Rafael José Iório
e Wagner Vieira L. Nunes

Introdução às Equações de Evolução não Lineares

RAFAEL IÓRIO E WAGNER V.L. NUNES
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
22460 – Rio de Janeiro-RJ

ISBN
85-244-0062-5

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Estrada Dona Castorina, 110
22.460 – Rio de Janeiro-RJ

PREFÁCIO

O objetivo do presente texto é introduzir o leitor a certos aspectos da teoria das equações de evolução não-lineares. Como de hábito a escolha de tópicos e pontos de vista refletem os interesses dos autores e não são mais ou menos importantes que outros que foram deixados de lado. Por exemplo, apesar do fato que os exemplos escolhidos para ilustrar as idéias que aqui desenvolvemos serem sistemas hamiltonianas completamente integráveis, nada é dito sobre o método de espalhamento inverso e suas ramificações. Além disso, para manter a exposição em um nível relativamente simples e o tamanho do livro sob contrôle, evitamos o estudo de problemas mais profundos e técnicos como por exemplo a teoria de espalhamento para as equações em questão.

O texto consiste, como mostra o índice, de cinco capítulos e dois apêndices. No primeiro deles procuramos dar uma idéia dos métodos a serem empregados adiante, em situações que consideramos especialmente simples. O segundo trata de equações lineares com coeficientes dependentes do tempo. Seu objetivo é descrever os resultados necessários para o estudo das equações quase-lineares desenvolvido no capítulo III. No capítulo seguinte (ou seja o quarto) introduzimos o método de regularização parabólica em um contexto abstrato para em seguinda aplicá-lo na obtenção de existência e unicidade para o problema de Cauchy associado à equação de Benjamin-Ono. Finalmente, no último capítulo, tratamos a existência global de soluções para as equações de Korteweg-de Vries e Benjamin-Ono tanto no contexto da teoria quase-linear como no do método de regularização parabólica. Cabe ainda notar que estabelecemos a dependência contínua em relação ao dado inicial em todos os casos que estudamos.

Os autores gostariam de agradecer a todos os envolvidos na elaboração do presente trabalho especialmente a Eduardo Arbieto Alarcon e Milton Procópio de Borba por numerosas sugestões e a Luiz Alberto Santos e Michael Saraiva Mota pelo excelente trabalho de editoração computadorizada. Finalmente, gostariamos de agradecer ao

nosso amigo Carlos Augusto Isnard pelas suas, também numerosas, sugestões e pelo interesse constante e firme apoio que dele recebemos durante a elaboração deste livro.

ÍNDICE

"Just the place for a Snark! I have
said it twice:
That alone should encourage the
crew.
Just the place for a Snark! I have
said it thrice:
What I tell you three times is
true" ([C])

NOTAÇÕES

$X, Y, Z, \ldots$ espaços de Banach

$\mathcal{B}(Y, X)$ a coleção de todos os operadores lineares limitados de Y em X

$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbf{N} = \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$

$\hat{f} = \mathcal{F}f$ a transformada de Fourier de f

$\check{f} = \mathcal{F}^{-1}f$ a transformada de Fourier inversa de f

$\mathcal{F}(\mathbf{R}^n)$ o espaço de Schwartz

$\mathcal{F}'(\mathbf{R}^n)$ o espaço das distribuições temperadas

$H^s(\mathbf{R}^n)$, $s \in \mathbf{R}$, o "$s-$ésimo" espaço de Sobolev "de tipo L^2"

$L^2_s(\mathbf{R}^n) = (H^s(\mathbf{R}^n))^\wedge$, $s \in \mathbf{R}$, o "$s-$ésimo" espaço L^2 com peso.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo consiste em introduzir o leitor aos problemas habitualmente considerados em conexão com as equações de evolução e discutir a solução de alguns destes em casos bastante simples.

1. Generalidades

No que se segue estaremos interessados no estudo do *problema de Cauchy (ou de valor inicial)* para equações de evolução. De maneira mais precisa vamos analisar as propriedades das soluções de problemas da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u = F(t,u) \in X \\ u(0) = \phi \in Y \end{array} \right. \tag{1.1}$$

onde X e Y são espaços de Banach, $t \in [0, T_0]$ e $F\colon [0,T_0] \times Y \to X$ é, por exemplo, contínua em relação às topologias em questão. A razão do interesse em (1.1) é o fato que uma grande variedade de problemas que ocorrem na prática podem ser colocados nesta forma. Antes de mais nada vamos listar uma série de exemplos, alguns dos quais serão analisados neste trabalho. As referências dadas abaixo objetivam dar ao leitor ansioso fontes de informação relativamente completas sobre cada uma das equações aqui mencionadas.

a) *A equação do calor*, ([II], [W], [F], [So])

$$\partial_t u = \Delta u \tag{1.1}$$

onde $u = u(x,t)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, $t \in [0, \infty)$ e Δ denota o operador de Laplace i.e.,

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{1.2}$$

b) *A equação de Schrödinger*, ([**I1**], [**Pe**], [**RS**] especialmente os volumes III e IV),

$$i\partial_t u = (-\Delta + V)u \tag{1.3}$$

onde $u = u(x,t)$, $x \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$ e V denota o operador de multiplicação pela função mensurável real $V(x)$.

c) *A equação de onda* ([**F**], [**So**]),

$$\partial_t^2 u = \Delta u \tag{1.4}$$

com notação como em a) e b). Note que esta equação apesar de ser de segunda ordem no tempo pode ser reescrita como um sistema de primeira ordem que pode então ser encarado como uma equação da forma que ocorre em (1.1). De fato, sejam $v = \partial_t u$ e $\Phi = \binom{u}{v}$. Então é fácil ver que (1.4) é equivalente a

$$\partial_t \Phi = A\Phi \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

d) *As versões não lineares de a), b) e c)*, ([**Caz**], [**Str**], [**Ka**], [**L**]),

$$\partial_t u = \Delta u + f(u) \tag{1.6}$$

$$i\partial_t u = \Delta u + f(u) \qquad \text{(NLS)} \tag{1.7}$$

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u + f(u) \qquad \text{(NLW)} \tag{1.8}$$

onde $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$) é uma função. Por exemplo a não linearidade $f(u) = |u|^{p-1} u$, $p \geq 1$ aparece em muitas situações importantes. No caso $n = 1$ a equação de calor não linear

$$\partial_t u = \mu \partial_x^2 u + u \partial_x u, \qquad \mu \geq 0 \tag{1.9}$$

conhecida como a equação de Burgers (veja [**Wh**]) é de grande interesse.

Exercício (1.1). *A transformação de Cole-Hopf. Seja u uma solução de (1.9) e defina Ψ pela fórmula $\partial_x \Psi = \frac{\Psi u}{2\mu}$. Então Ψ é solução da equação do calor a uma dimensão espacial.*

e) *A equação de Korteweg-de Vries* ([**Wh**], [**Mi**], [**To**], [**K1**]):

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u + u \partial_x u \qquad \text{(KdV)} \tag{1.10}$$

Cabe notar que apesar da semelhança formal com a equação de Burgers, não existe uma transformação equivalente à de Cole-Hopf para este caso. No entanto ela pode ser resolvida "explicitamente" utilizando o chamado método de espalhamento inverso (veja [**Wh**], [**Mi**], [**To**] e as referências aí contidas).

f) *A equação de Benjamin-Ono* ([**O**], [**I2**], [**I3**], [**I4**]):

$$\partial_t u = -2\sigma \partial_x^2 u - 2u \partial_x u \qquad \text{(BO)} \tag{2.1}$$

onde

$$(\sigma f)(x) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbf{R}} \frac{f(y)}{y - x} dy \tag{2.2}$$

é a transformada de Hilbert. Esta equação é parente próxima de KdV tendo com ela muitas propriedades em comum e apresentando também diferenças notáveis (veja [**I4**]).

Neste livro vamos nos concentrar quase que exclusivamente no estudo de KdV, BO e algumas de suas variantes. No entanto, na seção 3 deste capítulo falaremos um pouco de NLS e introduziremos mais duas equações que, por sua simplicidade, são dignas de nota.

2. O Problema Básico

Nesta seção vamos descrever as questões fundamentais que se colocam no estudo de (1.1).

(Q.1) *Existência local de soluções:* deseja-se provar que existem $T \in (0, T_0]$ e $u \in C([0,T]; Y)$ tal que (1.1) é satisfeito. Note que a derivada em relação ao tempo deve ser interpretada no sentido da topologia de X. Deve-se notar também que nossa definição de existência local contém a chamada *propriedade de persistência* da solução, i.e., a solução, enquanto existe, permanece no espaço de Banach Y ao qual pertence a condição inicial. Esta propriedade foi incluida na definição pois na maior parte do que se segue estabeleceremos existência de soluções no sentido descrito acima. Uma excessão notável é a equação de Benjamin-Ono para a qual é possível determinar espaços $Y \hookrightarrow Z \hookrightarrow X$, onde o símbolo $\hookrightarrow$ indica que a inclusão é contínua e densa, tais que $Y \neq Z$ e qualquer que seja $\phi \in Y$, $\phi \neq 0$ então existe solução em Z mas não em Y, (veja [I4]).

(Q.2) *Unicidade:* Consiste em provar que existe no máximo uma solução de (1.1) em alguma vizinhança da origem. A unicidade é em muitos casos a propriedade mais fácil de ser provada. Ela é bastante natural: (1.1) será encarado como uma equação diferencial ordinária para uma função com valores em um espaço de Banach munida de uma condição inicial. Além disso, a existência local e a unicidade andam sempre de mãos dadas, sendo em geral possível estabelecê-las no mesmo intervalo $[0, T]$.

(Q.3) *Dependência no dado inicial:* Esta questão consiste em estudar e estabelecer se possível a continuidade da aplicação $\phi \mapsto u$ em topologias convenientes. No caso linear a continuidade desta função é essencialmente automática. No mundo não-linear, no entanto, a questão de continuidade pode ser um problema formidável. Cabe ainda observar que a razão do interesse no estudo de $\phi \mapsto u$ vem do fato que a rigor as equações diferenciais que estudaremos provém de problemas físicos e os dados iniciais são quantidades medidas em laboratórios e portanto sujeitas a erros experimentais. Deste ponto de vista a questão da dependência no dado inicial consiste em mostrar que se os erros de medida são pequenos então a solução varia pouco.

O estudo de (Q.1), (Q.2), (Q,3) será denominado o *problema básico* para (1.1). Caso valham existência local, unicidade e continuidade em relação ao dado inicial o problema (1.1) será dito *bem-posto localmente.* Se a resposta a pelo menos uma das três questões for negativa o problema é *mal-posto.* Finalmente, se $F(t, \cdot\,)$ estiver definida em $[0,\infty)$ e (Q.1), (Q.2), (Q.3) são válidas em $[0,T]$ para todo $T > 0$ diremos que (1.1) é *bem-posto globalmente.*

3. Dois Exemplos Simples

Vamos ilustrar agora os conceitos introduzidos na seção anterior por meio de dois exemplos bastante simples. O primeiro deles consiste em uma generalização direta do método usual de resolução de EDO's para o caso de espaços de Banach. O segundo, muito mais realista que o primeiro, mostra que em geral é necessário utilizar (pelo menos) dois espaços de Banach ao se estudar EDP's do ponto de vista que adotamos.

Com estes comentários em mente considere o problema

$$\begin{cases} \partial_t u = F(u) \\ u(0) = \phi \in X \end{cases} \tag{3.1}$$

com X de Banach, como de hábito, e $F\colon X \to X$ satisfazendo,

$$\|F(u) - F(v)\|_X \leq C\,\|u - v\|_X\,, \quad u, v \in X \tag{3.2}$$

$$F(0) = 0 \tag{3.3}$$

onde C é uma constante positiva.

Como veremos abaixo a hipótese $F: X \to X$ é pouco realista. Na verdade passaremos uma boa parte deste livro descrevendo várias maneiras de circundar esta dificuldade. O primeiro passo no estudo de (3.1) é o

Exercício (3.1). *Sejam $T > 0$ e $u \in C([0,T]; X)$ solução de (3.1) (no sentido de (Q.1) da seção 2). Então,*

$$u(t) = \phi + \int_0^t F(u(t'))dt', \qquad t \in [0,T] \tag{3.4}$$

Reciprocamente se $u \in C([0,T]; X)$ é solução de (3.4) então u satisfaz (3.1).

Tendo em vista o exercício acima, é natural tentar aplicar o teorema do ponto fixo de Banach ([H], capítulo 5). Para isso considere o espaço métrico completo (prove este fato!) definido por

$$\begin{cases} \mathcal{X}_T = \{f \in C([0,T]; X) \mid \|f(t) - \phi\|_X \le M\} \\ d(f,g) = \sup\limits_{[0,T]} \|f(t) - g(t)\|_X \end{cases} \tag{3.5}$$

onde $T > 0$, $M > 0$ são fixos porém arbitrários. Vamos provar que é possível escolher $\tilde{T} > 0$ tal que a aplicação

$$(Af)(t) = \phi + \int_0^t F(f(t'))dt', \qquad t \in [0, \tilde{T}] \tag{3.6}$$

é uma contração em $\mathcal{X}_{\tilde{T}}$. Para começar observe que $(Af) \in C([0,T]; X)$ qualquer que seja $T > 0$. De fato, combinando as propriedades de F com (3.6) temos,

$$\|(Af)(t) - (Af)(\tau)\|_X \le \int_\tau^t \|F(u(t'))\|_X \, dt' \le C \int_\tau^t \|f(t')\|_X \, dt' \tag{3.7}$$

onde $\tau \le t$ sem perda de generalidade. Mas de (3.5)

$$\|f(t')\|_X \le \|f(t') - \phi\|_X + \|\phi\|_X \le M + \|\phi\|_X \tag{3.8}$$

Portanto,

$$\|(Af)(t) - (Af)(\tau)\|_X \le C(M + \|\phi\|_X)(t - \tau) \tag{3.9}$$

Isto prova nossa afirmação. Agora,

Lema (3.2). *Existe $\tilde{T} > 0$ tal que $f \mapsto Af$ é uma contração em $\mathcal{X}_{\tilde{T}}$.*

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned} \|Af(t) - \phi\|_X &\le \int_0^t \|F(f(t'))\|_X \, dt' \\ &\le C \int_0^t \|f(t')\|_X \, dt' \le C(M + \|\phi\|_X)t \qquad , \qquad t \in [0,T] \\ &\le C(M + \|\phi\|_X)T \end{aligned} \tag{3.10}$$

Além disso, se $f, g \in \mathcal{X}_T$ temos

$$\begin{aligned} \|(Af)(t) - (Ag)(t)\|_X &\le \int_0^t \|F(f(t')) - F(g(t'))\|_X \, dt' \\ &\le C \int_0^t \|f(t') - g(t')\|_X \, dt' \le Cd(f,g)T \end{aligned} \tag{3.11}$$

Tendo em vista (3.10) e (3.11) a escolha $0 < \tilde{T} \le \min\left\{\frac{1}{C}, \frac{1}{C(\|\phi\|_X + M)}\right\}$ encerra a demonstração.

∎

O teorema do ponto fixo de Banach implica imediatamente o

Corolário (3.3). *Existem $\tilde{T} > 0$ e uma única $u \in \mathcal{X}_{\tilde{T}}$ satisfazendo*

$$u(t) = \phi + \int_0^t F(u(t'))dt', \qquad t \in [0, \tilde{T}] \tag{3.12}$$

consequentemente, devido ao exercício (3.1), u é solução de (3.1).

É importante notar que o corolário acima não é suficiente para nossos fins! É claro que obtivemos existência local, mas a unicidade vale apenas em $\mathcal{X}_{\tilde{T}}$ e não em $C([0, \tilde{T}]; X)$. Para isto, assim como para obter a continuidade da aplicação vamos utilizar o seguinte resultado clássico,

Exercício (3.4). *A desigualdade de Gronwall. Sejam $k \in L^1([a, b])$, $k \geq 0$ e $f, g \in C([a, b])$ tais que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) f(s) ds, \qquad a \leq t \leq b \tag{3.13}$$

então

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) \exp\left[\int_a^s k(r) dr\right] g(s) ds, \qquad a \leq t \leq b \tag{3.14}$$

se $g(t) = g =$constante segue em particular que,

$$f(t) \leq g \exp\left[\int_a^t k(s) ds\right], \qquad a \leq t \leq b \tag{3.15}$$

(Sugestão: *Considere $R(t) = \int_a^t k(s) f(s) ds$, derive, use (3.13). Referência:* [**H**] *página 369).*

Agora,

Lema (3.5). *Sejam $T > 0$ e $u, v \in C([0, T]; X)$ soluções de (3.1) tais que $u(0) = \phi$ e $v(0) = \psi$. Então,*

$$\|u(t) - v(t)\|_X \leq \|\phi - \psi\|_X \exp(Ct), \qquad t \in [0, \tilde{T}] \tag{3.16}$$

Demonstração: Devido ao exercício (3.1) u satisfaz (3.4). De maneira análoga,

$$v(t) = \psi + \int_0^t F(v(t'))dt', \qquad t \in [0, T] \tag{3.17}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_X &\leq \|\phi - \psi\|_X + \int_0^t \|F(u(t')) - F(v(t'))\|_X \, dt' \\ &\leq \|\phi - \psi\|_X + C \int_0^t \|u(t') - v(t')\|_X \, dt' \end{aligned} \tag{3.18}$$

e o resultado segue do exercício (3.4).

∎

Combinando o corolário (3.3) e o lema (3.5) obtêm-se

Corolário (3.6). *O problema (3.1) é localmente bem-posto. De maneira mais precisa, existem $\tilde{T} > 0$ e uma única $u \in C([0, \tilde{T}]; X)$ satisfazendo (3.1) com a derivada calculada na topologia de X (de modo que $u \in C^1([0, T]; X)$ automaticamente). Além disso, a aplicação $\phi \mapsto u$ é contínua no sentido que se $\phi_n \to \phi$ em X então*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{[0, \tilde{T}]} \|u(t) - u_n(t)\|_X = 0 \tag{3.19}$$

onde u_n é a solução de (3.1) com $u_n(0) = \phi_n$.

Resta agora estudar a existência global. A idéia envolvida é exatamente a mesma que na teoria das EDO's: ou a solução "explode" em tempo finito ou ela pode ser extendida a toda a semireta $[0, \infty)$. Seja

$$T^* = \sup\{T > 0 \,|\, \exists! \; u \in C([0, T]; X) \text{ satisfazendo } (3.1)\} \tag{3.20}$$

Vamos provar que $T^* = \infty$. Para isso note que,

Lema (3.7). *Suponha que $T^* < \infty$. Então*

(3.21) $$\lim_{t \uparrow T^*} \|u(t)\|_X = \infty$$

Demonstração: Caso contrário existe $K > 0$ com a propriedade,

(3.22) $$\|u(t)\|_X \leq K, \qquad t \in [0, T^*)$$

Mas então o limite $\psi = \lim_{t \uparrow T^*} u(t)$ existe. De fato, sejam $t, \tau \in$ tais que $t,\ t + \tau \in [0, T^*)$.

(3.23) $$u(t+\tau) - u(t) = \int_t^{t+\tau} F(u(t'))dt'$$

Logo,

(3.24) $$\|u(t+\tau) - u(t)\|_X \leq KC\,|\tau|$$

Consequentemente a aplicação $t \in [0, T^*) \mapsto u(t) \in X$ é uniformemente contínua em $[0, T^*)$ e pode portanto ser extendida à $[0, T^*]$ na topologia de X (note que a desigualdade acima mostra na verdade que $\|u(\theta) - u(\theta')\|_X \leq KC\,|\theta - \theta'|$ para todo $\theta, \theta' \in [0, T^*)$ e portanto $\psi = \lim_{t \uparrow T^*} u(t)$ existe em X (pelo critério de Cauchy). Agora considere o problema

(3.25) $$\begin{cases} \partial_t v = F(v) \\ v(0) = \psi = u(T^*) \end{cases}$$

Pelo teorema de existência e unicidade local existe $\tilde{T}' > 0$ e uma única $v \in C([0, \tilde{T}']; X)$ satisfazendo (3.25). Defina então,

(3.26) $$\omega(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq T^* \\ v(t - T^*), & T^* \leq t \leq T^* + \tilde{T}', \end{cases}$$

É fácil verificar que

$$
\begin{cases} \partial_t \omega = F(\omega), & \text{se} \quad t \in [0, T^*) \cup (T^*, \tilde{T}'] \\ \omega(0) = \phi, \ \ \omega(T^*) = \psi \end{cases} \tag{3.27}
$$

Além disso, devido à continuidade uniforme de $u(t)$ em $[0, T^*]$ temos

$$
u(T^*) - u(T^* - h) = \int_{T^*-h}^{T^*} F(u(t'))dt' \tag{3.28}
$$

onde $h > 0$ é tal que $(T^* - h) \in [0, T^*]$. Então,

$$
\frac{u(T^*) - u(T^* - h)}{h} = \frac{1}{h} \int_{T^*-h}^{T^*} F(u(t'))dt' \longrightarrow F(u(T^*)) \tag{3.29}
$$

quando $h \to 0$ uma vez que o quociente de Newton em questão pode ser escrito como o valor médio de uma função contínua em um intervalo fechado de comprimento h. Segue portanto que $\omega(t)$ é diferenciável à esquerda no ponto $t = T^*$ e esta derivada é igual a $F(u(T^*))$. De maneira análoga

$$
\frac{\omega(t+h) - \omega(t)}{h} = \frac{v(h) - v(0)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h F(v(t'))dt' \tag{3.30}
$$

para todo $h > 0$ suficientemente pequeno. Tomando o limite quando $h \to 0$ segue que $\omega(t)$ é diferenciável à direita e esta derivada é igual $F(u(T^*))$. Consequentemente $\omega(t)$ é diferenciável em $t = T^*$ e $\partial_t \omega(T^*) = F(\omega(T^*))$. Isto mostra que $u(t)$ pode ser extendida, como solução de (3.1) ao intervalo $[0, T^* + \tilde{T}')$ o que contraria a definição de T^* e o lema está provado.

∎

Finalmente,

Teorema (3.8). *O problema (3.1) é globalmente bem-posto. De maneira mais precisa, existe uma única* $u \in C([0,\infty) : X)$ *que depende continuamente da condição inicial no sentido que se* $\phi_n \to \phi$ *em* X *então*

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u(t) - u_n(t)\|_X = 0 \tag{3.31}$$

para todo $T > 0$ *fixo onde* $u_n(t)$ *é a solução global de (3.1) tal que* $u_n(0) = \phi_n$.

Antes de prosseguir convêm ao leitor aplicado considerar os três exercícios abaixo.

Exercício (3.9). a) *Prove que se* $\phi \in H^s(\mathbf{R})$, $s \geq 0$, *toma valores reais então* $\operatorname{sen}\phi$ *tem estas mesmas propriedades. Em particular se* $\phi \in H^\infty(\mathbf{R}) = \bigcap_s H^s(\mathbf{R})$ *segue que* $\operatorname{sen}\phi \in H^\infty(\mathbf{R})$. *O que se pode dizer sobre* $\cos\phi$ *?*

b) Mostre que o problema de Cauchy para a equação seno-Hilbert (SH), i.e.,

$$\begin{cases} \partial_t u = \sigma \operatorname{sen} u \\ u(0) = \phi \end{cases} \tag{3.32}$$

é bem posto globalmente em $H^s(\mathbf{R})$, $s \geq 0$, *onde* ϕ *é como em a) e* σ *denota a transformada de Hilbert (veja o teorema (A.15) do apêndice A)*

$$(\sigma f)(x) = p \cdot v \cdot \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{f(x')}{x'-x} dx'. \tag{3.33}$$

Para maiores informações sobre SH *veja* [**SAF**] *e* [**M**].

Exercício (3.10). a) *Prove que o problema de Cauchy para a equação de Benjamin-Bona-Mahoney,*

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x u + u\partial_x u + \partial_{xxt} u \\ u(0) = \phi \in H^s(\mathbf{R}), \ \text{real} \end{cases} \tag{3.34}$$

é bem posto localmente em $H^s(\mathbf{R})$, $s > 1/2$.

Sugestão: *Mostre que (3.34) é equivalente a*

$$u(t) = \phi + Q\int_0^t \left(u(t') + \frac{u(t')^2}{2}\right) dt' \tag{3.35}$$

onde $Q = (1-\partial_x^2)^{-1}\partial_x$.

b) O que se pode dizer sobre o problema básico para BBM em $L^2(\mathbf{R})$?

c) Seja $u \in C([0,T];H^1(\mathbf{R}))$, $T > 0$, uma solução da BBM com $u(0) = \phi$. Prove que

$$\|u(t)\|_1 = \|\phi\|_1 \tag{3.36}$$

para todo $t \in [0,T]$. Use este fato para concluir que (3.34) é bem posto globalmente em $H^1(\mathbf{R})$.

Sugestão: *Note que se $\psi \in H^s(\mathbf{R})$ então $Q\psi \in H^{s+1}(\mathbf{R})$. Com este fato em mente calcule $\partial_t \|u(t)\|_1^2$.*

Exercício (3.11). *Generalize os resultados obtidos sobre (3.1) para o caso não-autônomo, i.e., a situação em que $F(t,u(t))$ depende explicitamente da variável t.*

Vamos examinar agora o problema de Cauchy para a equação de Schrödinger não linear (1.7) com $x \in \mathbf{R}$ e $f(u) = |u|^2 u$,

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\partial_x^2 u + |u|^2 u \\ u(0) = \phi \end{cases} \tag{3.37}$$

Observe que o lado direito da equação em (3.37) contém a derivada segunda de u em relação à variável x e portanto a derivada temporal de u é menos diferenciável do que u em relação a x. Esta constatação mostra que é essencial introduzir pelo menos dois espaços de funções no jogo.

O primeiro passo no estudo do problema básico para (3.37) consiste em notar o

Exercício (3.12). *a) Prove que a função $t \in \mathbf{R} \mapsto E_0(t)$ definida por*

$$E_0(t)\phi = \exp(it\partial_x^2)\phi = (\exp(-it\,|\cdot|^2)\hat{\phi})^{\vee} \tag{3.38}$$

define um grupo unitário fortemente contínuo a um parâmetro em $H^s(\mathbf{R})$, $s \in \mathbf{R}$.

b) Sejam $\phi \in H^s(\mathbf{R})$, $s > 1/2$ e $u \in C([0,T]; H^s(\mathbf{R}))$ uma solução de (3.37) (no sentido descrito em (Q.1) na primeira seção deste capítulo). Então,

$$u(t) = E_0(t)\phi + \int_0^t E_0(t-t')(|u(t')|^2\, u(t'))dt' \tag{3.39}$$

Reciprocamente, se $u \in C([0,T]; H^s(\mathbf{R}))$ satisfaz a equação integral acima então u é solução de (3.37).

*(**Sugestão:** Use o método de variação dos parâmetros.)*

Seja $T > 0$ e defina

$$\mathcal{X}_T = \{f \in C([0,T]; H^s(\mathbf{R})) \mid \|f(t) - E_0(t)\phi\|_s \le M, \quad \forall\, t \in [0,T]\} \tag{3.40}$$

Então,

Exercício (3.13). *a) Prove que $\mathcal{X}_T$ se torna um espaço métrico completo quando munido da distância*

$$d(f,g) = \sup_{[0,T]} \|f(t) - g(t)\|_s \tag{3.41}$$

b) Exiba $\tilde{T} = \tilde{T}(s, \|\phi\|_s) > 0$ tal que a aplicação

$$(Af)(t) = E_0(t)\phi + \int_0^t dt' E_0(t-t')(|f(t')|^2\, f(t')) \tag{3.42}$$

define uma contração em $\mathcal{X}_T$, qualquer que seja $T \in (0, \tilde{T})$. Conclua que existe uma única solução $u \in \mathcal{X}_T$, $T \in (0, \tilde{T})$, do problema (3.37).

c) Sejam $T > 0$, fixo porém arbitrário, e $u, v \in C([0,T]; H^s(\mathbf{R}))$ soluções da equação em estudo com $u(0) = \phi$ e $v(0) = \psi$. Prove que

$$(3.43) \qquad \|u(t) - v(t)\|_s \leq \|\phi - \psi\|_s \exp(3K^2 t), \qquad t \in [0,T]$$

onde $K = \max\left\{\sup_{[0,T]} \|u(t)\|_s, \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s\right\}$. *Conclua que existe no máximo uma solução de (3.37) em $C([0,T]; H^s(\mathbf{R}))$. Em particular se T é como em b) existe uma única solução do problema (3.37) em $C([0,T]; H^s(\mathbf{R}))$.*

d) Prove que a solução do problema (3.37) depende continuamente do dado inicial. De maneira mais precisa, sejam $T \in (0, \tilde{T})$ como em b), $\phi_n \to \phi$ em $H^s(\mathbf{R})$ e u_n, u as soluções correspondentes. Então se $T' \in (0,T)$ a solução u_n está definida em $[0,T']$ para todo n suficientemente grande e

$$(3.44) \qquad \lim_{n \to \infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_s = 0$$

Vamos passar agora ao estudo da existência global. Antes de mais nada cabe notar que a estimativa (3.43), com $v \equiv 0$, não é suficiente para nossos propósitos uma vez que a exponencial que aí ocorre depende do supremo de $u(t)$ sobre o intervalo $[0,T]$ onde supusemos que existe solução. Na verdade existência global é uma propriedade bem mais difícil de ser estabelecida. Em geral é necessário utilizar informações detalhadas contidas na "física" associada à equação em questão. No caso da NLS em (3.37) a *carga*

$$(3.45) \qquad \|\psi\|_0^2 = \int_{\mathbf{R}} \|\psi(x)\|^2 \, dx$$

e a *energia*

$$(3.46) \qquad E(\psi) = \int_{\mathbf{R}} \left(|\partial_x \psi|^2 + \frac{|\psi(x)|^4}{2} \right) dx$$

são conservadas ao longo do fluxo em estudo. De maneira um pouco mais precisa, se $u(t)$, $t \in [0,T]$, é solução de (3.37) então,

$$\text{(3.47)} \qquad \begin{cases} \partial_t \|u(t)\|_0^2 = 0 \\ \partial_t E(u(t)) = 0 \end{cases}, \qquad t \in (0,T)$$

ou seja,

$$\text{(3.48)} \qquad \begin{cases} \|u(t)\|_0^2 = \|\phi\|_0^2 \\ E(u(t)) = E(\phi) \end{cases}, \qquad t \in [0,T]$$

Utilizando (3.48) é possível obter uma estimativa a priori global para a norma $H^1(\mathbf{R})$ da solução o que permite estendê-la ao intervalo $[0,\infty)$. Este processo apresenta no entanto algumas dificuldades. Note que $E(\psi)$ está perfeitamente bem definida se $\psi \in H^1(\mathbf{R})$, mas se tentarmos provar $\partial_t(E(u(t))) = 0$ da maneira natural, i.e., derivando sob o sinal de integral e utilizando a equação diferencial obteremos expressões que contém a derivada segunda de $u(t,x)$ sobre a qual não temos controle se supusermos apenas $u(0) = \phi \in H^1(\mathbf{R})$. A saída para esta dificuldade consiste em provar (3.48) no caso de condições iniciais bem comportadas ($\phi \in H^2(\mathbf{R})$ é suficiente) e depois utilizar a dependência contínua no dado inicial para obter a conservação de energia no caso $\phi \in H^1(\mathbf{R})$. Temos,

Teorema (3.14). *Sejam $T > 0$, $\phi \in H^1(\mathbf{R})$ e $u \in C([0,T];H^1(\mathbf{R}))$ solução de (3.37) com $u(0) = \phi$. Então (3.48) é verdadeira.*

Demonstração: Suponha primeiro que $\phi \in H^2(\mathbf{R})$. Então cálculos simples, porém entediantes, e que portanto serão deixados a cargo do leitor, mostram que a carga e a energia se conservam neste caso. Tendo em vista a dependência contínua no dado inicial descrita no exercício (3.14) basta provar que se $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^2(\mathbf{R})$ é tal que $\psi_n \to \psi$ em $H^1(\mathbf{R})$ então $E(\psi_n) \to E(\psi)$. Para isso observe que

$$\text{(3.49)} \qquad \begin{aligned} |\partial_x\psi_n|^2 - |\partial_x\psi|^2 &= \partial_x\psi_n\overline{\partial_x\psi_n} - \partial_x\psi\overline{\partial_x\psi} \\ &= (\partial_x\psi_n - \partial_x\psi)\overline{\partial_x\psi_n} + \partial_x\psi\overline{(\partial_x\psi_n - \partial_x\psi)} \end{aligned}$$

$$
(3.50) \qquad \begin{aligned}
|\psi_n|^2 - |\psi|^4 &= |\psi_n|^2 |\psi_n|^2 - |\psi|^2 |\psi|^2 \\
&= \left(|\psi_n|^2 - |\psi|^2\right) |\psi_n|^2 + |\psi|^2 \left(|\psi_n|^2 - |\psi|^2\right) \\
&= \left(\psi_n \overline{\psi}_n - \psi\overline{\psi}\right) |\psi_n|^2 + |\psi|^2 \left(\psi_n \overline{\psi}_n - \psi\overline{\psi}\right) \\
&= \left(\psi_n \overline{(\psi_n - \psi)} + (\psi_n - \psi)\overline{\psi}\right) |\psi_n|^2 \\
&+ |\psi|^2 \left(\psi_n \overline{(\psi_n - \psi)} + (\psi_n - \psi)\overline{\psi}\right)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
(3.51) \qquad \begin{aligned}
|E(\psi_n) - E(\psi)| \leq &\left(\|\partial_x \psi_n\|_0 + \|\partial_x \psi\|_0\right) \|\partial_x \psi_n - \partial_x \psi\|_0 \\
&+ C \|\psi\|_1^2 \left(\|\psi_n\|_0 + \|\psi\|_0\right) \|\psi_n - \psi\|_0
\end{aligned}
$$

onde utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz e o fato que $\|\psi\|_{L^\infty}^2 \leq C \|\psi\|_1^2$. O resultado segue então da convergnencia de ψ_n a ψ na topologia de $H^1(\mathbf{R})$.

∎

Finalmente,

Teorema (3.15). *O problema (3.37) é globalmente bem posto em $H^1(\mathbf{R})$. De maneira mais precisa, dada $\phi \in H^1(\mathbf{R})$ existe uma única $u \in C([0,\infty), H^1(\mathbf{R}))$ satisfazendo (3.37). Além disso, u depende continuamente de ϕ no sentido que se $\phi_n \to \phi$ em $H^1(\mathbf{R})$ e $u_n(t)$ são as soluções correspondentes, então*

$$
(3.52) \qquad \lim_{M\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_1 = 0 \qquad .
$$

Demonstração: Um argumento semelhante ao do lema (3.7) utilizando a equação integral (3.39) mostra que basta provar que se $u \in C([0,T]; H^1(\mathbf{R}))$, $u(0) = \phi$ então $\|u(t)\|_1^2 \leq F(\|\phi\|_1)$ para todo $t \in [0,T]$. Para obter esta estimativa note que

$$
(3.53) \qquad E(u(t)) = E(\phi) = \int_{\mathbf{R}} \left(|\partial_x u|^2 + \frac{|u|^4}{2}\right) dx
$$

Portanto,

$$\|u\|_1^2 = \|\phi\|_0^2 + E(\phi) - \int_{\mathbf{R}} \frac{|u|^4}{2} dx \leq \|\phi\|_1^2 + \int_{\mathbf{R}} \frac{|\phi|^4}{2} dx + \int_{\mathbf{R}} \frac{|u|^4}{2} dx \tag{3.54}$$

Mas se $\psi \in H^1(\mathbf{R})$ temos,

$$\int_{\mathbf{R}} |\psi(x)|^4 \, dx \leq \|\psi\|_{L^\infty}^2 \|\psi\|_0^2 \leq 2 \|\psi\|_0^3 \|\psi\|_1 \tag{3.55}$$

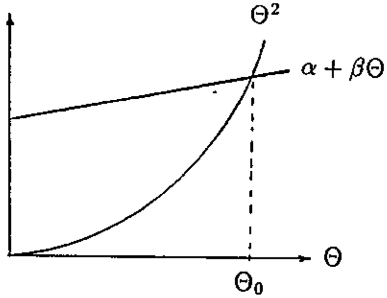
onde utilizamos a desigualdade $\|\psi\|_{L^\infty} \leq (2\|\psi\|_0 \|\psi\|_1)^{1/2}$ (prove!). Combinando (3.53), (3.54), (3.55) e o fato que $\|u(t)\|_0^2 = \|\phi\|_0^2$ para todo $t \in [0,T]$ obtém-se,

$$\|u(t)\|_1^2 \leq \|\phi\|_1^2 + 2\|\phi\|_1^4 + 2\|\phi\|_1^3 \|u(t)\|_1 \tag{3.56}$$

Portanto para cada $t \in [0,T]$ fixo, $\Theta = \|u(t)\|_1$ satisfaz

$$\begin{cases} \Theta^2 \leq \alpha + \beta\Theta \\ \alpha = \|\phi\|_1^2 + 2\|\phi\|_1^4, \quad \beta = 2\|\phi\|_1^3 \end{cases} \tag{3.57}$$

A limitação desejada segue imediatamente de (3.57) uma vez que a parábola Θ^2 certamente intercepta a reta $\alpha + \beta\Theta$ em algum ponto $\Theta_0 > 0$ como indicado na figura abaixo.



