Claudio Landim

Otimização Estocástica

CLÁUDIO LANDIM
École Polytechique, CNRS
Centre de Mathèmatiques
Cédex Palaiseau 91128
França

ISBN
85-244-0056-0

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Estrada Dona Castorina, 110
22.460 – Rio de Janeiro-RJ

SUMÁRIO

Introdução 1

Capítulo I–Elementos da Teoria de Probabilidade 5

1. Espaço de Probabilidade 5
2. Probabilidade condicional, Independência 11
3. Variáveis aleatórias e Esperança 13

Capítulo II–Introdução aos Processos Estocásticos 26

Capítulo III–Um Exemplo de Otimização Estocástica 38

1. O Problema da Princesa 38
2. Apêndice 49

Capítulo IV–Cadeias de Markov 62

1. Elementos da Teoria das Cadeias de Markov 62
2. Funções superharmônicas 72
3. Valor do prêmio 78
4. Estratégia Ótima 80

Capítulo V–Processo de Ramificação 89

Capítulo VI–Martingais 100

1. Martingais 101
2. Aplicação: O golpe do baú 109

Bibliografia 119

INTRODUÇÃO

Este opúsculo pretende ensinar ao jovem aluno de matemática como escolher seu futuro cônjuge, como selecionar um emprego e mostrar-lhe que com a atual política de natalidade do mundo ocidental, caminhamos inexoravelmente para o desaparecimento da espécie humana.

Resolveremos neste livro três problemas. Para apresentá-los informalmente, consideremos a seguinte questão: O que pode a mais desejar o primeiro colocado no concurso do Instituto Rio Branco?

Provavelmente, sua primeira inquietude será de encontrar a melhor esposa possível para reconfortá-lo nos períodos de desterro. Consultando parentes solteiros ele estima em N (um inteiro positivo, 20 por exemplo) o número médio de pretendentes encontrados por um homem do seu meio social até os 35 anos, época na qual por razões profissionais deve imperativamente estar casado. A cada encontro com uma possível futura nubente uma decisão lhe cabe. Casar-se e perder a oportunidade de desposar uma das mulheres que conhecerá no futuro pois, por razões familiares, não admite divorciar; ou renunciar às esponsálias e, magoando definitivamente a noiva, não poder nunca mais tê-la por cônjuge, mesmo se constatar a posteriori ser ela a mais dotada das mulheres.

Podemos modelizar este primeiro problema da seguinte forma: Consideramos N objetos distintos. Como não subestimamos a sensibilidade de um diplomata, assumiremos que ele seja capaz de classificar em ordem de preferência as N candidatas ao matrimônio. Portanto, os objetos podem ser ordenados do pior A_1 ao melhor A_N. Estes objetos apresentam-se numa seqüência aleatória $a_1, \dots, a_N$. Como existem $N!$ seqüências distintas, cada uma tem probabilidade $\frac{1}{N!}$ de ocorrer. Cada vez que um objeto é apresentado, duas atitudes se impõem: selecioná-lo e interromper o processo ou rejeitá-lo definitivamente e aguardar um novo. O problema consiste em estabelecer uma estratégia que permita selecionar o melhor objeto com a maior probabilidade possível.

Como a hipótese do conhecimento do número total de pretendentes parece artificial, fornecemos outras interpretações mais convincentes deste problema no capítulo III.

Apresentaremos no capítulo III uma solução informal do problema. No capítulo IV, após uma breve incursão na teoria das cadeias de Markov, resolveremos este primeiro problema proposto pelo brilhante futuro diplomata.

Casado, imbuido de um sentimento aristocrático e orgulhoso de sua árvore genealógica, ele, afirmando sua originalidade ao consultar um probabilista e não um psicanalista, deseja saber se seu sobrenome desaparecerá ou se em todas as gerações futuras terá descendentes com seu sobrenome.

Seja Z_k o número de descendentes masculinos com o sobrenome do antepassado na k-ésima geração. Admitiremos que cada membro masculino da família, independentemente dos demais, gera j filhos com probabilidade p_j. Vamos supor que esta probabilidade $\{p_j, j \geq 0\}$ seja constante ao longo dos séculos. Seja m o número médio de filhos gerados ($m = \sum\limits_{j \geq 0} j p_j$). Desejamos estudar a evolução do processo $(Z_k)_{k \geq 1}$, mais exatamente analisar a probabilidade do diplomata Z_o não possuir nenhum descendente masculino na k-ésima geração com o nome, i. e., analisar o comportamento da seqüência $P[Z_k = 0]$.

No capítulo V, mostraremos, sob certas hipóteses, que se o número médio de filhos m for menor ou igual a 1 então quase certamente o sobrenome se extinguirá. Se, ao contrário, o número médio for maior que 1 então com uma probabilidade positiva o sobrenome do diplomata permanecerá por todas as gerações futuras.

Este problema foi estudado pela primeira vez por Galton, um matemático britânico do século passado, quando um reverendo inglês, Watson, constatou que um grande número de sobrenomes de famílias nobres desaparecera entre os séculos XVI e XIX.

Em particular, se no Ocidente continuarmos com a política de natalidade atual, caminhamos inexoravelmente para o desaparecimento da população.

Casado e reconfortado com a certeza da permanência do seu sobrenome em todas as gerações futuras com probabilidade positiva, ao irreprochável diplomata só resta conseguir um bom posto no Itamaraty. Cansado por uma vida boêmia e estudantil prolongada, para o primeiro cargo, ele adota como único critério de seleção a remuneração de cada oferta. Para conseguir boas propostas, ele decide frequentar o alto escalão de Brasília. Em média, a cada semana uma oferta de cargo lhe é apresentada. Por outro lado, para frequentar os detentores do poder, entre jantares, presentes e convites ele despende semanalmente uma quantia média c. A cada domingo ele deseja saber se deve aceitar a mais bem paga daquelas posições já oferecidas ou passar uma nova semana em busca de uma oferta eventualmente melhor e gastar a quantia c novamente.

Seja Y_i a remuneração do i-ésimo emprego proposto. Estabelecendo algumas hipóteses sobre Y_i, no capítulo VI, encontraremos uma estratégia que maximize em média o valor

$$\max_{1 \leq i \leq n} Y_i - cn.$$

No capítulo I apresentaremos de maneira suscinta alguns elementos da teoria de probabilidade. Sugerimos ao leitor que numa primeira leitura percorra este capítulo sem se preocupar com detalhes, apenas para familiarizar-se com a notação empregada. Em seguida utilize este capítulo como compêndio de resultados necessários para demonstrar rigorosamente as afirmações dos capítulos seguintes.

No capítulo II apresentamos uma pequena introdução à teoria dos processos estocásticos. Neste capítulo introduzimos o conceito fundamental dos tempos de parada.

Nos demais capítulos resolvemos os problemas enunciados informalmente nesta introdução.

CAPÍTULO I

ELEMENTOS DA TEORIA DE PROBABILIDADE

§1. Espaço de Probabilidade

A primeira etapa para resolver os problemas apresentados na introdução consiste em elaborar uma teoria matemática capaz de modelizar experimentos onde os resultados podem variar a cada repetição.

Para clarificar os conceitos definidos nesta seção, estudaremos dois exemplos simples. Desejamos modelizar os seguintes experimentos. No primeiro, lançamos um dado honesto e observamos o número gravado na face virada para cima. No segundo escolhemos ao acaso um número no intervalo [0,1]. O primeiro passo da modelização será definir o conjunto de todos resultados possíveis. No primeiro exemplo os resultados possíveis são os inteiros contidos entre 1 e 6: $\{1, 2, \dots, 6\}$ e no segundo exemplo, o intervalo [0,1]. Notaremos por Ω o conjunto de todos os resultados possíveis e chamá-lo-emos de espaço amostral. Desejamos em seguida atribuir uma probabilidade aos subconjuntos do espaço amostral. No primeiro exemplo se A é um subconjuntos de $\{1, \dots, 6\}$, de forma natural podemos definir a probabilidade do conjunto A como

$$P[A] = \frac{\#A}{6},$$

onde $\#A$ indica o número de elementos de A. Está implícito nesta definição a idéia de que cada face do dado tem probabilidade igual de aparecer.

No segundo exemplo, para um subconjunto A do intervalo [0,1], desejaríamos definir a probabilidade de A como o comprimento do conjunto A. Ora, um teorema profundo da teoria da medida assevera que existem conjuntos aos quais não é possível atribuir um comprimento. Portanto não podemos neste exemplo atribuir uma probabilidade a todo subconjunto de [0,1]. Um conjunto ao qual se atribui uma probabilidade será chamado de evento aleatório. Notaremos em todo este livro por $\mathcal{A}$ a classe dos conjuntos aos quais se atribuirá uma probabilidade.

Para podermos elaborar uma teoria, a classe $\mathcal{A}$ deverá possuir algumas propriedades. Como Ω representa o conjunto de todos os resultados possíveis, vamos atribuir a Ω probabilidade igual a 1. Portanto Ω deve pertencer a $\mathcal{A}$:

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$

Por outro lado se a um conjunto A atribui-se uma probabilidade, parece razoável atribuir ao conjunto complementar A^c probabilidade igual a 1 menos a probabilidade de A. Portanto exigiremos da classe $\mathcal{A}$ a propriedade:

(A2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

Finalmente para enriquecermos a classe $\mathcal{A}$, vamos exigir que $\mathcal{A}$ contenha a reunião de dois conjuntos que estejam em $\mathcal{A}$

(A3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

DEFINIÇÃO 1.1: Uma classe de conjuntos que possui as propriedades (A1), (A2) e (A3) é chamada de álgebra.

Vejamos algumas propriedades das álgebras.

(1.1) $\phi \in \mathcal{A}$

De fato, pela propriedade (A1), $\Omega \in \mathcal{A}$ e pela propriedade (A2) $\phi = \Omega^c \in \mathcal{A}$.

(1.2) $A_j \in \mathcal{A},\ 1 \leq j \leq n \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$ e $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$.

De fato, vejamos inicialmente para $n = 2$. Pela propriedade (A3), $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Por outro lado, $A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c \in \mathcal{A}$ pelas propriedades (A2) e (A3). Podemos completar a demonstração com argumentos de indução. Deixamos ao leitor o encargo preencher os detalhes do final desta prova. Todos os detalhes omitidos neste capítulo podem ser encontrados no excelente livro de B. James [J].

No primeiro exemplo a álgebra natural $\mathcal{A}$ será a classe de todos os subconjuntos de Ω. No segundo exemplo podemos considerar a álgebra $\mathcal{A}$ formada pelos conjuntos que podem ser expressos como uma reunião finita de intervalos, onde consideramos os conjuntos unitários $\{u\}$ e o conjunto vazio como intervalos degenerados. Não é difícil verificar que esta classe possui as propriedades (A1), (A2) e (A3). Seja A o conjunto dos racionais de [0,1]: $A = \mathbf{Q} \cap [0,1]$. A não pertence à classe $\mathcal{A}$. Por outro lado não é difícil convencer-se de que A tem comprimento nulo: seja $\varepsilon > 0$ e seja $\{r_k, k \geq 1\}$ uma enumeração dos racionais de [0,1]. Notaremos por C o comprimento de um conjunto:

$$
\begin{aligned}
C(A) &\leq C\left(\bigcup_{j\geq 1}(r_j - \frac{\varepsilon}{2^j},\ r_j + \frac{\varepsilon}{2^j})\right) \\
&\leq \sum_{j\geq 1} C\left(r_j - \frac{\varepsilon}{2^j},\ r_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) \\
&= \sum_{j\geq 1} \frac{2\varepsilon}{2^j} = 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Portanto $C(A) = 0$.

Este exemplo deve convencer o leitor que a estabilidade da classe $\mathcal{A}$ por reuniões finitas (propriedade (A3)) não é suficiente. Vamos enunciar uma propriedade suplementar, a estabilidade da classe por reuniões enumeráveis:

(A4) $A_j \in \mathcal{A}, \quad j \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{j\geq 1} A_j \in \mathcal{A}$.

DEFINIÇÃO 1.2: Uma classe de conjuntos possuindo as propriedades (A1), (A2) e (A4) será chamada de σ-álgebra.

Vejamos algumas propriedades das σ-álgebras.

(1.3) Toda σ-álgebra é uma álgebra.

Basta verificar a propriedade (A3). Sejam A e B conjuntos da classe $\mathcal{A}$. Seja $A_1 = A$ e $A_j = B$ para $j \geq 2$. Então $A \cup B = \bigcup_{j \geq 1} A_j \in \mathcal{A}$.

(1.4) $\quad A_j \in \mathcal{A}, \quad j \geq 1 \Rightarrow \bigcap_{j \geq 1} A_j \in \mathcal{A}$.

Quando o espaço Ω for enumerável, consideraremos a σ-álgebra $\mathcal{A}$ como o conjunto das partes de Ω: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Quando Ω for um subconjunto de $\mathbf{R}^d$ a σ-álgebra $\mathcal{A}$ será definida como sendo a menor σ-álgebra que contenha todos os intervalos. A esta σ-álgebra dá-se o nome de σ-álgebra de Borel. Os conjuntos desta σ-álgebra serão chamados de borelianos. Como não estudaremos quase probabilidades definidas em $\mathbf{R}$, vamos ater-nos a esta definição e deixar a cargo do leitor no exercício 5, provar que existe realmente uma menor σ-álgebra que contenha todos os intervalos.

Já definimos o espaço amostral e os conjuntos aos quais se atribuirá uma probabilidade. Resta a definir uma função de probabilidade.

Seja $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ uma função. Como o espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis, vamos impor a P uma propriedade:

(P1) $\quad P[\Omega] = 1$.

A função de probabilidade deverá ser positiva:

(P2) $\quad P[A] \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Finalmente, se os conjuntos A_j em $\mathcal{A}$ forem dois a dois disjuntos, a probabilidade da reunião dos A_j deverá ser igual à soma das probabilidades:

(P3) $\quad A_j \in \mathcal{A}, j \geq 1$ e $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j \Rightarrow P[\bigcup_{j \geq 1} A_j] = \sum_{j \geq 1} P(A_j)$.

DEFINIÇÃO 1.3: Uma função $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ com as propriedades (P1), (P2) e (P3) será chamada de probabilidade.

Terminamos assim de definir o nosso espaço de probabilidade.

DEFINIÇÃO 1.4: Uma trinca $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ onde $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω e P uma probabilidade definida em $\mathcal{A}$ será chamada de espaço de probabilidade.

Vejamos, antes de encerrar esta primeira seção, algumas propriedades das probabilidades:

(1.5) $\quad P(\phi) = 0.$

De fato, pelas propriedades (P1) e (P2), $P(\phi) = 1 - P(\Omega) = 0$.

(1.6) $\quad A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B).$

Seja $A_1 = A$, $A_2 = B$ e $A_j = \phi$ para $j \geq 3$. Os conjuntos Aj são dois a dois disjuntos e pelas propriedades (P3) e (1.5), $P(A \cup B) = P[\bigcup\limits_{j\geq 1} A_j] = \sum_{j\geq 1} P(A_j) = P(A) + P(B)$.

(1.7) $\quad A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$

De fato, $B = A \cup (B \backslash A)$. A e $B \backslash A$ são disjuntos. Logo por (1.6) $P(B) = P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A)$. Como pela propriedade (P2) $P(B \backslash A) \geq 0$, $P(A) \leq P(B)$.

(1.8) $\quad P(A^c) = 1 - P(A)$

A e A^c são disjuntos. Como $\Omega = A \cup A^c$, pela propriedade (P1) e por (1.6), $1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$. Logo $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Diremos que uma seqüência $(A_n)_{n\geq 1}$ de conjuntos cresce para A e notaremos por $A_n \uparrow A$ se para todo inteiro $n \geq 1$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ e $A = \bigcup\limits_{j\geq 1} A_j$. De maneira análoga definimos $A_n \downarrow A$.

(1.9) $\quad A_j \in \mathcal{A},\ j \geq 1\ A_j \uparrow A \Rightarrow P(A) = \lim\limits_{j\to\infty} P(A_j).$

Para cada $j \geq 1$, seja $B_j = A_j \backslash \left(\bigcup\limits_{i=1}^{j-1} A_i \right)$. Os conjuntos B_j são dois a dois disjuntos e pertencem a σ-álgebra $\mathcal{A}$. Por outro lado, $\bigcup_{j\geq 1} A_j = \bigcup_{j\geq 1} B_j$ e $A_k = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$. Logo,

$$P[A] = P[\bigcup_{j\geq 1} A_j) = P[\bigcup_{j\geq 1} B_j]$$

$$= \sum_{j\geq 1} P[B_j] = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} P[B_j]$$

$$= \lim_{k\to\infty} P[\bigcup_{j=1}^{k} B_j] = \lim_{k\to\infty} P[A_k].$$

Finalmente, temos

(1.10) Sejam $A_j \in \mathcal{A}$, $j \geq 1$. Então $P[\bigcup_{j\geq 1} A_j] \leq \sum_{j\geq 1} P(A_j)$.

Como em (1.9), definimos os conjuntos B_j para $j \geq 1$. Temos que

$$P[\bigcup_{j\geq 1} A_j] = \sum_{j\geq 1} P[B_j]$$

$$= \sum_{j\geq 1} P[A_j \setminus (\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i)]$$

$$\leq \sum_{j\geq 1} P[A_j],$$

onde utilizamos (1.7) para obter a desigualdade última. $\square$

§2. Probabilidade condicional, Independência

Em alguns experimentos, informações a priori alteram as probabilidades de certos eventos. Vejamos um exemplo.

Considere um cidadão que tenha jogado numa loteria onde dois números distintos entre 1 e 20 são sorteados. Ele deseja saber se ganhou. Podendo unicamente escolher dois números entre 1 e 20, suas chances de acerto são $\frac{1}{\binom{20}{2}} = \frac{1}{190}$. Suponhamos que ele não tenha apostado em nenhum número da segunda dezena e que nenhum número da segunda dezena tenha sido sorteado. A probabilidade de acerto foi modificada pois restaram $\frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{90}$ combinações diferentes. Portanto informações conhecidas podem alterar a probabilidade definida na σ-álgebra $\mathcal{A}$.

Neste exemplo o espaço amostral Ω foi restrito a um conjunto Ω^* menor, de todos os resultados possíveis satisfazendo a uma condição formulada. Baseado neste exemplo apresentamos o conceito de probabilidade condicional.

DEFINIÇÃO 2.1: Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e seja B um elemento de $\mathcal{A}$. A probabilidade de um evento A dado B é

(2.1) $\quad P[A \mid B] = \frac{P[A\cap B]}{P[B]}$ se $P[B] > 0$.

Se $P[B] = 0$, adotaremos a convenção

$$P[A \mid B] = 0 \quad \text{se} \quad P[B] = 0.$$

EXEMPLO 2.2: Considere um casal com dois filhos dos quais um é uma menina. Qual a probabilidade do casal ter um menino? Neste exemplo o espaço amostral $\Omega = \{MM, MH, HM, HH\}$ e a σ-álgebra $\mathcal{A}$ o conjunto das partes de Ω: $\mathcal{P}(\Omega)$. Atribuimos a cada conjunto unitário probabilidade $1/4$. Seja A o evento "ter um menino" e B o evento "ter uma menina". Por definição,

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$$

que é menor do que a 3/4, a probabilidade de A. Portanto saber que B ocorreu, modificou a probabilidade de A. Estes dois eventos não são independentes.

Intuitivamente, se desejamos definir a independência de dois eventos, diríamos que um evento A é independente de B se B não fornece nenhum acréscimo de informação sobre a realização ou não de A, logo se

$$P[A \mid B] = P[A].$$

Mas desejamos uma relação reflexiva (se A é independente de B então B é independente de A).

Ora, pela definição 2.1, esta última relação pode ser reescrita como

$$P[A \cap B] = P[A]P[B].$$

Portanto $P[A \mid B] = P[A]$ se e somente se $P[B \mid A] = P[B]$, se e somente se $P(A \cap B) = P[A]P[B]$. Portanto podemos apresentar a

DEFINIÇÃO 2.2: Dois eventos A e B de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ são independentes se

$$P[A \cap B] = P[A]P[B].$$

Seja $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família de eventos onde I é um conjunto enumerável ou não de índices. Inspirados na definição 2.2, se desejamos extender o conceito de independência, poderíamos inicialmente propor a seguinte

DEFINIÃO 2.3: (Independência 2 a 2). Os eventos $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ são ditos independentes se para todo $\alpha \neq \beta$ em I,

$$P[A_\alpha \cap A_\beta] = P[A_\alpha]P[A_\beta].$$

Todavia a última relação não garante que a probabilidade da interseção de três eventos seja igual ao produto das probabilidades. Vejamos um

EXEMPLO 2.3: Considere o experimento no qual dois dados honestos são lançados. Sejam A_1 o evento "o número lançado pelo primeiro dado é par", A_2 o evento "o número lançado pelo segundo dado é par" e A_3 o evento "a soma dos números obtidos no primeiro e segundo dado é par". Podemos verificar que A_1, A_2 e A_3 são 2 a 2 independentes segundo a definição 2.3. Porém,

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \prod_{i=1}^{3} P[A_i].$$

Temos portanto a

DEFINIÇÃO 2.4: Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família de eventos. Esta família será dita independente se para toda subfamília finita $A_{\alpha_1}, \dots ,$ A_{α_n},

$$P[\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}] = \prod_{i=1}^{n} P[A_{\alpha_i}]$$

§3. Variáveis aleatórias e Esperança

Estaremos interessados nos próximos capítulos em analisar com certa minúcia alguns exemplos de Espaços de Probabilidade. Em princípio, o espaço Ω pode ser qualquer conjunto. No entanto, para podermos aprofundar nosso estudo mergulhamos o espaço Ω em $\mathbf{R}^d$. Com este intuito consideraremos funções $X: \Omega \to \mathbf{R}^d$.

Na primeira seção deste capítulo, apresentamos os borelianos de $\mathbf{R}^d$. Notaremos em todo este livro por $\mathcal{B}_d$ os borelianos de $\mathbf{R}^d$. Desejamos a partir da função X e do espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definir uma probabilidade P_X em $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}_d)$. A maneira natural de fazê-lo é definir para um boreliano B de $\mathbf{R}^d$ a probabilidade de B por

$$P_X[B] = P[X^{-1}(B)].$$

Para que a definição acima tenha sentido é preciso que $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo boreliano B, temos portanto a

DEFINIÇÃO 3.1: Uma função $X: \Omega \to \mathbf{R}$ será dita uma variável aleatória $\mathcal{A}$-mensurável se para todo boreliano B de $\mathbf{R}$ $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Antes de prosseguir façamos algumas observações sobre a definição acima.

OBSERVAÇÃO 3.1: Uma função $X: \Omega \to \mathbf{R}$ definida em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ é $\mathcal{A}$-mensurável se e somente se para todo real r, $X^{-1}((-\infty, r]) \in \mathcal{A}$.

Veremos um esboço da prova desta observação nos exercícios.

OBSERVAÇÃO 3.2: Se X e $Y: \Omega \to \mathbf{R}^d$ são $\mathcal{A}$-mensuráveis, então $X + Y$ e XY são $\mathcal{A}$-mensuráveis. Seja $f: \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^m$ uma função $\mathcal{B}_d$-mensurável então $f(X)$ é $\mathcal{A}$-mensurável. Deixamos as demonstrações destas afirmações ao leitor.

Nos próximos capítulos sempre que não houver ambigüidade uma v.a. X $\mathcal{A}$-mensurável será chamada simplesmente variável aleatória. Vejamos um

EXEMPLO 3.1: Uma moeda é lançada repetidas vezes até obtermos cara.

Neste exemplo podemos considerar o seguinte conjunto enumerável como espaço amostral Ω:

$$\Omega = \{(K), (C, K), (C, C, K), \dots\}.$$

Notamos C para coroa e K para cara. O elemento $(C, C, \dots, C, K)$ onde C aparece n vezes representa a seqüência onde obtivemos coroa nos n primeiros lançamentos e cara no $(n+1)$-ésimo. Como o espaço é enumerável, $\mathcal{A}$ será a classe dos subconjuntos de Ω. Se a moeda for honesta, a probabilidade P em Ω será dada por $P[w] = P[\{w\}] = \frac{1}{2^{|w|}}$, onde $|w|$ representa o comprimento da seqüência w.

Seja $X: \Omega \to \mathbf{R}$ a v.a. definida como $X(w) = |w|$. Logo $X(w) \in \mathbf{N}$ para todo $w \in \Omega$.

Seja B um boreliano de $\mathbf{R}$, $X^{-1}(B) \subseteq \Omega$. Como $\mathcal{A}$ contém todos os subconjuntos de Ω, $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Logo X é uma v.a.. Ademais, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$P_X[n] = P[X^{-1}(n)] = P[(C, C, \dots, C, K)] = \frac{1}{2^{|w|}} = \frac{1}{2^n}.$$

Desejamos calcular o valor médio de uma variável X. Intuitivamente corresponde a considerar a média dos valores da variável X, ponderada pelos pesos (probabilidades) dos valores de X.

Diremos que uma v.a. definida em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ é discreta se existir um conjunto enumerável $\{x_j\}_{j\geq 1}$ para o qual

$$\sum_{j\geq 1} P[X = x_j] = 1.$$

$$P[X = x_j] > 0 \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Diremos que o conjunto $\{x_j, j \geq 1\}$ é o conjunto dos valores possíveis da v.a. discreta X.

DEFINIÇÃO 3.2: Uma variável aleatória discreta cujos valores possíveis são dados por $\{x_j, j \geq 1\}$ será dita integrável se

$$\sum_{j\geq 1} |x_j| P[X = x_j] < \infty.$$

No exemplo 3.1, a v.a. discreta X é integrável pois $\sum_{j\geq 1} j \frac{1}{2^j} = 2 < \infty$.

DEFINIÇÃO 3.3: Seja X uma v.a. discreta e integrável. Seja $\{x_j, j \geq 1\}$ o conjunto dos valores possíveis. A Esperança de X é notada e definida como:

$$E[X] = \sum_{j\geq 1} x_j P[X = x_j].$$

Vejamos algumas propriedades da Esperança.

(E0) $X(\omega) = C, \ \forall \omega \in \Omega \Rightarrow E[X] = C$.

A propriedade é imediata a partir da definição.

(E1) Sejam X e Y duas v.a. integráveis. Se $X \leq Y$ então $E[X] \leq E[Y]$.

Vamos demonstrar o resultado no caso onde o conjunto dos valores possíveis de X e Y está contido nos inteiros.

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} k P[X = k] \\
&= \sum_{k \geq 1} P[X \geq k] - \sum_{k \leq -1} P[X \leq k].
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Como $X \leq Y$, o evento $\{Y \leq k\}$ está contido no evento $\{X \leq k\}$. Da mesma forma, $\{X \geq k\} \subseteq \{Y \geq k\}$. Logo, pela propriedade (1.7), $P[Y \leq k] \leq P[X \leq k]$ e $P[X \geq k] \leq P[Y \geq k]$. Portanto, por (3.1)

$$
E[X] \leq \sum_{k \geq 1} P[Y \geq k] - \sum_{k \leq -1} P[X \leq k] = E[Y].
$$

(E2) $a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow E[aX + b] = aE[X] + b$.

Seja $\{x_j, j \geq 1\}$ o conjunto dos valores possíveis da v.a. discreta X. Logo $\{a\,x_j + b, j \geq 1\}$ é o conjunto dos valores possíveis da v.a. discreta $aX + b$. Portanto, por definição,

$$
\begin{aligned}
E[aX + b] &= \sum_j (ax_j + b) P[aX + b = ax_j + b] \\
&= a \sum x_j P[X = x_j] + b \sum P[X = x_j] \\
&= a\,E[X] + b.
\end{aligned}
$$

Seja X uma v. a. discreta e $\{x_j;\, j \geq 1\}$ o conjunto de valores possíveis de X. Seja φ uma função mensurável. $Y = \varphi(X)$ é uma nova v. a. discreta com conjunto de valores possíveis dado por $\{\varphi(x_j);\ j \geq 1\}$. Desejamos uma fórmula que permita calcular a esperança de $Y = \varphi(X)$ a partir da v. a. X. Temos:

(E3) Seja φ uma função mensurável. Se $\sum_k |\varphi(x_k)|P[X = x_k] < \infty$,

$$E[\varphi(X)] = \sum_k \varphi(x_k)P[X = x_k].$$

De fato $\varphi(X)$ é uma variável aleatória cujo conjunto de valores possíveis é dado por $\{\varphi(x_k), k \geq 1\} = \{y_j, j \geq 1\}$. Logo pela definição,

$$\begin{aligned} E[\varphi(X)] &= \sum_{j\geq 1} y_j P[\varphi(X) = y_j] \\ &= \sum_{j\geq 1} y_j \sum_{k,\varphi(x_k)=y_j} P[X = x_k] \\ &= \sum_{j\geq 1} \sum_{k,\varphi(x_k)=y_j} \varphi(x_k)P[X = x_k] \\ &= \sum_k \varphi(x_k)P[X = x_k]. \end{aligned}$$

(E4) Seja φ uma função convexa e X v. a.; $E[X] \in \mathbf{R}$. Então $E[\varphi(X)] \geq \varphi(E[X])$.

