DESENVOLVIMENTO ASSINTÓTICO E INTRODUÇÂO AO CÁLCULO DIFERENCIAL RESURGENTE

Julio Cesar Canille Martins

ISBN

85-244-0044-7

CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Estrada Dona Castorina, 110

22.460 — Rio de Janeiro — RJ

PREFÁCIO

Este texto que serve de base para o curso de mesmo nome do 17ºColóquio Brasileiro de Matemática (IMPA, julho/89) é uma tentativa de reunir resultados desenvolvidos ao longo dos últimos 100 anos e que têm como preocupação central explicar o significado das séries divergentes, que são soluções formais de uma classe de Sistemas Dinâmicos Holomorfos (= equações diferenciais e difeomorfismos ressonantes).

Estes resultados (que estão difusos na literatura especializada ou em fase de elaboração e reformulação) compõem uma bela, importante e viva teoria matemática, que contém do clássico, do moderno e abre um leque de perspectivas futuras.

Quanto ao texto, não existe aí nenhuma contribuição original do autor e a versão apresentada é (propositadamente) ingênua e superficial. Contudo espera ter a virtude de exorcisar alguns fantasmas sobre o assunto e encorajar o leitor mais crítico a consultar e discutir os trabalhos originais.

Antes de abordar o conteúdo do texto, gostaria de declarar a forte influência dos ensinamentos dos professores Jean Martinet e Jean Pierre Ramis da Universidade Louis Pasteur (Estrasborgo, França) onde comecei a estudar os trabalhos de Ecalle sobre as Funções Resurgentes em 1987. Seus manuscritos sobre o assunto me serviram de base, assim como os trabalhos de Malgrange e Pham; e em diversas partes o melhor que pude foi apenas traduzir (as vezes colocando hipóteses simplificadoras) partes destes trabalhos. Esta declaração tem a pretensão de merecer as desculpas pelo plágio. O texto deixa de lado as teorias gerais (de somabilidade e resurgência) bem como a Análise subjacente ao Cálculo Resurgente mais elementar e tudo o que segue a respeito é então somente uma primeira aproximação ao assunto através de dois exemplos que, com otimismo, contém as idéias centrais a serem abstraídas.

Dito isto, agradecemos à Comissão Organizadora do 17ºColóquio pela oportunidade em especial ao prof. Yves Lequain (coordenador) pelo interesse.

Agradeço aos professores Marcio Soares e Mario Jorge Carneiro da UFMG e a Sergio Rodrigues da UFSCAR, onde pude expor partes do texto, o que contribuiu para o meu melhor entendimento do assunto.

Agradeço fortemente ao grupo Holomorfo do IMPA, Cesar Camacho, Paulo Sad e Alcides Lins Neto, pelas inúmeras discussões a respeito dos Sistemas Dinâmicos Holomorfos.

Aos colegas do Departamento de Matemática do IBLCE-UNESP, pela paciência e compreensão por tantos períodos de afastamento.

À UNESP E AO CNPq. pelo suporte financeiro.

À Cátia Susane de A. Trindade, meus agradecimentos pelo excelente trabalho de datilografia.

SJR.Preto, 17 de março de 1989.

INDICE

INTRODUÇÃO

De Borel a Ecalle ... não precisamos mais temer as séries divergentes.

O objetivo do texto é introduzir a Teoria das Funções Ressurgentes e o Cálculo Diferencial associado (ou derivada de Ecalle) que chamaremos Cálculo Ressurgente, aplicando-o a alguns problemas típicos ilustrativos da teoria geral.

O cálculo ressurgente é uma teoria recente desenvolvida pelo matemático frances Jean Ecalle (Universidade de Paris-Sul, Orsay, França) nos últimos 15 anos e que traz avanços decisivos para a compreensão do significado das séries divergentes que nascem de Sistemas Dinâmicos Analíticos ressonantes.

O estudo de tais séries divergentes remonta aos trabalhos de Poincaré e Borel no final do século passado e a Teoria das funções ressurgentes é o passo além que permite a completa compreensão do seu significado.

