\phi = D^{2m}\psi$. Usando a regra da cadeia temos

$$\eta(\beta-\alpha) = (\alpha,\beta) \int_0^1 [\theta(1-\theta)]^m \frac{d^{2m}}{d\theta^{2m}}\, \psi(\alpha + (\beta-\alpha)\theta) d\theta.$$

Integrando por partes m vezes, inicialmente, obtemos

$$\eta(\beta-\alpha) = (-1)^m(\beta-\alpha) \int_0^1 \frac{d^m}{d\theta^m}[\theta(1-\theta)]^m \frac{d^m}{d\theta^m}\, \psi(\alpha + (\beta-\alpha)\theta) d\theta.$$

Fazendo outras m integrações por partes, somos levados a seguinte expressão para η:

$$(2.16) \qquad \eta(\alpha,\beta) \equiv P_m\ \psi(\alpha,\beta) = \sum_{j=0}^m a_j (\beta-\alpha)^{m-j} C_{m-j-1}[\psi],$$

onde

$$C_k[\psi] = D^k\psi(\beta) + (-1)^k D^k\psi(\alpha), \quad k \geq 0, \tag{2.17}$$

$$C_{-1}[\psi] = \int_\alpha^\beta \psi(s)ds. \tag{2.18}$$

Além dos pares formados pelas entropias do tipo $P_m\psi$ dadas em (2.16), dois pares e-f particulares terão importância especial na análise que faremos do suporte das medidas de Young. São eles, $G_0 = (\eta_0, q_0)$ e $G_1 = (\eta_1, q_1)$. A entropia η_0 é obtida fazendo-se ϕ em (2.15) igual a medida de Dirac concentrada no zero, via um processo usual de aproximação:

$$\eta_0(\alpha,\beta) = (-\alpha\beta)^m\chi, \tag{2.19}$$

onde χ é a função característica do 2º quadrante, $\alpha \leq 0 \leq \beta$.

Obtemos,

$$q_0(\alpha,\beta) = \frac{N-1}{2N}\{(-\alpha)^m\beta^{m+1} + \beta^m\alpha(-\alpha)^m\}\chi, \tag{2.20}$$

facilmente, usando uma das fórmulas

$$q = \lambda_1\eta - \frac{(\gamma+1)}{4}\int_\alpha^\beta \eta(x,\beta)dx, \tag{2.21}$$

$$q = \lambda_2\eta - \frac{(\gamma+1)}{4}\int_\alpha^\beta \eta(\alpha,y)dy, \tag{2.22}$$

que decorrem de

$$\frac{\partial q}{\partial\alpha} = \lambda_1\frac{\partial}{\partial\alpha}\eta, \quad \frac{\partial q}{\partial\beta} = \lambda_2\frac{\partial}{\partial\beta}\eta.$$

De modo semelhante, tomando uma seqüência ϕ_n se aproximando da derivada da função δ na origem obtemos o par $G_1 = (\eta_1, q_1)$:

$$\eta_1 = (-\alpha\beta)^{m-1}(\beta+\alpha)\chi, \tag{2.23}$$

$$(2.24) \qquad q_1 = \frac{(N-1)}{N}(-\alpha\beta)^{m-1}\left\{\frac{\beta^2}{2} + \frac{(N^2-2N-1)}{(N-1)^2}\alpha\beta + \frac{N^2}{2}\right\}\chi .$$

A importância dos pares G_0, G_1 reside na propriedade

$$(2.25) \qquad \eta_0 q_1 - \eta_1 q_0 = \frac{2}{N(N-1)}(-\alpha\beta)^{2m}\chi \geq 0 ,$$

que pode ser verificada diretamente por substituição.

Terminamos esta seção com a verificação da desigualdade (1.15) (que equivale a (1.10) e (1.9)) para as entropias fracas, definidas por (2.14) (ou (2.15)).

Inicialmente, notemos que de

$$\alpha = \frac{m}{\rho} - N\rho^{1/N}, \ \beta = \frac{m}{\rho} + N\rho^{1/N} ,$$

segue que

$$\frac{\partial}{\partial\rho} = -\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\left(\frac{\beta-\alpha}{2N}\right)^{-N}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2N}\right)^{1-N}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\beta}\right) ;$$

$$\frac{\partial}{\partial m} = \left(\frac{\beta-\alpha}{2N}\right)^{-N}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^2 ;$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} = {} & \left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2\left(\frac{\beta-\alpha}{2N}\right)^{-2N}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta-\alpha}{2N}\right)^{2-2N}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^2 \\ & - (\beta+\alpha)\left(\frac{\beta-\alpha}{2N}\right)^{1+2N}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right) \\ & + \text{ const.}\left(\frac{\beta-\alpha}{2N}\right)^{-2N}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \text{ const.}(\beta+\alpha)\left(\frac{\beta-\alpha}{2N}\right)^{-2N}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right) ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial m^2} = {} & -\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\left(\frac{\beta-\alpha}{2N}\right)^{-2N}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta-\alpha}{2N}\right)^{1-2N}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right) \\ & + \text{ const. } (\beta-\alpha)^{-2N}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right) ;\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2} = \left(\frac{\beta-\alpha}{2N}\right)^{-2N}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^2 ,$$