É claro que Θ_0 deve satisfazer

$$\Theta_0^2 - \beta\Theta_0 - \alpha = 0 \tag{3.58}$$

e portanto

$$\Theta_0 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}}{2} \tag{3.59}$$

Consequentemente

$$\|u(t)\|_1^2 \leq \Theta_0^2 = F(\|\phi\|_1) \tag{3.60}$$

como desejávamos. As afirmações restantes seguem facilmente da teoria local descrita acima. Isto encerra a demonstração do teorema.

∎

CAPÍTULO II

EQUAÇÕES LINEARES

Neste capítulo, visando aplicações ao caso não-linear, estudaremos o problema de Cauchy associado à equação diferencial linear não homogênea

$$\partial_t u + A(t)u = f(t) \tag{L}$$

onde $A(t): D(A(t)) \subseteq X \to X$, X de Banach, $t \in [0,T]$ é uma família de operadores lineares em geral não limitados e $f: [0,T] \to X$ é uma função dada. A teoria apresentada abaixo, assim como aquela descrita na primeira seção do próximo capítulo é devida a T. Kato e pode ser encontrada, com diferentes vestimentas, em **[K3]**, **[K4]**, **[K5]** e **[K6]**. A versão aqui apresentada baseia-se nesta última referência.

1. A Equação Homogênea

Vamos considerar em primeiro lugar a versão homogênea de (L), a saber

$$\partial_t u = -A(t)u, \qquad t \in [0,T] \tag{1.1}$$

para o qual construiremos um operador de evolução. De maneira um pouco mais precisa sob certas condições bastante gerais, associaremos a (1.1) uma única família de operadores $\{(s,t) \mid 0 \leq s \leq t \leq T\} \mapsto U(t,s) \in \mathcal{B}(X)$ tal que para todo $t, t', t'' \in [0,T]$ temos

$$U(t,t) = 1 \tag{1.2}$$

$$U(t,t')U(t',t'') = U(t,t'') \tag{1.3}$$

Além disso, $(t,s) \mapsto U(t,s)$ é fortemente contínua em relação à topologia de X, i.e.,

$$\|U(t,s)\phi - U(t',s')\phi\|_X \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$

quando $(t',s') \to (t,s)$ qualquer que seja $\phi \in X$ e o problema de Cauchy associado a (1.1) tem como solução a função $u(t) = U(t,s)\phi$. Isto significa que

$$\begin{cases} \partial_t U(t,s)\phi = -A(t)U(t,s)\phi \\ u(s) = U(s,s)\phi = \phi \end{cases} \tag{1.5}$$

onde a derivada em relação ao tempo deve ser calculada no sentido da topologia de X. Observe que (1.5) é uma condição bastante restritiva: ϕ e $U(t,s)$ devem ser tais que $U(t,s)\phi \in D(A(t))$ para todo $t \in [0,T]$. A família a dois parâmetros descrita acima é chamada (com um certo abuso de linguagem) o *operador de evolução* ou o *propagador* associado à família $\{A(t)\}$.

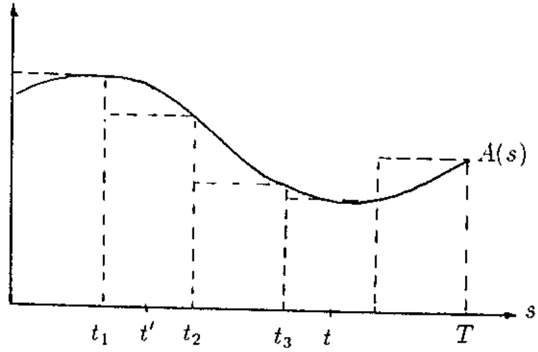
O ingrediente básico envolvido na construção que descreveremos abaixo é a implementação do método de Cauchy para resolver equações diferenciais ordinárias para o caso de (1.1). Este método consiste em aproximar $A(t)$ por funções degrau, construir os operadores de evolução correspondentes e tomar limites. Considere a sequência de funções degrau dadas por

$$A_n(t) = A\left(\frac{T}{n}\left[\frac{nt}{T}\right]\right), \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{1.6}$$

onde $[r]$ denota o maior inteiro menor ou igual a $r \in \mathbf{R}$. Para motivar as hipóteses que introduziremos sobre $A(t)$ e ilustrar a construção abstrata abaixo, é conveniente considerar um caso específico. Tome $n = 5$. Então é fácil verificar que

$$\begin{cases} A_5(t) = A(t_j), \qquad t \in [t_{j-1}, t_j), \qquad t_j = \frac{Tj}{5} \\ t_0 = 0, \qquad t_5 = T, \qquad j = 1,2,3,4,5 \end{cases} \tag{1.7}$$

Intuitivamente,



Vamos construir agora, de maneira bastante natural, uma solução para o problema

$$\partial_t u = -A_5(t)u \tag{1.8}$$

como $A_5(t)$ é constante em cada um dos intervalos $[t_{j-1}, t_j)$ a solução em cada um deles deve ser determinada pelo semigrupo gerado por $A(t_{j-1})$, caso estes operadores atendam às condições do teorema de Hille-Yosida-Phillips (veja o apêndice (B.2)). Suponha que isto é verdade e sejam t', t como na figura acima. Então, saindo de t' podemos chegar a t_2 através da fórmula

$$u(t_2) = \exp(-(t_2 - t')A(t_1))u(t') \tag{1.9}$$

Usando $u(t_2)$ como condição inicial vamos até t_3 por meio de

$$u(t_3) = \exp(-(t_3 - t_2)A(t_2))u(t_2) \tag{1.10}$$

chegando finalmente a t com $u(t)$ dado por

$$u(t) = \exp(-(t - t_3)A(t_3))u(t_3) \tag{1.11}$$

Consequentemente, neste caso temos

$$U_5(t, t') = \exp(-(t - t_3)A(t_3)) \cdot \exp(-(t_3 - t_2)A(t_2)) \cdot \exp(-(t_2 - t')A(t_1)) \tag{1.12}$$

O processo descrito acima permite construir $U_5(t,t')$ ou mais geralmente $U_n(t,t')$ quaisquer que sejam $n \in \mathbf{Z}^+$ e t, t' pertencentes ao triângulo $0 \le t' \le t \le T$. Os detalhes desta construção e a demonstração de várias de suas propriedades, descritas no exercício abaixo, serão deixadas a cargo da industriosidade do leitor.

Exercício (1.1). *Suponha que $A(t)$ gera um semigrupo de classe C^0 para cada $t \in [0,T]$ fixo e sejam $U_n(t,t')$ os operadores construídos pelo processo descrito acima. Mostre que para cada $n \in \mathbf{Z}^+$ e $0 \le t'' \le t' \le t \le T$ temos $U_n(t,t) = 1$, $U_n(t,t'') = U_n(t,t')U_n(t',t'')$ e a aplicação $(t,t') \mapsto U_n(t,t')\phi$ é contínua em relação à topologia de X. Além disso pelo menos formalmente (i.e., derivando sem maiores preocupações),*

$$\begin{cases} \partial_t U_n(t,t') = -A_n(t)U_n(t,t') \\ \partial_{t'} U_n(t,t') = U_n(t,t')A_n(t') \end{cases} \tag{1.13}$$

se t', $t \neq \frac{jT}{n}$ onde $j \in \mathbf{Z}^+$. Finalmente, derivando formalmente a quantidade $U_n(t,t')U_m(t',r)\phi$ em relação a t', utilizando (1.13) e integrando o resultado em relação a $t' \in [r,t]$ conclua que

$$U_n(t,r)\phi - U_m(t,r)\phi = \int_r^t U_n(t,s)(A_n(s) - A_m(s))U_m(s,r)\phi ds \tag{1.14}$$

Como veremos abaixo esta última equação será a ferramenta fundamental que utilizaremos na tomada dos limites quando $m, n \to \infty$.

Podemos agora introduzir as hipóteses necessárias à construção do operador de evolução. Deve-se notar que elas são feitas sob medida para que as "contas" que as seguem sejam inteiramente rigorosas.

Hipótese (H.1). *Para cada $t \in [0,T]$ fixo, o operador $A(t)$ gera um semigrupo de classe C^0 em X (veja o apêndice (B.2)). Além disso, a família $\{A(t)\}$ é **estável** em X com **constantes de estabilidade** M, β, i.e., existem constantes reais M, β tais que para* *qualquer família finita* $\{t_j\}$ *com* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_N \leq T$ *então*

$$(1.15) \qquad \|\prod_{j=1}^{N} e^{-s_j A(t_j)}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M e^{\beta(s_1+s_2+\cdots+s_N)}$$

para toda coleção finita de números $s_j \geq 0$. *É importante notar que o produto em (1.15), assim como todos os produtos que ocorrem neste capítulo, é* ***ordenado temporalmente***, *i.e., os fatores com* t_j*'s maiores são escritos à esquerda daqueles com* t_j*'s menores. Finalmente, é educativo observar a seguinte equivalência da condição de estabilidade:*

Exercício (1.2). *A família* $\{A(t)\}$ *é estável em* X *se e só se existem constantes* M, β *tais que*

$$(1.16) \qquad \|\prod_{j=1}^{N}(A(t_j)+\lambda_j)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M \prod_{j=1}^{N}(\lambda_j - \beta)^{-1}$$

para toda família finita $\{\lambda_j\}$ *com* $\lambda_j > \beta$. *Note que (1.16) é uma generalização de uma das condições do teorema de Hille-Yosida- Phillips, (Referência: proposição 3.3 de* **[K1]**).

Hipótese (H.2). *Existe um espaço de Banach* Y *contínua e densamente contido em* X, *tal que* $Y \subseteq D(A(t))$ *para todo* $t \in [0,T]$ *(portanto* $A(t) \in \mathcal{B}(Y,X)$ *para cada* $t \in [0,T]$; *prove!), e a aplicação* $t \in [0,T] \to A(t)$ *é contínua em relação à topologia de* $\mathcal{B}(Y,X)$.

Hipótese (H.3). *Para todo* $s \in [0,\infty)$ *e* $t \in [0,T]$ *fixo* $\exp(-sA(t))(Y) \subseteq Y$ *e a aplicação* $s \in [0,\infty) \mapsto \exp(-sA(t))$ *define um semigrupo de classe* C^0 *em* Y.

Para dar sentido à última hipótese necessária ao primeiro teorema de existência deste capítulo convém notar,

Exercício (1.3). *Sejam X e Y como em (H.2) e $Q: D(Q) \subseteq X \to X$ gerador de um semigrupo de classe C^0. Suponha que $Q \in \mathcal{B}(Y, X)$, $\exp(-sQ)(Y) \subseteq Y$ e que a aplicação $s \in [0, \infty) \mapsto \exp(-sQ)$ gera um semigrupo de classe C^0 em Y com gerador $\tilde{Q}$. Então*

$$(1.17) \qquad \begin{cases} D(\tilde{Q}) = D(Q) \cap Y \\ \tilde{Q}\phi = Q\phi, \qquad \phi \in D(\tilde{Q}) \end{cases}$$

O operador $\tilde{Q}$ é chamado a parte de Q em Y.

Hipótese (H.4). *A família $\{\tilde{A}(t)\}$, formada pelas partes dos operadores $A(t)$ em Y, é estável em Y, i.e., existem constantes reais $\tilde{M}$ e $\tilde{\beta}$ tais que*

$$(1.18) \qquad \| \prod_{j=1}^{N} e^{-s_j \tilde{A}(t_j)} \|_{B(Y)} \leq \tilde{M} e^{\tilde{\beta}(s_1 + s_2 + \cdots + s_N)}$$

para qualquer família finita $\{t_j\}$ com $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_N \leq T$ e toda coleção finita de números $s_j \geq 0$.

Podemos agora enunciar e provar o primeiro teorema de existência e unicidade para (1.1), a saber

Teorema (1.4). *Suponha que (H.1), (H.2), (H.3) e (H.4) são válidas. Então existe uma única família de operadores $U(t, s) \in \mathcal{B}(X)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ tais que*

a) $(t, s) \mapsto U(t, s)$ é fortemente contínua em relação à topologia de X, $U(s, s) = 1$ e

$$(1.19) \qquad \|U(t, s)\|_{B(X)} \leq M e^{\beta(t-s)}$$

b) $U(t, r) = U(t, s)U(s, r), \qquad 0 \leq r \leq s \leq t \leq T$

c) $D_t^+ U(t, s)\phi \,\big|_{t=s} = -A(s)\phi, \qquad \phi \in Y, 0 \leq s < T$

d) $\frac{d}{ds}U(t,s)\phi = U(t,s)A(s)\phi, \qquad \phi \in Y, \qquad 0 \leq s \leq t \leq T$

onde D^+ denota a derivada à direita e $\frac{d}{ds} = \partial_s$ a derivada usual, ambas calculadas em relação à topologia de X.

Demonstração: Sejam $A_n(t)$, $t \in [0,T]$ a sequência de funções degrau definida em (1.6) e $U_n(t,s)$ os propagadores associados. Tendo em vista as hipóteses feitas acima é fácil verificar que (1.14) é de fato válida para toda $\phi \in Y$. Portanto,

$$\begin{aligned} &\|U_n(t,r)\phi - U_m(t,r)\phi\|_X \\ &\leq \int_r^t ds\, \|U_n(t,s)\|_{\mathcal{B}(X)}\, \|A_n(s) - A_m(s)\|_{\mathcal{B}(Y,X)}\, \|U_m(s,r)\|_{\mathcal{B}(Y)}\, \|\phi\|_Y \end{aligned} \tag{1.20}$$

Mas as hipóteses de estabilidade (H.1) e (H.4) mostram que

$$\begin{cases} \|U_n(t,s)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M e^{\beta(t-s)} \\ \|U_m(s,r)\|_{\mathcal{B}(Y)} \leq \tilde{M} e^{\tilde{\beta}(s-r)} \end{cases} \tag{1.21}$$

Consequentemente,

$$\|U_n(t,r)\phi - U_m(t,r)\phi\|_X \leq M\tilde{M} e^{\gamma(t-r)}\, \|\phi\|_Y \int_r^t \|A_n(s) - A_m(s)\|_{\mathcal{B}(Y,X)}\, ds \tag{1.22}$$

onde $\gamma = \max\{\beta, \tilde{\beta}\}$.

Mas a continuidade da aplicação $t \in [0,T] \to A(t) \in \mathcal{B}(Y,X)$ implica,

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|A_n(t) - A_m(t)\|_{\mathcal{B}(Y,X)} = 0 \tag{1.23}$$

de modo que o lado direito de (1.22) tende a zero quando $m,n \to \infty$ uniformemente em relação às variáveis r e t. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(t,r)\phi$ existe em X uniformemente, no triângulo $0 \leq r \leq t \leq T$ para todo $\phi \in Y$. Como Y é denso em X e a família $U_n(t,r)$ é uniformemente limitada em $\mathcal{B}(X)$ existe

$$U(t,r) = s - \lim_{n\to\infty} U_n(t,r) \in \mathcal{B}(X) \tag{1.24}$$

onde $s - \lim_{n\to\infty}$ denota o limite forte em X. Agora é fácil verificar que a) e b) são satisfeitas por $U(t,r)$: elas são consequências imediatas das propriedades correspondentes da sequência $U_n(t,r)$ e da uniformidade do limite estabelecida acima. Para provar c) e d) vamos utilizar o seguinte exercício,

Exercício (1.5). *Seja $\{A'(t)\}$ outra família satisfazendo (H.1), (H.2), (H.3) e (H.4) com os mesmos espaços X e Y e com constantes de estabilidade $M', \beta', \tilde{M}', \tilde{\beta}'$. Seja $\{U'(t,s)\}$ a família obtida de $\{A'(t)\}$ da mesma forma que $\{U(t,s)\}$ foi construída a partir de $\{A(t)\}$. Então,*

$$\|U'(t,r)\phi - U(t,r)\phi\|_{B(X)} \leq M'\tilde{M}e^{\gamma(t-r)} \int_r^t \|A'(s) - A(s)\|_{B(Y,X)}\, ds \tag{1.25}$$

onde $\gamma = \max\{\beta', \tilde{\beta}\}$.

Sugestão. *Proceda como na obtenção de (1.14) e tomes limites).*

Escolhendo $A'(s) = A(r)$, $s \in [0,T]$, a desigualdade (1.25) se reduz a

$$\left\| e^{-(t-r)A(r)}\phi - U(t,r)\phi \right\|_X \leq M'\tilde{M}e^{\gamma(t-r)}\, \|\phi\|_Y \int_r^t \|A(r) - A(s)\|_{B(Y,X)}\, ds \tag{1.26}$$

Mas o lado esquerdo de (1.26) pode ser reescrito na forma

$$\left\| e^{-(t-r)A(r)}\phi - U(t,r)\phi \right\|_X = (t-r) \left\| \frac{e^{-(t-r)A(r)} - 1}{t-r}\phi - \frac{U(t,r) - U(r,r)}{t-r}\phi \right\|_X \tag{1.27}$$

Combinando (1.26) e (1.27) obtém-se,

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{e^{-(t-r)A(r)} - 1}{t-r}\phi - \frac{U(t,r) - U(r,r)}{t-r}\phi \right\|_X \\ &\leq M'\tilde{M}e^{\gamma(t-r)} \left[\frac{1}{t-r} \int_r^t \|A(r) - A(s)\|_{B(Y,X)}\, ds \right] \end{aligned} \tag{1.28}$$

A continuidade uniforme da aplicação $t \in [0,T] \to A(t) \in \mathcal{B}(Y,X)$ mostra que

$$\lim_{t\to r} \frac{1}{t-r}\int_r^t ds\, \|A(r)-A(s)\|_{\mathcal{B}(Y,X)} = 0. \tag{1.29}$$

Como

$$\lim_{t\to r} \frac{e^{-(t-t)A(r)}-1}{t-r}\phi = -A(r)\phi \tag{1.30}$$

(1.28) e (1.29) implicam que $t \mapsto U(t,r)\phi$ é diferenciável à direita em $t=r$ e

$$D_t^+ U(t,r)\phi\,\big|_{t=r} = \lim_{t\downarrow r} \frac{U(t,r)\phi - U(r,r)\phi}{t-r} = -A(r)\phi \tag{1.31}$$

Isto prova c). Um argumento análogo com $A'(s) = A(t)$, $s \in [0,T]$ fornece

$$D_s^- U(t,s)\phi\,\big|_{s=t} = A(t)\phi \tag{1.32}$$

onde D_s^- denota, como era de se esperar, a derivada à esquerda em relação à segunda variável. Para obter d) note que se $s < t$ temos

$$\begin{aligned} D_s^+ U(t,s)\phi &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}[U(t,s+h)\phi - U(t,s)\phi] \\ &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{U(t,s+h)}{h}[\phi - U(s+h,s)\phi] \\ &= -\lim_{h\downarrow 0} \frac{U(t,s+h)}{h}[U(s+h,s)\phi - \phi] = U(t,s)A(s)\phi \end{aligned} \tag{1.33}$$

onde utilizamos (1.31) e a continuidade forte. De maneira análoga, usando agora (1.32) temos

$$\begin{aligned} D_s^- U(t,s)\phi &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}[U(t,s)\phi - U(t,s-h)\phi] \\ &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{U(t,s)}{h}[\phi - U(s,s-h)\phi] \\ &= U(t,s)A(s)\phi \end{aligned} \tag{1.34}$$

A propriedade d) segue imediatamente de (1.33) e (1.34). Resta provar a unicidade. Para isto seja $V(t,s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, uma família a dois parâmetros que satisfaz a) e d). Diferenciado $V(t,s)U_n(s,r)\phi$, $\phi \in Y$, em relação a s, usando d) e integrando em $s \in [r,t]$ obtém-se

$$V(t,r)\phi - U_n(t,r)\phi = -\int_r^t V(t,s)(A(s) - A_n(s))U_n(s,r)\phi ds \tag{1.35}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ segue que $V(t,r) = U(t,r)\phi$ para toda $\phi \in Y$, $0 \leq r \leq t \leq T$. Como Y é denso em X segue que $U(t,r) = V(t,r)$. Isto encerra a demonstração do teorema.

∎

Apesar de sua simplicidade e elegância, ou talvez devido a elas, o teorema (1.4) tem dois sérios defeitos. O primeiro consiste no fato que a hipótese (H.4) pode ser de verificação bastante difícil. O segundo é que afinal de contas não resolvemos a equação (1.1) satisfatoriamente. Tudo o que conseguimos provar foi $D_t^+ U(t,s)\phi \,\big|_{t=s} = -A(t)\phi$ com ϕ em Y e $0 \leq t < T$. A razão para esta dificuldade é bem simples: as hipóteses feitas acima não garantem que o produto $A(t)U(t,s)\phi$ faça sentido para toda $\phi \in Y$. Em outras palavras, como em tantas situações que envolvem operadores não limitados, o problema consiste essencialmente em encaixar imagens e domínios. Para reforçar este comentário note que $U(t,s)A(s)\phi$ sempre faz sentido e por isso não é muito difícil provar que $\partial_s U(t,s)\phi = U(t,s)A(s)\phi$. Como veremos abaixo é possível liquidar estes dois coelhos com uma só cajadada. Para motivá-la convém notar primeiro que

Exercício (1.6). *Prove que se $U(t,t')(Y) \subseteq Y$, $0 \leq t' \leq t \leq T$ e $(t,t') \mapsto U(t,t')\phi$ é contínua em Y para toda ϕ neste espaço, então (1.1) é satisfeita com a derivada em relação a t calculada na topologia de X.*

É preciso portanto dar condições suficientes para que as hipóteses do exercício acima sejam satisfeitas. Isto significa em particular "restringir $U(t,s)$ a Y de uma maneira operacional", i.e., precisamos "calcular" $U(t,s)\phi$, $\phi \in Y$ para verificar se esse vetor pertence a Y. É claro que não podemos usar uma projeção pois Y é denso em X. Então, seguindo Kato, vamos supor a existência de uma família de isomorfismos $S(t)\colon Y \to X$ que utilizaremos para definir a restrição através da expressão $U(t,t')S(t')^{-1}$. Dessa forma o problema se transforma em verificar se $U(t,t')(Y) = U(t,t')S(t')^{-1}(X) \subseteq Y$. Se $U(t,t')$ e $S(t')^{-1}$ comutassem o problema estaria resolvido. No entanto essa condição é demasiado restritiva. Apesar disso ela inspira a saída. Se conseguirmos mostrar que $U(t,t')S(t')^{-1}$ é igual a $S(\,\cdot\,)^{-1}$ calculado em algum ponto aplicado a algo bem comportado em X a contenção que desejamos será obtida trivialmente. De maneira mais precisa, suponha que existe uma família de operadores $\{W(t,t')\colon X \to X\}$, $0 \leq t' \leq t \leq T$, tal que

$$U(t,t')S(t')^{-1} = S(t)^{-1}W(t,t') \tag{1.36}$$

então é claro que $U(t,t')(Y) \subseteq Y$. Além disso, se $W(t,t')$ e $S(t)$ satisfazem condições apropriadas obteremos também a continuidade forte mencionada no exercício (1.6). Para descobrir quem é $W(t,t')$ vamos supor que $U(t,t')$ e $S(t)$ são tão bem comportados quanto se queira, definir $W(t,t')$ pela fórmula,

$$W(t,t') = S(t)U(t,t')S(t')^{-1} \tag{1.37}$$

e procurar obter uma equação que nos permita determinar $W(t,t')$ e suas propriedades de continuidade. Derivando (1.37) em relação a t' obtém- se,

$$\begin{aligned}
\partial_{t'}W(t,t') &= S(t)\partial_{t'}U(t,t')S(t')^{-1} + S(t)U(t,t')\partial_{t'}S(t')^{-1} \\
&= S(t)U(t,t')A(t')S(t')^{-1} - S(t)U(t,t')S(t')^{-1}(\partial_{t'}S)S(t')^{-1} \\
&= S(t)U(t,t')S(t')^{-1}[S(t')A(t')S(t')^{-1} - (\partial_{t'}S)S(t')^{-1}] \\
&= W(t,t')[S(t')A(t')S(t')^{-1} - (\partial_{t'}S)S(t')^{-1}]
\end{aligned} \tag{1.38}$$

onde, para obter a segunda igualdade utilizamos o item d) do teorema (1.4) e a fórmula $\partial_{t'}S(t')^{-1} = -S(t')^{-1}(\partial_{t'}S(t'))S(t')^{-1}$, (veja o início da demonstração do teorema

(1.8)). Sejam

$$Q(t) = [S(t), A(t)]S(t)^{-1} \tag{1.39}$$

$$C(t) = (\partial_t S)(S(t)^{-1}) \tag{1.40}$$

ond $[J, K]$ denota o comutador dos operadores J e K. Então,

$$\begin{aligned} \partial_{t'} W(t,t') &= W(t,t')\{[S(t'), A(t')]S(t')^{-1} + A(t') - C(t')\} \\ &= W(t,t')A(t') + W(t,t')(Q(t') - C(t')) \end{aligned} \tag{1.41}$$

Multiplicando (1.41) à direita por $U(t',r)$, $0 \le r \le t' \le t \le T$ obtém-se,

$$(\partial_{t'} W(t,t'))U(t',r) = W(t,t')A(t')U(t',r) + W(t,t')(Q(t') - C(t'))U(t',r) \tag{1.42}$$

Mas $A(t')U(t',r) = -\partial_{t'} U(t',r)$ (pois estamos supondo que tudo que queremos é verdade!). Portanto,

$$\partial_{t'}(W(t,t')U(t',r)) = W(t,t')(Q(t') - C(t'))U(t',t) \tag{1.43}$$

Integrando em relação a $t' \in [r,t]$ segue que,

$$W(t,r) = U(t,r) - \int_r^t W(t,t')(Q(t') - C(t'))U(t',r)dt' \tag{1.44}$$

Cabem agora várias observações. Em primeiro lugar note que a partir de (1.42), tudo o que fizemos foi aplicar o venerável método da variação dos parâmetros! A equação (1.44) é a base da demonstração, devida a J. Dorroh ([**D**]), do teorema (1.6) de [K4]. A idéia é muito simples: (1.44) é do tipo de Volterra e pode, sob hipóteses convenientes, ser resolvida por métodos convencionais (veja ([**H**])). Prova-se então que sua única solução $W(t,r)$ satisfaz a relação (1.36).

Antes de dar início a implementação da idéia descrita acima convém introduzir algumas definições. Se X_1 X_2 são espaços de Banach sejam $L_*^\infty([0,T]; B(X_1, X_2))$ a coleção de todas as classes de equivalência de funções fortemente mensuráveis (i.e., $t \mapsto F(t)x \in X_2$ é fortemente mensurável para todo $x \in X_1$) e limitadas de I em $\mathcal{B}(X_1, X_2)$ e $\mathrm{Lip}_*([0,T]; \mathcal{B}(X_1, X_2))$ o conjunto das funções que são integrais indefinidas de funções em $L^\infty_*([0,T]; \mathcal{B}(X_1, X_2))$, (i.e. $F \in \mathrm{Lip}_*([0,T]; \mathcal{B}(X_1, X_2))$ se e só se $\partial_t F \in L^\infty_*([0,T]; \mathcal{B}(X_1, X_2))$. Com esta notação podemos apresentar a

Hipótese (H.5). *Existe uma família $t \in [0,T] \mapsto S(t)$ de isomorfismmos de Y em X tal que,*

$$S(t)A(t)S(t)^{-1} = A(t) + Q(t), \qquad t \in [0,T] \tag{1.45}$$

$$S \in Lip_*([0,T]; \mathcal{B}(Y, X)) \tag{1.46}$$

$$Q \in L^\infty_*([0,T]; \mathcal{B}(X)) \tag{1.47}$$

onde a relação (1.45) deve ser interpretada de maneira estrita, isto é, se $\phi \in Y$ então $S(t)^{-1}\phi \in D(A(t))$, $A(t)S(t)^{-1}\phi \in Y$ e vale a igualdade $S(t)A(t)S(t)^{-1}\phi =$ $= A(t)\phi + Q(t)\phi$.

Exercício (1.7). *Prove que (H.5) implica (H.3) e (H.4).*

Agora estamos em posição de enunciar e provar o teorema principal desta seção, a saber

Teorema (1.8). *Suponha (H.1), (H.2) e (H.5). Então o operador de evolução construído no teorema (1.4) satisfaz*

$$\partial_t U(t,s)\phi = -S(t)U(t,s)\phi, \qquad \phi \in Y \tag{1.48}$$

Demonstração: Seja $\psi \in X$. Tendo em vista a hipótese (H.5) e aplicando os métodos habituais de solução de equações do tipo de Volterra obtém-se uma única família fortemente contínua $(t,t') \in \{0 \leq r \leq t \leq T\} \to W(t,t') \in \mathcal{B}(X)$ de operadores lineares satisfazendo,

$$W(t,r)\psi = U(t,r)\psi - \int_r^t dt' W(t,t')(Q(t') - C(t'))U(t',r)\psi \tag{1.49}$$

Resta provar que $W(t,r)$ satisfaz (1.36). Para isso observe em primeiro lugar que $t \in [0,T] \mapsto S(t)^{-1} \in \mathcal{B}(X,Y)$ pertence a $\mathrm{Lip}_*([0,T];\mathcal{B}(Y,X))$ e sua derivada é dada por

$$\partial_t S(t)^{-1} = -S(t)^{-1}(\partial_t S(t))S(t)^{-1} \tag{1.50}$$

para quase todo $t \in [0,T]$. De fato, como $t \in [0,T] \mapsto S(t) \in \mathcal{B}(Y,X)$ é de Lipchitz, é fácil provar que o mesmo é verdade para $t \in [0,T] \mapsto S(t)^{-1} \in \mathcal{B}(X,Y)$. A afirmação segue então da fórmula

$$\frac{S(t+h)^{-1} - S(t)^{-1}}{h} = S(t+h)^{-1}\left[\frac{S(t) - S(t+h)}{h}\right] S(t)^{-1} \tag{1.51}$$

tomando o limite quando $h \to 0$.

Seja

$$P(t,r) = U(t,r)S(r)^{-1}, \qquad 0 \leq r \leq t \leq T \tag{1.52}$$

Vamos provar que $P(t,r)$ e $S(t)^{-1}W(t,r)$ são soluções da mesma equação de Volterra e portanto iguais. Passando da palavra à ação, seja $\psi \in X$. Então,

$$\begin{aligned}
\partial_{t'} P(t,t')\psi &= (\partial_{t'} U(t,t'))S(t')^{-1}\psi + U(t,t')\partial_{t'} S(t')^{-1}\psi \\
&= U(t,t')A(t')S(t')^{-1}\psi - U(t,t')S(t')^{-1}(\partial_t S(t'))S(t')^{-1}\psi \\
&= U(t,t')S(t')^{-1}S(t')A(t')S(t')^{-1}\psi - U(t,t')S(t')^{-1}C(t')\psi
\end{aligned} \tag{1.53}$$

onde $C(t)$ é o operador definido em (1.40). Mas se $\psi \in Y$ então $S(t)A(t)S(t)^{-1}\psi =$ $= A(t)\psi + Q(t)\psi$ por (H.5). Portanto,

$$\partial_{t'} P(t,t')\psi = P(t,t')[A(t') + Q(t') - C(t')]\psi \tag{1.54}$$

qualquer que seja $\psi \in Y$. Agora, seja $\{A_n(t)\}$ a família de aproximação definidas em (1.6) e $U_n(t,t')$ os propagadores associados. Como sabemos, $U_n(t,t')(Y) \subseteq Y$ e se $\psi \in Y$ então

$$\partial_{t'} U_n(t,t')\psi = -U_n(t,t')A_n(t')\psi \tag{1.55}$$

exceto em um número finito de pontos em $[0,T]$. Portanto,

$$\begin{aligned} \partial_{t'} P(t,t')U_n(t',r)\psi &= (\partial_{t'} P(t,t'))U_n(t,t')\psi + P(t,t')\partial_{t'} U_n(t',r)\psi \\ &= P(t,t')[A(t') + Q(t') - C(t') - A_n(t')]U_n(t',r)\psi \end{aligned} \tag{1.56}$$

Integrando em relação a t' de $t' = r$ até $t' = t$ obtém-se,

$$\begin{aligned} &P(t,t)U_n(t,r)\psi - P(t,r)\psi = \\ &= \int_r^t P(t,t')[A(t') + Q(t') - C(t') - A_n(t')]U_n(t',r)\psi dt' \end{aligned} \tag{1.57}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &S(t)^{-1}U_n(t,r)\psi - P(t,r)\psi = \\ &= \int_r^t P(t,t')[A(t') + Q(t') - C(t') - A_n(t')]U_n(t',r)\psi dt' \end{aligned} \tag{1.58}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ segue que,

$$S(t)^{-1}U(t,r)\psi - P(t,r)\psi = \int_r^t P(t,t')[Q(t') - C(t')]U(t',r)\psi dt' \tag{1.59}$$

Multiplicando (1.49) por $S(t)^{-1}$ e comparando o resultado com (1.59) conclui-se imediatamente que $P(t,r)\psi$ e $S(t)^{-1}W(t,r)\psi$, $\psi \in Y$, são soluções da mesma equação de Volterra. Isto encerra a demonstração.

∎

Antes de prosseguir convém notar os exercícios abaixo dos quais faremos uso adiante.

Exercício (1.9). *Seja $A: D(A) \subseteq X \to X$ um operador fechado, densamente definido. Um cerne de A é um subespaço Z de X tal que $\overline{A|_Z} = A$ (onde $\overline{V}$ denota o fecho do operador fechável V; veja* [**RS**] *vol. I).*

a) Prove que $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ são cernes para o operador H_0 definido por

$$\begin{cases} D(H_0) = H^2(\mathbf{R}^n) \\ H_0 f = -\Delta f \end{cases} \tag{1.60}$$

com o laplaciano calculado no sentido das distribuições.

b) Sejam X e Y espaços de Banach e suponha que Y está contido em X densa e continuamente. Seja $S: Y \to X$ um isomorfismo. Prove que $AS^{-1}\phi - S^{-1}A\phi = Q\phi$, $Q \in \mathcal{B}(X)$ para todo ϕ em um cerne de A então $SAS^{-1} = A + Q$ no sentido estrito i.e., se $\psi \in D(A)$ então $S^{-1}\psi \in D(A)$ e vale a igualdade $SAS^{-1}\psi = A\psi + Q\psi$, (veja [**K3**] *página 257).*

Exercício (1.10). *Prove que o operador de evolução construído sob as hipóteses do teorema (1.8) satisfaz*

$$\|U(t,t')\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M e^{\beta(t-t')} \tag{1.61}$$

$$\begin{aligned} \|U(t,t')\|_{B(Y)} &\leq \tilde{M} e^{\tilde{\beta}(t-t')} \\ &\leq \|S\|_{\infty,\mathcal{B}(Y,X)} \left\|S^{-1}\right\|_{\infty,\mathcal{B}(Y,X)} M \exp[(\beta + M\|D\|_{\infty,\mathcal{B}(X)})T] \end{aligned} \tag{1.62}$$

onde $D(t) = Q(t) - C(t)$, $C(t) = (\partial_t S)S^{-1}$ e $\|G\|_{\infty,Z} = \sup\{\|G(t)\|_Z \mid t \in [0,T]\}$, $G: [0,T] \to Z$, Z de Banach.