A classe de objetos aos quais podemos aplicar o Cálculo Ressurgente é grande e contém exemplos importantes tais como os problemas de classificação dos difeomorfismos holomorfos tangentes à identidade de $\mathbf{C}^n$ e as equações diferenciais ordinárias com ponto singular irregular ou os campos de vetores holomorfos com ressonância.

Para atingirmos o conceito de função ressurgente e introduzirmos o Cálculo Diferencial Ressurgente alguns passos preliminares são necessários.

Sendo assim, no Capítulo I revisitamos a Teoria de Desenvolvimento Assintótico. Em seguida analisamos a questão da unicidade da realização em presença de estimativas Gevrey (séries somáveis) e abordamos o teorema de unicidade de Carleman (funções quase-analíticas).

O método eficiente para a somabilidade das séries consideradas é o método de Borel. Estudamos então no Capítulo II a transformada de Borel e sua inversa natural a transformada de Laplace, obtemos assim a soma de Borel de uma série divergente.

Neste ponto, a boa compreensão desse esquema nos leva à teoria de Normalização Setorial (ilustrada nos capítulos seguintes para alguns exemplos).

A teoria de Normalização Setorial nos dá a "geometria setorial" do objeto em estudo.

De posse desses pré-requisitos (na maioria conceitos clássicos, veja [1],[2], [3]) passamos à parte moderna introduzida pelo conceito de resurgência (Capítulo III).

A resurgência explora ao máximo as propriedades do prolongamento analítico da transformada de Borel.

Introduzimos ainda no Capítulo III os aspectos mais elementares do Cálculo Diferencial Ressurgente (Derivada de Ecalle). Nossa posição nesse ponto se compara com os livros de Cálculo I, onde as demonstrações são deixadas para a Análise. Nos limitamos a enunciar e ilustrar as fórmulas do Cálculo Ressurgente que utilizaremos no Capítulo IV.

No Capítulo IV ilustramos a utilidade do Cálculo Diferencial Ressurgente em problemas de classificação Analítica.

Calculamos os invariantes analíticos dos seguintes objetos.

(1) Germes de Difeomorfismos Holomorfos tangentes à identidade de $\mathbf{C}$

(2) Campos de Vetores de $\mathbf{C}^2, 0$ tipo sela-nó e sela ressonante.

Finalizando, gostaria de dizer que diversas outras aplicações da Teoria de Funções Ressurgentes tem sido descobertas recentemente assim como relações interessantes entre o Cálculo Resurgente e a Teoria de Galois Diferenciável. (Tema de pesquisa atualmente).

CAPÍTULO I

DESENVOLVIMENTO ASSINTÓTICO

§I.1) A Teoria Clássica

A teoria de desenvolvimento assintótica clássica é no essencial devido á Poincaré e nasce com a preocupação dos matemáticos da época com as truncagens feitas pelos astrônomos nas séries divergentes com que se deparavam.

Definição 1: Seja $f\colon]0,a[\to \mathbf{C}$. Dizemos que f é assintótica à série formal $\hat{f} = \sum a_n x^n \in \mathbf{C}[[x]]$ em 0, se:
Para todo $n \in \mathbf{N}$, $\exists A_n > 0$ tal que:

$$\left| f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r \right| \leq A_n x^n. .$$

Notação: $f \xrightarrow[x\to 0]{\sim} \hat{f}$, $Jf = \hat{f}$.

Proposição 1. *São equivalentes:*

(a) $f \xrightarrow[x\to 0]{\sim} \hat{f}$

(b) $f(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r + a_n x^n + x^n \varepsilon_n(x)$ com $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_n(x) = 0$.

(c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r}{x^n} \right) = a_n$.

Antes da demonstração, vejamos algumas conseqüências imediatas mas fundamentais:

Corolário 1. *Se f é assintótica à $\hat{f}$ para $x \to 0$ então f é localmente limitada em 0 e* $\lim_{x\to 0} f(x) = a_0$.

Corolário 2. *Para todo n, $|a_n| \leq A_n$. De fato: Pelo item (b) da prop. 1 podemos escrever $f(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r + x^n a_n + x^n \varepsilon_n(x)$ com* $\lim_{x\to 0} \varepsilon_n(x) = 0$. *Então:* $|x^n(a_n + \varepsilon_n(x))| = \left|f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r\right| \leq A_n x^n \Rightarrow |a_n + \varepsilon_n(x)| \leq A_n$ *e passando ao limite quando $x \to 0$, temos* $|a_n| \leq A_n$.