As fórmulas para os operadores diferenciais acima nos dão, para as entropias fracas (2.14),

$$\frac{\partial \eta}{\partial \rho} = 0(1), \ \frac{\partial \eta}{\partial m} = 0(1),$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho^2} = 0(\rho^{-1}), \ \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial m}\ \eta = 0(\rho^{-1}), \ \frac{\partial^2}{\partial m^2}\ \eta = 0(\rho^{-1}).$$

Assim, temos que

$$\nabla^2 \eta(r_i, r_i) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\ \eta + 2\lambda_i \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial m}\ \eta + \lambda_i^2 \frac{\partial^2}{\partial m^2}\ \eta = 0(\rho^{-1}), \quad i = 1, 2.$$

Por outro lado, usando a fórmula (1.7′) para η_* obtemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\ \eta_* = 0(\rho^{-1}), \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial m}\ \eta_* = 0(\rho^{-1}), \frac{\partial^2}{\partial m^2} \eta_* = 0(\rho^{-1}),$$

e, portanto, temos

$$\nabla^2 \eta_*(r_i, r_i) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\ \eta_* + 2\lambda_i \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial m}\ \eta_* + \lambda_i^2 \frac{\partial^2}{\partial m^2}\ \eta_* = 0(\rho^{-1}), \quad i = 1, 2.$$

Assim vemos que para toda entropia fraca a desigualdade de (1.5) é satisfeita para alguma constante $C > 0$, dependendo de η, em regiões limitadas do semi-plano $\rho \geq 0$. Portanto, as entropias fracas, definidas por (2.14), são admissíveis, no sentido da discussão feita ao final da seção anterior.

3. Análise das Medidas de Young.

Pelo que vimos acima, dados dois pares e-f fracos $(\eta, q), (\overline{\eta}, \overline{q})$, vale a relação (2.1):

$$\langle \nu, \eta \overline{q} - \overline{\eta} q \rangle = \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, \overline{q} \rangle - \langle \nu, \overline{\eta} \rangle \langle \nu, q \rangle .$$

Denotemos por V a linha $\{\rho = 0\}$. A estratégia aqui será provar que Spt ν está contido num conjunto da forma $V \cup P$, onde P é um ponto arbitrário em $\rho > 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que P não está sobre um dos eixos $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ (isto ficará claro mais adiante). Se ν admite a decomposição $\nu = \nu| V + a\delta_P$, então tomando os pares $G_0 = (\eta_0, q_0)$, $G_1 = (\eta_1, q_1)$ e aplicando a estes a relação de comutatividade (2.1) (válida também para limites de pares fracos) obtemos

$$a(\eta_0 q_1 - \eta_1 q_0)(P) = a^2(\eta_0 q_1 - \eta_1 q_0)(P)\,,$$

de onde deduzimos que ou $a = 1$ e ν é uma medida de Dirac, ou $a = 0$ e ν está concentrada em V.

Seja Δ o menor triângulo

$$\{(\alpha,\beta)\colon \beta \leq \beta_0, \alpha \geq \alpha_0, \beta \geq \alpha\}$$

contendo a parte do suporte de ν que não está em V.

Consideremos a medida

$$\tilde{\nu} = (\beta - \alpha)^{2m}\nu\,.$$

Mostraremos que as projeções $\pi_1\tilde{\nu}, \pi_2\tilde{\nu}$, da medida $\tilde{\nu}$ sobre os eixos coordenados α,β, respectivamente, satisfazem

$$D\pi_1\tilde{\nu}(t) = 0,\;\; D\pi_2\tilde{\nu}(t) = 0,\;\; \alpha_0 < t < \beta_0\,.$$

Isto implica, naturalmente, que

$$\operatorname{Spt}\nu \subset \{P\} \cup V,$$

com $P = (\alpha_0, \beta_0)$.

Observemos que podemos trocar os invariantes α,β por $\alpha + c_0$, $\beta + c_0$, para qualquer constante c_0 (o que é equivalente a substituir a velocidade u, por $u + c_0$) sem alterar em nada o nosso problema, já que essa substituição não altera a equação das entropias. Esta propriedade é conhecida como invariância Galileana do sistema (1.1). Por isto, podemos supor que o triângulo minimal Δ está centrado na origem, isto é, $\alpha_0 + \beta_0 = 0$.

Começamos a análise do suporte de ν com o seguinte resultado.

3.1. LEMA. *Se ν não está concentrada em V então o vértice P do triângulo minimal Δ está no suporte de ν.*

PROVA: Sejam $\phi^\varepsilon, \overline{\phi^\varepsilon}$ funções C^2 não-negativas, com Spt $\phi^\varepsilon \subset [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon]$, Spt $\overline{\phi^\varepsilon} \subset [\beta_0 - \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon]$, $\phi^\varepsilon > 0$ em $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$, $\overline{\phi^\varepsilon} > 0$ em $(\beta_0 - \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que Spt $\nu \cap [\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon] \times [\beta_0 - \varepsilon, \beta_0] = \emptyset$. Sejam $\eta^\varepsilon, \overline{\eta}^\varepsilon$ obtidas substituindo-se ϕ por $\phi^\varepsilon, \overline{\phi^\varepsilon}$ em (2.14), respectivamente, e $q^\varepsilon, \overline{q}^\varepsilon$ os fluxos de entropia associadas. Claramente, temos

$$\langle \nu, \eta^\varepsilon\, \overline{q^\varepsilon} - \overline{\eta}^\varepsilon q^\varepsilon \rangle = 0$$

visto que Spt $(\eta^\varepsilon, q^\varepsilon) \subset (-\infty, \alpha_0 + \varepsilon] \times \mathbb{R}$, Spt $(\overline{\eta}^\varepsilon, \overline{q}^\varepsilon) \subset \mathbb{R} \times [\beta_0 - \varepsilon, +\infty)$, e, conseqüentemente,

$$\text{Spt } \nu \cap \text{Spt } (\eta^\varepsilon \overline{q}^\varepsilon - \overline{\eta}^\varepsilon q^\varepsilon) = \emptyset$$