(**Sugestão:** *Para provar (1.62) combine (1.37), (1.44) e a desigualdade de Gronwall.)*

2. A Equação Não Homogênea

O objetivo desta seção consiste em provar que o problema de Cauchy associado à equação (L), a saber,

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} \partial_t u + A(t)u = f(t) \\ u(0) = \phi \end{cases}$$

é bem posto. No que se segue suporemos sempre que $A(t)$ satisfaz as hipóteses do teorema (1.8) deste capítulo. Sob estas condições podemos construir o operador evolução de $U(t,s)$ associado a $A(t)$ e aplicar o método da variação dos parâmetros para obter, pelo menos formalmente,

$$\text{(2.2)} \qquad u(t) = U(t,0)\phi + \int_0^t U(t,t')f(t')dt'$$

Observe que (2.2) faz sentido qualquer que seja $f \in L^1([0,T];X)$ e sob essa condição será chamada uma *solução amena* ("mild solution") de (2.1). No entanto, a função definida em (2.2) pode não ser diferenciável em relação a t, de modo que para obter (2.1) no sentido em que estamos interessados (i.e. com $\partial_t u$ calculada em relação à topologia de X), é preciso introduzir hipóteses adicionais sobre f. Em primeiro lugar,

Exercício (2.1). *a) Suponha que $f \in L^1([0,T];X)$, $\phi \in X$ e seja $u(t)$, $t \in [0,T]$ a função definida em (2.2). Prove que $u \in C([0,T];X)$ e*

$$\text{(2.3)} \qquad \|u\|_{\infty,X} \leq \|U\|_{\infty,X}\left(\|\phi\|_X + \|f\|_{1,X}\right)$$

onde $\|\cdot\|_{\infty,X}$ denota o supremo tomado sobre as variáveis temporais em $[0,T]$ em relação à topologia de X enquanto $\|\cdot\|_{1,X}$ representa a norma $L^1([0,T];X)$.

b) Mostre que se $\phi \in Y$ e $f \in L^1([0,T];Y)$ então $u \in C([0,T];Y)$ e vale a estimativa

$$\text{(2.4)} \qquad \|u\|_{\infty,Y} \leq \|U\|_{\infty,Y}\left(\|\phi\|_Y + \|f\|_{1,Y}\right)$$

com a notação como em a) com X substituido por Y.

Finalmente,

Teorema (2.2). *Suponha que $\phi \in Y$ e $f \in C([0,T];X) \cap L^1([0,T];Y)$. Então $u \in C([0,T];Y) \cap C^1([0,T];X)$ solução de (2.2) satisfaz (2.1) e*

$$\|\partial_t u\|_{\infty,X} \leq \|f\|_{\infty,X} + \|A\|_{\infty,Y,X} \|u\|_{\infty,Y} \tag{2.5}$$

onde

$$\|A\|_{\infty,Y,X} = \sup_{[0,T]} \|A(t)\|_{B(Y,X)} \tag{2.6}$$

Demonstração: Como $v(t) = U(t,0)\phi$ satisfaz a equação homogênea com condição inicial ϕ, basta provar que

$$\omega(t) = \int_0^t U(t,t')f(t')dt' \tag{2.7}$$

é solução de (2.1) com ϕ substituída por zero. De (2.7) é claro que $\omega(0) = 0$. Resta calcular $\partial_t \omega(t)$. Para isso observe que para $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\omega(t+h) - \omega(t)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} U(t+h,t')f(t')dt' - \int_0^t U(t,t')f(t')dt'\right] \\
&= \int_0^t \frac{U(t+h,t') - U(t,t')}{h} f(t)dt' + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} U(t+h,t')f(t')dt' \\
&= \int_0^T \chi_{[0,t]}(t') \frac{U(t+h,t') - U(t,t')}{h} f(t')dt' \\
&\quad + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} U(t+h,t')f(t')dt'
\end{aligned} \tag{2.8}$$

onde χ_A denota a função característica do conjunto A. O teorema da convergência dominada implica então que o primeiro termo do último membro de (2.8) tende a $(-A(t)\omega(t))$

enquanto o segundo converge a $f(t)$ por ser o valor médio de uma função continua no intervalo $[t, t+h]$. Argumento análogo logo vale para $h < 0$. Portanto $\omega(t)$ satisfaz a equação diferencial (2.1). A verificação de (2.5) é fácil e será deixada a cargo do leitor.

∎

Vamos passar agora ao estudo da dependência da solução de (2.1) tanto no dado inicial como nos coeficientes da equação. Considere

$$\begin{cases} \partial_t u^\# = -A^\#(t)u^\# + f^\#(t) \\ u^\#(0) = \phi^\# \end{cases} \tag{2.9}$$

com $t \in [0, T]$. Suponha que as condições do teorema (1.8) da seção 1 são satisfeitas por $A^\#(t)$ com os mesmos Y e S e seja $U^\#(t,s)$ o operador de evolução associado. Em primeiro lugar temos o

Teorema (2.3). *Sejam $\phi \in Y$, $\phi^\# \in X$, $f \in L^1([0,T];Y)$ $f^\# \in L^1([0,T];X)$ e $u, u^\#$ as soluções amenas correspondentes (veja o comentário que segue (2.2)). Então*

$$\left\|u^\# - u\right\|_{\infty,X} \leq \left\|U^\#\right\|_{\infty,X} \left\{\left\|\phi^\# - \phi\right\|_X + \left\|f^\# - f\right\|_{1,X} + \left\|(A^\# - A)u\right\|_{1,X}\right\} \tag{2.10}$$

Demonstração: Observe que podemos escrever

$$\begin{cases} u^\#(t) - u(t) = v_1(t) + v_2(t) \\ v_1(t) = U^\#(t,0)\phi^\# - U^\#(t,0)\phi + \displaystyle\int_0^t U^\#(t,t')(f^\#(t') - f(t'))dt' \\ v_2(t) = (U^\#(t,0) - U(t,0))\phi + \displaystyle\int_0^t (U^\#(t,t') - U(t,t'))f(t')dt' \end{cases} \tag{2.11}$$

Agora, é fácil ver que se $t \in [0, T]$ então

$$\|v_1(t)\|_X \leq \left\|U^\#\right\|_{\infty,X} \left[\left\|\phi - \phi^\#\right\|_X + \left\|f - f^\#\right\|_{1,X}\right] \tag{2.12}$$

Resta portanto estimar $v_2(t)$. Derivando $U^{\#}(t,t')U(t',r)\psi$, $\psi \in Y$, em relação a t', utilizando as equações (homogêneas) satisfeitas por $U^{\#}(t,t')$ e $U(t',r)$ e integrando de $t' = r$ a $t' = t$ obtém-se

$$U(t,r)\psi - U^{\#}(t,r)\psi = \int_r^t U^{\#}(t,t')(A^{\#}(t') - A(t'))U(t',r)\psi dt' \tag{2.13}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \int_0^t U^{\#}(t,s)(A^{\#}(s) - A(s))U(s,0)\psi ds \\ &+ \int_0^t dt' \int_{t'}^t ds U^{\#}(t,s)(A^{\#}(s) - A(s))U(s,t')f(t') \end{aligned} \tag{2.14}$$

Trocando a ordem de integração na segunda integral em (2.14) obtém-se,

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \int_0^t ds U^{\#}(t,s)(A^{\#}(s) - A(s)) \left[U(s,0)\phi + \int_0^s U(s,t')f(t')dt'\right] \\ &= \int_0^t ds U^{\#}(t,s)(A^{\#}(s) - A(s))u(s) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Portanto

$$\|v_2(t)\|_X \leq \left\|U^{\#}\right\|_{\infty,X} \left\|(A^{\#} - A)u\right\|_{1,X}, \qquad t \in [0,T] \tag{2.16}$$

Isto encerra a demonstração.

∎

Corolário (2.4). *Sejam $\phi \in Y$, $f \in L^1([0,T];Y)$. Então (2.1) tem no máximo uma solução.*

Demonstração: O resultado segue imediatamente do teorema anterior tomando $\phi = \phi^{\#}$, $f = f^{\#}$ e $A = A^{\#}$.

∎

Daqui por diante vamos supor, por simplicidade, que o isomorfismo $S(t)$ não depende do tempo, ou seja, $S(t) = S$ é constante. Versões mais gerais dos resultados abaixo podem ser encontradas em [**K4**]. Em primeiro lugar temos o seguinte resultado perturbativo,

Teorema (2.5). *Sejam $\phi, \phi^{\#} \in Y$, $f, f^{\#} \in L^1([0,T];Y)$ e $u, u^{\#}$ as soluções correspondentes de (2.1). Então,*

$$\begin{aligned}\|u^{\#} - u\|_{\infty,Y} \leq K^{\#} &\left[\|\phi^{\#} - \phi\|_Y + \|f^{\#} - f\|_{1,Y} + \|(Q^{\#} - Q)Su\|_{1,X}\right] \\ &+ \|h\|_{\infty,X}\end{aligned} \tag{2.17}$$

onde a constante $K^{\#}$ depende apenas de $\|U^{\#}\|_{\infty,X}$, $\|Q^{\#}\|_{\infty,X}$ e

$$\begin{cases} h(t) = (U^{\#}(t,0) - U(t,0))S\phi + \int_0^t ds[U^{\#}(t,s) - U(t,s)]g(s) \\ g(s) = Sf(s) - Q(s)Su(s) \end{cases} \tag{2.18}$$

Demonstração: Lembremos que

$$\|u^{\#}(t) - u(t)\|_Y = \|Su^{\#}(t) - Su(t)\|_X \tag{2.19}$$

Como $S = Su(t)$ é solução de

$$\begin{cases} \partial_v = -A(t)v + F(t) \\ v(0) = S\phi \end{cases} \tag{2.20}$$

onde $F(t) = -Q(t)Su(t) + Sf(t)$, segue que

$$Su(t) = U(t,0)S\phi + \int_0^t U(t,s)[-Q(s)Su(s) + Sf(s)]ds \tag{2.21}$$

Analogamente, temos

$$Su^{\#}(t) = U^{\#}(t,0)S\phi^{\#} + \int_0^t U^{\#}(t,s)[-Q^{\#}(s)Su^{\#}(s) + Sf^{\#}(s)]ds \tag{2.22}$$

Assim, de (2.21), (2.22) segue

$$\begin{aligned}
Su^{\#} - Su(t) &= U^{\#}(t,0)(S\phi^{\#} - S\phi) \\
&+ (U^{\#}(t,0) - U(t,0))S\phi + \int_0^t (U^{\#}(t,s) - U(t,s))(-Q(s)Su(s))ds \\
&+ \int_0^t U^{\#}(t,s)Q(s)Su(s)ds - \int_0^t U^{\#}(t,s)Q^{\#}(s)Su^{\#}(s)ds \\
&+ \int_0^t U^{\#}(t,s)[Sf^{\#}(s) - Sf(s)]ds + \int_0^t (U^{\#}(t,s) - U(t,s))Sf(s)ds \\
&= U^{\#}(t,0)(S\phi^{\#} - S\phi) + h(t) + \int_0^t U^{\#}(t,s)[Sf^{\#}(s) - Sf(s)]ds \\
&+ \int_0^t U^{\#}(t,s)[Q(s) - Q^{\#}(s)]Su(s)ds + \int_0^t U^{\#}(t,s)Q^{\#}(s)[Su^{\#}(s) - Su(s)]ds
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\|Su^{\#}(t) - Su(t)\right\|_X &\le \left\|U^{\#}(t,0)\right\|_{B(X)} \left\|S(\phi^{\#} - \phi)\right\|_X + \|h(t)\|_X \\
&+ \int_0^t \left\|U^{\#}(t,s)\right\|_{B(X)} \left\|S(f^{\#}(s) - f(s))\right\|_X ds \\
&+ \int_0^t \left\|U^{\#}(t,s)\right\|_{B(X)} \left\|(Q(s) - Q^{\#}(s))Su(s)\right\|_X ds \\
&+ \int_0^t \left\|U^{\#}(t,s)\right\|_{B(X)} \left\|Q^{\#}(s)\right\|_{B(X)} \left\|Su^{\#}(s) - Su(s)\right\|_X ds \\
&\le \left\|U^{\#}\right\|_{\infty,X} \left\{\left\|\phi^{\#} - \phi\right\|_Y + \left\|f^{\#} - f\right\|_{1,Y} + \left\|(Q - Q^{\#})Su\right\|_{1,X}\right\} \\
&+ \|h\|_{\infty,X} + \left\|U^{\#}\right\|_{\infty,X} \left\|Q^{\#}\right\|_{\infty,X} \int_0^t \left\|Su^{\#}(s) - Su(s)\right\|_X ds
\end{aligned} \tag{2.24}$$

O resultado segue então da desigualdade de Gronwall.

∎

O teorema acima será utilizado no próximo capítulo para estabelecer a dependência contínua no dado inicial para a classe de equações alí consideradas. Além dele precisamos do teorema de convergência que se segue. Considere os problemas de Cauchy,

$$(\mathrm{L}^n) \qquad \partial_t u^n + A^n(t)u^n(t) = f^n(t), \qquad 0 \le t \le T, \quad u^n(0) = \phi^n$$

com $n = 1, 2, 3, \ldots$. Suponha que a família $\{A^n(t)\}_{n=1}^{0}$ satisfaz as condições (H.1). (H.2) e (H.5) uniformemente em n, i.e., os índices de estabilidade M, β de $\{A^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ podem ser escolhidos independentemente de n. Além disso, suponha também que $\left\{\|Q^n\|_{1,X}\right\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada e que X, Y e S são os mesmos para todos os (L^n). Segue imediatamente que os operadores de evolução $\{U^n(t,s)\}_{n=1}^{\infty}$ associados a $\{A^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ existem e são uniformemente limitados tanto em $\mathcal{B}(X)$ como em $\mathcal{B}(Y)$.

Teorema (2.6). *Além das hipóteses acima, suponha que*

$$(2.25) \qquad A^n(t) \xrightarrow{s} A(t) \text{ em } \mathcal{B}(Y,X), \qquad t \text{ q.t.p.}$$

$$(2.26) \qquad \lim_{|E|\to 0} \int_E \|A^n(t)\|_{\mathcal{B}(Y,X)}\, dt \longrightarrow \text{ uniformemente}$$

onde $\xrightarrow{s}$ *e* $|\cdot|$ *denotam a convergência forte e a medida de Lebesgue respectivamente. Então*

$$(2.27) \qquad U^n(t,r) \xrightarrow{s} U(t,r) \text{ em } \mathcal{B}(X)$$

uniformemente em relação a $0 \le r \le t \le T$. *Mais ainda, se* $\phi^n \to \phi$ *em* X *e* $f^n \to f$ *em* $L^1([0,T];Y)$ *segue que* $u^n \to u$ *em* $C([0,T];X)$ *onde* u^n *e* u *são as soluções de* (L^n) *e* (L).

Demonstração: Devido à limitação uniforme da família $\{U^n(t,r)\}_{n=1}^{\infty}$ mencionada acima basta provar que

$$U^n(t,r)\phi \longrightarrow U(t,r)\phi, \qquad \phi \in Y \tag{2.28}$$

em relação à topologia de X uniformemente em $0 \le r \le t \le T$. Derivando a quantidade $U^n(t,s)U(s,r)\phi$ em relação a s, utilizando (L^n) e (L) e integrando em relação a $s \in [r,t]$ obtém-se

$$U(t,r)\phi - U^n(t,r)\phi = -\int_r^t ds\; U^n(t,s)(A(s) - A^n(s))U(s,r)\phi \tag{2.29}$$

aplicando novamente a limitação uniforme da família $\{U^n(t,r)\}_{n=1}^{\infty}$ temos

$$\|U(t,r)\phi - U^n(t,r)\phi\|_X \le M \int_0^T ds\, \|(A(s) - A^n(s))U(s,r)\phi\|_X \tag{2.30}$$

mas

$$K = \{U(s,r)\phi \,|\, 0 \le s \le r \le T\} \tag{2.31}$$

é um conjunto compacto e portanto para provar (2.27) é suficiente mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T ds \sup_{\psi \in K} \|(A(s) - A^n(s))\psi\|_X = 0 \tag{2.32}$$

Combinando o teorema de convergência de Vitali ([**Ba**], página 76; note que convergência q.t.p. implica convergência em medida em espaços de medida finita) com o exercício (2.7) abaixo, obtém-se (2.28) e portanto (2.27). A segunda afirmação do teorema é uma consequência imediata da primeira e da fórmula (2.2).

∎

Exercício (2.7). *Seja* $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(Y,X)$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} P_n\phi$ *existe para toda* $\phi \in Y$. *Denote o limite por* $P\phi$ *e prove que* *a) existe $M \in (0, \infty)$ tal que $\|P_n\|_{B(Y,X)} \leq M$;*

b) $P \in B(Y, X)$ e $\|P\|_{B(Y,X)} \leq M$;

c) $P_n\phi \to P\phi$ uniformemente em compactos.

(**Sugestão:** Para provar c) cubra o compacto por um número finito de bolas com centros ϕ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ e aplique um "argumento de $\varepsilon/3$".)

Antes de passar ao próximo capítulo, convém notar que a teoria desenvolvida acima tem interesse próprio, independentemente da aplicação que dela faremos às equações de evolução quase-lineares. No entanto, como nosso interesse principal no presente texto é o estudo das equações não-lineares, deixaremos à cargo do leitor dedicado o estudo das várias aplicações que podem ser encontradas em **[I1]**, **[I3]**, **[I4]**, **[IM]**, **[K3]** e **[K6]**.

CAPÍTULO III

EQUAÇÕES QUASE-LINEARES

O objetivo deste capítulo consiste em estender, na medida do possível, a teoria desenvolvida anteriormente para as equações ditas quase-lineares, i.e., equações da forma

$$\text{(Q)} \qquad \partial_t u + A(t,u)u = f(t,u)$$

onde $A(t,u)$ é um operador linear para cada $t \in [0,T]$ e cada u e f é uma função dada (em geral não linear). Um exemplo que consideraremos em detalhe é a equação de Korteweg-de vries que pode ser escrita na forma (Q) definindo $A(t,u) = A(u) = \partial_x^3 + u\partial_x$ e $f(t,u) = 0$. Note que em cada caso particular a escolha de $A(t,u)$ e $f(t,u)$ não é única. O que deve fazer é procurar a maneira mais conveniente possível de aplicar a teoria descrita abaixo.

A idéia basica envolvida no que se segue é muito simples: para cada função $t \to v(t)$ em um certo espaço de Banach considera-se o problema de Cauchy linear

$$(\mathrm{L}^v) \qquad \begin{cases} \partial_t u + A(t,v(t))u = f(t,v(t)) \\ u(0) = \phi \end{cases}$$

Aplicando a teoria do capítulo anterior obtém-se uma aplicação $v \mapsto u_v$ onde u_v é a única solução de (L^v). Prova-se então que o espaço de Banach de funções mencionado acima pode ser escolhido de modo que a aplicação $v \mapsto u_v$ seja uma contração. Segue então que o ponto fixo encontrado é solução de (Q) com $u(0) = \phi$.

Antes de prosseguir cabe notar que a maior parte do que se segue é baseado nos artigos [**K5**] e [**K6**].

1. O Teorema de Existência e Unicidade

Nesta seção vamos nos limitar a enunciar e comentar o teorema básico deste capítulo. Sua demonstração será apresentada na seção 3 após a verificação detalhada das hipóteses feitas abaixo para o caso da KdV, esperando desta forma torná-las mais compreensíveis ao leitor mistificado. Considere então

Hipótese (X). *Sejam X e Y espaços de Banach reais, reflexivos com Y contido em X densa e continuamente. Existe um isomorfismo $S: Y \to X$. A norma de Y é escolhida de modo que S seja uma isometria, i.e.,*

$$\|\phi\|_Y = \|S\phi\|_X \tag{1.1}$$

Hipótese (A.1). *O operador linear $A(t,y)$ definido em $[0,T] \times W$ e fechável e seu fecho pertence a $G(X,1,\beta)$ onde W é uma bola aberta em Y e β é um número real. Em outras palavras, para cada $(t,y) \in [0,T] \times W$, $\overline{A}(t,y)$ gera um semi-grupo de classe C^0 tal que*

$$\|\exp(-s\overline{A}(t,y))\|_{B(X)} \leq e^{\beta s}, \qquad s \in [0,\infty) \tag{1.2}$$

Antes de prosseguir convém fazer alguns comentários. Como sabemos dado um semigrupo de classe C^0 fortemente contínuo $U(t)$ existem $M > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$ e um único operador fechado A (satisfazendo as condições do teorema de Hille-Yosida-Phillips) tal que $U(t)$ é gerado por $(-A)$ e $\|U(t)\|_{B(X)} \leq Me^{\beta t}$. Reciprocamente dado A fechado, satisfazendo as condições do teorema de Hille-Yosida-Phillips, então existem M, β e um único semigrupo $U(t) = e^{tA}$ tal que $\|U(t)\|_{B(X)} \leq Me^{t\beta}$. A coleção de todos os operadores A tais que $(-A)$ gera um semigrupo de classe C^0 satisfazendo $\|U(t)\|_{B(X)} \leq Me^{\beta t}$ será denotada por $G(X,M,\beta)$. Se $A \in G(X,1,0)$, i.e., $(-A)$ gera um semi-grupo de contração, A é dito um operador *acretivo maximal* (ou *m-acretivo*). Se $A \in G(X,1,\beta)$

(i.e. $\|U(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \le e^{t\beta}\ \forall\, t \in [0,\infty)$) A é dito *quase-acretivo maximal* (ou *quase-m-acretico*). Se X é um espaço de Hilbert (o que será o caso nas aplicações feitas abaixo), é possível provar que $A \in G(X,1,\beta)$ se e só se as seguintes condições são satisfeitas

a) $(A\phi|\phi)_X \ge -\beta \|\phi\|_X^2, \quad \phi \in D(A)$;

b) $(A+\lambda)$ é sobre para algum $\lambda > \beta$ (ou equivalentemente para todo $\lambda > \beta$).

Cabe notar que a) e b) expressam respectivamente a quase-acretividade e a maximalidade. Note que a hipótese (A.1) diz que a família de operadores $A(t,y), t,y \in [0,T] \times W$ é uniformemente acretivo. Para maiores informações sobre os comentários acima recomendamos **[EE]**,**[K7]** e**[RS]** vol. II.

Hipótese (A.2). *Para cada par $(t,y) \in [0,T] \times W$ temos*

$$(1.3) \qquad \begin{cases} SA(t,y)S^{-1} = A(t,y) + Q(t,y) \\ Q(t,y) \in \mathcal{B}(X), \quad \|Q(t,y)\|_{\mathcal{B}(X)} \le \lambda_1 \end{cases}$$

onde $\lambda_1 > 0$ é uma constante. A igualdade em (1.3) deve ser encarada no sentido estrito, i.e., $x \in D(A(t,y)) \Leftrightarrow S^{-1}x \in D(A(t,y))$ e $A(t,y)S^{-1}x \in Y$.

Hipótese (A.3). *Para cada $(t,y) \in [0,T] \times W$ temos $A(t,y) \in \mathcal{B}(Y,X)$ no sentido que*

$$(1.4) \qquad \begin{cases} Y \subseteq D(A(t,y)) \qquad \forall (t,y) \in [0,T] \times W \\ A(t,y)\big|_Y \in \mathcal{B}(Y,X) \end{cases}$$

Além disso, para cada $y \in W$ fixo a função $t \in [0,T] \to A(t,y)$ pertence a $C([0,T];\mathcal{B}(Y,X))$. Para cada $t \in [0,T]$ a aplicação $y \mapsto A(t,y)$ é de Lipschitz no sentido que

$$(1.5) \qquad \|A(t,y) - A(t,z)\|_{\mathcal{B}(Y,X)} \le \mu_1 \|y-z\|_X$$

onde $\mu_1 \ge 0$ é uma constante.

Hipótese (A.4). *Seja y_0 o centro de W. Então $A(t,y)y_0 \in Y$ para todo $(t,y) \in [0,T] \times W$ e vale*

$$\|A(t,y)y_0\|_Y \leq \lambda_2, \qquad t \in [0,T] \tag{1.6}$$

Hipótese (f.1). *$f\colon [0,T] \times W \to Y$ é limitada,*

$$\|f(t,y)\|_Y \leq \lambda_3, \qquad t \in [0,T], \qquad y \in W \tag{1.7}$$

Para cada $y \in W, t \mapsto f(t,y)$ é contínua de $[0,T]$ em X enquanto que para cada $t \in [0,T]$ a aplicação $y \in W \mapsto f(t,y)$ é Lipschitz em X i.e.,

$$\|f(t,y) - f(t,z)\|_X \leq \mu_2 \|y - z\|_X \tag{1.8}$$

onde $\mu_2 \geq 0$ uma constante.

Agora podemos enunciar o tão esperado teorema de existência e unicidade. Temos

Teorema (1.1). *Suponha que as hipóteses (X), (A.1)-(A.4) e (f.1) são satisfeitas. Então se $\phi \in W$ existem $T' \in (0,T]$ e uma única $u \in C([0,T'];Y) \cap C^1([0,T];X)$ tal que $u(0) = \phi$.*

Como mencionado na introdução a demonstração do resultado que acabamos de enunciar será feita na seção 3, após a verificação detalhada das hipóteses feitas no caso da KdV com uma escolha bastante simples para os espaços X e Y. Antes porém é conveniente introduzir alguns comentários adcionais. Em primeiro lugar observe que (A.4) é satisfeita trivialmente se $y_0 = 0$. Alem disso, em muitos casos $A(t,y)$ está definido para todo $y \in Y$ de modo que W pode ser escolhido como sendo uma bola arbitráriamente grande centrada na origem. A valor das constantes $\beta, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ dependerá em geral do raio da bola em questão. Deve-se notar também que uma condição suficiente para (1.3) é

$$\left\|(SA(t,y) - A(t,y)S)S^{-1}\omega\right\|_X \leq \lambda_1 \|\omega\|_X \tag{1.9}$$

para todo ω pertencente a um cerne de $A(t, y)$ que pode, naturalmente, depender de t e y (veja o exercício (1.9) do capítulo II).

Finalmente, cabe observar que o teorema (1.1) é bastante simples e algumas hipóteses muito restritivas como a quase-acretividade maximal uniforme (em bolas) e a reflexividade dos espaços X e Y podem ser relaxadas. O leitor industrioso deve consultar a seção 11 de **[K5]** assim como **[HKM]** e **[K8]**.

2. KdV em $H^s(\mathbf{R}); s \geq 3$

Nesta seção vamos considerar o problema de Cauchy

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} \partial_t u = -\partial_x^3 u + u\partial_x u \\ u(0) = \phi \in H^s(\mathbf{R}), \qquad s \geq 3 \end{cases}$$

Note que neste caso não é possível resolver o problema de maneira tradicional i.e., reduzir (2.1) a uma equação integral e aplicar o teorema do ponto fixo de Banach. De fato é fácil verificar que (2.1) é, pelo menos formalmente, equivalente a

$$\text{(2.2)} \qquad u(t) = \mathrm{e}^{-t\partial_x^3}\phi - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-t')\partial_x^3}(u\partial_x u)(t')dt'$$

Agora, se $u \in C([0,T], H^s(\mathbf{R}))$ então $u\partial_x u = \partial_x \frac{u^2}{2} \in C([0,T];\ H^{s-1}(\mathbf{R}))$ e $\exp\left(-(t-t')\partial_x^3\right)$ leva $H^{s-1}(\mathbf{R})$ em si prórpio e não em $H^s(\mathbf{R})$ (verifique!). Consequentemente a aplicação

$$\text{(2.3)} \qquad (Af)(t) = \mathrm{e}^{-t\partial_x^3}\phi - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-t')\partial_x^3}(f\partial_x f)(t')dt'$$

não transforma $C([0,T]; H^s(\mathbf{R})$ em si mesmo de modo que o teorema do ponto fixo de Banach não pode ser aplicado. No próximo capítulo introduziremos um método de solução diferente que, a custa de bastante trabalho adcional, permite reabilitar parcialmente o "método tradicional".

No que se segue verificaremos as hipóteses do teorema (1.1) em detalhe apenas se $s = 3$. O problema em $H^s(\mathbf{R})$, $s > 3$ será deixado a cargo do leitor (veja o problema (2.4) no final desta seção). Na verdade, o teorema (1.1) pode ser utilizado para resolver (2.1) supondo apenas $s > \frac{3}{2}$. Isto requer no entanto muito mais trabalho. O leitor interessado deve consultar [**K2**]. Uma justificativa adcional para a omissão do intervalo $\frac{3}{2} < s < 3$ é fato que está situação será estudada no próximo capítulo onde utilizaremos, como já mencionado, um método diferente para resolver (2.1).

Passemos então a verificação das condições do teorema (3.1) no caso $s = 3$.

Hipótese (X). *Sejam $Y = H^3(\mathbf{R})$ e $X = L^2(\mathbf{R})$. Então é claro que Y está contido densa e continuamente em X. Além disso*

$$S = (1 - \partial_x^2)^{3/2} \tag{2.4}$$

é um isomorfismo de Y em X e de fato uma isometria com a escolha da norma

$$\|\phi\|_3^2 = \left\|(1 - \partial_x^2)^{3/2}\phi\right\|_0^2 \tag{2.5}$$

Hipótese (A.1). *Seja*

$$A(y) = \partial_x^3 + y\partial_x \tag{2.6}$$

de modo que (2.1) toma a forma

$$\begin{cases} \partial_t u + A(u)u = 0 \\ u(0) = \phi \end{cases} \tag{2.7}$$

Vamos utilizar um argumento perturbativo para provar que $A(y)$ é quase-m-acretivo para todo $y \in H^3(\mathbf{R})$. Considere o operador

$$A_0 = \partial_x^3 \tag{2.8}$$

definido em $Y = H^s(\mathbf{R})$. Então $A_0(Y) \subseteq X$ e $\Sigma(A_0) = i\mathbf{R}$ (onde $\Sigma(T)$ denota o aspecto do operador linear T). Além disso A_0 gera um grupo unitário em $L^2(\mathbf{R})$ dado por,

$$U_0(t)\phi = e^{-t\partial_x^3}\phi = (e^{it\xi^3}\hat{\phi})^\vee \tag{2.9}$$

Agora, seja $B(y)$ o operador definido por

$$\begin{cases} D(B(y)) = \{\phi \in X | y\partial_x\phi \in X\} \\ B(y)\phi = y\partial_x\phi, \quad \phi \in D(B(y)) \end{cases} \tag{2.10}$$

onde $y \in Y$. É claro que $D(A_0) \subseteq D(B(y))$. Em primeiro lugar termos,

Lema (2.1). *O operador $B(y), y \in Y$, é A_0-limitado com A_0-cota igual a zero.*

Demonstração: Note que se $\phi \in D(A_0)$ então

$$\|y\partial_x\phi\|_0 \leq \|y\|_{L^\infty} \|\partial_x\phi\|_0 \leq C\|y\|_3 \|\partial_x\phi\|_0 \tag{2.11}$$

onde $C > 0$ é uma constante. Portanto para todo $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \|y\partial_x\phi\|_X &\leq C\|y\|_3 \left\|\partial_x(\partial_x^3+\lambda)^{-1}(\partial_x^3+\lambda)\phi\right\|_X \\ &\leq C\|y\|_3 \left\|\partial_x(\partial_x^3+\lambda)^{-1}\right\|_{B(X)} \left\|(\partial_x^3+\lambda)\phi\right\|_X \end{aligned} \tag{2.12}$$

Como indicado em (2.12) o operador $\partial_x(\partial_x^3+\lambda)^{-1}$ é limitado em X. Para nossos propósitos é importante obter uma estimativa de sua norma. Seja $\psi \in X$. Então,

$$\begin{aligned} \left\|\partial_x(+\partial_x^3+\lambda)^{-1}\psi\right\|_X^2 &= \int_{\mathbf{R}} \left|\frac{\xi}{-i\xi^3+\lambda}\right|^2 \left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leq \sup_\xi \left|\frac{\xi}{-i\xi^3+\lambda}\right| \|\psi\|_X^2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Mas

$$\begin{aligned} \left|\frac{\xi}{-i\xi^3+\lambda}\right|^2 &= \frac{\xi}{-i\xi^3+\lambda}\frac{\xi}{(+i\xi^3)+\lambda} = \frac{+\xi^2}{(i\xi^3+\lambda)(-i\xi^3+\lambda)} \\ &= \frac{+\xi^2}{-(i\xi^3)^2+\lambda^2} = \frac{\xi^2}{\xi^6+\lambda} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Sejam $r = \xi^2$ e $\alpha(r) = \frac{r}{r^3+\lambda}$. Então,

$$\alpha'(r) = \frac{(r^3+\lambda) - 3r^2.r}{(r^3+\lambda)^2} = \frac{-2r^3+\lambda}{(r^3+\lambda)^2} \tag{2.15}$$

Portanto $\alpha(r)$ tem máximo (global) em $r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{\lambda}{2}}$. Consequentemente,

$$\left|\frac{\xi}{i\xi^3 - \lambda}\right|^2 \leq \alpha(r_{\max}) = \frac{\sqrt[3]{\lambda/2}}{\frac{\lambda}{2}+\lambda} = \frac{C}{\lambda^{2/3}} \tag{2.16}$$

Combinando (2.16) e (2.12) segue que,

$$\|y\partial_x\phi\|_X \leq C\,\|y\|_3\left(\frac{1}{\lambda^{1/3}}\,\|A_0\phi\|_X + \lambda^{2/3}\,\|\phi\|_X\right) \tag{2.17}$$

Esta desigualdade conclui a demonstração.

∎

Corolário (2.2). $\left\|y\partial_x(A_0+\lambda)^{-1}\right\|_{B(X)} \to 0$ *quando* $\lambda \to +\infty$.

Demonstração: Note que por (2.12), (2.13) e (2.16) temos que

$$\begin{aligned}
\left\|y\partial_x(A_0+\lambda)^{-1}\psi\right\|_X &= \left\|y\partial_x(\partial_x^3+\lambda)^{-1}\psi\right\|_X = \|y\partial_x\phi\|_X \\
&\leq C\,\|y\|_3\left\|(\partial_x^3+\lambda)\phi\right\|_X\lambda^{-1/3} \\
&= C\,\|y\|_3\,\|\psi\|_X\,\lambda^{-1/3}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Portanto $\left\|y\partial_x(A_0+\lambda)^{-1}\right\|_X \leq C\,\|y\|_3\,\lambda^{-1/3}$ e o corolário está provado.

∎

Lema (2.3). *O operador* $A(y) = \partial_x^3 + y\partial_x$ *é quase-m-acretivo.*

Demonstração: Basta provar que

$$(A(y)\phi|\phi)_X \geq -\beta\,\|\phi\|_X^2 \text{ para algum } \beta > 0 \tag{2.19}$$

(2.20) $$(A(y)+\lambda) \text{ sobre para algum } \lambda > \beta$$

Para provar (2.19) note que

$$\begin{aligned}(A(y)\phi|\phi)_X &= (A_0\phi|\phi)_0 + (y\partial_x\phi|\phi)_0 \\ &= (\partial_x^3\phi|\phi)_0 + (y\partial_x\phi|\phi)_0 = (y\partial_x\phi|\phi)_0\end{aligned} \tag{2.21}$$

pois ∂_x é antisimétrico e todas as funções envolvidas são reais.