Como φ é convexa, para todo real x_o, existe $a \in \mathbf{R}$; $\varphi(x) \geq a(x - x_o) + \varphi(x_o)$. Logo $\varphi(X(w)) \geq a(X(w) - x_o) + \varphi(x_o)$ para todo $w \in \Omega$. Pelas propriedades (E0), (E1) e (E2),

$$E[\varphi(X)] \geq a(E[X] - x_o) + \varphi(x_o).$$

Portanto, se $x_o = EX$, obtemos

$$E[\varphi(X)] \geq \varphi(E[X]).$$

Da propriedade (E4), seguem-se, para $\varphi(x) = |x|$ e $\varphi(x) = x^2$, as seguintes desigualdades

$$E[X^2] \geq (E[X])^2 \quad \text{e}$$

$$E[|X|] \geq |E[X]|.$$

Na prova de propriedade (E1), demonstramos que se X é uma v.a. real discreta cujo conjunto dos valores possíveis está contido nos inteiros positivos, então

$$E[X] = \sum_{k \geq 1} P[X \geq k]. \tag{3.2}$$

Vamos extender o conceito de independência às variáveis aleatórias.

DEFINIÇÃO 3.4: Seja $\{X_\alpha, \alpha \in I\}$ um conjunto de variáveis aleatórias. Diremos que estas v.a. são independentes se para todo subconjunto finito de índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ e para todos borelianos $B_1, \ldots, B_n$,

$$P[X_{\alpha_1} \in B_1, \ldots, X_{\alpha_n} \in B_n] = \prod_{j=1}^{n} P[X_{\alpha_j} \in B_j].$$

Temos o seguinte critério para independência de variáveis aleatórias:

PROPOSIÇÃO 3.1. *As variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são independentes, se e somente se, para todo $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbf{R}^n$,*

$$P[X_1 \leq r_1, \ldots, X_n \leq r_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leq r_i].$$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [Ch].

OBSERVAÇÃO 3.3: Seja $\{X_\alpha, \alpha \in I\}$ uma família de v.a. independentes e sejam $A_i = \{\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{k_i}^i\} \subseteq I$, $1 \leq i \leq n$ conjuntos finitos de índices 2 a 2 disjuntos. Um teorema da teoria da medida permite provar que se $F_i\colon \mathbf{R}^{k_i} \to \mathbf{R}$, $1 \leq i \leq n$ são funções mensuráveis então as v.a. $F_1(X_{\alpha_1^1}, \ldots, X_{\alpha_{k_1}^1}), \ldots, F_n(X_{\alpha_1^n}, \ldots, X_{\alpha_{k_n}^n})$ são independentes. Em outros termos, funções mensuráveis de conjuntos disjuntos de variáveis aleatórias independentes, são independentes.

EXEMPLO 3.2: Sejam X_1, X_2, X_3, X_4 e X_5 v.a. independentes então $X_1 + X_2$, $\frac{X_3}{X_4}$ e X_5^2 são independentes.

Vejamos uma última propriedade da esperança de uma v. a.

(E5) Sejam X_1, X_2 duas v. a. discretas, independentes e integráveis. Neste caso,

$$E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2]$$

De fato, se $\{x_j^1,\ j \geq 1\}$ e $\{x_j^2,\ j \geq 1\}$ representam os conjuntos dos valores possíveis das v. a. X_1 e X_2, os valores possíveis da v. a. $X_1 X_2$ é o conjunto $\{x_k^1 x_j^2,\ k, j \geq 1\}$. Não é difícil verificar que $X_1 X_2$ é integrável. Por outro lado, pela definição da esperança,

$$E[X_1 X_2] = \sum_{j,k \geq 1} x_j^1 x_k^2 P[X_1 = x_j^1, X_2 = x_k^2].$$

Por independência, $P[X_1 = x_j^1, X_2 = x_k^2] = P[X_1 = x_j^1]P[X_2 = x_k^2]$. Logo,

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= \sum_{j,k \geq 1} x_j^1 x_k^2 P[X_1 = x_j^1]P[X_2 = x_k^2] \\ &= \sum_{j \geq 1} x_j^1 P[X_1 = x_j^1] \sum_{k \geq 1} x_k^2 P[X_2 = x_k^2] \\ &= E[X_1]E[X_2], \end{aligned}$$

pois X_1 e X_2 são integráveis.

Encerramos esta seção enunciando dois teoremas muito úteis. A demonstração, omitida por encontrar-se acima do escopo deste livro, pode ser encontrada em [CT] (Teorema IV.2.2 e Corolário IV.3.2.). Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de v.a. definidas em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Suponhamos que exista uma variável aleatória para a qual $X_n(w) \to X(w)$ quase certamente. A saber, existe um conjunto $\Omega_o \in \mathcal{A}$; $P[\Omega_o] = 1$ e para todo $w \in \Omega_o$, $\lim_{n \to \infty} X_n(w) = X(w)$. Gostaríamos de concluir que $E[X] = E[\lim X_n] = \lim_{n \to \infty} E[X_n]$. Os dois teoremas abaixo fornecem hipóteses suficientes para permitir a troca da esperança com o limite.

Doravante, diremos que uma propriedade $\mathcal{L}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ é quase certa se existir um elemento Ω_0 de $\mathcal{A}$ de probabilidade 1 que contenha o conjunto dos ω que verificam $\mathcal{L}$. Assim, uma v. a. X é menor ou igual a uma constante c_0 quase certamente se existe $\Omega_0 \in \mathcal{A}$; $P[\Omega_0] = 1$ e $X(\omega) \leq c_0$ para todo $\omega \in \Omega_0$.

TEOREMA 3.1. (Teorema da Convergência Monótona). *Seja* $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma seqüência de v.a.. Se existe uma constante* $c \in \mathbf{R}$ *tal que* $X_n(w) \geq c$ *quase certamente e se* $X_n \uparrow X$ *quase certamente então*

$$E[X_n] \uparrow E[X].$$

TEOREMA 3.2. (Teorema da Convergência Dominada). *Seja* $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma seqüência de v.a.. Suponha que existe uma v.a.* Y *tal que* $|X_n| < Y$ *quase certamente e* $E[Y] < \infty$. *Se* $X_n \to X$ *quase certamente então*

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X].$$

§4. Esperança Condicional

Vimos na seção 2 a definição de probabilidade condicional. Portanto se X e Y são duas v.a. discretas com conjuntos de valores possíveis iguais a $\{x_i;\ i \geq 1\}$ e $\{y_k;\ k \geq 1\}$ podemos definir a distribuição condicional de X dada Y

$$P[X = x_i \mid Y = y_k] = \frac{P[X = x_i, Y = y_k]}{P[Y = y_k]} \quad k, i \geq 1.$$

Da mesma forma podemos definir a esperança condicional de uma variável aleatória discreta X conhecida uma v.a. discreta Y

$$\begin{aligned} E[X \mid Y = y_k] &= \sum_{j\geq 1} x_j P[X = x_j \mid Y = y_k] \\ &= \sum_{j\geq 1} x_j \frac{P[X = x_j, Y = y_k]}{P[Y = y_k]}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Conclui-se da definição que a esperança condicional de X dado Y, $E[X \mid Y = y_k]$ é uma função da variável Y:

$$E[X \mid Y = y_k] = G(y_k). \tag{4.2}$$

Esta nova variável aleatória, função da v.a. Y, será notada por

$$E[X \mid Y].$$

No subconjunto $\{Y = y_k\}$ de Ω a v.a. $E[X \mid Y]$ é igual a:

$$E[X \mid Y = y_k] = \sum_{j \geq 1} x_j P[X = x_j \mid Y = y_k].$$

Vejamos um exemplo e algumas propriedades da esperança condicional.

EXEMPLO 4.1: Considere um distribuidor automático de notas. Desejamos calcular o valor médio das retiradas diárias para não deixar uma quantidade desnecessária de dinheiro no distribuidor, nem insuficiente para atender a todos os clientes. Seja N o número de clientes diários e seja X_i o valor do pedido do i-ésimo cliente, $i \geq 1$. Vamos admitir que as variáveis aleatórias $N, X_1, X_2, \ldots$ sejam independentes e que as variáveis $X_1, X_2, X_3, \ldots$ sejam identicamente distribuidas. Vamos, para simplificar, supor que o conjunto dos valores possíveis de X_1 esteja contido em N. Logo se R representa a quantidade de dinheiro necessária, $R = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$.

Desejamos calcular a esperança de R. Podemos, a partir da definição (4.1), calcular a esperança condicional de R dado N

$$\begin{aligned}
E[R \mid N = n] &= E[\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N = n] \\
&= \sum_{k \geq 0} kP[\sum_{i=1}^{N} X_i = k \mid N = n] \\
&= \sum_{k \geq 0} k \frac{P[\sum_{i=1}^{N} X_i = k, N = n]}{P[N = n]} \\
&= \sum_{k \geq 0} k \frac{P[\sum_{i=1}^{n} X_i = k, N = n]}{P[N = n]}
\end{aligned}$$

Como a v.a. N é independente de $X_1, X_2, \dots$, pela observação 3.3, N é independente de $\sum_{i=1}^n X_i$. Logo $P[\sum_{i=1}^{n} X_i = k, N = n] = P[\sum_{i=1}^{n} X_i = n] \cdot P[N = n]$. Portanto,

$$\begin{aligned} E[R \mid N = n] &= \sum_{k \geq 0} kP[\sum_{i=1}^{n} X_i = k] \\ &= E[\sum_{i=1}^{n} X_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n\, E[X_1]. \end{aligned}$$

Destarte,

$$E[R \mid N] = N E[X_1].$$

Vejamos agora algumas propriedades da Esperança Condicional:

(EC1) $E[G(Y)E[X \mid Y]] = E[XG(Y)]$ para toda função mensurável e limitada G, se X for integrável.

De fato, seja G uma tal função. Por (4.1) e (E3),

$$\begin{aligned} &E[G(Y)E[X \mid Y]] = \\ &\sum_{k\geq 1} G(y_k)E[X \mid Y = y_k]P[Y = y_k] \\ &\sum_{k\geq 1} G(y_k)\sum_{j\geq 1} x_j P[X = x_j \mid Y = y_k]P[Y = y_k] \\ &\sum_{k,j\geq 1} G(y_k)x_j P[X = x_j, Y = y_k] \\ &= E[G(Y)X]. \end{aligned}$$

Em particular, considerando a função G constante igual a 1, $E[E[X \mid Y]] = E[X]$. Podemos portanto calcular a esperança de R no exemplo 4.1, $E[R] = E[E[R \mid N]] = E[NE[X_1]] = E[X_1]E[N]$. Este resultado confirma nossa intuição, o valor médio das retiradas é igual ao produto do número médio de clientes com o valor médio da retirada de cada cliente.

(EC2) (Princípio de substituição). Seja $\varphi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ uma função mensurável com $\varphi(X, Y)$ integrável. Temos:

$$E[\varphi(X,Y) \mid Y = y] = E[\varphi(X,y) \mid Y = y].$$

De fato,

$$\begin{aligned} E[\varphi(X,Y) \mid Y = y] &= \sum_{k,j\geq 1} \varphi(x_k, y_j) P[X = x_k, Y = y_j \mid Y = y] \\ &= \sum_{k,j\geq 1} \varphi(x_k, y_j) \frac{P[X = x_k, Y = y_j, Y = y]}{P[Y = y]} \\ &= \sum_{k\geq 1} \varphi(x_k, y) \frac{P[X = x_k, Y = y]}{P[Y = y]} \\ &= \sum_{k\geq 1} \varphi(x_k, y) P[X = x_k \mid Y = y] \\ &= E[\varphi(X, y) \mid Y = y]. \end{aligned}$$

Este resultado afirma que podemos substituir dentro da Esperança Condicional Y por seu valor. Em particular, $E[\varphi(Y) \mid Y = y] = E[\varphi(y) \mid Y = y] = \varphi(y)$. Portanto, $E[\varphi(Y) \mid Y] = \varphi(Y)$.

(EC3) Se X e Y são independentes então $E[X \mid Y] = E[X]$.

Se X e Y são independentes, nenhuma informação sobre X é fornecida por Y. Portanto o valor médio de X não se modifica ao sabermos o valor de Y: $E[X \mid Y] = E[X]$. Formalmente, como X e Y são independentes:

$$\begin{aligned} E[X \mid Y = y] &= \sum_{k\geq 1} x_k P[X = x_k \mid Y = y] \\ &= \sum_{k\geq 1} x_k P[X = x_k] = E[X]. \end{aligned}$$

Desejamos extender o conceito de esperança condicional a situações mais gerais onde condicionamos uma variável aleatória em relação a uma σ-álgebra. Baseados na observação 4.2 e na propriedade (EC1), introduzimos a

DEFINIÇÃO 4.1: Seja X uma v.a. integrável definida em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra contida em $\mathcal{A}$ $(A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{A})$. A esperança condicional de X dada $\mathcal{F}$ notada por $E[X \mid \mathcal{F}]$ é uma v.a. com as propriedades:

(4.3) $E[X \mid \mathcal{F}]$ é $\mathcal{F}$-mensurável.

(4.4) Para toda v.a. Y limitada $\mathcal{F}$-mensurável,

$$E[YE[X \mid \mathcal{F}]] = E[YX].$$

(EC4) Se Y é uma variável aleatória limitada e $\mathcal{F}$-mensurável então $E[XY \mid \mathcal{F}] = YE[X \mid \mathcal{F}]$.

Para demonstrar esta asserção basta verificar que a v.a. $YE[X \mid \mathcal{F}]$ possui as propriedades (4.3) e (4.4). Como Y e $E[X \mid \mathcal{F}]$ são $\mathcal{F}$-mensuráveis, pela observação 3.2, $YE[X \mid \mathcal{F}]$ é $\mathcal{F}$-mensurável, verificando (4.3). Seja Z uma variável $\mathcal{F}$-mensurável limitada. Desejamos provar que $E[ZYE[X \mid \mathcal{F}]] = E[ZYX]$. Como Y é $\mathcal{F}$-mensurável e limitada, pela observação 3.2, ZY é $\mathcal{F}$-mensurável e limitada. Logo, pela definição de $E[X \mid \mathcal{F}]$, $E[ZYE[X \mid \mathcal{F}]] = E[ZYX]$, encerrando a demonstração de (4.4).

A propriedade (EC4) permite retirar da esperança condicional toda variável $\mathcal{F}$-mensurável.

(EC5) Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ duas σ-álgebras com $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ $(A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{G})$. Então

$$E[E[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{F}] = E[X \mid \mathcal{F}].$$

Novamente para provar a igualdade (EC5) devemos verificar (4.3) e (4.4) para $E[E[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{F}]$. Como $E[E[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{F}]$ é $\mathcal{F}$-mensurável, (4.3) é trivial. Por outro lado, seja Y uma v.a. limitada $\mathcal{F}$-mensurável.

Como Y é $\mathcal{F}$-mensurável, pela definição da esperança condicional da v.a. $E[X \mid \mathcal{G}]$ em relação a σ-álgebra $\mathcal{F}$,

$$E[YE[E[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{F}]] = E[YE[X \mid \mathcal{G}]].$$

Como Y é $\mathcal{F}$-mensurável e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, Y é $\mathcal{G}$-mensurável. Logo, pela definição de esperança condicional de X em relação a σ-álgebra $\mathcal{G}$,

$$E[YE[X \mid \mathcal{G}]] = E[YX].$$

Portanto,

$$E[YE[E[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{F}]] = E[YX],$$

provando (4.4).

Finalmente,

(EC6) Se X é $\mathcal{F}$-mensurável, então $E[X \mid \mathcal{F}] = X$.

As propriedades (4.3) e (4.4) se verificam imediatamente.

Exercícios.

1. Exercícios 7, 8, 9, 10, 14, 17, 18 e 19 do capítulo 1 de [J].
2. Exercícios 22, 23 e 29 do capítulo 2 de [J].
3. Exercícios 6, 7, 10 e 11 do capítulo 3 de [J].
4. Exercícios 1, 7, 9 e 10 do capítulo 4 de [J].
5. Exercício 6 do capítulo 1 de [J].
6. Demonstre que uma função $X\colon \Omega \to \mathbf{R}$ é uma v. a. se $X^{-1}((-\infty, r]) \in \mathcal{A}$ para todo $r \in \mathbf{R}$. (Sugestão: Seja $\mathcal{C} = \{B \in \mathbf{R}; X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. (i) Mostre que $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra. (ii) Prove que $\mathcal{C}$ contém todos os intervalos e conclua).

CAPÍTULO II

INTRODUÇÃO AOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Introduzimos no capítulo anterior o conceito de espaço de probabilidade.

Vimos em alguns exemplos como modelizar experimentos a partir deste conceito. Desejamos agora encontrar um modelo para uma seqüência de experimentos.

EXEMPLO 1.1: Podemos considerar uma seqüência de lançamentos de uma moeda. O espaço amostral Ω consiste em todas as seqüências de caras (K) ou coroas (C) : $\Omega = \{(w_i)_{i\geq 1}, w_i = K \text{ ou } C\}$. Desejamos atribuir uma probabilidade a toda seqüência finita. Seja $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ uma seqüência finita de caras e coroas ($\alpha_i = K$ ou C, $1 \leq i \leq N$) e considere $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ o subconjunto de Ω dado por

$$A(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = \{w \in \Omega; w_i = \alpha_i, 1 \leq i \leq N\}. \tag{1.1}$$

Os subconjuntos que dependem de um número finito de coordenadas são chamados de conjuntos cilíndricos. Como desejamos atribuir uma probabilidade aos conjuntos cilíndricos, a σ-álgebra $\mathcal{A}$ deve conter todos estes conjuntos.

A classe dos conjuntos cilíndricos não forma uma σ-álgebra. Por exemplo seja $\Omega_o = \{w; \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 1_{\{w_i=K\}} \geq \frac{2}{3}\}$ o conjunto das seqüências cujo número médio de caras é maior ou igual a 2/3. Ω_o não depende apenas de um número finito de coordenadas, portanto Ω_o não é cilíndrico. Por outro lado, Ω_o pode ser expresso a partir de conjuntos cilíndricos:

$$\Omega_o = \bigcap_{j\geq 1} \bigcup_{k_o \geq 1} \bigcap_{k\geq k_o} \{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} 1_{\{w_i=K\}} > \frac{2}{3} - \frac{1}{j}\}.$$

Esta igualdade significa que Ω_o pertence a toda σ-álgebra que contiver os conjuntos cilíndricos.

Como para os borelianos, a σ-álgebra natural será a menor σ-álgebra que contiver todos os conjuntos cilíndricos, Ela será notada por $\mathcal{A}$ e algumas vezes por $\mathcal{F}_\infty$.

Para definir uma probabilidade em $\mathcal{A}$, começaremos atribuindo uma probabilidade aos conjuntos cilíndricos

$$(1.2) \qquad P[A(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)] = p^{\sum_{i=1}^N 1_{\{\alpha_i = K\}}} (1-p)^{\sum_{i=1}^N 1_{\{\alpha_i = C\}}}$$

onde p é um parâmetro entre 0 e 1. Esta probabilidade corresponde a considerar os lançamentos independentes. A probabilidade de obter cara em qualquer um dos lançamentos é igual a p.

A classe dos conjuntos cilíndricos forma uma álgebra $\mathcal{C}$. A função P definida em (1.2), na álgebra $\mathcal{C}$, possui as propriedades (P1) e (P2) da seção 1 do capítulo 1. Ademais, ela é aditiva em $\mathcal{C}$: se A, $B \in \mathcal{C}$, $A \cap B = \phi$, então $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$. Um teorema da teoria da medida assevera que podemos extender a função P à σ-álgebra $\mathcal{A}$ gerada pelos conjuntos cilíndricos de forma a obter uma probabilidade em $\mathcal{A}$. Esta extensão é única em certo sentido.

Assim construimos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ capaz de modelisar o experimento que consiste em lançar uma moeda sucessivas vezes.

No espaço $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ podemos definir uma seqüência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$:

$$X_n(w) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad w_n = C \\ \\ 1 & \text{se} \quad w_n = K \end{cases}$$

Não é difícil verificar a partir de (1.2) que as v.a. $\{X_n, n \geq 1\}$ são independentes e identicamente distribuidas com

$$P[X_n = 1] = 1 - P[X_n = 0] = p.$$

Podemos agora apresentar a

DEFINIÇÃO 1.1: Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Uma seqüência de v.a. (X_n) indexada por N ou N* será chamado de processo estocástico.

EXEMPLO 1.2: Suponha que desejamos acompanhar a evolução do valor de uma ação na bolsa. Nesta situação, podemos considerar como espaço amostral $\Omega = \{(w_i)_{i\geq 1}, w_i \in \mathrm{N}\} = \mathrm{N}^\infty$, w_i representando o valor da ação no i-ésimo dia em centavos. Como no exemplo 1.1, a σ-álgebra $\mathcal{A}$ será a σ-álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos (i.e. a menor σ-álgebra que contém todos os conjuntos cilíndricos) e podemos definir P em $\mathcal{A}$ de diversas formas. Como estamos interessados em alguns exemplos de processos estocásticos, evitando as dificuldades técnicas, não nos preocuparemos em provar a existência de espaço de probabilidade nos quais possam ser definidos processos estocásticos complexos. Vamos admitir que eles existem. No exemplo 1.1 apresentamos um breve resumo de uma forma de construção destes espaços. Ateremo-nos à descrição lá realizada.

Em todo este opúsculo, $\mathcal{F}_n$ representará a σ-álgebra gerada por $X_1, X_2, \ldots, X_n$, a saber, a menor σ-álgebra para a qual $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sejam mensuráveis.

No exemplo 1.1, a σ-álgebra $\mathcal{F}_n$ é a classe dos subconjuntos de Ω que só dependem das n primeiras coordenadas:

$$\mathcal{F}_n = \{A \subseteq; w \in A \text{ e } \tilde{w}_i = w_i \;\; 1 \leq i \leq n \Rightarrow \tilde{w} \in A\}.$$

De fato, inicialmente, pode-se verificar sem muita dificuldade que $\mathcal{F}_n$ é uma σ-álgebra pois todo conjunto de $\mathcal{F}_n$ é uma reunião finita de conjuntos $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, definidos em (1.1).

Por outro lado, para $1 \leq k \leq n$, X_k é certamente $\mathcal{F}_n$-mensurável pois para todo boreliano B,

$$X_k^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega & \text{se} \quad B \supseteq \{0,1\} \\ \{w; w_k = K\} & \text{se} \quad 1 \in B \text{ e } 0 \notin B \\ \{w; w_k = C\} & \text{se} \quad 0 \in B \text{ e } 1 \notin B \\ \phi & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como os quatro conjuntos estão em $\mathcal{F}_n$, X_k é $\mathcal{F}_n$-mensurável. Finalmente, seja $\mathcal{G}$ uma σ-álgebra para a qual $X_1, \ldots, X_n$ sejam mensuráveis. Vamos mostrar que $\mathcal{G}$ contém $\mathcal{F}_n$ (portanto $\mathcal{F}_n$ é a menor). Considere uma seqüência $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ de caras ou coroas. Seja $\beta_1, \ldots, \beta_n$ a seqüência onde $\beta_i = 1$ se $\alpha_i = K$ e $\beta_i = 0$ se $\alpha_i = C$. O conjunto $\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = \beta_i\}$ está em $\mathcal{G}$ pois $X_1, \ldots, X_n$ são $\mathcal{G}$-mensuráveis. Como $\{X_i(w) = \beta_i\} = \{w;\ w_i = \alpha_i\}$ para $1 \leq i \leq n$, $\bigcap_{i=1}^{n} \{w;\ w_i = \alpha_i\}$ está em $\mathcal{G}$. Ora $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \{w; w_i = \alpha_i\} \in \mathcal{G}$. Como todo elemento da σ-álgebra $\mathcal{F}_n$ é uma reunião finita de conjuntos desta forma, $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{G}$.

Para indicar que $\mathcal{F}_n$ é a σ-álgebra gerada por $X_1, \ldots, X_n$, notaremos algumas vezes $\mathcal{F}_n$ por $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Da definição da σ-álgebra $\mathcal{F}_n$, vemos imediatamente que $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$ para todo inteiro $n \leq m$. O conceito de uma seqüência crescente de σ-álgebras assumirá um papel relevante nos próximos capítulos. Propomos então uma

DEFINIÇÃO 1.2: Uma seqüência crescente de σ-álgebras $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ é chamada de filtro. Uma seqüência de v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ será dita adaptada ao filtro $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ se para todo inteiro positivo n X_n for $\mathcal{F}_n$-mensurável.

Construímos no exemplo 1.1 um filtro $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. Neste caso, a seqüência de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ era evidentemente adaptada ao filtro $\mathcal{F}_n$ pois definimos a σ-álgebra $\mathcal{F}_n$ como sendo a σ-álgebra gerada por $X_1, \ldots, X_n$.

No entanto, estudaremos alguns processos estocásticos neste opúsculo onde o filtro não é definido a partir do processo estocástico $(X_n)_{n\geq 1}$. Neste caso deveremos verificar que o processo $(X_n)_{n\geq 1}$ (ou $(X_n)_{n\geq 0}$) é adaptado ao filtro $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ ($(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$).

Doravante, suporemos que num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ temos definido um filtro $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ para o qual $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e uma seqüência de v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ adaptado ao filtro $\mathcal{F}_n$.

Nos próximos capítulos estudaremos problemas de otimização. No exemplo 1.2, é natural imaginar um corretor desejando vender as ações que possui de forma a maximizar seu lucro. Estabelecer uma estratégia consiste em definir uma função $\tau : \Omega \to \mathbb{N}$ que informe ao corretor qual o momento em que deve vender suas ações. Assim $\tau(w) = k$, indica que se a realização do experimento for w, o corretor deve interromper o processo no instante k.

Admitiremos que o corretor é honesto e não possue portanto nenhuma informação sobre o futuro. Neste caso, a decisão de vender ou não as ações no instante k só pode repousar na história pregressa do processo e do valor presente da ação.

No exemplo 1.1, conhecer o passado e o presente até o instante k consiste em saber o resultado dos k-primeiros lançamentos ou, de modo equivalente, conhecer o valor das variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_k$. Assim, neste exemplo, a decisão de interromper ou não o processo no instante k deve ser uma função de $X_1, \ldots, X_k$. Formalmente, o conjunto $\{\tau = k\} = \{w \in \Omega, \tau(w) = k\}$ deve poder ser expresso a partir dos conjuntos gerados pelas v.a. $X_1, \ldots, X_k$. Como vimos acima, a σ-álgebra $\mathcal{F}_k$ é a σ-álgebra gerada por $X_1, \ldots, X_k$ e portanto constitui a classe de todos os conjuntos que possam ser expressos a partir das v.a. $X_1, \ldots, X_k$. Logo, devemos impor que o conjunto $\{\tau = k\}$ pertença a σ-álgebra $\mathcal{F}_k$, se desejamos que τ represente uma estratégia de um jogador honesto, sem informações sobre o futuro. Temos assim a

DEFINIÇÃO 1.3: Uma função $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ é um tempo de parada se para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

O leitor compreenderá nos próximos capítulos ser o conceito de tempo de parada o mais importante da teoria dos processos estocásticos.

Vejamos alguns exemplos de tempo de parada.

EXEMPLO 1.3: (Tempo de parada constante). Seja $\tau: \Omega \to \mathbf{N}$, $\tau(w) = k$ para todo $w \in \Omega$. τ é um tempo de parada: $\{\tau = n\} = \phi$ ou Ω. Como os conjuntos ϕ e Ω pertencem a $\mathcal{F}_j$ para todo $j \geq 0$, τ é um tempo de parada.

EXEMPLO 1.4: (Primeiro instante de visita a um conjunto). Seja $\Gamma \subseteq \mathbf{R}$ e seja $\tau: \Omega \to \mathbf{N}$ definido por

$$\tau(w) = \inf_{k \geq 0} \{X_k(w) \in \Gamma\}.$$

Intuitivamente, para sabermos se no instante k visitamos pela primeira vez o conjunto Γ, basta conhecer a história pregressa do processo. Nenhuma informação sobre o futuro é necessária para decidir se visitamos o conjunto Γ pela primeira vez no instante k. Formalmente,

$$\{\tau = k\} = \bigcap_{j=0}^{k-1} \{X_j \notin \Gamma\} \cap \{X_k \in \Gamma\}.$$

Como cada um dos conjuntos da expressão à direita do sinal da igualdade está em $\mathcal{F}_k$, $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$. Logo τ é um tempo de parada.