Notação: As constantes A_n são chamadas constantes de assintoticidade.

Corolário 3. *Toda função tem no máximo uma série assintótica. De fato: Suponha $Jf = \hat{f}$ e $Jf = \hat{g}$ com $\hat{f} = \sum a_r x^r$; $\hat{f} = \sum b_r x^r$. Então novamente usando o item (b) da prop.1, temos:*

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r + a_n x^n + x^n \varepsilon_n(x)$$

e

$$g(x) = \sum_{r=0}^{n-1} b_r x^r + b_n x^n + x^n \delta_n(x), \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_n(x) = \lim_{x\to 0} \delta_n(x) = 0.$$

Logo

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n = x^n(\varepsilon_n(x) - \delta_n(x))$$

e passando ao limite obtemos $a_0 = b_0, \cdots, a_n = b_n, \cdots$. Vejamos agora a prova da proposição 1.

Prova da Proposição 1:

$\underline{(a) \Rightarrow (b)}$:

$$f \xrightarrow{\sim} \hat{f} \Rightarrow \quad \forall_n, \exists A_n > 0 | \left| f(x) - \sum_{r=0}^{n} a_r x^r \right| \leq A_{n+1} x^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x) - \sum_{r=0}^{n} a_r x^r|}{x^n} \leq A_{n+1} x \Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x) - \sum_0^n a_r x^r}{x^n} \right) = 0.$$

Seja

$$\varepsilon_n(x) = \frac{f(x) - \sum_0^n a_r x^r}{x^n}.$$

Logo

$$f(x) = \sum_0^{n-1} a_r x^r + a_n x^n + x^n \varepsilon_n(x) \text{ com } \lim_{x \to 0} \varepsilon_n(x) = 0.$$

$\underline{(b) \Rightarrow (c)}$: $f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r = a_n x^n + x^n \varepsilon_n(x) \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} \left(f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r \right) = \lim_{x \to 0} (a_n + \varepsilon_n(x)) = a_n$$

$\underline{(c) \Rightarrow (a)}$: Por hipótese, para cada n vale que

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x) - \sum_0^{n-1} a_r x^r}{x^n} \right) = a_n.$$

Seja

$$\varepsilon_n(x) = \frac{1}{x^n} \left(f(x) - \sum_0^{n-1} a_r x^r \right) - a_n$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_0^{n-1} a_r x^r + a_n x^n + x^n \varepsilon_n(x), \qquad \text{com } \lim_{x \to 0} \varepsilon_n(x) = 0.$$

$$\therefore \quad \left| f(x) - \sum_0^{n-1} a_r x^r \right| \leq |a_n + \varepsilon_n(x)| x^n.$$

Tomando $A_n \geq \max_x |a_n + \varepsilon_n(x)|$ temos o resultado.

Estamos interessados em funções definidas em domínios de $\mathbf{C}$, em geral estes domínios são setores abertos de vérice 0 (se a abertura do setor for superior a 2π subentende-se que o ambiente é $\mathbf{C}_\infty$ (superfície de Riemann do logaritmo)).

A definição (1) bem como as propriedades anteriores permanecem válidas neste contexto. Vamos explicitar:

Definição 2: Seja $f: V \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorfa onde V é um setor aberto com vértice em 0. Dada $\hat{f} = \sum a_n x^n \in \mathbf{C}[[x]]$ dizemos que f é assintótica à $\hat{f}$ em V se $\forall_n$, $\exists A_n$ tal que $\left| f(x) - \sum_0^{n-1} a_r x^r \right| \leq A_n |x|^n$ para $x \in V$ (e eventualmente $|x| < r$).

Exercício: Verifique neste caso a proposição 1.

A restrição a setores (ou a dominios mas com o ponto interessante no bordo) se explica pela proposição.

