

4011

PUBLICAÇÕES  
DO IMPA

20  
E

# Colóquio **19°** Brasileiro de Matemática

**UMA INTRODUÇÃO ÀS  
DESIGUALDADES ISOPERIMÉTRICAS**

Francesco Mercuri

Renato Luna Pedrosa

FRANCESCO MERCURI, RENATO H. L. PEDROSA  
(IMECC / UNICAMP)

COPYRIGHT © by Francesco Mercuri e Renato H. L. Pedrosa

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,  
por qualquer processo, sem a permissão dos autores.

BIBLIOTECA	
INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA	
DATA	N.º
30/07/93	26.071

ISBN: 85-244-0077-3

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Estrada Dona Castorina, 110 - J. Botânico

CEP: 22460.320 - Rio de Janeiro-RJ

# Conteúdo

Introdução	2
<b>1 O Problema Isoperimétrico</b>	<b>4</b>
1.1 Áreas e comprimentos	4
1.2 Formulações do problema isoperimétrico	6
1.3 O problema isoperimétrico para polígonos	7
1.4 O problema isoperimétrico para curvas de Jordan retificáveis	14
1.5 O problema isoperimétrico em $\mathbb{R}^3$	22
<b>2 Auto-valores do Laplaciano</b>	<b>27</b>
2.1 Séries de Fourier e a equação das ondas em uma variável	27
2.2 O problema da membrana vibrante	37
2.3 Propriedades do primeiro auto-valor	40
2.4 A desigualdade de Faber-Krahn	45
2.5 O teorema de Weyl	50
<b>3 Outras Desigualdades</b>	<b>60</b>
3.1 A desigualdade de Brunn-Minkowski	60
3.2 As desigualdades de Wirtinger e de Sobolev	65
3.3 O problema isoperimétrico em superfícies e outros tópicos	71

## Introdução

A princesa Elisa, ou Dido, no século IX A.C., teve que fugir da cidade de Tiro, com a vida ameaçada numa disputa de poder que já tinha causado a morte do marido. Depois de uma longa viagem, chegou ao norte da África e pediu à população local uma área para construir uma vila para ela e seus seguidores. A resposta que ouviu foi:

- *Você pode ter tanta terra quanta couber na sua sacola* -

Elisa, inteligentemente, cortou sua sacola em tiras que juntou com a intenção de delimitar uma região ao longo da costa onde surgiu em seguida a cidade de Cártago. O problema de Elisa foi achar a forma do *contorno* de tal maneira que a área limitada fosse máxima. Ela dispôs a corda em semi-círculo, perpendicular à orla marinha. Ela tinha resolvido o que hoje se chama de *problema isoperimétrico relativo*. Este relato aparece na *Eneida* de Virgílio.

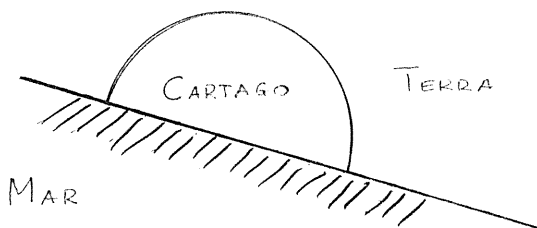


Figura 1: A solução de Elisa

O teorema clássico de Jordan garante que o complementar do traço de uma curva fechada simples no plano,  $c : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tem duas componentes conexas, uma limitada  $I_c$ , o interior de  $c$ , e uma ilimitada  $E_c$ , o exterior de  $c$ . Sem entrar, por enquanto, em detalhes, se  $c$  for “suficientemente regular”,

estarão bem definidos o comprimento  $L(c)$  de  $c$  e a área  $A(c)$  de  $I_c$ . O problema isoperimétrico clássico pode então ser enunciado da seguinte forma:

*Entre todas as curvas fechadas simples  $c : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de dado comprimento  $L = L(c)$ , achar aquelas para as quais  $A(c)$  é máxima.*

A solução deste problema era conhecido deste a antiguidade. Sem contar a lenda de Elisa, Aristóteles, no século III A.C., enunciava explicitamente que o círculo era a solução do problema isoperimétrico. Porém, não aparece demonstração: a afirmação era verdadeira devido a razões filosóficas.

Várias demonstrações desta propriedade do círculo apareceram, muitas ligadas a grandes nomes da matemática, algumas incorretas, ou melhor, incompletas. Entender bem o que é uma solução completa do problema isoperimétrico foi muito importante para a formulação correta do que é a solução de problemas variacionais em matemática. Principalmente no que se refere ao aspecto existencial de soluções.

A finalidade destas notas não é discutir exaustivamente o problema, mas tentar explicar porque o problema isoperimétrico é, em sua estrutura geral, ainda um problema atual, e como análise e geometria aparecem como facetas diferentes de um mesmo problema.

# 1 O Problema Isoperimétrico

## 1.1 Áreas e comprimentos

Seja  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva contínua. Dada uma subdivisão  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ , do intervalo  $[a, b]$ , a poligonal de vértices  $c(t_i)$  tem comprimento  $L(c, \{t_i\}) = \sum_{i=1}^k \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|$ .

**Definição 1** A curva  $c$  é dita retificável de comprimento  $L = L(c)$ , se:

$$L = \sup \{L(c, \{t_i\}) : \{t_i\} \text{ subdivisão de } [a, b]\} < \infty.$$

Se  $c(t) = (x(t), y(t))$  for  $C^1$ , então  $c$  será retificável e terá comprimento:

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt. \quad (1)$$

A definição de curva retificável significa que podemos aproximar  $c$  por uma poligonal  $P$  tal que  $P$  aproxima  $c$  tão bem como quisermos. De fato, podemos considerar, como  $c$  é compacta, a distância

$$d(c, P) = \sup_{x \in P} \{\inf_{y \in c} d(x, y)\}.$$

Utilizando-se esta noção de distância, ser retificável implica que a curva pode ser aproximada por uma curva  $C^1$  por partes, tanto com respeito à distância acima como com respeito ao comprimento.

O comprimento de uma curva retificável é invariante por reparametrizações, i.e. se  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  for uma curva retificável e  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  for contínua com inversa contínua, então  $c \circ \phi$  será retificável do mesmo comprimento (veja [Li], pág. 101).

Seja agora  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan (i.e.  $c(a) = c(b)$  e, se  $t \neq s$  e  $c(t) = c(s)$ , então  $\{t, s\} = \{a, b\}$ ). O teorema clássico de Jordan garante então que o traço de  $c$  divide o plano em duas componentes conexas, uma limitada,  $I_c$  o interior de  $c$ , e uma ilimitada,  $E_c$  o exterior de  $c$ . Isso significa que  $\mathbb{R}^2 \setminus c([a, b]) = I_c \cup E_c$  com  $I_c$  e  $E_c$  abertos conexos disjuntos. A área limitada por  $c$ ,  $A(c)$ , é, por definição, a área da região  $I_c$ :

$$A(c) = \iint_{I_c} dx dy. \quad (2)$$

Se  $c$  possuir uma parametrização diferenciável,  $c(t) = (x(t), y(t))$ ,  $A(c)$  poderá ser expressada em termos da parametrização. De fato, o teorema de Green,

$$\begin{aligned} \iint_{I_c} \left[ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy &= \oint_c P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt \end{aligned}$$

onde  $P, Q$  são funções reais  $C^1$  em  $I_c$ ,  $C^0$  em  $\bar{I}_c$ , aplicado a  $Q(x, y) = x$  e  $P(x, y) = -y$ , nos fornece:

$$A(c) = \frac{1}{2} \oint_c x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt. \quad (3)$$

Além disso, sendo  $x(a) = x(b)$  e  $y(a) = y(b)$ , temos:

$$0 = \int_a^b \frac{d}{dt} [x(t)y(t)] dt = \int_a^b [x(t)y'(t) + x'(t)y(t)] dt,$$

e, portanto:

$$A(c) = \frac{1}{2} \oint_c x dy - y dx = \oint_c x dy = - \oint_c y dx. \quad (4)$$

Naturalmente, as fórmulas acima se generalizam ao caso de curvas  $C^1$  por partes.

É importante ressaltar algumas propriedades de “*continuidade*” da área e do comprimento:

**Teorema 1** *Seja  $c$  uma curva de Jordan retificável. Então  $c$  pode ser uniformemente aproximada por polígonos de Jordan inscritos (i.e. com vértices sobre a curva). Neste caso as áreas (resp. os comprimentos) das poligonais convergem à área (resp. ao comprimento) da curva.* ■

A demonstração deste teorema escapa das finalidades destas notas. Não podemos, porém, deixar de fazer alguns comentários. Se uma curva retificável for o limite uniforme de poligonais, os comprimentos destas poligonais não convergirão necessariamente para o comprimento da curva (pense em aproximar a hipotenusa de um triângulo retângulo com uma poligonal de lados paralelos aos catetos e demonstre o “Teorema de Pitágoras ... do

barbeiro”: a hipotenusa tem comprimento igual à soma dos comprimentos dos catetos!) Para garantir a convergência dos comprimentos para o comprimento da curva é necessário que a convergência uniforme venha junto com alguma “convergência das tangentes”. Isso é o que acontece com poligonais inscritas.

## 1.2 Formulações do problema isoperimétrico

O problema isoperimétrico clássico pode ser enunciado da seguinte forma:

**(PI)**: Seja  $\mathcal{C}$  a classe de curvas planas de Jordan, retificáveis de comprimento fixado. Achar as curvas  $c \in \mathcal{C}$  tais que  $A(c) \geq A(\gamma), \forall \gamma \in \mathcal{C}$ .

Às vezes, é útil se ter formulações equivalentes do **PI**. Consideramos o seguinte “problema dual”:

**(PI\*)**: Seja  $\mathcal{R}$  a classe de domínios (i.e. abertos conexos) limitados do plano de área fixada, com fronteiras dadas por curvas retificáveis. Achar as regiões  $\Omega \in \mathcal{R}$  tais que  $L(\partial\Omega) \leq L(\partial\Sigma), \forall \Sigma \in \mathcal{R}$ .

Observamos que o **(PI\*)** faz sentido independentemente do teorema de Jordan e pode ser portanto enunciado em contextos mais gerais, por exemplo em superfícies, onde ainda temos o conceito de comprimento de uma curva diferenciável e de área de uma região, mas uma curva simples pode até não limitar região alguma (pense no caso de um meridiano em um toro de revolução!)

Os problemas acima podem ser enunciados de uma maneira unificada. Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  domínio limitado por uma família finita  $C$  de curvas de Jordan retificáveis. Denotamos a soma dos comprimentos das curvas em  $C$  por  $L(C)$ , e a área de  $\Omega$  por  $A(C)$ .

**Definição 2** Define-se a razão isoperimétrica de  $\Omega$  por:

$$RI(\Omega) = RI(C) = \frac{L(C)^2}{4\pi A(C)}. \quad (5)$$



Podemos enunciar os (PI) e (PI\*) na seguinte forma:

**(RI):** Dada uma classe  $\mathcal{C}$  de curvas de Jordan retificáveis, (resp. uma classe  $\mathcal{R}$  de domínios do plano limitados por curvas de Jordan retificáveis), achar as curvas de  $\mathcal{C}$  (resp. as regiões de  $\mathcal{R}$ ) que minimizam a função  $RI$ .

Agora algumas observações. Lembramos que um movimento rígido do plano é a composição de uma traslação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x) = x + a$ ,  $a \in \mathbb{R}^2$ , e de uma transformação linear ortogonal  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , (i.e.  $QQ^t = Id$  ou, equivalentemente,  $\|Q(x)\| = \|x\|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^2$ ). Uma homotetia de módulo  $k$  ( $\in \mathbb{R} - \{0\}$ ) é a composição de um movimento rígido e da transformação linear  $\tilde{H}(x) = kx$ . É imediato verificar que se  $c$  for uma curva de Jordan no plano e  $H$  uma homotetia de módulo  $k$ , então  $L(H \circ c) = kL(c)$  e  $A(H \circ c) = k^2A(c)$ . Portanto a função  $RI$  é invariante por homotetias.

Antes de propormos o exercício abaixo, convém observar que o problema (PI\*) não assume que a região tenha fronteira dada por apenas uma curva fechada simples, como o problema (PI). No entanto é possível mostrar que uma solução deve ser simplesmente conexa, o que torna os problemas equivalentes, para o plano. A mesma observação vale também para o problema (RI).

**Exercício 1** Mostre que os problemas (PI), (PI\*) e (RI) são essencialmente equivalentes. (Deixamos ao leitor a tarefa de precisar esta afirmação.)

### 1.3 O problema isoperimétrico para polígonos

Nesta seção vamos estudar o problema isoperimétrico para polígonos. Começamos com alguns casos simples.

**Lema 1 (Princípio de reflexão)** Seja  $r$  uma reta do plano.  $P$  e  $Q$  pontos num dos semiplanos determinados por  $r$ . Seja  $A$  o ponto de  $r$  tal que a normal a  $r$  por  $A$  bissecta o ângulo  $\angle PAQ$ . Então, dentre todas as curvas retificáveis  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tais que  $\gamma(0) = P$ ,  $\gamma(1) = Q$  e  $\gamma(t_0) \in r$  para algum  $t_0 \in (0, 1)$ , a poligonal formada pelos segmentos  $\overline{PA}$  e  $\overline{AQ}$  é a de menor comprimento.

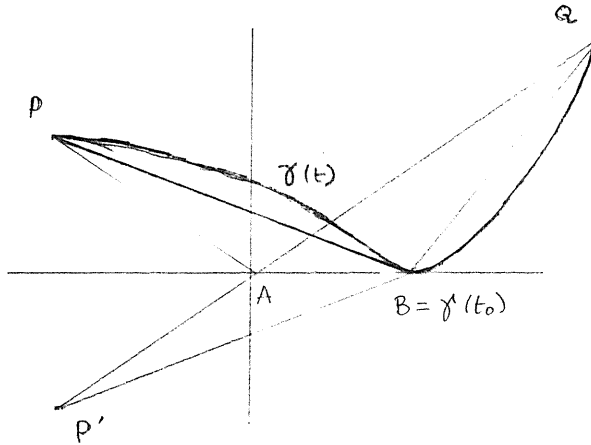


Figura 2: O princípio de reflexão

*Demonstração:* Seja  $B = \gamma(t_0)$ . É claro que a poligonal formada por  $\overline{PB}$  e  $\overline{BQ}$  tem comprimento menor ou igual a  $\gamma$ . Portanto o problema se reduz a achar o ponto  $B' \in r$  tal que  $L(\overline{PB'}) + L(\overline{B'Q})$  seja mínimo. Consideramos a reflexão do plano em relação á reta  $r$  e seja  $P'$  a imagem de  $P$ . Temos então, para qualquer  $B'$ ,

$$L(\overline{PB'}) + L(\overline{B'Q}) = L(\overline{P'B'}) + L(\overline{B'Q})$$

e portanto o ponto solução do nosso problema é o ponto de  $r$  alinhado com  $P'$  e  $Q$ , que é o ponto  $A$  do enunciado do lema (ver figura 2). ■

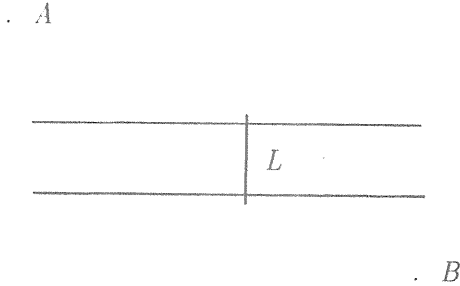
Enunciamos agora alguns corolários, cujas (simples) demonstrações deixaremos ao leitor (v. [Fi2]):

**Exercício 2** *Entre todos os triângulos de base  $\overline{AB}$  e altura dada, o isósceles minimiza  $RI$ .*

**Exercício 3** *Entre todos os triângulos do plano, os equiláteros minimizam  $RI$ .*

**Exercício 4** *Entre todos os trapézios de base e altura fixados, os isósceles minimizam o perímetro.*

**Exercício 5** Considere um canal retilíneo  $C$  separando as cidades  $A$  e  $B$ .



Deseja-se construir uma ponte perpendicular ao canal, de comprimento fixo  $L$ , e estradas ligando ambas as cidades à ponte, de tal maneira que o caminho total entre as cidades seja mínimo. Você pode ajudar?

Vamos agora demonstrar o resultado principal desta seção:

**Teorema 2 (Zenodorus)** Entre todos os polígonos de  $n$  lados, os regulares minimizam  $RI$ .

*Demonstração:* É claro que podemos nos restringir à classe dos  $n$ -polígonos convexos (por quê?). Seja  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  $0 < \theta_i < \pi/2$ , com  $\sum_{i=1}^n \theta_i = \pi(n-2)/2$  e  $\mathcal{P}_{n,\theta}$  a classe dos  $n$ -polígonos de ângulos (fixados)  $2\theta_i$ . Diremos que  $P \in \mathcal{P}_{n,\theta}$  tem círculo inscrito se o maior círculo contido no interior de  $P$  é tangente a todos os lados de  $P$ . É claro que em  $\mathcal{P}_{n,\theta}$  existe um polígono  $P_\theta^*$  com círculo inscrito que é único a menos de homotetias (divida um círculo em arcos de comprimento  $(\pi - 2\theta_i)$  e ...).

**Afirmção 1** (veja figura 3):

$$RI(P_\theta^*) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i).$$

Sejam  $O$  o centro e  $r$  o raio do círculo inscrito. Temos então:

$$L(\overline{V_i A_i}) = r \cotg(\theta_i),$$

$$A(\Delta O V_i A_i) = \frac{1}{2} r L(\overline{V_i A_i}) = \frac{1}{2} r^2 \cotg(\theta_i).$$

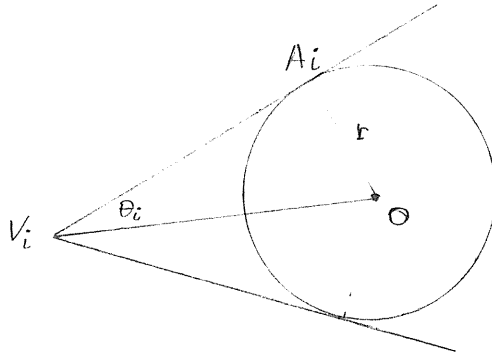


Figura 3: Círculo inscrito

Portanto:

$$\frac{L(P_\theta^*)^2}{4\pi A(P_\theta^*)} = \frac{4r^2 [\sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i)]^2}{4\pi r^2 \sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i)},$$

o que prova a afirmação.

Seja agora  $\mathcal{P}'_{n,\theta} = \{P \in \mathcal{P}_{n,\theta} : A(P) = 1\}$ .

**Afirmação 2:**

$$i_n(\theta) = \inf\{RI(P) : P \in \mathcal{P}'_{n,\theta}\} = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i)$$

(e portanto  $i_n(\theta)$  é um *mínimo* pela afirmação 1).

Procedemos por indução sobre o número  $n$  de lados. Seja  $i_n$  o extremo inferior de  $RI$  em  $\mathcal{P}'_{n,\theta}$ . Se  $n = 3$  não temos nada a mostrar pois todos triângulos tem círculo inscrito e portanto  $RI$  é constante em  $\mathcal{P}_{3,\theta}$  e vale  $i_3(\theta)$ . Suponhamos a afirmação verdadeira para polígonos com menos de  $n > 3$  lados. Seja  $P_j$  uma seqüência de polígonos em  $\mathcal{P}'_{n,\theta}$  tais que  $RI(P_j)$

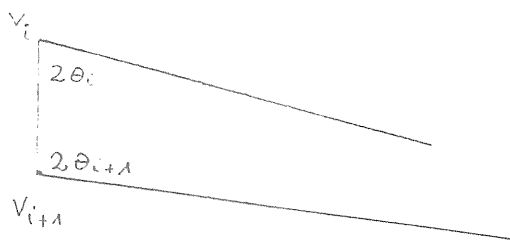


Figura 4: Caso 1

converge a  $i_n = i_n(\theta)$ . Em particular o perímetro de cada  $P_j$  é menor do que uma constante  $H$  (por quê?). A menos de translações podemos então supor que todos os  $P_j^1$  estão contidos em um disco fechado de raio  $K$  (por quê?). Seja  $\{V_j^1\}$  a seqüência dos primeiros vértices dos polígonos  $P_j$ . Existe então uma sub-seqüência convergente a um ponto  $V^1$  do disco. Procedendo analogamente, a partir desta sub-seqüência, para os segundos vértices  $\{V_j^2\}$ , se obtém uma sub-seqüência que converge a um ponto  $V^2$ . A correspondente sub-seqüência de  $\{V_j^1\}$  continua convergindo a  $V^1$ . Procedendo assim, obtemos uma (sub-)seqüência de  $P_j$  tal que a seqüência dos vértices  $k$ -ésimos converge a  $V^k$ . Temos então um polígono limite  $Q$ , convexo (por quê?), com razão isoperimétrica  $i_n$ . Porém isso não mostra que  $i_n$  é um mínimo, pois  $Q$  poderia ter menos do que  $n$  lados! Vamos mostrar que  $Q$  tem  $n$  lados.