Por outro lado, como Δ é minimal, devemos ter $\langle \nu, \eta^\varepsilon \rangle > 0$, $\langle \nu, \overline{\eta}^\varepsilon \rangle > 0$. Assim, temos

$$\frac{\langle \nu, q^\varepsilon \rangle}{\langle \nu, \eta^\varepsilon \rangle} = \frac{\langle \nu, \overline{q}^\varepsilon \rangle}{\langle \nu, \overline{\eta}^\varepsilon \rangle}\,.$$

Agora, em $\{(\alpha, \beta) \in \Delta,\ \alpha_0 \le \alpha \le \alpha_0 + \varepsilon\}$ temos $q^\varepsilon = (\lambda_1 + 0(\varepsilon))\eta^\varepsilon$, e em $\{(\alpha, \beta) \in \Delta, \beta_0 - \varepsilon \le \beta \le \beta_0\}$ temos $\overline{q}^\varepsilon = (\lambda_2 + 0(\varepsilon))\overline{\eta}^\varepsilon$. Portanto, para as medidas de probabilidade $\mu^\varepsilon, \overline{\mu}^\varepsilon$ definidas por

$$\langle \mu^\varepsilon, h \rangle = \frac{\langle \nu, h\eta^\varepsilon \rangle}{\langle \nu, \eta^\varepsilon \rangle}\,,$$

$$\langle \overline{\mu}^\varepsilon, h \rangle = \frac{\langle \nu, h\overline{\eta}^\varepsilon \rangle}{\langle \nu, \overline{\eta}^\varepsilon \rangle}\,,$$

para toda função contínua h, temos

$$\langle \mu^\varepsilon, \lambda_1 \rangle = \langle \overline{\mu}^\varepsilon, \lambda_2 \rangle + 0(\varepsilon)\,.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, passando a uma subseqüência se necessário, temos $\mu^\varepsilon \rightharpoonup \mu$, $\overline{\mu}^\varepsilon \rightharpoonup \overline{\mu}$, onde μ e $\overline{\mu}$ são medidas de probabilidade e é fácil ver que

$$\text{Spt } \mu \subset \{(\alpha, \beta) \in \Delta, \alpha = \alpha_0\},\ \text{Spt } \overline{\mu} \subset \{(\alpha, \beta) \in \Delta; \beta = \beta_0\}\,.$$

Assim, temos

$$(3.2) \qquad \langle \mu, \lambda_1 \rangle = \langle \overline{\mu}, \lambda_2 \rangle \ .$$

Agora, $\frac{\partial}{\partial\beta}\lambda_1 = \frac{\partial}{\partial\alpha}\lambda_2 = \frac{1}{4}(3-\gamma) > 0$. Portanto,

$$\langle \mu, \lambda_1 \rangle \leq \lambda_1(P) < \lambda_2(P) \leq \langle \overline{\mu}, \lambda_2 \rangle \ .$$

Esta última cadeia de desigualdades contradiz (3.2), donde segue o resultado desejado. □

Agora passaremos a demonstração de que $D\pi_1\tilde{\nu}(0) = 0 = D\pi_2\tilde{\nu}(0)$. Procedimentos inteiramente análogos levam a demonstração de que $D\pi_1\tilde{\nu}(t) = 0 = D\pi_2\tilde{\nu}(t)$, para $\alpha_0 < t < \beta_0$.

Seja $\psi(t)$ uma função C_0^∞, com Spt $\psi(-1,1)$. Façamos $\psi_n(t) = n\psi(nt)$ e denotemos

$$\eta_n = P_m(\psi_n)\,,$$

e q_n o fluxo de entropia associada a η_n (suporemos os fluxos de entropia sempre normalizados por $q(\alpha_0, \alpha_0) = 0$).

O passo decisivo da presente análise é o seguinte resultado.

3.2. Lema. *Para cada $\psi \in C_0^\infty(-1,1)$ temos que $\langle \nu, \eta_n \rangle, \langle \nu, q_n \rangle$ são limitadas uniformemente em n.*

A prova do lema 3.2 será feita com o auxílio da seguinte proposição.