Proposição 2. *Se $f(x)$ é holomorfa no disco perfurado $D(0,r) - \{0\}$ e $f \xrightarrow{\sim} \hat{f} = \sum a_r x^r$ quando $x \to 0$. Então f é holomorfa em $D(0,r)$ e $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_r x^r$, isto é*

$$a_r = \frac{f^{(r)}(0)}{r!}.$$

Prova: Segue de $\lim_{x \to 0} f(x) = a_0$ e da unicidade da série assintótica.

Exercício: Mostre que $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\ x > 0$ admite $\hat{f} \equiv 0$ (série nula) por desenvolvimento assintótico em 0 no setor $\mathcal{S} = \{x \in \mathbf{C} | -\pi/2 < \arg x <$

$\pi/2, |x| < r\}$. O mesmo continua válido para um setor de comprimento $\geq \pi$?

Em vista da proposição 2, o problema de realização de séries divergentes como desenvolvimento assintótico de funções holomorfas tem sentido em setores (de $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}_\infty$).

Teorema 1. *(Borel-Rith): Dados* $\hat{f} = \sum a_r x^r \in \mathbf{C}[[x]]$ *e* $\mathcal{S}$*: setor, existe* $f(x)$ *holomorfa em* S *tal que* $Jf = \hat{f}$ *em* S *para* $x \to 0$.

Prova:

Suponha que $\mathcal{S}$ tem bissetriz $\mathbf{R}_+$ (pois se θ é a bissetriz de $\mathcal{S}$ e $Jf = \hat{f}$ em $\mathcal{S}$ então $f(xe^{-i\theta}) \xrightarrow{\sim} \sum a_r e^{i\theta r} x^r$ em $R_\theta(S)$ ($R_\theta(S) = \mathcal{S}$ rotacionado de angulo θ).

Fixemos $\mathcal{S}$: $-\gamma < \arg x < \gamma$ e $|x| < 1$. (veja figura 1)

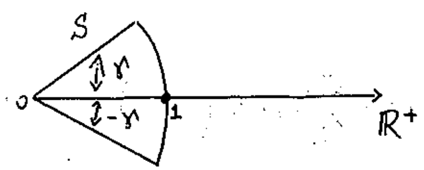


Figura 1

A idéia da prova é de substituir a série dada por $\sum_{r=0}^{\infty} a_r \alpha_r(x) x^r$ onde os "fatores de convergência $\alpha_r(x)$" são escolhidos de tal modo que a nova série é uniformemente convergente, mas têm as propriedades assintóticas da série original quando $s \to 0$. Uma função desse tipo é $\alpha_r(x) = 1 - \exp(-\frac{b_r}{x^\beta}), b_r > 0$ com $0 < \beta < 1$.

Exercício: $|1 - e^z| \leq |z|$ se $Re(z) < 0$.

Usando o exercício acima, temos:

$$a_r\alpha_r(x)x^r = a_r x^r(1 - e^{-\frac{b_r}{x^\beta}})$$

$$\Rightarrow |a_r\alpha_r(x)x^r| = |a_r x^r|\left|1 - e^{-\frac{b_r}{x^\beta}}\right| \le |a_r x^r|\left|\frac{b_r}{x^\beta}\right|$$

$$= |a_r|\,|b_r|\,|x|^{r-\beta} \text{ para } x \in S \text{ (pois } Re(-\frac{b_r}{x^\beta}) < 0$$

$$\text{para } \beta < \frac{\pi}{2\gamma})$$

Logo:

$$\sum_0^\infty a_r\alpha_r(x)x^r < \sum_{r=1}^\infty |x|^{r-\beta} \text{ , tomando} b_r = |a_r|^{-1}.$$

Isto mostra que $f(x) = \sum_0^\infty a_r\alpha_r(x)x^r$ é holomorfa em S.

Para finalizar, mostremos que $f \xrightarrow{\sim} \hat{f}$.

Temos:

$$\frac{f(x) - \sum_0^m a_r x^r}{x^m} = -\sum_{r=0}^m a_r \exp\left(-\frac{b_r}{x^\beta}\right) \cdot x^{-(m-r)} + \sum_{r=m+1}^\infty a_r\alpha_r(x)x^{r-m}.$$

O primeiro membro depois da igualdade, dominado pelo exponencial tende a zero quando $x \to 0$, $x \in S$.