Observe neste exemplo que τ pode assumir o valor $+\infty$. De fato, se $X_j(w) \notin \Gamma$ para todo $j \geq 0$, $\tau(w) = +\infty$.

Encontraremos no decorrer dos capítulos outros exemplos de tempo de parada. Vejamos um exemplo de função que não seja um tempo de parada.

EXEMPLO 1.5: (Última visita a um conjunto antes de certo instante). Para $n \geq 1$, seja $\tau_n: \Omega \to \mathbf{N}$ a v.a.:

$$\tau_n(w) = \max_{1 \leq j \leq n} \{X_j \in \Gamma\},$$

Para verificar se no instante j estamos visitando pela última vez o conjunto Γ, precisamos conhecer a evolução do processo entre os instantes $j+1$ e n, portanto precisamos de informações sobre o futuro do processo. Formalmente, se $j < n$,

$$\{\tau_n = j\} = \{X_j \in \Gamma\} \cap \bigcap_{i=j+1}^{n} \{X_i \notin \Gamma\}$$

e podemos verificar rigorosamente que este conjunto não pertence a σ-álgebra $\mathcal{F}_j$.

Seja τ um tempo de parada. Qual a informação disponível a um jogador no exemplo 1.1 ou a um corretor o exemplo 1.2 no instante aleatório $\tau(w)$.

Se o tempo de parada for constante igual a um inteiro n, a informação disponível é fornecida pelas v.a. $X_1, \dots, X_n$. Em outros termos a informação disponível é dada pelos conjuntos da σ-álgebra $\mathcal{F}_n$.

Por outro lado, se o tempo de parada τ for aleatório, a informação disponível no instante τ dependerá do valor de τ. No conjunto $\{\tau = n\}$ ela será fornecida por $\mathcal{F}_n$. Assim, intuitivamente, se $\mathcal{F}_\tau$ representa a informação disponível no instante τ, um conjunto A pertence a $\mathcal{F}_\tau$ se A restrito ao conjunto $\{\tau = n\}$ estiver em $\mathcal{F}_n$ para todo $n \in \mathrm{N}$. Em outros termos, A é uma informação disponível no instante aleatório τ se para todos os valores eventuais n de τ, A for conhecido no instante n no conjunto onde $\tau = n$. Temos portanto a

DEFINIÇÃO 1.4: Para um tempo de parada $\tau : \Omega \to \mathrm{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{F}_\tau$ é a σ-álgebra dos conjuntos A para os quais, $A \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$ para todo inteiro positivo k:

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \subseteq \Omega; A \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k, \forall k \in \mathrm{N}\}.$$

Não é difícil verificar que $\mathcal{F}_\tau$ é uma σ-álgebra.

EXEMPLO 1.6: Seja $\tau : \Omega \to \mathrm{N}$ um tempo de parada. Podemos definir a v.a. X_τ por

$$X_\tau(w) = \begin{cases} X_{\tau(w)}(w) & \text{se} \quad \tau(w) < \infty \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Veremos no Lema 1.1 que esta v. a. é $\mathcal{F}_\tau$-mensurável. Antes, porém, voltemos ao exemplo 1.1. Definiremos, a partir do processo $(X_n)_{n\geq 1}$, um novo processo $(N_k)_{k\geq 1}$. N_k é igual ao número de caras obtidas até o k-ésimo lançamento. Portanto, como X_j vale 1 se obtivemos cara no j-ésimo lançamento, para $k \geq 1$,

$$N_k = \sum_{j=1}^{k} X_j.$$

Evidentemente, a σ-álgebra $\mathcal{F}_k$ gerada por $X_1, \ldots, X_k$ é também a σ-álgebra gerada por $N_1, \ldots, N_k$. Seja τ o tempo de parada

$$\tau(w) = \inf_{k\geq 1} \{N_k \geq 15\}.$$

Vimos no exemplo 1.4 que τ é um tempo de parada. Consideremos a variável aleatória N_τ definida no exemplo 1.6. Afirmamos:

$$N_\tau(w) = \begin{cases} 15 & \text{se} \quad \tau(w) < \infty \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

De fato,

$$\begin{aligned} N_\tau(w) &= N_{\tau(w)}(w)\, 1_{\{\tau(w)<\infty\}} \\ &= \sum_{k\geq 1} 1_{\{\tau(w)=k\}} N_{\tau(w)}(w) \\ &= \sum_{k\geq 1} 1_{\{\tau(w)=k\}} N_k(w) \end{aligned}$$

pois por definição, $N_{\tau(w)}(w) = 0$ no conjunto $\{\tau = \infty\}$ e $N_{\tau(w)}(w) = N_k(w)$ no conjunto $\{\tau(w) = k\}$. Como $\{\tau(w) = k\} = \bigcap_{j=1}^{k-1} \{N_j < 15\} \cap \{N_k \geq 15\}$ e $|N_{i+1} - N_i| = |X_{i+1}| \leq 1$, no conjunto $\{\tau = k\}$, $N_k = 15$. Portanto,

$$N_\tau(w) = 15 \sum_{k\geq 1} 1_{\{\tau(w)=k\}} = 15\, 1_{\{\tau<\infty\}}.$$

LEMA 1.1. *A v.a. X_τ definida no exemplo 1.6 é $\mathcal{F}_\tau$-mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja B um boreliano de $\mathbf{R}$. Desejamos provar que $X_\tau^{-1}(B) \in \mathcal{F}_\tau$. Seja $k \in \mathrm{N}$

$$\begin{aligned} X_\tau^{-1}(B) \cap \{\tau = k\} &= \{X_\tau \in B\} \cap \{\tau = k\} \\ &= \{X_k \in B\} \cap \{\tau = k\}. \end{aligned}$$

Como X_k é $\mathcal{F}_k$-mensurável, $\{X_k \in B\} \in \mathcal{F}_k$. Como τ é um tempo de parada, $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$. Portanto, para todo inteiro positivo k e boreliano B, $X_\tau^{-1}(B) \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$. Logo $X_\tau \in \mathcal{F}_\tau$. □

Este lema afirma que no instante aleatório τ, o valor do processo (X_τ) é conhecido.

Veremos nos exercícios que se τ e ν são tempos de parada, então $\tau \wedge \nu$ e $\tau + \nu$ são tempos de parada. Podemos portanto definir as σ-álgebras $\mathcal{F}_{\tau\wedge\nu}$ e $\mathcal{F}_{\tau+\nu}$.

Vejamos algumas propriedades dos tempos de parada e das σ-álgebras associadas a estes tempos de parada.

PROPOSIÇÃO 1.1. *Para que uma v.a. $\nu: \Omega \to \mathrm{N} \cup \{\infty\}$ seja um tempo de parada, é necessário e suficiente que para todo inteiro positivo k, $\{\nu \leq k\} \in \mathcal{F}_k$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja ν um tempo de parada. Logo, para todo inteiro

$$\{\nu \leq n\} = \bigcup_{j=0}^{n} \{\nu = j\} \in \mathcal{F}_n.$$

Reciprocamente, seja $\nu: \Omega \to \mathrm{N} \cup \{\infty\}$ um v.a. para a qual $\{\nu \leq k\} \in \mathcal{F}_k$ para todo inteiro positivo k. Então,

$$\{\nu = k\} = \{\nu \leq k\} \setminus \{\nu \leq k-1\} \in \mathcal{F}_k.$$

□

Da mesma forma podemos provar a

PROPOSIÇÃO 1.2. *Seja ν um tempo de parada. Para que um conjunto A pertença a σ-álgebra $\mathcal{F}_\nu$ é necessário e suficiente que para todo inteiro positivo n,* $A \cap \{\nu \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

PROPOSIÇÃO 1.3. *Sejam ν e τ dois tempos de parada. Os conjuntos $\{\nu \leq \tau\}$, $\{\nu = \tau\}$ e $\{\nu < \tau\}$ pertencem às σ-álgebras $\mathcal{F}_\nu$ e $\mathcal{F}_\tau$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\{\nu \leq \tau\} \cap \{\nu = k\} &= \{\nu = k\} \cap \{\tau \geq k\} \\ &= \{\nu = k\} \cap \{\tau < k\}^c \in \mathcal{F}_k.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\{\nu \leq \tau\} \cap \{\tau = k\} = \{\nu \leq k\} \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k.$$

Logo $\{\nu \leq \tau\} \in \mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{F}_\tau$. As outras afirmações da proposição se demonstram da mesma forma. $\square$

COROLÁRIO. *Sejam ν e τ dois tempos de parada tais $\nu(w) \leq \tau(w)$ para todo $w \in \Omega$. Então $\mathcal{F}_\nu \subseteq \mathcal{F}_\tau$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B \in \mathcal{F}_\nu$. Pela proposição 1.2, para mostrar que $B \in \mathcal{F}_\tau$, basta verificar que $\{\tau \leq k\} \cap B \in \mathcal{F}_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ora, como $\nu \leq \tau$,

$$\{\tau \leq k\} \cap B = \{\tau \leq k\} \cap \{\nu \leq k\} \cap B \in \mathcal{F}_k,$$

pois $\{\tau \leq k\} \in \mathcal{F}_k$ e, sendo ν um tempo de parada e sendo B $\mathcal{F}_\nu$-mensurável, $B \cap \{\nu \leq k\} \in \mathcal{F}_k$. $\square$

Provamos no Lema 1.1 que para todo tempo de parada τ, X_τ é $\mathcal{F}_\tau$-mensurável. Seja ν um tempo de parada. Pelo corolário da proposição 1.3, $(\mathcal{F}_{\nu+k})_{k\geq 0}$ é um filtro. Logo, podemos considerar em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, um novo processo, $(X_{\nu+k})_{k\geq 0}$ adaptado ao filtro $(\mathcal{F}_{\nu+k})_{k\geq 0}$. Este novo processo aparecerá freqüentemente nos capítulos ulteriores.

Terminamos este capítulo demonstrando um resultado acerca da esperança condicional de uma v.a. em relação à σ-álgebra $\mathcal{F}_\nu$, se ν é um tempo de parada.

PROPOSIÇÃO 1.4. *Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade, X uma v. a. integrável e $\mathcal{A}$-mensurável e $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$ um filtro. Seja ν um tempo de parada finito quase certamente. Então,*

$$E[X \mid \mathcal{F}_\nu] = \sum_{k\geq 0} 1_{\{\nu=k\}} E[X \mid \mathcal{F}_k].$$

DEMONSTRAÇÃO: Vimos na seção 4 do capítulo 1 ser necessário e suficiente verificar duas propriedades para provar que uma variável aleatória Y é a esperança condicional de X dada $\mathcal{F}_\nu$. Por um lado, $\sum_{k\geq 0} 1_{\{\nu=k\}} E[X \mid \mathcal{F}_k]$ é $\mathcal{F}_\nu$-mensurável. De fato, seja B um boreliano de $\mathbf{R}$

$$\begin{aligned}
&(\sum_{k\geq 0} 1_{\{\nu=k\}} E[X \mid \mathcal{F}_k])^{-1}(B) \cap \{\nu = j\} \\
&= \{\sum_{k\geq 0} 1_{\{\nu=k\}} E[X \mid \mathcal{F}_k] \in B\} \cap \{\nu = j\} \\
&= \bigcup_{k\geq 0} \{\nu = k\} \cap \{E[X \mid \mathcal{F}_k] \in B\} \cap \{\nu = j\} \\
&= \{\nu = j\} \cap \{E[X \mid \mathcal{F}_j] \in B\} \in \mathcal{F}_j
\end{aligned}$$

pois ν é um tempo de parada e, por definição, $E[X \mid \mathcal{F}_j]$ é $\mathcal{F}_j$-mensurável. Logo a v.a. $\sum_{k\geq 0} 1_{\{\nu=k\}} E[X \mid \mathcal{F}_k]$ é $\mathcal{F}_\nu$-mensurável.

Por outro lado, seja H uma função $\mathcal{F}_\nu$-mensurável e limitada

$$E\big[\sum_{k\geq 0} 1_{\{\nu=k\}} H\, E[X \mid \mathcal{F}_k]\big] = \sum_{k\geq 0} E\big[1_{\{\nu=k\}} H\, E[X \mid \mathcal{F}_k]\big].$$

Como H é $\mathcal{F}_\nu$-mensurável, $1_{\{\nu=k\}} H$ é $\mathcal{F}_k$-mensurável (cf. exercício 4). Portanto, pela definição de Esperança Condicional,

$$\begin{aligned}
&E\big[1_{\{\nu=k\}} H\, E[X \mid \mathcal{F}_k]\big] \\
&\qquad = E[1_{\{\nu=k\}} H\, X].
\end{aligned}$$

Logo,

$$E\Big[\sum_{k\geq 0} 1_{\{\nu=k\}} E[X \mid \mathcal{F}_k] H\Big]$$

$$= E[XH].$$

$\square$

Exercícios.

1. Sejam τ e ν dois tempos de parada. Mostre que $\nu+\tau$ e $\nu\wedge\tau$ são tempos de parada.
2. Sejam τ e ν dois tempos de parada. Mostre que $\{\nu < \tau\}$, $\{\nu = \tau\}$ e $\{\tau \leq \nu\}$ pertencem à σ-álgebra $\mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}$.
3. Seja ν um tempo de parada relativo a um filtro $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Para todo $n \in \mathbf{N}$, seja $\psi(n)$ o menor inteiro p para o qual $\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_p$. Mostre que $\psi(\nu)$ é um tempo de parada menor ou igual a ν.
4. Seja ν um tempo de parada e $H\colon \Omega \to \mathbf{R}$ um v. a. $\mathcal{F}_\nu$-mensurável. Prove que a v. a. $H\,1_{\{\nu=k\}}$ é $\mathcal{F}_k$-mensurável para $k \geq 0$.

CAPÍTULO III

UM EXEMPLO DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA

§1. O Problema da Princesa

Neste capítulo apresentamos uma solução informal do primeiro problema de otimização estocástica. Sejam N objetos distintos $A_1, \ldots, A_N$ ordenados do pior ao melhor. Examinamos estes objetos numa seqüência aleatória e desejamos selecionar o melhor deles A_N. Após cada inspeção rejeitamos ou escolhemos o objeto considerado. Todo objeto rejeitado não pode ser reconsiderado e uma vez escolhido um dos objetos, interrompe-se o processo de seleção.

Este problema pode ser encontrado por um casal viajando de carro por uma estrada. Embora conheçam o número de hotéis existentes no trecho onde desejam repousar, ignoram a qualidade de cada um. Desejando descansar no melhor dos hotéis, eles preferem escolher um pior a voltar pela estrada para dormir em um de melhor qualidade.

Podemos também imaginar uma princesa desejando selecionar entre os pretendentes a sua mão o mais qualificado. Neste caso, o conhecimento a priori do número de pretendentes pode não ser verossímil, mas a segunda hipótese que estabelece a impossibilidade de reconsiderar um objeto anteriormente rejeitado parece plausível.

Em [S] este problema é referido como o problema das secretárias. Trata-se neste caso de selecionar a melhor entre as diversas candidatas convocadas a uma entrevista.

Neste capítulo acompanhamos as idéias expostas em [DY].

Consideraremos os N objetos como pontos da reta. Um ponto a direita de outro indica ser aquele melhor do que este. Representaremos estes pontos por $A_1 < A_2 <$

$\cdots < A_N$. Escolhemos ao acaso um destes pontos. Notamos por w_1 o primeiro ponto escolhido. Assim, w_1 será igual a A_j, para $1 \leq j \leq N$, com probabilidade $1/N$. Em seguida, escolhemos, ao acaso, um entre os $(N-1)$ pontos restantes. Notamos este ponto por w_2. Desta forma obtemos uma seqüência $(w_1, w_2, \ldots, w_N)$. Cada seqüência possível é uma permutação dos elementos $A_1, \ldots, A_N$. Como as seqüências são equiprováveis e existem $N!$ permutações de N objetos distintos , cada seqüência terá probabilidade $1/(N!)$ de ocorrer.

Após terem sido inspecionados k objetos, a única informação que possuimos é a ordem relativa de $w_1, \ldots, w_k$. Neste momento, devemos decidir entre selecionar w_k e interromper o processo ou prosseguir e rejeitar definitivamente w_k. Desejamos maximizar a probabilidade de selecionar A_N.

Uma estratégia consistiria em selecionar o primeiro ponto examinado: w_1. Neste caso, teremos selecionado corretamente o melhor objeto se A_N tiver sido escolhido em primeiro. A probabilidade de escolhermos A_N em primeiro é igual a $1/N$ que converge a 0 quando N tende a $+\infty$. Portanto nossa primeira estatégia foi comprovada não ser eficaz quando o número de objetos é grande.

A primeira pergunta, antes de abordarmos o problema de otimização, consiste em saber se existe alguma estratégia que permite selecionar o melhor objeto com uma probabilidade que não tende a zero quando N cresce para $+\infty$.

Suponhamos que N seja par. Considere a seguinte estratégia. Rejeitamos sistematicamente os $N/2$ primeiros objetos. Em seguida, selecionamos o primeiro objeto melhor que todos os anteriores. Com esta estratégia, selecionamos o melhor objeto se A_{N-1} estiver entre os $N/2$ primeiros objetos examinados e A_N estiver na segunda metade examinada. Ora isto ocorre em $\left(\frac{N}{2}\right)^2 (N-2)!$ seqüências. Portanto a probabilidade de selecionarmos o melhor objeto com esta estratégia é

$$P_N[\text{sucesso}] = \frac{\left(\frac{N}{2}\right)^2 (N-2)!}{N!} = \frac{N}{4(N-1)},$$

onde notamos por P_N [sucesso] a probabilidade de sucesso da nossa estratégia quando devemos selecionar o melhor dentre N objetos. Desta forma, obtivemos uma estratégia com probabilidade de sucesso que não tende a 0 quando N cresce para $+\infty$.

Apresentamos agora uma formulação matemática do problema. Ele consiste em definir uma estratégia que maximize a probabilidade de selecionar o melhor objeto. Esta estratégia deve indicar se interrompemos ou não o processo após o exame de cada objeto. A decisão de prosseguir ou não deve repousar unicamente na informação adquirida até então.

A primeira dificuldade é de traduzir os conceitos de informação, estratégia e maximização para o universo matemático, constituir um modelo.

Seja Ω o espaço de todas as permutações de $A_1, \dots, A_N$:

$$\Omega = \{(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(N)}); \sigma \in S_N\},$$

onde S_N representa o grupo das permutações de $1, \dots, N$. Os elementos de Ω serão representados por letras minúsculas $w = (w_1, \dots, w_N)$. Assim w_j é o j-ésimo elemento examinado. Para $1 \leq k \leq N$, seja $Y_k \colon \Omega \to \{1, \dots, k\}$ a variável aleatória que indica o número de pontos a direita de w_k na etapa k:

$$Y_k(w) = \#\{i \leq k; w_i \geq w_k\},$$

onde $\#A$ indica o número de elementos do conjunto A.

Após examinarmos k objetos, conhecemos a posição relativa dos pontos $w_1, \dots, w_k$. Esta é a informação que possuimos após a etapa k e a partir desta informação devemos decidir se rejeitamos ou selecionamos o objeto w_k. Ora conhecer $Y_1(w), \dots, Y_k(w)$ permite identificar as posições relativas de $w_1, \dots, w_k$. Reciprocamente conhecendo $w_1, \dots, w_k$, podemos calcular $Y_1(w), \dots, Y_k(w)$. Portanto a informação disponível após a etapa k é fornecida por $Y_1, \dots, Y_k$.

Uma estratégia é uma função que a cada seqüência w associa um inteiro entre 1 e N, a saber, o índice do objeto selecionado. Seja $\tau \colon \Omega \to \{1, \dots, N\}$ uma estratégia.

Como a decisão de interromper ou prosseguir após a inspeção do k-ésimo objeto deve assentar-se unicamente na informação disponível no instante k, $\{\tau = k\}$ deve ser uma função da informação disponível, i.e., de $Y_1, \ldots, Y_k$.

Seja $\mathcal{F}_k$ a σ-álgebra gerada por $Y_1, \ldots, Y_k$. Na terminologia do capítulo II, τ é um tempo de parada em relação ao filtro $(\mathcal{F}_k)_{1 \leq k \leq N}$:

$$\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k, \qquad 1 \leq k \leq N.$$

Seja T o conjunto dos tempos de parada associados ao filtro $(\mathcal{F}_k)_{1 \leq k \leq N}$. A estratégia τ terá selecionado o melhor objeto se $w_{\tau(w)} = A_N$. Desejamos portanto maximizar $P[w_{\tau(w)} = A_N]$, a saber encontrar ν em T tal que

$$P[w_{\nu(w)} = A_N] = \max_{\tau \in T} P[w_{\tau(w)} = A_N].$$

Como Ω é um conjunto finito, existe apenas um número finito de estratégias τ possíveis. Logo existe uma que realiza o máximo, uma estratégia ótima.

Com o problema formulado, podemos abordar as primeiras etapas da solução.

Diremos que um ponto w_k é máximo se $w_k \geq w_j$ para $1 \leq j \leq k$. De maneira equivalente, w_k é máximo se $Y_k(w) = 1$.

AFIRMAÇÃO 1: Podemos restringir nosso estudo às estratégias que para $k < N$ selecionam apenas pontos w_k se estes forem máximos.

De fato, seja τ uma estratégia que para $k < N$ selecione algum w_k não máximo. Como w_k não é um ponto máximo, w_k é certamente diferente de A_N. Seja τ^* a estratégia igual à estratégia τ em todos os casos mas que ao invés de selecionar w_k, selecione w_N no conjunto onde w_k não é máximo. Pode-se verificar sem muita dificuldade que τ^* é uma estratégia (tempo de parada) e que a probabilidade de τ^* selecionar A_N é maior ou igual à probabilidade de τ selecionar A_N, pois $\tau^* = \tau$ salvo em um conjunto onde τ não seleciona um ponto máximo e portanto não seleciona A_N.

Apresentamos no apêndice deste capítulo uma prova rigorosa da afirmação 1.

AFIRMAÇÃO 2: A decisão de interromper ou não o processo, ao aparecer um novo ponto máximo w_k, só depende do índice do novo ponto máximo e não da disposição relativa dos pontos anteriores, $w_1, \ldots, w_{k-1}$.

A decisão de interromper ou não o processo ao aparecer na k-ésima etapa um ponto máximo depende exclusivamente da posição relativa de $w_k, w_{k+1}, \ldots, w_N$. De fato, como w_k é um ponto máximo, $w_k = A_N$ se $w_k > w_j$ para $k < j \leq N$. Pelo contrário, $w_k \neq A_N$ se existe $k+1 \leq j \leq N$; $w_j > w_k$.

A posição relativa de $w_k, w_{k+1}, \ldots, w_N$ não depende da ordem relativa de $w_1, \ldots, w_{k-1}$. De fato, suponhamos que k objetos tenham sido examinados sendo w_k um máximo. Seja $A_1^k(w)$ o menor dos pontos $w_1, \ldots, w_k$: $A_1^k(w) = \min_{1 \leq i \leq k} w_i$. Da mesma forma definimos $A_2^k(w), \ldots, A_k^k(w)$:

$$A_j^k(w) = \min\{w_i, 1 \leq i \leq k;\ w_i > A_{j-1}^k(w)\} \quad \text{para} \quad 2 \leq j \leq k.$$

Como w_k é um ponto máximo $A_k^k(w) = w_k$. A probabilidade de w_{k+1} encontrar-se em qualquer um dos intervalos $(-\infty, A_1^k), (A_1^k, A_2^k), \ldots, (A_{k-1}^k, A_k^k)$, $(A_k^k, +\infty)$ é igual a $1/(k+1)$.

De fato, a cada elemento w de Ω, podemos associar o conjunto de suas $k+1$ primeiras coordenadas $\{w_1, \ldots, w_{k+1}\}$. Existem $\binom{N}{k+1}$ conjuntos distintos. Para cada conjunto existem $(k+1)!$ seqüências $(w_{\sigma(1)}, \ldots, w_{\sigma(k+1)})$ diferentes. Em $k!$ seqüências, $w_{k+1} > w_j$ para $1 \leq j \leq k$. Da mesma forma, em $k!$ seqüências, $A_j^{k+1}(w) = w_{k+1}$ para $1 \leq j \leq k$. Logo com probabilidade $\frac{1}{k+1}$, $A_j^{k+1}(w) = w_{k+1}$ para $1 \leq j \leq k+1$. Portanto a probabilidade de w_{k+1} encontrar-se em qualquer um dos intervalos $(-\infty, A_1^k), (A_1^k, A_2^k), \ldots, (A_k^k, \infty)$ é igual a $\frac{1}{k+1}$.

Da mesma forma a probabilidade de w_{k+2} encontrar-se em qualquer um dos intervalos $(-\infty, A_1^{k+1}), \ldots, (A_{k+1}^{k+1}, \infty)$ é igual a $\frac{1}{k+2}$. Repetindo este argumento para $j = k+3, \ldots, N$, concluimos que a distribuição de $w_k \ldots, w_N$ não depende da ordem relativa de $w_1, \ldots, w_{k-1}$ mas apenas do índice k.

Logo a decisão de interromper ou não o processo na etapa k se w_k é um ponto máximo não depende da ordem relativa de $w_1, \ldots, w_k$ mas apenas de k.

Apresentamos no apêndice uma prova rigorosa da afirmação 2.

Podemos portanto restringir nossa análise em busca de uma estratégia ótima ao estudo da seqüência dos sucessivos índices de pontos máximos.

Seja X_j o índice do j-ésimo ponto máximo. Desta forma, como w_1 é sempre um ponto máximo, $X_1(w) = 1$ e $X_2(w) = 2$ se $w_2 > w_1$; caso contrário, $X_2(w) > 2$.

Para cada seqüência $w \in \Omega$, o número de pontos máximos varia. Para contornar esta dificuldade, introduzimos um novo ponto representado por δ. Se a seqüência $w \in \Omega$ possuir $j \leq N$ pontos máximos, conviremos que $X_k(w) = \delta$ para todo $k > j$.

Desejamos estudar a evolução da seqüência $(X_j)_{j\geq 1}$ para encontrar um método que indique quando o processo de seleção deve ser interrompido. A cada aparecimento de um novo ponto máximo e portanto a cada novo valor da seqüência (X_j) devemos decidir entre o prosseguimento do processo ou sua interrupção.

Considere um instante k no qual apareça um novo ponto máximo w_k. Como trata-se de um ponto máximo, existe um inteiro $j \leq k$ com $X_j = k$, onde j indica o número de pontos máximos examinados até a etapa k. $w_k = A_N$ quando e somente quando não aparecer outro ponto máximo, portanto se e somente se $X_{j+1} = \delta$. Buscamos portanto uma estratégia que maximize a probabilidade de interromper o processo (X_j) no instante anterior ao primeiro salto para δ.

Vimos na Afirmação 2 que podemos ater nosso estudo às estratégias cuja decisão de interromper o processo repousa apenas no índice do novo ponto máximo e não na ordem relativa dos pontos anteriores. Em termos da seqüência $(X_j)_{j\geq 1}$, esta asserção significa que a decisão de interromper ou não o processo (X_j) no instante j_o deve depender apenas do valor de X_{j_o} e não da história pregressa do processo.

Analisemos a evolução do processo $(X_j)_{j\geq 1}$. Evidentemente, se para algum inteiro j, $X_j = \delta$ então $X_i = \delta$ para todo $i \geq j$. Por outro lado, se $X_j = k$, os valores possíveis de X_{j+1} são $k+1, k+2, \dots, N$ e δ. A probabilidade de X_{j+1} ser $k+1$ pode ser calculada de forma simples.

Vimos acima que $X_j = k$ quando e somente quando w_k for o j-ésimo ponto máximo. Portanto desejamos calcular a probabilidade de w_{k+1} ser um ponto máximo quando w_k é também um ponto máximo. Na etapa k, com a notação introduzida anteriormente, temos k pontos distribuidos na reta: $A_1^k(w) < A_2^k(w) < \cdots < A_k^k(w) = w_k$. Mostramos que a probabilidade de w_{k+1} pertencer a qualquer um dos intervalos abertos e adjacentes formados pelos pontos A_j^k é igual a $1/(k+1)$. Ora w_{k+1} é um ponto máximo somente quando w_{k+1} pertence ao intervalo $(A_k^k(w), \infty)$. Logo

$$P[X_{j+1} = k+1 \mid X_j = k] = \frac{1}{k+1}.$$

Em particular, esta probabilidade não depende nem do número j de máximos encontrados até a etapa k nem do índice de cada ponto máximo anterior e w_k (i.e. de $X_1, X_2, \dots, X_{j-1}$), ele só depende do valor de X_j. Formalmente, para toda seqüência crescente $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_{j-1} < k$,

$$\begin{aligned} &P[X_{j+1} = k+1 \mid X_1 = 1, X_2 = k_2, \dots, X_{j-1} = k_{j-1}, X_j = k] \\ &= P[X_{j+1} = k+1 \mid X_j = k] = \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Da mesma forma podemos calcular para $1 < i \leq N-k \quad P[X_{j+1} = k+i \mid X_j = k]$ e $P[X_{j+1} = \delta \mid X_j = k]$.