3.3. Proposição. *Suponhamos que (η, q) satisfaz $|\eta| + |q| \leq$ const. $|\alpha\beta|^{m-1}$. Então, para toda $\psi \in C_0^\infty(-1,1)$, a forma $B_n = \eta q_n - \eta_n q$ é uniformemente limitada em n.*

Prova: Temos Spt $\psi_n \subset (-1/n, 1/n)$. Claramente, os pares (η_n, q_n) se anulam em

$$F = \left\{ (\alpha, \beta) : \beta < \frac{-1}{n} \right\}.$$

Denotemos

$$S_\alpha = \left\{ (\alpha, \beta) \colon |\alpha| < \frac{1}{n} \right\}, \quad S_\beta = \left\{ (\alpha, \beta) \colon |\beta| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Não repetiremos mais a condição sempre válida $\beta \geq \alpha$. Particionamos F^c em cinco regiões, quais sejam:

$$F^c = \tilde{S}_\alpha \cup \tilde{S}_\beta \cup Q \cup U \cup I,$$

com

$$\begin{aligned}
Q &= \{(\alpha,\beta) \colon \alpha \leq -\frac{1}{n},\ \ \beta \geq \frac{1}{n}\}, \\
U &= \{(\alpha,\beta) \colon \alpha \geq \frac{1}{n}\}, \\
I &= \{(\alpha,\beta) \colon |\alpha| \leq \frac{1}{n},\ \ |\beta| \leq \frac{1}{n}\}, \\
\tilde{S}_\alpha &= S_\alpha \cap I^c,\ \ \tilde{S}_\beta = S_\beta \cap I^c.
\end{aligned}$$

Na zona de interação I temos $|\eta| + |q| \leq$ const.n^{2-2m}, $|\eta_n| + |q_n| \leq$ const. e, portanto, $B_n|I$ é uniformemente limitada. Na região U temos $\eta_n \equiv 0$ e $q \equiv q_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ e, portanto, temos $|\eta_n| + |q_n| \leq$ const. . Na região Q, η_n é constante, $\eta_n = \int \psi_n(t)dt = \int \psi(t)dt$, como podemos ver por (2.16)–(2.18), enquanto que para q_n temos

$$\begin{aligned}
q_n(\alpha,\beta) &= q_n(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}) + \int_{(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})}^{(\alpha,\frac{1}{n})} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha}\,\eta_n d\alpha + \\
&+ \int_{(\alpha,\frac{1}{n})}^{(\alpha,\beta)} \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \beta}\eta_n d\beta = q_n(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

e, portanto, $|q_n| = \left|q_n(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})\right| \leq$ const. . Logo, precisamos apenas considerar as faixas truncadas $\tilde{S}_\alpha$ e $\tilde{S}_\beta$ nas quais temos

$$\eta_n = \sum_{j=0}^{m} a_j(\beta-\alpha)^{m-j} D^{m-j-1}\psi_n(\beta),\ \text{em } \tilde{S}_\beta\,, \tag{3.4}$$

$$\eta_n = \sum_{j=0}^{m} a_j(\beta-\alpha)^{m-j}(-1)^{m-j-1} D^{m-j-1}\psi_n(\alpha),\ \text{em } \tilde{S}_\alpha. \tag{3.5}$$

Substituindo (3.4) em (2.22) encontramos que

$$q_n = \lambda_2 \eta_n + 0(n^{m-1}),$$

$$B_n = \eta(\lambda_2 \eta_n + 0(n^{m-1})) - \eta_n(\lambda_2 \eta + 0(n^{-m}))$$

$$= 0(n^{1-m} n^{m-1} + n^m n^{-m}) = 0(1),$$

no conjunto $\tilde{S}_\beta$. Analogamente, encontramos que $B_n = 0(1)$ em $\tilde{S}_\alpha$. □

A demonstração da proposição tem como conseqüência particular o seguinte resultado.

3.4. Corolário. *Seja $G_0 = (\eta_0, q_0)$ dado por (2.19),(2.20) e*

$$\psi \in C_0^\infty(-1,1) \quad \textit{tal que}$$

$$\int_{-1}^{1} \psi(t)dt = 0. \tag{3.6}$$

Então, $B_n^0 \equiv \eta_0 q_n - \eta_n q_0 = 0(n^{-1})$.

Prova: Isto segue do fato de que, desta feita, em Q, $\eta_n \equiv 0$ e, portanto,

$$q_n = q_n\left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right) = -\left(\frac{\gamma+1}{4}\right) \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} \eta_n\left(-\frac{1}{n}, y\right) dy = 0\left(\frac{1}{n}\right);$$

similarmente, em U, $\eta_n \equiv 0$ e

$$q_n = q_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = q_n\left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{\gamma+1}{4}\right) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \eta_n\left(x, \frac{1}{n}\right) dx = 0\left(\frac{1}{n}\right);$$

em I temos $|\eta_0| + |q_0| \leq$ const. n^{-2m}; e, finalmente, em $\tilde{S}_\alpha \cup \tilde{S}_\beta$ temos $|\eta_0| + |q_0| \leq$ const. n^{-m}, o que nos dá

$$B_n^0 = \eta_0\Big(\lambda_2 \eta_n + 0(n^{m-1})\Big) - \eta_n\Big(\lambda_2 \eta_0 + 0(n^{-m-1})\Big)$$

$$0(n^{-m} n^{m-1} + n^m n^{-m-1}) = 0(n^{-1}).$$

□

Façamos agora a prova do Lema 3.2.