Mas,

$$(y\partial_x\phi|\phi)_0 = \int_{\mathbf{R}^3} y\frac{\partial_x\phi^2}{2} = -\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_x y)\frac{\phi^2}{2} \geq \frac{-\|\partial_x y\|_{L^\infty}}{2}\|\phi\|_X^2 \tag{2.22}$$

Tome $\beta = \frac{1}{2}\|\partial_x y\|_{L^\infty}$ (ou $\beta = \frac{\|y\|_3}{2}$; note que a estimativa obtida é uniforme em bolas). Para provar (2.20) observe que,

$$A(y)+\lambda = A_0 + y\partial_x + \lambda = (1 + y\partial_x(A_0+\lambda)^{-1})(A_0+\lambda) \tag{2.23}$$

Como $(A_0+\lambda)$ é inversível $\forall\ \lambda > 0$ basta provar que $(1 + y\partial_x(A_0+\lambda)^{-1})$ é inversível. Mas isto é verdade para todo λ suficientemente grande devido ao corolário (2.2) e à série de Neumann.

∎

Isto encerra a verificação de (A.1).

Hipótese (A.2). *Seja $\phi \in H^3(\mathbf{R})$. Então existe uma única $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ tal que $\phi = (1-\partial_x^2)^{-3/2}\psi$. Portanto,*

$$A(y)S^{-1}\phi = A_0S^{-1}\phi + y\partial_x S^{-1}\phi \tag{2.24}$$

Mas, $y\partial_x S^{-1}\phi = y\partial_x S^{-2}\varphi = y\partial_x(1-\partial_x^2)^{-3}\psi$ de modo que $(1-\partial_x^2)^{-3}\psi \in H^6(\mathbf{R})$, $\partial_x(1-\partial_x^2)^{-3}\psi \in H^5(\mathbf{R}) \hookrightarrow H^3(\mathbf{R})$ e portanto $y\partial_x(1-\partial_x^2)^{-3}\psi \in H^3(\mathbf{R}) = y$ pois $H^3(\mathbf{R})$

é uma algebra de Banach. Além disso é fácil ver que $A_0 S^{-1}\phi = S^{-1}A_0\phi$ para todo $\phi \in H^3(\mathbf{R})$ de modo que o lado direito de (2.24) pertence a $H^3(\mathbf{R})$. Consequentemente o lado esquerdo tem a mesma propriedade.

Segue então que

$$
\begin{aligned}
SA(y)S^{-1}\phi &= A_0\phi + Sy\partial_x S^{-1}\phi \\
&= A(y)\phi + Sy\partial_x S^{-1}\phi - y\partial_x SS^{-1}\phi \\
&= A(y)\phi + Q(y)\phi
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

onde $Q(y) = [S, y\partial_x]S^{-1}$ como não podia deixar de ser. Agora é preciso provar que $Q(y) \in \mathcal{B}(X)$.

Para isso note em primeiro lugar que

$$
\begin{aligned}
Q(y)\psi &= [S, y\partial_x]S^{-1}\psi = S(y\partial_x S^{-1})\psi - y\partial_x\psi \\
&= [S, y]\partial_x S^{-1}\psi + yS\partial_x S^{-1}\psi - y\partial_x\psi \\
&= [S, y]\partial_x S^{-1}\psi + y\partial_x\psi - y\partial_x\psi = [S, y]\partial_x S^{-1}\psi
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

para toda $\psi \in L^2(\mathbf{R}) = X$ suficientemente bem comportada. A igualdade (2.26) mostra que e preciso provar que o comutador no membro final é um operador limitado de $H^2(\mathbf{R})$ em $L^2(\mathbf{R})$. De fato, devido a (2.26) o comportamento do operador $Q(y)$ pode ser decomposto da seguinte forma,

$$
L^2 \xrightarrow{S^{-1}} H^3 \xrightarrow{\partial_x} H^2 \xrightarrow{[S,y]} L^2
$$

Seja portanto $f \in H^2(\mathbf{R})$ e note que

$$
\begin{aligned}
([S, y]f)^\wedge(\xi) &= ([(1 + |\cdot|^2)^{3/2}, \hat{y}*]\hat{f})(\xi) \\
&= \int_{\mathbf{R}} d\eta \;\, \hat{y}(\xi - \eta)((1 + |\xi|^2)^{3/2} - (1 + |\eta|^2)^{3/2})\hat{f}(\eta)
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

onde $\hat{y}*$ denota o operador linear $\varphi \mapsto \hat{y} * \varphi$.

Seja

$$\rho(r) = (1 + r^2)^{3/2} \tag{2.28}$$

Então,

$$\rho'(r) = 3r(1 + r^2)^{1/2} \tag{2.29}$$

$$\rho''(r) = 3(1 + r^2)^{1/2} + 3r^2(1 + r^2)^{-1/2} \tag{2.30}$$

$$\rho'''(r) = 3r(1 + r^2)^{-1/2} + 6r(1 + r^2)^{-1/2} - 3r^3(1 + r^2)^{-3/2} \tag{2.31}$$

Note que

$$\begin{cases} \rho(r) = 0(r^3) \\ \rho'(r) = 0(r^2) \\ \rho''(r) = 0(r) \\ \rho'''(r) = 0(1) \end{cases} \tag{2.32}$$

quando $r \to +\infty$. Além disso,

$$(1 + |\xi|^2)^{3/2} = (1 + |\eta|^2)^{3/2} + \rho'(|\eta|)(\xi - \eta) + \rho''(|\eta|)\frac{(\xi - \eta)^2}{2!} + \rho'''(\tilde{r})\frac{(\xi - \eta)^3}{3!} \tag{2.33}$$

Consequentemente

$$\begin{cases} |([S, y]f)^\wedge(\xi)| \le \sum_{j=1}^{3} I_j(\xi), \\ I_j(\xi) = \int_{\mathbf{R}} d\eta\, |\hat{y}(\xi - \eta)| \left|\rho^{(j)}(|\eta|)\frac{(\xi - \eta)^j}{j!}\right| \left|\hat{f}(\eta)\right|, \qquad j = 1, 2, \\ I_3(\xi) = \frac{M}{3!} \int_{\mathbf{R}} d\eta\, |\hat{y}(\xi - \eta)| \left|(\xi - \eta)^3\right| \left|(\hat{f}(\eta)\right| \end{cases} \tag{2.34}$$

onde $M = \sup_r |\rho'''(r)|$. Mas $\hat{f} \in L_2^2(\mathbf{R}, d\xi) \hookrightarrow L^1(\mathbf{R}, d\xi)$. De fato

$$\int_{\mathbf{R}} \left|\hat{f}(\xi)\right| d\xi = \int_{\mathbf{R}} \frac{\left|(1 + |\xi|^2)\hat{f}(\xi)\right|}{(1 + |\xi|^2)} d\xi \le C \left\|\hat{f}\right\|_{L_2^2} \tag{2.35}$$

Além disso, $\xi^3\hat{y}(\xi) \in L^2$ pois $y \in H^3(\mathbf{R})$. Segue que $I_3(\xi)$ é a convolução de uma função em $L^2(\mathbf{R}, d\xi)$ com outra em $L^1(\mathbf{R}, d\xi)$. O teorema de Young ([**RS**], vol. II) mostra então que $I_3 \in L^2(\mathbf{R}, d\xi)$ e

$$(2.36) \qquad \|I_3\|_{L^2} \leq C \left\|\xi^3\hat{y}\right\|_{L^2} \left\|\hat{f}\right\|_{L^1} \leq C' \|\hat{y}\|_{L^2_3} \left\|\hat{f}\right\|_{L^2_2} = C' \|y\|_3 \|f\|_2$$

Resta estimar I_1 e I_2. Para isso note que $\xi^j\hat{y}(\xi) \in L^1(\mathbf{R}, d\xi), j = 1, 2$. De fato,

$$(2.37) \qquad \int_{\mathbf{R}} \left|\xi^j\hat{y}(\xi)\right| d\xi = \int_{\mathbf{R}} \frac{|\xi|^j}{(1+|\xi|^2)^{3/2}}(1+|\xi|^2)^{3/2} |\hat{y}(\xi)| \, d\xi \leq C \|\hat{y}\|_{L^2_3} = C \|y\|_3$$

pois $|\xi|^j (1+|\xi|^2)^{-3/2} = 0(|\xi|^{j-3})$ quando $|\xi| \to \infty$ e é portanto de quadrado integrável. Mais ainda, devido a (2.32) temos

$$(2.38) \qquad \frac{\rho^{(j)}(|\eta|)}{1+|\eta|^2} = 0(|\eta|^{1-j}), \qquad |\eta| \to \infty$$

Consequentemente

$$(2.39) \qquad \rho^{(j)}(|\eta|)\hat{f}(\eta) = \frac{\rho^{(j)}(|\eta|)}{1+|y|^2}(1+|\eta|^2)\hat{f}(\eta) \in L^2(\mathbf{R}, d\eta)$$

pois (2.38) mostra em particular que $\rho^{(j)}(|\eta|)(1+\eta^2)^{-1}$ pertence a $L^\infty(\mathbf{R}, d\xi)$. Podemos portanto aplicar outra vez o teorema de Young para a convolução para obter $I_j \in L^2(\mathbf{R}, d\xi)$ e

$$(2.40) \qquad \|I_j\|_{L^2} \leq C \|y\|_3 \|f\|_2, \qquad j = 1, 2.$$

Combinando (2.34), (2.36), (2.40) e a identidade de Parseval obtém-se

$$(2.41) \qquad \|[S, y]f\|_0 \leq C \|y\|_3 \|f\|_2$$

para toda $f \in H^2(\mathbf{R})$ e a limitação em questão esta provada. Isto encerra a verificação da Hipótese (A.2).

Hipótese (A.3). *As estimativas apresentadas na verificação de (A.1) mostram que* $A(y) = \partial_x^3 + y\partial_x$ *é um operador m-acretivo para cada* $y \in Y$ *com* $D(A(y)) = Y$ *e* $A(y) \in \mathcal{B}(Y, X)$. *Como* $A(y)$ *não depende de* t *a continuidade nesta variável é trivial. Quanto a dependência em* y *temos,*

$$
\begin{aligned}
\|A(y)\phi - A(z)\phi\|_X &= \|(y-z)\partial_x\phi\|_X \\
&\leq \|\partial_x\phi\|_{L^\infty} \|y-z\|_X \leq C\,\|\partial_x\phi\|_1 \|y-z\|_X \\
&\leq C\,\|\phi\|_y \|y-z\|_X
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Hipótese (A.4). *Para satisfazer (A.4) trivialmente escolhemos* W *como sendo uma bola de raio arbitrariamente grande centrada na origem.*

Hipótese (f.1). *Também é trivialmente satisfeita pois* $f \equiv 0$ *no nosso caso.*

Problema (2.4). *i) Verifique as hipóteses do teorema (1.1) no caso em que*

$$
\begin{cases} X = L^2(\mathbf{R}), Y = H^s(\mathbf{R}), & s > 3 \\ S = (1-\partial_x^2)^{s/2} \end{cases}
\tag{2.43}
$$

para obter única solução $u \in C([0,T']; H^s(\mathbf{R})) \cap C^1([0,T']; L^2(\mathbf{R}))$ *para a KdV. Use a equação em questão para concluir que na verdade* $u \in C^1([0,T']; H^{s-3}(\mathbf{R}))$.

ii) Prove que o tempo de existência da solução pode ser escolhido independentemente de s *no seguinte sentido: se* $u(0) = \phi \in H^r$ $r > s$ *então* $u \in C([0,T']; H^r(\mathbf{R})) \cap C^1([0,T']; H^{r-3}(\mathbf{R}))$. *(***Sugestão para ii):** *Consulte* **[K2]**. *Este problema é muito difícil! Na verdade o resultado vale para* $s > 3/2$.*)*

Problema (2.5). *Verifique as hipóteses do teorema (1.1) no caso da equação de Schrödinger não-linear estudada no capítulo I (veja a equação (3.37). Cuidado! Os espaços* X *e* Y *do teorema (1.1) são reais).*

3. A Demonstração do Teorema (1.1)

Seja $R > 0$ tal que

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} \|\phi - y_0\|_Y < \mathrm{R} \\ \|y - y_0\|_Y \leq \mathrm{R} \quad \Leftrightarrow \quad y \in W \end{cases}$$

e considere o conjunto E de todas as funções $v: [0, T'] \to Y$ tais que

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{cases} \|v(t) - y_0\|_y \leq \mathrm{R} \text{ (logo } v(t) \in W) \\ v \text{ é contínua de } [0, T'] \text{ em } X \end{cases}$$

onde $T' \leq T$ é um número positivo a ser determinado adiante. Se $v \in E$ defina

$$\text{(3.3)} \qquad A^v(t) = A(t, v(t))$$

Devido a (A.1), $A^v(t)$ pertence a $G(X, 1, \beta)$. Portanto a família $\{A^v(t)\}$ é estável com índices de estabilidade $1, \beta$, i.e.,

$$\text{(3.4)} \qquad \|\prod_{j=1}^{N} \exp\,(-s_j A(t_j))\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \mathrm{e}^{-\beta(s_1+s_2+\cdots+s_N)}$$

para toda sequência finita $\{t_j\}$ com $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_N \leq T$ e $s_j \geq 0$.

Lema (3.1). *A função $t \in [0, T'] \mapsto A^v(t)$ é contínua na norma de $\mathcal{B}(Y, X)$.*

Demonstração: A hipótese (A.3) implica o resultado. De fato, $A^v(t) = A(t, v(t)) \in \mathcal{B}(Y, X)$ e

$$\text{(3.5)} \qquad \begin{aligned} \|A^v(t') - A^v(t)\|_{Y,X} &\leq \|A(t', v(t')) - A(t', v(t))\|_{Y,X} \\ &\quad + \|A(t', v(t)) - A(t, v(t)\|_{Y,X} \\ &\leq \mu_1 \|v(t') - v(t)\|_X + \|A(t', v(t) - A(t, v(t))\|_{Y,X} \end{aligned}$$

Isto encerra a demonstração.

∎

Note que por (A.2) temos,

$$
(3.6) \qquad \begin{cases} SA^v(t)S^{-1} = A^v(t) + Q^v(t) \\ Q^v(t) = Q(t, v(t)) \in \mathcal{B}(X), \quad \|Q^v(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \lambda_1 \end{cases}
$$

Lema (3.2). *A função $t \in [0, T'] \to Q^v(t)$ é fracamente contínua (e portanto fortemente mensurável).*

Demonstração: Seja $y \in Y$. Então

$$
(3.7) \qquad S^{-1}A^v(t)y = A^v(t)S^{-1}y - S^{-1}A^v(t)y
$$

como $S^{-1}y \in Y$ segue do lema (3.1) que o lado direito de (3.7) é contínuo na norma de X. Consequentemente $t \mapsto S^{-1}Q^v(t)y$ tem essa propriedade. Mais ainda $\left\|S^{-1}Q^v(t)\right\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \left\|S^{-1}\right\|_{\mathcal{B}(X)} \|Q^v(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \left\|S^{-1}\right\| \lambda_1$. Como Y é denso segue que $t \in [0, T'] \mapsto S^{-1}Q^v(t)x$ é contínua para todo $x \in X$. Alem disso esta função é uniformemente limitada em Y. De fato,

$$
(3.8) \qquad \left\|S^{-1}Q(t)x\right\|_Y = \|Q(t)x\|_X \leq \lambda_1 \|x\|_X
$$

O exercício (3.3) abaixo implica então que $t \in [0, T'] \mapsto S^{-1}Q(t)x \in Y$ é fracamente contínua. Consequentemente $t \in [0, T'] \mapsto Q(t) \in \mathcal{B}(x)$ é fracamente contínua.

∎

Exercício (3.3). *Prove que se $g: [0, T'] \to Y$ é limitada na norma de Y e contínua em relação a topologia de X então g e fracamente contínua (e portanto fortemente mensurável) como função com valores em Y.*

Os resultados acima mostram que as hipóteses (H.1), (H.2) e (H.5) da teoria linear são satisfeitas. Existe portanto um único propagador $U^v(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T'$, com as propriedades descritas no teorema (1.4) e (1.8) do capítulo II.

Lema (3.4). *Seja* $f^v(t) = f(t, v(t))$. *Então* $\|f^v(t)\|_Y \leq \lambda_3\ \forall\, t \in [0, T']$ *e* $t \mapsto f(t, v(t))$ *é contínua na norma de* X *e fracamente contínua (logo fortemente mensurável) como função com valores em* Y.

Demonstração: A desigualdade segue trivialmente de (f.1). Além disso,

$$
\begin{aligned}
\|f^v(t') - f^v(t)\|_X &\leq \|f(t', v(t')) - f(t', v(t))\|_X + \|f(t', v(t)) - f(t, v(t))\|_X \\
&\leq \mu_2 \|v(t') - v(t)\|_X + \|f(t', v(t)) - f(t, v(t))\|_X
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

e a continuidade segue imediatamente. A última afirmação do lema é consequência das duas primeiras e do exercício (3.3).

∎

Devido ao lema (3.4), podemos aplicar o teorema (2.2) do capítulo II para obter a única solução $u^v(t)$ do problema

$$
\partial_t u^v + A^v(t) u^v = f^v(t), \qquad u^v(0) = \phi \tag{L^v}
$$

Ela é dada por,

$$
u^v(t) = U^v(t, 0)\phi + \int_0^t U^v(t, s) f^v(s)\, ds \tag{3.10}
$$

e

$$
u^v \in C([0, T'], Y) \cap C^1([0, T']; X) \tag{3.11}
$$

uma vez que $\phi \in Y$ e $f^v \in L^\infty([0, T']; Y) \cap C([0, T']; X)$

Lema (3.5). *Existem* $T' \in (0, T]$ *tal que a aplicação* $v \mapsto \Phi v = u^v$ *transforma* E *em* E.

Demonstração: Mostramos acima (veja (3.11)) que $u^v \in C([0, T']; X)$ qualquer que seja $T' \in (0, T]$. Resta provar que T' pode ser escolhido de modo que $\|u^v(t) - y_0\|_Y \leq R$ para todo $t \in [0, T']$.

Para isso observe que

$$u^v(t) - y_0 = U^v(t,0)\phi + \int_0^t U^v(t,s)f^v(s)ds - y_0$$

$$(3.12) \qquad = U^v(t,0)(\phi - y_0) + U^v(t,s)y_0 - y_0 + \int_0^t U^v(t,s)f^v(s)ds$$

$$= U^v(t,0)(\phi - y_0) + \int_0^t U^v(t,s)(f^v(t) - A^v(s)y_0)ds$$

combinando a estimativa (1.62) do exercício (1.10) do capítulo anterior com as hipóteses (X) (que implica $\|S\|_{\mathcal{B}(Y,X)} = \|S^{-1}\|_{\mathcal{B}(X,Y)} = 1$) e (A.1) segue que

$$(3.13) \qquad \|U^v(t,t')\|_{\mathcal{B}(Y)} \leq \exp\,(\beta + \lambda_1)T'$$

Além disso $\|A^v(s)y_0\|_Y \leq \lambda_2$ por (A.4) e $\|f^v(t)\|_Y \leq \lambda_3$ pelo lema (3.3). Portanto,

$$(3.14) \qquad \|u(t) - y_0\|_Y \leq (\,\exp\,[(\beta + \lambda_1)T'])(\|\phi - y_0\|_Y + (\lambda_2 + \lambda_3)T')$$

Como $\|\phi - y_0\| < R$ é possível escolher $T' > 0$ tal que o lado direito de (3.14) é ainda menor do que R e o lema está provado.

∎

Agora, se $v, \omega \in E$ considere a métrica

$$(3.15) \qquad d(v,\omega) = \sup_{0 \leq t \leq T'} \|v(t) - \omega(t)\|_X$$

Munido dela o conjunto E se torna um espaço métrico completo. Isto se deve ao fato que bolas fechadas em Y são fechadas em X. Na verdade,

Exercício (3.6). *Prove que se um subconjunto de Y é convexo, fechado e limitado então ele também é fechado em X.*

Lema (3.7). *Existem $T' \in (0,T]$ tal que $\Phi: E \to E$ é uma contração.*

Demonstração: Utilizando as equações satisfeitas por $u^v = \Phi v$ e $u^\omega = \Phi\omega$ não é difícil provar que

$$(3.16)\quad (\Phi v)(t) - (\Phi\omega)(t) = \int_0^t U^v(t,s)((A^\omega(s) - A^v(s))(\Phi\omega)(s) + f^v(s) - f^\omega(s))ds$$

Como $\|U^v(t,s)\|_{B(X)} \le e^{BT'}$ segue que

$$(3.17)\qquad d(\Phi\omega, \Phi v) \le e^{\beta T'}(\|f^\omega - F^v\|_{1,X} + \|(A^\omega - A^v)\Phi v\|_{1,X})$$

Mas por (f.1) temos $\|f^\omega(t) - f^v(t)\|_X \le \mu_2 \|\omega(t) - v(t)\|_X$ e portanto

$$(3.18)\qquad \|f^\omega - f^v\|_{1,X} \le \mu_2 T' d(\omega, v)$$

Além disso,

$$(3.19)\qquad \begin{aligned} \|(A^\omega(t) - A^v(t))\Phi^\omega(t)\|_X &\le \|A^\omega(t) - A^v(t)\|_{B(Y,X)} \|\Phi\omega(t)\|_Y \\ &\le \mu_1 \|\omega(t) - v(t)\|_X (\|y_0\|_Y + R) \end{aligned}$$

Portanto

$$(3.20)\qquad \|(A^\omega - A^v)\Phi\omega\|_{1,X} \le \mu_1 d(\omega, v) T'(\|y_0\|_Y + R)$$

Consequentemente,

$$(3.21)\qquad d(\Phi\omega, \Phi v) \le T' e^{\beta T'}(\mu_2 + \mu_1 \|y_0\| + \mu_1 R) d(\omega, v)$$

e o lema esta demonstrado.

∎

Aplicando o teorema do ponto fixo a $\Phi: E \to E$ obtém-se a solução procurada.

4. Dependência Contínua

O objetivo desta seção, como indica seu título, consiste em estabelecer a continuidade da aplicação $\phi \mapsto u$ onde u é a solução de (Q) com $u(0) = \phi$. Na verdade provaremos um resultado muito mais geral que engloba tanto o dado inicial quanto os coeficientes da equação. Considere a sequência de equações

$$(\mathrm{Q}^n) \qquad \begin{cases} \partial_t u^n + A^n(t, u^n)u^n = f^n(t, u^n) \\ u^n(0) = \phi^n, \qquad t \in [0, T], \qquad n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

para a qual valem (A.1) -(A.4) e (f.1) com os mesmos X, Y, S, W. É preciso também supor que

Hipótese (A.5). *Existe $\mu_3 > 0$ tal que*

$$\|Q(t, y) - Q(t, z)\|_{B(X)} \leq \mu_3 \|y - z\|_Y \tag{4.1}$$

quaisquer que sejam $t \in [0, T]$ e $y, z \in W$.

Hipótese (f.1). *Existe $\mu_4 > 0$ tal que*

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_Y \leq \mu_4 \|y - z\|_Y \tag{4.2}$$

para todo $t \in [0, T]$ e $y, z \in W$.

Com os comentários acima em mente temos o

Teorema (4.1). *Suponha que (Q^n) satisfaz (A.1)-(A.5), (f.1) e (f.2) uniformemente em relação a n, i.e., as constantes $\beta, \lambda_1, \cdots, \mu_4$ podem ser escolhidas independentemente de n. Suponha ainda que que para cada $(t, y) \in [0, T] \times W$ temos,*

$$A^n(t, y) \xrightarrow{s} A(t, y) \text{ em } B(Y, X) \tag{4.3}$$

$$Q^n(t,y) \xrightarrow{s} Q(t,y) \text{ em } B(X) \tag{4.4}$$

$$f^n(t,y) \to f(t.y) \text{ em } Y \tag{4.5}$$

quando $n \to \infty$. *Então se* $\phi, \phi_n \in W, \phi_n \to \phi$ *em* Y *existem* $T'' \in (0,T]$ *e únicas* $u^n, u \in C([0,T'']; Y) \cap C^1([0,T'']; X)$ *soluções de* (Q^n) *e* (Q) *respectivamente com* $u^n(0) = \phi^n$, $u(0) = \phi$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T'']} \|u^n(t) - u(t)\|_Y = 0 \tag{4.6}$$

Demonstração: Seja E o espaço de funções definido em (3.2). Para cada $v \in E$ considere a sequência de problemas lineares,

$$(\mathrm{L}^{n,v}) \qquad \begin{cases} \partial_t u^n + A^{n,v}(t)u^n = f^{n,v}(t), & t \in [0,T] \\ u^n(0) = \phi^n, \qquad n = 1,2,\cdots \\ A^n(t) = A^n(t,v(t)), & f^{n,v}(t) = f^n(t,v(t)) \end{cases}$$

Tendo em vista as hipóteses feitas acima existe uma única solução u^n de $(L^{n,v})$ definida em $[0,T]$. Consequentemente a relação $\Phi^n v = u^n$ define uma contradição em E se T' é suficientemente pequeno. O ponto fixo correspondente é então a solução de (Q^n). Utilizando a uniformidade que estamos supondo é fácil verificar que T' pode ser escolhido independentemente de n. O mesmo vale para o fator de contração das Φ^n. Sem perda de generalidade podemos supor que tanto o tempo de existência quanto o fator de contração associados a (Q) são os mesmos que aqueles correspondentes as (Q^n). Agora note que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T']} \|u^n(t) - u(t)\|_X = 0 \tag{4.7}$$

De fato, como $\Phi^n u^n = u^n$ e $\Phi u = u$ temos,

$$d(u^n,u) = d(\Phi^n u^n, \Phi u) \leq d(\Phi^n u^n, \Phi^n u) + d(\Phi^n u, \Phi u) \leq \gamma d(u^n,u) + d(\Phi^n u, \Phi u) \tag{4.8}$$

onde $\gamma < 1$ é o fator de contração comum as Φ^n. Basta portanto provar que se $v \in E$,

$$(4.9) \qquad \lim_{\mu\to\infty} d(\Phi^n v, \Phi v) = 0$$

Mas (4.9) expressa simplesmente a dependência contínua da solução da equação linear (L^v). A relação (4.9) segue então do teorema (2.6) do capítulo II uma vez que

$$(4.10) \qquad A^{n,v}(t) - A^v(t) = A^n(t, v(t)) - A(t, v(t)) \xrightarrow{s} 0$$

$$(4.11) \qquad f^{n,v}(t) - f^v(t) = f^n(t, v(t)) - f(t, v(t)) \xrightarrow{s} 0$$

em $\mathcal{B}(Y, X)$ e Y respectivamente e $\|A^n(t, y)\|_{\mathcal{B}(Y,X)}$ é uniformemente limitada em t, y e n (o que implica a condição (2.30) do teorema de convergência que estamos utilizando).

Tendo em vista o teorema (2.5) do capítulo anterior,

$$(4.12) \qquad \|u^n - u\|_{\infty,y} \leq K[\|\phi^n - \phi\|_Y + \|f^n - f\|_{1,y} + \|(Q^n - Q)Su\|_{1,X} + \|h^n\|_{\infty,X}$$

onde K depende de R e T' mas não de n e

$$(4.13) \qquad \begin{cases} f^n(t) = f^n(t, u^n(t)), & f(t) = f(t, u(t)) \\ Q^n(t) = Q(t, u^n(t)), & Q(t) = Q(t, u(t)) \end{cases}$$

$$(4.14) \qquad \begin{cases} h^n(t) = (U^n(t, 0) - U(t, 0))S\phi + \displaystyle\int_0^t (U^n(t, s) - U(t, s))g(s)ds \\ g(s) = Sf(s) - Q(s)Su(s) \end{cases}$$

Agora,

$$(4.15) \qquad \begin{aligned} \|f^n - f\|_{1,Y} &= \int_0^{T'} \|f^n(t, u^n(t)) - f(t, u(t))_Y\| \, dt \\ &\leq \mu_4 T' \|u^n - u\|_{\infty,y} + \int_0^{T'} \|(f^n - f)(t, u(t)\|_Y \, dt \end{aligned}$$

$$\|(Q^n - Q)Su\|_{1,X} \leq \int_0^{T'} \|(Q^n(t,u^n(t)) - Q(t,u(t)))Su(t)\|_X \, dt$$

$$\leq \mu_3 \int_0^{T'} \|u^n(t) - u(t)\|_Y \, \|Su(t)\|_X \, dt$$

$$(4.16) \qquad + \int_0^{T'} \|(Q^n - Q)(t,u(t))Su(t)\|_X \, dt$$

$$\leq \mu_3 T' \, \|u^n - u\|_{\infty,Y} \, (\|y_0\|_Y + R)$$

$$+ \int_0^{T'} \|(Q^n - Q)(t,u(t))Su(t)\|_X \, dt$$

onde utilizamos (f.2), (A.5), a uniformidade em n e $\|Su(t)\|_X = \|u(t)\|_Y \leq \|y_0\|_Y + R$. Escolhendo T' de modo que $T'(\mu_4 + \mu_3(\|y_0\|_Y + R)) < 1$ os termos contendo $\|u^n - u\|_{\infty,Y}$ em (4.15) e (4.16) podem ser absorvidos pelo lado esquerdo de (4.12). Como

$$(4.17) \qquad \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \|\phi^n - \phi\|_Y = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \int_0^{T'} \|(f^n - f)(t,u(t))\|_Y \, dt = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \int_0^{T'} \|(Q^n - Q)(t,u(t))Su\|_X \, dt = 0 \end{cases}$$

para completar a demonstração do teorema resta provar que

$$(4.18) \qquad \lim_{n\to\infty} \|h^n\|_{\infty,X} = 0$$

Mas $g \in L^\infty([0,T'];X)$ e portanto para obter (4.18) é suficientemente mostrar que

$$(4.19) \qquad U^n(t,s) \xrightarrow{s} U(t,s) \text{ em } \mathcal{B}(X)$$

uniformemente em relação a $0 \leq s \leq t \leq T$. A convergência em (4.19) segue então do teorema (2.6) do capítulo II uma vez que

$$(4.20) \qquad \begin{aligned} A^n(t,u^n(t)) - A(t,u(t)) &= [A^n(t,u^n(t)) - A^n(t,u(t))] \\ &\quad + [A^n(t,u(t)) - A(t,u(t))] \xrightarrow{s} 0 \end{aligned}$$

em $\mathcal{B}(Y, X)$ e o teorema está demonstrado. $\blacksquare$

CAPÍTULO IV

REGULARIZAÇÃO PARABÓLICA

O objetivo deste capítulo é exibir uma versão abstrata do método da regularização parabólica. A formulação abaixo nos foi sugerida por uma versão mais geral desenvolvida por T. Kato ([**K9**]).

Vamos considerar o seguinte problema de Cauchy

$$(1)_\mu \qquad \begin{cases} \partial_t u = -A_\mu u + F(t,u) \\ u(t_0) = \phi \end{cases}$$

onde $u = u(t), t \in I = [t_0, T]$, $A_\mu : D(A_\mu) \subset X \to X$ linear, $F: I \times H \to X$, H e X os espaços onde queremos resolver $(1)_\mu$, com $\mu \geq 0$ e $A_\mu \to A_0$ quando $\mu \downarrow 0$.

Mostraremos que, sob hipóteses convenientes, existe $\overline{T}$ e uma única solução de $(1)_\mu$ em $C([t_0, \overline{T}]; H) \cap C^1([t_0, \overline{T}]; X)$ se $\phi \in H$ e $\mu \geq 0$.

Trataremos do problema de Cauchy acima primeiramente com $\mu > 0$ e mais tarde obteremos o caso $\mu = 0$ como limite, do caso $\mu > 0$, quando $\mu \downarrow 0$.

Começaremos mostrando que a equação integral associada a $(1)_\mu$, isto é,

$$(2) \qquad u(t) = e^{-tA_\mu}\phi + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-t')A_\mu} F(t', u(t'))dt'$$

tem solução única em $C([t_0, T_\mu]; H)$ para algum $t_0 < T_\mu \leq T$ e todo $\mu > 0$. Posteriormente mostraremos que tal solução de (2) é a solução de $(1)_\mu$ em $C([t_0, T_\mu]; H) \cap C^1([t_0, T_\mu]; X)$. O passo seguinte e fundamental, é mostrar que T_μ *não* depende μ, se $0 < \mu \leq \mu_0$. Depois mostraremos que podemos passar o limite na solução de $(1)_\mu$, quando $\mu \downarrow 0$ para obter uma solução de $(1)_0$. A unicidade de tal solução será também obtida. Por fim aplicaremos estes resultados para provar a existência e a unicidade da solução local para BO e faremos alguns comentários finais.

Dado o esquema do método passaremos a seguir a desenvolvê-lo. Antes vale observar que podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_0 = 0$ (exercício).

1. A Equação Integral

Nesta secção exibiremos condições suficientes para obter solução de (2), a saber o,

Teorema (1.1). *Suponhamos que:*

(H1) (i) V, H, X são espaços de Banach reais que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow X$ (onde $\hookrightarrow$, significa imersão contínua e densa);

(H2) (i) Para $\mu \geq 0$, $A_\mu : D(A_\mu) \subset X \to X$ é linear;

(ii) $H \subset D(A_\mu), \mu \geq 0$.

(iii) Para $\mu > 0$, A_μ satisfaz as condições do teorema de Hille-Yosida (ver [**Pa**]*) (e portanto gera um semigrupo $e^{-tA_\mu} \in B(X)$, veja o apêndice B).*

(iv) Se $\mu > 0, h \in H$ então $e^{-tA_\mu} h \in H$ e a aplicação

$$(1.1) \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ = [0, \infty) & \longrightarrow & H \\ t & \longmapsto & e^{-tA_\mu} h \end{array}$$

é contínua.

(v) Para $\mu > 0$, $t > 0$ temos $e^{-tA_\mu} \in B(X; V)$ e satisfaz

$$(1.2) \qquad \left\| e^{-tA_\mu} x \right\|_V \leq g_\mu(t) \left\| x \right\|_x$$

onde $x \in X$ e $g_\mu \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+)$.

(vi) A aplicação

$$(1.3) \qquad \begin{array}{ccc} (0,\infty) & \longrightarrow & V \\ t & \longmapsto & e^{-tA_\mu}x \end{array}$$

é contínua, para cada $x \in X$.

(H3) (i) $F: I \times H \to X$ é contínua.

(ii) $F(t,0) = 0$, para todo $t \in I$.

(iii) Existe $\gamma: I \times \mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}_+$, não decrescente tal que

$$(1.4) \qquad \|F(t,u) - F(t,v)\|_X \le \gamma(t, \|u\|_H, \|v\|_H)\, \|u - v\|_H$$

para todo $t \in I$ e $u, v \in H$.

Então, se $\phi \in H$ e $\mu > 0$, existe $T_\mu = T(\mu, \|\phi\|_H) \in (0,T]$ e uma única $u_\mu \in C([0,T_\mu]; H)$ solução de (2).

Demonstração: Existência: podemos supor, sem perda de generalidade, que $\phi \neq 0$, pois caso contrário, $u_\mu(t) \equiv 0$ será solução de (2).

Para $\tau > 0$ considere,

$$(1.5) \qquad \mathcal{X}(\tau) := \{v \in C([0,\tau]; H) : \left\|e^{-tA_\mu}\phi - v(t)\right\|_H \le \|\phi\|_H,\ 0 \le t \le \tau\}$$

Exercício (1.2). *$\mathcal{X}(\tau)$ é um espaço métrico completo quando munido da distância*

$$(1.6) \qquad d(v,\omega) = \|v - \omega\|_{\tau,H} := \sup_{0 \le t \le \tau} \|v(t) - \omega(t)\|_H$$

onde $v, \omega \in \mathcal{X}(\tau)$.

Se $v \in \mathcal{X}(\tau)$ defina,

$$(1.7) \qquad (Bv)(t) := e^{-tA_\mu}\phi + \int_0^t e^{-(t-t')A_\mu} F(t', v(t'))\,dt', \qquad 0 \le t \le \tau$$

Exercício (1.3). $B\colon \mathcal{X}(\tau) \to C([0,\tau]; H)$.