Quanto ao segundo membro, temos:

$$\left|\sum_{r=m+1}^\infty a_r\alpha_r(x)x^{r-m}\right| \le \sum_{r=m+1}^\infty |x|^{r-\beta-m} < \frac{|x|^{1-\beta}}{1-|x|} \to 0, x \underset{(\beta<1)}{\to} 0.$$

$$\therefore \quad f(x) = \sum_0^m a_r x^r + x^m\varepsilon_m(x) \text{ com } \lim_{x\to} \varepsilon_m(x) = 0.$$

Vimos assim, que qualquer série formal $\hat{f}$ é o desenvolvimento assintótico de uma função holomorfa num setor S, também arbitrário.

Vejamos agora quais são as propriedades das funções holomorfas em setores que possuem desenvolvimento assintótico.

Existência de séries assintóticas:

Proposição 3. *Seja f holomorfa em $\mathcal{S}$. Suponha* $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in S}} f^{(r)}(x) = f_r$. *Então*

$$f(x) \xrightarrow{\sim} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_r}{r!} x^r.$$

Prova:

Dado $a \in \mathcal{S}$, por Taylor temos:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + R_m(x)$$

com

$$R_m(x) = \frac{1}{m!}\int_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t)dt$$

Passando ao limite quando $a \to 0$ temos:

$$f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots + \frac{f_m}{m!}x^m + \frac{1}{m!}\int_0^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t)dt.$$

Tomando $t = sx$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{m!}\int_0^x (x-t) f^{(m+1)}(t)dt &= \frac{1}{m!}\int_0^1 (x-sx)^m f^{(m+1}(sx)xds \\ &= \frac{x^{m+1}}{m!}\int_0^1 (1-s)^m f^{(m+1)}(sx)ds\end{aligned}$$

Então:

$$\left| f(x) - \sum_{0}^{m} \frac{f_r}{r!} x^r \right| \leq \frac{|x|^{m+1}}{m!} \sup_{x \in S} \left| f^{(m+1)}(x) \right| \int_0^1 (1-s)^m ds$$

$$= A_{m+1} |x|^{m+1} \text{ com}$$

$$A_{m+1} = \frac{\sup_{x\in S} \left| f^{(m+1)}(x) \right|}{m!} \cdot \int_0^1 (1-s)^m ds.$$

Proposição 4. *Seja f holomorfa em $\mathcal{S}: 0 < |x| < x_0$, $\theta_1 < \underset{\theta_2 > \theta_1}{\arg x} < \theta_2$.*

Suponha

$$f \xrightarrow{\sim} \sum a_r x^r \text{ em } \mathcal{S}.$$

Então

$$f'(x) \xrightarrow{\sim} \sum r a_r x^{r-1} \text{ em } \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$$

$$\mathcal{S}^*: \theta_1 < \theta_1^* \leq \arg x \leq \theta_2^* < \theta_2$$

Prova:

Escrevamos:

$$f(x) = \sum_{0}^{m} a_r x^r + x^m \varepsilon_m(x), \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in S}} \varepsilon_m(x) = 0.$$

Então:

$$\varepsilon_m(x) = (f(x) - \sum_{0}^{m} a_r x^r) \frac{1}{x^m} \text{ é holomorfa em } \mathcal{S} (0 \notin \mathcal{S})$$

Derivando f, temos:

$$f'(x) = \sum_{0}^{m} r a_r x^{r-1} + m x^{m-1} \varepsilon_m(x) + x^m \varepsilon_m'(x)$$

Seja $\alpha \in \mathbf{R}_+$, pequeno de tal modo que o círculo C_x de raio $\alpha|x|$ em torno de x esteja em $\mathcal{S}$, $\forall x \in \mathcal{S}^*$.