PROVA DO LEMA 3.2: Fixemos (η, q), satisfazendo $|\eta| + |q| \leq$ const. $|\alpha\beta|^{m-1}$, e consideremos a relação de comutatividade

$$\langle \nu, \eta q_n - \eta_n q \rangle = \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, q_n \rangle - \langle \nu, \eta_n \rangle \langle \nu, q \rangle . \tag{3.7}$$

Suponhamos por absurdo que

$$\overline{\lim} |\langle \nu, \eta_n \rangle| = +\infty \text{ ou } \overline{\lim} |\langle \nu, q_n \rangle| = +\infty.$$

temos que ou $|\langle \nu, \eta_n \rangle \,/\, \langle \nu, q_n \rangle|$ ou $|\langle \nu, q_n \rangle \,/\, \langle \nu, \eta_n \rangle|$ é limitada. Para fixar idéias, assumimos que $\overline{\lim} |\langle \nu, \eta_n \rangle| = +\infty$ e

$$\lim \frac{\langle \nu, q_n \rangle}{\langle \nu, \eta_n \rangle} = a ,$$

passando a uma subseqüência se necessário. Dividindo (3.7) por $\langle \nu, \eta_n \rangle$ e fazendo $n \to +\infty$ obtemos

$$\langle \nu, q \rangle = a \langle \nu, \eta \rangle ,$$

para todo par e-f fraco satisfazendo $|\eta| + |f| \leq |\alpha\beta|^{m-1}$. Assim, se $(\eta, q), (\overline{\eta}, \overline{q})$ são de ordem $|\alpha\beta|^{m-1}$ então

$$\langle \nu, \eta\overline{q}, \overline{\eta}q \rangle = \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, \overline{q} \rangle - \langle \nu, \overline{\eta} \rangle \langle \nu, q \rangle = 0 .$$

Aplicando a G_0 e G_1 obtemos

$$\langle \nu, \eta_0 q_1 - \eta_1 q_0 \rangle = 0 ,$$

o que dá uma contradição já que $P \in \text{Spt } \nu$, $(\eta_0 q_1 - \eta_1 q_1)(P) > 0$ e $\eta_0 q_1 - \eta_1 q_0 \geq 0$ em toda parte. □

Assim, dados $\psi, \hat{\psi} \in C_0^\infty(-1, 1)$ com $\eta_n = P_m(\psi_n)$, $\hat{\eta}_n = P_m(\hat{\psi}_n)$, então, pelo lema 3.1 e a relação de comutatividade (2.1), temos que $\langle \nu, \eta_n \hat{q}_n - \hat{\eta}_n q_n \rangle$ é uniformemente limitada. O próximo resultado mostra que se ψ e $\hat{\psi}$ satisfazem

$$\int_{-1}^{1} \psi(t) dt = \int_{-1}^{1} \hat{\psi}(t) dt = 0 , \tag{3.8}$$

esta limitação pode ser melhorada.

3.5. LEMA. *Suponhamos que* $\psi, \hat{\psi} \in C_0^\infty(-1,1)$ *satisfazem (3.8). Seja* $B_n = \eta_n \hat{q}_n - \hat{\eta}_n q_n$. *Então* $B_n \mid Q \cup U \equiv 0$ *e*

$$(3.9) \qquad \langle \nu, B_n \rangle \to 0, \text{ quando } n \to \infty .$$

PROVA: O fato de que $B|Q \cup U \equiv 0$ decorre direto de (3.8), já que neste caso, $\eta_n|Q \cup U = \hat{\eta}_n|Q \cup U = 0$. Agora, para provar (3.9) procedemos do seguinte modo. Passando a uma subseqüência se necessário, podemos supor que $\langle \nu, \eta_n \rangle, \langle \nu, q_n \rangle, \langle \nu, \hat{\eta}_n \rangle, \langle \nu, \hat{q}_n \rangle$ convergem quando $n \to \infty$, em vista do lema 3.2. Pelo Lema 3.4 e a relação (2.1) temos

$$\lim \langle \nu, \eta_n \rangle \langle \nu, q_0 \rangle - \lim \langle \nu, q_n \rangle \langle \nu, \eta_0 \rangle = 0,$$

$$\lim \langle \nu, \hat{\eta}_n \rangle \langle \nu, q_0 \rangle - \lim \langle \nu, \hat{q}_n \rangle \langle \nu, \eta_0 \rangle = 0 .$$

Assim, o sistema linear homogêneo 2×2

$$\lim \langle \nu, \eta_n \rangle x + \lim \langle \nu, q_n \rangle y = 0 ,$$

$$\lim \langle \nu, \hat{\eta}_n \rangle x + \lim \langle \nu, \hat{q}_n \rangle y = 0 ,$$

possui solução não-trivial $(\langle \nu, q_0 \rangle, -\langle \nu, \eta_0 \rangle)$, se ν não está concentrada em V; caso contrário (3.9), é trivial. Logo, devemos ter

$$\lim \langle \nu, \eta_n \rangle \lim \langle \nu, \hat{q}_n \rangle - \lim \langle \nu, \hat{\eta}_n \rangle \lim \langle \nu, q_n \rangle = 0 .$$

A relação de comutatividade (2.1) nos dá então (3.9). □

Assim, a forma B_n definida acima só não é nula nas faixas S_α, S_β, sendo, além disso, $0(1)$ na região de interação $I = S_\alpha \cap S_\beta$, pelo que foi visto na demonstração da proposição 3.3.

Mostraremos que $D\pi_1\tilde{\nu}(0) = D\pi_2\tilde{\nu}(0) = 0$ usando o caráter coercivo das B_n. Para este fim, mostraremos que para uma escolha adequada de $\psi, \hat{\psi}$, o coeficiente do termo dominante, i.e., de mais alto grau em n, de B_n é não-negativo e estritamente maior que uma constante positiva C_δ, nas faixas

$$\tilde{S}_\alpha^\delta = \{(\alpha,\beta) \colon |\alpha| \le \frac{\delta}{n}\} \cap \tilde{S}_\alpha ,$$

$$\tilde{S}_\beta^\delta = \{(\alpha,\beta) \colon |\beta| \le \frac{\delta}{n}\} \cap \tilde{S}_\beta ,$$

para um certo δ, com $0 < \delta < 1$. Assim, usando o fato de que $\langle \nu, B_n \rangle \to 0$ obteremos um desigualdade envolvendo $D\pi_1\tilde{\nu}(0)$ e $D\pi_2\tilde{\nu}(0)$ que só pode ser válida se estas se anulam.