Afirmamos que existe $\tau_1 \in (0, T]$ tal que

$$B\colon \mathcal{X}(\tau_1) \to \mathcal{X}(\tau_1) \tag{1.8}$$

De fato, se $0 \le t \le \tau$ e $v \in \mathcal{X}(\tau)$ então

$$\begin{aligned}
\left\| e^{-tA_\mu}\phi - Bv(t) \right\|_H &\le \int_0^t \left\| e^{-(t-t')A_\mu} F(t', v(t')) \right\|_H dt' \\
&\le \int_0^t g_\mu(t-t') \left\| F(t', v(t')) \right\|_H dt' \\
&\le \int_0^t g_\mu(t-t') \gamma(t', \left\| v(t') \right\|_H, 0) \left\| v(t') \right\|_H dt' \\
&\le 2\gamma(\tau, 2\left\| \phi \right\|_H, 0) \int_0^t g_\mu(t-t') dt' \left\| \phi \right\|_H \\
&\le 2\gamma(\tau, 2\left\| \phi \right\|_H, 0) \int_0^t g_\mu(r) dr \left\| \phi \right\|_H \\
&\le \left[2\gamma(\tau, 2\left\| \phi \right\|_H, 0) \int_0^\tau g_\mu(r) dr \right] \left\| \phi \right\|_H
\end{aligned} \tag{1.9}$$

onde usamos (1.2), (H3) (ii), (1.4) e o fato que se $v \in \mathcal{X}(\tau)$ então

$$\left\| v(t) \right\|_H \le 2 \left\| \phi \right\|_H, \qquad 0 \le t \le \tau \tag{1.10}$$

Como, $2\gamma(\tau, 2\left\| \phi \right\|_H, 0) \int_0^\tau g_\mu(r)dr \downarrow 0$ quando $\tau \downarrow 0$ (pois $g_\mu \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+)$) segue que existe $\tau_1 \in (0, T]$ tal que

$$2\gamma(\tau_1, 2\left\| \phi \right\|_H, 0) \int_0^{\tau_1} g_\mu(r) dr \le 1 \tag{1.11}$$

Portanto, de (1.9) e (1.11) segue a afirmação.

Notemos agora que existe $T_\mu \in (0, \tau_1]$ tal que $B: \mathcal{X}(T_\mu) \to \mathcal{X}(T_\mu)$ é contração. De fato, se $v, \omega \in \mathcal{X}(\tau_1)$ então

$$
\begin{aligned}
\|Bv(t) - B\omega(t)\|_H &\leq \int_0^t \left\| \mathrm{e}^{-(t-t')A_\mu}(F(t', v(t')) - F(t', \omega(t'))) \right\|_H dt' \\
&\leq \int_0^t g_\mu(t-t')\gamma(t', \|v(t')\|_H, \|\omega(t')\|_H) \|v(t') - \omega(t')\|_H \, dt' \qquad (1.12) \\
&\leq \left[\gamma(t, 2\|\phi\|_H, 2\|\phi\|_H) \int_0^t g_\mu(r)dr \right] \|v - \omega\|_{t,H}
\end{aligned}
$$

onde usamos (1.2), (1.4), (1.6) e (1.10) para v e ω.

Logo, como $\gamma(t, 2\|\phi\|_H, 2\|\phi\|_H) \int_0^t g_\mu(r)dr \downarrow 0$ quando $t \downarrow 0$, segue a existência de $T_\mu \in (0, \tau_1]$ tal que

$$
\gamma(T_\mu, 2\|\phi\|_H, 2\|\phi\|_H) \int_0^{T_\mu} g_\mu(r)dr = \delta < 1 \tag{1.13}
$$

Portanto de (1.12) e (1.13) segue a afirmação.

Podemos então aplicar o princípio da contração de Banach e obter um único $u_\mu \in \mathcal{X}(T_\mu)$, ponto fixo de B, isto é, solução de (2).

Para completar a demonstração precisamos mostrar a unicidade em $C([0, T_\mu]; H)$.

Unicidade (em $C([0, T_\mu]; H)$): sejam $v, \omega \in C([0, T_\mu]; H)$ soluções de (2). Consideremos,

$$
M := \max\left\{ \|v\|_{T_\mu, H}, \|\omega\|_{T_\mu, H} \right\} \tag{1.14}
$$

e $\overline{T} > 0$ tal que

$$
\gamma(\overline{T}, M, M) \int_0^{\overline{T}} g_\mu(r)dr = \lambda < 1 \tag{1.15}
$$

que existe pois $\gamma(t, M, M) \int_0^t g_\mu(r)dr \downarrow 0$ quando $t \downarrow 0$.

Então, se $0 \leq t \leq T^* := \min\{T_\mu, \overline{T}\}$ temos,

$$
\begin{aligned}
\|v(t) - \omega(t)\|_H &\leq \int_0^t \left\| e^{-(t-t')A_\mu}(F(t', v(t')) - F(t', \omega(t'))) \right\|_H dt' \\
&\leq \gamma(t, M, M) \int_0^t g_\mu(r) dr \, \|v - \omega\|_{t,H} \\
&\leq \gamma(\overline{T}, M, M) \int_0^{\overline{T}} g_\mu(r) dr \, \|v - \omega\|_{T^*,H} \\
&= \lambda \, \|v - \omega\|_{T^*,H}
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

onde usamos (1.2), (1.4), (1.14) e (1.15). Tomando o supremo em $t \in [0, T^*]$ e observando que se $\lambda < 1$ segue que

$$
\|v - \omega\|_{T^*,H} = 0 \tag{1.17}
$$

mostrando assim que $v = \omega$ em $[0, T^*]$. Se $T^* = T_\mu$, nada mais temos a fazer. Se $T^* < T_\mu$, isto é, $T^* = \overline{T}$ então observamos que para $\overline{T} \leq t \leq T^{**} := \min\{2\overline{T}, T_\mu\}$ temos

$$
\begin{aligned}
\|v(t) - \omega(t)\|_H &\leq \int_0^t \left\| e^{-(t-t')A_\mu}(F(t', v(t')) - F(t', \omega(t'))) \right\|_H dt' \\
&= \int_{\overline{T}}^t \left\| e^{-(t-t')A_\mu}(F(t', v(t')) - F(t', \omega(t'))) \right\|_H dt' \\
&\leq \gamma(t, M, M) \int_0^{t-\overline{T}} g_\mu(r) dr \, \|v - \mu\|_{T^{**},H} \\
&\leq \gamma(\overline{T}, M, M) \int_0^{\overline{T}} g_\mu(r) dr \, \|v - \omega\|_{T^{**},H} \\
&= \lambda \, \|v - \omega\|_{T^{**},H}
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

onde usamos o fato que $v = \omega$ em $[0, \overline{T}]$, (1.2), (1.4) e que $t - \overline{T} \leq \overline{T}$. Logo tomando o supremo em $[0, T^{**}]$ segue que

$$
\|v - \omega\|_{T^{**},H} = 0 \tag{1.19}
$$

e com isto obtemos que $v = \omega$ em $[0, T^{**}]$. Se $T^{**} = T_\mu$ terminamos a demonstração, caso contrário repetimos o argumento acima em $[0, T^{***}]$, onde $T^{***} := \min\{T_\mu, 3\overline{T}\}$. O resultado segue da compacidade do intervalo $[0, T_\mu]$.

∎

Observação (1.4): A condição de $\gamma(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ ser não decrescente nos seus argumentos pode ser removida do teorema (1.1).

2. A Equação "Regularizada"

Esta seção está voltada a mostrar que a função obtida no teorema (1.1), isto é a solução de (2), é solução de $(1)_\mu$, para $\mu > 0$ e esta é única. Mais precisamente,

Teorema (2.1). *A função $u_\mu \in C([0, T_\mu]; H)$ dada pelo teorema (1.1) satisfaz*

(2.1) $$u_\mu \in C(0, T_\mu]; V) \cap C^1([0, T_\mu]; X)$$

e é a única solução de $(1)_\mu$, $\mu > 0$.

Demonstração: Existência: de (2), (1.3) e (H3) (i) segue que

(2.2) $$u_\mu \in C(0, T_\mu]; V)$$

Mostraremos que u_μ é solução de $(1)_\mu$. Da teoria de semigrupos (ver **[Pa]** ou **[RS]** vol. II) temos

(2.3) $$\partial_t e^{-tA_\mu}\phi = A_\mu e^{-tA_\mu}\phi, \qquad 0 \le t$$

pois $\phi \in H \subset D(A_\mu)$, para todo $\mu > 0$. Considere

(2.4) $$v(t) := \int_0^t e^{-(t-t')A_\mu} F(t', u_\mu(t'))dt', \qquad 0 \le t \le T_\mu$$

Para $\varepsilon > 0$ segue

$$
\begin{aligned}
\frac{v(t+\varepsilon)-v(t)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\left\{\int_0^{t+\varepsilon} e^{-(t+\varepsilon-t')A_\mu} F(t', u_\mu(t'))dt' \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t e^{-(t-t')A_\mu} F(t', u_\mu(t'))dt' \right\} \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left\{e^{\varepsilon A_\mu} - I\right\} \int_0^t e^{-(t-t')A_\mu} F(t', u_\mu(t')dt' \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} e^{-(t+\varepsilon-t')A_\mu} F(t', u_\mu(t'))dt' \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left\{e^{-\varepsilon A_\mu} - I\right\} \int_0^t e^{-(t-t')A_\mu} F(t', u_\mu(t'))dt' \\
&\quad - e^{-(t+\varepsilon-\eta_\varepsilon)A_\mu} F(\eta_\varepsilon, u_\mu(\eta_\varepsilon))
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

onde na última igualdade usamos o teorema do valor médio para integrais de Bochner (ver [H]) e $\eta_\varepsilon \in [t, t+\varepsilon]$. Como $\int_0^t e^{-(t-t')A_\mu} F(t', u_\mu, (t'))dt' \in H \subset D(A_\mu)$ segue que podemos passar o limite em (2.5), quando $\varepsilon \downarrow 0$, e obter

$$
\partial_t^+ v(t) = -A_\mu \int_0^t e^{-(t-t')A_\mu} F(t, u_\mu(t'))dt' + F(t, u_\mu(t)) \tag{2.6}
$$

onde ∂_t^+ é a derivada a direita. De modo semelhante temos

Exercício (2.2). *Prove que*

$$
\partial_t^- v(t) = -A_\mu \int_0^t e^{-(t-t')A_\mu} F(t', u_\mu(t'))dt' + F(t, u_\mu(t)), \qquad 0 \le t \le T_\mu \tag{2.7}
$$

(**Sugestão:** *Considerar (2.5) com $\varepsilon < 0$. Tome cuidado!)*

Portanto $\partial_t v(t)$ existe e é igual a $\partial_t^+ v(t)$. Logo de (2.3), (2.6) e (2) segue

$$
\begin{aligned}
\partial_t u_\mu(t) &= \partial_t(e^{-tA_\mu}\phi + v(t)) \\
&= -A_\mu e^{-tA_\mu}\phi - A_\mu \int_0^t e^{-(t-t')A_\mu} F(t', u_\mu(t'))dt' + F(t, u_\mu(t)) \\
&= -A_\mu u_\mu(t) + F(t, u_\mu(t))
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Assim, como $A_\mu \in B(H; X)$, obtemos que $u_\mu \in C^1((0, T_\mu]; X)$ e é solução de $(1)_\mu$.

Unicidade: Seja $v \in C([0, T_\mu]; H) \cap C^1([0, T_\mu]; X)$ solução de $(1)_\mu$. Então

Exercício (2.3). *A função $v = v(t)$ satisfaz (2) em X, para $0 \leq t \leq T_\mu$ isto é,*

$$v(t) = e^{-tA_\mu}\phi + \int_0^t e^{-(t-t')A_\mu} F(t', v(t'))dt', \qquad 0 \leq t \leq T_\mu \tag{2.9}$$

em X.

Porém, de (1.1) e (1.3) segue que (2.9) vale em H, logo v é solução de (2) em $C([0, T_\mu]; H)$. O teorema (1.1) implica então que $v = u_\mu$ em $[0, T_\mu]$, completando a demonstração do teorema.

∎

3. Existência de Solução para o Caso $\mu = 0$.

Para obtermos u_0, solução de $(1)_0$, como limite das u_μ's, quando $\mu \downarrow 0$, precisaremos, entre outras coisas, obter um intervalo de existência para as u_μ's independente de μ! No resultado a seguir introduziremos algumas condições suficientes para que isto ocorra.

Teorema (3.1). *Se as hipótese do teorema (1.1) são satisfeitas e:*

(H1) (ii) H é espaço de Hilbert real com produto interno $(\cdot \mid \cdot)_H$.

(iii) Existem Y espaço de Banach tal que $X \hookrightarrow Y$ e $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times Y \to \mathbf{R}$ bilinear contínua tal que

$$\langle v, h \rangle = (v|h)_H, \qquad v \in V, \qquad h \in H \tag{3.1}$$

(H2) (vi) Para todo $\mu > 0$ e $v \in V$ temos,

$$\langle v, A_\mu v \rangle \geq 0 \tag{3.2}$$

(H3) (iv) Existe $\beta: I \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ contínua tal que

$$(3.3) \qquad \langle v, F(t,v)\rangle \le \beta(t, \|v\|_H^2), \qquad t \in I, \qquad v \in V$$

Então existe $T_+ = T_+(\|\phi\|_H) \in (0,T]$ tal que, para todo $\mu > 0$, $u_\mu(t)$ pode ser estendida a $[0,T_+]$ satisfazendo

$$(3.4) \qquad \|u_\mu(t)\|_H^2 \le \rho(t), \qquad 0 \le t \le T_+$$

onde ρ é a solução maximal do PVI,

$$(3.5) \qquad \begin{cases} \rho'(t) = 2\beta(t, \rho(t)), & t > 0 \\ \rho(0) = \|\phi\|_H^2 \end{cases}$$

(onde entendemos por solução maximal uma solução $\rho = \rho(t)$, definida num intervalo maximal $[0,r)$ e maior ou igual a qualquer outra solução de (3.5) (ver **[CL]**)).

Demonstração: Seja $u_\mu = u_\mu(t)$ dada pelo teorema (2.1).

Exercício (3.2). *Mostre que*

$$(3.6) \qquad \partial_t \|u_\mu\|_H^2 = 2\langle u_\mu, \partial_t u_\mu\rangle, \qquad 0 < t \le T_\mu$$

*(**Sugestão:** Tome o quociente de Newton, use o fato que $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ é bilinear, simétrica, contínua e que $u_\mu(t) \in V$ se $t \in (0, T_\mu]$)*

Logo (3.6) e $(1)_\mu$ implicam

$$(3.7) \qquad \partial_t \|u_\mu(t)\|_H^2 = -2\langle u_\mu, A_\mu u_\mu\rangle + 2\langle u_\mu, F(t,u_\mu)\rangle \le 2\beta(t, \|u_\mu(t)\|_H^2)$$

onde na desigualdade usamos (3.2) e (3.3).

Portanto se $\rho = \rho(t)$ é a solução maximal de (3.5), definida em $[0,T')$, então para $T_+ \in [0,T')$ temos, da teoria geral das EDO's que

$$(3.8) \qquad \|u_\mu(t)\|_H^2 \le \rho(t), \qquad t \in [0,T_\mu] \cap [0,T_+]$$

Assim, podemos estender $u_\mu = u_\mu(t)$ a $[0, T_+]$, satisfazendo (3.8), completando assim a demonstração.

∎

O resultado seguinte trata da existência de solução para o caso $\mu = 0$, a saber,

Teorema (3.3). *Se as hipóteses do teorema (3.2) são satisfeitas com X separável e:*

(H1) (iv) Existe $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]: H \times Y \to \mathbf{R}$ bilinear contínua tal que $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\big|_{H\times H}$ é um produto interno real em H e existe $C > 0$ tal que

$$(3.9) \qquad |h|_Y^2 \leq C[h,h], \qquad h \in H$$

(vii) Para $\mu \geq 0$,

$$(3.10) \qquad [h, A_\mu h] \geq 0, \qquad h \in H$$

(viii) $A_\mu \to A_0$ em $\beta(H; X)$ quando $\mu \downarrow 0$.

(H3) (v) $F: I \times H \to X$ é fracamente sequencialmente contínua (isto é, se $t_n \to t$ e $x_n \xrightarrow{H} x$ então $F(t_n, x_n) \xrightarrow{H} F(t,x)$).

(vi) Existe $\alpha: I \times \mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}_+$ não decrescente tal que

$$(3.11) \qquad [u - v, F(t,u) - F(t,v)] \leq \alpha(t, \|u\|_H, \|v\|_H)[u - v, u - v]$$

para $t \in I, u, v \in H$.

Então existe uma única $u_0 \in C_+([0, T_+]; H) \cap C_+^1([0, T_+]; X)$ solução de $(1)_0$ satisfazendo

$$(3.12) \qquad \|u_0(T)\|_H^2 \leq \rho(t), \qquad 0 \leq t \leq T_+$$

onde $\rho = \rho(t)$ é dada em (3.5) e

$$C_+([0,T_+];H) = \{f:[0,T_+] \to H: f \text{ é contínua á direita}\} \tag{3.13}$$

e

$$C_+^1([0,T_+];X) = \{g:[0,T_+] \to X: \text{ contínua tal que } g' \in C_+([0,T_+];X)\} \tag{3.14}$$

Demonstração: Considere Z o espaço de Hilbert obtido pelo completamento de H em relação a norma induzida do produto interno $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\big|_{H\times H}$. Denotemos $\|z\|_Z^2 = [z,z]$, $z \in Z$.

Exercício (3.4). $H \hookrightarrow Z \hookrightarrow Y$.
*(**Sugestão:** $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ é contínua em $H \times Y; H \hookrightarrow Y$ e (3.9))*

Existência: observemos primeiramente que existe

$$u_0(t) = \lim_{\mu\downarrow 0} u_\mu(t) \text{ em } Z \tag{3.15}$$

uniformemente em $t \in [0,T_+]$.

De fato, sejam $\mu, \nu > 0$ e $u_\mu = u_\mu(t)$, $u_\nu = u_\nu(t)$ são as soluções de $(1)_\mu$, $(1)_\nu$ dadas pelo teorema (3.1), respectivamente.

Exercício (3.5). *Mostre que para $t \in (0,T_+]$,*

$$\partial_t \|u_\mu - u_\nu\|_Z^2 = 2[u_\mu - u_\nu, \partial_t u_\mu - \partial_t u_\nu] \tag{3.16}$$

Logo de (3.16), $(1)_\mu, (1)_\nu$ segue

$$\begin{aligned}
\partial_t \|u_\mu(t) - u_\nu(t)\|_Z^2 &= 2[u_\mu - u_\nu, -A_\mu u_\mu + A_\nu u_\nu + F(t,u_\mu) - F(t,u_\nu)] \\
&= -2[u_\mu - u_\nu, A_\mu(u_\mu - u_\nu)] - 2[u_\mu - u_\nu, (A_\mu - A -_\nu)u_\nu] \\
&+ 2[u_\mu - u_\nu, F(t,u_\mu) - F(t,u_\nu)] \\
&\le 2\|u_\mu - u_\nu\|_H \|(A_\mu - A_\nu)u_\nu\|_Y \\
&+ 2\alpha(t, \|u_\mu\|_H, \|u_\nu\|_H)[u_\mu - u_\nu, u_\mu - u_\nu]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde usamos (3.10), a continuidade de $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ e (3.11).

Seja,

$$M := \sup_{0 \le t \le T_+} \rho^{1/2}(t) \tag{3.18}$$

Então de (3.17), (3.4) e (3.18) segue

$$\begin{aligned}
\partial_t \|u_\mu(t) - u_\nu(t)\|_Z^2 &\le 2M \|A_\mu - A_\nu\|_{\mathcal{B}(H;X)} \|u_\nu\|_H \\
&+ 2\alpha(T_+, M, M) \|u_\mu - u_\nu\|_Z^2 \\
&\le 2M^2 \|A_\mu - A_\nu\|_{\mathcal{B}(H;X)} \\
&+ 2\alpha(T_+, M, M) \|u_\mu(t) - u_\nu(t)\|_Z^2
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Logo, integrando de 0 a t, obtemos

$$\|u_\mu(t) - u_\nu(t)\|_Z^2 \le C \|A_\mu - A_\nu\|_{\mathcal{B}(H;X)} + C \int_0^t \|u_\mu(t') - u_\nu(t')\|_Z^2 \, dt' \tag{3.20}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall (exercício (3.4) cap. 1) temos

$$\|u_\mu(t) - u_\nu(t)\|_Z^2 \le C' \|A_\mu - A_\nu\|_{\mathcal{B}(H;X)} \tag{3.21}$$

Portanto de $(H2)$ (viii) segue a afirmação.

Mostraremos agora que

$$u_0(t) = \omega - \lim_{\mu \downarrow 0} u_\mu(t) \text{ em } H \tag{3.22}$$

uniformemente em $t \in [0, T_+]$ ($\omega - \lim =$ limite fraco). De fato, se $\varphi \in H$ considere $\varphi_\varepsilon \in V$ tal que

$$\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_H < \varepsilon \tag{3.23}$$

Deste modo,

$$
(3.24)\qquad \begin{aligned}
|(u_\mu(t) - u_\nu(t)|\varphi)_H| &\le |(u_\mu - u_\nu|\varphi - \varphi_\varepsilon)_H| + |(\varphi_\varepsilon|u_\mu - u_\nu)_H| \\
&\le \|u_\mu - u_\nu\|_H \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_H + \|\varphi_\varepsilon\|_V \|u_\mu - u_\nu\|_Y \\
&\le 2\rho^{1/2}(t) \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_H + \|\varphi_\varepsilon\|_V \|u_\mu - u_\nu\|_Y \\
&\le 2M \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_H + \|\varphi_\varepsilon\|_V \|u_\mu(t) - u_\nu(t)\|_Z
\end{aligned}
$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, (3.1), a continuidade de $\langle \cdot , \cdot \rangle$, (3.4), $Z \hookrightarrow Y$, (3.18).

Logo de (3.24) e (3.15) segue a afirmação. Como consequência segue que $u_0 \in C_\omega([0, T_+]; H)$ e satisfaz (3.12) (exercício).

Mostraremos agora que $u_0 = u_0(t)$ satisfaz $(1)_0$ q.t.p. em $[0, T_+]$. Para isto definamos

$$
(3.25)\qquad G_\mu(u_\mu(t)) = -A_\mu u_\mu(t) + F(t, u_\mu(t)), \qquad 0 \le t \le T_+
$$

e

$$
(3.26)\qquad G_0(u_0(t)) = -A_0 u_0(t) + F(t, u_0(t))
$$

De (3.22) e (H3) (v) segue que

$$
(3.27)\qquad F(t, u_\mu(t)) \rightharpoonup F(t, u_0(t)) \text{ em } X
$$

quando $\mu \downarrow 0$ (na verdade deveríamos tomar $\mu = \frac{1}{n}$ com $n \in \mathbf{N}$ e $n \to \infty$).

Exercício (3.6). *Mostre que*

$$
(3.28)\qquad A_\mu u_\mu(t) \rightharpoonup A_0 u_0(t) \text{ em } X
$$

quando $\mu \downarrow 0$, $t \in [0, T_+]$.

Portanto de (3.27) e (3.28) segue que

$$
(3.29)\qquad G_\mu(u_\mu(t)) \rightharpoonup G(u_0(t)) \text{ em } X
$$

quando $\mu \downarrow 0$, para $t \in [0, T_+]$.

Por outro lado,

$$(3.30) \qquad \partial_t u_\mu(t) = G_\mu(u_\mu(t), \qquad 0 \leq t \leq T_+$$

em X, logo integrando de ξ à t, obtemos

$$(3.31) \qquad u_\mu(t) - u_\mu(\xi) = \int_\xi^t G_\mu(u_\mu(t'))dt'$$

Como a aplicação

$$(3.32) \qquad \begin{array}{ccc} [0, T_+] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & G(u_0(t)) \end{array}$$

é fortemente mensurável (pois é limite fraco de funções fortemente mensuráveis e X é separável (consequência do teorema de Pettis; ver [Y])) segue que e Bochner integrável. Além disso do teorema da convergência dominada de Lebesgue obtemos,

$$(3.33) \qquad \int_\xi^t G_\mu(u_\mu(t'))dt' \underset{\mu \downarrow 0}{\rightharpoonup} \int_\xi^t G(u_0(t'))dt' \text{ em } X$$

logo, passando o limite fraco em X, quando $\mu \downarrow 0$, em (3.31) segue que,

$$(3.34) \qquad u_0(t) - u_0(\xi) = \int_\xi^t G(u_0(t'))dt', \qquad \xi, t \in [0, T_+]$$

isto é, $u_0 \in AC([0, T_+]; X) \cap C_\omega([0, T_+]; H)$ e satisfaz $(1)_0$ q.t.p. em $[0, t_+]$.

Como

$$(3.35) \qquad u_0(t) \rightharpoonup \phi, \qquad t \downarrow 0$$

em H e de (3.4)

$$(3.36) \qquad \limsup_{t \downarrow 0} \|u_0(t)\|_H \leq \lim_{t \downarrow 0} \rho^{1/2}(t) = \|\phi\|_H$$

segue então que

$$u_0(t) \to \phi, \qquad t \downarrow 0 \tag{3.37}$$

em H (pois H é Hilbert portanto uniformemente convexo). Deste modo concluímos que u_0 é contínua à direita de $t = 0$ em H.

Para completar a demonstração da existência precisamos mostrar que $u_0 \in C_+([0,T_+];H)$ (pois isto juntamente com o fato que u_0 satisfaz $(1)_0$ q.t.p em $[0,T_+]$, implicam que $u_0 \in C_+^1([0,T_+];X)$).

Antes mostraremos a unicidade em $C_\omega([0,T_+];H) \cap AC([0,T_+];X)$.

Unicidade: Sejam $v, \omega \in C_\omega([0,T_+];H) \cap AC([0,T_+];X)$ satisfazendo $(1)_0$. Então considerando,

$$f(t) = \|v(t) - \omega(t)\|_Z^2, \qquad 0 \le t \le T_+ \tag{3.38}$$

temos, pelo exercício (3.5), que para $0 < t \le T_+$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \partial_t \|v(t) - \omega(t)\|_Z^2 = 2[v - \omega, \partial_t v - \partial_t \omega] \\ &= 2[v - \omega, -A_0(v - \omega)] + 2[v - \omega, F(t,v) - F(t,\omega)] \\ &\le 2\alpha(t, \|v\|_H \|\omega\|_H)[v - \omega, v - \omega] \\ &= 2\alpha(T_+, M, M)\|v - \omega\|_Z^2 = 2\alpha(T_+, M, M)\|f(t)\|_Z^2 \end{aligned} \tag{3.39}$$

onde usamos (3.10), (3.11) e $M = \max\left\{\sup_{0\le t\le T_+} \|v(t)\|_H, \sup_{0\le t\le T_+} \|\omega(t)\|_H\right\}$.

Logo, integrando de 0 à t, obtemos

$$f(t) \le f(0) + C\int_0^t f(t')dt', \qquad 0 \le t \le T_+ \tag{3.40}$$

onde $C = \alpha(T_+, M, M)$. Aplicando a desigualdade de Gronwall (exercício (3.4) cap 1) segue

$$f(t) \le 0, \qquad 0 \le t \le T_+ \tag{3.41}$$

isto é, $f(t) = 0$ e por (3.38) segue que $v(t) = \omega(t)$, $0 \leq t \leq T_+$, logo a unicidade.

Por fim, mostraremos que u_0 é contínua a direita de $\xi \in [0, T_+)$. Para isto consideremos

$$(3.42) \qquad u(t) := u_0(t + \xi), \qquad 0 \leq t + \xi \leq T_+$$

Exercício (3.7). *u satisfaz*

$$(3.43) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t) = -A_0 u(t) + G(t, u(t)), & 0 < t \\ u(0) = u_0(\xi) \end{cases}$$

onde $G(t, \psi) = F(t + \xi, \psi)$, q.t.p em $[0, T_+]$.

G satisfaz as condições de $(H3)$ em $\tilde{I} = [0, T_+ - \xi]$. Portanto, $u = u(t)$ é contínua a direita de ξ em H. Da unicidade, segue que u_0 é contínua a direita de ξ, completando a demonstração do teorema.

∎

O resultado que segue exibe condições suficientes para que a solução u_0 seja contínua.

Teorema (3.8). *Se as hipóteses do teorema (3.3) são satisfeitas e:*

(H2) (viii) A_0 satisfaz as condições do teorema de Hille-Yosida ou de Stone (veja o apêndice B e as referências ali mencionadas). Além disso $e^{-tA_0}h \in H$, $h \in H$ e a aplicação

$$(3.44) \qquad \begin{array}{ccc} [0, \infty) & \longrightarrow & H \\ t & \longmapsto & e^{-tA_0}h \end{array}$$

é contínua, para $h \in H$.

(ix) Para $v \in V$

$$(3.45) \qquad \langle v, A_0 v \rangle = 0$$

(x) Para $h \in H$

(3.46)
$$[h, A_0 h] = 0$$

(H3) (vii) Vale (3.3) e (3.11) com $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $[\cdot , \cdot]$ *substituídas por* $|\langle \cdot , \cdot \rangle|$ *e* $|[\cdot , \cdot]|$.

Então existe uma única $u_0 \in C([0, T_+; H) \cap C^1([0, T_+]; X)$ solução de $(1)_0$ satisfazendo (3.12).

Demonstração:

Exercício (3.9). *Mostre que podemos supor* $A_0 = 0$*, sem perda de generalidade.* (**Sugestão:** *Considere* $\tilde{A}_\mu := A_\mu - A_\mu - A_0$ *e* $\tilde{F}(t, \Psi) := A_0 \Psi + F(t, \Psi)$ *e mostre que* $\tilde{A}_\mu$ *e* $\tilde{F}$ *satisfazem (H2) e (H3), respectivamente).*

Do teorema (3.3) segue a existência e a unicidade de $u_0 \in C_+([0, T_+]) \cap C^1_+([0, T_+]; X)$ solução de $(1)_0$ satisfazendo (3.12).

Seja $\xi \in (0, T_+]$. Consideremos o problema de Cauchy

(3.47)
$$\begin{cases} \partial_t v(t) = -F(-t, v(t)), & t \leq -\xi \\ v(-\xi) = u_0(\xi) \end{cases}$$

Das hipóteses do teorema e do teorema (3.3) segue que existe uma única $v_0 \in C_+([-T'_+, -\xi]) \cap C^1_+([-T'_+, -\xi]; X)$ solução de (3.47). Pela unicidade segue que $v_0(t) = u_0(-t)$ e portanto $u_0 \in C([0, T_+]; H) \cap C^1([0, T_+; X)$.

∎

Para completar esta seção faremos observações relacionadas com os resultados acima.

Observações (3.10):

1) A idéia central na demonstração do teorema (3.8) (i.e. considerar (3.47)) é devida a T. Kato em [**K10**]

2) Não conseguímos, até o momento, tratar a dependência contínua da solução em relação ao dado inicial (ou a função F) usando somente regularização parabólica (mesmo em problemas concretos, como para a BO, que será tratada na próxima secção). Isto torna, em príncipio, o método da regularização parabólica menos eficiente do que a teoria das equações quase-lineares de T. Kato desenvolvida no capítulo 3.

4. Aplicações e Comentários

Nesta secção aplicaremos os resultados obtidos na secção anterior ao problema de Cauchy associado a BO. Mais explicitamente, trataremos do problema de Cauchy

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \partial_t u + \sigma\partial_x^2 u + u\partial_x u = 0 & t > 0, \qquad x \in \mathbf{R} \\ u(0) = \phi \end{cases}$$

onde $u = u(t, x)$ e σ e a transformada de Hilbert, isto é,

$$(4.2)\qquad (\sigma\psi)(x) = \frac{1}{\pi} P \cdot V \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(y)}{y - x} dy$$

no espaço de Sobolev $H^s(\mathbf{R})$.

Mais precisamente, temos o,

Teorema (4.1). *Seja $\phi \in H^s(\mathbf{R}), s > 3/2$. Então existe $T_s = T(s, \|\phi\|_s) > 0$ e uma única $u \in C([0, T_s]; H^s) \cap [0, T_s]; H^{s-2})$ solução real de (4.1). Além disso*

$$(4.3)\qquad \|u(t)\|_s \leq \rho^{1/2}(t), \qquad 0 \leq t \leq T$$

onde $\rho = \rho(t)$ *é a solução do P.V.I.*

$$(4.4) \qquad \begin{cases} \rho'(t) = 2C_s\rho^{3/2}(t), & t > 0 \\ \rho(0) = \|\phi\|_s^2 \end{cases}$$

Por fim, $u = u(t)$ *depende continuamente de* ϕ*, no seguinte: sejam* $\phi^n \in H$ *e* $u^n \in C([0,T_n];H^s) \cap C^1([0,T_n];H^{s-2})$ *solução de (4.1) com* $u^n(0) = \phi^n$*,* $n \in \mathbf{N}$*. Se* $\phi^n \to \phi$ *em* H^s *então dado* $T' \in (0,T_s)$*, existe* $n_0 = n_0(T') \in \mathbf{N}$ *tal que se* $n \geq n_0$*,* $u^n = n^n(t)$ *esta definida em* $[0,T']$ *e*

$$(4.5) \qquad \sup_{0\leq t\leq T'} \|u^n(t) - u(t)\|_s \to 0$$

quando $n \to \infty$*.*

Demonstração: Começaremos tratando da existência e unicidade da solução em H^s. Para isto consideremos,

$$(4.6) \qquad V := H^{3s}, \quad H := H^s, \quad X := H^{s-2} \quad \text{e} \quad Y := H^{-s}$$

Defina $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : V \times Y \to \mathbf{R}$, $[\,\cdot\,, \cdot\,] : H \times Y \to \mathbf{R}$ por,

$$(4.7) \qquad \langle v,y \rangle := \int_{\mathbf{R}} (1+\xi^2)^s \hat{v}(\xi)\overline{\hat{y}(\xi)}d\xi, \qquad v \in V, \qquad y \in Y$$

e

$$(4.8) \qquad [h,y] := \int_{\mathbf{R}} \hat{h}(\xi)\overline{\hat{y}(\xi)}d\xi, \qquad h \in H, \qquad y \in Y$$

Exercício (4.2). *Mostre* $V, H, X, Y, \langle\,\cdot\,, \cdot\,\rangle$ *e* $[\,\cdot\,, \cdot\,]$ *satisfazem (H1) (i)→(iv).*

Considere, para $\mu \geq 0$,

$$(4.9) \qquad A_\mu := -\mu\partial_x^2 \qquad (\text{logo } A_0 = 0)$$

Exercício (4.3). *Mostre* $\{A_\mu\}_{\mu\geq 0}$ *satisfaz (H2) (i)→(ix).*

Seja $F:\mathbf{R}\times H\to X$ dada por

$$F(t,u) = -\sigma\partial_x^2 u - u\partial_x u, \qquad u\in H \tag{4.10}$$

Exercício (4.4). *Mostre que* F *satisfaz (H3) (i), (ii).*
(**Sugestão:** *Use o fato que* σ *é operador limitado em* H^r *e que* H^q *é uma álgebra de Banach se* $q>\frac{1}{2}$*)*

Se $u,v\in H$ temos,

$$\begin{aligned}
\|F(t,u)-F(t,v)\|_X &= \left\|-\sigma\partial_x^2(u-v) - u\partial_x u + v\partial_x v\right\|_{s-2}\\
&\leq \left\|\sigma\partial_x^2(u-v)\right\|_{s-2} + \frac{1}{2}\left\|\partial_x(u^2-v^2)\right\|_{s-2}\\
&\leq C\left\|\partial_x^2(u-v)\right\|_{s-2} + \frac{1}{2}\left\|u^2-v^2\right\|_{s-1}\\
&\leq C\|u-v\|_s + \frac{1}{2}\|u+v\|_{s-1}\|u-v\|_{s-1}\\
&\leq \left[C+\frac{1}{2}(\|u\|_s+\|v\|_s)\right]\|u-v\|_s\\
&= \left[C+\frac{1}{2}(\|u\|_H+\|v\|_H)\right]\|u-v\|_H
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde usamos o fato que $\sigma\in\mathcal{B}(H^r)$; H^q é algebra de Banach se $q>1/2$ e que $H^{s-1}\hookrightarrow H^s$. Portanto temos (H3)(iii).