No conjunto onde $X_j = k$, X_{j+1} é igual a $k+i$ quando e somente quando $w_{k+\ell}$ não for um ponto máximo para $1 \leq \ell < i$ e w_{k+i} for um máximo. A probabilidade de w_{k+1} não ser um máximo é igual a $k/(k+1)$. Uma vez o ponto w_{k+1} examinado, os pontos $w_1, \dots, w_{k+1}$ formam $(k+2)$ intervalos abertos e adjacentes. Vimos que a probabilidade de w_{k+2} pertencer a qualquer um destes intervalos e $1/(k+2)$. Assim, a probabilidade de w_{k+2} não ser um ponto máximo conhecidos os valores de $w_1, \dots, w_{k+1}$

é $(k+1)/(k+2)$. Prosseguindo desta forma até a última etapa $k+i$ onde aparece um ponto máximo, temos

$$\begin{aligned} P[X_{j+1} = k+i \mid X_j = k] &= \frac{k}{k+1}\frac{k+1}{k+2}\cdots\frac{k+i-2}{k+i-1}\frac{1}{k+i} \\ &= \frac{k}{(k+i-1)(k+i)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, no conjunto onde $X_j = k$, $X_{j+1} = \delta$ quando e somente quando não aparecer nenhum ponto máximo após w_k. Logo

$$\begin{aligned} p[X_{j+1} = \delta \mid X_j = k] &= \frac{k}{k+1}\frac{k+1}{k+2}\cdots\frac{N-2}{N-1}\frac{N-1}{N} \\ &= \frac{k}{N}. \end{aligned}$$

Novamente conclui-se da argumentação precedente que o cálculo destas probabilidades não envolve o número j de pontos máximos ocorridos até a etapa k nem a distribuição relativa de $w_1, \ldots, w_{k-1}$ e portanto dos valores de $X_1, \ldots, X_{j-1}$. Destarte, para toda seqüência crescente $1 = k_1 < k_2 < \cdots < k_{j-1} < k$,

$$\begin{aligned} P[X_{j+1} = \ell \mid X_1 = 1, \ldots, X_{j-1} = k_{j-1}, X_j = k] \\ = P[X_{j+1} = \ell \mid X_j = k] \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$= \begin{cases} \frac{k}{\ell(\ell-1)} & \text{se} \quad 1 \leq k < N,\ k+1 \leq \ell \leq N; \\ \frac{k}{N} & \text{se} \quad 1 \leq k \leq N,\ \ell = \delta; \\ 1 & \text{se} \quad k = \delta,\ \ell = \delta; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Uma seqüência de v.a. $(X_j)_{j\geq 1}$ definidas num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ é chamado de cadeia de Markov se verifica a condição (1.1). Estudaremos no próximo capítulo esta classe de seqüências estocásticas.

Buscamos uma estratégia τ que maximize a probabilidade de interromper o processo $(X_j)_{j\geq 1}$ no instante anterior ao salto para δ.

Existem várias estratégias simples. A cada subconjunto A de $\{1, \dots, N\}$ podemos associar uma estratégia τ_A que consiste em interromper o processo no primeiro instante no qual $X_j \in A$.

Seja $1 \leq k \leq N$ e suponhamos que $X_j = k$. A probabilidade do processo pular para δ é k/N. Portanto, estando X_j em k, a probabilidade de selecionarmos o melhor objeto interrompendo o processo neste instante é k/N. Por outro lado, podemos preferir aguardar um novo máximo, esperando que apareça algum. Isto representa aguardar um novo salto do processo (X_j), e então interromper o processo. Nesta alternativa, selecionamos o melhor objeto se $X_{j+1} \in \{k+1, \dots, N\}$ e $X_{j+2} = \delta$, portanto com probabilidade

$$
\begin{aligned}
& P[X_{j+1} \in \{k+1, \dots, N\}, X_{j+2} = \delta \mid X_j = k] \\
&= \sum_{i=k+1}^{N} P[X_{j+1} = i, X_{j+2} = \delta \mid X_j = k] \\
&= \sum_{i=k+1}^{N} P[X_{j+2} = \delta \mid X_j = k, X_{j+1} = i] P[X_{j+1} = i \mid X_j = k] \\
&= \sum_{i=k+1}^{N} P[X_{j+2} = \delta \mid X_{j+1} = i] P[X_{j+1} = i \mid X_j = k] \\
&= \sum_{i=k+1}^{N} \frac{i}{N} \frac{k}{i(i-1)} \\
&= \frac{k}{N} \sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i} \\
&= \left(\sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i} \right) P[X_{j+1} = \delta \mid X_j = k].
\end{aligned}
$$

Portanto, se $\sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i} < 1$ é melhor interromper o processo quando X_j assume o valor

k. Por outro lado, se $\sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i} > 1$ é preferível aguardar um novo ponto máximo.

Vamos admitir $N \geq 3$ para evitar casos triviais. Considere a seqüência $T_k = \sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i}$. Esta seqüência decresce, $T_1 > 1$ e $T_N = 0$. Logo existe um inteiro k_N para o qual $T_{k_N+1} < 1 \leq T_{k_N}$. No apêndice mostramos que o inteiro k_N verifica a relação

$$(1.2) \qquad \frac{1}{k_N+1} + \cdots + \frac{1}{N-1} < 1 < \frac{1}{k_N} + \cdots + \frac{1}{N-1}$$

pois a equação $\frac{1}{N-1} + \cdots + \frac{1}{k} = 1$ só tem solução para $N = 2$.

Destarte, enquanto a seqüência (X_j) estiver no conjunto $\{1, 2, \ldots, k_N\}$ é preferível aguardar mais um salto da cadeia de Markov (X_j) a interromper o processo imediatamente. Por outro lado, quando o processo estiver no conjunto $\{k_N + 1, \ldots, N\}$ é melhor interrompê-lo imediatamente.

Logo a estratégia que consiste em esperar o processo chegar ao conjunto $\{k_N+1, \ldots, N\}$ e então interrompê-lo deve ser a estratégia ótima (provaremos esta afirmação logo mais). Esta estratégia corresponde a observar os k_N primeiros objetos sem interromper o processo e em seguida pará-lo tão logo apareça um objeto melhor que todos os anteriores.

Esta estratégia τ^* é ótima. De fato seja τ uma outra estratégia. Suponhamos que τ indique interromper o processo ao aparecer um ponto máximo de índice $k \leq k_N$. Seja τ_1 a estratégia idêntica a τ em todas as demais circunstâncias mas que ao invés de interromper o processo com o aparecimento de um ponto máximo de índice $k \leq k_N$ prescreva aguardar o próximo. Como $k \leq k_N$, pela argumentação anterior, a probabilidade de τ_1 selecionar o ponto máximo A_N é maior do que a probabilidade de τ o selecionar.

Portanto a estratégia ótima não indica interromper o processo antes do exame do $(k_N + 1)$-ésimo objeto.

Reciprocamente, seja τ uma estratégia que não interrompa o processo com o aparecimento de um ponto máximo de índice $k > k_N$. Então a estragégia τ_1, idêntica a

τ em todos os demais casos mas que neste evento (aparecimento de um ponto máximo no k-ésimo exame, $k > k_N$) interrompe o processo, é pela argumentação acima mais eficiente.

Logo a estratégia ótima consiste em examinar os k_N-primeiros objetos sem selecionar nenhum e em seguida escolher o primeiro melhor do que todos os anteriores.

Vejamos o comportamento assintótico de $\frac{k_N}{N}$. Por (1.2),

$$\int_{k_N+1}^{N} \frac{1}{x}\,dx < 1 < \int_{k_N-1}^{N-1} \frac{1}{x}\,dx.$$

Portanto,

$$\frac{N}{k_N+1} < e < \frac{N-1}{k_N-1}$$

e

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{N} < \frac{k_N}{N} < \frac{1}{e} + \frac{1}{N}.$$

Logo, a estratégia consiste em aguardar aproximadamente $\frac{N}{e}$ objetos e escolher então o primeiro melhor que todos os anteriores.

Finalmente, vamos calcular a probabilidade da estratégia ótima selecionar A_N. Inicialmente, com cálculos similares aos empregados na demonstração informal da Afirmação 2, se τ^* representa o tempo de parada ótimo, temos para $k_N < k \leq N$,

$$\begin{aligned}
P[X_{\tau^*} = k] &= P[\max_{k_N<j<k} w_j < \max_{1\leq j\leq k_N} w_j < w_k] \\
&= \frac{k_N}{k_N+1}\frac{k_N+1}{k_N+2}\cdots\frac{k-2}{k-1}\frac{1}{k} \\
&= \frac{k_N}{(k-1)k}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
P_N[\text{sucesso}] &= P[X_{\tau^*} \in \{1, \dots, N\}, X_{\tau^*+1} = \delta] \\
&= \sum_{k=k_N+1}^{N} P[X_{\tau^*} = k, X_{\tau^*+1} = \delta] \\
&= \sum_{k=k_N+1}^{N} P[X_{\tau^*+1} = \delta \mid X_{\tau^*} = k] P[X_{\tau^*} = k] \\
&= \sum_{k=k_N+1}^{N} \frac{k}{N} \frac{k_N}{(k-1)k} \\
&= \frac{k_N}{N} \sum_{k=k_N}^{N-1} \frac{1}{k} \approx \frac{1}{e}.
\end{aligned}
$$

§2. Apêndice

PROVA DA AFIRMAÇÃO 1:

Seja τ um tempo de parada para o qual existe um $w \in \Omega$ tal que $\tau(w) < N$ e $Y_{\tau(w)}(w) \neq 1$. Seja

$$\Omega_o = \{w; \tau(w) < N \text{ e } Y_{\tau(w)}(w) \neq 1\}.$$

Seja τ^* uma v.a. idêntica a estratégia τ no complementar de Ω_o e igual a N em Ω_o:

$$\tau^*(w) = 1_{\Omega_o^c}(w)\tau(w) + N\, 1_{\Omega_o}(w).$$

Inicialmente devemos provar que τ^* é uma estratégia, i.e., mostrar que $\{\tau^* = k\} \in \mathcal{F}_k$ para todo $1 \leq k \leq N$. Para $k < N$,

$$
\begin{aligned}
\{\tau^* = k\} &= \{\tau = k\} \cap \Omega_o^c \\
&= \{\tau = k\} \cap \{\tau < N\} \cap \{Y_\tau \neq 1\} \\
&= \{\tau = k\} \cap \{Y_k \neq 1\} \in \mathcal{F}_k.
\end{aligned}
$$

Para $k = N$,

$$\{\tau^* = N\} = \Omega_o \cup \{\tau = N\}$$

$$\bigcup_{j=1}^{N-1} (\{\tau = j\} \cap \{Y_j \neq 1\}) \cup \{\tau = N\} \in \mathcal{F}_N.$$

Vamos provar que a probabilidade de τ^* selecionar A_N é maior ou igual à de τ selecionar A_N. Ora,

$$P[w_{\tau(w)} = A_N] = \frac{1}{N!} \sum_{w\in\Omega} 1_{\{w_{\tau(w)}=A_N\}}.$$

Para $w \in \Omega_o$, $Y_{\tau(w)}(w) \neq 1$. Logo para $w \in \Omega_o$, $w_{\tau(w)} \neq A_N$. Assim, podemos restringir a última soma aos elementos de Ω_o^c. Porém, em Ω_o^c, τ e τ^* coincidem. Logo

$$\begin{aligned} P[w_{\tau(w)} = A_N] &= \frac{1}{N!} \sum_{w\in\Omega_o^c} 1_{\{w_{\tau(w)}=A_N\}} \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{w\in\Omega_o^c} 1_{\{w_{\tau^*(w)}=A_N\}} \\ &\leq \frac{1}{N!} \sum_{w\in\Omega} 1_{\{w_{\tau^*(w)}=A_N\}} \\ &= P[w_{\tau^*(w)} = A_N]. \end{aligned}$$

Finalmente, resta a confirmar que para $k < N$, a estratégia τ^* interrompe o processo no instante $k < N$ somente quando w_k é um máximo. Sejam $w \in \Omega$ e $k < N$ tais que $\tau^*(w) = k$. Como $\tau^*(w) = k < N$, $w \in \Omega_o^c$. Em Ω_o^c, τ^* coincide com τ. Logo $\tau(w) = \tau^*(w) = k < N$. Em Ω_o^c, se $\tau(w) < N$, $Y_{\tau(w)} = 1$. Portanto $Y_k(w) = Y_{\tau(w)}(w) = 1$. Logo w_k é um máximo. □

PROVA DA AFIRMAÇÃO 2:

Vimos que uma variável aleatória $\tau\colon \Omega \to \{1, \ldots, N\}$ para ser uma estratégia deve satisfazer a relação:

$$\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq N.$$

Na Afirmação 1 provamos que podemos nos ater a estratégias que interrompem o processo unicamente quando aparece um novo ponto máximo:

$$\{\tau = k\} \subseteq \{Y_k = 1\}. \tag{2.1}$$

$\mathcal{F}_k$ é a σ-álgebra gerada por $Y_1, \dots, Y_k$. A partir de $Y_1, \dots, Y_k$ podemos determinar $Z_1^k, \dots, Z_k^k$ onde, para $1 \leq j \leq k$, $1 \leq k \leq N$, Z_j^k representa o número de pontos a direita de w_j na etapa k:

$$Z_j^k(w) = \#\{i \leq k; w_i \geq w_j\}.$$

Em particular, w_k é ponto máximo se e somente se $Z_k^k(w) = 1$.

Reciprocamente as v.a. $Y_1, \dots, Y_k$ são funções de $Z_1^k, \dots, Z_k^k$. Logo a σ-álgebra $\mathcal{F}_k$ também é gerada por $Z_1^k, \dots, Z_k^k$. Como, por outro lado, $\mathcal{F}_k$ contém apenas um número finito de elementos, todo conjunto em $\mathcal{F}_k$ é uma reunião finita de átomos:

$$\{Z_1^k = \sigma(1), \dots, Z_k^k = \sigma(k)\},$$

onde σ pertence a S_k, o grupo das permutações de $1, \dots, k$. Como por (2.1), $\{\tau = k\} \subseteq \{Y_k = 1\} = \{Z_k^k = 1\}$,

$$\{\tau = k\} = \bigcup_{\sigma \in \Gamma_k} \{Z_i^k = \sigma(i),\ 1 \leq i \leq k\}$$

para algum $\Gamma_k \subseteq S_k^* = \{\sigma \in S_k;\ \sigma(k) = 1\}$.

Para $\sigma \in S_j$, $j > k$, notaremos por $\sigma|_k$ o elemento σ^* de S_k que representa a restrição de σ aos k primeiros elementos:

$$\sigma^*(i) = \#\{\ell \leq k; \sigma(\ell) \leq \sigma(i)\} \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq k.$$

Assim, se $\sigma = (1,5,2,4,3) \in S_5$ $\quad \sigma|_3 = (1,3,2) \in S_3$.

Como $\tau = \sum_{k=1}^{N} k\, 1_{\{\tau=k\}}$, existem subconjuntos Γ_k de S_k^* tais que

$$(2.2) \qquad \tau = \sum_{k=1}^{N} k \sum_{\sigma \in \Gamma_k} 1_{\{Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k\}}.$$

τ ser igual a k no conjunto $\{Z_i^k = \sigma_o(i), 1 \leq i \leq k\}$, significa que a estratégia τ interrompe o processo se a ordem relativa dos k primeiros objetos for $w_{\sigma_o^{-1}(k)} < w_{\sigma_o^{-1}(k-1)} < \cdots < w_{\sigma_o^{-1}(1)}$.

Desejamos caracterizar os conjuntos Γ_k presentes na definição do tempo de parada τ.

Seja $\sigma_o \in \Gamma_k$ para algum $1 \leq k < N$. Como o processo só pode ser interrompido uma única vez, se $\sigma \in S_\ell^*$ para $\ell > k$ e $\sigma|_k = \sigma_o$, σ não pode pertencer a Γ_ℓ. De fato $\sigma|_k = \sigma_o$ significa que a ordem das k primeiras coordenadas de σ é igual a σ_o. Como neste caso a estratégia τ interrompe o processo na etapa k, ela não pode interrompê-lo também no instante $\ell > k$. Destarte, se $\sigma_o \in \Gamma_k$ $\{\sigma \in \Gamma_\ell; \sigma|_k = \sigma_o\} = \phi$ para todo $\ell > k$ ou

$$(2.3) \qquad \Gamma_\ell \subseteq \{\sigma \in S_\ell^*;\ \text{para todo } 1 \leq k < \ell, \sigma|_k \notin \Gamma_k\}.$$

Esta condição é equivalente à propriedade: os conjuntos $\{w \in \Omega; Z_i^k(w) = \sigma(i), 1 \leq i \leq k\}$ para σ em Γ_k são dois a dois disjuntos.

De fato, se estes conjuntos são dois a dois disjuntos, considere $1 \leq k < N$ e $\sigma_o \in \Gamma_k$. Seja $\ell > k$ e $\sigma \in S_\ell^*$, $\sigma|_k = \sigma_o$. Seja $w \in \Omega$, cuja ordem relativa das ℓ primeiras coordenadas seja dada por σ: $w_{\sigma^{-1}(\ell)} < w_{\sigma^{-1}(\ell-1)} < \cdots < w_{\sigma^{-1}(1)}$. Como $\sigma|_k = \sigma_o$ a ordem das k primeiras coordenadas de w $(w_1, \ldots, w_k)$ é dada por $w_{\sigma_o^{-1}(k)} < \cdots < w_{\sigma_o^{-1}}(1)$. Logo $w \in \{Z_i^k(w) = \sigma_o(i), 1 \leq i \leq k\}$. Por outro lado, w também pertence ao conjunto $\{Z_i^\ell(w) = \sigma(i), 1 \leq i \leq \ell\}$. Portanto σ não pode pertencer a Γ_ℓ pois neste caso dois conjuntos que aparecem na expressão (2.2) não são disjuntos.

Reciprocamente, suponhamos a condição (2.3) verficada. Considere dois conjuntos distintos presentes na fórmula (2.2): $\{w; Z_i^k(w) = \sigma_1(w), 1 \leq i \leq k\}$ e $\{w; Z_i^\ell(w) = \sigma_2(w), 1 \leq i \leq \ell\}$. Se $k = \ell$, como $\sigma_1 \neq \sigma_2$, os conjuntos são disjuntos. Se $k \neq \ell$, suponha $k < \ell$. Neste caso, pela condição (2.3) $\sigma_2|_k \neq \sigma_1$. Logo os conjuntos são disjuntos.

Por outro lado τ deve prescrever um tempo de parada a toda seqüência $w \in \Omega$. Portanto

$$\bigcup_{k=1}^{N} \bigcup_{\sigma \in \Gamma_k} \{Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k\} = \Omega. \tag{2.4}$$

Em conclusão, se τ é um tempo de parada definido por (2.2) então a família de conjuntos Γ_k satisfaz às propriedades (2.3) e (2.4). Reciprocamente, se conjuntos Γ_ℓ $1 \leq \ell \leq N$ verificam as propriedades (2.3) e (2.4), τ definida por (2.2) é uma estratégia, pois qualquer elemento w de Ω pertence a um único conjunto $\{Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k\}$ e $\{\tau = k\}$ pertence a $\mathcal{F}_k$ para todo $1 \leq k \leq N$.

Podemos, a partir da expressão (2.2), calcular a probabilidade de sucesso da estratégia τ:

$$\begin{aligned} P[w_{\tau(w)} = A_N] &= \sum_{k=1}^{N} P[w_k = A_N, \bigcup_{\sigma \in \Gamma_k} \{Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k\}] \\ & \sum_{k=1}^{N} \sum_{\sigma \in \Gamma_k} P[w_k = A_N, Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k] \end{aligned} \tag{2.5}$$

O lema seguinte calcula a probabilidade presente na última expressão e mostra em particular que esta probabilidade não depende de permutação σ de S_k^* mas apenas do índice k.

LEMA 2.1. *Sejam $1 \leq k \leq N$ e $\sigma \in S_k^*$. Então*

$$P[w_k = A_N, Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k] = \frac{1}{(k-1)!N}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Esta desigualdade prova-se com um pequeno raciocínio de análise combinatória. No conjunto Ω, $\{w_k = A_N, Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k\}$ representa o subconjunto de todas as seqüências $(w_1, \ldots, w_N)$ com uma ordem relativa das k-primeiras coordenadas fixadas e para as quais w_k é o maior elemento.

As k primeiras coordenadas representam k pontos na reta $w_{\sigma^{-1}(k)} < w_{\sigma^{-1}(k-1)} < \cdots < w_{\sigma^{-1}(1)} = w_k$. Estes pontos formam $k+1$ intervalos abertos disjuntos de $\mathbf{R}$: $(-\infty, w_{\sigma^{-1}(k)}), (w_{\sigma^{-1}(k)}, w_{\sigma^{-1}(k-1)}), \ldots, (w_{\sigma^{-1}(1)}, \infty)$. Como $w_k = w_{\sigma^{-1}(1)}$ deve ser o maior ponto, desejamos calcular o número de maneiras distintas de distribuir $\ell = N - k$ objetos diferentes (os pontos $w_{k+1}, \ldots, w_N$) nos intervalos $(-\infty, w_{\sigma^{-1}(k)}), (w_{\sigma^{-1}(k)}, w_{\sigma^{-1}(k-1)}), \ldots, (w_{\sigma^{-1}(2)}, w_{\sigma^{-1}(1)})$.

Vamos inicialmente estabelecer de quantas formas distintas podemos distribuir ℓ objetos idênticos em k intervalos.

Considere $\ell + k - 1$ traços horizontais. Para cada seleção de $k-1$ traços obtemos uma distribuição diferente de ℓ objetos idênticos em k intervalos. Por exemplo, a seleção dos traços $2, 3, \ldots, k$ corresponde a distribuir um objeto no primeiro intervalo e os demais no último. Existem $\binom{\ell+k-1}{k-1}$ seleções diferentes de $k-1$ traços entre $\ell + k - 1$. Existem portanto $\binom{\ell+k-1}{k-1}$ formas distintas de distribuir ℓ objetos idênticos em k intervalos.

Como os objetos são todos distintos, para cada distribuição, existem $\ell!$ disposições diferentes. Logo, temos no total $\ell!\binom{\ell+k-1}{k-1}$ seqüências distintas com as propriedades impostas acima, a saber, com a ordem relativa de $w_1, \ldots, w_k$ fixada e onde $w_k \geq w_j$ para todo $1 \leq j \leq N$. Como no total em Ω, existem $N!$ seqüências distintas,

$$\begin{aligned} P[w_k = A_N, Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k] &= \frac{1}{N!}\,\ell!\binom{\ell + k - 1}{k - 1} \\ &= \frac{1}{N(k-1)!} \end{aligned}$$

$\square$

De (2.5), obtemos

$$P[w_{\tau(w)} = A_N] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |\Gamma_k| \frac{1}{(k-1)!}.$$

Assim reduzimos o problema de otimização estocástica a uma questão algébrica, encontrar conjuntos Γ_k, $1 \le k \le N$ com as propriedades (2.3) e (2.4) que maximizem a última expressão.

O objetivo da Afirmação 2 era provar que podemos restringir nosso estudo à estratégias cuja decisão de interromper o processo na etapa k repouse apenas no índice k e não na ordem relativa das coordenadas $w_1, \dots, w_k$. Na verdade resolveremos o problema de otimização proposto no início do capítulo e verificaremos que a estratégia ótima interrompe o processo na etapa k se este índice for suficientemente grande e prossegue se não o for. Portanto a decisão basea-se apenas no valor do índice do ponto máximo e não na ordem relativa. Podemos assim nos ater a este tipo de estratégia.

Considere um índice $k \in \{1, \dots, N\}$. Seja $w \in \Omega$ uma trajetória para a qual w_k seja um ponto máximo. A probabilidade de w_k ser A_N, pelo Lema 2.1 é

$$P[w_k = A_N, Z_i^k(w) = \sigma_o(i), 1 \le i \le k] = \frac{1}{N(k-1)!} \tag{2.6}$$

onde $\sigma_o \in S_k^*$ é a permutação que corresponde à ordem relativa de $w_1, \dots, w_k$, conhecida no instante k.

Se não interrompermos o processo neste instante e prefirirmos aguardar o aparecimento do próximo ponto máximo para então o interrompermos, a probabilidade de selecionarmos A_N é dada por:

$$\sum_{\ell=k+1}^{N} \sum_{\sigma\in\Delta_\ell} P[Z_i^\ell = \sigma(i), 1 \le i \le \ell, w_\ell = A_N]$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_\ell &= \{\sigma \in S_\ell^*; \sigma|_k = \sigma_o, \sigma(k) = 2\} \quad k+1 \le \ell < N \\ \Delta_N &= \{\sigma \in S_N^*; \sigma|_k = \sigma_o, \sigma(k) \le 2\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Δ_ℓ representa o conjunto de todas as trajetórias possíveis com a ordem relativa de $w_1, w_2, \ldots, w_k$ fixada e interrompidas logo após o aparecimento de um novo ponto máximo ($\sigma(k) = 2$ indica que entre $k+1$ e $\ell - 1$ não apareceram pontos máximos). Todavia, se nenhum ponto máximo for observado após a etapa k, interrompe-se o processo no instante N.

Aplicando o Lema 2.1, podemos calcular a probabilidade acima:

$$\sum_{\ell=k+1}^{N} \sum_{\sigma \in \Delta_\ell} P[Z_i^\ell = \sigma(i), 1 \leq i \leq \ell, w_\ell = A_N] = \sum_{\ell=k+1}^{N} |\Delta_\ell| \frac{1}{(\ell-1)!N}$$

Δ_ℓ representa o número de seqüências $w_1, \ldots, w_\ell$ para as quais a ordem relativa de $w_1, \ldots, w_{k-1}$ está fixada; $w_k \geq w_j$ para todo $j < \ell$ e $w_\ell > w_k$. Resta portanto a distribuir $\ell - k - 1$ elementos distintos nos intervalos $(-\infty, w_{\sigma_o^{-1}(k)}), \ldots,$ $(w_{\sigma_o^{-1}(2)}, w_{\sigma_o^{-1}(1)})$. No Lema 2.1, calculamos o número de distribuições distintas, obtendo:

$$|\Delta_\ell| = (\ell - k - 1)! \binom{\ell - 2}{k - 1} = \frac{(\ell-2)!}{(k-1)!}.$$

Portanto

$$\sum_{\ell=k+1}^{N} \sum_{\sigma \in \Delta_\ell} P[Z_i^\ell = \sigma(i), 1 \leq i \leq k, w_\ell = A_N]$$

(2.8)

$$= \sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{N(k-1)!} \frac{1}{(\ell-1)}.$$

Este valor é maior do que (2.6) se $\sum\limits_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} > 1$ e menor se $\sum\limits_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} < 1$.

A seqüência $T_k = \sum\limits_{j=k}^{N-1} \frac{1}{j}$ é decrescente em k. Como $T_1 > 1$ e $T_N = 0 < 1$, existe $1 \leq k_N \leq N$ com $T_{k_N} \geq 1$ e $T_{k_N+1} < 1$. O índice k_N satisfaz a relação

$$\frac{1}{k_N+1} + \cdots + \frac{1}{N-1} < 1 \leq \frac{1}{k_N} + \cdots + \frac{1}{N-1}.$$

Assim, a análise que fizemos a partir de (2.6) demonstra que não devemos interromper o processo com o aparecimento de um ponto máximo na etapa k se $k \leq k_N$. De fato, neste caso, se aguardarmos o aparecimento de outro ponto máximo e então interrompermos o processo, teremos uma nova estratégia mais eficiente do que a anterior pois a expressão (2.8) é maior do que aquela em (2.6).

Por outro lado, se aparecer um ponto máximo na etapa $k > k_N$ devemos interromper imediatamente o processo pois se aguardarmos o aparecimento de um novo ponto máximo, obteremos uma estratégia menos eficaz.

Destarte, a estratégia ótima deve aguardar o aparecimento dos k_N-primeiros objetos e selecionar então o primeiro melhor do que todos os anteriores. Provamos a seguir esta afirmação.