Fixemos, agora, $\psi \in C_0^\infty(-1,1)$ satisfazendo

$$\int_{-1}^{1} \psi(t)dt = 0, \ \int_{-1}^{1} t\psi(t)dt = 0\,. \tag{3.10}$$

Suponhamos ainda que ψ satisfaz

$$(D^{m-2}\psi(t))^2 \geq C_\delta \chi_{[-\delta,\delta]}(t)\,, \tag{3.11}$$

para algum $\delta > 0$, e algum $C_\delta > 0$.

Definimos

$$\hat{\psi}(t) = t\psi(t) - (m-2)\int_{-1}^{t} \psi(s)ds\,. \tag{3.12}$$

Observemos que $\hat{\psi} \in C_0^\infty(-1,1)$ e

$$\int_{-1}^{1} \hat{\psi}(t)dt = 0\,. \tag{3.13}$$

A importância de um tal par $(\psi, \hat{\psi})$ está no fato de que

$$D^{m-2}\,\hat{\psi} = tD^{m-2}\,\psi,$$

como podemos verificar facilmente, e isto nos dá que

$$D^{m-2}\psi D^{m-1}\hat{\psi} - D^{m-2}\hat{\psi}D^{m-1}\psi = (D^{m-2}\psi)^2 D(D^{m-2}\hat{\psi}/D^{m-2}\psi) = (D^{m-2}\psi)^2\,.$$

Este fato nos dirá que o coeficiente do termo dominante de B_n, para um tal par $(\psi, \hat{\psi})$ é não-negativo e, por (3.11), será maior ou igual que uma constante vezes a função característica das faixas $\tilde{S}_\alpha^\delta$ e $\tilde{S}_\beta^\delta$. Isto fica claro com o resultado abaixo.

3.6. LEMA. *A forma $B_n = B_n(\psi, \hat{\psi})$ admite a decomposição em potências*

$$B_n = \sum_{i=0}^{2m} n^{2m-j-1}(\beta - \alpha)^{2m-j} A_{m-j}(n\beta) \text{ sobre } \tilde{S}_\beta$$

$$B_n = \sum_{j=0}^{2m} n^{2m-j-1}(\beta - \alpha)^{2m-j} A_{m-j}(n\alpha) \text{ sobre } \tilde{S}_\alpha ,$$

onde as formas coeficientes A_k representam aplicações bilineares enviando um par de funções $(\psi, \hat{\psi})$ numa função $A_k(x) = A_k(\psi, \hat{\psi})(x)$, determinada por derivadas de ψ e $\hat{\psi}$ cuja soma das ordens é $m + k - 2$. O coeficiente dominante é dado por

$$A_n = \text{ const. } \left(D^{m-2}\psi D^{m-1}\hat{\psi} - D^{m-2}\hat{\psi} D^{m-1}\psi\right)$$

PROVA: Denotemos

$$\tau(\eta) = \frac{(\gamma+1)}{4} \int_\alpha^\beta \eta(\alpha, y) dy .$$

Por concretude vamos considerar a faixa $\tilde{S}_\beta$. Fazendo $\hat{\tau} = \tau(\hat{\eta})$ e $\tau_n = \tau(\eta_n)$, expressemos a forma B_n em termos do operador integral τ como segue

$$B_n \equiv \tau_n \hat{\eta}_n - \hat{\tau}_n \eta_n .$$

Sobre $\tilde{S}_\beta$ as entropias η_n e $\hat{\eta}_n$ podem ser escritas na forma

$$\eta_n = \sum_{j=0}^{m} a_j (\beta - \alpha)^{m-j} D^{m-j-1} \psi_n(\beta) . \tag{3.14}$$

Uma integração explítita mostra que a função

$$\tau_n = \tau(\eta_n) = \frac{\delta + 1}{4} \int_{-\frac{1}{n}}^{\beta} \eta_n(\alpha, y) dy$$

satisfaz

$$\tau_n = \frac{(\gamma+1)}{4} a_0 (\beta - \alpha)^m D^{m-2} \psi_n(\beta) + \sum_{j=1}^{m} 0((\beta - \alpha)^{m-j}) n^{m-j-1} . \tag{3.15}$$

Aqui os termos com derivadas de ordem menor são grotescamente estimados pela fórmula

$$D^k \psi_n = n^{k+1} D^k \psi(n\beta) = 0(n^{k+1}).$$

Substituindo (3.15) e (3.14) em B_n junto com as expressões correspondentes para $\hat{\eta}_n = P_m(\hat{\psi})$ e $\hat{\tau}_n = \tau(\hat{\eta}_n)$ somos conduzidos ao resultado desejado. □

Chegamos, finalmente, ao resultado conclusivo da presente análise.