Mostremos que (H3) (iv) ocorre. Para isto calculemos,

$$|\langle v, F(t,v)\rangle| = \left|\langle v, -\sigma\partial_x^2 v - v\partial_x v\rangle\right| \leq \left|(v|\sigma\partial_x^2 v)_s\right| + |(v|v\partial_x v)_s| \tag{4.12}$$

Exercício (4.5). *Mostre que* $(v\,|\,\sigma\partial_x^2 v)_s = 0$, *para* $v\in V=H^{3s}$

(**Sugestão:** *Integração por partes e o fato que* $\sigma^* = -\sigma$).

Agora, da desigualdade de T. Kato (teorema (A.10) do apêndice) segue que

$$|(v|v\partial_x v)_s| \leq C_s \|v\|_s^3 \tag{4.13}$$

Logo do exercício (4.5) e de (4.13) temos

$$|\langle v, F(t,v)\rangle| \leq C_s \|v\|_H^3 = \beta(\|v\|_H^2) \tag{4.14}$$

onde $\beta: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ é dada por $\beta(x) = C_s x^{3/2}$, mostrando (H3)(iv).

Exercício (4.6). *Mostre que F é fracamente sequencialmente contínua.*

(Ref.: Teorema (4.1) de [**S**])

Por fim mostraremos que (H3) (vi) é verdadeiro. Para este fim, sejam $u, v \in V$. De (4.10), (4.8) e da identidade de Parseval segue que

$$\begin{aligned} |[u-v, F(t,u) - F(t,v)]| &= \left|[u-v, -\sigma\partial_x^2(u-v) - u\partial_x u + v\partial_x v]\right| \\ &\leq \left|(u-v|\sigma\partial_x^2(u-v))_0\right| + \frac{1}{2}\left|(u-v|\partial_x(u^2-v^2))_0\right| \end{aligned} \tag{4.15}$$

Exercício (4.7). *Mostre que $(\omega \,|\, \sigma\partial_x^2\omega)_0 = 0$ para $\omega \in V = H^{3s}$*

Agora, por integração por partes segue que

$$\begin{aligned} \left|(u-v \,|\, \partial_x(u^2-v^2))_0\right| &= |(\partial_x(u-v) \,|\, (u+v)(u-v))_0| \\ &= \frac{1}{2}\left|(\partial_x(u-v)^2 \,|\, (u+v)_0\right| = \frac{1}{2}\left|((u-v)^2 \,|\, (u+v))_0\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\|u+v\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|u-v\|_0^2 \leq \frac{1}{2}C_s\|u+v\|_s\|u-v\|_0^2 \\ &\leq \frac{1}{2}C_s\{\|u\|_H + \|v\|_H\}[u-v, u-v] \end{aligned} \tag{4.16}$$

onde na penúltina desigualdade usamos a imersão de Sobolev e na última, a identidade de Parseval. Logo de (4.15), do exercício (4.5) e de (4.16) temos

$$(4.17) \qquad |[u-v, F(t,u)-F(t,v)]| \leq \frac{1}{4}C_s\left\{\|u\|_H + \|v\|_H\right\}[u-v,u-v]$$

Portanto (H3) (vi).

Assim do teorema (3.8) segue a existência de $T_s = T(s, \|\phi\|_s) > 0$ e uma única $u \in C([0,T_s]; H^s) \cap C^1([0,T_s]; H^{s-2})$ solução de (4.1) satisfazendo (4.3).

Passaremos agora a tratar do problema da dependência contínua.

Como foi comentado anteriormente a dependência contínua deve ser mostrada separadamente. Para isto exibiremos a seguir uma técnica que pode ser aplicada em uma grande classe de problemas não-lineares. A ideía central e devida a J. Bona e R. Smith (ver **[BS]**), e consiste em: sejam $u = u(t)$ e $u^n = u^n(t)$ são soluções de (4.1), com dado inicial ϕ e ϕ^n, respectivamente e $\phi^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi$ em H^s. Construímos, ϕ_ε e $\phi_\varepsilon^n \in H^\infty$ tais que $\phi_\varepsilon \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} \phi$, $\phi_\varepsilon^n \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} \phi^n$ em H^s, onde o segundo limite e uniforme em $n \in \mathbb{N}$. Consideramos $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t)$ e $u_\varepsilon^n = u_\varepsilon^n(t)$ as soluções de (4.1), com dado inicial ϕ_ε e ϕ_ε^n, respectivamente e mostramos que $u_\varepsilon^n(t) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} u^n(t)$ em H^s e que a solução aproximada $u_\varepsilon(t)$ depende continuamente de ϕ_ε em H^s. Devido a convergência uniforme em n de $\phi_\varepsilon^n \to \phi^n$ seguirá então que $u^n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(t)$ em H^s e portanto a dependência contínua.

Primeiramente diremos como construir as ϕ_ε com as propriedades requeridas.

Exercício (4.8). *(As aproximações de Bona-Smith). Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), 0 \leq \varphi(x) \leq 1$, tal que supp $\varphi \subset [-1,1]$ e se $\psi(x) = 1-\varphi(x)$ então $\psi^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.*

Para $\varepsilon > 0$ e $\phi \in H^s(\mathbb{R}), s > 0$ defina,

$$(4.18) \qquad \phi_\varepsilon(x) = (\varphi(\varepsilon\xi)\hat{\phi})^\vee(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Então, $\phi_\varepsilon \in H^\infty(\mathbb{R})$ e para $0 < \varepsilon \leq 1$, $r \geq 0$ existe $C = C(s,r,\varphi) > 0$ tal que

$$(4.19) \qquad \|\phi_\varepsilon\|_{s+r} \leq C\varepsilon^{-r}\|\phi\|_s$$

(4.20) $$\|\phi_\varepsilon - \phi\|_{s-r} \leq C\varepsilon^r \|\phi\|_s$$

(4.21) $$\phi_\varepsilon \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} \phi \text{ em } H^s$$

Além disso, se $\phi^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi$ em H^s então

(4.22) $$\|\phi_\varepsilon^n - \phi^n\|_s \to 0$$

quando $\varepsilon \downarrow 0$, uniformemente em n.

(Ref.: Lema 5 pg. 508 de [BS]).

Para $0 < \eta \leq 1$ seja $\phi_\eta \in H^\infty$ dada pelo exercício (4.6) e $u_\eta \in C([0, T_\eta]; H^\infty)$ a solução de (4.1) com dado inicial ϕ_η.

Da primeira parte do teorema segue que

(4.23) $$\|u_\eta(t)\|_s \leq \rho_\eta(t), \qquad 0 \leq t \leq T_\eta$$

onde $\rho_\eta = \rho_\eta(t)$ é a solução de (4.4) com dado inicial $\|\phi_\eta\|_s^2$.

Como $\phi_\eta \underset{\eta\downarrow 0}{\longrightarrow} \phi$ em H^s, segue da teoria geral das EDO's que para $T' \in (0, T_s)$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $0 < \eta \leq \varepsilon_0$ então $\rho_\eta = \rho_\eta(t)$ pode ser estendida a $[0, T']$ e converge uniformemente para $\rho = \rho(t)$ em $[0, t']$. Logo para $0 < \eta \leq \varepsilon_0$

(4.24) $$|\rho_\eta(t)| \leq \sup_{0\leq t\leq T'} |\rho(t)| = C(s, T', \|\phi\|_s) \quad , 0 \leq t \leq T'$$

Portanto de (4.23) e (4.24), podemos estender $u_\eta = u_\eta(t)$ a $[0, T']$ satisfazendo (4.23) em $[0, T']$.

Afirmamos que se $0 < \delta \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existe $C = C(s, T', \|\phi\|_s) > 0$ tal que

(4.25) $$\sup_{0\leq t\leq T'} \|u_\delta(t) - u_\varepsilon(t)\|_s \leq C\left\{\varepsilon^{\gamma(s)} + \|\phi_\delta - \phi_\varepsilon\|_s\right\}$$

onde $\gamma(s) = \frac{\nu s}{\nu+1}$, com $0 \leq \nu < s - \frac{3}{2}$.

De fato, se $\omega = u_\varepsilon - u_\delta$ então ω satisfaz

$$\partial_t\omega + \sigma\partial_x^2\omega - \omega\partial_x\omega + \partial_x(u_\varepsilon\omega) = 0 \tag{4.26}$$

$$\omega(0) = \phi_\varepsilon - \phi_\delta \tag{4.27}$$

Como $u_\varepsilon(t), u_\delta(t) \in H^\infty$, temos que $\omega(t) \in H^\infty$, $0 \le t \le T'$ e

$$\begin{aligned}\partial_t \|\omega(t)\|_0^2 &= 2(\omega \,|\, \partial_t\omega)_0 = -2(\omega \,|\, \sigma\partial_x^2\omega)_0 + 2(\omega \,|\, \omega\partial_x\omega)_0 - 2(\omega \,|\, \partial_x(u_\varepsilon\omega))_0 \\ &= -2(\omega \,|\, \partial_x(u_\varepsilon\omega))_0 = -(\omega^2 \,|\, \partial_x u_\varepsilon)_0 \le \|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^\infty} \|\omega\|_0^2 \\ &\le C_s \|u_\varepsilon\|_s \|\omega\|_0^2 \le C\|\omega(t)\|_0^2\end{aligned} \tag{4.28}$$

onde usamos o exercício (4.7), integração por partes, a imersão de Sobolev, (4.23) e (4.24). Logo, integrando de 0 à t, obtemos,

$$\|\omega(t)\|_0^2 \le \|\omega(0)\|_0^2 + C\int_0^t \|\omega(t')\|_0^2\, dt' \tag{4.29}$$

Portanto da desigualdade de Gronwall (exercício (3.4) cap. 1)

$$\begin{aligned}\|\omega(t)\|_0^2 &\le \|\omega(0)\|_0^2 \,\mathrm{e}^{Ct} \le \mathrm{e}^{CT'} \|\phi_\varepsilon - \phi_\delta\|_0^2 \\ &\le C\left\{\|\phi_\varepsilon - \phi\|_{s-s}^2 + \|\phi - \phi_\delta\|_{s-s}^2\right\} \le C\left\{\varepsilon^{2s} + \delta^{2s}\right\}\|\phi\|_s \\ &\le C\varepsilon^{2s}\end{aligned} \tag{4.30}$$

onde usamos (4.20) com $r = s$ e o fato que $\delta \le \varepsilon$. Logo,

$$\sup_{0\le t\le T'} \|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\|_0 \le C\varepsilon^s \tag{4.31}$$

Agora, lembrando que $I = (-\Delta)^{1/2}$ então para $0 < t \le T_s$,

$$\begin{aligned}\partial_t \|I^s\omega(t)\|_0^2 &= 2(I^s\omega \,|\, I^s\partial_t\omega)_0 \\ &= -2(I^s\omega \,|\, I^s\sigma\partial_x^2\omega)_0 + 2(I^s\omega \,|\, I^s(\omega\partial_x\omega))_0 - 2(I^s\omega \,|\, I^s\partial_x(u_\varepsilon\omega))_0 \\ &\le 2\left\{|(I^s\omega \,|\, I^s(\omega\partial_x u_\varepsilon))_0| + |(I^s\omega \,|\, ^s(u_\delta\partial_x\omega))_0|\right\}\end{aligned} \tag{4.32}$$

mas, como em (A.49) (apêndice)

$$
\tag{4.33}
\begin{aligned}
\left|(I^s\omega \mid I^s(u_\delta \partial_x \omega))_0\right| &\le \|I^s\omega\|_0 \|[I^s, u_\delta]\partial_x\omega\|_0 + \frac{1}{2}\left|(\partial_x u_\delta I^s\omega \mid I^s\omega)_0\right| \\
&\le C_s \|I^s\omega\|_0 \left\{\|\partial_x u_\delta\|_{s-1} \|\omega\|_s + \|\partial_x u_\delta\|_{s-1} \|\omega\|_s\right\} \\
&+ \frac{1}{2}\|\partial_x u_\delta\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|I^s\omega\|_0^2 \\
&\le C_s' \|u_\delta\|_s \|\omega\|_s^2 \le C\|\omega(t)\|_\delta^2
\end{aligned}
$$

onde usamos a imersão de Sobolev, (4.23) e (4.24). Por fim,

$$
\tag{4.34}
\begin{aligned}
\left|(I^s\omega \mid I^s(\omega\partial_x u_\varepsilon))_0\right| &\le \|I^s\omega\|_0 \|I^s(\omega\partial_x u_\varepsilon)\|_0 \\
&\le \|\omega\|_s \left\{\|[I^s, \partial_x u_\varepsilon]\omega\|_0 + \|\partial_x u_\varepsilon I^s\omega\|_0\right\} \\
&\le \|\omega\|_s \Big\{C(s,\gamma)\Big[\|\partial_x u_\varepsilon\|_s \|\omega\|_\gamma + \|\partial_x u_\varepsilon\|_{\gamma+1} \|\omega\|_{s-1}\Big] \\
&+ \|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|I^s\omega\|_0\Big\}
\end{aligned}
$$

onde usamos o lema (1.1) de **[ST]** com $\frac{1}{2} < \gamma \le s-1$, para estimar o comutador acima. Logo pela imersão de Sobolev. (4.23), (4.24) segue que

$$
\tag{4.35}
|(I^s\omega \mid I^s(\omega\partial_x u_\varepsilon))_0 \le C\|\omega\||_s \left\{\Big[\|u_\varepsilon\|_{s+1}\|\omega\|_\gamma + \|u_\varepsilon\|_{\gamma+2}\|\omega\|_{s-1}\Big] + \|\omega\|_s\right\}
$$

Exercício (4.10). *Mostre que para* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$,

$$
\tag{4.36}
\|u_\varepsilon(t)\|_{s+1} \le C(s, T', \|\phi\|_s)\|\phi_\varepsilon\|_{s+1}, \qquad 0 \le t \le T'
$$

(Sugestão: *Calcule* $\partial_t \|u_\varepsilon(t)\|_{s+1}^2$, *use a desigualdade de Kato, (4.23) e (4.24)).*

Logo o exercício (4.10) e (4.19) implicam,

$$
\tag{4.37}
\|u_\varepsilon(t)\|_{s+1} \le C\varepsilon^{-1}\|\phi\|_s \le C'\varepsilon^{-1}
$$

Da interpolação dos espaços de Sobolev (ver [**BL**]) segue para $0 \leq r \leq s$ temos,

$$\|\omega\|_r \leq C_s \|\omega\|_s^{r/s} \|\omega\|_0^{1-r/s} \tag{4.38}$$

Portanto de (4.37) e (4.38) obtemos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t)\|_{s+1} \|\omega(t)\|_\gamma \|\omega(t)\|_s &\leq C'\varepsilon^{-1} \|\omega\|_s^{\gamma/s+1} \|\omega\|_0^{1-\gamma/s} \\ &\leq C\varepsilon^{s-1-\gamma} \|\omega\|_s^{1+\gamma/s} \leq C\left\{\frac{2\nu s}{\varepsilon^{(1+\nu)}} + \|\omega\|_s^2\right\} \end{aligned} \tag{4.39}$$

onde na penúltima desigualdade usamos (4.31).

Se $\gamma \in (s-2, s-1)$ então, pelo exercício (4.7) temos

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{\gamma+2} \leq C(s, T', \|\phi\|_s) \|\phi_\varepsilon\|_{\gamma+2} \leq C\varepsilon^{s-2-\gamma} \|\phi\|_s \tag{4.40}$$

onde usamos (4.19) com $r = \gamma + 2$. Logo de (4.38), (4.40) e (4.31) obtemos,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t)\|_{\gamma+2} \|\omega(t)\|_{s-1} \|\omega(t)\|_s &\leq C'\varepsilon^{(s-2-r)+1} \|\omega\|_s^{2-1/s} \\ &\leq C'\left\{\varepsilon^{2\nu s} + \|\omega(T)\|_s^2\right\} \end{aligned} \tag{4.41}$$

Assim, de (4.35), (4.39) e (4.41) segue

$$|(I^s\omega \mid I^s(\omega\partial_x u_\varepsilon))_0| \leq C\left\{\varepsilon^{\frac{2\nu s}{1+\nu}} + \|\omega(t)\|_s^2\right\} \tag{4.42}$$

Voltando a (4.32) temos, por (4.33) e (4.42), que

$$\partial_t \|I^s\omega(t)\|_0^2 \leq C\left\{\varepsilon^{\frac{2\nu s}{1+\nu}} + \|\omega(t)\|_s^2\right\} \tag{4.43}$$

Integrando de 0 à t,

$$\begin{aligned} \|I^s\omega(t)\|_0^2 &\leq \|I^s\omega(0)\|_0^2 + C\int_0^t \left\{\varepsilon^{\frac{2\nu s}{1+\nu}} + \|\omega(t')\|_s^2\right\} dt' \\ &\leq \|\omega(0)\|_s^2 + C'\varepsilon^{\frac{2\nu s}{1+\nu}} + C\int_0^t \|\omega(t')\|_s^2\, dt' \end{aligned} \tag{4.44}$$

Como,

$$
(4.45)\qquad
\begin{aligned}
\|\omega(t)\|_s^2 &\leq \|\omega(t)\|_0^2 + \|I^s\omega(t)\|_0^2 \\
&\leq C\varepsilon^s + \|\omega(0)\|_s^2 + C'\varepsilon^{\frac{2\nu s}{1+\nu}} + C\int_0^t \|\omega(t')\|_s^2\, dt'
\end{aligned}
$$

onde usamos (4.31) na última desigualdade. Aplicando a desigualdade de Gronwall segue

$$
(4.46)\qquad
\begin{aligned}
\|\omega(t)\|_s^2 &\leq C\left\{\varepsilon^{\frac{2\nu s}{1+\nu}} + \|\omega(0)\|_s^2\right\} e^{C\int_0^t dt'} \\
&\leq C\left\{\varepsilon^{2\gamma(s)} + \|\omega(0)\|_s^2\right\}
\end{aligned}
$$

para $0 \leq t \leq T'$, mostrando (4.25).

Exercício (4.11). *Mostre que* $u_\varepsilon(t) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} v(t)$ *em* H^s*, uniformemente em* $t \in [0, T']$ *e que* $v(t) = u(t)$ *a solução de (4.1).*

Passemos agora a tratar da dependência contínua propriamente dita. Sejam $\phi_\varepsilon, \phi_\varepsilon^n$ as aproximações de Bona-Smith associadas a ϕ e ϕ^n, respectivamente. Considere $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t)$, $u_\varepsilon^n = u_\varepsilon^n(t)$ as soluções de (4.1) com dado inicial ϕ_ε e ϕ_ε^n, respectivamente. Então de (4.23) e (4.24) segue $u_\varepsilon(t), u_\varepsilon^n$ podem ser estendidas a $[0, T']$ se $n \geq N_0$ e $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Logo, para $t \in [0, T']$ temos

$$
(4.47)\qquad \|u^n(t) - u(t)\|_s \leq \|u^n(t) - u_\varepsilon^n(t)\|_s + \|-u_\varepsilon^n(t)\|_s + \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_s
$$

Fazendo $\delta \downarrow 0$ em (4.25) e usando o exercício (4.11) seguem

$$
(4.48)\qquad \sup_{0\leq t\leq T'} \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_s \leq C\left\{\varepsilon^{\gamma(s)} + \|\phi_\varepsilon - \phi\|_s\right\}
$$

e

$$
(4.49)\qquad \sup_{0\leq t\leq T'} \|u^n(t) - u_\varepsilon^n(t)\|_s \leq C\left\{\varepsilon^{\gamma(s)} + \|\phi^n - \phi_\varepsilon^n\|_s\right\}
$$

Logo de (4.48), (4.49), (4.21) e (4.22) segue que a 1ª e a 3ª parcelas do lado direito de (4.47) tendem a zero, quando $\varepsilon \downarrow 0$, uniformemente em $t \in [0, T']$ (e em n). Portanto resta mostrar que

$$\|u_\varepsilon^n(t) - u_\varepsilon(t)\|_s \to 0, \qquad n \to \infty \tag{4.50}$$

e $\varepsilon \downarrow 0$. Para isto considere $\omega := u_\varepsilon^n - u_\varepsilon$. Logo ω satisfaz

$$\begin{cases} \partial_t\omega + \sigma\partial_x^2\omega - \omega\partial_x\omega + \partial_x(u_\varepsilon^n\omega) = 0, & 0 < t \le T' \\ \omega(0) = \phi_\varepsilon^n - \phi_\varepsilon \end{cases} \tag{4.51}$$

Assim, para $0 < t \le T'$ temos

$$\begin{aligned} \partial_t \|\omega(t)\|_0^2 &= -2(\omega \,|\, \sigma\partial_x^2\omega)_0 + (\omega \,|\, \omega\partial_x\omega)_0 - (\omega \,|\, \partial_x(u_\varepsilon^n\omega))_0 \\ &= -\frac{1}{2}(\omega^2 \,|\, \partial_x u_\varepsilon^n)_0 \le \frac{1}{2}\|\partial_x u_\varepsilon^n\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|\omega\|_0^2 \\ &\le C_s \|u_\varepsilon^n\|_s \|\omega\|_0^2 \le C' \|\omega(t)\|_0^2 \end{aligned} \tag{4.52}$$

onde usamos o exercício (4.8), integração por partes, imersão de Sobolev, (4.23) e (4.24). Logo integrando de 0 à t,

$$\|\omega(t)\|_0^2 \le \|\omega(0)\|_0^2 + C' \int_0^t \|\omega(t')\|_0^2 \, dt', \qquad 0 \le t \le T' \tag{4.53}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall segue

$$\begin{aligned} \|\omega(t)\|_0^2 &\le \|\omega(0)\|_0^2 \, e^{C' \int_0^t dt'} \\ &\le C \left\{ \|\phi_\varepsilon^n - \phi^n\|_0^2 + \|\phi^n - \phi\|_0^2 + \|\phi - \phi_\varepsilon\|_0^2 \right\} \\ &\le C\varepsilon^{2s} \end{aligned} \tag{4.54}$$

onde usamos (4.20) e o fato que $\phi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi$ em H^s.

Exercício (4.12). *Mostre que*

$$\partial_t \|D^s\omega(t)\|_0^2 \leq C\left\{\varphi^{\frac{2\nu s}{1+\nu}} + \|\omega(t)\|_s^2\right\} \tag{4.55}$$

*(**Sugestão:** Ver (4.32))*

Integrando de 0 à t

$$\|I^s\omega(t)\|_0^2 \leq \|I^s\omega(0)\|_0^2 + C\varepsilon^{2\gamma(s)} + C\int_0^t \|\omega(t')\|_s^2\, dt' \tag{4.56}$$

Mas, de (4.54) e (4.56) temos,

$$\begin{aligned} \|\omega(t)\|_s^2 &\leq \|\omega(t)\|_0^2 + \|I^s\omega(t)\|_0^2 \\ &\leq C\left\{\|\omega(0)\|_s^2 + \varepsilon^{2\gamma(s)} + \int_0^t \|\omega(t')\|_s^2\, dt'\right\} \end{aligned} \tag{4.57}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall,

$$\|u_\varepsilon^n(t) - u_\varepsilon(t)\|_s \leq C\left\{\|\phi_\varepsilon^n - \phi_\varepsilon\|_s + \varepsilon^{2\gamma(s)}\right\} \to 0 \tag{4.58}$$

quando $n \to \infty$ e $\varepsilon \downarrow 0$ completando a demonstração do teorema.

∎

Observações (4.13):

1) De maneira semelhante podemos tratar a KdV, a ILW etc... Em geral, podemos provar um resultado semelhante ao teorema (4.1) para o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u - iP(D)u + f(t)u\partial_x u = 0 \\ u(t_0) = \phi \end{cases} \tag{4.59}$$

onde $\phi \in H^s$, $s >$ min $\{3/2, k/2\}, k \in \mathbf{N}$, $t \in I_T = [-T, T]$, $f \in C(I_T)$ e $P(D) \in \mathcal{B}(H^s, H^{s-k})$ e o operador pseudo-diferencial cujo símbolo, $p = p(\xi)$, é uma função real contínua e ímpar, isto é

$$P(D)\psi = (p(\xi)\hat{\psi})^\vee, \qquad \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \tag{4.60}$$

A verificação deste fato será deixada ao leitor (para maiores informações sobre esta equação veja [N]).

2) Na demonstração da dependência contínua, o leitor atendo, verificará que foi usado o seguinte fato importante e não trivial: $\phi \in H^{s'}(\mathbf{R}), s' \geq s > 3/2$ então $T_{s'} \geq T_s$, onde $T_\cdot = T(\cdot, \|\phi\|_\cdot)$ é dado pelo teorema (4.1). Devido a extensão e a dificuldade da prova deste fato (ver [**K2**]) mostraremos uma versão mais fraca que serve para nossos propósitos, a saber: se $\phi \in H^{s+n+1}(\mathbf{R}), n \in \mathbf{N}$ $s > 3/2$ então $T_{s+n} \geq T_s, n \in \mathbf{N}$, onde $T_\cdot$ é como acima.

Mostraremos o caso $n = 1$, o caso geral é obtido por indução. Consideremos,

$$u \in C([0, T_{s+2}]; H^{s+2}) \tag{4.61}$$

$$u \in C([0, T_{s+1}]; H^{s+1}) \tag{4.62}$$

$$u \in C([0, T_s]; H^s) \tag{4.63}$$

a solução de (4.1) em H^{s+2}, H^{s+1} e H^s.

Exercício (4.14). *Mostre que* $T_s \geq T_{s+1} \geq T_{s+2}$.
(**Sugestão:** *Unicidade da solução).*

Logo, para $t \in [0, T_{s+2}]$ temos, (justifique a conta!),

$$\partial_t \|u(t)\|_{s+1}^2 = 2(u \,|\, u\partial_x u)_{s+1} \leq 2C_s \|u(t)\|_s \|u(t)\|_{s+1}^2 \tag{4.64}$$

onde na última desigualdade usamos o teorema (A.10) da apêndice (com $t = s + 1$). Assim, integrando de 0 à t obtemos,

$$\|u(t)\|_{s+1}^2 \leq \|\phi\|_{s+1}^2 + 2C_s \int_0^t \|u(t')\|_s \|u(t')\|_{s+1}^2 \, dt' \tag{4.65}$$

para $0 \leq t \leq T_{s+2}$. Apliacando a desigualdade de Gronwall, obtemos,

$$\|u(t)\|_{s+1}^2 \leq \|\phi\|_{s+1}^2 \ \exp \left\{ 2C_s \int_0^t \|u(t')\|_s \, dt' \right\} \tag{4.66}$$

Mas o lado direito de (6.66) está definido para $t \in [0, T_s]$. Portanto podemos estender, se necessário for, $u = u(t)$, como solução em H^{s+1}, a $[0, T_s]$, mostrando que $T_{s+1} \geq T_s$.

3) Para mostrar que o problema (4.1) é globalmente bem-posto necessitaremos de alguns resultados e observações preliminares que serão exibidos agora. Primeiramente, vale observar que *não* podemos aplicar o lema (3.7) ao exemplo que estamos tratando. Isto ocorre porque $F: Y \to X$ e $Y \underset{\neq}{\subset} X$! Para resolvermos esta dificuldade observamos que se mostrarmos que o problema

$$\begin{cases} \partial_t u_\mu + \sigma \partial_x^2 u_\mu + u_\mu \partial_x u_\mu - \mu \partial_x^2 u_\mu = 0, & t > 0, \qquad \mu > 0 \\ u_\mu(0) = \phi \end{cases} \tag{4.67}$$

é globalmente bem-posto então, como

$$u_\mu(t) \underset{\mu \downarrow 0}{\rightharpoonup} u(t) \text{ em } H^s \tag{4.68}$$

uniformemente em compactos de t (ver demonstração do teorema (3.3)) seguirá que (4.1) é globalmente bem-posto (i.e., a solução $u = u(t)$ dada pelo teorema (4.1) está em $C([0, \infty); H^s) \cap C^1([0, \infty); H^{s-2})$).

Para u_μ podemos aplicar o lema (3.7) do capítulo 1 (pois $u_\mu(t) \in H^{3s}$ se $t > 0$ e portanto $\partial_x u_\mu^2(t) \in H^s$).

CAPÍTULO V

O PROBLEMA GLOBAL

Neste capítulo mostraremos que as soluções locais construídas para a KdV e BO anteriormente são de fato globais (no tempo). Antes de mais nada, lembremos que foram descritos dois métodos distintos para a obtenção de tais soluções a saber: a teoria quase-linear de Kato e regularização parabólica (um terceiro método pode ser encontrado em [**KL**] e [**S**]). Vale observar que tais métodos nos impõe, como veremos, dificuldades técnicas diferentes.

Trataremos o problema de existência de solução global para a KdV, via teoria quase-linear, na secção (5.1) e na secção (5.2) mostraremos que a *BO* tem solução global usando regularização parabólica. Mais precisamente, mostraremos que os problemas de Cauchy associados a KdV e a BO são globalmente bem-postos.

As técnicas desenvolvidas a seguir devem-se a uma série de autores. Entre eles destacamos R. Teman ([**T**]); J. L. Bona e R. Smith ([**BS**]); T. Kato ([**K1**]), para o caso da KdV e R. J. Iório Jr. ([**I2**], [**I3**], [**I4**]) L. Abdelouhad, J. L. Bona, M. Felland e J-C. Saut ([**ABFS**]); G. Ponce ([**Po**]) no que se refere a BO.

1. Existência Global Via Teoria Quase-linear

Nesta seção mostraremos que o problema de Cauchy para KdV é globalmente bem-posto em $H^s(\mathbf{R})$ se $s \geq 2$, usando os resultados desenvolvidos no capítulo 3 (teoria quase-linear).

Como observado no capítulo 3 o problema de Cauchy para a KdV, isto é,

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}$$

é localmente bem-posto em $H^s(\mathbf{R})$ se $s > \frac{3}{2}$ (teorema (1.1) capítulo 3 caso $s \geq 3$), isto é, existe $T_s = T(s, \|\phi\|_s) > 0$ e uma única $u \in C([0,T_s]; H^s) \cap C^1([0,T_s]; H^{s-3})$ solução real de (1.1), que depende continuamente de ϕ (no sentido do teorema (4.1) capítulo 3). Tendo em vista a parte b) do problema (2.4) do capítulo III basta mostrarmos que (exercício)

$$\text{(1.2)} \qquad \|u^n(t)\|_s \leq g(s, t, \|\phi^n\|_s), \qquad t \geq 0$$

onde $\phi^n \in H^\infty(\mathbf{R})$, $\phi^n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{H^s}} \phi$, $\|\phi^n\|_s = \|\phi\|_s$, $u^n = u^n(t)$ é a solução de (1.1) com $u^n(0) = \phi^n$ e $g: [2,\infty) \times [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ é contínua e não-decrescente nos seus argumentos.

A unicidade e a dependência contínua, no caso global, seguem do caso local. Desta forma temos,

Teorema (1.1). *Se $\phi \in H^s$, $s \geq 2$ então existe uma única $u \in C([0,\infty); H^s) \cap C^1([0,\infty); H^{s-3})$ solução real de (1.1) que depende continuamente do dado inicial, no seguinte sentido: sejam $\phi^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi$ em H^s e $u^n = u^n(t)$ a solução global de (1.1) com $u^n(0) = \phi^n$, obtida pela primeira parte do teorema. Então, dado $T \in (0,\infty)$ temos*

$$\text{(1.3)} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u^n(t) - u(t)\|_s = 0$$

Antes de iniciarmos a demonstração do teorema (1.1) faremos algumas observações.

Observação (1.2):

1) Provamos que o problema de Cauchy (1.1) é localmente bem-posto em $H^s, s > 3/2$. Porém o teorema (1.1) nos diz que este é globalmente bem-posto em H^s para $s \geq 2$.

E o caso $\frac{3}{2} < s < 2$? Este é um problema em aberto (compare com o problema global para a BO (seção 2)).

2) Observamos que a KdV é um *sistema Hamiltoniano*, pois considerando-se o funcional

$$\Phi_1(v) = \int_{\mathbf{R}} \left[\frac{1}{6}v^3(x) - \frac{1}{2}(\partial_x v)^2(x)\right] dx \tag{1.4}$$

onde $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ então a KdV pode ser escrita como no

Exercício (1.3). *Prove que*

$$\partial_t u(t) = J\Phi_1'(u(t)) \tag{1.5}$$

onde $J = -\partial_x$ (anti-simétrico) e para um funcional $G: \mathcal{S}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $G'(\,\cdot\,)$ é definida por

$$(G'(v)\,|\,\omega)_0 = \frac{d}{d\varepsilon}G(v + \varepsilon\omega)\,\Big|_{\varepsilon=0} \tag{1.6}$$

onde $v, \omega \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

3) Um outro fato importante é que existem infinitas *quantidades conservadas*, polinominais em v e suas derivadas, para a KdV (ver [La]), isto é, para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $\Phi_n(v) = \int_{\mathbf{R}} P_n(v)dx$, onde $P_n(v)$ e um polinômio em v e suas derivadas, tal que se $u = u(t)$ é solução da KdV então

$$\partial_t \Phi_n(u(t)) = 0, \qquad \text{para todo } t \tag{1.7}$$

isto é, Φ_n é conservada pelo fluxo da KdV. Isto segue do fato que se Φ_n, Φ_m são duas quantidades conservadas da KdV então o *parênteses de Poison* de Φ_n, Φ_m é zero, isto é,

$$[\Phi_n(v), \Phi_m(v)] = (\Phi_n(v)\,|\,J\Phi_m'(v))_0 = 0 \tag{1.8}$$

para $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, e $n, m \in \mathbf{N}$. Para maiores detalhes veja P.D. Lax [**La**].

4) R. M. Miura, C. S. Gardner e M. D. Kruskal em [**MGK**] exibiram as 10 primeiras quantidades conservadas para a KdV. Entre elas destacamos,

$$\Phi_0(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} v^2(x)dx \tag{1.9}$$

e

$$\Phi_2(v) = \int_{\mathbf{R}}\left[\frac{5}{72}v^4(x) - \frac{5}{6}v(x)(\partial_x v)^2(x) + \frac{1}{2}(\partial_x^2 v)^2(x)\right]dx \tag{1.10}$$

além de Φ_1 dado por (1.4).

Exercício (1.4). *Mostre que*

$$\Phi_0'(v) = v \tag{1.11}$$

$$\Phi_1'(v) = \frac{1}{2}v^2 + \partial_x^2 v \tag{1.12}$$

$$\Phi_2'(v) = \frac{5}{18}v^3 + \frac{5}{6}\partial_x^2(v^2) - \frac{5}{6}(\partial_x v)^2 + \partial_x^4 v \tag{1.13}$$

Passaremos agora à demonstração do teorema (1.1). Como observamos anteriormente resta obtemos uma estimativa a priori do tipo (1.2) onde $H = H^s$, $s \geq 2$.

Demonstração do Teorema (1.1):

Comecemos mostrando que,

$$\|u^n(t)\|_0 \leq \|\phi^n\|_0\,, \qquad 0 \leq t \leq T_s \tag{1.14}$$

Para isto,

Exercício (1.5). *Mostre que,*

$$\partial_t \|u^n(t)\|_0^2 = 2\langle u^n(t), \partial_t u^n(t)\rangle_{s,-s}, \qquad 0 < t \le T_s$$

onde $\langle \cdot , \cdot \rangle_{s,-s}$ *é o parêntese de dualidade do par* H^s, H^{-s}.