Sendo os ângulos  $2\theta_i$  fixados, e portanto constantes na seqüência, o polígono  $Q$  terá menos de  $n$  lados somente se para algum  $k$ , as seqüências dos vértices  $k$ -ésimos e  $(k+1)$ -ésimos tiverem o mesmo limite. Vamos mostrar que isso não pode acontecer. Distinguímos dois casos:

1.  $\theta_k + \theta_{k+1} \leq \pi/2$  (v. fig 4)

Neste caso, devido à hipótese de convexidade, o polígono  $P_j$  está contido em uma faixa entre duas retas paralelas, cuja distância é menor ou igual ao comprimento do lado  $k$ -ésimo. Também tem que estar contido entre a reta determinada pelo lado  $k$ -ésimo e uma paralela a ela à distância  $2K$  (por quê?). Portanto a área do polígono  $P_j$  tenderia a zero com o comprimento

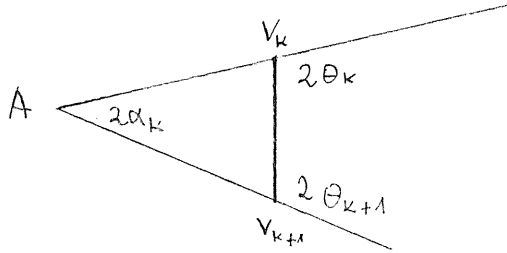


Figura 5: Caso 2

do lado  $k$ -ésimo, o que é um absurdo, pois  $P_j$  tem área 1.

**2.**  $\theta_k + \theta_{k+1} > \pi/2$  (v. fig. 5)

Neste caso, prolongando os lados adjacentes ao  $k$ -ésimo lado de  $P_j$ , como na figura acima, obtém-se um polígono  $P'_j$  de  $(n-1)$  lados. Pela hipótese de indução temos:

$$\begin{aligned} \pi RI(P'_j) &\geq \sum_{i=1}^{n-1} \cotg(\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i) + \cotg(\alpha_k) - \cotg(\theta_k) - \cotg(\theta_{k+1}) \end{aligned}$$

(lembramos que  $RI$  é invariante por homotetias e portanto

$$i_{n-1}(\alpha) = \inf\{RI(P) : P \in \mathcal{P}_{n-1,\alpha}\}.$$

Temos  $\alpha_k = \theta_k + \theta_{k+1} - \pi/2$ , e um simples cálculo trigonométrico mostra que, sendo  $\theta_k + \theta_{k+1} > \pi/2$ ,

$$\cotg(\alpha_k) - \cotg(\theta_k) - \cotg(\theta_{k+1}) > \nu > 0$$

(e  $\nu$  independe de  $j$ .) Portanto  $\pi RI(P'_j) - \sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i) > \nu$ .

Se o  $k$ -ésimo lado for suficientemente pequeno,  $|RI(P'_j) - RI(P_j)|$  também será pequeno, digamos menor do que  $\nu/2$  (por quê?). Temos então:

$$RI(P_j) \geq RI(P'_j) - \frac{\nu}{2} > \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i) + \frac{\nu}{2},$$

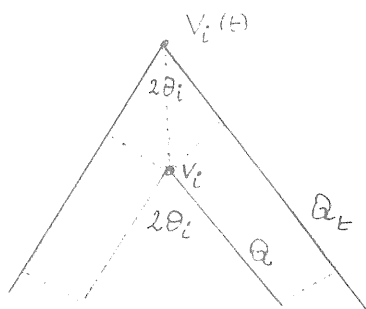


Figura 6: Afirmação 2

e isto é um absurdo pois, pela afirmação 1.,

$$\pi i_n(\theta) \leq \sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i).$$

Finalmente, vamos mostrar que  $i_n(\theta) = (1/\pi) \sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i)$ . Seja  $Q$  um mínimo de  $RI$  em  $\mathcal{P}_{n,\theta}$ . Dado  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , consideramos o polígono  $Q_t$  com lados paralelos aos lados de  $Q$ , à distância  $|t|$  destes, no exterior de  $Q$  se  $t > 0$ , e no interior se  $t < 0$  (v. fig. 6). Temos então:

$$L(Q_t) = L(Q) + 2t \sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i);$$

$$A(Q_t) = A(Q) + tL(Q) + t^2 \sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i).$$

Portanto  $RI(Q_t)$  é uma função diferenciável de  $t$  que, pela escolha de  $Q$ , deve ter mínimo para  $t = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [RI(Q_t)] \\ &= \frac{1}{[4\pi A(Q)]^2} \left[ 4L(Q)A(Q) \sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i) - L(Q)^3 \right], \end{aligned}$$

e portanto  $i_n(\theta) = L(Q)^2/4\pi A(Q) = (1/\pi) \sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i)$ .

**Afirmação 3:** *Entre todos os  $n$ -polígonos, os regulares minimizam a razão isoperimétrica.*

Os mínimos da função  $\sum_{i=1}^n \cotg(\theta_i)$  no hiperplano  $\sum_{i=1}^n \theta_i = (n-2)\pi/2$  são atingidos quando  $\theta_1 = \dots = \theta_n$ . Por outro lado, se  $P$  for um  $n$ -polígono com dois lados de comprimento diferente, digamos  $\overline{P_{i-1}P_i}$  e  $\overline{P_iP_{i+1}}$ , substituindo-se o triângulo  $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$  pelo triângulo isósceles de base  $\overline{P_{i-1}P_{i+1}}$  de mesma área, obtemos, pelo resultado do exercício 2, um novo polígono com razão isoperimétrica menor. Se o polígono assim obtido tiver menos do que  $n$  lados, poderemos perturbá-lo ligeiramente, de maneira a se obter um  $n$ -polígono com razão isoperimétrica ainda menor do que a do polígono original. ■

*Observação:* A demonstração acima ressalta uma situação comumente encontrada nos problemas do cálculo das variações: *em geral é difícil mostrar que um dado funcional assume um mínimo. Torna-se necessário considerar espaços (e topologias) convenientes para se provar a convergência de seqüências minimizantes. Uma vez que se sabe que existem mínimos não é difícil se obter o valor destes mínimos (e eventuais caracterizações.)* Voltaremos a comentar este fato na próxima seção.

## 1.4 O problema isoperimétrico para curvas de Jordan retificáveis

Nesta seção vamos discutir o problema isoperimétrico para a classe de todas as curvas de Jordan retificáveis, na forma **(PI)**, **(PI)\*** ou **(RI)**, dependendo da conveniência. O resultado que queremos provar é o seguinte:

**Teorema 3** *Uma curva de Jordan retificável é um mínimo de **(RI)** se e sómente se a curva é um círculo.*

Começamos observando que se  $c$  não for uma curva convexa, i.e. se  $I_c$  não for um conjunto convexo, então existe uma curva com razão isoperimétrica



menor (por quê?). Podemos (e iremos) portanto nos restringir ao caso de **curvas convexas**.

Apresentaremos a seguir algumas belas “*mostrações*” (demonstrações? Vamos ver!) do teorema 3, a primeira delas conhecida desde os gregos, a segunda devida essencialmente a Steiner, ambas de natureza sintética, e a terceira utilizando técnicas da geometria diferencial das curvas.

Seja  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan retificável, convexa, de comprimento  $L$  e área  $A$ . Queremos mostrar que se  $c$  é mínimo de (RI) então  $c$  tem que ser um círculo.

### 1. Argumento Mecânico:

Seja  $t_1 \in (0, 1)$  tal que o comprimento de  $c|_{[0, t_1]}$  é  $L/2$ ,  $P = c(0)$ ,  $Q = c(t_1)$  e  $r$  a reta determinada por  $P$  e  $Q$ . Podemos supor que  $r$  divide  $I_c$  em duas regiões de mesma área pois, se não for o caso, refletindo-se a região de área maior em relação a  $r$  obteríamos uma nova região com  $RI$  menor. Vamos mostrar que a curva  $c|_{[0, t_1]}$  tem que ser um semi-círculo. Para isso é suficiente mostrar que, para qualquer  $t_0$ ,  $0 < t_0 < t_1$ , o ângulo  $\angle PRQ$ ,  $R = c(t_0)$ , é  $\pi/2$ , propriedade que caracteriza o semi-círculo.

Suponhamos que exista um  $t_0$  para o qual isto não acontece e vamos construir uma nova região com  $RI$  menor.

A região limitada por  $r$  e  $c|_{[0, t_1]}$  é a reunião do triângulo  $\Delta PRQ$  da aba  $B_1$  que é o interior da curva formada pelo segmento  $\overline{PR}$  e pela curva  $\gamma_1 = c|_{[0, t_0]}$  (uma curva de Jordan, pois  $c$  é convexa) e da aba  $B_2$  que é o interior da curva determinada pelo segmento  $\overline{RQ}$  e pela curva  $\gamma_2 = c|_{[t_0, t_1]}$ .

Consideramos uma engenhoca formada pelas duas abas rígidas  $B_1$  e  $B_2$ , unidas e articuladas em  $R$  por um pino. Deixamos  $P$  e  $Q$  correrem ao longo de  $r$  até as posições  $P'$  e  $Q'$ , de tal forma que o ângulo  $\angle P'R'Q'$  seja reto.  $R'$  é o ponto para onde a articulação se move no processo. Obtemos assim uma nova figura formada por abas  $B'_i$ ,  $i = 1, 2$ , congruentes a  $B_i$ ,  $i = 1, 2$ , e pelo triângulo  $\Delta P'R'Q'$ . A área desta nova região é a soma das áreas de  $B_1$  e  $B_2$  e da área do triângulo  $\Delta P'R'Q'$ . Mas a área de um triângulo com dois lados consecutivos de comprimentos fixados é máxima quando estes lados são ortogonais (por quê?) e portanto a nova figura tem área maior do que a área da original. Por outro lado, esta nova região tem como fronteira o segmento  $\overline{P'Q'}$  e uma curva de comprimento  $L/2$ . Portanto refletindo-se

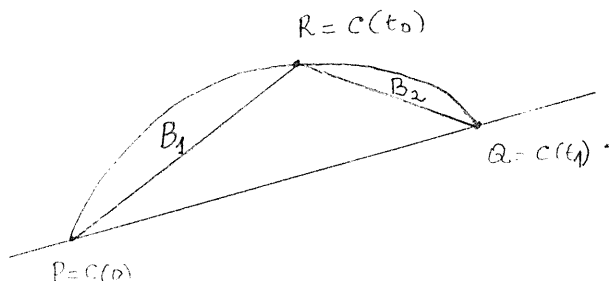


Figura 7: O argumento mecânico

esta região em relação a  $r$  obtemos uma nova região de área maior que  $A$ , limitada por uma curva de comprimento  $L$ . Portanto esta nova região tem menor razão isoperimétrica. (O leitor está convidado a escrever de maneira mais “matemática” o argumento acima!).

## 2. Argumento de Simetrização:

Vamos descrever uma transformação entre regiões do plano, chamada *simetrização de Steiner*, que permite passar de uma região  $\Omega$  dada para uma  $\mathcal{S}(\Omega)$ , de razão isoperimétrica não maior. (Para esta construção não é necessário que a região seja convexa, mas continuamos assumindo a convexidade por simplicidade).

Seja  $\Omega$  uma região limitada do plano e  $r$  uma reta. Consideramos um referencial no qual a reta  $r$  seja o eixo  $y$  e consideramos o feixe de retas  $s_t := \{(x, y) : y = t\}$ . Para cada  $t$  tal que  $s_t \cap \Omega \neq \emptyset$ , consideramos o segmento (fechado)  $k_t$  sobre  $s_t$ , simétrico em relação a  $r$ , de comprimento igual à medida de  $s_t \cap \Omega$ . A reunião de todos estes segmentos é o fecho de uma região  $\mathcal{S}(\Omega)$  que, pelo princípio de Cavalieri, tem a mesma área que  $\Omega$ .

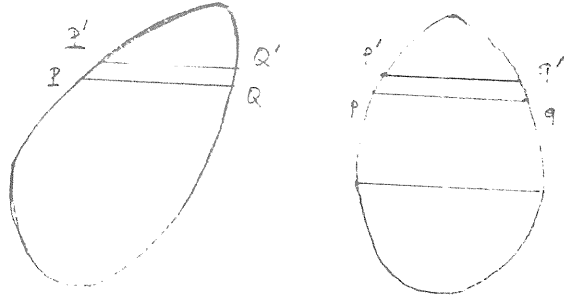


Figura 8: O processo de simetrização

**Afirmção:** O comprimento da fronteira de  $\mathcal{S}(\Omega)$  não é maior do que o comprimento da fronteira de  $\Omega$ .

De fato, sejam  $l$  e  $l'$  muito próximos,  $\{P, Q\}$  e  $\{P'Q'\}$  as interseções da fronteira de  $\Omega$  com  $s_l$  e  $s_{l'}$  respectivamente,  $\{p, q\}$  e  $\{p', q'\}$  as interseções das mesmas retas com a fronteira de  $\mathcal{S}(\Omega)$ . Os trapézios de vértices  $\{p, q, p', q'\}$  e  $\{P, Q, P'Q'\}$  têm mesma altura e bases do mesmo comprimento e portanto o primeiro tem perímetro não maior, sendo isósceles (v. exercício 4). A afirmação segue-se então, usando-se a definição de comprimento de uma curva retificável, por um simples argumento de limite (qual?).

Para mostrar a propriedade isoperimétrica do disco, é então suficiente mostrar as duas propriedades seguintes, que deixamos ao leitor como exercícios.

**Exercício 6** Se uma região é simétrica em relação a todas as retas que a dividem em duas partes de mesma área, então a região é um disco.

**Exercício 7** Na construção acima, se  $\Omega$  não for simétrica em relação à reta paralela a  $r$  que divide  $\Omega$  em duas partes de mesma área, então o comprimento da fronteira de  $\mathcal{S}(\Omega)$  é menor que o comprimento da fronteira de  $\Omega$ .

### 3. Argumento Variacional

Seja  $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan de classe  $C^2$  parametrizada por comprimento de arco (i.e.  $\|\dot{c}(t)\| = 1$ ). Vamos provar que se  $c$  for um mínimo de RI então  $c$  será um círculo. Usaremos um argumento *variacional*, similar ao usado no final da prova do teorema de Zenodorus.

Seja  $c(t) = (x(t), y(t))$  e  $\mathbf{n}(t) = (-y'(t), x'(t))$  o vetor normal unitário positivo. Seja  $f$  uma função  $C^2$  periódica de período  $L$  e consideramos, para  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ , a curva  $c_s(t) = c(t) + sf(t)N(t) = (x(t) - sf(t)y'(t), y(t) + sf(t)x'(t))$ . Se  $\epsilon$  for suficientemente pequeno,  $c_s$  será uma curva de Jordan de classe  $C^1$  e denotaremos por  $A(s)$  e  $L(s)$  a área e o comprimento de  $c_s$ . Temos então:

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_0^L [x - sfy'] [y' + sf'x' + sfx''] dt, \\ L(s) &= \int_0^L \{ [x' - sf'y' - sfy'']^2 + [y' + sf'x' + sfx'']^2 \}^{1/2} dt. \end{aligned}$$

Derivando em  $s$  e calculando para  $s = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} A'(0) &= \int_0^L -f(t) dt, \\ L'(0) &= \int_0^L -f(t)(y''x' - x''y') dt \\ &= \int_0^L -k(t)f(t) dt, \end{aligned}$$

onde  $k(t)$  é a curvatura de  $c(t)$ . Se  $c$  for um mínimo de RI, para qualquer  $f$  como acima,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{s=0} RI(c_s) &= [4\pi A(0)]^{-2} [2L(0)L'(0)A(0) - A'(0)L(0)^2] \\ &= [4\pi A(0)]^{-2} L(0) \int_0^L [-2k(t)A(0) + L(0)] f(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Devendo ser a integral acima nula para *qualquer*  $f$ , a curvatura  $k$  de  $c$  deve ser  $L(0)/2A(0)$  (por quê?) e portanto  $c$  deve ser um círculo (por quê?). Neste ponto, Steiner (e também os gregos) *acreditava* ter a solução do problema

isoperimétrico, pois se uma região não fosse um disco, ele construiria uma região de menor  $RI$ . O argumento porém não convenceu Schwarz (e provavelmente outros matemáticos da época!). E o argumento convence o Leitor? Se a resposta for sim, convidamo-lo a comparar a situação com a seguinte:

“Considere a seqüência  $\{a_n = 1/n, n = 1, 2, \dots\}$ . Se  $n \neq 1$ ,  $1/n$  não pode ser mínimo da seqüência, pois  $1/n > 1/n^2$ . Portanto o mínimo é 1!”

O que falta ao argumento de Steiner, ao dos gregos, e ao argumento falacioso acima, é provar que *existe* uma solução, i.e. uma região de razão isoperimétrica mínima (o leitor é convidado a voltar às considerações finais da seção anterior). Na realidade, esta disputa de Steiner e Schwarz foi muito importante, pois focalizou o ponto em geral mais delicado na solução de problemas variacionais, ou seja, a da *existência* de mínimos (ou máximos). O mesmo problema foi levantado por Weierstrass, em relação à existência de mínimos para a integral de Dirichlet, o famoso *Princípio de Dirichlet*, muito utilizado por Riemann no seu trabalho sobre funções analíticas, e que só foi demonstrado no final do século dezanove.

Vamos então concluir a demonstração do teorema 3, provando que os mínimos realmente existem! Se  $\Omega$  for um disco, sua razão isoperimétrica é 1. Portanto, para mostrar que os mínimos existem (e são discos) é suficiente provar o seguinte

**Teorema 4 (Desigualdade Isoperimétrica)** *Se  $c$  for uma curva de Jordan retificável, então  $RI(c) \geq 1$*

A primeira demonstração é consequência imediata do teorema de Zenodorus:

*Demonstração 1:* Seja  $c$  uma curva de Jordan retificável. Então existe, para cada inteiro  $m$ , uma poligonal inscrita  $P$  com  $n$  lados e  $|RI(c) - RI(P)| < 1/m$ . Pelos teoremas 1 e 2 (afirmações 2 e 3), temos  $RI(P) \geq (1/\pi)n \cotg(\pi/n)$ . Mas  $n \cotg(\pi/n)$  decresce a  $\pi$  quando  $n \rightarrow \infty$ , e portanto, para cada  $m$ :

$$RI(c) \geq RI(P) - (1/m) \geq 1 - (1/m). \quad (6)$$

■

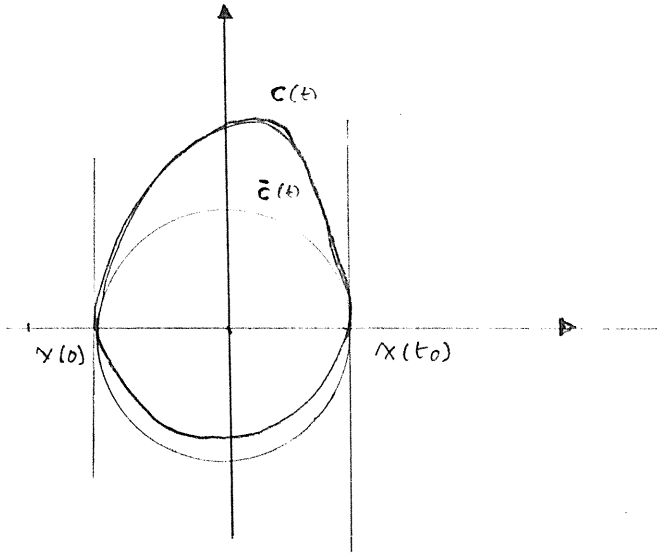


Figura 9: Desigualdade isoperimétrica

Daremos agora uma outra demonstração, que não usa o teorema de Zenodorus (veja [dC1]).

*Demonstração 2:* Seja  $c(t) = (x(t), y(t))$ ,  $0 \leq t \leq L$ , uma curva de Jordan estritamente convexa (não essencial para o argumento). Faremos as seguintes hipóteses:

- $c$  é de classe  $C^1$  e está parametrizada por comprimento de arco (i.e.  $\|\dot{c}(t)\| = 1$  e, portanto,  $L = L(c)$ );
- $x(0)$  e  $x(t_0)$  são os valores mínimo e máximo de  $x(t)$  (únicos pela convexidade estrita);
- $0 = (x(t_0) - x(0))/2$  e  $(x(t_0) - x(0)) = 2r$ .

Consideramos a curva (v. fig 9):

$$\bar{c}(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \begin{cases} (x(t), [r^2 - x(t)^2]^{1/2}) & \text{se } 0 \leq t \leq t_0, \\ (x(t), -[r^2 - x(t)^2]^{1/2}) & \text{se } t_0 \leq t \leq L. \end{cases}$$

A curva  $\bar{c}$  é portanto uma parametrização do círculo com centro na origem e raio  $r$ . De 4, temos:

$$\pi r^2 = - \int_0^L \bar{y}(t)x'(t)dt, \quad A(c) = \int_0^L x(t)y'(t)dt,$$

e portanto:

$$\begin{aligned} A(c) + \pi r^2 &= \int_0^L [x(t)y'(t) - \bar{y}(t)x'(t)]dt \\ &= \int_0^L \langle (x(t), -\bar{y}(t)), (x'(t), y'(t)) \rangle dt \\ &\leq \int_0^L [x(t)^2 + \bar{y}(t)^2]^{1/2} [x'(t)^2 + y'(t)^2]^{1/2} dt = rL, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Finalmente:

$$\begin{aligned} 0 &\leq [A(c)]^{1/2} - r\pi^{1/2}]^2 \\ &= A(c) + \pi r^2 - 2r(A\pi)^{1/2} \\ &\leq rL - 2r[A(c)\pi]^{1/2}, \end{aligned}$$

o que mostra a desigualdade isoperimétrica. ■

*Observações:* As hipóteses acima são todas não restritivas. Isso é óbvio exceto pela hipótese que  $c$  seja de classe  $C^1$ . É claro que toda curva contínua pode ser uniformemente aproximada por curvas diferenciáveis (Teorema de aproximação de Weierstrass), mas isso não é suficiente, pois, como já observamos após o teorema 1, o comprimento não é “contínuo” na topologia da convergência uniforme. Porém, aproximando-se primeiro com poligonais inscritas, e depois estas com curvas  $C^1$  de comprimento próximo, podemos obter uma curva  $C^1$  que aproxime, em razão isoperimétrica, a curva  $c$ .