3.7. TEOREMA. *Seja $\tilde{\nu} = (\beta - v)^{2m}\nu$ e $\pi_1\tilde{\nu}, \pi_2\tilde{\nu}$ as projeções de $\tilde{\nu}$ sobre os eixos coordenados α e β, respectivamente. Então,*

$$D\pi_1\tilde{\nu}(t) = D\pi_2\tilde{\nu}(t) = 0, \quad \alpha_0 < t < \beta_0. \tag{3.16}$$

PROVA: Como já mencionamos basta provar (3.16) para $t = 0$. Com o que foi visto acima e as hipóteses (3.10)-(3.13) sobre $(\psi, \hat{\psi})$ temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\langle \nu, B_n \rangle &= \left\langle \nu | \tilde{S}_\alpha, B_n \right\rangle + \left\langle \nu | \tilde{S}_\beta, B_n \right\rangle + \langle \nu | I, B_n \rangle \\
&\geq C\Big\{ \left\langle \nu | \tilde{S}^\delta_\alpha, n^{2m-1}(\beta-\alpha)^{2m} \right\rangle + \left\langle \nu | \tilde{S}^\delta_\beta, n^{2m-1}(\beta-\alpha)^{2m} \right\rangle \Big\} \\
&+ \left\langle \nu | \tilde{S}_\alpha, 0(n^{2m-1}) \right\rangle + \left\langle \nu | \tilde{S}_\beta, 0(n^{2m-2}) \right\rangle + \langle \nu | I, B_n \rangle .
\end{aligned}$$

Dividindo por n^{2m-2} e fazendo majorações óbvias obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle \nu, \frac{2n}{\delta} (\beta-\alpha)^{2m} \chi_{[-\frac{\delta}{n}, \frac{\delta}{n}]\times \mathbf{R}} \right\rangle + \left\langle \nu, \frac{2n}{\delta} (\beta-\alpha)^{2m} \chi_{\mathbf{R}\times[-\frac{\delta}{n}, \frac{\delta}{n}]} \right\rangle \\
&\leq C\left\{ \left\langle \nu, (\beta-\alpha)^{2m-1} \chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]\times \mathbf{R}} \right\rangle + \left\langle \nu, (\beta-\alpha)^{2m-1} \chi_{\mathbf{R}\times[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} \right\rangle \right. \\
&+ \left. \frac{1}{n^{2m-2}} |\langle \nu, B_n \rangle| \right\} + 0\Big(\frac{1}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Façamos $\nu^* = (\beta-\alpha)^{2m-1}\nu$. Da desigualdade acima, tomando o lim sup quando $n \to \infty$, obtemos

$$0 \leq \overline{D}\pi_1\tilde{\nu}(0) + \overline{D}\pi_2\tilde{\nu}(0) \leq C\{\pi_1\nu^*(0) + \pi_2\nu^*(0)\}. \tag{3.17}$$

Notemos que, quando $m = 1$, o fato de que $\langle \nu, B_n \rangle \to 0$ torna-se relevante. O lado direito da última desigualdade em (3.17) é finito. Agora, se $\overline{D}\pi_1\tilde{\nu}(0) > 0$ ou $\overline{D}\pi_2\tilde{\nu}(0) > 0$, então ou $\pi_1\nu^*(0) > 0$ ou $\pi_2\nu^*(0) > 0$. Mas então teríamos ou $\overline{D}\pi_1\tilde{\nu}(0) = +\infty$ ou $\overline{D}\pi_2\tilde{\nu}(0) = +\infty$, o que nos daria uma contradição. Logo, devemos ter $D\pi_1\tilde{\nu}(0) = D\pi_2\tilde{\nu}(0) = 0$. Isto é exatamente o que queríamos mostrar.

□

Terminamos este capítulo mencionando que a análise de DiPerna apresentada acima foi estendida a todo δ, com $1 < \delta \leq \frac{5}{3}$, por Ding Xiaxi, Luo Peizhu e Gui-Qiang Chen em [2 – **3**] onde é demonstrada a convergência dos esquemas de Godunov e Lax-Frielrichs para o problema de Cauchy para o sistema (1.1), fornecendo, assim, uma solução fraca para o mesmo. O lema 3.5 que permitiu a inclusão do caso $m = 1$ na análise de DiPerna, que não o continha originalmente, é devido a Xiaxi, Peizhu e Chen. Também foi feita aqui uma pequena modificação na conclusão da demonstração do Teorema 3.7.

Referências

[1] Adams, R.A.: Sobolev Spaces. Academic Press, Inc., 1975.

[2] Chen, G.-Q., Peizhu, L.,Xiaxi, D.: Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (I),(II). Acta Mathematica Scientia 5, 415-432, 433-472 (1985); 7, (1987) (in Chinese).

[3] Chen, G.-Q., Peizhu, L.,Xiaxi, D.: Convergence of the fractional step Lax-Friedrichs scheme and Godunov scheme for isentropic gas dynamics. Comm. Math. Phys.(1989).

[4] Chen, G.-Q.: Propagation and cancelation of oscillation for hyperbolic systems of conservation laws. Comm. Pure Appl. Math., Vol. XLIV, 121-140 (1991).

[5] Chen, G.-Q.: The compensated compactness method applied to the system of isentropic gas dynamics. Academia Sinica, 1986.

[6] Chueh, K., Conley, C., Smoller, J.: Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations. Ind. Univ. Math. J. 26, 373-392 (1977).

[7] Conway, E., Smoller, J.: Global solutions of the Cauchy problem for quasilinear first-order equations in several space variables. Comm. Pure Appl. Math. 19, 95-105 (1966).