Inicialmente vamos definir esta estratégia: Seja

$$\tau^* = \sum_{j=k_N+1}^{N} j \sum_{\sigma \in \Lambda_j} 1_{\{Z_i^j = \sigma(i), 1 \leq i \leq N\}}, \tag{2.9}$$

onde

$$\Lambda_j = \{\sigma \in S_j^*, \sigma^{-1}(2) \in \{1, \ldots, k_N\}\} \quad k_N + 1 \leq j \leq N-1$$

e

$$\Lambda_N = \left(\bigcup_{j=k_N+1}^{N-1} \bigcup_{\sigma \in \Lambda_j} \{Z_i^j = \sigma(i), 1 \leq i \leq N\} \right)^c.$$

Os conjuntos Λ_j verificam as hipóteses (2.3) e (2.4). Portanto τ^* é uma estratégia. Para σ em Λ_j, $k_N < j < N$, no conjunto $\{Z_i^j = \sigma(i), 1 \leq i \leq j\}$, a condição $\sigma^{-1}(2) \in \{1, \ldots, k_N\}$ significa que w_j é o primeiro ponto de máximo a aparecer após a etapa k_N. O conjunto Λ_N é o conjunto das seqüências para as quais nenhum ponto máximo apareceu entre $k_N + 1$ e $N - 1$:

$$\Lambda_N = \{w; \max_{k_N < j < N} w_j < \max_{1 \leq j \leq k_N} w_j\}.$$

Seja τ uma estratégia. Vamos provar que τ^* é pelo menos tão eficaz quanto τ.

Ora, vimos em (2.5) que

$$P[w_{\tau(w)} = A_N] = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\sigma \in \Gamma_k} P[w_k = A_N, Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k].$$

Seja j o primeiro inteiro k para o qual $\Gamma_k \neq \phi$. Se $j \leq k_N$, seja $\sigma_1 \in \Gamma_j$ e considere a estratégia τ_1 definida como sendo igual a τ para toda seqüência w menos no conjunto $\{w; Z_i^j(w) = \sigma_1(i), 1 \leq i \leq j\}$. Neste caso, ao invés de interromper o processo, como prescreve τ, aguardamos um novo ponto máximo para então interrompê-lo. Como $j \leq k_N$ a estratégia τ_1 é mais eficiente do que a estratégia τ.

Formalmente, seja

$$\tau = \sum_{k=1}^{N} k \sum_{\sigma \in \Gamma_k^*} 1_{\{Z_i^k(w)=\sigma(i), 1 \leq i \leq k\}}$$

$$+ \sum_{\ell=j+1}^{N} \ell \sum_{\sigma \in \Delta_\ell} 1_{\{Z_i^\ell(w)=\sigma(i), 1 \leq i \leq \ell\}}$$

onde $\Gamma_k^* = \Gamma_k$ para $k \neq j$ e $\Gamma_j^* = \Gamma_j - \{\sigma_1\}$ e onde Δ_ℓ é definido como em (2.7) com σ_1 no lugar de σ_o e j no lugar de k.

Desta forma,

$$P[w_{\tau_1(w)} = A_N] = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\sigma \in \Gamma_k^*} P[w_k = A_N, Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k]$$

$$+ \sum_{k=j+1}^{N} \sum_{\sigma \in \Delta_k} P[w_k = A_N, Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k]$$

$$> \sum_{k=1}^{N} \sum_{\sigma \in \Gamma_k} P[w_k = A_N, Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k]$$

$$= P[w_{\tau(w)} = A_N]$$

pois $j \leq k_N$.

Com reduções sucessivas provamos que existe uma estratégia τ_2 mais eficiente do que τ para a qual os conjuntos Γ_k são todos vazios se $k \leq k_N$. Podemos, portanto nos deter unicamente em estratégias

$$\tau = \sum_{k=k_N+1}^{N} k \sum_{\sigma \in \Gamma_k} 1_{\{Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k\}}$$

Vamos provar que se Γ_k, $k < N$, contém uma permutação σ de S_k^* com $\sigma^{-1}(2) \notin \{1, \ldots, k_N\}$ então podemos construir uma estratégia τ_1 mais eficiente do que τ para a qual para todo $k_N < k < N$, $\sigma^{-1}(2) \in \{1, \ldots, k_N\}$.

Portanto se a estratégia τ não interrompe o processo com o aparecimento de um ponto máximo numa etapa posterior ao instante k_N, podemos exibir uma estratégia mais eficiente do que τ. Assim a estratégia ótima deve prescrever a interrupção do processo tão logo apareça um ponto máximo após k_N.

De fato, seja Γ_k um conjunto que possua um elemento σ_1, $\sigma_1^{-1}(2) \notin \{1, \ldots, k_N\}$. Seja j_o; $\sigma_1^{-1}(2) = j_o$. Em particular, $k_N < j_o < k$. Como $\sigma_1 \in \Gamma_k$; $\sigma_1|_{j_o} = \sigma_o \notin \Gamma_{j_o}$.

Seja τ_1 a estratégia idêntica a τ mas que interrompe o processo no conjunto $\{w; Z_i^{j_o} = \sigma_o(i), 1 \leq i \leq j_o\}$. A estratégia τ_1 é mais eficiente do que τ. De fato,

$$\begin{aligned}\tau_1 = &\sum_{k=k_N+1}^{j_o} k \sum_{\sigma \in \Gamma_k} 1_{\{Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k\}} \\ &+ \sum_{k=j_o+1}^{N} k \sum_{\substack{\sigma \in \Gamma_k \\ \sigma|_{j_o} \neq \sigma_o}} 1_{\{Z_i^k = \sigma(i), 1 \leq i \leq k\}} \\ &+ j_o \, 1_{\{Z_i^{j_o} = \sigma_o(i), 1 \leq i \leq j_o\}}.\end{aligned}$$

Não é difícil verificar que τ_1 é uma estratégia conferindo as condições (2.3) e (2.4).

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
P[w_{\tau_1(w)} = A_N] &= \sum_{k=k_N+1}^{j_o} \sum_{\sigma\in\Gamma_k} P[Z_i^k = \sigma(i), 1 \le i \le k, w_k = A_N] \\
&\quad + \sum_{k=j_o+1}^{N} \sum_{\substack{\sigma\in\Gamma_k \\ \sigma|_{j_o}\neq\sigma_o}} P[Z_i^k = \sigma(i), 1 \le i \le k, w_k = A_N] \\
&\quad + P[Z_i^{j_o} = \sigma(i), 1 \le i \le j_o, w_{j_o} = A_N] \\
&\quad > \sum_{k=k_N+1}^{N} \sum_{\sigma\in\Gamma_k} P[Z_i^k = \sigma(i), 1 \le i \le k, w_k = A_N] \\
&= P[w_{\tau(w)} = A_N]
\end{aligned}
$$

pois $j_o > k_N$.

Assim, concluimos deste raciocínio que a estratégia ótima não pode interromper o processo antes da etapa k_N e após k_N deve fazê-lo tão logo apareça um ponto máximo. Portanto a estratégia ótima é dada por (2.9).

Para encerrar este capítulo, desejamos provar que a equação $\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{N} = 1$ só tem solução para $N = 2$, $k = 1$. Verifica-se sem dificuldade que ela não possui solução para $N = 3, 4$. Fixamos $N \ge 5$. Seja k_N:

$$\frac{1}{k_N+1} + \cdots + \frac{1}{N-1} < 1 \le \frac{1}{k_N} + \cdots + \frac{1}{N-1}.$$

Seja j o maior inteiro; $2^j \le N-1$. $2^j \in \{k_N, \ldots, N-1\}$. De fato, se $2^j < k_N$,

$$
\begin{aligned}
1 &\le \frac{1}{k_N} + \cdots + \frac{1}{N-1} \\
&< \frac{1}{2^j} + \cdots + \frac{1}{2^{j+1}} \\
&\le \int_{2^j-1}^{2^{j+1}} \frac{1}{x}\,dx = \log 2^{j+1} - \log(2^j - 1) \le 1
\end{aligned}
$$

pois $j \ge 2$.

Por outro lado, 2^j é o único múltiplo de 2^j no conjunto $\{k_N, \ldots, N-1\}$ pois $2^{j+1} > N - 1$. Ora,

$$\frac{1}{k_N} + \cdots + \frac{1}{N-1} = \frac{\sum_{i=k_N}^{N-1} \prod_{\ell \neq i} \ell}{k_N(k_N+1)\cdots(N-1)}.$$

Seja α o maior inteiro tal que $\prod_{\ell \neq 2^j} \ell$ seja múltiplo de 2^α. Como nos demais termos da soma aparece o inteiro 2^j, todos eles são múltiplos de $2^{\alpha+1}$. Portanto, se dividirmos o numerador e o denominador por 2^α, o numerador é ímpar e o denominador par. Portanto $\frac{1}{k_N} + \cdots + \frac{1}{N-1} \neq 1$.

CAPÍTULO IV

CADEIAS DE MARKOV

§1. Elementos da Teoria das Cadeias de Markov

No capítulo anterior, resolvemos o problema de parada ótima para uma cadeia de Markov particular. Estudaremos neste capítulo o problema para uma cadeia de Markov geral definida num espaço E finito.

Encontramos no capítulo anterior de forma natural a propriedade básica de uma cadeia de Markov. Um processo estocástico $(X_n)_{n\geq 1}$ definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ é dito markoviano se a probabilidade do processo encontrar-se no instante $(n+1)$ em um estado qualquer de E só depende da posição que ele ocupava no instante n e não de sua evolução anterior a n. Trata-se, portanto, de um sistema sem memória. A cada instante o processo escolhe um novo estado por um mecanismo aleatório que depende apenas do estado atual do sistema e não do passado.

Vejamos o seguinte

EXEMPLO 1.1: Um jogador com uma fortuna inicial igual a 10 unidades, acerta com um amigo com igual fortuna inicial uma aposta. Uma moeda honesta será lançada sucessi[illegible]ente. Se der cara o jogador, que doravante chamaremos de A receberá de seu o[illegible] unidade. Caso contrário, o adversário chamado em diante de B receberá uma unidade. O jogo deve prosseguir até a ruína de um dos dois apostadores.

Seja X_n a fortuna de A no instante n. Assim, X_n varia entre 0 e 20. Se para algum inteiro n_0, $X_{n_0}(w)$ for igual a 0 ou 20, $X_n(w) = X_{n_0}(w)$ para todo n maior ou igual a n_o pois o jogo estará encerrado com a ruína de A se $X_{n_o}(w) = 0$ ou a de B se $X_{n_o}(w) = 20$.

Por outro lado, se $1 \leq X_n \leq 19$, como assumimos que a moeda é honesta, com probabilidade $1/2$ $X_{n+1} = X_n + 1$ e com probabilidade $1/2$ $X_{n+1} = X_n - 1$. Logo o valor de X_{n+1} só depende do passado $(X_o, X_1, \ldots, X_n)$ como função de X_n. Portanto $(X_n)_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov, segundo a definição informal dada acima. Temos:

$$P[X_{n+1} = k \mid X_n = j] = \begin{cases} 1 & \text{se } \; j = 0 \text{ e } k = 0 \\ 1 & \text{se } \; j = 20 \text{ e } k = 20 \\ 1/2 & \text{se } \; 1 \leq j \leq 19 \text{ e } |k - j| = 1 \\ 0 & \text{casos contrários} \end{cases}$$

Esta probabilidade condicional não depende de n, podemos portanto definir $P\colon \{0, \ldots, 20\} \times \{0, \ldots, 20\} \to [0,1]$ por

$$P(j,k) = P[X_{n+1} = k \mid X_n = j].$$

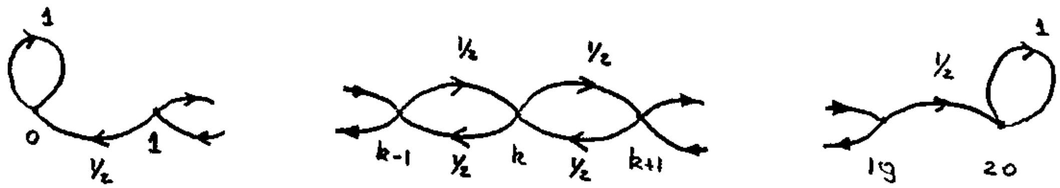
Esta função é chamada a probabilidade de transição da cadeia de Markov homogênea $(X_n)_{n\geq 0}$. A cadeia é dita homogênea pois a probabilidade do sistema saltar de um estado j a um estado k no instante n não depende de n, i. e., a probabilidade de transição não depende de n. Só consideraremos neste opúsculo cadeias homogêneas. Assim, sem perigo de confusão, omitiremos adiante a palavra *homogênea.*

A probabilidade de transição possui algumas propriedades:

(1.1) $P(j,k) \geq 0$ para todo $k, j \in E$.

(1.2) Para todo $j \in E$, $\sum\limits_{k \in E} P(j,k) = 1$.

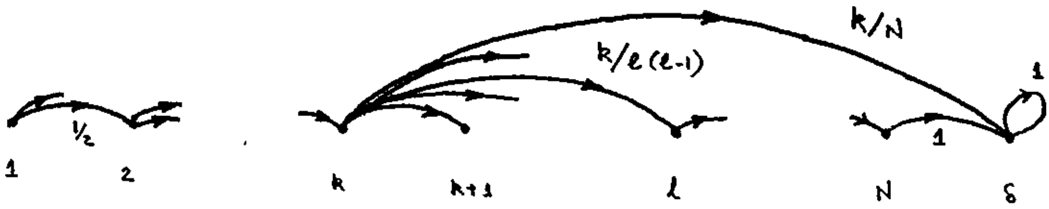
Podemos representar esta cadeia de Markov e a probabilidade de tansição graficamente, traçando uma seta de j a k para todo par $(j,k) \in E \times E$ para o qual $P(j,k) > 0$ e indicando o valor de $P(j,k)$. Este gráfico permite visualizar de maneira simples a mecanismo de evolução do processo. No nosso exemplo, temos:



No capítulo anterior, deparamo-nos com uma cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{1, 2, \ldots, N, \delta\}$. Calculamos a probabilidade de transição da cadeia:

$$
(1.3) \qquad P(j,k) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad j = \delta, N \text{ e } k = \delta \\ \dfrac{j}{k(k-1)} & \text{se} \quad 1 \leq j \leq N-1 \text{ e } j+1 \leq k \leq N \\ j/N & \text{se} \quad 1 \leq j \leq N-1 \text{ e } k = \delta \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}
$$

As propriedades (1.1) e (1.2) se verificam sem dificuldade para esta probabilidade de transição. A representação gráfica da cadeia neste exemplo é



As flechas partem sempre de um elemento em direção a um elemento maior, se identificarmos δ a $+\infty$.

Com estes exemplos assimilados, podemos definir e analisar as propriedades de uma cadeia de Markov definida num espaço finito E. σ representará o número de elementos de E e $x_1, \dots, x_\sigma$ os elementos de E.

DEFINIÇÃO 1.1: Um processo estocástico $(X_n)_{n\geq 0}$ em E é uma cadeia de Markov se existe uma função $P: E \times E \to [0,1]$ satisfazendo as propriedades (1.1) e (1.2) e para a qual,

$$
\begin{aligned}
&P[X_{n+1} = x_{i_{n+1}} \mid X_o = x_{i_o}, \dots, X_n = x_{i_n}] \\
&= P[X_{n+1} = x_{i_{n+1}} \mid X_n = x_{i_n}] = P(x_{i_n}, x_{i_{n+1}})
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

para todo $(x_{i_o}, \dots, x_{i_{n+1}}) \in E^{n+2}$.

Os elementos de E são chamados os estados do sistema, E o espaço de estados e P a probabilidade de transição da cadeia de Markov.

O processo está totalmente determinado pela probabilidade de transição e pelo estado inicial do sistema. Seja P uma probabilidade para a qual

$$P[X_o = x_i] = p_i \qquad 1 \leq i \leq \sigma.$$

Então, usando a relação (1.4) e a definição de probabilidade condicional (I.2.1), temos

$$
\begin{aligned}
P[X_o = &x_{i_o}, \dots, X_n = x_{i_n}] \\
&= P[X_n = x_{i_n} \mid X_o = x_{i_o}, \dots, X_{n-1} = x_{i_{n-1}}] P[X_o = x_{i_o}, \dots, X_{n-1} = x_{i_{n-1}}] \\
&= P(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) P[X_o = x_{i_o}, \dots, X_{n-1} = x_{i_{n-1}}].
\end{aligned}
$$

Repetindo o argumento, obtemos,

$$
\begin{aligned}
P[X_o = x_{i_o}, \dots, X_n = x_{i_n}] \\
= P(x_{i_1}, x_{i_2}) \dots P(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) P[X_1 = x_{i_1}, X_o = x_{i_o}]
\end{aligned}
$$

Ora, como

$$P[X_1 = x_{i_1}, X_o = x_{i_o}] = P[X_1 = x_{i_1} \mid X_o = x_{i_o}]P[X_o = x_{i_o}]$$
$$= P(x_{i_0}, x_{i_1})p_{i_0},$$

obtemos,

$$P[X_o = x_{i_o}, \ldots, X_n = x_{i_n}] = p_{i_o} \prod_{k=0}^{n-1} P(x_{i_k}, x_{i_{k+1}}). \tag{1.5}$$

Para x em E, P_x representará a probabilidade em $(\Omega, \mathcal{A})$ para a qual

$$P_x[X_o = y] = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad y = x \\ \\ 0 & \text{se} \quad y \neq x \end{cases} \tag{1.6}$$

Se desejamos calcular a probabilidade do processo inicialmente em $x \in E$ encontrar-se no instante 1 em y ou de encontrar-se no instante 2 em z, podemos usando as relações (1.5) e (1.6) mostrar

$$\begin{aligned} P_x[X_1 = y] &= P_x[X_1 = y, X_o = x] \\ &= P_x[X_1 = y \mid X_o = x]P_x[X_o = x] \\ &= P(x, y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_x[X_2 = z] &= P_x[\bigcup_{i=1}^{\sigma}\{X_1 = x_i, X_2 = z\}] \\ & \sum_{i=1}^{\sigma} P_x[X_1 = x_i, X_2 = z] \\ &= \sum_{i=1}^{\sigma} P(x, x_i)P(x_i, z). \end{aligned}$$

Identificamos a última soma com um produto de matrizes. Seja Π a matriz com σ-linhas e σ-colunas cujo elemento da i-ésima linha e da j-ésima coluna $\Pi(i,j)$ é igual a $P(x_i, x_j)$. Π_k representará o produto de Π com Π k vezes. Com esta notação vimos acima que

$$P_{x_i}[X_1 = x_j] = \Pi(i,j)$$
$$P_{x_i}[X_2 = x_j] = \Pi_2(i,j).$$

Por indução podemos provar a

PROPOSIÇÃO 1.1. *Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com probabilidade de transição P definida em (1.4). Então, com a notação estabelecida acima, para todo inteiro positivo n,*

$$P_{x_i}[X_n = x_j] = \Pi_n(i,j).$$

DEMONSTRAÇÃO: A igualdade foi provada para $n = 2$. Suponhamos que tenha sido demonstrada para n. Repetindo os argumentos desenvolvidos para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned}
P_{x_i}[X_{n+1} = x_j] &= \sum_{k=1}^{\sigma} P_{x_i}[X_n = x_k, X_{n+1} = x_j] \\
&= \sum_{k=1}^{\sigma} P_{x_i}[X_{n+1} = x_j \mid X_n = x_k] P_{x_i}[X_n = x_k] \\
&= \sum_{k=1}^{\sigma} \Pi_n(i,k)\Pi(k,j) \\
&= \Pi_{n+1}(i,j).
\end{aligned}$$

□

Desejamos calcular $E_{x_i}[f(X_n)]$ para uma função $f\colon E \to \mathbf{R}$ e expressar a esperança a partir da matriz de transição Π. Para $n = 0$, como $P_{x_i}[X_o = x_i] = 1$, $E_{x_i}[f(X_o)] =$

$f(x_i)$. Para $n = 1$, temos:

$$E_{x_i}[f(X_1)] = \sum_{k=1}^{\sigma} f(x_k) P_{x_i}[X_i = x_k]$$

$$= \sum_{k=1}^{\sigma} \Pi(i,k) f(x_k).$$

Assim se consideramos a função $f: E \to \mathbf{R}$ como uma matriz coluna com σ linhas, cuja i-ésima linha é igual a $f(x_i)$,

$$E_{x_i}[f(X_1)] = (\Pi \cdot f)(i)$$

onde $\Pi \cdot f$ representa o produto da matriz Π com a matriz f e para uma matriz coluna M, $M(j)$ representa o valor da j-ésima linha.

Em geral temos a

PROPOSIÇÃO 1.2. *Seja $f: E \to \mathbf{R}$ uma função. Para todo inteiro positivo n,*

$$E_{x_i}[f(X_n)] = (\Pi_n \cdot f)(i).$$

DEMONSTRAÇÃO: Pela definição da esperança, temos

$$E_{x_i}[f(X_n)] = \sum_{k=1}^{\sigma} f(x_k) P_{x_i}[X_n = x_k].$$

Aplicando o resultado da Proposição 1.1, temos

$$E_{x_i}[f(X_n)] = \sum_{k=1}^{\sigma} f(x_k) \Pi_n(i,k)$$

$$= (\Pi_n \cdot f)(i).$$

□

Com uma prova análoga à da Proposição 1.1, temos a

Proposição 1.3. *Seja $f: E \to \mathbf{R}$ uma função mensurável. Para todos k, $i \in \mathbf{N}^*$ e $1 \leq j \leq \sigma$,*

$$E_{x_j}[f(X_{k+i}) \mid X_0 = x_{\ell_0}, \ldots, X_i = x_{\ell_i}] = (\Pi_k \cdot f)(\ell_i).$$

Demonstração: Com uma prova análoga à da Proposição 1.1, mostramos inicialmente que

$$\begin{aligned} & P_{x_j}[X_{i+k} = x_\ell \mid X_o = x_{\ell_o}, \ldots, X_i = x_{\ell_i}] \\ & = P_{x_j}[X_{i+k} = x_\ell \mid X_i = x_{\ell_i}] \\ & = \Pi_k(\ell_i, \ell). \end{aligned}$$

Portanto, por (I.4.1),

$$\begin{aligned} & E_{x_j}[f(X_{i+k}) \mid X_o = x_{\ell_o}, \ldots, X_i = x_{\ell_i}] \\ & = \sum_{\ell=1}^{\sigma} f(x_\ell) P_{x_j}[X_{i+k} = x_\ell \mid X_o = x_{\ell_o}, \ldots, X_i = x_{\ell_i}] \\ & = \sum_{\ell=1}^{\sigma} f(x_\ell)\, \Pi_k(\ell_i, \ell) \\ & = (\Pi_k \cdot f)(\ell_i), \end{aligned}$$

□

Logo, pela Proposição 1.2, para todos k, $i \in \mathbf{N}^*$ e $1 \leq j \leq \sigma$,

$$E_{x_j}[f(X_{k+i}) \mid X_o = x_{\ell_o}, \ldots, X_i = x_{\ell_i}] = E_{x_{\ell_i}}[f(X_k)].$$

Por (I.4.2), esta igualdade significa

$$E_{x_j}[f(X_{k+i}) \mid X_o, \ldots, X_i] = E_{X_i}[f(X_k)].$$

Observe que o membro da direita desta última expressão é uma função de X_i; em particular, é uma v. a. $\mathcal{F}_i$-mensurável.

Desta forma demonstramos o

COROLÁRIO. *Seja $f\colon E \to \mathbf{R}$ uma função mensurável. Para todos k, $i \in \mathbf{N}^*$ e $1 \leq j \leq \sigma$,*

$$E_{x_j}[f(X_{k+i}) \mid X_o, \ldots, X_i] = E_{X_i}[f(X_k)].$$

Este último resultado pode ser interpretado da seguinte forma. Conhecida a evolução do processo até o instante i, o estado do sistema no instante $k+i$, só depende da posição da cadeia no instante i, a saber, de X_i. Esta dependência exprime-se de maneira simples. Ela corresponde a iniciar o processo no estado X_i e observar sua posição no instante k.

Finalmente, enunciamos um resultado importante no desenvolvimento das próximas seções. Seja $\theta\colon \Omega \to \Omega$ a translação temporal em Ω:

$$\theta(w_0, w_1, \ldots) = (w_1, w_2, \ldots).$$

Seja $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ uma função mensurável. A nova função obtida compondo-se f com θ ($f \circ \theta$) depende da trajetória do processo somente a partir do instante 1 pois para toda trajetória $w = (w_0, w_1, \ldots) \in \Omega$ $f \circ \theta(w) = f(w_1, w_2, \ldots)$. Como a evolução do processo depende do passado como função do presente, o valor da função $f \circ \theta$ conhecida a trajetória até o instante 1 deve depender somente de X_1. Pelo resultado da Proposição 1.3 podemos inferir esta dependência. O valor médio de $f \circ \theta$ deve ser igual ao valor médio de f para o processo inicialmente na posição X_1. De fato, temos a

PROPOSIÇÃO 1.4. *Seja $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ uma função mensurável e integrável.*

$$E_x[f \circ \theta \mid X_0, X_1] = E_{X_1}[f]$$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [R] (Proposição I.2.13).

Podemos agora enunciar o problema estudado neste capítulo. Um jogo possui um número finito de estados possíveis $x_1, \ldots, x_\sigma$. E representará o conjunto dos estados do sistema. Em E está definida uma função prêmio $f\colon E \to \mathbf{R}$. O jogador se retirando da partida quando o sistema estiver no estado x_i recebe o valor $f(x_i)$.

Adotaremos a convenção de considerar que o jogador perde $|f(x_i)|$ se a função f for negativa em x_i.

O problema consiste em estabelecer qual a estratégia que maximiza o ganho médio do jogador e qual o valor médio deste prêmio. Admitiremos que o sistema estando em um estado x_i em certo instante n encontrar-se-á no estado x_j no instante $(n+1)$ com uma probabilidade que só depende de x_i e não do passado do processo até o instante n nem de n. Formalmente, admitiremos que a partida seja uma cadeia de Markov.

Para maximizar o valor de seu prêmio, o jogador deverá selecionar uma estratégia que indique quando retirar-se da partida. Esta decisão de permanecer jogando ou interromper a partida, só poderá depender da história passada do processo e da posição atual do sistema, pois admitimos que o jogador não possui nenhuma previsão sobre o futuro.

Propomos o seguinte modelo matemático para este problema.

Consideramos $(X_k)_{k\geq 0}$ uma cadeia de Markov em E. X_k representará a posição da partida no instante k. Em nosso modelo, uma estratégia será um tempo de parada: uma função $\tau\colon \Omega \to \mathbf{N}$ tal que $\{\tau = k\}$ seja um conjunto de $\mathcal{F}_k = \sigma(X_o, X_1, \ldots, X_k)$, a σ-álgebra gerada por $X_o, X_1, \ldots, X_k$. Ω representa neste capítulo, como no capítulo II, o espaço de todas as seqüências de elementos de E.

Adotando a estratégia τ, a esperança do prêmio do jogador, inicialmente em x_i será

$$E_{x_i}[f(X_\tau)].$$

Desejamos, portanto

(1.7) Calcular $V(x) = \sup_{\tau\in T} E_x[f(X_\tau)]$

(1.8) Encontrar $\nu(x) \in T$, $V(x) = E_x[f(X_{\nu(x)})]$ para todo elemento x de E,

onde T representa o conjunto de todos os tempos de parada quase certamente finitos ($P_x[\tau < \infty] = 1$ para todo $(\tau, x) \in T \times E$). A função $V\colon E \to \mathbf{R}$ será chamada de valor do prêmio e o tempo ν de estratégia ótima.

Não consideraremos tempos de parada que possam ser infinitos num conjunto de medida positiva. Assumimos que o jogador deverá interromper a partida em algum momento:

$$P_x[\tau < \infty] = 1 \quad \text{para todo} \quad (\tau, x) \in T \times E.$$

Podemos calcular o valor de V e encontrar ν para pelo menos um elemento de E. Seja z_o o elemento de E onde f atinge seu valor máximo. Então $V(z_o) = f(z_o)$ e $\nu(w) = 0$ para todo w é uma estratégia ótima. De fato, por um lado, como $\tau_0 \colon \Omega \to \mathbb{N}$, $\tau_0(w) = 0$ para todo $w \in \Omega$ é um tempo de parada,

$$V(z_o) = \sup_{\tau \in T} E_{z_o}[f(X_\tau)] \geq E_{z_o}[f(X_o)] = f(z_o).$$

Por outro lado, para todo $\tau \in T$,

$$\begin{aligned} E_{z_o}[f(X_\tau)] &= \sum_{i=1}^{\sigma} f(x_i) P[X_\tau = x_i] \\ &\leq \sum_{i=1}^{\sigma} P[X_\tau = x_i] f(z_o) \\ &= f(z_o). \end{aligned}$$

Portanto $f(z_o) = V(z_o)$ e ν constante igual a 0 é uma estratégia ótima.