No próximo capítulo daremos uma outra demonstração dos teoremas 3 e 4 usando desenvolvimento em séries de Fourier.

## 1.5 O problema isoperimétrico em $\mathbb{R}^3$

Nessa seção daremos uma idéia do problema isoperimétrico em  $\mathbb{R}^3$ , supondo o leitor familiar com os conceitos básicos da geometria diferencial das superfícies regulares. Os argumentos são bem similares aos usados na seção anterior e se generalizam ao caso de hipersuperfícies de  $\mathbb{R}^n$ .

Uma superfície compacta  $M$  (mergulhada) em  $\mathbb{R}^3$  divide  $\mathbb{R}^3$  em duas componentes conexas, uma limitada,  $I_M$ , o *interior* de  $M$ , e uma ilimitada,  $E_M$ , o *exterior* de  $M$ . O problema isoperimétrico, neste caso, é o de achar, na classe das superfícies (compactas mergulhadas) de área fixada, as que limitam uma região de volume máximo. Para este problema podemos considerar, analogamente ao caso do plano, as formulações (equivalentes) correspondentes a **(PI\*)** e **(RI)**, e assim o faremos quando conveniente. Imporemos algumas limitações para a classe de superfícies a serem consideradas, limitações que, pelo menos pela analogia ao caso do plano, não deveriam incomodar o Leitor! Fixaremos a classe das superfícies compactas mergulhadas tais que:

- a) sejam regulares de classe pelo menos  $C^2$ ,
- b) tenham interior estritamente convexo.

A primeira hipótese nos permite, entre outras coisas, não nos envolver com o problema da definição geométrica de área: no caso de superfícies, as áreas de “poliedros inscritos” podem não convergir à área da superfície. A segunda torna os argumentos mais simples. Ambas, porém, não são estritamente necessárias para a solução do problema.

O resultado que queremos *discutir* (não demonstrar completamente), é o seguinte:

**Teorema 5** *Entre todas as superfícies regulares de classe  $C^2$ , compactas, estritamente convexas e de área fixada  $A_0$ , as que limitam os volumes máximos são as esferas.*

Começamos com algumas considerações. Se  $\Omega$  for um aberto do  $\mathbb{R}^3$  com fronteira dada por uma superfície regular  $M$ , e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^2$ , o teorema de Gauss implica que:

$$\iiint_{\Omega} (\Delta f) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_M \langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle d\sigma,$$



onde  $\mathbf{n} = (\cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3)$  é a normal unitária externa a  $M$  e  $d\sigma$  é o elemento de área de  $M$  (que, em termos de uma parametrização local  $X = X(u, v)$  é dado por  $\|X_u \wedge X_v\| dudv$ ).

Aplicando-se a fórmula acima a  $f = (1/2)(x_i)^2$ , temos então, para  $V(M)$ , o volume de  $\Omega$ , e a área de  $M$ ,  $A(M)$ :

$$V(M) = \int_M x_i \cos \theta_i d\sigma, \quad (7)$$

$$A(M) = \int_M d\sigma. \quad (8)$$

Se  $M$  for uma esfera, temos  $A(M)^3/36\pi V(M)^2 = 1$ . Portanto a desigualdade que gostaríamos de mostrar, por analogia à desigualdade isoperimétrica no plano, é:

**Teorema 6 (Desigualdade isoperimétrica)** *Para todas superfícies compactas  $C^2$  e convexas  $M$ , temos*

$$A(M)^3 \geq 36\pi V(M)^2. \quad (9)$$

**Afirmação :** *suponha que um plano intersecta  $M$  ao longo de um círculo que divide  $M$  em duas regiões, cujas projeções ortogonais sobre o plano sejam o interior do disco. Então vale a desigualdade 9.*

A idéia da demonstração é exatamente a mesma da segunda demonstração que nós demos da desigualdade isoperimétrica no plano. De fato, suponhamos que o plano seja o plano  $x_3 = 0$ , o centro do círculo na origem e o raio  $r$ . Consideramos a esfera  $S = S(r)$  de centro na origem e raio  $r$ . Se  $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$  for uma parametrização local de  $M$ , parametrizamos  $S$  da seguinte maneira:

$$\tilde{X}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), \pm[r^2 - x_1(u, v)^2 - x_2(u, v)^2]^{1/2}),$$

onde o sinal da terceira coordenada é positivo (resp. negativo) se  $x_3(u, v)$  for positivo (resp. negativo). Sejam  $\theta_i$  e  $\bar{\theta}_i$  os ângulos que as normais a  $M$  e  $S$  formam com os eixos coordenados,  $d\sigma$  e  $d\bar{\sigma}$  os elementos de área de  $M$  e  $S$  respectivamente. Observamos que:

$$\begin{aligned} \cos \theta_3 d\sigma &= (x_{1,u}x_{2,v} - x_{1,v}x_{2,u}) \\ &= \cos \bar{\theta}_3 d\bar{\sigma}. \end{aligned}$$

Temos então :

$$\begin{aligned} V(M) &= \iint_M x_i \cos \theta_i d\sigma, \quad i = 1, 2; \\ V(S) &= \frac{4\pi}{3} r^3 \\ &= \iint_M \bar{x}_3 \cos \theta_3 d\sigma. \end{aligned}$$

Somando:

$$\begin{aligned} 2V(M) + \frac{4\pi}{3} r^3 &= \iint_M \langle \bar{X}(u, v), \mathbf{n}(u, v) \rangle d\sigma \\ &\leq \iint_M r d\sigma \\ &= rA(M). \end{aligned}$$

Mas a média aritmética é maior ou igual à média geométrica e portanto:

$$rA(M) \geq 2V(M) + \frac{4\pi}{3} r^3 \geq [36\pi V(M)^2 r^3]^{1/3},$$

que é a relação desejada. ■

Vamos agora generalizar ao nosso caso a construção da *simetrização de Steiner*, discutida na seção anterior, o fim de mostrar que,

*dada uma superfície compacta convexa, existe uma superfície satisfazendo às hipóteses da afirmação, com mesmo volume e área menor.*

Dada uma reta  $\mathbf{r}$ , que suporemos ser o eixo  $x_3$ , consideramos o feixe dos planos perpendiculares a  $\mathbf{r}$ . Sobre cada plano consideramos um disco de centro a interseção do plano com  $\mathbf{r}$ , e área igual à área da seção do plano com o interior de  $M$ . Obtemos assim uma região que, pelo princípio de Cavalieri, tem o mesmo volume que o interior de  $M$  e fronteira  $\Sigma(M)$  uma superfície de revolução. Vamos mostrar que  $\Sigma(M)$  tem área menor do que  $M$ .

Precisaremos do seguinte resultado:

**Lema 2** *Seja  $J(t)$  uma função contínua em  $[0, T]$ . Então :*

$$\int_0^T [1 + J(t)^2]^{1/2} dt \geq \{T + [\int_0^T J(t) dt]^2\}^{1/2}$$

*e a igualdade vale se e somente se  $J$  é constante.*

*Demonstração:* Seja  $c(t) = (x(t), y(t))$  uma curva plana de classe  $C^1$ . O comprimento do segmento entre  $c(0)$  e  $c(1)$  é obviamente menor ou igual ao comprimento de  $c$  e portanto:

$$\begin{aligned} \int_0^T [x'(t)^2 + y'(t)^2]^{1/2} dt &\geq \{[x(T) - x(0)]^2 + [y(T) - y(0)]^2\}^{1/2} \\ &= \{[\int_0^T x'(t) dt]^2 + [\int_0^T y'(t) dt]^2\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Pondo  $x(t) = t$  e  $y(t) = \int_0^t J(t) dt$ , obtemos a desigualdade desejada. Além disso, a igualdade valerá se e somente se  $c(t)$  for uma reparametrização do segmento, i.e.  $J(t)$  for constante. ■

Voltamos agora à demonstração do fato que a área de  $M$  é maior ou igual à de  $\Sigma(M)$ .  $M$  pode ser localmente parametrizada por  $z = x_3, z_0 \leq z \leq z_1$  e por  $\sigma$ , o comprimento de arco da curva interseção de  $M$  com  $x_3 = z, 0 \leq \sigma \leq l(z)$ , onde  $l(z)$  é o comprimento daquela curva. Localmente, fora de um conjunto de medida nula,  $M$  é um gráfico sobre  $x_3 = 0$ , devido à hipótese de convexidade. O elemento de área neste caso é  $[1 + (\partial z / \partial x_1)^2 + (\partial z / \partial x_2)^2]^{1/2} dx_1 dx_2$ . Se  $J(z, \sigma)$  for o determinante Jacobiano da mudança de coordenadas  $x_i = x_i(z, \sigma)$ , o elemento de área nas coordenadas  $z$  e  $\sigma$  será dado por  $[1 + J(z, \sigma)^2]^{1/2} dz d\sigma$  (por quê?). Se  $Q(z)$  for a área da interseção do plano  $x_3 = z$  com o interior de  $M$ , temos  $(d/dz)Q(z) = \int_0^{l(z)} J(z, \sigma) d\sigma$  (por quê?). Neste ponto temos:

$$\begin{aligned} A(M) &= \int_{z_0}^{z_1} dz \int_0^{l(z)} [1 + J(z, s)^2]^{1/2} d\sigma \\ &\geq \int_{z_0}^{z_1} [l(z)^2 + (dQ/dz)^2]^{1/2} dz, \end{aligned}$$

pelo lema, e a igualdade vale se  $J$  não depender de  $\sigma$ , por exemplo no caso de superfícies de rotação como  $\Sigma(M)$ . Então temos para  $\Sigma(M)$ :

$$A(\Sigma(M)) = \int_{z_0}^{z_1} [\tilde{l}(z)^2 + (dQ/dz)^2]^{1/2} dz,$$

onde  $\tilde{l}(z)$  é o comprimento da curva (círculo) interseção de  $\Sigma(M)$  com o plano  $x_3 = z$ . Mas, pela desigualdade isoperimétrica no plano,  $\tilde{l}(z) \leq l(z)$  e portanto  $A(M) \geq A(\Sigma(M))$ .

Pela convexidade de  $M$ ,  $\Sigma(M)$  é também convexa (por quê?) e, tomando-se o plano  $x_3 = z$  que corresponde à seção máxima, é imediato que  $\Sigma(M)$  verifica a hipótese da afirmação anterior, e portanto a desigualdade isoperimétrica está provada. ■

Temos então que *as esferas de dada área limitam volume máximo entre todas as superfícies regulares convexas da mesma área*. Não provamos, porém, e não iremos provar aqui, que *são as únicas de volume máximo*. Queremos, entretanto, fazer alguns comentários:

Poderíamos tentar usar a idéia do método variacional descrito para curvas planas. Se  $\mathbf{n}$  for o vetor normal unitário de  $M$  (uma das duas possíveis escolhas), e dada uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos construir uma família de superfícies  $M_s$ ,  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ , localmente dadas por  $X_s(u, v) = X(u, v) + sfN$ , onde  $X(u, v)$  é uma parametrização local de  $M$ . Se as  $M_s$  limitam todas o mesmo volume, temos que  $\int_M f = 0$ . Podemos então derivar a área de  $M_s$  em relação a  $s$  e calcular para  $s = 0$ . O anulamento desta derivada, para todas as funções  $f$  de média nula em  $M$ , é equivalente ao fato de que a curvatura média de  $M$  seja constante. Neste caso, ( $M$  não tem auto-interseções e) um teorema famoso de Alexandrov garante que  $M$  é uma esfera. Se relaxarmos a definição clássica de superfície, permitindo que a mesma tenha auto-interseções, o problema de classificar tais superfícies com curvatura média constante é extremamente difícil. Um primeiro resultado nesta direção é devido a H. Hopf, que provou que se  $M$  for topologicamente uma esfera, então  $M$  é uma esfera geométrica.

Na filosofia do problema isoperimétrico, se, além da curvatura média constante, a derivada segunda da área das  $M_s$  consideradas acima, for positiva em  $s = 0$ , para toda  $f$  de média nula em  $M$ , o que significa que a área da superfície é um mínimo e não somente um valor crítico, Barbosa e do Carmo [BdC2] provaram que, de fato, a superfície não tem auto interseções e é, portanto, uma esfera. Existem, porém, exemplos de superfícies (com auto interseções) com curvatura média constante que não são esferas (v. [We]).

## 2 Auto-valores do Laplaciano

Nesta seção vamos discutir alguns resultados relacionando a geometria de um domínio do plano e os auto-valores do operador Laplaciano agindo sobre funções definidas no domínio, e ver como estes resultados podem ser relacionados ao problema isoperimétrico.

### 2.1 Séries de Fourier e a equação das ondas em uma variável

Antes de começarmos o estudo do problema de auto-valores para domínios planares, faremos um breve introdução ao problema das vibrações de uma corda finita. Considere uma corda de comprimento  $L$ . É clássico que, se denotarmos a posição da corda por uma função  $u(x, t)$ , onde  $x \in [0, L]$ , e  $t \in \mathbb{R}^+$  representa o tempo, a equação que rege o movimento é da forma

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t, u, u_x, u_t).$$

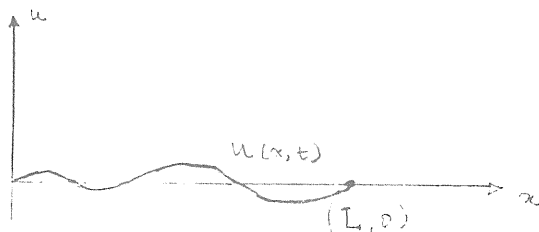


Figura 10: A corda vibrante

Esta equação é chamada *equação das ondas* (em uma variável espacial). Os índices representam as derivadas parciais,  $h(x, t, u, u_x, u_t)$  representa as forças externas (atrito, energia sendo adicionada à corda, etc.),  $c$  é uma função do material da corda e da tensão horizontal da corda. Para uma dedução, ver [CH] ou [Fi]. Consideraremos apenas pequenas vibrações e densidade constante, o que permite tomar  $c$  constante. Vamos considerar o caso de vibrações sem interações externas, obtendo a equação

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Suponha agora que consideramos as extremidades fixas, i.e.

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Dizemos que estamos impondo uma *condição de fronteira* à equação. Além disso, necessitamos, para determinar uma solução, as condições iniciais que  $u$  deve satisfazer. Por exemplo, podemos dar a posição e a velocidade iniciais. Assim temos o seguinte *problema de valores iniciais e de fronteira* (PVI):

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = f(x); u_t(x, 0) = g(x), & x \in [0, L] \end{cases}$$

A função  $u_t$  representa a velocidade das partículas. As funções  $f$  e  $g$  devem satisfazer condições compatíveis com as condições de fronteira. Sem discutir as condições de regularidade sobre  $f$  e  $g$ , procedemos heurísticamente, como em [Fil]. Aplicamos o método de *separação de variáveis*, procurando soluções da forma

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

Substituindo na equação diferencial acima, obtemos

$$\frac{F''}{F} = \frac{G''}{c^2 G},$$

onde as derivadas são tomadas em relação a  $x$  e  $t$ , respectivamente. Sem discutir a questão do anulamento dos denominadores, prosseguimos ingenuamente e concluímos que, como o lado esquerdo não depende do tempo e o

direito não depende da posição, então esta razão independe tanto de  $x$  como de  $t$ . Chamemos a esta constante  $\sigma$ . Portanto obtemos as equações :

$$\begin{aligned} F'' - \sigma F &= 0, \\ G'' - \sigma c^2 G &= 0, \end{aligned}$$

onde as derivadas são tomadas em relação a  $x$  e  $t$ , respectivamente. As condições de fronteira implicam que  $F(0) = F(L) = 0$ , caso contrário  $G(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$ , o que acarretaria  $u(x, t) \equiv 0$ , a solução trivial. Assim, temos o seguinte *problema de auto-valores com condição de Dirichlet* para  $F$ :

$$(\mathcal{D}) \begin{cases} F'' - \sigma F = 0, & 0 < x < L, \\ F(0) = F(L) = 0, \end{cases}$$

onde procuramos  $\sigma \in \mathbb{R}$  e funções não identicamente nulas que satisfazem à equação diferencial para  $F$ . Chamamos tais  $\lambda = -\sigma$  de em auto-valores e as funções de auto-funções associadas ao problema. (A troca de sinal é apenas um truque para que os auto-valores sejam positivos, o que é tradicional no estudo geométrico, conquanto não o seja em análise; poderíamos também considerar o problema  $F'' + \lambda F = 0$ .)

Considerando o espaço vetorial das funções  $C^\infty$  em  $[0, L]$ , então estamos procurando os auto-valores e auto-vetores do operador linear  $d/dx^2$ , que é o Laplaciano em uma variável (com a condição de fronteira dada).

A análise desta equação linear de segunda ordem é muito simples e temos três possibilidades:

- (i)  $\sigma > 0$ ,
- (ii)  $\sigma = 0$ ,
- (iii)  $\sigma < 0$ .

**Caso (i).** A solução geral é da forma

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}.$$

Mas as condições de fronteira implicam que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} = 0, \end{cases}$$

cuja única solução é  $c_1 = c_2 = 0$ , portanto  $u(x, t) \equiv 0$ .

**Caso (ii).** Neste caso temos  $F(x) = c_1x + c_2$ , e novamente

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ c_1L + c_2 = 0, \end{cases}$$

e novamente  $c_1 = c_2 = 0$ .

**Caso (iii).** Se  $\sigma < 0$ , seja  $\lambda = -\sigma > 0$  e a solução geral é da forma

$$F(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

As condições de fronteira implicam

$$c_1 = 0 \quad \text{e} \quad c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Como  $c_2 = 0$  não interessa, tomamos

$$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

ou seja

$$\sqrt{\lambda}L = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

**Definição 3** *O espectro do segmento  $[0, L]$  com condição de Dirichlet é o conjunto*

$$\text{spec}_{\mathcal{D}}([0, L]) = \left\{ \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2}, k \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\} \right\}.$$

Observe que os auto-valores formam uma sequência crescente ilimitada

$$0 < \lambda_1 = \frac{\pi^2}{L^2} < \lambda_2 = \frac{4\pi^2}{L^2} < \dots$$

O segmento  $[0, L]$ , a menos de congruência, está completamente determinado por  $\lambda_1 = \pi^2/L^2$ . Associadas aos auto-valores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , temos as auto-funções

$$F_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$



Note que os auto-valores são simples, i.e. a cada auto-valor corresponde apenas uma auto-função, a menos de uma constante. Agora, considerando-se a equação diferencial para  $G(t)$ :

$$G'' + \lambda c^2 G = 0,$$

e tomando  $\lambda = \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , notamos que  $\lambda_k c^2 > 0$ , portanto a solução geral, como em (iii) acima, é:

$$G_k(t) = a_k \cos\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi ct}{L}\right).$$

Portanto, obtemos uma família de soluções para o PVIF (sem considerar as condições iniciais):

$$u_k(x, t) = a_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi ct}{L}\right).$$

Infelizmente, as condições iniciais para  $u$  e  $u_t$  não serão satisfeitas, a não ser no caso em que  $f(x)$  e  $g(x)$  sejam muito especiais. Por exemplo, se tomarmos  $u_k(x, t)$  como solução, então

$$\begin{cases} u_k(x, 0) = a_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \\ (u_k)_t(x, 0) = \frac{k\pi c}{L} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \end{cases}$$

o que mostra como ficamos restritos em relação às condições iniciais. Podemos ainda considerar combinações finitas das  $u_k$ , mas também não obteremos um conjunto de funções muito amplo. Aqui, historicamente, entrou o gênio de Fourier. Ele percebeu que, se considerássemos séries com termos da forma  $u_k(x, t)$ , então ampliaríamos muito as possibilidades para as condições iniciais, devido às propriedades de *completude* do sistema formado pelas funções seno e cosseno. A proposição a seguir é bem conhecida.

**Proposição 1 (Condições de ortogonalidade)** *Sejam  $k, l \in \mathbb{N}^*$ . Então:*

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi x}{L}\right) dx &= L\delta_{kl}, \\ \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{l\pi x}{L}\right) dx &= 0, \\ \int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{l\pi x}{L}\right) dx &= L\delta_{kl}, \end{aligned}$$

onde  $\delta_{kl} = 1$  se  $k = l$ ,  $\delta_{kl} = 0$  caso contrário. ■

Assim, considerando-se

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$$

como uma possível solução, onde o lado direito deve ser entendido no sentido de convergência de séries de funções, obtemos, em termos das condições iniciais:

$$\begin{aligned} f(x) = u(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, 0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \\ g(x) = u_t(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi c}{L} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

Multiplicando-se por  $\operatorname{sen}(l\pi x L^{-1})$  e integrando, as condições de ortogonalidade acima implicam:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx, \\ b_k &= \frac{2}{k\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx, \end{aligned}$$

que são os *coeficientes de Fourier* associados a  $f$  e a  $g$  (multiplicado por uma constante neste último caso). Assumindo-se tanto a existência dos coeficiente como uma conveniente convergência das séries, podemos então dizer que realmente temos uma solução  $u(x, t)$  para o PVIF inicial.