[8] Courant, R., Friedrichs, K.O.: Supersonic Flow and Shock Waves. Springer-Verlag, New York, 1962.

[9] Courant, R., Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics. Vol.II, Interscience, New York, 1962.

[10] Dacorogna, B.: Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity of Nonlinear Functionals. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 922, 1982, 1-120.

[11] DiPerna, R.J.: Convergence of approximate solutions of conservation laws. Arch. Rat. Mech. Anal. 82, 27-70 (1983).

[12] DiPerna, R.J.: Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics. Comm. Math. Phys. 91, 1-30 (1983).

[13] Evans, L.C.: Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations. CBMS Lecture Notes, Amer. Math. Soc. 1990.

[14] Federer, H.: Geometric Measure Theory, Springer, N.Y., 1969.

[15] Frid, H., Santos, M.M.: The Cauchy problem for the systems $z_t + (\bar{z}^\gamma)_x = 0$. Journal of Differential Equations, in press, 1993.

[16] Frid, H., Santos, M.M.: Nonstrictly hyperbolic systems of conservation laws of conjugate type. A ser publicado.

[17] Gerard, P.: Microlocal defect measures. Comm. in Partial Diff. Eq., 16(11), 1761-1794 (1991).

[18] Glimm, J.: Solutions in the large for nonlinear hyperbolic system of conservation laws. Comm. Pure Appl. Math. 18, 95-105 (1965).

[19] Godunov, S.: A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. Mat. Sb. 47 (89),271-360 (1959)

[20] Hoff, D., Smoller, J.: Solutions in the large for certain nonlinear parabolic systems. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.2,No.3, 1985, pp. 213-235.

[21] Hopf, E.: The Partial differential equation $u_t + uu_x = \epsilon u_{xx}$. Comm. Pure Appl. Math. 3, 201-230 (1950).

[22] Kan, P.T.: On the Cauchy problem of a 2×2 system of nonstrictly hyperbolic conservation laws. PhD Thesis, New York University, 1989.

[23] Keyfitz, B.L., Kranzer, H.C.: A system of nonstrictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity theory. Arch. Rat. Mech. Anal. 72, 219-241 (1980).

[24] Kruzkov, S.: First-order quasilinear equations with several space variables. Mat. Sb. 123, 228-255 (1970).

[25] Lax, P.: Hyperbolic systems of conservation laws (II). Comm. Pure Appl. Math. 10, 537-566 (1957).

[26] Lax, P.: Shock waves and entropy. In: Contributions to Nonlinear Functional Analysis, edited by E. Zarantonello, Academic Press: New York, 1971, 603-634.

[27] MacShane, E.: Necessary conditions in the generalized curve problem of the calculus of variations. Duke Math. J. 7, 1-27 (1940).

[28] Murat, F.: Compacité par compensation. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Math. 5, 489-507 (1978).

[29] Murat, F.: Compacité par compensation II. Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, Rome, ed. E. De Giorgi, E. Magenes and U.

Mosco, Pitagora Editrice, Bologna (1979), pp. 245-256.

[30] Murat, F.: Compacité par compensation: Condition necessaire et suffisante de continuité faible sous une hypotheses de rang constant. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 8, 69-102 (1981).

[31] Murat, F.: L'injection du cone positif de H^{-1} dans $W^{-1,q}$ est compacte pour tout $q < 2$. J. Math. Pures Appl. 60, 309-322 (1981).

[32] Rudin, W.:Real and Complex Analysis. New York: McGraw-Hill 1966.

[33] Santos, M.M.: Sistemas 2×2 de leis de conservação não estritamente hyperbólicos: o problema de Cauchy. Tese de Doutorado, IMPA, 1991.

[34] Sconbek, M.E.: Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations. Comm. in Partial Diff. Eq., 7(8), 959-1000 (1982).

[35] Serre, D.: La compacité par compensation pour les systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations a une dimension d'espace. J. Math. Pures et Appl., 65, 1986, pp. 423-468.

[36] Smoller J.: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer-Verlag New York Inc., 1983.

[37] Sobolev, S.L.: Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Pergamon Press Ltd., 1964.

[38] Stein, E.M.: Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[39] Tartar, L.: Une nouvelle méthode de resolution d'équations aux dérivées partielles nonlinéaires. In: Journées d'analyse Nonlinéaire, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 665, Springer-Verlag (1977) 228-241.

[40] Tartar, L.: Nonlinear constitutive relations and homogenization. In: Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations ;eds. G.M. de La Penha and L.A.J. Medeiros, North Holland (1978).

[41] Tartar, L.: Compensated compactness and applications to partial differential equations. Research notes in mathemtics, nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. 4, ed. R.J. Knops, New York: Pitman Press, 1979.

[42] Tartar, L.: The compensated compactness method applied to systems of conservation

laws. Systems of nonlinear partial differential equations, ed. J.M. Ball, NATO ASI Series, C. Reidel Publishing Co. (1983).

[43] Tartar, L.: H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 115A, 193-230, 1990.

[44] Volpert, A.: The spaces BV and quasilinear equations. Mat. Sb. 73, 255-302 (1967).

[45] Young, L.C.: Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. W.B. Saunders, Philadelphia (1969).

[46] Watson, G.N., Whittaker, E.T.: A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press, 1935.

Impresso na Gráfica do
impa
pelo Sistema Xerox/1065