Seja $M_m(x) = \sup_{x \in C_x} |\varepsilon_m(x)|$. Como $\varepsilon_m(x)$ é holomorfo em C_x e no interior

$$|\varepsilon'_m(x)| \leq \frac{M_m(x)}{\alpha|x|}, \text{ pela fórmula de Cauchy}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{r=0}^{m} r a_r x^{r-1} \right| &= \left| m x^{m-1} \varepsilon_m(x) + x^m \varepsilon'_m(x) \right| \\
&\leq |x|^{m-1} \left(m |\varepsilon_m(x)| + \frac{M_m(x)}{\alpha} \right) \\
&= |x|^{m_1} \overline{\varepsilon}_{m-1}(x),
\end{aligned}$$

$$\overline{\varepsilon}_{m-1}(x) = m \left| \varepsilon_m(x) + \frac{M_m(x)}{\alpha} \right|$$

e

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in S^*}} \overline{\varepsilon}_{m-1}(x) = 0$$

$$\therefore \quad \underline{\left(\frac{df}{dx} \xrightarrow{\sim} \frac{d}{dx} \left(\sum a_r x_r \right) \right) \text{ em } \mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{S}}$$

Exercício: Seja f holomorfa em $\mathcal{S}$ com $Jf = \hat{f} = \sum a_r x^r$. Então $\exists \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in S^*}} f^{(r)}(x)$, $S^* \subseteq S$ e

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in S^*}} f^r(x) = r! a_r.$$

Exercício: Seja f holomorfa em $\mathcal{S}$. Então f admite desenvolvimento assintótico em $S^* \subseteq S$ se e somente se $\exists \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in S^*}} f^{(r)}(x)$.

Exercício: Mostre que em $\mathbf{R}$ não podemos, em geral, derivar uma expansão assintótica.

Considere $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \operatorname{sen}(e^{\frac{1}{x}}) x > 0$.

Mostre que $f \xrightarrow{\sim} \hat{0}$ em 0 $(x > 0)$.

Mas $f'(x)$ não admite desenvolvimento assintótico $(\nexists \lim_{x \to 0^+} f'(x))$.

Operações permitidas com séries assintóticas

Podemos somar, multiplicar e dividir, compor e integrar séries assintóticas da seguinte maneira:

Suponha $f \xrightarrow{\sim} \sum a_r x^r = \hat{f}$; $g \xrightarrow{\sim} \sum b_r x^r = \hat{g}$ num mesmo setor $\mathcal{S}$.

Então:

(a) $\alpha f + \beta g \xrightarrow{\sim} \sum(\alpha a_r + \beta b_r) x^r \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

(b) $f \cdot g \xrightarrow{\sim} (\sum a_r x^r)(\sum b_n x^n) = \sum c_r x^r$ com $c_r = \sum_{j=0}^{r} a_j b_{r-j}$;

(c) Se $f \xrightarrow{\sim} \sum_0^\infty a_r x^r$ e $g(u) \xrightarrow{\sim} \sum_0^\infty b_s u^s$ com $b_0 = 0$

Então

$$h(x) = (g \circ f)(x) \xrightarrow{\sim} \sum_1^\infty b_s (\sum_0^\infty a_r x^r)^s (f(V) \subset W)_{\substack{f \xrightarrow{\sim} \hat{f} \text{em} V \\ g \xrightarrow{\sim} \hat{g} \text{em} W}}.$$

(d) Se $f(x) \xrightarrow{\sim} \sum_0^\infty a_r x^r$ com $a_0 \neq 0$ então

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{\sim} \sum_{t=0}^\infty c_t x^t \quad \text{onde } (\sum a_r x^r)(\sum c_t x^t) = 1.$$

(e) Se f é holomorfa em $\mathcal{S}$ com $f \xrightarrow{\sim} \sum a_r x^r$.

Então

$$\int_0^x f(t)dt \xrightarrow{\sim} \sum_0^\infty \frac{a_r}{r+1} x^{r+1}.$$

Prova:

$$f(x) = \sum_{0}^{m} a_r x^r + x^m \varepsilon_m(x) \text{ com } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in S}} \varepsilon_m(x) = 0,$$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{r=0}^{m} \frac{a_r}{r+1} x^{r+1} + \int_0^x \varepsilon_m(t) t^m dt$$

$$= \sum_{r=0}^{m} \frac{a_r}{r+1} x^{r+1} + x^{m+1} \int_0^1 \varepsilon_m(sx) s^m ds$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)dt - \sum_{r=0}^{m} \frac{a_r}{r+1} x^{r+1} = x^{m+1} \varepsilon_{m+1}(x) \text{ com}$$

$$\varepsilon_{m+1}(x) = \int_0^1 \varepsilon_m(sx) s^m ds \to 0 \qquad x \to 0, x \in S.$$

Observação: A integral $\int_0^x f(t)dt$ independe do caminho em $\mathcal{S}$ pois $\lim_{x \to 0} f(x) = a_0$. Isto completa a prova.