### Observações:

1. Note que as expansões foram feitas em relação ao sistema de auto-funções de  $d^2/dx^2$  em  $[0, L]$ .

2. Se fixarmos um ponto  $x_0 \in (0, L)$ , notamos que a função  $u_k(x_0, t)$  representa um movimento harmônico com período

$$T = \frac{L}{k\pi c} 2\pi = \frac{2L}{kc},$$

ou seja, de frequência

$$\omega_k = \frac{kc}{2L},$$

que não depende de  $x_0$ . Como  $\lambda_k = (k\pi L^{-1})^2$ , temos a relação  $\sqrt{\lambda_k} = 2\pi c^{-1}\omega_k$ , que mostra como os auto-valores determinam as frequências dos *harmônicos naturais* da corda, como são chamadas as funções  $u_k(x, t)$ . A amplitude é dada por  $\alpha_k \sin(k\pi x_0 L^{-1})$ , onde  $\alpha_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ . O primeiro harmônico  $u_1(x, t)$  tem a frequência mais baixa possível,  $\omega_1 = c(2\pi)^{-1}\sqrt{\lambda_1} = c(2L)^{-1}$ , que é chamado de *tom fundamental* da corda.

3. Se considerarmos o *problema de auto-valores com condição de Neumann*

$$(\mathcal{N}) \begin{cases} \tilde{F}'' - \sigma \tilde{F} = 0, & 0 < x < L, \\ \frac{d\tilde{F}}{dx}(0) = \frac{d\tilde{F}}{dx}(L) = 0 \end{cases}$$

podemos repetir a análise acima, obtendo o *espectro* de  $[0, L]$  com condição de Neumann:

$$\text{spec}_{\mathcal{N}}([0, L]) = \{\mu_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2}, k \in \{0, 1, 2, \dots\}\}.$$

As *auto-funções* (não-normalizadas) associadas são dadas por

$$\tilde{F}_k(x) = \cos(k\pi x L^{-1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A análise acima se repete sem modificações essenciais, apenas temos que incluir o auto-valor nulo, e as auto-funções constantes.

4. As condições sobre as funções  $f(x)$  e  $g(x)$  são exatamente aquelas dados pela teoria da convergência das séries de Fourier. Ver [Fil], capítulo 2 e 3, para maiores detalhes.

Vamos fazer uma pausa para esquematizar o que fizemos até aqui, e relacioná-lo com o caso em dimensão finita. Consideramos, nos espaço  $C^0[-L, L]$ , o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-L}^L f g dx$$

e a norma associada

$$\|f\|_{L^2} = \left[ \int_{-L}^L f^2 dx \right]^{1/2}.$$

Falamos em produto interno e norma  $L^2$ , neste caso. Um cálculo relativamente simples, utilizando-se as condições de ortogonalidade (prop. 1), mostra que as funções

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2L}}, \quad e_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad e_{-k} = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right),$$

com  $k \in \mathbb{N}$ , formam um sistema ortonormal em relação ao produto  $L^2$ , portanto linearmente independente. Porém não formam uma *base* no sentido usual de álgebra linear, pois nem todas as funções  $C^0$  podem ser escritas como combinação linear (finita) das  $e_k$  's. Mas, usando a norma acima, podemos discutir a questão da convergência de seqüências e séries. Mais precisamente, se  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  for uma seqüência em  $C^0[-L, L]$ , dizemos que a série  $\sum_{i=-\infty}^{\infty}$  converge a  $f \in C^0[-L, L]$  na norma  $L^2$ , se

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{i=-n}^m f_i \right\|_{L^2} = 0.$$

O fato básico da teoria de séries de Fourier é que  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  é um *sistema ortonormal completo* para  $C^0[-L, L]$ :

**Teorema 7** *Para qualquer função  $f \in C^0[-L, L]$ , existe uma seqüência  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  de números reais tais que a série  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i e_i$  converge a  $f$  na norma  $L^2$ .*

Os  $a_i$  's são chamados, por razões óbvias, de *coordenadas* de  $f$  no sistema orto-normal completo  $\{e_i\}_{i \in \text{int}\mathbb{Z}}$ , ou ainda, de *coeficientes de Fourier* de  $f$ . Temos ainda os seguintes fatos, sempre em analogia ao caso de dimensão finita, todos resultados clássicos em séries de Fourier:

### Proposição 2

1.  $a_k = \langle f, e_k \rangle_{L^2}$ ;
2.  $\langle f, g \rangle_{L^2} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i b_i$ , onde  $a_i$  e  $b_i$  são os coeficientes de Fourier de  $f$  e  $g$ , respectivamente;
3.  $\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i^2$ , onde  $a_i$  é o  $i$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $f$ . ■

Mais classicamente, podemos escrever

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{cos} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \end{aligned}$$

Resumindo os resultados desta seção, podemos enunciar o chamado *teorema espectral* para o segmento  $[0, L]$ , cuja demonstração está delineada na discussão acima. Considere  $*$   $\in \{\mathcal{D}, \mathcal{N}\}$ , referente às condições de Dirichlet ou Neumann para o bordo, respectivamente.

**Teorema 8 (Teorema espectral para o intervalo)** *Considere o problema de auto-valores para o operador  $d^2/dx^2$ , com condição de contorno  $*$ .*

i. *Os auto-valores formam uma sequência*

$$(0 \leq) \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

*indo para  $+\infty$ ;*

ii. *Cada auto-valor é simples, i.e. o auto-espaço correspondente é unidimensional, e auto-espaços correspondentes a auto-valores distintos são perpendiculares (no produto  $L^2$  dado pela integral);*

iii. *A soma direta dos auto-espaços  $E(\lambda_k)$  é densa em  $C^\infty([0, L])$  no sentido da topologia da convergência  $C^\infty$ -uniforme, portanto densa em  $C^0[0, L]$ , na norma  $L^2$ . ■*

Como uma aplicação geométrica das séries de Fourier, incluímos a demonstração de Hurwitz, seguindo [Fil], da *desigualdade isoperimétrica*.

**Teorema 9** *Seja  $\Omega$  um domínio relativamente compacto, cujo bordo  $C = \partial\Omega$  é  $C^2$ . Denote por  $L$  o comprimento de  $\partial\Omega$  (perímetro de  $\Omega$ ) e por  $A$  a área de  $\Omega$ . Então*

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

*e a igualdade ocorre se e somente se  $\Omega$  for um disco circular (de área  $A$ ).*

*Demonstração:* Seja  $\tilde{\gamma} = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ ,  $s \in [0, L]$ , uma parametrização de  $C$  pelo comprimento do arco.

Seja  $t = \frac{s}{L}$  e defina  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(Lt)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Portanto, onde estiverem definidas, as derivadas

$$x'(t) = L\tilde{x}'(s)$$

$$y'(t) = L\tilde{y}'(s)$$

implicam  $x'^2 + y'^2 = L^2$ .

Estendemos  $x, y$  periodicamente, e obtemos, via o Teorema de Fourier

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t) \\ y(t) &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos 2n\pi t + \beta_n \sin 2n\pi t) \\ x'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi (-a_n \sin 2n\pi t + b_n \cos 2n\pi t) \\ y'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi (-\alpha_n \sin 2n\pi t + \beta_n \cos 2n\pi t). \end{aligned}$$

Pela identidade de Parseval (prop. 2.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 \pi^2 (a_n^2 + b_n^2) = 2 \int_0^1 (x'(t))^2 dt,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 \pi^2 (\alpha_n^2 + \beta_n^2) = 2 \int_0^1 (y'(t))^2 dt.$$

Como  $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = L^2$ , obtemos

$$2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + \alpha_n^2 + \beta_n^2) = L^2.$$

Por outro lado, se

$$f = a_0/2 + \sum a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

$$g = \alpha_0/2 + \sum \alpha_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

então

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L (fg) dt = \frac{1}{2} a_0 \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n).$$

Aplicando para  $f = x, g = y'$ ,

$$2 \int_0^1 xy' dt = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi(a_n\beta_n - b_n\alpha_n).$$

Mas  $\int_0^1 xy' dt = A(\Omega)$ , logo

$$\int_0^1 xy' dt = \pi \sum n(a_n\beta_n - b_n\alpha_n) = A.$$

Portanto

$$L^2 - 4\pi A = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n - \beta_n)^2 + (nb_n + \alpha_n)^2 + (n^2 - 1)(\alpha_n^2 + \beta_n^2)] \geq 0,$$

o que prova a desigualdade isoperimétrica. No caso de igualdade, o terceiro termo do somatório é nulo o que implica que  $\alpha_n = \beta_n = 0$ , exceto para  $n = 1$ . Mas então, usando que os outros dois termos são nulos, temos

$$\begin{cases} a_1 = \beta_1, \\ b_1 = -\alpha_1. \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} x(t) = a_0 + a_1 \cos 2\pi t + b_1 \sin 2\pi t \\ y(t) = \alpha_0 - b_1 \cos 2\pi t + a_1 \sin 2\pi t \end{cases}$$

que é o círculo de raio  $n = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$  centrado em  $(a_0, \alpha_0)$ . ■

## 2.2 O problema da membrana vibrante

O mesmo tipo de análise que fizemos na secção anterior é realizada para o problema de uma membrana vibrando, cujo bordo está sujeito a certas condições. Representando a posição de uma partícula de coordenadas  $(x, y)$  no instante  $t$  por  $u(x, y, t)$ , a equação diferencial toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \tag{10}$$

onde  $\Delta$  é o operador laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

(atuando apenas nas variáveis espaciais). Para uma dedução desta equação utilizando princípios de energia, v. [CH]. Comparando com a equação da corda, vemos que estamos considerando pequenas vibrações, densidade constante e ainda unidades físicas tais que  $c = 1$ . Se considerarmos o caso de uma membrana representada por um domínio  $\Omega$  no plano, presa ao longo do bordo (caso de um tambor), temos, analogamente ao caso da corda de extremidades fixas, o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira (PVIF):

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u & (x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, y, t) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, y, 0) = f(x, y); u_t(x, y, 0) = g(x, y) & (x, y) \in \Omega \end{cases}$$

As funções  $f$  e  $g$  representam as condições iniciais novamente. As condições de contorno, como antes, são chamadas de condições de Dirichlet. Aplicando-se o método de separação de variáveis, supomos que

$$u(x, y, t) = F(x, y)G(t),$$

obtendo novamente

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{G''}{G} = \text{constante}.$$

Ocorre assim, como no caso da corda de extremidades fixas, o problema de auto-valores de Dirichlet:

$$(\mathcal{D}) \begin{cases} \Delta F + \lambda F = 0, & (x, y) \in \Omega \\ F|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

A pergunta que se coloca é: existem auto-valores

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots$$

e auto-funções (ortonormais) associadas

$$F_1(x, y), F_2(x, y), \dots$$

tais que o PVIF (de Dirichlet) acima tem uma solução da forma

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \text{sen}(\sqrt{\lambda_k} t)) F_k(x, y),$$



onde  $a_k$  e  $b_k$  são dados pelos coeficientes de Fourier de  $f$  e  $g$  em relação às auto-funções  $\{F_1, F_2, \dots\}$ ? Em outras palavras, *existe um sistema ortonormal completo de auto-funções para o problema de auto-valores em  $\Omega$  (com condição de Dirichlet)?*

A resposta é afirmativa, supondo-se condições razoáveis sobre a região  $\Omega$  e as funções  $f$  e  $g$ . Para a condição necessária e suficiente sobre  $\Omega$ , veja o conceito de funções barreira em [GT]. (Lembre-se de que basta que haja uma *função de Green* para o problema.) Uma condição suficiente é que todo ponto do bordo possa ser alcançado por um segmento contido inteiramente no complementar de  $\Omega$ , que toca o bordo no ponto. Para  $f$  e  $g$ , as condições são semelhantes às condições para as séries de Fourier ( $C^2$  basta).

A teoria espectral, como passou a ser chamado o estudo sistemático deste tipo de problema, foi o resultado dos esforços de vários matemáticos duante a segunda metade do século passado, culminando com a teoria das equações integrais desenvolvida por Fredholm e Hilbert no início deste século. Mais tarde Weyl e Courant contribuíram com os métodos variacionais.

Antes de enunciarmos o resultado, vamos incluir o caso das *condições de Neumann* para a fronteira. O problema de auto-valores de Neumann é:

$$(\mathcal{N}) \begin{cases} \Delta F + \lambda F = 0, & (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial F}{\partial \nu} |_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

onde  $\nu$  é o vetor unitário normal externo a  $\Omega$  ao longo de  $\partial\Omega$  e  $\partial/\partial\nu$  é a derivada direcional com relação a  $\nu$ . No que se segue,  $*$   $\in$   $\{\mathcal{D}, \mathcal{N}\}$  se refere às condições de Dirichlet ou Neumann na fronteira. Denote por  $C_*^r(\Omega)$  o espaço das funções  $C^r$  em  $\bar{\Omega}$  satisfazendo à condição de contorno  $*$ . Seja  $E_k^*$  o sub-espaço de  $C_*^\infty(\Omega)$  gerado pelas auto-funções associadas a  $\lambda_k^*$ .  $E_k^*$  é chamado de *auto-espaço* de  $\lambda_k^*$ .

### Teorema 10 (Teorema Espectral)

(i.) *Existe uma sequência discreta*

$$(0 \leq) \lambda_1^* < \lambda_2^* < \lambda_3^* \dots \nearrow \infty,$$

*de auto-valores para o \*-problema de auto-valores acima, e auto-funções (analíticas) associadas:*

(ii.) *Os auto-espaços  $E_k^*$  são de dimensão finita, i.e. a cada auto-valor corresponde apenas um número finito de auto-funções :*

(iii.) A soma direta  $\bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k^*$  é densa em  $C_*^r(\Omega)$ , na topologia  $C^r$ -uniforme,  $r = 0, 1, \dots, \infty$ ;

(iv.) A soma direta  $\bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k^*$  é densa em  $L^2(\Omega)$ , na topologia  $L^2$  (as auto-funções (orto-normalizadas) formam uma base Hilbertiana para  $L^2(\Omega)$ ).

Para a demonstração deste teorema, ver [CH] ou [Ga]. Ambos utilizam-se da existência da função de Green para o laplaciano. Uma demonstração direta, utilizando a caracterização variacional dos auto-valores, pode ser encontrada em [Be1].

No enunciado do teorema espectral, colocamos a possibilidade de  $\lambda_1^* = 0$ . Na verdade temos:

$$\lambda_1^{\mathcal{D}} > 0,$$

$$\lambda_1^{\mathcal{N}} = 0.$$

A segunda expressão é consequência de que as funções constantes não-nulas são auto-funções para o problema de Neumann (a derivada normal é nula). A primeira vem da unicidade da solução da equação de Laplace

$$\Delta u = 0$$

com condição de contorno  $u = f$  em  $\partial\Omega$ . No caso em que esta condição é que  $f = 0$  em  $\partial\Omega$ , então  $u \equiv 0$  é a única solução. Portanto  $\lambda = 0$  não é auto-valor.

## 2.3 Propriedades do primeiro auto-valor

Vimos que o primeiro auto-valor para o problema de Neumann é nulo. Nesta secção estudaremos outras propriedades do primeiro auto-valor para o problema de Dirichlet, dentre as quais a mais importante é que o primeiro auto-valor é simples, i.e.  $\dim(E_1^{\mathcal{D}}) = 1$ . Antes de demonstrarmos esta propriedade, introduzimos a *integral de Dirichlet* e o *quociente de Rayleigh* de uma função.

**Definição 4** *Seja  $u$  uma função  $C^1$  por partes.*

*i. Definimos a integral de Dirichlet (ou integral de energia) de  $u$  como:*

$$\mathcal{Q}(u) = \iint_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx dy.$$

ii. Definimos o **quociente de Rayleigh** de  $u$ , se  $u \neq 0$  ( $u$  não identicamente nula) como:

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\int \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx dy}{\int \int_{\Omega} u^2 dx dy} = \frac{\mathcal{Q}(u)}{\|u\|_{L^2}^2}.$$

Antes de continuarmos, relembramos aqui as *identidades de Green*, que são consequência direta do teorema de Green no plano.

**Teorema [Identidades de Green]** *Sejam  $u$  e  $v$  funções  $C^2$  em  $\bar{\Omega}$ , e seja  $\nu$  o vetor unitário normal interno à  $\partial\Omega$ . Então :*

(Primeira identidade de Green)

$$\int \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx dy + \int \int_{\Omega} u \Delta v dx dy = - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds;$$

(Segunda identidade de Green)

$$\int \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = - \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds.$$

*Demonstração:* Para a primeira identidade, use

$$P(x, y) = u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad Q(x, y) = -u \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds &= \int_{\partial\Omega} u \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dx}{ds} \right) ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial y} dx - u \frac{\partial v}{\partial x} dy \right) \\ &= - \int \int_{\Omega} (u_x v_x + u v_{xx} + u_y v_y + u v_{yy}) dx dy \\ &= - \int \int_{\Omega} (\langle \nabla u, \nabla v \rangle + u \Delta v) dx dy. \end{aligned}$$

Para a segunda, use duas vezes a primeira identidade e subtraia. ■

Agora, se  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , e  $u$  é  $C^2$ , então pela primeira identidade de Green,

$$\mathcal{Q}(u) = - \int \int_{\Omega} u \Delta u dx dy = - \langle u, \Delta u \rangle_{L^2},$$

ou seja,  $\mathcal{Q}(u)$  é a forma quadrática associada à forma bilinear simétrica

$$\mathcal{Q}(u, v) = - \langle u, \Delta v \rangle_{L^2} = - \langle \Delta u, v \rangle_{L^2},$$

se  $v$  também é  $C^2$ , pela segunda identidade de Green.

*Obs.:* Esta última expressão mostra que o laplaciano, para funções  $C^2$  satisfazendo a condição de Dirichlet, é *auto-adjunto* com relação ao produto  $L^2$ .

Como motivação, lembramos aqui como podemos calcular os auto-valores de uma matriz simétrica  $A$  em  $\mathbb{R}^n$ . Definimos a forma quadrática

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle$$

e calculamos o ínfimo sobre a esfera unitária de  $\mathbb{R}^n$ :

$$\lambda_1 = \inf\{Q(v) : v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1\}.$$

Mas poderíamos também calcular

$$\lambda_1 = \inf\left\{\frac{Q(v)}{\|v\|^2} : v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0\right\}.$$

Este é o menor auto-valor (incluindo sinal) de  $A$ . Também sabemos que existe  $v_1 \in \mathbb{R}^n$ , auto-vetor associado a  $\lambda_1$ , com  $\|v_1\| = 1$  e

$$Q(v_1) = \lambda_1 \quad (\langle Av_1, v_1 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_1 \rangle = \lambda_1).$$

Analogamente, temos para o laplaciano (nesta sub-seção omitiremos a referência à condição na fronteira; estaremos sempre considerando o problema de Dirichlet):

### **Proposição 3 (Caracterização variacional do primeiro auto-valor)**

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Omega) &= \inf\{\mathcal{R}(u) : u \in C^\infty(\Omega), u \neq 0, u|_{\partial\Omega} = 0\} \\ &= \inf\{Q(u) : u \in C^\infty, u|_{\partial\Omega} = 0, \|u\|_{L^2} = 1\} \end{aligned}$$

Apresentaremos duas demonstrações desta proposição, a primeira esquematicamente.

**1ª Demonstração:** Primeiramente, observamos que se  $u_1$  é auto-função associada a  $\lambda_1$ , então

$$\mathcal{R}(u_1) = \lambda_1,$$

pois, pela fórmula de Green, como  $u$  é  $C^\infty$ ,

$$\int \int_{\Omega} \langle \nabla u_1, \nabla u_1 \rangle dx dy = - \int \int_{\Omega} u_1 \Delta u_1 dx dy = \lambda_1 \int \int_{\Omega} u_1^2 dx dy.$$

Isto implica, que

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1,$$

onde  $\tilde{\lambda}_1$  é o ínfimo do enunciado do lema.

Mas a equação

$$\Delta u + \tilde{\lambda}_1 u = 0 \quad , \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

admite uma solução  $v$ , regular, via o limite de uma sequência minimizante  $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ , com  $\|v\|_2 = 1$  (v. [Be1] para o argumento, que usa a elipticidade do operador laplaciano). Portanto  $\tilde{\lambda}_1$  é auto-valor ( $\tilde{\lambda}_1 > 0$ , caso contrário  $v_k$  na seq. minimizante convergiria para a função nula, com norma  $L^2$  igual a 1). Como  $\lambda_1$  é o menor auto-valor,  $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1$ . ■

*Observação:* esta demonstração pode ser adaptada para provar a existência tanto de  $\lambda_1$  como da primeira auto-função, via a utilização do método variacional, trabalhando-se em  $H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid u \text{ suporte compacto no interior de } \Omega, \nabla u \in L^2(\Omega)\}$ . Aqui a derivada é tomada no sentido distribucional.  $H_0^1(\Omega)$  é o fecho, na topologia  $H^1$ , de  $C_0^\infty(\Omega)$  em  $L^2(\Omega)$ . A topologia  $H^1$  é dada pela norma

$$\|u\|_1^2 = \int \int_{\Omega} (u^2 + \|\nabla u\|^2) dx dy.$$

Veja [Be1] para o argumento.