§2. Funções superharmônicas

Iniciaremos o estudo do problema proposto na seção anterior, investigando o tipo de função f para a qual o jogador deve retirar-se imediatamente da partida. Portanto, funções para as quais,

$$\sup_{\tau \in T} E_x[f(X_\tau)] \leq f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Em particular, considerando o tempo de parada constante igual a 1, obtemos:

$$E_x[f(X_1)] \leq f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Em notação matricial,

$$\Pi f \leq f.$$

Esta condição é também suficiente:

PROPOSIÇÃO 2.1. *Seja $f: E \to \mathbf{R}$ uma função tal que $\Pi f \leq f$. Então para todo tempo de parada τ finito quase certamente, $E_x[f(X_\tau)] \leq f(x)$ para todo $x \in E$.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos inicialmente que f seja uma função positiva: $f(x) \geq 0$ para todo elemento x de E. Sejam $0 < \alpha < 1$ e $\varphi = f - \alpha \Pi f$. Como por hipótese, $f \geq \Pi f \geq \alpha \Pi f$ (pois se $f \geq 0$, $\Pi f \geq 0$), φ é também uma função positiva. Ora, para todo inteiro positivo k,

$$f = \varphi + \alpha \Pi \varphi + \cdots + \alpha^k \Pi_k \varphi + \alpha^{k+1} \Pi_{k+1} f.$$

Como $0 < \alpha < 1$ e f é limitado,

$$\lim_{k \to \infty} \alpha^{k+1} (\Pi_{k+1} f)(i) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq \sigma.$$

Portanto,

$$f(x_j) = \sum_{k \geq 0} \alpha^k (\Pi_k \varphi)(j) \quad \text{para todo} \quad x_j \in E.$$

Pela Proposição 1.2, $(\Pi_k \varphi)(j) = E_{x_j}[\varphi(X_k)]$. Logo

$$\begin{aligned} f(x_j) &= \sum_{k \geq 0} \alpha^k E_{x_j}[\varphi(X_k)] \\ &= E_{x_j}[\sum_{k \geq 0} \alpha^k \varphi(X_k)] \end{aligned} \tag{2.1}$$

Vamos provar a seguinte identidade para todo tempo de parada τ quase certamente finito:

$$E_{x_j}[\alpha^\tau f(X_\tau)] = E_{x_j}[\sum_{k\geq\tau} \alpha^k \varphi(X_k)] \tag{2.2}$$

O membro da direita é igual a

$$\sum_{i\geq 0} E_{x_j}\left[1_{\{\tau=i\}} \sum_{k\geq i} \alpha^k \varphi(X_k)\right]$$

$$= \sum_{i\geq 0} E_{x_j}\left[1_{\{\tau=i\}} \sum_{k\geq 0} \alpha^{k+i} \varphi(X_{k+i})\right]$$

$$= \sum_{i\geq 0}\sum_{k\geq 0} \alpha^{k+i} E_{x_j}\left[1_{\{\tau=i\}} E_{x_j}[\varphi(X_{k+i}) \mid X_o, \ldots, X_i]\right]$$

onde para obter a última igualdade usamos as propriedades (EC1) e (EC4) da esperança condicional e a propriedade dos tempos de parada: $\{\tau = i\} \in \mathcal{F}_i = \sigma(X_0, \ldots, X_i)$. Pelo Corolário da Proposição 1.3 para todos os inteiros positivos k e i,

$$E_{x_j}[\varphi(X_{k+i}) \mid X_o, \ldots, X_i] = E_{X_i}[\varphi(X_k)]. \tag{2.3}$$

Assim,

$$E_{x_j}\left[\sum_{k\geq\tau} \alpha^k \varphi(X_k)\right] = \sum_{i\geq 0}\sum_{k\geq 0} \alpha^{k+i} E_{x_j}\left[1_{\{\tau=i\}} E_{X_i}[\varphi(X_k)]\right]$$

$$= E_{x_j}\left[\sum_{i\geq 0} \alpha^i 1_{\{\tau=i\}} \sum_{k\geq 0} \alpha^k E_{X_i}[\varphi(X_k)]\right]$$

$$= E_{x_j}\left[\sum_{i\geq 0} \alpha^i 1_{\{\tau=i\}} f(X_i)\right]$$

$$= E_{x_j}\left[\alpha^\tau f(X_\tau)\right],$$

onde utilizamos a relação (2.1) na penúltima igualdade.

Como φ é uma função positiva,

$$\sum_{k\geq\tau} \alpha^k \varphi(X_k) \leq \sum_{k\geq 0} \alpha^k \varphi(X_k).$$

Decorre de (2.1) e (2.2) que para todo x_j em E,

$$E_{x_j}[\alpha^\tau f(X_\tau)] \leq f(x_j).$$

Como f é limitada e $\alpha \in (0,1)$, pelo teorema da convergência dominada (Teorema I.3.2),

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 1} E_{x_j}[\alpha^\tau f(X_\tau)] &= E_{x_j}[\lim_{\alpha\to 1} \alpha^\tau f(X_\tau)] \\ &= E_{x_j}[f(X_\tau)].\end{aligned}$$

Logo,

$$E_{x_j}[f(X_\tau)] \leq f(x_j) \quad \text{para todo} \quad x_j \in E.$$

Para terminarmos a prova da proposição, basta extender a desigualdade a funções limitadas. Seja $f: E \to \mathbf{R}$. Como f é limitada, existe constante $a \in \mathbf{R}_+$; $g = f + a \geq 0$. Logo, se τ é um tempo de parada quase certamente finito,

$$\begin{aligned}E_{x_j}[f(X_\tau)] &= -a + E_{x_j}[g(X_\tau)] \\ &\leq -a + g(x_j) = f(x_j).\end{aligned}$$

□

Como as funções para as quais $E_x[f(X_\tau)] \leq f(x)$ para todo $x \in E$, desempenharão um papel determinante na solução do problema deste capítulo, introduzimos a seguinte

DEFINIÇÃO 2.1: Uma função de E em $\mathbf{R}$ tal que $\Pi f \leq f$ será dita superharmônica.

Vejamos no exemplo 1.1, quais são as funções superharmônicas. Seja $f: E \to \mathbf{R}$, onde $E = \{0, \ldots, 20\}$. Podemos calcular Πf:

$$\Pi f(j) = \begin{cases} f(0) & \text{se} \quad j = 0 \\ \frac{1}{2}\{f(j+1) + f(j-1)\} & \text{se} \quad 1 \leq j \leq 19 \\ f(20) & \text{se} \quad j = 20 \end{cases}$$

Estendemos f a [0,20] de forma linear. Assim, se $x \in (j, j+1)$, $f(x) = (x - j)f(j+1) + (j+1-x)f(j)$. Deixamos ao leitor verificar que neste exemplo uma função $f\colon \{0,\dots,20\} \to \mathbf{R}$ é superharmônica, se e somente se sua extensão linear ao intervalo [0,20] for côncava. (Uma função $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ é côncava se para todos $x, y \in [a,b]$ e para todo $\theta \in [0,1]$,

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \geq \theta f(x) + (1-\theta)f(y).$$

Da Proposição 2.1, decorrem dois corolários.

COROLÁRIO 1. *Seja f uma função superharmônica e τ_1 e τ_2 dois tempos de parada quase certamente finitos. Se $\tau_1 \leq \tau_2$, então*

$$E_{x_j}[f(X_{\tau_2})] \leq E_{x_j}[f(X_{\tau_1})] \quad \textit{para} \quad 1 \leq j \leq \sigma$$

DEMONSTRAÇÃO: Vimos na demonstração da Proposição 2.1 que para todo $\alpha \in (0,1)$ e todo tempo de parada quase certamente finito, se a função f for positiva, temos

$$E_{x_j}\left[f(X_\tau)\alpha^\tau\right] = E_{x_j}\left[\sum_{k \geq \tau} \alpha^k \varphi(X_k)\right],$$

onde a função φ foi definida como $\varphi = f - \alpha \Pi f$. Logo, se f é positiva e $\tau_1 \leq \tau_2$,

$$E_{x_j}[\alpha^{\tau_2} f(X_{\tau_2})] \leq E_{x_j}[\alpha^{\tau_1} f(X_{\tau_1})].$$

Aplicando o teorema da convergência dominada, teremos demonstrado o Corolário para funções positivas. Extendemos o resultado para funções limitadas como o fizemos na Proposição 2.1. □

COROLÁRIO 2. *Seja Γ um subconjunto de E e f uma função superharmônica. Seja τ o tempo de parada*

$$\tau(w) = \inf\{n \geq 0; X_n(w) \in \Gamma\}.$$

Se τ é quase certamente finito, então a função h definida como

$$h(x) = E_x[f(X_\tau)]$$

também é superharmônica.

DEMONSTRAÇÃO: Seja τ^* o tempo de parada definido como

$$\tau^*(w) = \inf\{n \geq 1, X_n(w) \in \Gamma\}$$

Assim, $\tau^* \geq \tau$. Pelo Corolário 1,

$$E_x[f(X_{\tau^*})] \leq E_x[f(X_\tau)] = h(x) \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Ora, com a notação introduzida pouca antes da Proposição 1.4, $\tau^*(w) = 1+\tau(\theta(w))$ para todo $w \in \Omega$. Como para todo $w \in \Omega$, $X_i(\theta(w)) = X_{i+1}(w)$,

$$\begin{aligned} X_{\tau^*(w)}(w) &= X_{1+\tau(\theta(w))}(w) \\ &= X_{\tau(\theta(w))}(\theta(w)) \\ &= X_\tau(\theta(w)). \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 1.4,

$$\begin{aligned} E_x[f(X_{\tau^*})] &= \sum_{i=1}^{\sigma} E_x[f(X_{\tau^*}) \mid X_1 = x_i] P_x[X_1 = x_i] \\ &= \sum_{i=1}^{\sigma} E_{x_i}[f(X_\tau)] P_x[X_1 = x_i] \\ &= \sum_{i=1}^{\sigma} P(x, x_i) h(x_i) \\ &= E_x[f(X_1)]. \end{aligned}$$

□

§3. O valor do prêmio

Desejamos caracterizar a função $V(x)$ definida na primeira seção, chamada valor do prêmio. Estabelecemos na seção anterior que se a função f for superharmônica, então o valor do prêmio é igual a f. Nesta seção provamos duas afirmações. A primeira garante que toda função superharmônica maior ou igual a f é também maior ou igual ao valor do prêmio. A segunda Proposição assevera que a função valor do prêmio é superharmônica. Portanto a função valor do prêmio pode ser caracterizada como a menor função superharmônica maior ou igual a f.

PROPOSIÇÃO 3.1. *Seja g uma função superharmônica maior ou igual a f. Então g é maior ou igual à função valor do prêmio definida em (1.7).*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $x \in E$ e $\varepsilon > 0$. Pela definição da função valor, existe um tempo de parada τ quase certamente finito para o qual

$$V(x) \le E_x[f(X_\tau)] + \varepsilon.$$

Como $f \le g$,

$$V(x) \le E_x[g(X_\tau)] + \varepsilon.$$

Pela Proposição 2.1,

$$E_x[g(X_\tau)] \le g(x)$$

pois g é superharmônica. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, $V(x) \le g(x)+\varepsilon$. Assim $V(x) \le g(x)$.

□

PROPOSIÇÃO 3.2. *A função valor definida em (1.7) é superharmônica.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\varepsilon > 0$. Para cada $x_i \in E$, existe um tempo de parada τ_i quase certamente finito para o qual,

$$V(x_i) \le E_{x_i}[f(X_{\tau_i})] + \varepsilon.$$

Seja τ o tempo de parada definido como

$$\tau(w) = \sum_{i=1}^{\sigma} 1_{\{X_1 = x_i\}}(1 + \tau_i(\theta(w))).$$

τ aguarda o primeiro salto. Se, no instante 1 o processo encontra-se em x_i, escolhemos a estratégia τ_i. Em virtude da propriedade (EC1) e da Proposição 1.4, o tempo de parada τ é finito quase certamente:

$$\begin{aligned}
P_x[\tau < \infty] &= P_x\Big[\bigcup_{i=1}^{\sigma}\{X_1 = x_i, 1 + (\tau_i \circ \theta) < \infty\}\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{\sigma} P_x\big[X_1 = x_i, 1 + (\tau_i \circ \theta) < \infty\big] \\
&= \sum_{i=1}^{\sigma} E_x\Big[1_{\{X_1 = x_i\}} E_x\big[1_{\{1 + (\tau_i \circ \theta) < \infty\}} \mid X_1\big]\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{\sigma} E_x\Big[1_{\{X_1 = x_i\}} E_{X_1}\big[1_{\{\tau_i < \infty\}}\big]\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{\sigma} E_x\Big[1_{\{X_1 = x_i\}} P_{x_i}\big[\tau_i < \infty\big]\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{\sigma} P_x\big[X_1 = x_i\big] = 1.
\end{aligned}$$

Nestas sucessivas simplificações, utilizamos a propriedade (EC1) da esperança condicional, a Proposição 1.4 demonstrada na primeira seção deste capítulo, o fato de τ_i ser um tempo de parada finito quase certamente com respeito à probabilidade P_{x_i} e (1.2).

Por outro lado, pelas mesmas razões,

$$\begin{aligned}
E_x[f(X_\tau)] &= \sum_{k=1}^{\sigma} E_x\left[1_{\{X_1=x_k\}} f(X_\tau)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\sigma} E_x\left[1_{\{X_1=x_k\}} E_x\left[f(X_{1+\tau_k\circ\theta}) \mid X_1\right]\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\sigma} E_x\left[1_{\{X_1=x_k\}} E_x\left[f(X_{\tau_k}\circ\theta) \mid X_1\right]\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\sigma} E_x\left[1_{\{X_1=x_k\}} E_{X_1}\left[f(X_{\tau_k})\right]\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\sigma} E_x\left[1_{\{X_1=x_k\}} E_{x_k}\left[f(X_{\tau_k})\right]\right] \\
&\geq \sum_{k=1}^{\sigma} \Pi(x,x_k)\{V(x_k)-\varepsilon\}
\end{aligned}$$

Como por definição,

$$V(x) \geq E_x[f(X_\tau)],$$

$$V(x) \geq (\Pi V)(x) - \varepsilon.$$

Deixando $\varepsilon \downarrow 0$ completamos a demonstração da proposição. □

§4. Estratégia Ótima

Caracterizamos o valor do prêmio na seção anterior, realizando o primeiro objetivo do capítulo, pois podemos, a partir dela encontrar o valor do prêmio para cada cadeia de Markov. No exemplo 1.1 mostramos que a propriedade de superharmonicidade coincide com a propriedade de concavidade. Portanto, dada uma função $f\colon\{0,\dots,20\} \to \mathbf{R}$, para encontrar o valor do prêmio correspondente a f, basta procurar a menor função côncava maior ou igual a f.

O segundo problema deste capítulo, a saber, encontrar uma estratégia que realize o valor do prêmio, será resolvido nesta seção.

Seja $\Gamma \subseteq E$ o conjunto onde V e f coincidem:

$$\Gamma = \{x \in E; V(x) = f(x)\}.$$

Seja τ o tempo de parada da primeira visita ao conjunto Γ:

$$\nu(w) = \inf_{k \geq 0} \{X_k(w) \in \Gamma\}.$$

TEOREMA 4.1. *Para todo $x \in E$, $V(x) = E_x[f(X_\nu)]$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $h: E \to \mathbf{R}$ a função definida como $h(x) = E_x[F(X_\nu)]$. Pode-se provar que o tempo de parada ν é quase certamente finito. A demonstração desta afirmação depende da classificação dos estados de uma cadeia de Markov, assunto acima do escopo deste opúsculo. O leitor encontrará em [Ç] os elementos necessários para completar a prova.

Pela definição de V,

$$h(x) = E_x[f(X_\nu)] \leq V(x). \tag{4.1}$$

Como para $x \in \Gamma$, ν prescreve a parada imediata, h e V coincidem em Γ, pois para $x \in \Gamma$, $h(x) = f(x)$ e, por definição, $V(x) = f(x)$.

Por outro lado, como $X_{\nu(w)}(w) \in \Gamma$ e f coincide com V no conjunto Γ, podemos substituir f por V na definição (4.1) de h:

$$h(x) = E_x[V(X_\nu)].$$

Como pela Proposição 3.2 o valor do prêmio é uma função superharmônica, pelo Corolário 2 da Proposição 2.1, a função h é superharmônica.

Pela definição (4.1) de h, $h \leq V$. Logo, para encerrar a prova do teorema resta mostrar que $V \leq h$. Se $f \leq h$, como h é superharmônica, pela Proposição 3.1, $V \leq h$. Vamos portanto provar que a função f é menor ou igual a h. Seja α o elemento onde a diferença $f(a) - h(a)$ atinge seu valor máximo. A função $g(x) = h(x) + [f(\alpha) - h(\alpha)]$ é superharmônica e maior ou igual a f. Pela Proposição 3.1, g é também maior ou igual a V. Logo $V(\alpha) \leq g(\alpha) = f(\alpha)$. Como $f(\alpha) \leq V(\alpha)$, $\quad V(\alpha) = f(\alpha)$. Portanto $\alpha \in \Gamma$. Neste caso $h(\alpha) = f(\alpha) = V(\alpha)$ e $f(\alpha) - h(\alpha) = 0$. Logo $f(a) - h(a) \leq 0$ para todo $a \in E$. Portanto $f \leq h$. □

Encerramos com o Teorema 4.1 o estudo do problema de otimização markoviana em espaços de estados finitos.

Em todas as demonstrações das seções anteriores, utilizamos constantemente a finitude do conjunto de estados do sistema. Vejamos um exemplo onde o conjunto E é infinito. Seja $E = \mathbf{N}^*$ e P a probabilidade de transição definida como

$$P[Z_{n+1} = k \mid Z_n = j] = \begin{cases} \frac{j^2-1}{j^2} & \text{se} \quad j \geq 2 \text{ e } k = j+1 \\ \frac{1}{j^2} & \text{se} \quad j \geq 2 \text{ e } k = 1 \\ 1 & \text{se} \quad j = k = 1 \\ 0 \quad \text{caso contrário.} & \end{cases}$$

Seja $f\colon \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ & \\ 1 - \frac{1}{n} & n \geq 2 \end{cases}$$

Desejamos resolver o problema formulado em (1.7) e (1.8) para esta cadeia de Markov.

O processo Z_n, estando em j aumenta de uma unidade com probabilidade $(j^2-1)/j^2$ ou pula para 1 com probabilidade $1/j^2$ e lá permanece indefinidamente. Portanto, se inicialmente o processo estiver em k, no instante n ele poderá encontrar-se em $k+n$ ou em 1. Ele estará em $n+k$ se a cada etapa ele tiver escolhido de pular de j para $j+1$ e estará em 1 se em uma delas tiver escolhido pular para 1. Assim,

$$\begin{aligned} P_k[Z_n = k+n] &= P_k[Z_1 = k+1, \ldots, Z_n = k+n] \\ &= \prod_{j=k}^{n-1} \Pi(j, j+1) \\ &= \prod_{j=k}^{n-1} \left(\frac{j^2-1}{j^2} \right) \end{aligned}$$

e

$$P_k[Z_n = 1] = 1 - \prod_{j=k}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{j^2} \right).$$

Por indução, podemos provar rigorosamente estas afirmações. Portanto,

$$\begin{aligned} E_k[f(Z_n)] &= f(1) \left[1 - \prod_{j=k}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{j^2} \right) \right] \\ &\quad + f(n+k) \prod_{j=k}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{j^2} \right) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{n+k} \right). \end{aligned}$$

Logo $\lim_{n\to\infty} E_k[f(Z_n)] = 1$.

Afirmamos que $V \equiv 1$. Por um lado, $V(k) \leq \sup_{j\geq 1} f(j) = 1$. Por outro, se consideramos a seqüência de tempos de parada quase certamente finitos τ_n definidos como $\tau_n(w) = n$ para todo $w \in \Omega$, pela definição de V,

$$\begin{aligned} V(k) &\geq \limsup_{n\to\infty} E_k[f(Z_{\tau_n})] \\ &= \lim_{n\to\infty} E_k[f(Z_n)] = 1. \end{aligned}$$

Neste exemplo, $\Gamma = \{k; V(k) = f(k)\} = \{1\}$. Seja ν o tempo de parada "primeira visita ao conjunto Γ", temos

$$\nu = \inf_{k\geq 0} \{Z_k = 1\}.$$

Este tempo de parada não é finito quase certamente para a probabilidade P_k, $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}
P_k[\nu = \infty] &= P_k[Z_n = n + k, n \geq 1] \\
&= \lim_{n\to\infty} P_k[Z_n = n + k] \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{j=k}^{n+k} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \prod_{j=k}^{k_o} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) \prod_{j=k_o+1}^{k+n} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) \\
&\geq \prod_{j=k}^{k_o} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) \exp\Big\{ - \sum_{j\geq k_o+1} \frac{2}{j^2}\Big\} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

onde escolhemos k_o de modo que $\log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \geq -2\frac{1}{k^2}$ para $k \geq k_o$.

Transporemos esta dificuldade instituindo uma convenção: $f(X_\nu) = 0$ no conjunto onde $\nu(w) = +\infty$. Consideramos que neste conjunto, o jogador não interrompe a partida nunca e portanto não recebe prêmio algum. Com esta convenção,

$$\begin{aligned}
E_k[f(X_\nu)] &= E_k[f(X_\nu)1_{\{\nu<\infty\}}] \\
&= E_k[f(1)1_{\{\nu<\infty\}}] \\
&= P_k[\nu < \infty].
\end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
P_k[\nu < \infty] &= 1 - P_k[\nu = \infty] \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Portanto o tempo de parada ν não realiza o supremo. De fato, neste exemplo, não existe tempo de parada, quase certamente finito ou não, que realize o supremo. O leitor encontrará em [DY] desenvolvimento ulterior da teoria de otimização markoviana.

Para encerrar o capítulo, retornamos ao problema do capítulo III. Construimos uma cadeia de Markov $(X_j)_{j\geq 1}$ no espaço $\{1, 2, \dots, N, \delta\}$ e desejamos encontrar um tempo de parada que maximize a probabilidade de parar no instante anterior ao salto para o estado δ. Como a probabilidade de pular para δ, estando em k, é igual a k/N, formalmente, desejamos um tempo de parada que maximize

$$\begin{aligned} P[w_{\tau(w)} = A_N] =& P[X_\tau \neq \delta, X_{\tau+1} = \delta] \\ =& \sum_{j\geq 1} \sum_{k=1}^{N} P[\tau = j, X_j = k, X_{j+1} = \delta]. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade (EC1) e lembrando que τ é um tempo de parada, o último termo da expressão acima é igual a

$$\sum_{j\geq 1} \sum_{k=1}^{N} E[1_{\{\tau=j\}} 1_{\{X_j=k\}} P[X_{j+1} = \delta \mid X_1, \dots, X_j].$$

Ora pela propriedade de Markov,

$$\begin{aligned} P[X_{j+1} = \delta \mid X_1, \dots, X_j] =& P[X_{j+1} = \delta \mid X_j] \\ =& P(X_j, \delta) \\ =& \frac{X_j}{N} \quad \text{se} \quad 1 \leq X_j \leq N. \end{aligned}$$

Portanto desejamos maximizar

$$\begin{aligned} P[w_{\tau(w)} = A_N] =& \sum_{j\geq 1} \sum_{k=1}^{N} E[1_{\{\tau=j\}} 1_{\{X_j=k\}} \frac{X_j}{N}] \\ =& \sum_{k=1}^{N} E[1_{\{X_\tau=k\}} \frac{X_\tau}{N}] \\ =& \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N} P[X_\tau = k]. \end{aligned}$$

Seja $f: E \to \mathbf{R}$ definida como $f(k) = k/N$ para $1 \leq k \leq N$, $\quad f(\delta) = 0$. Desejamos maximizar

$$\sum_{k \in E} P_1[X_\tau = k] f(k) = E_1[f(X_\tau)].$$

Pelo teorema 4.1, devemos buscar o conjunto Γ onde $V(k) = \sup_\tau E_k[f(X_\tau)]$ e f coincidem. V é a menor função superharmônica maior ou igual a f. Portanto V é a menor solução do sistema

$$\begin{cases} \Pi g & \leq \quad g \\ \\ f & \leq \quad g \end{cases}$$

Substituindo Π e f pelos seus respectivos valores, devemos encontrar a menor solução do sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=k+1}^{N} \frac{k}{i(i-1)} W(i) \leq W(k) \\ \\ k/N \leq W(k) \end{cases} \tag{4.2}$$

Resolvemos este sistema de forma recorrente. Como $f(N) = \max_{x \in E} f(x)$, $f(N) = V(N)$. Se conhecemos o valor de $V(k)$ para $i \geq k+1$, como V é a menor solução de (4.2),

$$V(k) = \max\left\{ k/N, \sum_{i=k+1}^{N} \frac{k}{i(i-1)} V(i) \right\}. \tag{4.3}$$

Assim,

$$V(N-1) = \max\left\{ \frac{N-1}{N}, \frac{1}{N} \right\} = \frac{N-1}{N} = f(N-1).$$

Continuaremos a obter $f(k) = V(k) = k/N$ para todo inteiro k,

$$k/N \geq \sum_{i=k+1}^{N} \frac{1}{(i-1)} \frac{k}{N}$$

ou

$$(4.4) \qquad \sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i} \leq 1.$$

Seja $k_N + 1$ o menor inteiro para o qual (4.4) é verdadeiro. Assim, para $k_N + 1 \leq k \leq N$, $f(k) = V(k) = k/N$. Por outro lado, a partir de k_N $V(k) > f(k)$. De fato, para $k = k_N$, por (4.3),

$$V(k) = \max\left\{k/N, k/N \sum_{i=k+1}^{N} \frac{1}{(i-1)}\right\}$$

$$= \frac{k}{N} \sum_{i=k}^{N-1} \frac{1}{i} > \frac{k}{N} = f(k).$$

Suponhamos ter verificado a desigualdade $V(k) > f(k)$ para $j + 1 \leq k \leq k_N$. Então, por (4.3),

$$V(j) = \max\left\{j/N, \sum_{i=j+1}^{N} \frac{jV(i)}{i(i-1)}\right\}$$

$$\geq \max\left\{j/N, \sum_{i=j+1}^{N} \frac{j}{N(i-1)}\right\}$$

$$= \frac{j}{N} \sum_{i=j}^{N-1} \frac{1}{i} > \frac{j}{N} = f(j).$$

Como para δ, $\Pi(\delta, \delta) = 1$, $E_\delta[f(X_\tau)] = f(\delta)$ para todo tempo de parada quase certamente finito. Logo $V(\delta) = f(\delta) = 0$.

Portanto $\Gamma = \{k_N + 1, \ldots, N, \delta\}$ e a estratégia ótima é dada por

$$\tau = \inf_n \{X_n \in \Gamma\},$$

onde k_N foi definido em (4.4).

Esta solução corresponde, evidentemente, à do capítulo anterior. Devemos aguardar os k_N primeiros objetos e escolher o próximo que for melhor que todos os anteriores.

Uma resenha recente de resultados e problemas correlatos a este último pode ser encontrado em [F].

CAPÍTULO V

PROCESSO DE RAMIFICAÇÃO

Vamos analisar neste capítulo o segundo problema apresentado na introdução. Um indivíduo, preocupado em conservar as tradições familiares, deseja saber se seu sobrenome desaparecerá no futuro. Para representar o número de descendentes masculinos propomos o seguinte modelo, apresentado pela primeira vez por Galton e Watson em 1873.

Z_n representará o número de descendentes masculinos da geração n. Assim, $Z_o = 1$ e Z_1 representa o número de filhos do primeiro indivíduo.

Vamos supor que cada indivíduo da família vive um tempo fixo, igual para todos, ao fim do qual ele deixa um número aleatório de descendentes. p_k representará a probabilidade de um indivíduo deixar k descendentes masculinos para $k \geq 0$. Desta forma, para evitar dificuldades técnicas desnecessárias, estamos supondo que todos os membros de uma geração morrem ao mesmo tempo, cada um deixando um número aleatório de filhos.

Admitiremos que as variáveis aleatórias que representam o número de filhos de cada membro masculino da família sejam independentes e identicamente distribuidas.

Podemos construir o processo da seguinte forma. Para inteiros $j > 0$ e $k \geq 0$, sejam N_j^k variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas, cujo conjunto de valores possíveis esteja contido nos inteiros positivos. N_j^k representará o número de filhos do j-ésimo membro masculino de k-ésima geração. Se a família tiver j_o membros masculinos em sua k-ésima geração, as variáveis $N_{j_o+1}^k, N_{j_o+2}^k, \dots$ não são utilizadas para calcular o número de descendentes masculinos nas gerações posteriores. De qualquer modo, Z_{n+1} pode ser expresso a partir de $\{N_j^k, 0 \le k \le n, j \ge 1\}$. De fato, como $Z_o = 1$, $Z_1 = N_1^o$ e de maneira geral $Z_{n+1} = N_1^n + \cdots + N_{Z_n}^n$.

Este modelo foi estudado pela primeira vez por dois matemáticos britânicos, F. Galton e H. W. Watson, na segunda metade do século passado. O primeiro constatara que o número de sobrenomes de famílias nobres inglesas decrescera entre os séculos XVI e XIX. O segundo propôs este modelo matemático para descrever o fenômeno. Veja [G], [W] e [WG].