Desenvolvimento Assintótico com parâmetros

Vamos considerar funções de várias variaveis e o desenvolvimento assintótico com relação a uma delas.

Sejam $\mathcal{S}$: $\alpha \leq \arg x \leq \beta$, $0 \leq |x| < x_0$ e T uma região compacta de $\mathbf{C}_y$ (plano da variável y).

Definição 3: f holomorfa no interior de $\mathcal{S} \times T \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}_y$ é assintótico à $\sum_{r=0}^{\infty} a_r(y) x^r$ quando $x \to 0$, $x \in \mathcal{S}$ se

$$\forall y \in T, \quad \forall m \in \mathbf{N}, \quad \exists A_m(y) > 0$$

com

$$\left| f(x,y) - \sum_{0}^{m-1} a_r(y) x^r \right| \leq A_m(y) x^m$$

ou equivalentemente

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in S}} \left(\frac{f(x,y) - \sum_{r=0}^{m} a_r(y)x^r}{x^m} \right) = 0$$

para todo $m > 0$ e todo $y \in T$, ou ainda

$$f(x,y) = \sum_{0}^{m} a_r(y)x^r + x^m \varepsilon_m(x,y) \text{ com } \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \mathcal{S}}} \varepsilon_m(x,y) = 0.$$

Observação: Se $\varepsilon_m(x,y) \to 0$ uniformemente com relação à y falamos de desenvolvimento assintótico uniforme em y. Isto é:

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_m(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x,y) - \sum_0^m a_r(y)x^r}{x^m} \right| < \varepsilon \text{ se } |x| < \delta_m(\varepsilon) \text{ e } x \in \mathcal{S}.$$

($\delta_m(\varepsilon)$ não depende de y !).

Isto é equivalente a dizer que $\varepsilon_m(x,y)$ é, para cada m limitado em $\mathcal{S} \times T$; $|\varepsilon_m(x,y)| \leq A_m$.

Proposição 5. *Se $f(x,y)$ holomorfa em $\mathcal{S} \times T$ possui desenvolvimento assintótico uniforme, então:*

(a) Os $a_r(y)$ são funções holomorfas em T

(b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \xrightarrow{\sim} \sum_{r=0}^{\infty} a_r'(y)x^r$ uniformemente em compactos $T_1 \subset T$.

Prova:

(a) Note que se $f(x,y) \xrightarrow{\sim} \sum_0^{\infty} a_r(y)x^r$ então

$$a_m(y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in S}} \left(\frac{f(x,y) - \sum_0^{m-1} a_r(y)x^r}{x^m} \right)$$

e como o limite é uniforme em y, temos $a_m(y)$ holomorfa.

(b) As funções $a_r(y)$ são limitadas em T, pois são holomorfas e T é compacto. Logo $f(x,y)$ é limitada em $S \times T$ pois é holomorfa e tem limite $a_o(y)$ limitado quando $x \to 0$.

Note que $\varepsilon_m(x,y) = \frac{1}{x^m}(f(x,y) - \sum_0^m a_r(y)x^r)$ é holomorfa em $\mathcal{S} \times T$ e $|\varepsilon_m(x,y)| \leq M_m$.

Seja $T_1 \subsetneq T$ compacto e r=dist $(T_1, \partial T) > 0$. Pela fórmula de Cauchy:

$$\left|\frac{\partial \varepsilon_m}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{M_m}{r} \text{ em } S \times T_1$$

Então, derivando à igualdade

$$f(x,y) = \sum_{r=0}^{m} a_r(y)x^r + x^m \varepsilon_m(x,y)$$

temos o resultado.

Observação (1):

$f(x,y) = e^{\frac{1}{x}}\,|y|$ possuí desenvolvimento assintótico nulo com relação a x para $\mathcal{S} \subset Re(x) > 0$ e $T \subset \mathbf{C}_y$ uma região limitada.