*2ª Demonstração:* Seja  $u \neq 0$ ,  $C^\infty$ . Sejam  $c_n = \langle u, u_n \rangle$  onde  $\{u_n\}$  é um sistema orto-normal de auto-funções, associadas aos auto-valores  $\{\lambda_n\}$ . Escreveremos

$$c_n = \frac{a_n}{\lambda_n^2}.$$

Então

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n u_n}{\lambda_n^2},$$

portanto

$$\Delta u = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n u_n}{\lambda_n}.$$

Temos

$$\iint_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\lambda_n^3}$$

$$\left( \nabla u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2} \nabla u_n \quad e \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\Omega} \langle \nabla u_n, \nabla u_m \rangle dx dy &= - \iint_{\Omega} u_n \Delta u_m dx dy \\ &= \lambda_m \delta_{mn}. \end{aligned} \right)$$

Também

$$\iint_{\Omega} u^2 dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\lambda_n}$$

Portanto

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2} \geq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1 c_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2} = \lambda_1.$$

Mas, tomando  $u = u_1$ ,  $\mathcal{R}(u_1) = \lambda_1$ , o que implica

$$\inf \mathcal{R}(u) = \lambda_1. \quad \blacksquare$$

Ainda antes de mostrarmos que  $\lambda_1$  é simples, vamos mostrar a importante propriedade de que uma auto-função associada a  $\lambda_1$  não muda de sinal. Mais ainda, seus únicos zeros estão no bordo.

**Exercício:** Dada  $u \in C^\infty$ , defina, para  $\varepsilon > 0$ ,  $u_\varepsilon = (u^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$  e use  $u_\varepsilon$  para mostrar que  $\|\nabla |u|\|(x) \leq \|\nabla u\|(x)$ , onde estiver definido. Portanto

$$\mathcal{Q}(|u|) \leq \mathcal{Q}(u).$$

**Lema 3** Se  $u$  é auto-função associada a  $\lambda_1$  então  $|u|$  também o é.

*Demonstração:* Use a caracterização variacional de  $\lambda_1$ , o que mostra que

$$\mathcal{R}(|u|) \leq \lambda_1. \quad \blacksquare$$

**Proposição 4** Se  $u$  é auto-função associada a  $\lambda_1$ , então  $u \neq 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ .

*Demonstração:* Sabemos que  $|u|$  também é auto-função. Portanto é  $C^\infty$  e temos

$$\Delta |u| + \lambda_1 |u| = 0;$$

donde segue-se

$$\Delta|u| = -\lambda_1|u| \leq 0.$$

Pelo princípio do máximo ([GT]),  $|u|$  não pode ter um mínimo local em  $\Omega$  e o ínfimo (que é  $= 0$ ) é atingido apenas no bordo de  $\Omega$ , ou  $u \equiv 0$ . Mas esta última possibilidade não ocorre ( $|u|$  é auto-função), portanto  $|u| > 0$  em  $\Omega$ , donde  $u \neq 0$  em  $\Omega$ . ■

**Corolário**  $\lambda_1$  é simples.

*Demonstração:* Sejam  $u_1, v_1$  auto-funções associadas a  $\lambda_1$ . Se  $u_1$  e  $v_1$  fossem linearmente independentes, então obteríamos  $\bar{u}_1$  e  $\bar{v}_1$  ortogonais, ainda auto-funções, por Gram-Schmidt, e ambas positivas em  $\Omega$ . Mas então

$$\iint_{\Omega} \bar{u}_1 \bar{v}_1 dx dy > 0,$$

que é absurdo. Logo  $u_1$  e  $v_1$  são linearmente dependentes e o auto-espaço de  $\lambda_1$  é 1-dimensional. ■

## 2.4 A desigualdade de Faber-Krahn

Após os resultados da secção anterior, e também devido ao interesse natural em se conhecer a frequência fundamental de um domínio, a seguinte pergunta se coloca: podemos determinar  $\lambda_1(\Omega)$  para qualquer  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ? A resposta é: em geral não, mas existem casos particulares interessantes:

**Exemplo 1.** *Retângulo de lados  $a, b$ .*

Neste caso aplicamos o fato de que, conhecendo-se o espectro e auto-funções dos fatores de um produto, podemos determiná-los para o mesmo. Basicamente os auto-valores são dados pela soma e as auto-funções pelo produto, com as variáveis separadas. Aplicando-se para o produto de segmentos, obtemos o espectro completo do retângulo, com as auto-funções.

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad F_{m,n}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad m, n \geq 1.$$

Se  $a = b$ , então a multiplicidade de  $\lambda_{m,n}$  é o número de maneiras diferentes que  $k = m^2 + n^2$  pode ser escrito como a soma de dois quadrados. Um

bom exercício de Álgebra.

**Exemplo 2.** Disco de raio  $R$ .

Neste caso, utilizando-se coordenadas polares  $r, \theta$ , aplicamos novamente a separação de variáveis, tomando

$$F(r, \theta) = f(r)g(\theta),$$

e obtemos que  $f(r)$  deve satisfazer à equação de Bessel:

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} + (r^2 \lambda - n^2) f = 0,$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ . Sabe-se que esta equação tem soluções limitadas em  $r = 0$ , chamadas de *funções de Bessel de ordem  $n$*  (de primeira espécie), cuja expressão em série é

$$J_n(\rho) = \frac{\rho^n}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\rho^{2k}}{2^{2k}(n+k)!}.$$

A variável  $\rho$  é dada por  $\rho = \sqrt{\lambda}r$ . É fácil ver que a condição de contorno impõe que os auto-valores sejam dados pelos quadrados dos zeros das funções de Bessel (v, [CH], pp.303-306). Obtemos assim uma família  $\lambda_{nm}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $m = 1, 2, \dots$  de auto-valores, cujo menor deles é exatamente  $\lambda_{01} = j_{0,1}^2$ , o primeiro zero de  $J_0$ .

Para ver mais exemplos, ver [PS]. Em [Po], pode-se encontrar uma tabela onde são dados os valores do perímetro e do primeiro auto-valor de várias regiões, fixada a área.

Uma vez que não podemos saber o valor exato para a o primeiro auto-valor, em geral, é interessante se ter estimativas que o aproximem. Sabemos que, via o quociente de Rayleigh, podemos fornecer uma quota superior para  $\lambda_1(\Omega)$ . E quotas inferiores? A *desigualdade de Faber-Krahn* nos fornece uma quota inferior universal, em termos da área de  $\Omega$ :

**Teorema 11 (Desigualdade de Faber-Krahn)** *Seja  $\lambda_1^* = \frac{\pi j_{0,1}^2}{A}$ ; então, se  $\text{área}(\Omega) = A$ ,*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1^* = \lambda_1(\text{disco}).$$



*Observação:* na verdade, se  $\lambda_1(\Omega) = \lambda_1^*$ , então  $\Omega$  é (congruente ao) o disco da área dada.

Este resultado foi demonstrado por Faber [Fa] e Krahn [Kr1] independentemente, sendo que em seguida Krahn [Kr2] generalizou o resultado para o  $\mathbb{R}^n$ , i.e., dentre todas as regiões  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de volume fixado, a única que tem o menor valor possível para o primeiro auto-valor do Laplaciano, com condições de Dirichlet no bordo, é a bola do volume dado.

Antes de demonstrarmos este teorema, vamos introduzir a noção de *simetrização de Schwarz*, tanto para domínios como para funções. Dada a região  $\Omega$ , vamos construir o disco  $\Omega^*$  de mesma área que  $\Omega$ , centrado na origem, e associada à primeira auto-função  $u$ , que tomamos positiva em  $\Omega$ , uma função  $u^*$  com simetria circular em  $\Omega^*$  tal que

$$\mathcal{R}(u^*) \leq \mathcal{R}(u),$$

o que implica

$$\lambda_1^* \leq \lambda_1(\Omega).$$

Como  $u > 0$ , seja  $\Omega_t = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) > t\}$ , onde  $t \in [0, \sup u]$ . Note que  $\Omega_0 = \Omega$ . Considere agora os discos  $\Omega_t^*$ , centrados na origem, com a mesma área que  $\Omega_t$ . O bordo de  $\Omega_t$  é, a menos de um número finito de singularidades, analítico.

Seja  $u^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$u^*(x, y) = t \quad \text{se } (x, y) \in \partial\Omega_t^*.$$

**Exercício 8** *Mostre que*

$$\iint_{\Omega} u^2(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega^*} u^{*2}(x, y) \, dx dy.$$

**Lema 4 (Fórmula de co-área)** *Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua, então*

$$\iint_{\Omega} f \, dx dy = \int_0^{\sup u} \left[ \oint_{\partial\Omega_t} f \|\nabla u\|^{-1} \, ds_t \right] dt, \quad (11)$$

onde  $ds_t$  é o elemento de comprimento de arco de  $\partial\Omega_t$ .

*Demonstração:* note que

$$\|\nabla f\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\| = \frac{dt}{d\sigma},$$

onde  $\sigma$  é o parâmetro de comprimento de arco ao longo de uma trajetória ortogonal às curvas de nível  $\partial\Omega_t$ . Portanto, o elemento de área em  $\Omega$  é

$$dxdy = dsd\sigma = \|\nabla f\|^{-1} ds_t dt,$$

onde  $s$  é o parâmetro comprimento de arco ao longo de  $\partial\Omega_t$ . O resultado segue-se. ■

Observe que a demonstração acima fornece também a fórmula

$$\iint_{\Omega} f \|\nabla u\| dxdy = \int_0^{\sup u} \left[ \oint_{\partial\Omega_t} f ds_t \right] dt, \quad (12)$$

que também é conhecida como fórmula de co-área.

*Demonstração da desigualdade de Faber-Krahn:* Tome na fórmula de co-área  $f = \|\nabla u\|^2$ . Então

$$\iint_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dxdy = \int_0^M \left[ \oint_{\partial\Omega_t} \|\nabla u\| ds_t \right] dt.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\oint_{\partial\Omega_t} \|\nabla u\| ds_t \geq \left[ \oint_{\partial\Omega_t} ds_t \right]^2 \left[ \oint_{\partial\Omega_t} \|\nabla u\|^{-1} ds_t \right]^{-1}.$$

Mas

$$L(t) = \oint_{\partial\Omega_t}$$

é o comprimento de  $\partial\Omega_t = u^{-1}(t)$ . Pela *desigualdade isoperimétrica*,

$$\left[ \oint_{\partial\Omega_t} ds_t \right]^2 \geq [L_t^*]^2, \quad (13)$$

onde  $L_t^*$  é o comprimento de  $\partial\Omega_t^*$ . Tomando agora  $f \equiv 1$  na fórmula de co-área:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega_t} \|\nabla u\|^{-1} ds_t &= -\frac{d}{dt} A(t) \\ &= -\frac{d}{dt} A^*(t) \\ &= \oint_{\partial\Omega_t^*} \|\nabla u^*\|^{-1} ds_t. \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $A(t)$  ( $A^*(t)$ , resp.) é a área de  $\Omega_t$  ( $\Omega_t^*$ , resp.). Aplicando-se a mesma análise para a função simetrizada  $u^*$ , obtém-se:

$$\oint_{\partial\Omega_t^*} \|\nabla u^*\| ds_t^* = \left[ \oint_{\partial\Omega_t^*} ds_t^* \right]^2 \left[ \oint_{\partial\Omega_t^*} \|\nabla u^*\|^{-1} ds_t^* \right]^{-1},$$

pois  $\|\nabla u^*\|$  é constante ao longo de  $\partial\Omega_t^*$ , pois  $u^*$  é radialmente simétrica. Portanto, usando (13) e (14),

$$\oint_{\partial\Omega_t} \|\nabla u\| ds_t \geq \oint_{\partial\Omega_t^*} \|\nabla u^*\| ds_t^*.$$

Integrando em  $t$ , aplicando a fórmula de co-área, obtemos:

$$\int \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx dy \geq \int \int_{\Omega^*} \|\nabla u^*\|^2 dx dy,$$

o que conclui a demonstração. ■

**Exercício 9** Suponha que  $u$  seja um ponto crítico do quociente de Rayleigh  $\mathcal{R}(u)$ , no seguinte sentido:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{R}(u + th),$$

onde  $h \in C^\infty(\Omega)$ ,  $h|_{\partial\Omega} \equiv 0$ . Mostre que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{R}(u + th) = -2 \int \int_{\Omega} (\Delta u + \lambda u) h dx dy \left[ \int \int_{\Omega} u^2 dx dy \right]^{-1},$$

onde  $\lambda = \mathcal{R}(u)$ . Tomando-se  $h = \Delta u + \lambda u$ , obtém-se

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

donde vemos que a equação do problema de auto-valor é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional  $\mathcal{R}(u)$ .

**Exercício 10** Mostre que a desigualdade de Faber-Krahn implica a desigualdade isoperimétrica.

## 2.5 O teorema de Weyl

Nesta seção, apresentaremos um resultado muito interessante relacionando o *espectro* do Laplaciano (i.e. o conjunto de auto-valores) e a área do domínio. Apesar deste resultado, conhecido como *Teorema de Weyl*, estar um pouco fora do tema central destas notas, ele é suficientemente importante para ser incluído, pelo menos como referência para o leitor interessado. Seja  $\Omega$  um domínio no plano. Para cada número real positivo  $\lambda$ , seja  $N_*(\lambda, \Omega)$  o número de auto-valores do Laplaciano em  $\Omega$  que são menores do que  $\lambda$ , onde  $*$   $\in \{\mathcal{D}, \mathcal{N}\}$  indica as condições de contorno do problema.

**Teorema 12 (Weyl)** *Seja  $A(\Omega)$  a área de  $\Omega$ . Então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_*(\lambda, \Omega)}{\lambda} = \frac{A(\Omega)}{4\pi}.$$

Este é considerado o primeiro resultado da *Geometria Espectral*, que é o estudo das relações entre o espectro (do Laplaciano, em geral) e as propriedades geométricas de uma região. O resultado tem um análogo em dimensões mais altas, e, na verdade, pode ser generalizado para variedades Riemannianas, via o chamado *desenvolvimento assintótico de Minashisundaran-Pleijel* (v. [BGM]).

Alguns comentários, antes de passarmos ao esboço da demonstração. Após este resultado, mostrou-se que muitas outras propriedades geométricas e topológicas (e.g. o número de “buracos” do domínio), eram caracterizadas pelo espectro do Laplaciano. Além disso, em dimensões mais altas,  $n \geq 4$ , mostrou-se ([Ur]) que não era possível se caracterizar o domínio completamente, i.e., existiam domínios com o mesmo espectro mas que não eram congruentes (apesar de que o volume do domínio também depende assintoticamente do espectro, como no teorema acima). O problema para o plano, que passou a ser conhecido como *Problema de Polya*, e que pode ser enunciado, em linguagem mais florida, “*é possível se ouvir a forma do tambor?*”, ficou sem solução até recentemente, quando foi mostrado que existem domínios (simplesmente conexos) do plano que têm o mesmo espectro mas não são congruentes (v. [Be3, Be4, GWW]).

Para se demonstrar o teorema acima, é necessário se caracterizar variacionalmente os demais auto-valores do Laplaciano. Começamos novamente

com o caso em dimensão finita. Se  $Q(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ , onde  $A$  é uma matriz simétrica, podemos calcular os outros auto-valores, além do menor deles, da seguinte maneira. Seja  $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$  um auto-vetor associado a  $\lambda_1$ , com  $\|\mathbf{v}_1\| = 1$ . Considere o espaço ortogonal a  $\mathbf{v}_1$ ,

$$V_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \perp \mathbf{v}_1\}.$$

Como sabemos que, no caso de matrizes simétricas, sempre podemos tomar os auto-vetores ortogonais entre si, podemos caracterizar o próximo auto-valor  $\lambda_2$  (que pode ser igual a  $\lambda_1$ ), por:

$$\lambda_2 = \inf\{Q(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V_1, \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

**Exercício 11** Mostre que  $V_1$  é invariante pela ação de  $Q$ , i.e.,  $Q\mathbf{x} \in V_1$  se  $\mathbf{x} \in V_1$ .

Procedendo indutivamente, se tivermos obtido os  $k-1$  primeiros auto-valores  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{k-1}$ , com (conjunto orto-normal de) auto-vetores associados  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ , definimos

$$\lambda_k = \inf\{Q(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V_{k-1}, \|\mathbf{x}\| = 1\},$$

onde  $V_{k-1}$  é o complemento ortogonal do sub-espaço gerado por  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ . Obviamente este processo acaba com  $\lambda_n$ . Também é possível calcular  $\lambda_k$  sem se utilizar os auto-vetores, via um processo *mini-max*. Para isso, defina, para  $k-1$  vetores  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$  quaisquer,

$$\Lambda_k(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}) = \inf\{Q(\mathbf{x}) : \|\mathbf{x}\| = 1, \mathbf{x} \perp \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1} \rangle\}.$$

Então

$$\lambda_k = \sup\{\Lambda_k(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}) : \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}\} L.I.\}.$$

**Exercício 12** Mostre que as caracterizações acima são de fato equivalentes.

Procedemos agora por analogia, para o caso de dimensão infinita, utilizando o quociente de Rayleigh ou a integral de Dirichlet como funcionais. Sejam  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_{k-1}$  os primeiros  $k-1$  auto-valores para o problema de Dirichlet, e sejam  $v_1, \dots, v_{k-1}$  auto-funções L.I. associadas, que podem estar orto-normalizadas em relação ao produto interno  $L^2$ . Para um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , denotamos por  $\mathcal{C}_D$  o conjunto das funções contínuas em  $\bar{\Omega}$ ,  $C^1$  por partes em  $\Omega$  e tais que  $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ . (Esta última condição pode ser suprimida, assumindo-se que o suporte compacto de  $u$  está em  $\Omega$ .)

**Proposição 5**

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \inf\{\mathcal{R}(u) : u \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}, u \perp \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle\} \\ &= \inf\{\mathcal{Q}(u) : u \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}, \|u\|_2, u \perp \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle\}.\end{aligned}\quad (15)$$

Seja agora

$$\Lambda_k(u_1, \dots, u_{k-1}) = \inf\{\mathcal{R}(u) : u \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}, u \perp \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle\},$$

onde  $u_1, \dots, u_{k-1}$  são funções quaisquer, contínuas por partes em  $\Omega$  (sem condições sobre a fronteira de  $\Omega$ ).

**Proposição 6**

$$\lambda_k = \sup\{\Lambda_k(u_1, \dots, u_{k-1}) : \{u_1, \dots, u_{k-1}\} \text{ L.I., } u_i \text{ } C^0 \text{ por partes em } \Omega\}.$$

(As funções  $u$  que aparecem em ambas as caracterizações são chamadas de *funções teste*.)

*Demonstração* : A primeira caracterização de  $\lambda_k$  acima é conseqüência direta do desenvolvimento

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2},$$

onde  $c_n$  são os coeficiente de Fourier de  $u$  em relação a uma base orto-normal de auto-funções (associadas a  $\lambda_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ). Veja a segunda demonstração da caracterização variacional do primeiro auto-valor, na seção anterior. Deixamos os detalhes como exercício para o Leitor.

Vamos mostrar que as duas caracterizações acima são equivalentes. Note que, tomando-se  $u = v_k$ ,  $u_1 = v_1, \dots, u_{k-1} = v_{k-1}$ , onde  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, k-1$  são auto-funções associadas aos primeiros  $k$  auto-valores,

$$\Lambda_k(u_1, \dots, u_{k-1}) = \lambda_k,$$

usando (15). Isso implica que  $\bar{\lambda}_k$ , dado pelo supremo da proposição 6, é maior ou igual a  $\lambda_k$ .

Sejam agora  $u_1, \dots, u_{k-1}$  que não geram o mesmo sub-espaco que as primeiras  $k-1$  auto-funções (caso contrário não há o que provar). Seja

$$u = c_1 v_1 + \dots + c_{k-1} v_{k-1},$$

tal que  $u \perp \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle$  e  $\|u\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{k-1} c_i = 1$ . Então

$$\begin{aligned} \Lambda_k(u_1, \dots, u_{k-1}) &\leq \int \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx dy \\ &= \lambda_1 c_1^2 + \dots + \lambda_{k-1} c_{k-1}^2 \\ &\leq \lambda_{k-1} (c_1^2 + \dots + c_{k-1}^2) \\ &= \lambda_{k-1} \leq \lambda_k. \blacksquare \end{aligned}$$

**Exercício 13** Para ver a igualdade

$$\int \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx dy = \lambda_1 c_1^2 + \dots + \lambda_{k-1} c_{k-1}^2$$

que aparece acima, note que

$$\nabla u = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \nabla v_i$$

e mostre que

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \langle \nabla u_i, \nabla u_j \rangle dx dy &= \lambda_j \int \int_{\Omega} u_i u_j dx dy \\ &= \lambda_j \delta_{ij}. \end{aligned}$$

(Use a primeira identidade de Green).