Logo, para $t \in (0, T_s]$,

$$\begin{aligned}\partial_t \|u^n(t)\|_0^2 &= 2\langle u^n, \partial_t u^n\rangle_{s,-s} = -2\langle u^n, \partial_x^3 u^n\rangle_{s,-s} - 2\langle u^n, u^n\partial_x u^n\rangle_{s,-s} \\ &= 0 \qquad (!\ \text{Exercício})\end{aligned} \tag{1.15}$$

Portanto, integrando de 0 à t, obtemos (1.14).

Mostraremos agora que,

$$\|u^n(t)\|_2 \le g_2\left(\|\phi^n\|_2\right), \qquad 0 \le t \le T_s \tag{1.16}$$

onde $g_2(x) = C\sum_{i=1}^{6} x^i$.

Para isto observemos que

$$\|u^n(t)\|_2^2 - 2\Phi_2(u^n(t)) = \|u^n\|_0^2 + \|\partial_x u^n\|_0^2 - \frac{5}{36}\int_{\mathbf{R}} (u^n)^4 dx + \frac{5}{3}\int_{\mathbf{R}} u^n(\partial_x u^n)^2 dx \tag{1.17}$$

onde usamos o fato que $\|\cdot\|_2^2 = \|\cdot\|_0^2 + \|\partial_x \cdot\|_0^2 + \|\partial_x^2 \cdot\|_0^2$.

Logo de (1.14) e (1.17) segue,

$$\|u^n(t)\|_2^2 \le 2\Phi_2(u^n) + \|\phi^n\|_0^2 + \|u^n\|_1^2 + \frac{5}{3}(u^n \,|\, (\partial_x u^n)^2)_0 \tag{1.18}$$

onde $u^n = u^n(t)$.

Antes de prosseguir com as estimativas deixaremos um exercício que será de grande utilidade, a saber,

Exercício (1.6). *Se $0 \leq \alpha < 2$ e $\beta > 0$ então dado $\eta > 0$ tomando $C_{\alpha,\beta}(\eta) = \frac{2-\alpha}{2}$ $(\frac{\alpha}{2\eta})^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$ temos*

$$x^\alpha y^\beta \leq \eta x^2 + C_{\alpha,\beta}(\eta) y^{\frac{2\beta}{2-\alpha}}, \qquad x, y > 0 \tag{1.19}$$

*(**Sugestão:** Use o fato que a função* log *é convexa em* $(0, \infty)$*).*

Agora, interpolando H^1 por L^2 e H^2, usando (1.14) e (1.19) (com η a ser escolhido) temos,

$$\|u^n(t)\|_1^2 \leq C\left(\|u^n\|_0^{1/2}\|u^n\|_2^{1/2}\right)^2 \leq C\|\phi^n\|_0\|u^n\|_2 \leq C_{1,1}(\eta)\|\phi^n\|_0^2 + \eta\|u^n\|_2^2 \tag{1.20}$$

Usando a imersão de Sobolev, interpolando H^1 entre L^2, H^2 e utilizando (1.19) segue,

$$\begin{aligned} \left|(u^n \,|\, (\partial_x u^n)^2)_0\right| &\leq \|u^n\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|\partial_x u^n\|_0^2 \leq C\|u^n\|_1^3 \leq C\|\phi^n\|_0^{3/2}\|u^n\|_2^{3/2} \\ &\leq C_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(\eta)\|\phi^n\|_0^6 + \eta\|u^n\|_2^2 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Portanto de (1.18), (1.20) e (1.21) obtemos

$$(1-2\eta)\|u^n(t)\|_2^2 \leq 2\Phi_2(u^n(t)) + (1 + C_{1,1}(\eta))\|\phi^n\|_0^2 + C_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}\|\phi^n\|_0^6 \tag{1.22}$$

Tomando $\eta = \frac{1}{4}$ segue

$$\|u^n(t)\|_2^2 \leq 4\Phi_2(u^n(t)) + C\left(\|\phi^n\|_0^2 + \|\phi^n\|_0^6\right) \tag{1.23}$$

para $0 \leq t \leq T_s$. Logo devemos estimar $\Phi_2(u^n(t))$.

Exercício (1.7). *Mostre que para $0 \leq t \leq T_s$*

$$\partial_t \Phi_2(u^n(t)) = (\Phi_2'(u^n(t) \,|\, \partial_t u^n(t))_0 \tag{1.24}$$

para $n \geq N_0$. *(observe que neste caso $u^n(t) \in H^\infty(\mathbf{R})$).*

Logo de (1.24) e (1.5) segue que

$$\partial_t \Phi_2(u^n(t)) = (\Phi_2'(u^n(t)) \,|\, J\Phi_1'(u^n(t))_0 = 0 \tag{1.25}$$

onde na última igualdade usamos (1.8). Portanto,

$$\Phi_2(u^n(t)) \leq \Phi_2(u^n(0)), \qquad 0 \leq t \leq T_s \tag{1.26}$$

e $n \geq N_0$. Assim de (1.23) e (1.26) obtemos

$$\|u^n(t)\|_2 \leq 4\Phi_2(\phi^n) + C\,\|\phi^n\|_0^2 + \|\phi^n\|_0^6) \tag{1.27}$$

Exercício (1.8). *Mostre que*

$$\Phi_2(\phi^n) \leq C\{\|\phi^n\|_2^4 + \|\phi^n\|_2^3 + \|\phi^n\|_2^2\} \tag{1.28}$$

Portanto de (1.27) e (1.28) segue (1.16).

Por fim, se $0 \leq t \leq T_s$,

$$\begin{aligned} \partial_t \|u^n(t)\|_s^2 &= 2(u^n \,|\, \partial_t u^n)_s = -2(u^n \,|\, \partial_x^3 u^n)_s - 2(u^n \,|\, u^n \partial_x u^n)_s \\ &= -2(u^n \,|\, u^n \partial_x u^n)_s \leq C_s \|u^n(t)\|_2 \|u^n(t)\|_s^2 \end{aligned} \tag{1.29}$$

onde usamos o fato que $(u^n \,|\, \partial_x^3 u^n)_s = 0$ e a desigualdade de Kato (Teorema A.10 do apêndice com $t = s$ e $s = 2$). Logo de (1.16) e (1.29) segue

$$\partial_t \|u^n(t)\|_s^2 \leq g_s(\|\phi^n\|_2) \|u^n(t)\|_s^2 \leq g_s(\|\phi^n\|_s) \|u^n(t)\|_s^2 \tag{1.30}$$

onde $g_s(x) = C_s g_2(x)$. Integrando de 0 à t,

$$\begin{aligned} \|u^n(t)\|_s^2 &\leq \|\phi^n\|_s^2 + g_s(\|\phi^n\|_s) \int_0^t \|u^n(t')\|_s^2\, dt' \\ &\leq 2\|\phi^n\|_s^2 + g_s(\|\phi^n\|_s) \int_0^t \|u^n(t')\|_s^2\, dt' \end{aligned} \tag{1.31}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall segue que

$$\|u^n(t)\|_s^2 \leq 2\,\|\phi\|_s\, e^{g_s(\|\phi\|_s)t} = g(s,t,\|\phi\|_s) \tag{1.32}$$

Completando assim a demonstração do teorema.

∎

Para finalizar esta seção faremos algumas observações.

Observações (1.9):

1) É evidente a importância de ser saber que $T_{s'} \geq T_s$ se $s' \geq s$ para a demonstração da existência de solução global.

2) Olhando (1.17) novamente vemos que na verdade,

$$\|u^n(t)\|_0 = \|\phi^n\|_0\,, \qquad t \geq 0 \tag{1.33}$$

Em geral, se $r \leq k \leq [s]$ =(maior inteiro menor que s)

$$\|u(t)\|_r \leq g(k,\|\phi\|_k), \qquad t \geq 0 \tag{1.34}$$

$r \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, o que não deixa de ser surpreendente (a solução é limitada, em $t \in [0,\infty)$, na norma $\|\cdot\|_r$!).

3) Como exercício deixamos ao leitor mostrar que a BO é globalmente bem-posta em H^s, $s > 3/2$ usando a ídeias desenvolvidas acima, juntamente com as respectivas *quantidades conservadas* da BO que podem ser encontradas na observação (2.2) da próxima seção.

4) Não se sabe se o problema de Cauchy para a KdV é globalmente bem-posto em $H^s, \frac{3}{2} < s < 2$ (na verdade o problema é a existência global).

2. Existência Global Via Regularização Parabólica

Mostraremos, a seguir, que o problema de Cauchy para a BO é globalmente bem-posto em $H^s(\mathbf{R})$, $s > 3/2$, usando os resultados do capítulo 4 (regularização parabólica).

Do capítulo 4 temos que o problema de Cauchy para BO,

$$
(2.1) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \sigma\partial_x^2 u + u\partial_x u = 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}
$$

é localmente bem-posto em H^s, $s > 3/2$ (teorema (4.1) do cap. 4). Da observação (4.13) 3) do capítulo 4 segue que basta mostrarmos que

$$
(2.2) \qquad \|u_\mu(t)\|_s \leq g(\mu, s, t, \|\phi\|_s), \qquad t \geq 0
$$

onde $g: (0,\infty) \times (3/2,\infty) \times [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ é contínua e não-decrescente nos seus argumentos, $\phi \in H^s$, $s > 3/2$ para obtermos a existência global. Lembramos que a unicidade a dependência contínua, no caso global, seguem do caso local. Mais precisamente.

Teorema (2.10). *Se $\phi \in H^s, s > 3/2$ então existe uma única $u \in C([0,\infty); H^s) \cap C^1([0,\infty); H^{s-2})$ solução real de (2.1) que depende continuamente do dado inicial no sentido do teorema (1.1).*

Algumas observações tornam-se necessárias antes de tratarmos da demonstração do teorema.

Observação (2.2): Assim como ocorre com a KdV, a BO é um *sistema Hamiltoniano*. Para ver isto basta considerar funcional

$$
(2.3) \qquad \Psi_1(v) = \int_{\mathbf{R}} \left[\frac{v^3(x)}{6} + \frac{1}{2} v(x)(\sigma\partial_x v)(x) \right] dx
$$

onde $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ e mostrar que a BO pode ser escrita como,

Exercício (2.3). *Prove que*

$$\partial_t u(t) = J\Psi_1'(u(t)) \tag{2.4}$$

onde $J = -\partial_x$ *(e G' é como em (1.6)).*

Além disso é possível mostrar que os funcionais

$$\Psi_0(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} v^2(x)dx \tag{2.5}$$

e

$$\begin{aligned}\Psi_3(v) = \int_{\mathbf{R}} \Big[&\frac{v^5(x)}{20} + \frac{1}{3}v^3(x)(\sigma\partial_x v)(x) + v^2(x)\sigma(v\partial_x v)(x) \\ &+\frac{1}{2}v(x)(\sigma\partial_x v)^2(x) + \frac{3}{2}v(x)(\partial_x v)^2(x) - \partial_x^2 v(x)(\sigma\partial_x v)(x)\Big]\, dx\end{aligned} \tag{2.6}$$

são ***quantidades conservadas*** da BO, i. é, se $u = u(t)$ é solução da BO então

$$\partial_t \Psi_i(u(t)) = 0 \tag{2.7}$$

para todo t e $i = 0, 1, 3$.

Isto é consequência do fato que o ***parêntese de Poison*** de Ψ_i, Ψ_j é zero, isto é,

$$[\Psi_i(v), \Psi_j(v)] = (\Psi_i'(v) \,|\, J\Psi_j'(v))_0 = 0 \tag{2.8}$$

$v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}), i, j = 0, 1, 3$. Na verdade K.M. Case em **[Ca]** exibe as 6 primeiras quantidades conservadas da BO (entre elas as três acima).

Exercício (2.4). *Mostre que, para $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ temos,*

$$\Psi_0'(v) = v \tag{2.9}$$

$$\Psi_1'(v) = \frac{v^2}{2} + \sigma\partial_x v \tag{2.10}$$

e

$$
\Psi_3'(v) = \frac{v^4}{4} + v^2\sigma\partial_x v + v\sigma(v\partial_x v) + \sigma(v^2\partial_x v)
$$

$$
(2.11) \qquad + \frac{(\sigma\partial_x v)^2}{2} + \sigma\partial_x(v\sigma\partial_x v) - \frac{3}{2}(\partial_x v)^2 - 3v\partial_x^2 v - 2\sigma\partial_x^3 v
$$

Demonstração do Teorema (2.1):

Passemos a demonstrar o teorema. Em vista dos comentários iniciais resta obter uma estimativa do tipo (2.2), onde u_μ é a solução de (4.67) do cap. 4.

É fácil mostrar que,

$$
(2.12) \qquad \|u_\mu(t)\|_0 \leq \|\phi\|_0, \qquad 0 \leq t \leq T_s \quad \text{(exercício)}
$$

Mostraremos agora que,

$$
(2.13) \qquad \|u_\mu(t)\|_{\frac{3}{2}} \leq g_{\frac{3}{2}}(\mu, t, \|\phi\|_{\frac{3}{2}}), \qquad 0 \leq t \leq T_s
$$

onde $g_{\frac{3}{2}}$ é contínua e não-decrescente nos seus argumentos.

Antes observemos que pela identidade de Parseval, do fato $(\partial_x^k u_\mu)^\wedge(\xi) = (i\xi)^k \hat{u}_\mu(\xi)$ (exercício), $\widehat{\sigma u_\mu}(\xi) = h(\xi)\hat{u}_\mu(\xi)$ (onde h é a função sinal (ver teorema (A.15))

$$
(\partial_x^2 u_\mu(t) \mid \sigma\partial_x u_\mu(t))_0 = \int_{\mathbf{R}} \xi^2 \hat{u}_\mu(t,\xi) h(\xi) \xi \overline{\hat{u}_\mu(t,\xi)} d\xi
$$

$$
(2.14) \qquad = \int_{\mathbf{R}} |\xi|^3 \left|\hat{u}_\mu(t,\xi)\right|^2 d\xi = \left\| |\cdot|^{3/2} \hat{u}_\mu(t) \right\|_0^2
$$

Portanto, da definição de $\|\cdot\|_{3/2}$, Ψ_3 e de (2.14) segue

$$
\begin{aligned}
\|u_\mu(t)\|_{\frac{3}{2}}^2 + \Psi_3(u_\mu(t)) &= \left\|(1+|\cdot|^2)^{3/4}\hat{u_\mu}\right\|_0^2 + \frac{1}{20}(u_\mu^3 \,|\, u_\mu^2)_0 + \frac{1}{3}(u_\mu^3 \,|\, \sigma\partial_x u_\mu)_0 \\
&\quad + \frac{1}{4}(u_\mu^2 \,|\, \sigma(u_\mu \partial_x u_\mu))_0 + \frac{1}{2}(u_\mu \,|\, (\sigma\partial_x u_\mu)^2)_0 \\
&\quad + \frac{3}{2}(u_\mu \,|\, (\partial_x u_\mu)^2)_0 - (\partial_x^2 u_\mu \,|\, \sigma\partial_x u_\mu)_0 \\
&\leq \|u_\mu\|_0^2 + \frac{1}{20}(u_\mu^3 \,|\, u_\mu^2)_0 \\
&\quad + \frac{1}{3}(u_\mu^3 \,|\, \sigma\partial_x u_\mu)_0 + \frac{1}{4}(u_\mu^2 \,|\, \sigma\partial_x u_\mu))_0 \\
&\quad + \frac{1}{2}(u_\mu \,|\, (\sigma\partial_x u_\mu)^2)_0 + \frac{3}{2}(u_\mu \,|\, (\partial_x u_\mu)^2)_0
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

Estimemos cada uma das parcelas do lado direito da última desigualdade de (2.15):

$$
\begin{aligned}
\left|(u_\mu^3 \,|\, u_\mu^2)_0\right| &= \|u_\mu\|_{L^5}^5 \leq C\,\|u_\mu\|_{\frac{3}{10}}^5 \leq C\left(\|u_\mu\|_0^{4/5}\,\|u_\mu\|_{\frac{3}{2}}^{1/5}\right)^5 = C\,\|u_\mu\|_0^4\,\|u_\mu\|_{\frac{3}{2}} \\
&\leq C_{1,4}(\eta)\,\|\phi\|_0^8 + \eta\,\|u_\mu\|_{\frac{3}{2}}^2
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

onde usamos a imersão $L^5 \hookrightarrow H^{3/10}$, interpolação de $H^{3/10}$ por L^2 e $H^{3/2}$, o exercício (1.6) e (2.12).

$$
\begin{aligned}
\left|(u_\mu^3 \,|\, \sigma\partial_x u_\mu)_0\right| &\leq \|u_\mu\|_{L^4}^3\,\|\sigma\partial_x u_\mu\|_{L^4} \leq C\,\|u_\mu\|_{1/4}^3\,\|\partial_x u_\mu\|_{1/4} \\
&\leq C\,\|u_\mu\|_{1/4}^3\,\|u_\mu\|_{5/4} \leq C\left(\|u_\mu\|_0^{5/6}\,\|u_\mu\|_{3/2}^{1/6}\right)^3\,\|u_\mu\|_{3/2} \\
&\leq C\,\|\phi\|_0^{5/2}\,\|u_\mu\|_{3/2}^{3/2} \leq C_{\frac{3}{2},\frac{5}{2}}(\eta)\,\|\phi\|_0^{10} + \eta\,\|u_\mu\|_{\frac{3}{2}}^2
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

que foram obtidas utilizando-se, a desigualdade de Hölder (com $p = 4/3$ e $q = 4$), a imersão $H^{1/4} \hookrightarrow L^4$, interpolação de $H^{1/4}$ por L^2 e $H^{3/2}$, a imersão $H^{3/2} \hookrightarrow H^{5/4}$, (2.12) e o exercício (1.6).

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, de $\sigma \in B(L^p(\mathbf{R}))$, $H^{1/4} \hookrightarrow L^4$, interpolação de $H^{5/1}$ por L^2 e $H^{3/2}$, (2.12) e o exercício (1.6) temos,

$$
\begin{aligned}
\left|(u_\mu \,|\, (\sigma\partial_x u_\mu)^2)_0\right| &\leq \|u_\mu\|_0 \, \|\sigma\partial_x u_\mu\|_{L^4}^2 \leq C\,\|u_\mu\|_0 \, \|\partial_x u_\mu\|_{L^4}^2 \\
&\leq C\,\|u_\mu\|_0 \, \|\partial_x u_\mu\|_{1/4}^2 \\
&\leq C\,\|u_\mu\|_0 \, \|u_\mu\|_{5/4}^2 \\
&\leq C\,\|u_\mu\|_0 \left(\|u_\mu\|_0^{1/6} \, \|u_\mu\|_{3/2}^{5/6}\right)^2 \\
&\leq C\,\|\phi\|_0^{4/3} \, \|u_\mu\|_{\frac{3}{2}}^{5/3} \\
&\leq C_{\frac{5}{3},\frac{4}{3}}(\eta)\,\|\phi\|_0^8 + \eta\,\|u_\mu\|_{\frac{3}{2}}^2
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

e de modo semelhante a (2.18) temos,

$$
\left|(u_\mu \,|\, (\partial_x u_\mu)^2)_0\right| \leq C_{\frac{5}{3},\frac{4}{3}}(\eta)\,\|\phi\|_0^8 + \eta\,\|u_\mu\|_{3/2}^2 \tag{2.19}
$$

Logo de (2.15) $\rightarrow$ (2.19) segue que

$$
(1-8\eta)\,\|u_\mu(t)\|_{\frac{3}{2}}^2 \leq -\Psi_3(u_\mu(t)) + (C_{1,4}(\eta) + 2C_{\frac{5}{3},\frac{4}{3}}(\eta))\,\|\phi\|_0^8 + C_{\frac{3}{5},\frac{5}{2}}(\eta)\,\|\phi\|_0^{10} \tag{2.20}
$$

e tomando, por exemplo, $\eta = \frac{1}{16}$, segue

$$
\|u_\mu(t)\|_{\frac{3}{2}}^2 \leq -2\Psi_3(u_\mu(t)) + C\left(\|\phi\|_0^{10} + \|\phi\|_0^8\right), \qquad 0 \leq t \leq T_s \tag{2.21}
$$

O próximo passo é estimar $\Psi_3(u_\mu(t))$.

Como $u_\mu(t) \in H^{3s}$ se $t \in (0, T_s]$ e $\mu > 0$ segue o

Exercício (2.5). *Mostre que*

$$
\partial_t \Psi_i(u_\mu(t)) = (\Psi_i'(u_\mu(t)) \,|\, \partial_t u_\mu(t))_0, \qquad 0 < t < T_s \tag{2.22}
$$

e $i = 0, 1$ e 3.

De (2.10) segue que $u_\mu = u_\mu(t)$ é solução de

$$
\begin{cases} \partial_t v + \partial_x \Psi_1'(v) - \mu \partial_x^2 v = 0 \\ v(0) = \phi \end{cases} \tag{2.23}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
-\partial_t \Psi_3(u_\mu(t)) &= -(\Psi_3'(u_\mu) \mid \partial_t u_\mu)_0 \\
&= (\Psi_3'(u_\mu) \mid \partial_x \Psi_1'(u_\mu))_0 - \mu(\Psi_3'(u_\mu) \mid \partial_x^2 u_\mu)_0 \\
&= -\mu[\frac{1}{4}(u_\mu^4 \mid \partial_x^2 u_\mu)_0 + (u_\mu^2 \sigma \partial_x u_\mu)_0 + (u_\mu \sigma(u_\mu \partial_x u_\mu) \mid \partial_x^2 u_\mu)_0 \\
&\quad + (\sigma(u_\mu^2 \partial_x u_\mu) \mid \partial_x^2 u_\mu)_0 + \frac{1}{2}((\sigma \partial_x u_\mu)^2 \mid \partial_x^2 u_\mu)_0 \\
&\quad + (\sigma \partial_x(u_\mu \sigma \partial_x u_\mu) \mid \partial_x^2 u_\mu)_0 - \frac{3}{2}((\partial_x u_\mu)^2 \mid \partial_x^2 u_\mu)_0 \\
&\quad - 3(u_\mu \partial_x^2 u_\mu \mid \partial_x^2 u_\mu)_0 - 2(\sigma \partial_x^3 u_\mu \mid \partial_x^2 u_\mu)_0]
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

onde usamos o exercício (2.5) (com $i = 3$), (2.23), (2.8) (com $i = 3$ e $j = 1$) e (2.11). Passaremos a seguir a estimar cada um dos termos do lado direito da última igualdade de (2.24). Em primeiro lugar,

$$
\begin{aligned}
\left|(u_\mu^4 \mid \partial_x^2 u_\mu)_0\right| &\leq \|u_\mu\|_{L^8}^4 \left\|\partial_x^2 u_\mu\right\|_0 \leq \|u_\mu\|_{\frac{3}{8}}^4 \|u_\mu\|_2 \\
&\leq C \left(\|u_\mu\|_0^{17/20} \|u_\mu\|_{\frac{5}{2}}^{3/20}\right)^4 \|u_\mu\|_{\frac{5}{2}} \leq C \|\phi\|_0^{17/5} \|u_\mu\|_{\frac{5}{2}}^{8/5} \\
&\leq C_{\frac{8}{5}, \frac{17}{5}}(\eta) \|\phi\|_0^{17} + \eta \|u_\mu\|_{5/2}^2
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a imersão $H^{3/8} \hookrightarrow L^8$, $H^{5/2} \hookrightarrow H^2$, interpolação de $H^{3/8}$ por L^2 e $H^{5/2}$, (2.12) e o exercício (1.6).

$$
\begin{aligned}
\left|(u_\mu^2\sigma\partial_x u_\mu \,|\, \partial_x^2 u_\mu)_0\right| &\le \left\|u_\mu^2\sigma\partial_x u_\mu\right\|_0 \left\|\partial_x^2 u_\mu\right\|_0 \\
&\le \|u_\mu\|^2_{L^\infty(\mathbf{R})} \|\sigma\partial_x u_\mu\|_0 \|u_\mu\|_2 \\
&\le C\|u_\mu\|_0 \|u_\mu\|_1 \|\partial_x u_\mu\|_0 \|u_\mu\|_2 \\
&\le C\|u_\mu\|_0 \|u_\mu\|_1^2 \|u_\mu\|_2 \\
&\le C\|u_\mu\|_0 \left(\|u_\mu\|_0^{3/5}\|u_\mu\|_{5/2}^{2/5}\right)^2 \|u_\mu\|_{5/2} \\
&\le C\|\phi\|_0^{11/5}\|u_\mu\|_{5/2}^{9/5} \le C_{\frac{9}{5},\frac{11}{5}}(\eta)\|\phi\|_0^{22} + \eta\|u_\mu\|^2_{\frac{5}{2}}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

onde utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, $\|v\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \le C\|v\|_0^{1/2}\|v\|_1^{1/2}$ (exercício), $\sigma \in B(H^s)$ (Teorema (A.15)); $H^{5/2} \hookrightarrow H^2$, interpolação de H^1 por L^2 e $H^{5/2}$, (2.12) e o exercício (1.6). De modo semelhante temos,

Exercício (2.6). *Mostre que*

$$
|(u_\mu\sigma(u_\mu\partial_x u_\mu)|\,\partial_x^2 u_\mu)_0 \le C_{\frac{9}{5},\frac{11}{5}}(\eta)\|\phi\|_0^{22} + \eta\|u_\mu\|^2_{5/2}
\tag{2.27}
$$

$$
\left|(\sigma(u_\mu^2\partial_x u_\mu)\,|\,\partial_\mu^2 u_\mu)_0\right| \le C_{\frac{9}{5},\frac{11}{5}}(\eta)\|\phi\|_0^{22} + \eta\|u_\mu\|^2_{5/2}
\tag{2.28}
$$

$$
\left|((\sigma\partial_x u_\mu)^2\,|\,\partial_x^2 u_\mu)_0 \le C_{\frac{9}{5},\frac{6}{5}}(\eta)\|\phi\|\right|_0^{12} + \eta\|u_\mu\|^2_{5/2}
\tag{2.29}
$$

$$
\left|(\sigma\partial_x(u_\mu\sigma\partial_x u_\mu)\,|\,\partial_x^2 u_\mu)_0\right| \le C_{\frac{9}{5},\frac{6}{5}}(\eta)\|\phi\|_0^{12} + \eta\|u_\mu\|^2_{5/2}
\tag{2.30}
$$

$$
\left|((\partial_x u_\mu)^2\,|\,\partial_x^2 u_\mu)_0\right| \le C_{\frac{9}{5},\frac{6}{5}}(\eta)\|\phi\|_0^{12} + \eta\|u_\mu\|^2_{5/2}
\tag{2.31}
$$

$$
\left|(u_\mu\partial_x^2 u_\mu\,|\,\partial_x^2 u_\mu)_0\right| \le C_{\frac{9}{5},\frac{9}{10}}(\eta)\|\phi\|_0^{9} + \eta\|u_\mu\|^2_{\frac{5}{2}}
\tag{2.32}
$$

Por fim,

$$
(2.33)\qquad
\begin{aligned}
(\sigma\partial_x^3 u_\mu \,|\, \partial_x^2 u_\mu)_0 &= -\int_{\mathbf{R}} h(\xi)\xi^3 \hat{u}_\mu(t,\xi)\xi^2\overline{\hat{u}_\mu(t,\xi)}d\xi \\
&= -\int_{\mathbf{R}} |\xi|^5 \left|\hat{u}_\mu(t,\xi)\right|^2 d\xi \le -C_0 \left\|u_\mu(t)\right\|_{\frac{5}{2}}^2 + \left\|u_\mu(t)\right\|_0^2 \\
&\le -\left\|u_\mu\right\|_{5/2}^2 + \|\phi\|_0^2
\end{aligned}
$$

onde foi utilizada a idensidade de Parseval, $(\sigma v)^\wedge(\xi) = h(\xi)\hat{v}(\xi)$ (Teorema (A.15)), e o fato que $(1+\xi^2)^{5/2} \le C_\alpha(1+|\xi|^5)$. Logo, de (2.24)→(2.33) segue que

$$
(2.34)\qquad
\begin{aligned}
-\partial_t\Psi_3(u_\mu(t)) \le \mu\Big[&C_{\frac{9}{5},\frac{9}{10}}(\eta)\,\|\phi\|_0^9 + 3C_{\frac{9}{5},\frac{6}{5}}(\eta)\,\|\phi\|_0^{12} \\
&+ 2C_{\frac{9}{5},\frac{6}{5}}(\eta)\,\|\phi\|_0^{22} + \|\phi\|_0^2 + 8\eta\,\|u_\mu\|_{5/2}^2 - C_0\,\|u_\mu\|_{5/2}^2\Big]
\end{aligned}
$$

Escolha $\eta = \frac{C_0}{16}$. Então $8\eta - C_0 = -\frac{C_0}{2} < 0$, portanto

$$
(2.35)\qquad -\partial_t\Psi_3(u(t)) \le g_1(\mu, \|\phi\|_{\frac{3}{2}}), \qquad 0 \le t \le T_s
$$

onde $g_1(x,y) = xC_1\{y^2 + y^9 + y^{12} + y^{22}\}$

Logo, integrando de 0 à t,

$$
(2.36)\qquad -\Psi_3(u_\mu(t)) \le \Psi_3(\phi) + g_1(\mu, \|\phi\|_0)t, \qquad 0 \le t \le T_s
$$

Exercício (2.7). *Prove que*

$$
(2.37)\qquad |\Psi_3(\phi)| \le C_2\left\{\|\phi\|_{\frac{3}{2}}^4 + \|\phi\|_{\frac{3}{2}}^3 + \|\phi\|_{\frac{3}{2}}^2 + \|\phi\|_{\frac{3}{2}}\right\} =: g_2\left(\|\phi\|_{3/2}\right)
$$

Portanto de (2.21), (2.36) e (2.37) segue que

$$
(2.38)\qquad \|u_\mu(t)\|_{\frac{3}{2}}^2 \le (H(\mu, t, \|\phi\|_{\frac{3}{2}}))^2, \qquad 0 \le t \le T_s
$$

onde $H(x,y,z) = (g_0(z) + g_1(x,z)y + g_2(z))^{1/2}$.

Para obter (2.2) vejamos, primeiramente, que

$$\partial_t \|u_\mu(t)\|_s^2 \leq C_s \|\partial_x u_\mu(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|u_\mu(t)\|_s^2, \qquad 0 < t \leq T_s \tag{2.39}$$

De fato, observe que se $0 < t \leq T_s$, então,

$$\begin{aligned} \partial_t \|u_\mu(t)\|_s^2 &= 2(u_\mu \,|\, \partial_t u_\mu)_s = (u_\mu \,|\, u_\mu \partial_x u_\mu)_s + \mu(u_\mu \,|\, \partial_x^2 u_\mu) \\ &\leq (u_\mu \,|\, u_\mu \partial_x u_\mu)_s \end{aligned} \tag{2.40}$$

Mas,

$$|(u_\mu \,|\, u_\mu \partial_x u_\mu)_s| \leq |(J^s u_\mu \,|\, \partial_x u_\mu \cdot J^s u_\mu)_0| + |(J^s u_\mu \,|\, [J^s, u_\mu]\partial_x u_\mu)_0| \tag{2.41}$$

onde $J = (1-\Delta)^{1/2}$ (o potencial de Bessel) e $[\,\cdot,\,\cdot\,]$ o comutador.

Estimando,

$$|(J^s u_\mu \,|\, \partial_x u_\mu J^s u_\mu)_0| \leq \|\partial_x u_\mu\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|J^s u_\mu\|_0^2 = \|\partial_x u_\mu\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|u_\mu\|_s^2 \tag{2.42}$$

e

$$|(J^s u_\mu \,|\, [J^s, u_\mu]\partial_x u_\mu)_0| \leq \|J^s u_\mu\|_0 \|[J^s, u_\mu]\partial_x u_\mu\|_0, \leq C_s' \|\partial_x u_\mu\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|u_\mu\|_s^2 \tag{2.43}$$

onde na última desigualdade usamos uma estimativa de T. Kato e G. Ponce para o comutador em questão (ver [**KP**] lema (X1)). Deste modo obtemos (2.39).

Agora,

$$\begin{aligned} \partial_t \|u_\mu(t)\|_s^2 &\leq C_s \|\partial_x u_\mu\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|u_\mu\|_s^2 \\ &\leq C_s \left\{1 + \|\partial_x u_\mu\|_{\frac{1}{2}} \sqrt{\log(1 + \|\partial_x u_\mu\|_{s-1})}\right\} \|u_\mu\|_s^2 \\ &\leq C_s \left\{1 + \|u_\mu\|_{\frac{3}{2}} \sqrt{\log(1 + \|u_\mu\|_s)}\right\} \|u_\mu\|_s^2 \end{aligned} \tag{2.44}$$

onde foi usado o teorema (A.9) do Apêndice (com $n = 1$ e s substituindo por $s-1$). De (2.38) e (2.44) segue,

$$
\text{(2.45)} \qquad \begin{aligned} \partial_t \|u_\mu(t)\|_s^2 &\le C_s \left\{1 + H\sqrt{\log(1+\|u_\mu\|_s)}\right\} \|u_\mu\|_s^2 \\ &\le C_s \left\{1 + H \log(9 + \|u_\mu\|_s^2)\right\} (9 + \|u_\mu\|_s)^2 \end{aligned}
$$

Considerando

$$
\text{(2.46)} \qquad f(t) = (9 + \|u_\mu(t)\|_s^2), \qquad 0 \le t \le T_s
$$

segue de (5.88) que

$$
\text{(2.47)} \qquad f'(t) \le C_s \{1 + H(t) \log f(t)\} f(t), \qquad 0 \le t \le T_s
$$

onde $H(t) = H(\mu, t, \|\phi\|_{\frac{3}{2}})$ dada em (2.38)). Logo,

$$
\text{(2.48)} \qquad \frac{d}{dt} \log f(t) \le C_s \{1 + H(t) \log f(t)\}, \qquad 0 \le t \le T_s
$$

Integrando de 0 à t,

$$
\text{(2.49)} \qquad \log f(t) \le \log f(0) + C_s t + \int_0^t C_s H(t') \log f(t') dt'
$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall ((3.14) cap. 1) obtemos,

$$
\text{(2.50)} \qquad \begin{aligned} \log f(t) &\le (\log f(0) + C_s t) + \int_0^t (\log f(0) + C_s t') C_s H(t') e^{\int_0^{t'} H(r) dr} dt' \\ &= \log(9 + G^2(\mu, t, \|\phi\|_s)) \end{aligned}
$$

Logo de (2.46) e (2.50) segue (2.2) e portanto da observação (4.13) 3) do capítulo 4 completamos a demonstração do teorema.

∎

Observação (2.8):

1) A idéia utilizada na obtenção da estimativa para a $\|\cdot\|_s$ é devido a G. Ponce em **[Po]** embora L. Abdelouhab, J. L. Bona, M. Felland e J-C. Saut tenham obtido o mesmo resultado anteriormente usando outros recursos (ver [**ABFJ**]).

2) Poderíamos ter conseguido a estimativa para $\|u(t)\|_s$ usando a mesma técnica da seção anterior (i.e., a dependência contínua em relação ao lado inicial). Não fizemos isto para mostrar que mesmo sem saber se temos dependência contínua, podemos conseguir a estimativa a priori para a $\|u(t)\|_s$, usando *somente* regularização parabólica.

3) Refinando um pouco mais as estimativas obtidas anteriormente é possível mostrar que se $r \leq \frac{k}{2} \leq \frac{[2s]}{2}$ então

$$\|u(t)\|_r \leq g\left(\frac{k}{2}, \|\phi\|_{\frac{k}{2}}\right), \qquad t \geq 0 \tag{2.51}$$

onde $r \in \mathbf{R}$ e $k \in \mathbf{N}$ (semelhante com o que ocorre com a KdV (ver obs. (1.9)).

4) O leitor é convidado a mostrar, como exercício, que a KdV é globalmente bem-posta em $H^s, s \geq 2$ usando as idéias desenvolvidas nesta seção, juntamente com as quantidades conservadas da KdV que foram exibidas na seção anterior.