Assumimos no parágrafo anterior que as variáveis $\{N_j^k, j \ge 1, k \ge 0\}$ são independentes e identicamente distribuidas com

$$P[N_1^1 = i] = p_i \quad \text{para} \quad i \ge 1 \tag{1.1}$$

onde,

$$p_i \ge 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i \ge 0} p_i = 1.$$

A primeira etapa do problema consiste em caracterizar a distribuição das variáveis Z_n pois desejamos estudar a probabilidade de extinção da família. Formalmente, desejamos analisar o comportamento da seqüência

$$P[Z_n = 0].$$

Para manter a notação simples, admitimos que o processo no seu início tem um único indivíduo

$$P[Z_o = 1] = 1. \tag{1.2}$$

Se na n-ésima geração, a família possui k indivíduos, a probabilidade da família ter j membros na geração seguinte é dada por:

$$P[N_1^n + \cdots + N_k^n = j]. \tag{1.3}$$

Como assumimos que as variáveis $N_1^n, \ldots, N_k^n$ são independentes e identicamente distribuidas, podemos calcular por indução a probabilidade (1.3) acima e expressá-la unicamente em termos da seqüência p_k definida em (1.1).

Para $k = 2$,

$$
\begin{aligned}
P[N_1^n + N_2^n = j] &= P\Big[\bigcup_{i=0}^{j}\{N_1^n = i\} \cap \{N_2^n = j-i\}\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{j} P[N_1^n = i, N_2^n = j-i] \\
&= \sum_{i=0}^{j} P[N_1^n = i]P[N_2^n = j-i] \\
&= \sum_{i=0}^{j} p_i p_{j-i}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Vamos notar esta soma por p_j^{*2}. O leitor poderá reconhecer a convolução da função de probabilidade p_k. Para uma função p definida em $\mathbf{Z}$, a n-ésima ($n \geq 1$) convolução de p, notada por p^{*n} é

$$p_j^{*n} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} p_{j-i} p_i^{*(n-1)},$$

onde p^{*o} é a identidade:

$$p_j^{*o} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad j \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad j = 0 \end{cases}$$

Portanto, $p_j^{*1} = p_j$ para todo j inteiro.

Desejamos provar que (1.3) é igual a p_j^{*k} para todo inteiro positivo k. Em (1.4), demonstramos esta afirmação para $n = 2$. Prosseguimos por indução. Suponhamos o resultado válido para $1 \leq l \leq k-1$. Repetindo as etapas de (1.4),

$$P[N_1^n + \cdots + N_k^n = j] = \sum_{i=0}^{j} P[N_1^n = i]P[N_2^n + \cdots + N_k^n = j-i].$$

Por hipótese de indução, $P[N_2^n + \cdots + N_k^n = j - i] = p_{j-i}^{*(k-1)}$. Logo

$$P[N_1^n + \cdots + N_k^n = j] = \sum_{i=0}^{j} p_i p_{j-i}^{*(k-1)}$$

$$= p_j^{*k}.$$

Por outro lado, se na n-ésima geração, não há nenhum descendente do antepassado Z_o, na geração seguinte não existirá nenhum descendente também. Assim, calculamos acima a probabilidade do antepassado Z_o possuir j descendentes na geração $(n+1)$ sabendo-se existirem k descendentes na geração n. Formalmente calculamos,

$$P[Z_{n+1} = j \mid Z_n = k] = \begin{cases} p_j^{*k} & \text{se } \ k > 0 \ \text{ e } \ j \geq 0 \\ \\ \delta_{jk} & \text{se } \ k = 0 \ \text{ e } \ j \geq 0, \end{cases}$$

onde δ_{jk} é o delta de Kronecker e vale 1 se $j = k$ e 0 se não.

Como podemos verificar sem dificuldades a igualdade $P[Z_{n+1} = j \mid Z_1 = i_1, \ldots, Z_{n-1} = i_{n-1}, Z_n = k] = P[Z_{n+1} = j \mid Z_n = k]$ para todos inteiros j, k; pela definição IV.1.1, o processo $(Z_n)_{n \geq 0}$ é uma cadeia de Markov com probabilidade de transição dada por:

$$(1.5) \qquad P(k, j) = \begin{cases} p_j^{*k} & \text{se } \ k > 0 \text{ e } j \geq 0 \\ \\ \delta_{kj} = p_j^{*0} & \text{se } \ k = 0 \text{ e } j \geq 0 \end{cases}$$

Uma cadeia de Markov cuja probabilidade de transição satisfaz à relação (1.5) é chamada de Processo de Ramificação.

Para evitar situações triviais, vamos admitir que o número de indivíduos pode crescer ou diminuir de uma geração a outra e que o número de filhos é aleatório:

$$p_o + p_1 < 1, \qquad p_o > 0$$

$$p_j \neq 1 \quad \text{para todo} \quad j \in \mathbf{N}.$$

Um funcional que se revelará muito útil no estudo dos processos de ramificação é a função geradora de momentos: Seja $f: [0,1] \to \mathbf{R}_+$ definida por:

$$f(s) = E[s^{N_1^1}]. \tag{1.6}$$

Consideraremos também os iterados da função geradora de momentos:

$$f_o(s) = s, \qquad f_{n+1}(s) = f(f_n(s)). \tag{1.7}$$

Como supusemos que Z_o é igual a 1, a função f é também expressa como

$$\begin{aligned} f(s) &= E[s^{Z_1}] \\ &= \sum_{k \geq 0} p_k s^k \end{aligned} \tag{1.8}$$

e portanto, f é uma função infinitamente diferenciável em $(0,1)$, estritamente convexa, estritamente crescente, $f(0) = p_o$, $f(1) = 1$.

Seja $f_{(n)}: [0,1] \to \mathbf{R}_+$ a função geradora de momentos associada a Z_n:

$$f_{(n)}(s) = E[s^{Z_n}].$$

Assim, se $P_n(i,j)$ representa o produto da matriz de transição n vezes,

$$f_{(n)}(s) = \sum_{k \geq 0} P_n(1,k) s^k. \tag{1.9}$$

Em particular, $f_{(n)}(0) = P_n(1,0) = P[Z_n = 0]$. Desejamos, portanto, estudar a evolução de $f_{(n)}(0)$. Vamos provar que para todo $n \geq 1$, $f_n(s) = f_{(n)}(s)$. Como $f(s) = f_{(1)}(s)$, basta mostrar que a seqüência de funções $(f_{(n)})$ verifica uma relação de recorrência semelhante a (1.7). Fá-lo-emos de duas maneiras diferentes. Por definição,

$$\begin{aligned} f_{(n+1)}(s) &= E\big[s^{Z_{n+1}}\big] \\ &= E\big[s^{N_1^n + \cdots + N_{Z_n}^n}\big] \\ &= \sum_{k \geq 0} E\big[1_{\{Z_n = k\}} s^{N_1^n + \cdots + N_k^k}\big]. \end{aligned}$$

Como Z_n é uma função das variáveis $N_1^o, N_2^o, \ldots, N_1^1, N_2^1, \ldots, N_1^{n-1}, N_2^{n-1}, \ldots$ e estas variáveis são independentes das v.a. $N_1^n, N_2^n, \ldots, N_k^n$, Z_n é independente de $N_1^n, \ldots,$ N_k^n. Como as variáveis $1_{\{Z_n=k\}}$ e $s^{N_1^n+\cdots+N_k^n}$ são integráveis, pela propriedade (E5),

$$\begin{aligned}
E\big[1_{\{Z_n=k\}} s^{N_1^n+\cdots+N_k^n}\big] &= E\big[1_{\{Z_n=k\}}\big] E\big[s^{N_1^n+\cdots+N_k^n}\big] \\
&= P[Z_n = k] E\big[s^{N_1^n+\cdots+N_k^n}\big].
\end{aligned}$$

Como as variáveis $N_1^n, \ldots, N_k^n$ são independentes e identicamente distribuidas, por (E5) e (1.6)

$$\begin{aligned}
E\big[s^{N_1^n+\cdots+N_k^n}\big] &= \prod_{j=1}^{k} E\big[s^{N_j^n}\big] \\
&= \Big(E\big[s^{N_1^1}\big]\Big)^k \\
&= (f(s))^k .
\end{aligned}$$

Logo, por (1.9)

$$\begin{aligned}
f_{(n+1)}(s) &= \sum_{k\geq 0} P[Z_n = k](f(s))^k \\
&= \sum_{k\geq 0} P_n(1,k)(f(s))^k \\
&= f_{(n)}(f(s)).
\end{aligned}$$

A segunda forma de provar uma relação de recorrência para $f_{(n)}$, baseia-se unicamente nas propriedades da probabilidade de transição $P(k,j)$:

$$\begin{aligned}
f_{(n+1)}(s) &= \sum_{k\geq 0} P_{n+1}(1,k)s^k \\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq 0} P_n(1,j)P(j,k)s^k \\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq 0} P_n(1,j)p_k^{*j}s^k
\end{aligned}$$

pois $P(j,k) = p_k^{*j}$ por (1.5).

Vamos provar por indução em j a seguinte relação:

$$\sum_{k\geq 0} p_k^{*j} s^k = [f(s)]^j.$$

Para $j = 1$, esta igualdade decorre da definição de f, reformulada em (1.8). Suponhamos a relação verdadeira para todo inteiro menor ou igual a j. Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} p_k^{*(j+1)} s^k &= \sum_{k\geq 0}\sum_{i=0}^{k} p_{k-i} p_i^{*j} s^k \\
&= \sum_{i\geq 0} p_i^{*j} s^i \sum_{k\geq i} p_{k-i} s^{k-i} \\
&= \sum_{i\geq 0} p_i^{*j} s^i \sum_{k\geq 0} p_k s^k \\
&= \sum_{i\geq 0} p_i^{*j} s^i f(s) \\
&= [f(s)]^{j+1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
f_{(n+1)}(s) &= \sum_{j\geq 0} P_n(1,j)[f(s)]^j \\
&= f_{(n)}(f(s)).
\end{aligned}$$

Logo, para todo inteiro n $\quad f_{(n)} \equiv f_n$.

Destarte, $P[Z_n = 0] = f_{(n)}(0) = f_n(0)$. Interessamo-nos em estudar a seqüência dos iterados de f. Antes de analisar o comportamento da seqüência $(f_k(0))_{k\geq 1}$, vamos justificar a terminologia utilizada. Calculemos a esperança da v.a. Z_1.

$$\begin{aligned}
E[Z_1] &= \sum_{k\geq 0} k\, p_k \\
&= f'(1).
\end{aligned}$$

Da mesma forma, se a variável Z_1 possuir momentos de ordem superior ($E[Z_1^k]$, $k \geq 1$) podemos expressá-los a partir da função geradora de momentos.

m representará a esperança da variável Z_1 e portanto o valor da derivada da função geradora de momentos no ponto 1. Com esta função podemos também calcular a esperança de Z_n:

$$\begin{aligned} E[Z_n] &= \sum_{k\geq 0} k\, P_n(1,k) \\ &= f'_{(n)}(1) = f'_n(1). \end{aligned}$$

Ora, $f'_n(1) = f'(f_{n-1}(1))f'_{n-1}(1) = f'(1)f'(f_{n-2}(1))f'_{n-2}(1) = \cdots = [f'(1)]^n = m^n$, pois para todo inteiro positivo n, $\quad f_n(1) = \sum_{k\geq 0} P_n(1,k) = 1$. Portanto,

$$E[Z_n] = m^n \quad \text{para todo inteiro positivo } n.$$

Provaremos dois lemas elementares sobre a função geradora de momentos:

LEMA 1.

(i) *f é crescente e estritamente convexa em $[0,1]$.*

(ii) *$f(0) = p_0$ e $f(1) = 1$.*

(iii) *Se $m \leq 1$ então $f(t) > t$ para todo $t \in [0,1)$.*

(iv) *Se $m > 1$ então $f(t) = t$ tem uma única solução em $[0,1)$.*

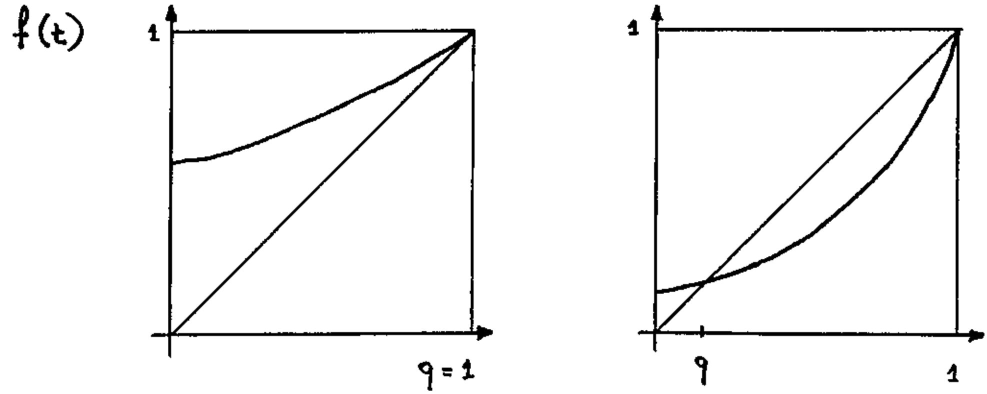
DEMONSTRAÇÃO: As duas primeiras afirmações são conseqüências imediatas da definição de f. Lembramos que uma função contínua $g: [a,b] \to \mathbf{R}$ duas vezes diferenciável em (a,b) é (estritamente) convexa se a segunda derivada é (estritamente) positiva.

(iii) Como f é estritamente convexa em [0,1] e $f(1) = 1$, a função $g(t) = f(t) - t$ também é estritamente convexa e $g(1) = 0$. Logo a derivada $g'(t)$ é uma função estritamente crescente (pois a derivada da função g' é estritamente positiva) e em 1, $g'(1) = f'(1) - 1 = m - 1 \leq 0$. Portanto g' é estritamente negativa em $[0,1)$ e g é estritamente decrescente em [0,1]. Como $g(1) = f(1) - 1 = 0, \quad g(t) > 0$ para $t \in [0,1)$, o que prova (iii).

(iv) Suponhamos $m > 1$. Seja $g(t) = f(t) - t$. Vimos em (iii) que a função g é estritamente convexa. Como $g'(1) = f'(1) - 1 = m - 1 > 0$ e $g(1) = f(1) - 1 = 0$, existe $t_o < 1$ com $g(t_o) < 0$. Por outro lado, $g(0) = p_0 > 0$. Logo, pelo teorema do valor intermediário, existe $t_1 \in (0,1)$, $g(t_1) = 0$, i.e., $f(t_1) = t_1$. t_1 é o único elemento de (0,1) com tal propriedade. De fato, suponhamos por absurdo que existe $t_2 \in (0,1)$ com $g(t_2) = 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor $t_2 > t_1$. Como g é diferenciável, pelo teorema do valor médio, existe t_3 em (t_1, t_2) e t_4 em $(t_2, 1)$ com $g'(t_3) = g'(t_4) = 0$, o que contradiz a monotonia estrita da função g'. □

NOTAÇÃO: q represenará a menor raiz em [0,1] da equação $f(t) = t$. Pelo Lema 1, no caso $m \leq 1$, $q = 1$ e no caso $m > 1$, $q < 1$.

Temos portanto duas situações distintas:



$m \leq 1$ $\qquad\qquad$ $m > 1$

LEMA 2.

(i) *Se* $t \in [0, q]$ *então* $f_n(t) \uparrow q$ *quando* $n \uparrow \infty$.

(ii) *Se* $t \in [q, 1)$ *então* $f_n(t) \downarrow q$ *quando* $n \uparrow \infty$.

DEMONSTRAÇÃO: (i) Seja $t < q$ pois o caso $t = q$ é trivial. Como $t < q$, $f(t) > t$. Sendo f estritamente crescente, $f(t) < f(q) = q$. Logo $t < f(t) < q$. Repetindo o argumento provamos que a seqüência $f_n(t)$ é crescente e limitada por q: $\quad t < f(t) < f_2(t) <$

$\cdots < f_n(t) < q$. A seqüência possui portanto um limite $\ell \leq q$. Como a função f é contínua, $f(\ell) = f(\lim_n f_n(t)) = \lim_{n\to\infty} f(f_n(t)) = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(t) = \ell$. Como, por definição, q é a menor raiz da equação $f(t) = t$ e $\ell \leq q$, $q = \ell$. A segunda afirmação do lema se demonstra da mesma forma. $\square$

Reunimos todos os elementos para resolver o problema formulado no início deste capítulo.

TEOREMA 1.1. *A probabilidade de extinção da cadeia de Markov* $(Z_n)_{n\geq 1}$, P[*existe* n; $Z_n = 0$] *é igual a* q.

OBSERVAÇÃO: Portanto se o número médio de descendentes m for menor ou igual a 1, a família se extingue quase certamente pois neste caso $q = 1$. Por outro lado, se $m > 1$, há uma probabilidade estritamente positiva de permanecerem descendentes em todas as gerações futuras.

DEMONSTRAÇÃO:

$$P[\text{existe } n; Z_n = 0] = P\Big[\bigcup_{n\geq 1}\{Z_n = 0\}\Big].$$

Como $\{Z_n = 0\} \subseteq \{Z_{n+1} = 0\}$, pela propriedade (I.1.9),

$$\begin{aligned}
P\Big[\bigcup_{n\geq 1}\{Z_n = 0\}\Big] &= \lim_{n\to\infty} P[Z_n = 0] \\
&= \lim_{n\to\infty} P_n(1,0) \\
&= \lim_{n\to\infty} f_{(n)}(0) \\
&= \lim_{n\to\infty} f_n(0) = q.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$P[\text{existe } n; Z_n = 0] = q.$$

$\square$

Este teorema assevera que existem duas situações possíveis. Se $m \leq 1$ então quase certamente a família se extingue. Por outro lado, se $m > 1$, como $E[Z_n] = m^n$, o número médio de indivíduos numa geração cresce para ∞. Assim uma população que mantiver sua taxa de reprodução constante ao longo do tempo está condenada a desaparecer ou a se multiplicar e crescer indefinidamente.

O leitor encontrará em [AN] um estudo minucioso dos processos de Ramificação e em [N2] desenvolvimentos recentes desta teoria.

CAPÍTULO VI

MARTINGAIS

Neste capítulo resolveremos um problema, conhecido na teoria de finanças como problema do empregado. Podemos descrevê-lo, adaptando-o, da seguinte forma. Imaginemos um jovem bem relacionado precisando da maior quantidade

de dinheiro possível para saldar uma dívida. Com este fito ele se propõe casar com uma rica herdeira. Seu único critério de seleção será o dote de cada uma das pretendentes. Para realizar este projeto nosso jovem rapaz decide freqüentar assiduamente a alta burguesia carioca para ser apresentado aos bons partidos da cidade. Em média ele encontra uma pretendente por semana. Por outro lado, toda semana ele despende uma quantia fixa c em roupas, contas de restaurante e bar, presentes, aluguel de carros luxuosos...

Sedutor e hábil, ao final de um período, ele poderá livremente escolher sua esposa entre todas as pretendentes encontradas até então. Assim, ao final de cada semana ele deseja saber se deve casar-se com aquela das herdeiras já conhecidas que possuir o maior dote ou prosseguir sua busca e gastar uma vez mais a quantia c.

Propomos o seguinte modelo para este problema. Seja, para $j \in \mathbb{N}$, Y_j o dote da j-ésima moça apresentada. Suporemos as variáveis $(Y_j)_{j\geq 1}$ independentes e identicamente distribuidas. c representará a despesa semanal necessária para freqüentar a alta burguesia carioca. A fortuna do jovem ao final da n-ésima semana será portanto

$$Z_n = M_n - cn,$$

onde

$$M_n = \max_{1\leq i\leq n} Y_i.$$

A solução deste problema envolverá elementos da teoria dos martingais. Na primeira seção deste capítulo apresentamos uma breve introdução a esta teoria. Na segunda seção retornaremos ao problema formulado acima.

§1. Martingais

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ um processo estocástico definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, onde Ω é o produto infinito de cópias de um subconjunto Ω_o enumerável de $\mathbf{R}$: $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots$, $\Omega_i = \Omega_o$, $i \geq 1$. $\mathcal{F}_n$ representará a σ-álgebra gerada pelas variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$. $w = (w_i)_{i\geq 1}$ representará os elementos de Ω. A σ-álgebra $\mathcal{F}_n$ e as variáveis aleatórias X_j ($X_j(w) = w_j$ para todo $j \geq 1$) foram definidas e estudadas no capítulo II.

Inspirados em jogos honestos, onde a cada etapa a fortuna média de um jogador é igual a sua fortuna no instante anterior, temos a

DEFINIÇÃO 1.1: O processo estocástico $(X_n)_{n\geq 1}$ é um martingal (supermartingal) se para todo $n \geq 1$,

(i) $E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = (\leq) X_n$.

(ii) $E[|X_n|] < \infty$.

O processo $(X_n)_{n\geq 1}$ será chamado de submartingal se $(-X_n)_{n\geq 1}$ for um supermartingal. Nesta seção enunciaremos todos os teoremas para martingais e supermartingais. As afirmações a respeito dos supermartingais podem ser adaptadas para o caso de submartingais.

Da definião de martingal (supermartingal) segue-se:

$$E[X_m \mid \mathcal{F}_n] = (\leq) X_n \quad \text{para todo} \quad m > n.$$

Este resultado demonstra-se por indução em $m \geq n+1$. Por definição a igualdade (desigualdade) é verdadeira para $m = n+1$. Suponhamos a igualdade (desigualdade) verificada para $n+1 \leq m \leq n+k$. Então, pela propriedade (EC5) da esperança condicional,

$$\begin{aligned} E[X_{n+k+1} \mid \mathcal{F}_n] &= E[E[X_{n+k+1} \mid \mathcal{F}_{n+k}] \mid \mathcal{F}_n] \\ &= (\leq) E[X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= (\leq) X_n, \end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade (E1) e a definição de martingal (supermartingal) para obter a segunda igualdade e a hipótese de indução no último passo.

Para desenvolver a intuição sobre esta classe de processos estocásticos, vejamos dois exemplos de martingais.

Exemplo 1: Sejam Q e P duas probabilidades em Ω. Notaremos por P_n e Q_n a restrição destas duas probabilidades aos conjuntos $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$. Portanto, para $A \subseteq \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$,

$$P_n[A] = P[A \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \cdots]$$

Vamos supor que para todo $(w_1, \ldots, w_n) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, $P_n[(w_1, \ldots, w_n)] > 0$. Seja $f_n : \Omega \to \mathbf{R}_+$ a função definida por

$$f_n(w) = \frac{Q_n[(w_1, \ldots, w_n)]}{P_n[(w_1, \ldots, w_n)]},$$

onde $Q_n[(w_1, \ldots, w_n)] = Q_n[\{w_1, \ldots, w_n\}] = Q[\{w^o \in \Omega \; w_i^o = w_i \; 1 \leq i \leq n\}]$. f_n só depende de w como função das n-primeiras coordenadas. Portanto f_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável. Ademais, f_n possui duas propriedades:

1) Para todo conjunto B em $\mathcal{F}_n$,

$$E_P[f_n 1_B] = E_Q[1_B],$$

onde notamos por E_P e E_Q as esperanças correspondentes às probabilidades P e Q. De fato, como f_n e 1_B são $\mathcal{F}_n$-mensuráveis,

$$E_P[f_n 1_B] = E_{P_n}[f_n 1_B].$$

Por outro lado, vimos no capítulo I:

$$\begin{aligned}
E_{P_n}[f_n 1_B] &= \sum_{(w_1,\dots,w_n)\in\Omega_1\times\cdots\times\Omega_n} f_n(w_1,\dots,w_n)1_B(w_1,\dots,w_n)P_n[(w_1,\dots,w_n)] \\
&= \sum_{(w_1,\dots,w_n)\in\Omega_1\times\cdots\times\Omega_n} 1_B(w_1,\dots,w_n)Q_n[(w_1,\dots,w_n)] \\
&= E_{Q_n}[1_B] \\
&= E_Q[1_B] = Q[B].
\end{aligned}$$

Portanto f_n permite calcular a Q-probabilidade de um evento da σ-álgebra $\mathcal{F}_n$ a partir da probabilidade P. A segunda propriedade demonstra que $(f_n)_{n\geq 1}$ é um martingal sob a probabilidade P.

2) $$E_P[f_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = f_n.$$

Basta verificar as duas propriedades da definição de esperança condicional dada no capítulo I. Já vimos que f_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável. Por outro lado, se F é uma v.a. $\mathcal{F}_n$-mensurável e portanto só depende de $w_1,\dots,w_n$,

$$\begin{aligned}
&E_P[Ff_{n+1}] = E_{P_{n+1}}[Ff_{n+1}] \\
&= \sum_{(w_1,\dots,w_{n+1})\in\Omega_1\times\cdots\times\Omega_{n+1}} F(w_1,\dots,w_n)\frac{Q_{n+1}[(w_1,\dots,w_{n+1})]}{P_{n+1}[(w_1,\dots,w_{n+1})]}P_{n+1}[(w_1,\dots,w_{n+1})] \\
&= \sum_{(w_1,\dots,w_n)\in\Omega_1\times\cdots\times\Omega_n} F(w_1,\dots,w_n) \sum_{w_{n+1}\in\Omega_{n+1}} Q_{n+1}[(w_1,\dots,w_{n+1})] \\
&= \sum_{(w_1,\dots,w_{n+1})\in\Omega_1\times\cdots\times\Omega_{n+1}} F(w_1,\dots,w_n)Q_n[(w_1,\dots,w_n)] \\
&= \sum_{(w_1,\dots,w_{n+1})\in\Omega_1\times\cdots\times\Omega_{n+1}} F(w_1,\dots,w_n)f_n(w_1,\dots,w_n)P_n[(w_1,\dots,w_n)] \\
&= E_{P_n}[Ff_n] = E_P[f_nF].
\end{aligned}$$

Portanto, para provar que f_n é um martingal, resta verificar que f_n é integrável:

$$
\begin{aligned}
E_P[|f_n|] &= E_{P_n}[f_n] \\
&= \sum_{\substack{w_j \in \Omega_j \\ 1 \le j \le n}} f_n(w_1, \dots, w_n) P_n[(w_1, \dots, w_n)] \\
&= \sum_{\substack{w_j \in \Omega_j \\ 1 \le j \le n}} Q_n[(w_1, \dots, w_n)] = 1.
\end{aligned}
$$

A propriedade 1) da função f_n, caracteriza-a como sendo a derivada de Radon-Nikodym da probabilidade Q_n com respeito à probabilidade P_n $\quad f_n = \dfrac{dQ_n}{dP_n}$.

EXEMPLO 2: (ver [KT]). Consideremos uma urna com uma bola branca e outra vermelha. Repetiremos o seguinte procedimento. Uma bola é retirada da urna. Após ter sido identificada ela é recolocada na urna com outra bola da mesma cor. Desta forma, após a n-ésima retirada, a urna conterá $(n+2)$ bolas. X_k representará a proporção de bolas vermelhas na urna após a k-ésima retirada. O espaço Ω será o produto infinito do conjunto $\Omega_0 = \mathbf{Q} \cap [0,1]$. Desejamos provar que a seqüência $(X_k)_{k \geq 1}$ é um martingal. Ora, após a n-ésima etapa, a urna contém $(n+2)X_n$ bolas vermelhas e $(n+2)(1-X_n)$ bolas brancas. Portanto a probabilidade de retirarmos uma bola vermelha no $(n+1)$-ésima etapa é X_n e $(1-X_n)$ a probabilidade de retirarmos uma bola branca. No primeiro caso a proporção de bolas vermelhas após a $(n+1)$-ésima etapa é de $\{X_n(n+2)+1\}/(n+3)$ e $X_n(n+2)/(n+3)$ no segundo caso. Em conclusão,

$$
P[X_{n+1} = \frac{k}{n+3} \mid X_n = \frac{j}{n+2}] = \begin{cases} \frac{j}{n+2} & k = j+1, \quad 1 \le j \le n+1 \\ 1 - \frac{j}{n+2} & k = j \qquad 1 \le j \le n+1 \\ 0 & \text{casos contrários} \end{cases}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
&P[X_{n+1} = \frac{k}{n+3} \mid X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = \frac{j}{n+2}] \\
&= P[X_{n+1} = \frac{k}{n+3} \mid X_n = \frac{j}{n+2}],
\end{aligned}
$$

temos

$$
\begin{aligned}
E[X_{n+1} \mid X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = \frac{j}{n+2}] \\
&= E[X_{n+1} \mid X_n = \frac{j}{n+2}] \\
&= \frac{(j+1)}{n+3}\frac{j}{n+2} + \frac{j}{n+3}\left(1 - \frac{j}{n+2}\right) \\
&= \frac{j}{n+2}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$E[X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n] = X_n.$$

Por outro lado, $0 \leq X_n \leq 1$. Pela propriedade (E1) da esperança,

$$0 \leq E[|X_n|] \leq 1.$$

Logo $(X_n)_{n\geq 1}$ é um martingal.