O resultado básico para se demonstrar o teorema de Weyl é:

**Lema 5** Se  $\Omega \subset \Omega'$ , então  $\lambda_k(\Omega) \geq \lambda_k(\Omega')$ ,  $k = 1, 2, \dots$

*Demonstração* : Sejam  $u_1, \dots, u_{k-1}$  L.I., definidas em  $\Omega$ , a fortiori em  $\Omega'$  (extensão contínua por partes, identicamente nula fora de  $\Omega$ , denotada por  $u'_i$ .) Seja  $u$  a função teste para o cálculo de  $\Lambda_k(u_1, \dots, u_{k-1})$ . Então, como  $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ , estendemos  $u$  a uma função  $u'$  em  $\Omega'$ , identicamente nula no complementar de  $\Omega$ , que é uma função teste para o cálculo de  $\Lambda'_k(u'_1, \dots, u'_{k-1})$  (relativo a  $\Omega'$ .) Portanto

$$\int \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx dy = \int \int_{\Omega'} \|\nabla u'\|^2 dx dy.$$

Como possivelmente existem funções teste em  $\Omega'$  que não são identicamente nulas na fronteira de  $\Omega$ , o ínfimo de  $\mathcal{R}$  em  $\Omega'$  não pode ser maior do que em  $\Omega$ , para funções  $u_1, \dots, u_{k-1}$  L.I. sobre  $\Omega$ .

Para completar o argumento, suponha que  $w_1, \dots, w_{k-1}$  sejam contínuas por partes e L.I. em  $\overline{\Omega'}$ . Vamos mostrar que ainda assim

$$\Lambda'_k(w_1, \dots, w_{k-1}) \leq \lambda_k(\Omega).$$

Extraia (se necessário) um sub-conjunto L.I. sobre  $\Omega$ , complete-o a um conjunto L.I. de  $k - 1$  funções contínuas por partes em  $\Omega$  (aqui vemos por que precisamos considerar funções sem condições sobre a fronteira). Tome uma função teste  $u$  em  $\Omega$  e seja  $u'$  sua extensão por zero a  $\Omega'$ . Portanto  $u'$  também é função teste para o conjunto  $w_1, \dots, w_{k-1}$ , pois é nula fora de  $\Omega$  e podemos aplicar o argumento acima. ■

O mesmo tipo de raciocínio pode ser aplicado para a sub-divisão de um domínio em sub-domínios. Seja  $\Omega$  dividido em uma coleção finita de sub-domínios  $\mathcal{S}$ , por meio de um sistema de curvas regulares  $\mathcal{C}$ . Considere o conjunto de todos os auto-valores das regiões de  $\mathcal{S}$ , ordenados como um conjunto único:

$$\lambda_1^* \leq \lambda_2^* \leq \dots \leq \lambda_k^* \leq \dots$$

Cada auto-função associada está definida em um dos sub-domínios de  $\mathcal{S}$ , que pode ser estendida por zero a uma função contínua e  $C^1$  por partes em  $\Omega$ . Se  $\lambda_k$  for o  $k$ -ésimo auto-valor em  $\Omega$ , então é claro que

$$\lambda_k^* \geq \lambda_k,$$

pois  $\lambda_k^*$  é obtido calculando

$$\Lambda_k^*(u_1, \dots, u_{k-1}) = \inf \{ \mathcal{R}(u) : u \perp u_i, u \neq 0, u|_{\partial \mathcal{S}} = u|_{\mathcal{C}} = 0 \},$$

e depois tomando o supremo para  $u_1, \dots, u_{k-1}$  L.I. e contínuas por partes.

Vamos agora fazer algumas observações para o espectro do Laplaciano com *condições de Neumann* na fronteira. O problema em questão é:

$$(\mathcal{N}) \begin{cases} \Delta F + \mu F = 0, & (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial F}{\partial \nu} |_{\partial \Omega} = 0, \end{cases}$$



onde  $\partial/\partial\nu$  é a derivada normal ao longo da fronteira. Note que as funções constantes são auto-funções com  $\mu = 0$ . Os auto-valores são não-negativos, pela identidade de Green, e podemos ordená-los (incluindo a multiplicidade):

$$0 = \mu_0 < \mu_1 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots$$

**Exemplo:** considere o retângulo de lados  $a, b$ . Então os auto-valores para o problema de Neumann são dados por:

$$\mu_{k,l} = \pi^2 \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right), \quad k, l = 0, 1, 2, \dots$$

e as auto-funções (normalizadas) por:

$$w_{k,l} = c_{k,l} \cos \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{l\pi y}{b}, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots$$

onde  $c_{k,l}$  são constantes normalizantes. Note que  $\mu_{0,0} = 0$  é auto-valor, com auto-funções constantes.

**Exercício 14** *Suponha  $a = b$  e caracterize a multiplicidade dos auto-valores como sendo o número de possibilidades de se escrever certos inteiros como a soma de dois quadrados.*

Novamente podemos dar uma caracterização variacional para os  $\mu_k$ . Sejam  $u_1, \dots, u_{k-1}$  funções contínuas por partes em  $\Omega$ . Defina

$$M_k(u_1, \dots, u_{k-1}) = \inf \{ \mathcal{R}(u) : u \in C^1 \text{ por partes, } u \perp u_i, u \neq 0 \},$$

e tome

$$\mu_k = \sup \{ M_k(u_1, \dots, u_{k-1}) : \{u_1, \dots, u_{k-1}\} \text{ L.I.} \}$$

*Observação:* neste caso não vale um resultado análogo ao do lema 5. Mostre isso como exercício.

Observe ainda que neste caso não impusemos nenhuma condição de fronteira para  $u$ , o que corresponde à interpretação física do problema de Neumann como o de *fronteira livre*. Também note que não impusemos a condição de que  $u$  seja contínua em  $\Omega$ , apenas  $C^1$  por partes. Esta liberdade de escolha nos permite fazer, neste caso, o mesmo tipo de análise feito no caso

do problema de Dirichlet, para uma sub-divisão de um domínio. Seja novamente  $\mathcal{S}$  uma sub-divisão finita de  $\Omega$  em sub-domínios, por meio de uma família de curvas regulares  $\mathcal{C}$ . Novamente ordenando todos os auto-valores dos sub-domínios em  $\mathcal{S}$ ,

$$\mu_1^* \leq \mu_2^* \leq \dots \leq \mu_k^* \leq \dots,$$

temos a caracterização

$$\mu_k^* = \sup\{\inf\{\mathcal{R}(u) : u \text{ } C^1 \text{ por partes em } \Omega, u \perp u_i\}\}$$

onde o supremo é tomado sobre  $u_1, \dots, u_{k-1}$  L.I. e  $C^0$  por partes em  $\Omega$ .

Observe que o fato de termos admitido que  $u$  seja apenas  $C^1$  por partes nos permite olhar uma função teste de um sub-domínio como uma função teste para o domínio todo, com extensão por zero. Além disso, podemos ainda comparar, via a caracterização acima, os  $\mu_k^*$  com os auto-valores para o problema de Dirichlet:

**Lema 6**  $\mu_k^* \leq \lambda_k (\leq \lambda_k^*)$ .

*Demonstração:* basta observar as caracterizações variacionais em ambos os casos e notar que temos mais liberdade para escolher as funções teste no caso do problema de Neumann. ■

Para provar o teorema de Weyl, cobrimos o domínio  $\Omega$  com uma família de retângulos  $\bar{\mathcal{R}}$  que se tocam pelas arestas(v. figura 11.) Se  $\bar{\lambda}_k$  for o  $k$ -ésimo auto-valor da região que a união dos elementos da cobertura, então

$$\mu_k^* \leq \bar{\lambda}_k \leq \lambda_k,$$

pois os  $\mu_k^*$  são obtidos usando mais funções teste. Da mesma forma, se  $\bar{\bar{\lambda}}$  for a região formada pelos elementos da cobertura contidos em  $\Omega$ , então

$$\lambda_k \leq \bar{\bar{\lambda}}_k \leq \lambda_k^*.$$

Utilizando famílias de retângulos que aproximam a região  $\Omega$ , podemos reduzir a demonstração do teorema de Weyl ao seguinte resultado. Seja  $N(\lambda)$  ( $\tilde{N}(\mu)$ , resp.) o número de auto-valores para o problema de Dirichlet (Neumann, resp.) não maiores do que  $\lambda > 0$  ( $\mu > 0$ , resp.).

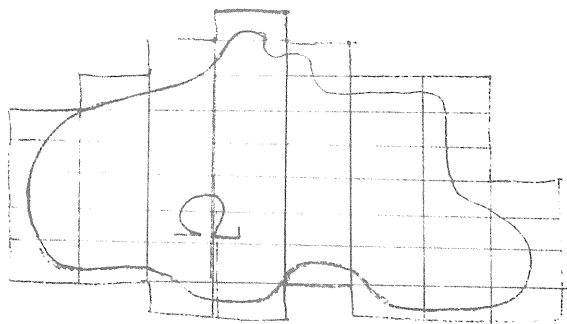


Figura 11: Cobrindo o domínio com retângulos

**Proposição 7** Considere o retângulo de lados  $a$  e  $b$ . Então  $N(\lambda)$  é o número de pontos do reticulado com coordenadas inteiras contidos na elipse

$$\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} = \frac{\lambda}{\pi^2},$$

excetuando-se os eixos.  $\tilde{N}(\mu)$  é o número de pontos do reticulado com coordenadas inteiras contidos na elipse

$$\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} = \frac{\mu}{\pi^2}.$$

*Demonstração:* simples contagem. ■

**Corolário** O teorema de Weyl vale para o retângulo:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\tilde{N}(\mu)}{\mu} = \frac{ab}{4\pi}.$$

*Demonstração:* os semi-eixos da elipse

$$\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} = \frac{\mu}{\pi^2}$$

são  $a\sqrt{\lambda}/\pi$  ( $a\sqrt{\mu}/\pi$ ) e  $b\sqrt{\lambda}/\pi$  ( $b\sqrt{\mu}/\pi$ ) (v. figura 12.) Portanto,

$$N(\lambda) \geq \frac{\lambda ab}{4\pi} - \varepsilon,$$

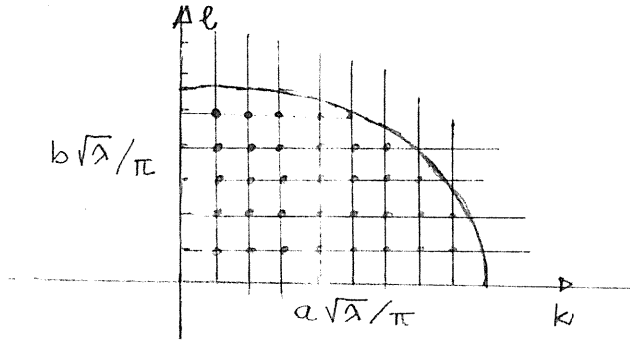


Figura 12: O teorema de Weyl para o retângulo

$$\tilde{N}(\mu) \leq \frac{\mu ab}{4\pi} + \tilde{\varepsilon},$$

onde os erros (positivos) são proporcionais a  $\sqrt{\lambda}$  (ou a  $\sqrt{\mu}$ , pois correspondem aos pontos que estão possivelmente sobre a elipse, cujo comprimento é proporcional a  $\sqrt{\lambda}$  (ou a  $\sqrt{\mu}$ ). Como

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\mu}}{\mu},$$

segue-se o resultado, pois se  $\lambda = \mu$ ,  $N(\lambda) \leq \tilde{N}(\mu)$ . ■

Para concluir a demonstração do teorema de Weyl, considere uma família  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  de retângulos com interiores disjuntos, contidos em  $\Omega$ . A coleção de todos os auto-valores de todos os retângulos, podem ser colocados em ordem (para os problemas de Dirichlet e Neumann, resp.)

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$$

e se  $N(\lambda)$  ( $\tilde{N}(\lambda)$ , resp.) for o número dos  $\lambda_k$  ( $\mu_k$ , resp.) menores do que  $\lambda$  ( $\mu$ , resp.), simultaneamente para todos os retângulos, então

$$N(\lambda) = N_1(\lambda) + \dots + N_k(\lambda)$$

e

$$\tilde{N}(\lambda) = \tilde{N}_1(\lambda) + \dots + \tilde{N}_k(\lambda),$$

onde  $N_i(\lambda)$  ( $\tilde{N}_i(\mu)$ , resp.) é o número de auto-valores de Dirichlet (Neumann, resp.) não excedendo  $\lambda$  ( $\mu$ , resp.), para  $R_i$ . Portanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{A_1 + \dots + A_k}{4\pi} = \frac{A^*}{4\pi},$$

onde  $A_i$  é a área de  $R_i$  e  $A^*$  é a área total dos retângulos. O mesmo vale para os auto-valores de Neumann. Podemos fazer a mesma análise se os retângulos cobrem  $\Omega$ .

Seja agora uma cobertura por retângulos, e dado  $\lambda > 0$ , sejam  $N^*(\lambda)$  o número de auto-valores de Dirichlet de todos os retângulos contidos em  $\Omega$ , não excedendo  $\lambda$ , e  $N^{**}(\lambda)$  o número de auto-valores de Neumann de todos os retângulos, não excedendo  $\lambda$ . Sejam  $A$  a área de  $\Omega$ ,  $A^*$  a área dos retângulos contidos em  $\Omega$  e  $A^{**}$  a área total da cobertura. Então

$$N^*(\lambda) \leq N(\lambda) \leq N^{**}(\lambda)$$

e

$$A^* \leq A \leq A^{**}.$$

Segue-se que

$$\frac{A^*}{4\pi} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} \leq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{A^{**}}{4\pi}.$$

Aproximando-se  $\Omega$  por dentro e por fora, assintoticamente as áreas coincidem, portanto segue-se o resultado. ■

## 3 Outras Desigualdades

### 3.1 A desigualdade de Brunn-Minkowski

A *desigualdade de Brunn-Minkowski* relaciona os volumes de sub-conjuntos do  $\mathbb{R}^n$  com o volume da sua *soma*:

**Definição 5** *Sejam  $A$  e  $B$  sub-conjuntos do  $\mathbb{R}^n$ . Defina*

$$A + B = \{ x + y : x \in A, y \in B \}.$$

Uma vez que tenhamos uma boa noção de volume em  $\mathbb{R}^n$  (por exemplo a medida de Lebesgue), o resultado principal desta seção é:

**Teorema 13 (Desigualdade de Brunn-Minkowski)** *Sejam  $A$  e  $B$  sub-conjuntos do  $\mathbb{R}^n$ . Então*

$$[V(A + B)]^{\frac{1}{n}} \geq [V(A)]^{\frac{1}{n}} + [V(B)]^{\frac{1}{n}},$$

onde  $V$  é o volume ( $n$ -dimensional) do sub-conjunto.

Para utilizarmos este resultado na demonstração da desigualdade isoperimétrica em  $\mathbb{R}^n$ , é necessário discutir a noção de *volume  $k$ -dimensional* em  $\mathbb{R}^n$ , para  $1 \leq k \leq n$ . Existem várias noções de volume  $k$ -dimensional para sub-conjuntos do  $\mathbb{R}^n$ , sendo que todas têm como requisito básico que coincidam no caso de  $k$ -superfícies regulares, em que o volume é dado por uma integral (de Riemann). Ocorre que, para problemas variacionais, é necessário, levando-se em conta a questão de existência de soluções, iniciar o problema sem exigir muita regularidade. Uma vez encontrada uma solução, seja um mínimo ou um máximo, procura-se mostrar que ela possui mais regularidade do que se supôs inicialmente. Mas nem sempre ocorre que as soluções de problemas variacionais, mesmo geométricos, sejam dados por sub-variedades regulares. O exemplo clássico é o da existência de cones mínimos estáveis em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 8$  ([Si]), que são absolutamente minimizantes, com bordo dado por produtos de esferas ([BDG]).

Para os problemas variacionais envolvendo a noção de volume, o conceito relevante é o de *medida de Hausdorff* (e *dimensão de Hausdorff*), que é fundamental para a *Teoria Geométrica da Medida*. Para o leitor interessado, o

livro de Morgan ([Mo]) é uma boa introdução ao assunto. A referência clássica é o compêndio de Federer ([Fe]).

Para nós, há uma noção mais elementar, suficiente para os objetivos desta seção. Seja  $B_r^n = B_r^n(0)$  a bola aberta de raio  $r$  centrada na origem, em  $\mathbb{R}^n$ . Denotaremos o volume da bola aberta unitária  $B_1^n$  por  $\omega_n$ . Portanto o volume de  $B_r^n$  é  $\omega_n r^n$ . Dados  $E \subset \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ , seja

$$E_r = E + B_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y (|y - x| < r)\}.$$

É claro que  $E_r$  é aberto, portanto seu volume pode ser calculado via a medida de Lebesgue.  $E_r$  pode ser visto como a “vizinhança tubular de raio  $r$ ” em torno de  $E$ .

**Definição 6** *Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Para cada  $k$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$ , defina o conteúdo  $k$ -dimensional de Minkowski de  $E$  por*

$$\mathcal{M}_k(E) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{V(E_r)}{\omega_{n-k} r^{n-k}}.$$

Note que o denominador de  $\mathcal{M}_k(E)$  é o volume de  $B_r^{n-k}$ . Para dar uma interpretação geométrica a  $\mathcal{M}_k$ , suponha que  $E$  é uma superfície regular compacta em  $\mathbb{R}^3$ . Para cada ponto  $p$  de  $E$ , consideramos o intervalo aberto  $I_p$  sobre a reta normal a  $E$  em  $p$ , centrado em  $p$ , de raio  $r$ . Para  $r$  suficientemente pequeno,  $E_r$  é a união destes intervalos, que são bolas abertas 1-dimensionais de raio  $r$ . Em outras palavras,  $E_r$  é, localmente, o produto de  $E$  por  $B_r^1$ , e vemos que  $\mathcal{M}_2(E)$  é, no limite, o “quociente” do volume de  $E_r$  pelo comprimento do intervalo. A mesma interpretação vale para  $n$  e  $k$  quaisquer.

Note ainda que  $\mathcal{M}_k(E)$  pode ser nulo, finito ou infinito, analogamente à noção de medida de Hausdorff, o que determinaria uma “*dimensão de Minkowski*”. Para maiores detalhes e propriedades do conteúdo de Minkowski, ver o livro de Federer [Fe], capítulo 3.

**Exemplo:** Seja  $E = S_r^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  a esfera de raio  $r$  centrada na origem, que é o bordo de  $B_r^n$ . Vamos calcular  $\mathcal{M}_{n-1}(E)$ . Seja  $0 < \rho < r$ . Então  $E_\rho = B_{r+\rho}^n \setminus B_{r-\rho}^n$ . Portanto

$$V(E_\rho) = \omega_n (r + \rho)^n - \omega_n (r - \rho)^n,$$

que, usando o desenvolvimento binomial, nos fornece

$$V(E_\rho) = \omega_n [2nr^{n-1}\rho + 2 \binom{n}{3} r^{n-3}\rho^3 + \dots + 2nr\rho^{n-1}].$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(S_r^{n-1}) &= \liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega_n [2nr^{n-1}\rho + 2 \binom{n}{3} r^{n-3}\rho^3 + \dots + 2nr\rho^{n-1}]}{\omega_1 \rho} \\ &= \frac{2n\omega_n r^{n-1}}{\omega_1} = n\omega_n r^{n-1}, \end{aligned}$$

pois  $\omega_1 = V((-1, 1)) = 2$ . Este é o mesmo valor que o encontrado via integração. ■

Antes de provarmos a desigualdade de Brunn-Minkowski, vamos utilizá-la para dar uma demonstração curta da desigualdade isoperimétrica em  $\mathbb{R}^n$ . Para a bola  $B_r^n$ , como  $\partial B_r^n = S_r^n$ , temos a identidade

$$[V_{n-1}(S_r^n)]^n = n^n \omega_n [V_n(B_r^n)]^{n-1},$$

pelo resultado do exemplo acima. Portanto, para domínios do  $\mathbb{R}^n$ , se  $V$  é o volume do domínio e  $A$  é o volume do seu bordo, dado pelo conteúdo  $n-1$ -dimensional de Minkowski, a desigualdade isoperimétrica deve ser

$$A^n \geq n^n \omega_n V^{n-1}.$$

Para demonstrar esta desigualdade, seja agora  $D$  um domínio em  $\mathbb{R}^n$  e seja  $E = \partial D$ . Tomamos  $D_r = D + B_r^n$ ; pela desigualdade de Brunn-Minkowski,

$$\begin{aligned} V(D_r) &\geq [V(D)^{1/n} + V(B_r^n)^{1/n}]^n \\ &= [V^{1/n} + (\omega_n r^n)^{1/n}]^n \\ &\geq V + nV^{(n-1)/n} \omega_n^{1/n} r, \end{aligned}$$

usando os dois primeiros termos do desenvolvimento binomial. Portanto

$$[V(D_r) - V]r^{-1} \geq nV^{(n-1)/n} \omega_n^{1/n}.$$



Note que  $V(D_r) - V$  é o volume da parte de  $E_r$  que está fora de  $D$ . Analogamente, temos a mesma desigualdade para a parte de  $E_r$  que está fora de  $D$ , para  $r$  pequeno. Portanto, fazendo  $r$  ir a 0, temos

$$\mathcal{M}_{n-1}(E) \geq n\omega_n^{1/n}V^{(n-1)/n},$$

pois o denominador seria  $\omega_1 r = 2r$ . (Para maiores detalhes, ver [Fe], 3.2.42 e 3.2.43.) ■

**Exercício 15** *Mostre este resultado, para corpos convexos, usando que*

$$V(E) = \left. \frac{d}{dr} \right|_{r=0} V(D_r).$$

*Demonstração da desigualdade de Brunn-Minkowski*

Vamos considerar apenas conjuntos (Lebesgue mensuráveis) compactos em  $\mathbb{R}^n$ . Esta restrição não é necessária, e a demonstração para conjuntos (Lebesgue mensuráveis) quaisquer se reduz a este caso (v. [Fe], teorema 3.2.41).