APÊNDICE A

A TRANSFORMADA DE FOURIER E OUTRAS COISAS DA VIDA

Visando tornar o presente livro relativamente auto-suficiente apresentaremos abaixo uma coletânea das definições e resultados básicos que utilizamos livremente no texto. Para manter as dimensões deste apêndice sob contrôle deixaremos a maior parte das demonstrações a cargo da industriosidade do leitor que poderá encontrá-las, em sua maioria, no capítulo IX de [II]. Outras referências relevantes serão mencionadas ao longo do que se segue.

Seja $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. A *transformada de Fourier* de f é a função $\hat{f} = \mathcal{F}f$ dada por

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx \tag{A.1}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ e $x \cdot \xi$ denota o produto escalar usual dos vetores x e ξ.

Teorema (A.1). *A transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ é uma função contínua, limitada e satisfaz a desigualdade*

$$\left\|\hat{f}\right\|_{L^\infty} \le (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{L^1} \tag{A.2}$$

Em particular, a aplicação $f \mapsto \hat{f}$ é um operador limitado de $L^1(\mathbf{R}^n)$ em $L^\infty(\mathbf{R}^n)$. Mais ainda, vale o lema de Riemann- Lebesgue, i.e.,

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0 \tag{A.3}$$

Se $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$, a *convolução* de f e g denotada por $f * g$ é definida por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)dy \tag{A.4}$$

As principais propriedades de $f * g$ são

Teorema (A.2). *a) Sejam $p, q, r \in [1, \infty]$ tais que $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$. Então se $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbf{R}^n)$, a convolução $f * g$ está bem definida, pertence a $L^r(\mathbf{R}^n)$ e satisfaz*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \tag{A.5}$$

Este resultado é conhecido como o teorema de Young para a convolução.

b) A convolução de funções mensuráveis, quando definida, tem as seguintes propriedades algébricas

i) $f * g = g * f$

ii) $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g), \qquad \lambda \in \mathbf{C}$

iii) $(f * g) * h = f * (g * h)$

iv) $f * (g + h) = f * g + f * h$

Em particular, a operação $*: L^1(\mathbf{R}^n) \times L^1(\mathbf{R}^n) \to L^1(\mathbf{R}^n)$ *é um produto e o espaço* $L^1(\mathbf{R}^n)$ *munido da convolução é uma álgebra de Banach.*

c) Se $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ *então*

$$(f * g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \qquad \xi \in \mathbf{R}^n \tag{A.6}$$

Em conexão com o exercício acima o leitor aplicado deve consultar [**Kat**], [**R**], [**Ru**] assim como o volume II de [**RS**].

Uma *identidade aproximada* em $L^1(\mathbf{R}^n)$ é uma sequência $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbf{R}^n)$ tal que

$$(A.7) \qquad \varphi_k(x) \geq 0 \qquad x \in \mathbf{R}^n, \quad \text{q.t.p.}, \quad k \in \mathbf{Z}^+$$

$$(A.8) \qquad \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_k(x)dx = 1, \qquad k \in \mathbf{Z}^+$$

$$(A.9) \qquad \int_{|x|\geq\gamma} \varphi_k(x)ds \longrightarrow 0$$

quando $k \to \infty$ para todo $\gamma > 0$. Mais geralmente uma família φ_t, $t \in (0,\infty)$, tal que $\Phi_k = \varphi_{t_k}$ satisfaz (A.7)–(A.9) para toda sequência $t_k \downarrow 0$ também será denominada uma identidade aproximada.

Teorema (A.3). *a) O núcleo do calor em* $\mathbf{R}^n$, *i.e.,*

$$(A.10) \qquad K_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \qquad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^n$$

define uma identidade aproximada.

b) Se $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *é uma identidade aproximada e* $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ *então*

$$(A.11) \qquad \lim_{k\to\infty} \|f - f * \varphi_k\|_{L^1} = 0$$

Para dar continuidade à descrição das propriedades da transformada de Fourier convém introduzir o *espaço de Schwartz* (ou *das funções C^∞ rapidadmente descrescentes*) $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Tal espaço é a coleção de todas as funções $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ tais que

$$(A.12) \qquad \begin{cases} f \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \\ \|f\|_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}^n} \left|x^\alpha \partial_x^\beta f(x)\right| < \infty \end{cases}$$

para todo par de multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$. A seguinte notação foi utilizada em (A.12):

$$\text{(A.13)} \qquad \begin{cases} \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), & \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \\ x^\alpha = x_1^{\alpha} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_2}^{\alpha_n} \end{cases}$$

Além disso a ordem do multi-índice α é definida por

$$\text{(A.14)} \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

É claro que $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, o espaço das funções $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ de suporte compacto, está contido em $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Como $\gamma(x) = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ mas não está em $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ segue $C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. As principais propriedades da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ são as apresentadas nos teoremas abaixo

Teorema (A.4). *a) Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Então $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ e*

$$\text{(A.15)} \qquad (-i)^{|\alpha|}(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$$

$$\text{(A.16)} \qquad (-i)^{|\alpha|}(x^\alpha f)^\wedge(\xi) = (\partial^\alpha \hat{f})(\xi)$$

b) Vale a fórmula de inversão, i.e.,

$$\text{(A.17)} \qquad f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

c) A transformada inversa definida por

$$\text{(A.18)} \qquad (\mathcal{F}^{-1} f)(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} f(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi$$

satisfaz

$$\text{(A.19)} \qquad \hat{f}^\vee = f = \check{f}^\wedge$$

d) Finalmente vale também a identidade de Parseval

(A.20) $$\|f\|_{L^2} = \left\|\hat{f}\right\|_{L^2}$$

Equivalentemente

(A.21) $$(f \mid g)_{L^2} = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = (\hat{f} \mid \hat{g})_{L^2}$$

para todo par $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Teorema (A.5). *a) O espaço* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *é um espaço de Fréchet quando munido da topologia gerada pelas seminormas* $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ *definidas em (A.12).*

b) A aplicação $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *é um isomorfismo topológico, i.e.,* $f \mapsto \hat{f}$ *é injetiva, sobrejetora contínua com inversa contínua.*

O leitor não familiarizado com a noção de espaço de Fréchet tem neste ponto duas opções, a saber: consultar o capítulo V do volume I de [**RS**] ou esquecer o teorema acima. A segunda linha de ação é no entanto pouco recomendável!

Utilizando a parte d) do teorema (A.4) é possível desenvolver a teoria da transformada de Fourier em $L^2(\mathbf{R}^n)$. Temos

Teorema (A.6). *Seja* $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$. *Então a transformada de Fourier de* f, *denotada também por* $\hat{f} = \mathcal{F}f$, *é definida por*

(A.22) $$\hat{f} = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n$$

onde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *é qualquer sequência que converge a* f *em* $L^2(\mathbf{R}^n)$ *e o limite em (A.22) deve ser interpretado como sendo tomado em relação à esta mesma topologia. A transformada inversa,* $\check{f} = \mathcal{F}^{-1}f$, *é definida da mesma maneira e*

(A.23) $$\hat{f}^{\vee} = f = \check{f}^{\wedge}$$

qualquer que seja $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Além disso, a aplicação $f \mapsto \hat{f}$ é um operador unitário (i.e., uma isometria sôbre).

Finalmente seja $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ o espaço das distribuições temperadas, isto é, a coleção de todos os funcionais lineares contínuos de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ em $\mathbf{C}$. Denotaremos, como de hábito, o valor de $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ aplicado a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ pela expressão $\langle f, \varphi \rangle$. A α-ésima derivada e a transformadas de Fourier direta e inversa de $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ são definidas por,

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle \tag{A.24}$$

$$\begin{cases} \langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle \\ \langle \check{f}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle \end{cases} \tag{A.25}$$

Para descrever as propriedades da aplicação $f \mapsto \hat{f}$ em $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ resta definir o que se entende por $x^\alpha f$. Um pouco mais geralmente seja $Q(\mathbf{R}^n)$ a coleção das funções de crescimento lento, i.e., $\Phi \in Q(\mathbf{R}^n)$ se e só se $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ e, para todo multi-índice α existe uma constante $C(\alpha)$ e um inteiro não negativo $N(\alpha)$ satisfazendo

$$|\partial^\alpha \Phi(x)| \leq C(\alpha)(1 + |x|^2)^{N(\alpha)} \tag{A.26}$$

para todo $x \in \mathbf{R}^n$ com $|x|$ suficientemente grande. Então se $\Phi \in Q(\mathbf{R}^n)$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ o produto Φf é definido pela fórmula

$$\langle \Phi f, \varphi \rangle = \langle f, \Phi \varphi \rangle \tag{A.27}$$

Teorema (A.7). a) *Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ então*

$$\begin{cases} \xi^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} (\partial^\alpha f)^\wedge \\ \partial^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} (x^\alpha f)^\wedge \end{cases} \tag{A.28}$$

b) A aplicação $\mathcal{F}: S'(\mathbf{R}^n) \to S'(\mathbf{R}^n)$ é um isomorfismo topológico, i.e., é injetora, sobrejetora, contínua com inversa contínua (em relação à topologia fraca $*$ de $S'(\mathbf{R}^n)$).

Agora podemos definir os espaços de Sobolev "de tipo $L^2(\mathbf{R}^n)$". Seja $s \in \mathbf{R}$. O $s-$ésimo espaço de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^n)$ é a coleção das distribuições temperadas f tais que $(1+|\xi|^2)\hat{f} \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Suas propriedades básicas são as seguintes

Teorema (A.8). *a) Se $s \geq s'$ então $H^s(\mathbf{R}^n) \subseteq H^{s'}(\mathbf{R}^n)$. Além disso a inclusão é contínua e densa.*

b) $(H^s(\mathbf{R}^n))^\wedge = L^2(\mathbf{R}^n, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$

c) O dual topológico de $H^s(\mathbf{R}^n)$, i.e., a coleção de todos os funcionais lineares contínuos de $H^s(\mathbf{R}^n)$ em $\mathbf{C}$, é isometricamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$, com a dualidade implementada pelo parêntese

$$(f,g) = \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi \tag{A.29}$$

d) Seja $s > k + n/2$, $k \in \mathbf{N}$. Então $H^s(\mathbf{R}^n) \subseteq C^k_\infty(\mathbf{R}^n)$, a coleção das funções de classe $C^k(\mathbf{R}^n)$ tais que elas e suas derivadas até ordem k tendem a zero no infinito. Além disso as seguintes desigualdades são satisfeitas

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^\infty} \leq C(\alpha, n)\, \|f\|_s \tag{A.30}$$

para todo $\alpha \in \mathbf{N}^n$ com $|\alpha| \leq k$. Este resultado é chamado o lema de Sobolev.

Os dois resultados seguintes, utilizados nos capítulos IV e V são menos conhecidos e por esta razão vamos demonstrá-los. O primeiro deles, mencionado por G. Ponce em [**Po**], consiste em um teorema de imersão com expoente crítico e se baseia no lema 2 de [**BG**] onde o caso de um domínio compacto em $\mathbf{R}^n$ é tratado.

Teorema (A.9). *Seja $\phi \in H^s(\mathbf{R}^n)$ com $s > n/2$. Então existe $C = C(s,n) > 0$ tal que,*

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leq C\left\{1 + \|\phi\|_{n/2}\sqrt{\log(1 + \|\phi\|_s)}\right\} \tag{A.31}$$

Demonstração: Devido a (A.2) a fórmula de inversão da transformada de Fourier temos $\|\phi\|_{L^\infty} \leq C(n)\left\|\hat{\phi}\right\|_{L^1}$. Mas se $R > 0$,

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{\phi}\right\|_{L^1} &= \int_{|\xi|<R} \frac{(1+|\xi|^2)^{n/4}}{(1+|\xi|^2)^{n/4}}\left|\hat{\phi}(\xi)\right| d\xi + \int_{|\xi|\geq R}\frac{(1+|\xi|^2)^{s/2}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}\left|\hat{\phi}(\xi)\right| d\xi \\
&\leq \left(\int_{|\xi|<R}(1+|\xi|^2)^{n/2}\left|\hat{\phi}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{|\xi|<R}\frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{n/2}}\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_{|\xi|\geq R}(1+|\xi|^2)^{s}\left|\hat{\phi}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{|\xi|\geq R}\frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{s}}\right)^{1/2} \\
&\leq \|\phi\|_{n/2}\left(\int_{|\xi|<R}(1+\xi^2)^{-n/2}\right)^{1/2} + \|\phi\|_s\left(\int_{|\xi|\geq R}(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Mas

$$\int_{|\xi|<R}(1+|\xi|^2)^{-n/2}d\xi \leq C(n)\log(1+R^n) \tag{A.33}$$

$$\int_{|\xi|\geq R}(1+|\xi|^2)^s d\xi \leq C(n,s)R^{2s-n} \tag{A.34}$$

Logo de (A.32)–(A.34) segue que,

$$\left\|\hat{\phi}\right\|_{L^1} \leq C_n\|\phi\|_{n/2}(\log(1+R^n))^{1/2} + C(n,s)R^{s-n/2} \tag{A.35}$$

para todo $R > 0$. Tomando $R = \|\phi\|_s^{\frac{2}{2s-n}}$ obtém-se

$$(A.36)\qquad \begin{aligned}\|\phi\|_{L^\infty} &\le C(n,s)\left\{1 + \|\phi\|_{n/2}\sqrt{\log(1+\|\phi\|_s^{\frac{2n}{2s-n}})}\right\}\\ &\le C(n,s)\left\{1 + \|\phi\|_{n/2}\sqrt{\log(1+\|\phi\|_s)}\right\}\end{aligned}$$

encerrando assim a demonstração do teorema.

∎

O próximo resultado é uma bela desigualdade devida a T. Kato (veja o lema (A.5) de [**K1**]). Temos,

Teorema (A.10). *Sejam $f, u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ reais, $s > 1 + n/2$ e $t \geq 1$. Então existe $C = C(s,t,n) > 0$ tal que*

$$(A.37)\qquad |(u \mid fDu)_t| \le C\{\|\nabla f\|_{s-1}\|u\|_t^2 + \|\nabla f\|_{t-1}\|u\|_s\|u\|_t\}$$

onde $D = \partial^\alpha$ com $|\alpha| = 1$.

Demonstração: Seja $J = (1-\Delta)^{1/2}$. Então,

$$(A.38)\qquad |(u \mid fDu)_t| = \left|(J^t u \mid J^t f Du)_0\right| \le \left|(J^t u \mid [J^t, f]Du)_0\right| + \left|(J^t u \mid fDJ^t u)_0\right|$$

como u e f são reais temos,

$$(A.39)\qquad (J^t u \mid fDJ^t u)_0 = -\frac{1}{2}(Df \cdot J^t u \mid J^t u)_0$$

Portanto,

$$(A.40)\qquad \begin{aligned}|(u \mid fDu)_t| &\le \left\|J^t u\right\|_0 \left\|[J^t, f]Du\right\|_0 + \frac{1}{2}\left|(Df \cdot J^t u \mid J^t u)_0\right|\\ &\le \|u\|_t \left\|[J^t, f]Du\right\|_0 + \frac{1}{2}\|\nabla f\|_{L^\infty}\left\|J^t u\right\|_0^2\\ &\le \|u\|_t \left\|[J^t, f]Du\right\|_0 + C_s\|\nabla f\|_{s-1}\|u\|_t^2\end{aligned}$$

Resta então provar que

$$\left\|[J^t, f]Du\right\|_0 \leq C_{s,t}\left\{\|\nabla f\|_{s-1}\|u\|_t + \|\nabla f\|_{t-1}\|u\|_s\right\} \tag{A.41}$$

Para tornar a demonstração de (A.41) mais facilmente compreensível, vamos dividi-la em vários lemas e exercícios. Em primeiro lugar,

Lema (A.11). *Sejam $f, g \in S(\mathbf{R}^n)$. Então existe $C = C(s,n) > 0$ tal que*

$$\|hg\|_{[s]} \leq C\left\{\|h\|_A\|g\|_{[s]} + \|h\|_{[s]}\|g\|_A\right\} \tag{A.42}$$

para todo $s \geq 0$ onde

$$\begin{cases} \|h\|_{[s]} = \left\|(-\Delta)^{s/2}h\right\|_0 \\ \|g\|_A = \|\hat{g}\|_{L^1} \end{cases} \tag{A.43}$$

Demonstração: Seja $v = hg$ de modo que $\hat{v} = C_n\hat{h} * \hat{g}$. Como

$$|\xi|^s \leq C_s(|\xi - \eta|^s + |\eta|^s) \tag{A.44}$$

para todo par $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ segue que

$$\begin{aligned} |\xi|^s\,\hat{v}(\xi) &= C_n|\xi|^s\int_{\mathbf{R}}\hat{h}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)d\eta \\ &\leq C_{s,n}(\hat{v}_1(\xi) + \hat{v}_2(\xi)) \end{aligned} \tag{A.45}$$

onde

$$\begin{cases} \hat{v}_1 = (|\cdot|^s\left|\hat{h}\right|) * |\hat{g}| \\ \hat{v}_2 = \left|\hat{h}\right| * (|\cdot|^s|\hat{g}|) \end{cases} \tag{A.46}$$

Pelo teorema (A.2) parte a) segue que,

$$\begin{cases} \|\hat{v}_1\|_0 \leq C\left\||\cdot|^s\hat{h}\right\|_0\|\hat{g}\|_{L^1} = C\|h\|_{[s]}\|g\|_s \\ \|\hat{v}_2\|_0 \leq C\left\|\hat{h}\right\|_{L^1}\||\cdot|^s\hat{g}\|_0 = C\|h\|_s\|g\|_{[s]} \end{cases} \tag{A.47}$$

Isto encerra a demonstração do lema.

∎

Exercício (A.12). *Sejam $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$. Prove que existe $C = C(t) > 0$ tal que*

$$\left|(1+|\xi|^2)^{t/2} - (1+|\eta|^2)^{t/2}\right| \leq C\left[(1+|\eta|^2)^{\frac{t-1}{2}} + (1+|\eta|^2)^{\frac{t-1}{2}}\right]|\xi - \eta| \tag{A.48}$$

Lema (A.13). *Sejam f, g como no lema (A.11). Então*

$$\left\|[J^t, f]g\right\|_0 \leq C\left\{\|\nabla f\|_A \|g\|_{t-1} + \|\nabla f\|_{t-1}\|g\|_A\right\} \tag{A.49}$$

para todo $t \geq 1$.

Demonstração: Seja $v = [J^t, f]g$. Então

$$\begin{cases} \hat{v}(\xi) = C_n \int_{\mathbf{R}^n}(J(\xi)^t - J(\eta)^t)\hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)d\eta \\ J(\xi) = (1+|\xi|^2)^{1/2} \end{cases} \tag{A.50}$$

Utilizando o exercício (A.12) obtém-se

$$\begin{cases} |\hat{v}(\xi)| \leq C\{J^{t-1}(h\omega) + hJ^{t-1}\omega\}^\wedge(\xi) \\ \hat{h}(\xi) = |\xi|\left|\hat{f}(\xi)\right|, \qquad \omega(\xi) = |\hat{g}(\xi)| \end{cases} \tag{A.51}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|v\|_0 &\leq C\left\{\left\|J^{t-1}(h\omega)\right\|_0 + \left\|hJ^{t-1}\omega\right\|_0\right\} \\ &\leq C\left\{\|h\omega\|_{t-1} + \|h\|_{L^\infty}\|\omega\|_{t-1}\right\} \end{aligned} \tag{A.52}$$

Aplicando (A.42) com $s = t-1$ e usando o fato que $\|\cdot\|_{L^\infty} \leq C\|\cdot\|_A$ temos,

$$\begin{aligned} \|v\|_0 &\leq C\left\{\|h\|_A\|\omega\|_{t-1} + \|h\|_{t-1}\|\omega\|_A\right\} \\ &\leq C\left\{\|\nabla f\|_A\|g\|_{t-1} + \|\nabla f\|_{t-1}\|g\|_A\right\} \end{aligned} \tag{A.53}$$

onde usamos as relações $\|h\|_r \leq C\,\|\nabla f\|_r$, $\|h\|_A \leq C\,\|\nabla f\|_A$, $\|\omega\|_A = \|g\|_A$, $\|\omega\|_s = \|g\|_s$. Isto conclui a demonstração do lema.

∎

O teorema (A.10) segue imediatamente, tomando $g = Du$ no lema (A.13) e notando que $\|\cdot\|_A \leq C\,\|\cdot\|_{s-1}$.

∎

Finalmente cabe observar o seguinte resultado de interpolação que foi utilizado muitas vezes nos dois capítulos finais do presente texto.

Teorema (A.14). *Sejam $1 < p_0, p_1 < \infty$, $s_0, s_1 \geq 0$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Se $s = \theta s_0 + (1-\theta)s_1$ e $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ onde $0 \leq \theta \leq 1$ então existe $C = C(s_0, s_1, \theta, p_0, p_1) > 0$ tal que*

$$\|J^s\phi\|_{L^p} \leq C\,\|J^{s_0}\phi\|_{L^{p_0}}^{\theta}\,\|J^{s_1}\phi\|_{L^{p_1}}^{1-\theta} \tag{A.54}$$

Além disso, se $\phi \in H^s(\mathbf{R})$, $s > 3/2$ temos

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leq \sqrt{2}\,\|\phi\|_0^{1/2}\,\|\partial_x\phi\|_0^{1/2} \tag{A.55}$$

A primeira afirmação do teorema (A.14) segue do teorema (6.4.5) de [BL] enquanto a segunda, que é um caso particularíssimo das famosas desigualdades de Gagliardo e Niremberg ([Caz], [F]) pode ser demonstrada facilmente combinando a hipótese $s > 3/2$ com a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Para encerrar este apêndice vamos discutir rapidamente as propriedades da transformada de Hilbert que foram utilizadas no estudo da equação de Benjamin-Ono. O leitor interessado deve consultar [BN], [GF] e [Tor] para obter maiores informações sôbre o assunto. A transformada de Hilbert é o operador integral singular definido por,

$$(\sigma f)(x) = v.p.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{f(y)}{y-x}dy = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{|y-x|>\epsilon}\frac{f(y)}{y-x}dy \tag{A.56}$$

onde $v.p.$ denota o valor principal da integral em questão definido pelo último membro de (A.56). É possível provar o

Teorema (A.15). a) *Se $f \in L^p(\mathbf{R})$ então a transformada de Hilbert de f, definida em (A.56) existe em quase toda parte.*

b) O operador σ é de tipo fraco (1,1), i.e., se $E(g) = \{x | \ |\sigma f(x)| > y > 0\}$ então,

$$|E(y)| \leq C \|f\|_{L^1} y^{-1} \tag{A.57}$$

onde $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue.

c) $\sigma \in B(L^2(\mathbf{R}))$ e além disso

$$\begin{cases} (\sigma f)^\wedge(\xi) = ih(\xi)\hat{f}(\xi), & \xi \ q.t.p. \\ h(\xi) = \begin{cases} -1, & se \quad \xi < 0 \\ 1, & se \quad \xi > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{A.58}$$

para toda $f \in L^2(\mathbf{R})$. Portanto σ comuta com operadores de derivação e

$$\begin{cases} \sigma^2 = -1 \\ \sigma^* = -\sigma = \sigma^{-1} \end{cases} \tag{A.59}$$

Em particular σ é unitário em $L^2(\mathbf{R})$. Os mesmos fatos valem em $H^s(\mathbf{R})$, $s \in \mathbf{R}$.

d) $\sigma \in B(L^p(\mathbf{R}))$, $\quad 1 < p < \infty$.

O resultado em b) é conhecido como o teorema de Komolgorov enquanto que o descrito em d) é devido a M. Riesz. O leitor interessado deve consultar [**BN**], [**GF**], [**Tor**] e também [**Kat**].

APÊNDICE B

SEMIGRUPOS DE CLASSE C°

Este apêndice, da mesma forma que o anterior, destina-se a tornar o presente texto relativamente auto-contido. Para maiores informações o leitor deve consultar os volumes I e II de [**RS**] assim como [**Pa**] e [**K7**].

Seja X um espaço de Banach. Um *semigrupo fortemente contínuo a um parâmetro* ou *de classe* C^0 é uma função $t \in [0,\infty) \to T(t) \in \mathcal{B}(X)$ tal que

(B.1) $T(0) = 1$;

(B.2) $T(s+t) = T(s)T(t), \qquad s,t \in [0,\infty)$;

(B.3) para toda $\varphi \in X$ a função $t \in [0,\infty) \mapsto T(t)\varphi$ é contínua em relação à topologia de X.

O *gerador infinitesimal* de um semigrupo de classe C^0 é o operador A definido por

$$\text{(B.4)} \qquad \begin{cases} D(A) = \left\{\varphi \in X \mid \lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{\varphi - T(t)\varphi}{t} \exists \text{ em } X\right\} \\ A\varphi = \lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{\varphi - T(t)\varphi}{t} \end{cases}$$

É claro que $D(A)$ é não vazio uma vez que $0 \in D(A)$. O fato notável é que $D(A)$ é na realidade "bastante grande".

Teorema (B.1). *Sejam $T(t)$ e A como acima. Então A é um operador fechado, densamente definido.*

Tendo em vista as definições acima e o teorema (B.1), a função $t \in [0,\infty) \mapsto T(t)\varphi \in X$, $\varphi \in D(A)$ é solução do problema

$$\text{(B.5)} \qquad \begin{cases} \partial_t u + Au = 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}$$

Isto motiva a notação

$$\text{(B.6)} \qquad T(t) = \mathrm{e}^{-tA}$$

O resultado fundamental da teoria, conhecido como o teorema de Hille-Yosida-Phillips, caracteriza os geradores dos semigrupos de classe C^0. De fato,

Teorema (B.2). *Seja $A\colon D(A) \subset X \to X$ um operador fechado densamente definido. Então A gera um semigrupo de classe C^0 se e só se as condições abaixo são satisfeitas*

a) existe $\omega > 0$ tal que todo $\lambda > \omega$ pertence ao conjunto resolvente de A

b) existe um $M > 0$ tal que

$$\text{(B.7)} \qquad \left\|(\lambda + A)^{-n}\right\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$$

para todo $\lambda > \omega$ e todo $n \in \mathbf{Z}^+$. Nesse caso,

$$\text{(B.8)} \qquad \begin{cases} \left\|\mathrm{e}^{-tA}\right\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M e^{\omega t}, & t > 0 \\ \left\|(\lambda + A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{Re(\lambda - \omega)} \end{cases}$$

para todo λ tal que $Re(\lambda - \omega) > 0$. Além disso

$$\text{(B.9)} \qquad (\lambda + A)^{-1} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{-ts} dt, \qquad \lambda > \omega$$

onde a integral é pode ser interpretada no sentido de Bochner, (veja [H]).

Um semigrupo de classe C^0 é dito de contrações se $\left\|\mathrm{e}^{-tA}\right\|_{\mathcal{B}(X)} \leq 1$ para todo $t \in [0,\infty)$. Nesse caso o resultado acima se reduz ao teorema de Hille-Yosida, a saber,

Teorema B.3. *O operador $A: D(A) \subset X \to X$, fechado e densamente definido gera um semigrupo de contrações se e só se*

a) $(-\infty, 0)$ *está contido no conjunto resolvente de* A;

b) $\left\|(\lambda + A)^{-1}\right\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \lambda^{-1}, \qquad \lambda > 0.$

BIBLIOGRAFIA

[A] R. A. Adams – "Sobolev Spaces". New York-San Francisco-London, AP, (1975).

[ABFS] L. Abdelouhab, J. L. Bona, M. Felland, J.- C. Saut – "Non-local models for non-linear, dispersive waves". Phys. D, 40, (1989), 360-392.

[B] T. Benjamin – "Internal waves of permanent form in fluids of greath depth". J. Fluid Mech., 29 (3), (1967), 559-592.

[Ba] R.G. Bartle – "The Elements of Integration", John Wiley, (1966).

[BG] H. Brezis, T. Gallouet – "Nonlinear Schrödinger evolution equations". Nonlinear Anal. T.M.A., 4, (1980), 677-681.

[BL] J. Bergh, J. Lofstrom – "Interpolation Spaces". Springer- Verlag, (1970).

[BN] P. L. Butzer, R. J. Nessel – "Fourier Analysis and Approximation, vol. 1: One-dimensional theory". Birkhäuser Verlag, (1971).

[BS] J. L. Bona, R. Smith – "The initial-value problem for the Kortweg-de Vries equation". Philos Trans. Roy. Soc. London, ser. A 278, (1975), 555-604.

[C] L. Carrol – "The Hunting of the Snark". Macmillan and Co., London, (1876).

[Ca] K. M. Case – "Properties of the Benjamin-Ono equation". J. Math. Phys., 20 (5), (1970), 972-977.

[Caz] T. Cazenave – "An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equations". Textos de Métodos Matemáticos do IM-UFRJ, 22, (1990).

[CL] E. A. Coddington, N. Levinson – "Theory of Ordinary Differential Equations". McGraw-Hill Book Company, (1955).

[D] J. R. Dorroh – "A simplified proof of a theorem of Kato on linear evolution equations", J. Math. Soc. Japan, 27, (1975), 474-478.

[EE] D. E. Edmunds, W. D. Evans – "Spectral Theory and Differential Operators". Claredon Press, Oxford, (1987).

[F] G. B. Folland – "Introduction to Partial Differential Equations", Princeton University Press, (1976).

[Fr] A. Friedman – "Partial Differential Equations", Holt- Rinehart and Winston. (1969).

[GR] J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia – "Weighted Norm Inequalitics and Related Topics", North-Holland (1985).

[H] E. Hille – "Methods in Classical and Functional Analysis". Addison-Wesley Publ. Co., (1972).

[HKM] T. Hughes, T. Kato, J. Marsden – "Well-posed quasi-linear second order hyperbolic systems with applications to nonlinear elastodynamics and general relativity". Arch. Rat. Mech. and Anal., 43, (1976/1977), 273-294.

[I1] R. J. Iório Jr. – "Tópicos na Teoria da Equação de Schrödinger", texto do curso ministrado no 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA/CNPq, (1987).

[I2] R. J. Iório Jr. – "On the Cauchy problem for the Benjamim-Ono equation". Comm. PDE, 11, (1986), 1031-1081.

[I3] R. J. Iório Jr. – "The Benjamim-Ono equation in weighted Sobolev spaces". To appear in J. of Math. Anal. and Appl.

[I4] R. J. Iório Jr. – "KdV, BO and friends in weighted Sobolev spaces". Functional-Analytic Methods for PDE. Lect. Notes in Math., vol. 1450, ed. T. Ikebe, H. Fujita, S. T. Kuroda. Springer-Verlag, (1990), – .

[II] R. J. Iório Jr., V. Iório – "Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução", Projeto Euclides, IMPA/CNPq, (1988).

[IM] R. J. Iório Jr., D. Marchesin – On the Cauchy problem for the time-dependent eletric fields", Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh, 96 A, (1984), 117-134.

[K1] T. Kato – "On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation". Studies in Appl. Math., Adv. in Math. Suppl. Studies, AP, 8, (1983), 92-128.

[K2] T. Kato – "On the Korteweg-de Vries equation". Manuscripta Math., 28, (1979), 89-99.

[K3] T. Kato – "Linear evolution equations of "hyperbolic" type", J. Fac. Sci. Univ. of Tokio, vol. 17, (1970), 241-258.

[K4] T. Kato – "Linear evolution equations of "hyperbolic" type. II", J. of the Math. of Japan, vol. 25, nº 4, (1973), 648-666.

[K5] T. Kato – "Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations", Lect. Note in Math., 448, (1975), 25-70.

[K6] T. Kato – "Linear and quasi-linear equations of evolution of hyperbolic type", C. I. M. E. II Ciclo, Hyperbolicity, (1976), 125-191.

[K7] T. Kato – "Pertubation Theory for Linear Operators", Springer Verlag, (1976).

[K8] T. Kato – "Quasi-linear equations of evolution in non-reflexive Banach spaces". Nonlinear PDE in Applied Sciences, US-Japan Seminar, Tokyo, Lect. Notes in Num. Appl. Anal., 5, (1982), 61-76.

[K9] T. Kato – Comunicação pessoal a R. J. Iório Jr.

[K10] T. Kato – "Nonlinear equations of evolution in Banach spaces", Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 45, Part 2, A.M.S., (1986), 9-23.

[Ka] O. Kavian – "Remarks on the large time behavior of a nonlinear diffusion equation", Ann. l'Int. Henri Poincaré, Analyse Nonlineaire, 4, 423-452, (1987).

[Kat] Y. Katznelson – "An Introduction to Harmonic Analysis", Second Corrected Edition, Dover Publications, Inc. (1976).

[KL] T. Kato, C. Y. Lai – "Nonlinear evolution equations and the Euler flow", J. Func. Anal., vol 56, nº 1, (1984), 15-28.

[KP] T. Kato, G. Ponce – "Commutator estimates and Euler and Navies-Stokes equations". Comm. Pure Appl. Math., 41, (1988), 891-907.

[L] H. A. Levine – "The role of critical exponents in blowup theorems", SIAM Review, vol. 32, Nº 2, 262-288, (1990).

[La] P.D. Lax – "Almost periodic solutions of the KdV equation". SIAM Review, 18, (1976), 351-375.

[M] Y. Matsuno – "Kinks of the sine-Hilbert equation and their dynamical motions". J. Phys. A: Math. Gen., 20, (1987), 3587-3606.

[Mi] R. M. Miura – "The Koteweg-de Vries equation: a survey of results". SIAM Review, 18 (3), (1976); 412-454.

[MGK] R. M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal – "Korteweg-de Vries equation and generalization – II. Existence of conservation laws and constants of motion". J. Math. Phys., 9, (1968), 1204-1209.

[N] W. V. L. Nunes – "O Problema de Cauchy Global para Equações Dispersivas com coeficientes dependentes do tempo.", Tese de Doutorado, IMPA (1991).

[O] H. Ono – "Algebraic solitary waves in stratified fluids". J. Phys., 9, (1968), 1204-1209.

[Pa] A. Pazy – "Semigroups of linear Operators and Applications to Partial Differential Equations", Springer Verlag, (1983).

[Pe] D. B. Pearson – "Quantum Scattering and Spectral Theory", Academic Press, (1988).

[Po] G. Ponce – "On the global well-posedness of the Benjamim-Ono equation". Preprint, (Pennsylvania State University, 1990).

[R] C. E. Rickart – "General Theory of Banach Algebras", Van Nostrand, (1960).

[Ru] W. Rudin – "Real and Complex Analysis". Third Edition. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., (1976).

[RS] S. Reed, B. Simon – "Methods of Modern Mathematical Physics". Vol. I, II, III and IV, Academic Press, (1972, 1975, 1979, 1978).

[S] M. M. Santos – "A Versão de Kato-Lai do método de Galerkin e a Equação de Korteweg-de Vries". Dissertação de mestrado apresentada no IMPA, (1988).

[SAF] P. Santini, M. Ablowitz, A. Fokas – "On the initial-value problem for a class of nonlinear integral evolution equations including the sine-Hilbert equation". J. Math. Phys., 28 (10), (1987), 2310-2316.

[ST] J. C. Saut, R. Teman – "Remarks on the Korteweg-de Vries equation". Israel J. of Math., 24, (1976), 78-87.

[So] S. L. Sobolev – "Partial Differential Equations of Mathematical Physics". Translated from the third russian edition. Addison- Wesley Publishing Company, Inc., (1964).

[Str] W. Strauss – "Nonlinear Wave Equations". Conference Board of the Mathematical Sciences, Regional Conference Series in Mathematics, AMS, 73, (1990).

[T] R. Teman – "Sur un probleme non lineaire", J. Math. Pures Appl., 48, (1969), 159-172.

[To] M. Toda – "Nonlinear Waves and Solutions", Dodrecht, Kluwer, (1989).

[Tor] A. Torchinsky – "Real-Variable Methods in Harmonic Analysis", Academic Press, Inc., (1986).

[W] D. V. Widder – "The Heat Equation", Academic Press, (1975).

[Wh] G. B. Whitham – "Linear and Nonlinear Waves", Wiley-Interscience, (1974).

[Y] K. Yosida – "Functional Analysis". Springer-Verlag, (1966).