Outros exemplos de martingais podem ser encontrados em [KT], [N].

Seja $(\tau_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência crescente de tempos de parada finitos quase certamente. Considere um martingal $(X_n)_{n\geq 1}$. Podemos interpretar X_n como a fortuna de um jogador no instante n de uma partida honesta. Como os tempos de parada τ_n não trazem nenhuma informação sobre o futuro, se a partir do jogo $(X_n)_{n\geq 1}$, considerarmos uma nova partida na qual o jogador só possa retirar-se nos instantes $(\tau_n)_{n\geq 1}$, esta nova partida deve também ser honesta. Portanto se considerarmos o processo $(Y_n)_{n\geq 1}$ definido como $Y_n(w) = X_{\tau_n(w)}(w)$, a esperança de Y_{n+1}, conhecido o passado $(\mathcal{F}_{\tau_n})$ até o instante anterior τ_n, deve ser igual a Y_n. Para formalizar este conceito devemos extender a noção de martingal.

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência crescente de σ-álgebras. Vimos no capítulo II que uma seqüência de v.a. $(Y_n)_{n\geq 1}$ é dita adaptada ao filtro $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ se cada variável Y_n for $\mathcal{G}_n$-mensurável. Com esta nomenclatura estabelecida, podemos apresentar a

DEFINIÇÃO 1.2: Uma seqüência de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ adaptada a um filtro $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ é um martingal (supermartingal) se para todo inteiro positivo n,

i) $E[|X_n|] < \infty$.

ii) $E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = (\leq) X_n$.

Definimos um submartingal como o fizemos após a definição 1.1.

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ um martingal (supermartingal) com respeito ao filtro $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$, onde $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Seja ν um tempo de parada e $\mathcal{G}_k$ a σ-álgebra $\mathcal{F}_{\nu\wedge k}$. $(\mathcal{G}_k)_{k\geq 1}$ é um filtro pelo Corolário da proposição II.1.3. Temos a seguinte

PROPOSIÇÃO 1.1. *Seja ν um tempo de parada finito quase certamente. A seqüência de v.a. $(X_{\nu\wedge k})_{k\geq 1}$ é um martingal (supermartingal) com respeito ao filtro $(\mathcal{F}_{\nu\wedge k})_{k\geq 1}$ se $(X_k)_{k\geq 1}$ for um martingal com respeito ao filtro $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Vimos no Lema 1 do capítulo II que a variável $X_{\nu\wedge k}$ é $\mathcal{F}_{\nu\wedge k}$-mensurável. Portanto a seqüência $(X_{\nu\wedge k})_{k\geq 1}$ é adaptada ao filtro $(\mathcal{F}_{\nu\wedge k})_{k\geq 1}$.

A condição i) da Definição 1.2 se verifica sem dificuldades para seqüência estocástica $(X_{\nu\wedge n})_{n\geq 1}$:

$$E[|X_{\nu\wedge k}|] = E\Big[\sum_{j=1}^{k-1} 1_{\{\nu=j\}}|X_j| + 1_{\{\nu\geq k\}}|X_k|\Big]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} E|X_j| < \infty.$$

Finalmente, resta a conferir a condição ii). Ora, vimos no capítulo II que no conjunto $\{\nu = j\}$,

$$E[X_{(k+1)\wedge\nu} \mid \mathcal{F}_{k\wedge\nu}] = E[X_{(k+1)\wedge\nu} \mid \mathcal{F}_{k\wedge j}].$$

Port-

$$E[X_{(k+1)\wedge\nu} \mid \mathcal{F}_{k\wedge\nu}] = \sum_{j\geq 1} 1_{\{\nu=j\}} E[X_{(k+1)\wedge\nu} \mid \mathcal{F}_{k\wedge j}]$$

$$= \sum_{j=1}^{k} 1_{\{\nu=j\}} E[X_{(k+1)\wedge\nu} \mid \mathcal{F}_j] + 1_{\{\nu>k\}} E[X_{(k+1)\wedge\nu} \mid \mathcal{F}_k].$$

Ora, sabemos pela definição de tempo de parada que $\{\nu = j\}$ e $\{\nu > j\}$ pertencem a σ-álgebra $\mathcal{F}_j$ para todo inteiro j. Portanto, pela propriedade (EC4) da esperança condicional, a última expressão é igual a

$$\sum_{j=1}^{k} E[1_{\{\nu=j\}} X_{(k+1)\wedge\nu} \mid \mathcal{F}_j] + E[1_{\{\nu>k\}} X_{(k+1)\wedge\nu} \mid \mathcal{F}_k]$$

$$= \sum_{j=1}^{k} E[1_{\{\nu=j\}} X_j \mid \mathcal{F}_j] + E[1_{\{\nu>k\}} X_{(k+1)} \mid \mathcal{F}_k]$$

$$= \sum_{j=1}^{k} 1_{\{\nu=j\}} E[X_j \mid \mathcal{F}_j] + 1_{\{\nu>k\}} E[X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k].$$

Como a seqüência $(X_j)_{j\geq 1}$ de v.a. é adaptada ao filtro $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$, X_j é $\mathcal{F}_j$-mensurável. Portanto pela propriedade (EC6) da esperança condicional e utilizando a hipótese sobre a seqüência $(X_k)_{k\geq 1}$, a última expressão é igual (menor ou igual) a

$$\sum_{j=0}^{k} 1_{\{\nu=j\}} X_j + 1_{\{\nu>k\}} X_k = X_{k\wedge\nu}.$$

□

Finalmente, vamos demonstrar o teorema enunciado pouco antes da Definição 1.2:

TEOREMA 1.1. *Sejam $\nu \leq \tau$ dois tempos de parada finitos quase certamente e seja $(X_n)_{n\geq 1}$ um martingal (supermartingal) com respeito a um filtro $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ tal que $\sup_n E|X_n| < \infty$. Então:*

$$E[X_\tau \mid \mathcal{F}_\nu] = (\leq) X_\nu.$$

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição II.1.4,

$$\begin{aligned} E[X_\tau \mid \mathcal{F}_\nu] &= \sum_{j\geq 0} 1_{\{\nu=j\}} E[X_\tau \mid \mathcal{F}_j] \\ &= \sum_{j\geq 0} 1_{\{\nu=j\}} 1_{\{\tau\geq j\}} E[X_\tau \mid \mathcal{F}_j], \end{aligned} \tag{1.1}$$

pois $\tau \geq \nu$.

Vimos na proposição anterior que $X_{\tau\wedge k}$ é um martingal (supermartingal) com respeito ao filtro $(\mathcal{F}_{\tau\wedge k})_{k\geq 0}$. Logo para todo inteiro n,

$$E[X_{\tau\wedge n} \mid \mathcal{F}_{\tau\wedge m}] = (\leq) X_{\tau\wedge m} \quad \text{se} \quad m \leq n.$$

Portanto, no conjunto $\{\tau \geq m\}$,

$$E[X_{\tau\wedge n} \mid \mathcal{F}_m] = (\leq) X_m.$$

Como τ é um tempo de parada quase certamente finito, para quase todo $w \in \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} X_{\tau(w)\wedge n}(w) = X_{\tau(w)}(w).$$

Como $\sup\limits_n E[|X_n|] < \infty$, podemos justificar rigorosamente a troca da ordem do limite com a esperança:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E[X_{\tau\wedge n} \mid \mathcal{F}_m] &= E[\lim_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n} \mid \mathcal{F}_m] \\ &= E[X_\tau \mid \mathcal{F}_m]. \end{aligned}$$

Portanto, no conjunto $\{\tau \geq m\}$,

$$E[X_\tau \mid \mathcal{F}_m] = (\leq) X_m.$$

De (1.1) obtemos

$$\begin{aligned} E[X_\tau \mid \mathcal{F}_\nu] &= (\leq) \sum_{j\geq 0} 1_{\{\nu=j\}} 1_{\{\tau\geq j\}} X_j \\ &= \sum_{j\geq 0} 1_{\{\nu=j\}} X_j = X_\nu. \end{aligned}$$

□

COROLÁRIO. *Seja* $(X_n)_{n\geq 1}$ *um martingal (supermartingal) com respeito a um filtro* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ *tal que* $\sup_n E|X_n| < \infty$. *Seja* $(\tau_n)_{n\geq 1}$ *uma seqüência crescente de tempos de parada quase certamente finitos. Então o processo estocástico* $(X_{\tau_n})_{n\geq 1}$ *é um martingal com respeito ao filtro* $(\mathcal{F}_{\tau_n})_{n\geq 1}$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema resta provar que X_{τ_n} é integrável para todo $n \in \mathbb{N}$. A demonstração deste resultado está acima do escopo deste livro e será omitida. O leitor poderá encontrar uma prova no corolário IV.5.25 de [N1]. □

§2. Aplicação: O golpe do baú

Introduzimos no início deste capítulo a seguinte notação. Y_j representa o dote da j-ésima pretendente e c a quantia gasta semanalmente para freqüentar a grande burguesia carioca. Supomos as variáveis Y_j independentes e identicamente distribuidas. Vamos, para simplificar nosso estudo admitir que as variáveis aleatórias Y_k sejam limitadas e discretas:

$$P[\alpha \leq Y_1 \leq \beta] = 1$$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} P[Y_1 = y_j] = 1.$$

Desejamos encontrar um tempo de parada ν quase certamente finito que maximize a esperança de ganho do rapaz. Formalmente, lembrando que no início do capítulo representamos por

$$Z_n = \max_{1\leq j\leq n} Y_j - cn = M_n - cn$$

o lucro do cidadão após a n-ésima semana, desejamos encontrar um tempo de parada ν quase certamente finito para o qual

$$E[Z_\nu] = \sup_\tau E[Z_\tau]$$

onde consideramos o supremo no conjunto dos tempos de parada quase certamente finitos.

Seguiremos a solução apresentada por Neveu em [N1].

Devemos analisar como se comporta a esperança de Z_{n+1} conhecendo-se o passado até o instante n. Se a esperança condicional de Z_{n+1} dado $Y_1, \ldots, Y_n$ for maior ou igual a Z_n, o rapaz deve continuar, pelo menos por mais uma semana, a procurar uma esposa pois em média, ao final de uma nova etapa, ele terá mais dinheiro que antes deste novo período. Se, ao contrário, a esperança condicional de Z_{n+1} dado $Y_1, \ldots, Y_n$ for menor que Z_n, o rapaz deve casar-se com aquela das pretendentes já conhecidas melhor dotada.

Podemos calcular

$$(2.1) \qquad E[Z_{n+1} \mid Y_1, \ldots, Y_n] = E[M_{n+1} \mid Y_1, \ldots, Y_n] - c(n+1)$$

como

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \max_{1 \le j \le n} Y_j \\ &= \max\{M_n, Y_{n+1}\} \\ &= M_n + (Y_{n+1} - M_n)^+, \end{aligned}$$

$$(2.2) \qquad E[M_{n+1} \mid Y_1, \ldots, Y_n] = M_n + E[(Y_{n+1} - M_n)^+ \mid Y_1, \ldots, Y_n].$$

Como Y_{n+1} é independente de $Y_1, \ldots, Y_n$ e M_n é uma função de $Y_1, \ldots, Y_n$, pelas propriedades (EC3) e (EC6) da esperança condicional,

$$(2.3) \qquad E[(Y_{n+1} - M_n)^+ \mid Y_1, \ldots, Y_n] = f(M_n),$$

onde para $a \in \mathbf{R}$,

$$(2.4) \qquad f(a) = E[(Y_1 - a)^+].$$

Logo, de (2.1), (2.2) e (2.3), obtemos

$$(2.5) \qquad E[Z_{n+1} \mid Y_1, \ldots, Y_n] = Z_n + f(M_n) - c.$$

Devemos portanto analisar o comportamento da seqüência aleatória $f(M_n)$.

A função $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definida em (2.4) é decrescente, contínua e positiva. f é positiva pois a v.a. $(Y_1 - a)^+$ é positiva e pela propriedade (E1), a esperança de uma v.a. positiva é positiva. Como para $a < b$, $(x-b)^+ \leq (x-a)^+$ para todo $x \in \mathbf{R}$, $(Y_1 - b)^+ \leq (Y_1 - a)^+$. Logo pela propriedade (E1), $f(b) = E[(Y_1-b)^+] \leq E[(Y_1-a)^+] = f(a)$. Finalmente, sejam $a_o \in \mathbf{R}$ e $\varepsilon > 0$. Se $|a - a_o| < \varepsilon$ então $|(x-a)^+ - (x-a_o)^+| < \varepsilon$ para todo real x. Logo $|(Y_1(w) - a)^+ - (Y_1(w) - a_o)^+| < \varepsilon$ para todo $w \in \Omega$. Portanto pelas propriedades (E1) e (E3),

$$\begin{aligned} |f(a) - f(a_o)| &= |E[(Y_1 - a)^+] - E[(Y_1 - a_o)^+]| \\ &\leq E[|(Y_1 - a)^+ - (Y_1 - a_o)^+|] \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo f é contínua.

A seqüência M_n é evidentemente crescente. Vamos provar que em um conjunto $\Omega^* \subseteq \Omega$ de probabilidade 1, $M_n \uparrow y_\infty$ onde y_∞ é a cota superior do conjunto $\{y_j\}$. Como admitimos o conjunto $\{y_j\}$ limitado, a cota superior y_∞ é finita. Desejamos provar que para todo $N \in \mathbf{N}$, existe um índice n_o a partir do qual $|M_n - y_\infty|$ é menor ou igual a $\frac{1}{N}$. Em notação de conjuntos, desejamos provar que o conjunto

$$\Omega^* = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n_o \geq 1} \bigcap_{n \geq n_o} \{|M_n - y_\infty| < \frac{1}{N}\}$$

tem probabilidade 1. Basta provar que o complementar deste conjunto $(\bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n_o \geq 1} \bigcup_{n \geq n_o} \{|M_n - y_\infty| \geq \frac{1}{N}\})$ tem probabilidade zero. Ora, como os conjuntos $A_N = \bigcap_{n_o \geq 1} \bigcup_{n \geq n_o} \{|M_n - y_\infty| \geq \frac{1}{N}\}$ são crescentes, pela propriedade (I.1.9),

$$\begin{aligned} &P[\bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n_o \geq 1} \bigcup_{n \geq n_o} |M_n - y_\infty| \geq \frac{1}{N}] \\ &\qquad = \lim_{N \to \infty} P[\bigcap_{n_o \geq 1} \bigcup_{n \geq n_o} |M_n - y_\infty| \geq \frac{1}{N}]. \end{aligned}$$

Destarte, para provar que $P[\Omega^*] = 1$, basta mostrar que para cada inteiro N,

$$P[\bigcap_{n_o \geq 1} \bigcup_{n \geq n_o} |M_n - y_\infty| \geq \frac{1}{N}] = 0. \tag{2.6}$$

Ora, para todo inteiro estritamente positivo k,

$$\begin{aligned} P[\bigcap_{n_o \geq 1} \bigcup_{n \geq n_o} |M_n - y_\infty| \geq \frac{1}{N}] &\leq P[\bigcup_{n \geq k} |M_n - y_\infty| \geq \frac{1}{N}] \\ &\leq \sum_{n \geq k} P[|M_n - y_\infty| \geq \frac{1}{N}], \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde utilizamos a propriedade (I.1.10) para obter a última desigualdade.

Mas,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq k} P[|M_n - y_\infty| \geq \frac{1}{N}] \leq \sum_{n \geq k} P[M_n \geq y_\infty + \frac{1}{N}] \\ + \sum_{n \geq k} P[M_n \leq y_\infty - \frac{1}{N}]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Como $\max_{1 \leq j \leq n} Y_j \geq y_\infty + \frac{1}{N}$ se e somente se existe algum Y_j com $Y_j \geq y_\infty + \frac{1}{N}$, $P[M_n \geq y_\infty + \frac{1}{N}] = P[\bigcup_{i=1}^{n} \{Y_i \geq y_\infty + \frac{1}{N}\}] \leq \sum_{i=1}^{n} P[Y_i \geq y_\infty + \frac{1}{N}]$. Como a seqüência $(Y_j)_{j \geq 1}$ é identicamente distribuida,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} P[Y_i \geq y_\infty + \frac{1}{N}] &= n\, P[Y_1 \geq y_\infty + \frac{1}{N}] \\ &= n \sum_{j, y_j \geq y_\infty + \frac{1}{N}} P[Y_1 = y_j] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

pois y_∞ é a cota superior do conjunto $\{y_j \ j \geq 1\}$.

Por outro lado, $\max_{1\leq j\leq n} Y_j \leq y_\infty - \frac{1}{N}$ se e somente se $Y_j \leq y_\infty - \frac{1}{N}$ para $1 \leq j \leq n$. Como as v.a. (Y_j) são, por hipótese, independentes e identicamente distribuidas,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq k} P[M_n \leq y_\infty - \frac{1}{N}] &= \sum_{n\geq k} P[\bigcap_{j=1}^{n}\{Y_j \leq y_\infty - \frac{1}{N}\}] \\ &= \sum_{n\geq k}\left(P[Y_1 \leq y_\infty - \frac{1}{N}]\right)^n .\end{aligned} \tag{2.10}$$

Seja

$$\begin{aligned}P_N &= P[Y_1 \leq y_\infty - \frac{1}{N}] \\ &= \sum_{j,y_j \leq y_\infty = \frac{1}{N}} P[Y_1 = y_j].\end{aligned}$$

Para todo inteiro N, $P_N < 1$. De fato, como y_∞ é a cota superior do conjunto $\{y_j \; j \geq 1\}$, existe ao menos um índice j_o, para o qual $y_\infty - \frac{1}{N} < y_{j_o} \leq y_\infty$. Portanto $P_N \leq 1 - P[Y_1 = y_{j_o}] < 1$. Logo de (2.10) temos

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq k} P[M_n \leq y_\infty - \frac{1}{N}] &= \sum_{n\geq k} P_N^n \\ &= \frac{P_N^k}{(1-P_N)} .\end{aligned} \tag{2.11}$$

Juntando (2.7), (2.8), (2.9) e (2.11), temos para todo inteiro k,

$$P[\bigcap_{n_o}\bigcup_{n\geq n_o} |M_n - y_\infty| \geq \frac{1}{N}] \leq \frac{P_N^k}{1-P_N}.$$

Fazendo $k \uparrow \infty$, provamos (2.6).

Portanto, para todo w em Ω^*, $M_n(w) \to y_\infty$. Mostramos que o conjunto Ω^* tem probabilidade 1. Na terminologia do capítulo I, provamos que M_n converge para y_∞

quase certamente. Como a função f é contínua, $f(M_n)$ converge para $f(y_\infty)$ quase certamente. Seja ν o tempo de parada definido como

$$\nu = \inf\{n \, f(M_n) \leq c\}.$$

Não é difícil verificar que ν é um tempo de parada no sentido da Definição II.1.3 (veja exemplo II.1.4).

Como $f(y_\infty) = 0 < c$, $\nu(w) < \infty$ para w em Ω^*. Portanto ν é um tempo de parada finito quase certamente. Por outro lado, de (2.5) temos

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1} \mid Y_1, \dots, Y_n] &\geq Z_n \quad \text{para} \quad n \leq \nu \\ &\leq Z_n \quad \text{para} \quad n > \nu. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Vamos provar que ν maximiza $E[Z_\tau]$.

Consideremos a seqüência $(Z_{n\wedge\nu})$. Esta seqüência tem a propriedade

$$Z_{n\wedge\nu} \leq E[Z_{(n+1)\wedge\nu} \mid Y_1, \dots, Y_n] \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

De fato,

$$\begin{aligned} & E[Z_{(n+1)\wedge\nu} \mid Y_1, \dots, Y_n] \\ &= E\left[\sum_{j=1}^{n} 1_{\{\nu=j\}} Z_j \mid Y_1, \dots, Y_n\right] + E\left[1_{\{\nu>n\}} Z_{n+1} \mid Y_1, \dots, Y_n\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} 1_{\{\nu=j\}} Z_j + 1_{\{\nu>n\}} E[Z_{n+1} \mid Y_1, \dots, Y_n] \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} 1_{\{\nu=j\}} Z_j + 1_{\{\nu>n\}} Z_n \\ &= Z_{n\wedge\nu}. \end{aligned}$$

onde utilizamos (2.12) para obter a desigualdade.

Por outro lado, existe uma constante $K < \infty$:

$$\sup_n E[|Z_{n\wedge\nu}|] \leq K. \tag{2.14}$$

De fato,

$$\begin{aligned} E[|Z_{n\wedge\nu}|] &\leq E[M_{n\wedge\nu}] + c\,E[n \wedge \nu] \\ &\leq y_\infty + c\,E[\nu]. \end{aligned}$$

Ora

$$E[\nu] = \sum_{k\geq 1} P[\nu \geq k],$$

pela propriedade (I.3.2).

Como $\{\nu \geq k\} = \{f(M_{k-1}) > c\} = \{M_{k-1} < f^{-1}(c)\}$

$$\begin{aligned} E[\nu] &= \sum_{k\geq 1} P[M_{k-1} < f^{-1}(c)] \\ &= \sum_{k\geq 1} \left(P[Y_1 < f^{-1}(c)]\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Como $c > 0 = f(y_\infty)$, com os mesmos argumentos utilizados para provar que $P_N < 1$, pode-se mostrar que $P[Y_1 < f^{-1}(c)] < 1$. Logo

$$E[\nu] = \frac{1}{1 - P[Y_1 < f^{-1}(c)]} < \infty.$$

Por (2.13) e (2.14), obtemos que o processo $(Z_{n\wedge\nu})_{n\geq 1}$ é um submartingal com respeito ao filtro $\mathcal{F}_{n\wedge\nu}$. Ademais $(Z_{n\wedge\nu})_{n\geq 1}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 1.1 deste capítulo.

Vamos agora provar que o processo $(Z_{n+\nu})_{n\geq 1}$ é um supermartingal com respeito ao filtro $(\mathcal{F}_{n+\nu})_{n\geq 1}$.

Primeiramente verifiquemos a condição i) da Definição 1.2 da seção anterior. Repetindo os argumentos usados para provar (2.14), obtemos

$$E[|Z_{\nu+n}|] < K_n < \infty \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Por outro lado, pela Proposição II.1.4 e (EC4),

$$\begin{aligned}
E[Z_{(n+1)+\nu} \mid \mathcal{F}_{n+\nu}] &= \sum_{k\geq 0} 1_{\{\nu=k\}} E[Z_{(n+1)+\nu} \mid \mathcal{F}_{n+k}] \\
&= \sum_{k\geq 0} E[1_{\{\nu=k\}} Z_{n+1+k} \mid \mathcal{F}_{n+k}] \\
&= \sum_{k\geq 0} 1_{\{\nu=k\}} E[Z_{n+1+k} \mid Y_1, \dots, Y_{n+k}] \\
&\leq \sum_{k\geq 0} 1_{\{\nu=k\}} Z_{n+k} \\
&= Z_{n+\nu},
\end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade (2.12) na quarta etapa do desenvolvimento acima.

Seja τ um tempo de parada finito quase certamente. Como $(Z_{n+\nu})_{n\geq 0}$ é um supermartingal com respeito ao filtro $(\mathcal{F}_{n+\nu})_{n\geq 0}$, pela Proposição 1.1 da seção anterior, $(Z_{(n+\nu)\wedge\tau})_{n\geq 0}$ é um supermartingal com respeito ao filtro $(\mathcal{F}_{(n+\nu)\wedge\tau})_{n\geq 0}$. Portanto,

$$E[Z_{(n+\nu)\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] \leq Z_{\nu\wedge\tau}. \tag{2.15}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} E[Z_{(n+\nu)\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] \\
&= \lim_{n\to\infty} E[M_{(n+\nu)\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] - c \lim_{n\to\infty} E[(n+\nu)\wedge\tau \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}].
\end{aligned}$$

Como para todo n, $M_{(n+\nu)\wedge\tau}$ é limitado e como $(n+\nu)\wedge\tau \uparrow \tau$ quando $n \uparrow \infty$, pelos Teoremas I.3.1 e I.3.2 de convergência do capítulo I

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E[M_{(n+\nu)\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] &= E[\lim_{n\to\infty} M_{(n+\nu)\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] \\
&= E[M_\tau \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}]
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} E[(n+\nu)\wedge\tau \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] = E[\tau \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}].$$

Mas sendo M_τ limitado,

$$\begin{aligned} &E[M_\tau \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] - c\,E[\tau \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] \\ &= E[M_\tau - c\tau \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] \\ &= E[Z_\tau \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}]. \end{aligned}$$

Demonstramos que

$$\lim_{n\to\infty} E[Z_{(n+\nu)\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] = E[Z_\tau \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}].$$

Assim, passando ao limite em (2.15), temos:

$$E[Z_\tau \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] \le Z_{\nu\wedge\tau}. \tag{2.16}$$

Reunimos a esta altura todos os elementos para provar que ν realiza o supremo. Seja τ um tempo de parada quase certamente finito

$$E[Z_\tau] = E[Z_\tau 1_{\tau\le\nu}] + E[Z_\tau 1_{\tau>\nu}]. \tag{2.17}$$

Como $(Z_{n\wedge\nu})$ é um submartingal satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.1 e $\tau\wedge\nu$ um tempo de parada menor ou igual a ν, pelo Teorema 1.1,

$$E[Z_{\nu\wedge\nu} \mid \mathcal{F}_{(\nu\wedge\tau)\wedge\nu}] \ge Z_{(\tau\wedge\nu)\wedge\nu},$$

ou

$$E[Z_\nu \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] \ge Z_{\tau\wedge\nu}.$$

Portanto, o primeiro termo à direita da igualdade em (2.17) pode ser desenvolvido como:

$$\begin{aligned} E[Z_\tau 1_{\tau\le\nu}] &= E[Z_{\tau\wedge\nu} 1_{\tau\le\nu}] \\ &\le E[E[Z_\nu \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] 1_{\tau\le\nu}] \\ &= E[E[Z_\nu 1_{\tau\le\nu} \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}]] \\ &= E[Z_\nu 1_{\tau\le\nu}], \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde obtivemos a penúltima igualdade pela propriedade (EC4) uma vez que o evento $\{\tau \le \nu\}$ pertence a σ-álgebra $\mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}$ e a última igualdade pela propriedade (EC1).

Por outro lado, o segundo termo à direita da igualdade em (2.17) pode ser calculado como:

$$
\begin{aligned}
E[Z_\tau 1_{\{\tau>\nu\}}] &= E[E[Z_\tau \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}]1_{\{\tau>\nu\}}] \\
&\le E[Z_\nu 1_{\{\tau>\nu\}}].
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

onde a igualdade foi obtida usando as propriedades (EC1) e (EC4) e a desigualdade usando (2.16). Reunindo (2.17), (2.18) e (2.19) provamos

$$E[Z_\tau] \le E[Z_\nu].$$

Logo

$$E[Z_\nu] = \sup_{\tau\in T} E[Z_\tau],$$

onde T representa o conjunto dos tempos de parada quase certamente finitos.

Exercícios

1. Com a notação do Capítulo V, prove que $(\frac{Z_n}{m^n})_{n\ge1}$ é um martingal.

BIBLIOGRAFIA

[AN] Athreya, K.B., Ney, P.E., Branching Processes, Springer-Verlag 1972.

[Ç] Çinlar, E., Introduction to Stochastic Processes, Prentice Hall 1975.

[Ch] Chung, K.L., A course in probability theory, second edition, Academic Press, 1974.

[CT] Chow, Y.S., Teicher, H., Probability Theory, Springer-Verlag 1978

[DY] Dynkin, E.B., Yushkevich, A.A., Markov Processes, Plenum Press 1969

[F] Freeman P. R., The secretary problem and its extensions: a review, Int. Stat. Rev. **51** 189-206 1983

[G] Galton F., Problem 4001 Educational Times **1** April 17, 1873

[J] James, B.R., Probabilidade: um curso em nível intermediário, Projeto Euclides 1981

[KT] Karlin, S., Taylor, H.M., A first course in stochastic processes, Academic Press 1981

[N1] Neveu, J., Martingales a temps discret, Masson, 1972

[N2] Neveu, J., Arbres et processus de Galton-Watson Ann. Inst. H. P. **22** 199-208, 1986

[R] Revuz, D., Markov Chains, North Holland 1975

[W] Watson H. W., Solution to problem 4001 Educational Times **1** August 115-116, 1873

[WG] Watson H. W., Galton F., On the probability of the extinction of families, J. Anthropol. Inst. Great B. and Ireland 4 138-146 1874

Impresso na Gráfica do
impa
pelo Sistema Xerox/1065