Um *retângulo aberto*  $I$  em  $\mathbb{R}^n$  é um produto de  $n$  intervalos abertos  $I_1, \dots, I_n$ , limitados e não-vazios,

$$I = I_1 \times \dots \times I_n.$$

Seja  $\mathcal{F}$  o conjunto de todos estes retângulos. Primeiramente, mostraremos a desigualdade de Brunn-Minkowski para  $A$  e  $B$  dados pela união dos fechos de famílias disjuntas de retângulos de  $\mathcal{F}$  (i.e., a interseção ocorre apenas nas faces), por indução sobre o número total de retângulos das duas famílias. Se  $A$  for dado por uma tal família  $R$ , escreveremos  $A = \bigcup \bar{R}$ , e o número de elementos de  $R$  será denotado por  $\#R$ .

1. Iniciamos com  $\#R = \#S = 1$ , i.e.,  $A = I_1 \times \dots \times I_n$  e  $B = J_1 \times \dots \times J_n$ . Então

$$A + B = (I_1 + J_1) \times \dots \times (I_n + J_n)$$

(prove isto) e este caso se reduz a provar a desigualdade

$$\prod_{i=1}^n (r_i + s_i)^{1/n} \geq \prod_{i=1}^n r_i^{1/n} + \prod_{i=1}^n s_i^{1/n}.$$

onde  $r_i$  e  $s_i$  são os comprimentos de  $I_i$  e  $J_i$ , respectivamente. Utilizando a desigualdade

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n b_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i,$$

com  $a_i = r_i/(r_i + s_i)$  e  $b_i = s_i/(r_i + s_i)$ , obtemos

$$\left(\prod_{i=1}^n \frac{r_i}{r_i + s_i}\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n \frac{s_i}{r_i + s_i}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{r_i + s_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{r_i + s_i} = 1,$$

donde segue-se este caso.

**2.** Sejam  $A = \cup \bar{R}$  e  $B = \cup \bar{S}$ , para  $R$  e  $S$  famílias de  $\mathcal{F}$  com  $\#R + \#S = k > 2$  e assumimos que o resultado vale para  $A' = \cup \bar{R}'$  e  $B' = \cup \bar{S}'$ , se  $\#R' + \#S' \leq k - 1$ . Se  $\#R > 1$ , escolhemos  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $a \in \mathbb{R}$  tais que ambos

$$A_1 = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i < a\}, \quad A_2 = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > a\}$$

contenham algum elemento de  $R$ . Defina

$$\alpha_j = \frac{V(A_j)}{V(A)}, \quad j = 1, 2$$

e tome  $b \in \mathbb{R}$  tal que

$$B_1 = B \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i < b\}, \quad B_2 = B \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > b\}$$

satisfaçam

$$\frac{V(B_j)}{V(B)} = \alpha_j, \quad j = 1, 2.$$

Agora defina

$$R_j = \{I \cap A_j : I \in R, I \cap A_j \neq \emptyset\}$$

e

$$S_j = \{J \cap B_j : J \in S, J \cap B_j \neq \emptyset\}$$

para  $j = 1, 2$ . Então  $R_j$  e  $S_j$  são famílias de  $\mathcal{F}$  disjuntas, e  $A_j = \cup \bar{R}_j$ ,  $B_j = \cup \bar{S}_j$ , com

$$\#R_j < \#R \quad \text{e} \quad \#S_j \leq \#S,$$

portanto

$$\#R_j + \#S_j \leq k - 1, \quad j = 1, 2.$$

Como  $A_1 + B_1$  e  $A_2 + B_2$  estão separados por  $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i = a + b\}$  (prove isto), aplicando a hipótese de indução temos

$$\begin{aligned} V(A + B) &\geq V(A_1 + B_1) + V(A_2 + B_2) \\ &\geq (V(A_1)^{1/n} + V(B_1)^{1/n})^n + (V(A_2)^{1/n} + V(B_2)^{1/n})^n \\ &= \alpha_1 [V(A)^{1/n} + V(B)^{1/n}]^n + \alpha_2 [V(A)^{1/n} + V(B)^{1/n}]^n \\ &= [V(A)^{1/n} + V(B)^{1/n}]^n, \end{aligned}$$

o que prova a desigualdade de Brunn-Minkowski para as uniões de retângulos. Agora, por aproximação, a demonstração acima se aplica também a conjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$ . ■

*Observação:* A noção de conteúdo de Minkowski, suficiente para mostrar a desigualdade isoperimétrica a partir da desigualdade de Brunn-Minkowski, não é uma *medida*, pois atribui a um conjunto e seu fecho o mesmo número. No entanto, para conjuntos fechados *k-retificáveis* de  $\mathbb{R}^n$ , atribui o mesmo valor que a medida de Hausdorff *k*-dimensional (v. [Fe], 3.2.39). Portanto, para tais conjuntos, que são os relevantes para a Teoria da Medida Geométrica, podemos utilizá-la sem causar restrições. A noção de conjunto *k*-retificável é análoga à de curva retificável dada anteriormente, para codimensão qualquer (v. [Fe], 3.2.14).

### 3.2 As desigualdades de Wirtinger e de Sobolev

Estas duas desigualdades têm caráter analítico, e se aplicam a funções definidas em domínios do  $\mathbb{R}^n$ . Começamos com a *desigualdade de Sobolev*, mais interessante do ponto de vista geométrico, uma vez que é equivalente à desigualdade isoperimétrica.

**Desigualdade de Sobolev** *Seja  $D$  um domínio do plano. Então, se  $f$  for de classe  $C^1$ , com suporte compacto em  $D$ ,*

$$\left( \iint_D \|\nabla f\| dx dy \right)^2 \geq 4\pi \iint_D f^2 dx dy.$$

**Teorema 14** *A desigualdade de Sobolev é equivalente à desigualdade isoperimétrica*

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

Interpretando corretamente, este resultado diz que se a desigualdade isoperimétrica vale para todos os domínios planos (com bordo suave), então a desigualdade de Sobolev vale para todas as funções  $C^1$  com suporte compacto em tais domínios, e vice-versa. (A condição sobre o bordo do domínio pode ser relaxada para retificável, via aproximações .)

*Demonstração:* Seja  $D$  um domínio com bordo suave  $C$ , e para  $\varepsilon > 0$  pequeno, defina

$$f_\varepsilon(p) = \begin{cases} 1, & \text{se } d(p, C) \geq \varepsilon, \\ d(p, C)/\varepsilon, & \text{se } d(p, C) < \varepsilon, \end{cases}$$

onde  $d(p, C)$  é a distância entre  $p$  e  $C$ . Aproxime  $f_\varepsilon$  por funções suaves com suporte compacto em  $D$ , e suponha que a desigualdade de Sobolev vale. Então valerá por aproximação para  $f_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $f_\varepsilon$  tenderá a  $\chi_D$ , a função característica de  $D$ , portanto

$$\iint_D f_\varepsilon^2 dx dy \longrightarrow A(D) = A.$$

Seja agora

$$C_\varepsilon = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, C) < \varepsilon\}.$$

Então

$$\|\nabla f_\varepsilon\| = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{em } D \cap C_\varepsilon, \\ 0 & \text{em } D \setminus D_\varepsilon. \end{cases}$$

Portanto

$$\iint_D \|\nabla f_\varepsilon\| dx dy = \frac{A(D \cap C_\varepsilon)}{\varepsilon},$$

e fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o limite à direita é essencialmente o conteúdo de Minkowski  $\mathcal{M}_1(C)$ , que para curvas retificáveis coincide com o comprimento  $L(C) = L$  (ver observação ao fim da seção 3.1). Portanto vale a desigualdade isoperimétrica.

Reciprocamente, consideramos as curvas de nível de uma função suave  $f$ , e os sub-domínios por elas definidos, da seguinte maneira (análoga ao que foi feito para se obter a simetrização de Schwartz, na seção 2.4):

$$\begin{aligned} C_t &= \{(x, y) \in D : |f(x, y)| = t\}, \\ D_t &= \{(x, y) \in D : |f(x, y)| > t\}, \end{aligned}$$

onde  $t \in [m, M]$ , com  $m = \min |f|$  e  $M = \max |f|$  em  $D$  (lembre-se que  $f$  tem suporte compacto em  $D$ ). Sejam  $A(t)$  e  $L(t)$  a área de  $D_t$  e o comprimento de  $C_t$ , respectivamente,  $s_t$  o parâmetro de comprimento de arco de  $C_t$ , e  $\sigma$  o parâmetro de comprimento de arco para a trajetória ortogonal à família  $\{C_t\}$ , com  $t$  crescente.

Pelo teorema de Sard, o conjunto dos valores de  $t$  para os quais  $\nabla f = 0$  em algum ponto de  $C_t$  tem medida nula em  $[m, M]$ . Para os demais valores de  $t$ ,  $C_t$  é uma curva regular (ou família de curvas regulares) que formam o bordo de  $D_t$ . Seja agora uma função (integrável) arbitrária  $h$  em  $D$ . Pela fórmula de co-área (lema 4),

$$\iint_D h \|\nabla f\| dx dy = \int_m^M \left[ \int_{C_t} h ds_t \right] dt. \quad (16)$$

Colocando  $h \equiv 1$ , obtemos

$$\iint_D \|\nabla f\| dx dy = \int_m^M L(t) dt. \quad (17)$$

Portanto, o lado esquerdo da desigualdade de Sobolev pode ser interpretado como sendo a integral dos comprimentos das curvas de nível (regulares) de  $f$ . Aplicamos a desigualdade isoperimétrica para os domínios  $D_t$ , obtendo

$$\iint_D \|\nabla f\| dx dy \geq 2\sqrt{\pi} \int_m^M \sqrt{A(t)} dt. \quad (18)$$

Vamos agora expressar o lado direito da desigualdade de Sobolev de maneira conveniente:

$$\begin{aligned} \iint_D f^2 dx dy &= \iint_D \left[ \int_0^{|f(x,y)|} 2t dt \right] dx dy \\ &= \int_0^\infty 2t \left[ \iint_{t \leq |f(x,y)|} dx dy \right] dt \\ &= \int_0^\infty 2t A(t) dt, \end{aligned} \quad (19)$$

onde a integração é realizada sobre o domínio definido por  $0 \leq t \leq |f(x, y)|$  no espaço  $x, y, t$ . Vamos agora comparar os lados direitos das equações 18 e 19. Observe que  $A(t)$  é uma função decrescente de  $t$ . Portanto

$$t\sqrt{A(t)} \leq \int_0^t \sqrt{A(s)} ds,$$

donde segue-se que

$$tA(t) \leq \sqrt{A(t)} \int_0^t \sqrt{A(s)} ds = \frac{1}{2} \left[ \int_0^t \sqrt{A(s)} ds \right]^2$$

e, finalmente

$$\int_0^\infty 2tA(t) dt \leq \left[ \int_0^\infty \sqrt{A(t)} dt \right]^2. \quad (20)$$

(As integrações são realizadas, na verdade, entre  $m$  e  $M$ .) Agora, juntando-se as desigualdades 18 e 20 com a equação 19, obtém-se a desigualdade de Sobolev. ■

*Observação:* a condição de regularidade de  $f$  pode ser relaxada para espaços de funções muito mais gerais, pois a densidade das funções  $C^\infty$  nestes espaços torna os argumentos de aproximação aplicáveis.

**Corolário** *Seja  $\mathcal{F}_0$  a família de funções  $C^\infty$  com suporte compacto em  $D$ . Então*

$$\inf_{f \in \mathcal{F}_0} \frac{(\int_D \|f \nabla f\| dx dy)^2}{\int_D f^2 dx dy} = 4\pi. \quad (21)$$

É interessante se comparar este resultado com a caracterização variacional para o primeiro auto-valor do Laplaciano, com condição de Dirichlet. No caso presente não há dependência em relação ao domínio  $D$ , como existe para o primeiro auto-valor, dado pelo ínfimo do quociente de Rayleigh. A desigualdade de Sobolev pode ser utilizada ainda para dar uma interpretação para a *desigualdade de Banchoff-Pohl*, que uma generalização da desigualdade isoperimétrica no plano, admitido-se que o bordo tem auto-interseções. Mais informações podem ser obtidas no artigo de Osserman ([Os]).

A desigualdade de Sobolev se generaliza para domínios do  $\mathbb{R}^n$  na forma

$$\inf_{f \in \mathcal{F}_0} \frac{(\int_D \|f \nabla f\|)^n}{(\int_D |f|^{n/(n-1)})^{n-1}} = n^n \omega_n,$$

e sua equivalência com a desigualdade isoperimétrica é demonstrada de maneira análoga (v. [FF], pág. 487).

Passamos agora a uma breve apresentação da *desigualdade de Wirtinger*, também conhecida como *desigualdade de Poincaré*. A desigualdade de Wirtinger para funções de uma variável, pode ser enunciada da seguinte forma.

**Lema 7** *Seja  $f(t)$  uma função  $C^\infty$  com período  $2\pi$ , satisfazendo*

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

Então

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{df}{dt} \right)^2 dt \geq \int_0^{2\pi} f^2 dt, \quad (22)$$

e a igualdade vale se e somente se  $f(t) = a \cos t + b \sin t$ . ■

Deixamos a demonstração deste resultado ao leitor, como exercício, que é uma simples aplicação do desenvolvimento em série de Fourier de  $f$ . Vamos dar agora uma demonstração de que a desigualdade isoperimétrica no plano é equivalente à desigualdade de Wirtinger.

**Teorema 15** *A desigualdade de Wirtinger é equivalente à validade da desigualdade isoperimétrica para toda curva  $C^\infty$  fechada, com a igualdade valendo se e somente se a curva é um círculo.*

*Demonstração:* seja  $f(t)$  uma função  $C^\infty$  com período  $2\pi$ , de média nula. Seja

$$g(t) = - \int_0^t g(s) ds;$$

então

$$g(t + 2\pi) = - \int_t^{t+2\pi} f(s) ds = 0,$$

portanto  $g$  também é periódica de período  $2\pi$ . Definimos então uma curva parametrizada  $C^\infty$   $\gamma(t) = (g(t), f(t))$ , cujo comprimento satisfaz

$$\begin{aligned} L^2 &= \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{df}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dg}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt \right\}^2 \\ &\leq 2\pi \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{df}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dg}{dt} \right)^2 \right] dt. \end{aligned} \quad (23)$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Lembrando que a área pode ser calculada usando o teorema de Green por

$$A = - \int_{\gamma} y dx,$$

obtemos

$$L^2 - 4\pi A \leq 2\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{dg}{dt} + f \right)^2 dt + 2\pi \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{df}{dt} \right)^2 - f^2 \right] dt. \quad (24)$$

A primeira integral é nula, pela definição de  $g$ , portanto a o lado direito é positivo se valer a desigualdade isoperimétrica, o que dá a desigualdade de Wirtinger. A igualdade só ocorrerá em (23) se

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \left( \frac{df}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dg}{dt} \right)^2 = c^2,$$

uma constante. Mas então  $L = 2\pi c$ , portanto  $ds/dt = L/2\pi$ . Como a curva é um círculo, segue-se que  $f(t) = a \cos t + b \sin t$ .

Para a recíproca, seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  curva parametrizada  $C^\infty$ . Como

$$L = \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt,$$

seja  $t = 2\pi s/L$ , que é o parâmetro comprimento de arco. Segue-se que podemos eliminar a raiz quadrada da integral acima:

$$\int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] dt = \int_0^{2\pi} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 dt = \frac{L^2}{2\pi}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + 2y \frac{dx}{dt} \right] dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{dx}{dt} + y \right)^2 dt + 2\pi \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - y^2 \right] dt, \end{aligned}$$



e a desigualdade isoperimétrica é consequência então da desigualdade de Wirtinger. ■

É interessante notar que existe uma versão da desigualdade de Wirtinger para  $\mathbb{R}^n$ , mas que aparentemente, se  $n > 2$ , não é equivalente à desigualdade isoperimétrica. Seja  $D$  um domínio convexo em  $\mathbb{R}^n$ , e seja  $d$  o diâmetro de  $D$ . Então, se  $f$  for de classe  $C^1$  e de média nula sobre  $D$ ,

$$\int_D \|\nabla f\|^2 \geq \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 \int_D f^2.$$

Na verdade, este é um resultado do tipo Faber-Krahn para o primeiro auto-valor do problema de Neumann, para regiões convexas. Veja o artigo de Osserman [Os] para referências e mais detalhes sobre este resultado.

### 3.3 O problema isoperimétrico em superfícies e outros tópicos

Nesta seção queremos discutir algumas generalizações dos resultados apresentados nos capítulos anteriores. As demonstrações serão somente delineadas e o Leitor interessado poderá consultar a bibliografia para demonstrações completas. Suporemos conhecimentos básicos da geometria diferencial de curvas e superfícies, contidos nos primeiros capítulos de [dC1].

Começamos discutindo o problema isoperimétrico na esfera e, mais geralmente, em superfícies regulares. Primeiro alguns resultados de caráter geral, para caracterizar os possíveis candidatos a solução do problema.

Seja  $M^2$  uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$  (o Leitor mais atento perceberá que estaremos trabalhando independentemente do ambiente ser o  $\mathbb{R}^3$ ). Seja  $\Omega$  um domínio de  $M$  (i.e. um aberto conexo e limitado) e suporemos que a fronteira de  $\Omega$  seja dado por uma (só) curva regular fechada simples  $\gamma : [0, L] \rightarrow M^2$ , parametrizada por comprimento de arco. Estenderemos a esta situação o método variacional usado no primeiro capítulo.

Indicaremos por  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$  o vetor tangente unitário a  $M$ , que é normal a  $\gamma$  em  $\gamma(t)$  e aponta para o “interior” de  $\Omega$ . Uma vizinhança de  $\gamma$  pode ser parametrizada em  $[0, L] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ , pondo

$$\mathbf{x}(t, r) = \exp_{\gamma(t)}(r\mathbf{n}),$$

i.e., fixado  $t$ , a curva  $\mathbf{x}(t, r)$  é a geodésica que sai de  $\gamma(t)$  com vetor tangente  $\mathbf{n}(t)$ , e está em  $\Omega$  para  $r$  positivo. Nestas coordenadas a métrica tem a forma:

$$ds^2 = dr^2 + \phi(t, r)dt^2,$$

com

$$\phi(t, 0) = 1; \quad \frac{\partial \phi}{\partial r}(t, 0) = k_\gamma(t),$$

onde  $k$  é a curvatura geodésica de  $\gamma$  (por quê?).

Seja agora  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  a restrição a  $[0, L]$  de uma função de classe  $C^2$ , periódica de período  $L$ . Consideramos a família de curvas  $\gamma_s(t) = x(t, sf(t))$ . Se  $s$  for suficientemente pequeno, a curva  $\gamma_s$  limitará uma região  $\Omega_s$  e a diferença das áreas de  $\Omega$  e  $\Omega_s$  será

$$A(\Omega) - A(\Omega_s) = \int_0^L \int_0^{sf(t)} \phi(t, r) dr dt.$$

Derivando em relação a  $s$ , obtemos

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (A(\Omega) - A(\Omega_s)) = \int_0^L \left[ \int_0^{sf(t)} \frac{\partial \phi}{\partial s} dr - f(t) \phi(t, sf(t)) \right] dt. \quad (25)$$

Portanto, se a área de  $\Omega_s$  for constante como função de  $s$ , a derivada será nula e, calculando para  $s = 0$ , temos  $\int_0^L f(t) dt = 0$ . Por outro lado, o comprimento de  $\gamma_s$  é dado por

$$L(s) = \int_0^L \left[ s^2 f'(t)^2 + \phi(t, sf(t)) \right]^{1/2} dt,$$

cuja derivada em  $s = 0$  é  $\int_0^L f(t) k_\gamma(t) dt$ . Se a integral for nula para todas as funções  $f$  de média nula (i.e. para variações que preservam a área), então  $k_\gamma$  será constante. Temos então o seguinte

**Teorema 16** *Se  $\Omega$  for um domínio de  $M$  que tem fronteira de comprimento mínimo entre todas os domínios de mesma área, a fronteira de  $\Omega$  tem curvatura geodésica constante. ■*

Sem entrar em maiores detalhes queremos ressaltar que estes cálculos pode ser executados numa sub-variedade de  $\mathbb{R}^n$ , e mesmo em variedades Riemannianas abstratas, e os candidatos a solução do problema isoperimétrico

são hipersuperfícies de *curvatura média* constante (v. [dC2] para os conceitos e [BdCE] para os resultados).

O problema isoperimétrico fica então reduzido a se mostrar que existem tais regiões e provar uma desigualdade isoperimétrica conveniente. Como temos observado várias vezes anteriormente, a existência de mínimos é um problema bastante delicado. De fato existem superfícies que não possuem nenhuma curva fechada de curvatura geodésica constante, e portanto, para estas superfícies, o problema isoperimétrico não tem solução.

Para dar uma idéia da complexidade deste assunto, vejamos um exemplo simples de superfície em que não existe solução para o problema isoperimétrico, na forma  $(PI^*)$  (v. pág. 6). Este exemplo pode ser obtido da seguinte maneira: tome o plano  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^3$  e considere os pontos sobre o eixo  $x$  de coordenadas inteiras positivas, i.e. os pontos  $p_k = (k, 0, 0)$  com  $k = 1, 2, \dots$ . Corte, em torno de  $p_k$ , um disco de raio  $r_k = 1/(2k)$ , cole um cilindro de altura  $h_k = 2k/\pi$  e raio  $r_k$ , e feche-o em cima com um hemisfério de raio  $r_k$ . Isto pode ser aproximado em classe  $C^\infty$ . A área dos postes assim obtidos é maior do que  $2\pi r_k h_k = 2$ . O resultado pode ser visto na figura 13. Agora, considere o problema isoperimétrico na forma  $(PI^*)$ , i.e. fixamos a área do domínio e procuramos minimizar o comprimento da fronteira. Fixemos esta área em 1. Observe que existe em cada poste uma certa altura tal que, se considerarmos a parte superior  $\Omega_k$  do poste a partir daquela altura,  $A_k = A(\Omega_k) = 1$ . Porém, o comprimento da fronteira é  $L_k = 2\pi r_k = \pi/k$ , portanto  $L_k \rightarrow 0$  para  $k \rightarrow \infty$ . Portanto não podemos esperar uma solução para o problema isoperimétrico nesta forma. Aumentando-se a altura dos cilindros numa razão maior que a linear, podemos obter um exemplo em que, para qualquer valor da área, não há solução.

Uma outra característica interessante deste exemplo (sem a modificação mencionada no final) é que os problemas  $(PI)$  e  $(PI^*)$  não são equivalentes. De fato, se fixarmos o perímetro do domínio, existem domínios de área máxima, pois, após a colagem, as áreas dos postes podem ser limitadas pela área do primeiro. Na forma modificada,  $(PI)$  também não teria solução (procure entender isso).

**Exercício 16** *Mostre que o problema  $(PI)$  não faz sentido na esfera unitária  $S^2(1)$ , a não ser que restringjamos o problema a um dos hemisférios.*

Porém, se  $M$  for compacta, ou ainda mais geralmente, se o quociente de  $M$

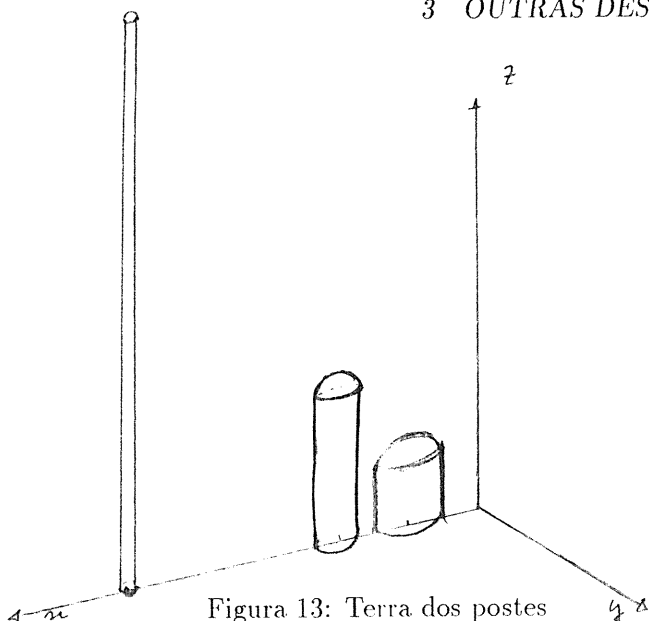


Figura 13: Terra dos postes

pele seu grupo de isometrias for um espaço topológico compacto, e trabalhando-se em um espaço de regiões conveniente, pode-se provar a existência de objetos minimizantes para o problema  $(PI^*)$ , cujas fronteiras são dados por famílias de curvas regulares na definição usual. Este é um tópico importante da Teoria Geométrica da Medida. Porém...

**Exercício 17** *Você consegue imaginar uma superfície compacta tal que a solução, para algum valor da área, não é uma região conexa?*

Um caso em que isto não acontece é o de superfícies convexas, porém deixaremos aqui este assunto, por sua complexidade.

Vamos agora considerar o caso em que  $M^2 = S^2(R)$ , a esfera de raio  $R$ . Neste caso as curvas de curvatura geodésica constante são as interseções de planos com a esfera (i.e. os círculos da esfera). A pergunta natural então é:

*Qual é a forma da possível desigualdade isoperimétrica em  $S^2(R)$ ?*

Observamos que a área da calota esférica de altura  $h$  é dada por  $A = 2\pi Rh$  e o comprimento do círculo fronteira é dado por  $L = 2\pi[h(2R - h)]^{1/2}$ . Caso

as calotas esféricas sejam as soluções para o problema (PI\*), a desigualdade que esperamos é

$$L^2 - 4\pi A + A^2 R^{-2} \geq 0.$$

O resultado acima foi demonstrado, em uma forma mais forte, por Bernstein ([Bn]). De fato o que ele mostrou é o seguinte:

**Teorema 17 (Desigualdade isoperimétrica na esfera)** *Seja  $\Omega$  um domínio da esfera limitado por uma curva de comprimento  $L$ . Seja  $d$  o mínimo entre as distância de dois círculos paralelos que limitam uma coroa circular esférica que contém a curva. Então :*

$$L^2 - 4\pi A + A^2 R^{-2} \geq [2Rg(R)]^2 [2\pi - g(R)]^2, \quad \text{onde } g(s) = \sin \frac{d}{4(1+2\pi)} s.$$

Nós não demonstraremos o teorema de Bernstein mas faremos alguns comentários a propósito. Observamos que fazendo  $R \rightarrow \infty$ , i.e. fazendo a esfera tender a um plano) obtemos  $L^2 - 4\pi A \geq cd$ , onde  $c$  é uma constante conveniente, o que implica na desigualdade isoperimétrica no plano. A diferença  $L^2 - 4\pi A$  chama-se de *deficit isoperimétrico*. O resultado de Bernstein no plano implica:

1.  $L^2 \geq 4\pi A$ ,
2.  $L^2 = 4\pi A$  se e somente se a região for um disco,
3. Uma estimativa do deficit isoperimétrico.

Em particular, o resultado de Bernstein implica o teorema isoperimétrico no plano, com uma característica diferente. De fato, nas demonstrações dadas no primeiro capítulo, separamos os dois argumentos: A existência de mínimos para  $RI$  e a caracterização geométrica dos mesmos. Usando o resultado acima temos um argumento que nos fornece, ao mesmo tempo, a existência e a caracterização geométrica.

A desigualdade isoperimétrica na esfera pode ser escrita na forma  $L^2 \geq 4\pi A - KA^2$  onde  $K = R^{-2}$  é a curvatura gaussiana da esfera. Se  $K = 0$  obtemos a desigualdade isoperimétrica no plano. E. Schmidt ([Sc]) demonstrou que a desigualdade acima vale para o *plano hiperbólico* ( $K = -1$ ) e isso permite então unificar as três desigualdades:

**Teorema 18** *Sejam  $M^2$  uma superfície simplesmente conexa de curvatura constante  $K = K_0$  e  $\Omega$  um domínio de área  $A$ , limitado por curvas simples de comprimento total  $L$ . Então*

$$L^2 - 4\pi A + K_0 A^2 \geq 0$$

*e a igualdade vale se e somente se  $\Omega$  for um disco geodésico.*

Este resultado tem análogo em dimensões mais altas. Como observamos anteriormente, no caso de superfícies quaisquer, o problema isoperimétrico pode não ter soluções. Podemos porém, procurar, em todos os casos, uma “boa” desigualdade isoperimétrica, que pode ser muito útil em problemas geométricos e analíticos sobre  $M^2$ . Esta é dada, na forma mais geral, pelo seguinte resultado:

**Teorema 19** *Sejam  $M^2$  uma superfície regular e  $\Omega$  uma região simplesmente conexa de área  $A$  limitada por uma curva regular simples fechada de comprimento  $L$ . Seja  $K_0$  um número real,  $K$  a curvatura Gaussiana de  $M$  e  $(K - K_0)^+(x) = \sup\{0, (K - K_0)(x)\}$ . Então :*

$$L^2 \geq 4\pi A[1 - (2\pi)^{-1} \int_{\Omega} (K - K_0)^+ d\sigma - K_0 A/4\pi],$$

*e a igualdade vale se e somente se  $K \equiv K_0$  em  $\Omega$  e  $\Omega$  é um disco geodésico.*

Para uma demonstração deste teorema (que inclui o caso de superfícies com alguns tipos de singularidades) veja [BdC1]. Um ótimo “survey” que trata destes problemas (e muito mais) é o artigo de Osserman [Os].

A estrutura da desigualdade isoperimétrica anterior sugere que uma boa estratégia para se entender o problema em superfícies gerais é comparar com o que acontece com espaços de curvatura constante. Neste contexto vamos descrever, no caso mais simples, uma desigualdade devida a P.Levy para o caso de hiper-superfícies convexas do  $\mathbb{R}^n$ , e generalizada posteriormente por M.Gromov.

Seja  $M^2$  uma superfície regular compacta em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura Gaussiana  $K \geq 1$  e  $S$  a esfera de curvatura 1. Seja  $\Omega$  uma região de  $M^2$  com fronteira regular e  $\Omega^*$  um disco geodésico em  $S$ .

**Teorema 20** *Se  $A(\Omega)/A(M^2) = A(\Omega^*)/A(S)$ , então*

$$L(\partial\Omega)/A(M) \geq L(\partial\Omega^*)/A(S).$$

Vamos reformular o teorema anterior de forma levemente diferente. Definimos o *perfil isoperimétrico* de  $M^2$  como sendo a função:

$$h_M(\beta) = \inf \left\{ \frac{L(\partial\Omega)}{A(M)} : \Omega \subseteq M, \frac{A(\Omega)}{A(M)} = \beta \right\}.$$

O teorema anterior é então equivalente a  $h_M(\beta) \geq h_S(\beta)$  (pelas considerações anteriores, temos  $h_S(\beta) = [\beta(1 - \beta)]^{1/2}$ ).

Uma vez assumida a existência de regiões *minimizantes*, que, pelas considerações anteriores, têm como fronteiras curvas de curvatura geodésica constante, a demonstração do teorema é baseada em um teorema de comparação de volumes que passamos a descrever.

Seja  $\Omega$  uma região de área  $\beta$  com  $h_M(\beta) = L(\partial\Omega)/A(M)$ . Consideramos coordenadas exponenciais como na demonstração do fato que  $\partial\Omega$  tem curvatura geodésica constante. Estas coordenadas, na realidade, cobrem *regularmente* toda  $\Omega$ , exceto um conjunto de área nula. Trata-se então de se estimar o Jacobiano desta aplicação comparando-se com que acontece em  $S$  (lembramos que assumimos  $K \geq 1$ ). Usando esta idéia, Heintze e Karcher [HK] provam que:

$$A(\Omega)/L(\partial\Omega) \leq \int_0^r [\cos(t) - \eta \sin(t)] dt,$$

onde  $\eta$  é a curvatura geodésica (constante) *com sinal* de  $\partial\Omega$ , tendo escolhido o vetor normal apontando para o interior de  $\Omega$ , e  $r$  é o primeiro zero do integrando. Aplicando-se o mesmo argumento a  $M^2 \setminus \Omega$ :

$$\frac{A(M^2 \setminus \Omega)}{L(\partial\Omega)} \leq \int_0^{\pi-r} [\cos(t) + \eta \sin(t)] dt.$$

No caso de  $S$ , se  $\Omega_r^*$  denotar a bola geodésica de raio  $r$ , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{A(\Omega_r^*)}{L(\partial\Omega_r^*)} &= \int_0^r [\cos(t) - \eta \sin(t)] dt = a(r)^{-1}; \\ \frac{A(S \setminus \Omega_r^*)}{L(\partial\Omega_r^*)} &= a(\pi - r)^{-1} \end{aligned}$$

(neste caso  $\cotg(r) = \eta$ ). Agora:

$$h_M(\beta) = \frac{L(\partial\Omega)}{A(M)} \geq \frac{\max\{a(r)A(\Omega), a(\pi - r)A(M \setminus \Omega)\}}{A(M)}$$

$$\begin{aligned} &\geq \max\{\beta a(r), (1 - \beta)a(\pi - r)\} \\ &\geq \inf\{\max\{\beta a(t), (1 - \beta)a(\pi - t)\} : t \in [0, \pi]\}. \end{aligned}$$

A função  $a(t)$  é crescente e o ínfimo é um mínimo obtido por  $s$  tal que  $\beta a(s) = (1 - \beta)a(\pi - s)$ . Para este  $s$  temos então:

$$\beta \frac{L(\partial\Omega_r^*)}{A(\Omega_r^*)} = (1 - \beta) \frac{L(\Omega_r^*)}{A(S \setminus \Omega_r^*)}$$

e portanto  $A(\Omega_r^*)/A(S) = \beta$ . Juntando as informações acima temos  $h_M(\beta) \geq h_S(\beta)$ .  $\blacksquare$

Como corolário da desigualdade de P.Levy, vamos comentar agora uma desigualdade de tipo Faber-Krahn para os auto-valores do Laplaciano. Em uma superfície regular  $M$  podemos definir o operador de Laplace-Beltrami, simplesmente o Laplaciano, em analogia ao caso do plano, *levando-se em conta a métrica*. Se  $f$  for uma função diferenciável em  $M$ , o *gradiente (intrínseco)* de  $f$  é a projeção do gradiente de  $f$  em  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano tangente à superfície. Analogamente, para um campo  $\xi$  de vetores tangentes a  $M$ , a divergência de  $\xi$  é o traço do operador que associa a um vetor  $Y$  tangente a  $M$ , a projeção sobre  $M$  da derivada direcional  $D_Y \xi$ . Assim o Laplaciano de  $f$  é definido como sendo o oposto da divergência do gradiente de  $f$  (ou a divergência do gradiente de  $f$  se o leitor é um analista!). Em termos de uma parametrização local, se  $g_{ij}$  for a matriz da métrica e  $g^{kl}$  a sua inversa, o Laplaciano será dado por:

$$\Delta f = [\det(g_{ij})]^{-1/2} \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \sum_i g^{ik} [\det(g_{ij})]^{-1/2} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Uma função  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma auto-função associada ao autovalor  $\lambda$  se  $\Delta u = \lambda u$ . O conjunto dos autovalores é então o *espectro de*  $M$ . Se  $M$  for compacta, o espectro de  $M$  consiste de uma seqüência crescente divergente:  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots$ . Observamos que não temos condições de fronteira (pois  $M$  não tem bordo!) e o menor autovalor é nulo pois as funções constantes estão no núcleo de  $\Delta$ , e, na realidade são todo o núcleo. Em particular  $\lambda_0$  é simples. O primeiro auto-valor não nulo,  $\lambda_1$ , tem uma caracterização



variacional similar ao caso do plano:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \inf \left\{ \frac{\int_M u \Delta u}{\int_M u^2} : u \in C^2, u \neq 0, \int_M u = 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\int_M \|\nabla u\|^2}{\int_M u^2} : u \in C^1, u \neq 0, \int_M u = 0 \right\}.\end{aligned}$$

A condição de que  $f$  seja de média nula diz que  $u$  é ortogonal ao núcleo de  $\Delta$ . As condições de regularidade podem ser substituídas por  $C^\infty$ , pelo teorema de Weierstrass.

No caso da esfera é possível calcular explicitamente o espectro. De fato as auto-funções são as restrições à esfera dos polinômios homogêneos harmônicos. Em particular o primeiro auto-valor não-nulo da esfera é  $\lambda_1(S^n(R)) = n/R$ . Usando a maquinaria anterior é então possível provar:

**Teorema 21** *Se  $M$  for uma superfície compacta com curvatura  $k \geq 1$ , o primeiro auto-valor não nulo do Laplaciano,  $\lambda_1(M)$ , é maior ou igual ao primeiro auto-valor não nulo da esfera unitária (i.e.  $\lambda_1 \geq 2$ .)*

Convidamos o Leitor interessado a consultar [Bel] e [BGM] para um tratamento extensivo de problemas relacionados ao espectro do Laplaciano em variedades.

## Referências

- [Al] A.D. Alexandrov. *Uniqueness theorems for surfaces in the large. I* Vestnik Leningrad Univ. Math. **11** (1956) 5-17.
- [Ba] C. Bandle. *Isoperimetric Inequalities and Applications*. Monographs and Studies in Mathematics, n. 7. Pitman.
- [BdC1] J.L. Barbosa, M.P. do Carmo. *A proof of a general isoperimetric inequality for surfaces*. Math. Zeit. **162** (1978) 245-261.
- [BdC2] \_\_\_\_\_. *The stability of hypersurfaces of constant mean curvature*. Math. Zeit. **185** (1984) 339-353.
- [BdCE] J.L. Barbosa, M.P. do Carmo, J. Eschenburg. *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds*. Math. Zeit. **197** (1986) 123-138
- [Be1] P. Bérard. *Spectral Geometry: Direct and Inverse Problems*. LNM 1207, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Be2] \_\_\_\_\_. *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques*. Sémin. Bourbaki, 1988-89, n. 705. Astérisque, 177-178(1989), p. 127-154.
- [Be3] \_\_\_\_\_. *Domaines isospectraux à la Gordon-Webb-Wolpert: une preuve terre à terre*. Sémin. Théorie Spect. et Geom. Inst. Fourier, Grenoble, 1992.
- [Be4] \_\_\_\_\_. *On the Construction of Isospectral Riemannian Manifolds*. Notas de mini-curso, UNICAMP, 1993.
- [BM] P. Bérard, D. Meyer. *Inégalités isopérimétriques et applications*. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **15** (1982), pp. 513-542.
- [BGM] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet. *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*. LNM **194**, Springer Verlag, 1971.
- [Bn] F. Bernstein. *Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene*. Math. Ann. **60**(1905), 117-136.

- [Bs] G. Besson: Isoperimetric Inequalities: an Introduction. Lectures in the College on Differential Geometry, ICTP - Trieste, 1989. (Mimeo)
- [BDG] E. Bombieri, E. de Giorgi, E. Giusti. *Minimal cones and the Bernstein problem*. Invent. Math. **7** (1969) 243-268.
- [CH] R. Courant, D. Hilbert. *Methods in Mathematical Physics*, v.I. Interscience, NY, 1953.
- [dC1] M.P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*.
- [dC2] \_\_\_\_\_. *Geometria Riemanniana*. 2ª ed. Projeto Euclides v.10, IMPA, CNPq, 1988.
- [Fa] C. Faber. *Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt*. Sitzungsber. Bayer. Akad. der Wiss. Math.-Phys., Munique, (1923), 169-172.
- [Fe] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, New York, 1969.
- [FF] H. Federer, W.H. Fleming. *Normal and integral currents*. Ann. of Math. **72** (1960), pp. 458-520.
- [Fi1] D.G. de Figueiredo. *Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Projeto Euclides, IMPA-CNPq, Rio, 1977.
- [Fi2] \_\_\_\_\_. *Problemas de máximos e mínimos na geometria Euclidiana*. Mat. Univ. **9/10** (1989) 69-108.
- [Ga] S. Gallot. *Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés Riemanniennes*. Astérisque **163-164** (1988), pp. 31-91.
- [Gb] P.R. Garabedian. *Partial Differential Equations*. J. Wiley, New York, 1969.
- [GT] Gilbarg, Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2<sup>nd</sup> ed. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

- [Gi] E. Giusti. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Birkheuser, Boston, 1983.
- [GWW] C. Gordon, S. Webb, S. Wolpert. *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*. *Invent. Math.* **110** (1992), 1-22.
- [HK] E. Heintze, H. Karcher. *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **11** (1978), 451-470.
- [Ho] H. Hopf. *Differential Geometry in the Large*. L.N.M. **1000**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [Hu] A. Hurwitz. *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*. *Ann. Éc. Norm., Ser.3*, **19** (1902), pp.357-408.
- [Kr1] E. Krahn. *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*. *Math. Ann.* **94** (1925), 95-100.
- [Kr2] \_\_\_\_\_. *Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen*. *Acta Comm. Univ. Tartu (Dorpat)* **A9** (1926), 1-44.
- [Li] E.L. Lima. *Curso de Análise, v.2. Projeto Euclides*, CNPq.
- [Mo] F. Morgan. *Geometric Measure Theory - A Beginner's Guide*. Academic Press, Boston, 1988.
- [Os] R. Osserman. *The isoperimetric inequality*. *Bull. A.M.S.* **84:6** (1978), pp. 1182-1238.
- [Pa] L.E. Payne. *Isoperimetric inequalities and their applications*. *SIAM Review* **9** 3(1967), pp. 453-488.
- [Po] G. Polya. *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1954.
- [PS] G.Polya, S.Szegö. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Princeton Univ. Press, 1953.

- [Sc] E. Schmidt. *Über die isoperimetrische Aufgabe im  $n$ -dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung, I.* Math. Zeit. **46** (1940), 204-230.
- [Si] J. Simons. *Minimal varieties in Riemannian manifolds.* Ann. of Math. **88** (1968) 62-105.
- [Ur] H. Urakawa. *Bounded domains which are isospectral but not isometric.* Ann. Ec. Norm. Sup. **15** (1982).
- [We] H. Wente. *Counterexample to a conjecture of H. Hopf.* Pacific J. Of Math. **121** (1986) 193-243.

æ

Impresso na Gráfica do



pelo Sistema Xerox/1065