Logo $f(x,y)$ tem desenvolvimento assintótico uniforme com coeficientes $a_r(y) \equiv 0\ \forall_r$. Mas f não é holomorfa em y!

Observação (2): *Sobre a inversão das variáveis no desenvolvimento assintótico:*

Seja $f(x,y)$ holomorfa em $\mathcal{S} \times T$ e assintótica à $\sum_0^\infty a_r(y)x^r$ para $x \to 0$, $x \in \mathcal{S}$.

Podemos expandir f em série de potência com relação à y (supondo $T \supset \{y \in \mathbf{C} \,|\, |y| \leq r\}$).

Seja $f(x,y) = \sum_{s=0}^\infty c_s(x)y^s$, $x \in \mathcal{S}$, $|y| \leq r$.

Se f é uniformemente assintótica à $\sum a_r(y)x^r$ então vimos que cada $a_r(y)$ é holomorfo. Logo podemos escrever $a_r(y) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{rs}y^s$, $|y| \leq r$. Substituindo em $\sum_{r=0}^{\infty} a_r(y)x^r$ temos:

$$\sum_{r=0}^{\infty}(\sum_{s=0}^{\infty} a_{rs}y^s)x^r$$

e reordenando obtemos

$$\sum_{s=0}^{\infty}(\sum_{r=0}^{\infty} a_{rs}x^r)y^s$$

A afirmativa agora é que:

$$c_s(x) \xrightarrow{\sim} \sum_{r=0}^{\infty} a_{rs}x^r \text{ em } S \text{ para } x \to 0.$$

Prova:

Por hipótese, para cada m, existe $\varepsilon_m(x,y), \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in S}} \varepsilon_m(x,y) = 0$ e

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sum_{0}^{m} a_r(y)x^r + \varepsilon_m(x,y)x^m \\
&= \sum_{r=0}^{m}(\sum_{s=0}^{\infty} a_{rs}y^s)x^r + x^m\varepsilon_m(x,y) \\
&= \sum_{s=0}^{\infty}(\sum_{r=0}^{m} a_{rs}x^r)y^s + x^m\varepsilon_m(x,y)
\end{aligned}$$

Substituindo $f(x,y)$ por $\sum_{s=0}^{\infty} c_s(x)y^s$ temos:

$$\sum_{s=0}^{\infty}(\sum_{r=0}^{m} a_{rs}x^r - c_s(x))y^s + x^m\varepsilon_m(x,y) = 0$$

Logo:

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ x\in S}} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{c_s(x) - \sum_{r=0}^{m} a_{rs}x^r}{x^m} \right) y^s = 0$$

Escrevamos $g_{s,m}(x) = \frac{c_s(x)-\sum_{r=0}^{m} a_{rs}x^r}{x^m}$ e $g_m(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} g_{s,m}(x)y^s$. Para provar que $c_s(x) \xrightarrow{\sim} \sum_{s=0}^{\infty} a_{rs}x^s$ basta agora mostrarmos que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in S}} g_{s,m}(x) = 0$ $\forall s$, $\forall m$.

Pela fórmula de Cauchy, temos:

$$g_{s,m}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g_m(x,y)}{y^{s+1}}dy, \qquad \Gamma\colon |y| = R < r$$

Como $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in S}} g_m(x,y) = 0$ uniformemente para $|y| \leq y_0$ obtemos

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in S}} g_{s,m}(x) = 0 \qquad \forall s, \quad \forall m$$

Logo

$$c_s(x) \xrightarrow{\sim} \sum_{s=0}^{\infty} a_{rs}x^s \text{ em } S.$$

Exercícios:

(1) Demonstre o teorema de realização com parâmetro. Isto é: Dados $\hat{f} = \sum a_r(y)c^r$ e $S \subset \mathbf{C}_x$ setor. Mostre que existe $f(x,y)$ holomorfo em $S\times T$ (T domínio comum dos $a_r(y)$) tal que $f \xrightarrow{\sim}$ em S, uniformemente em y.

(2) Seja $f(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!}{1+s!x}y^s$.

(a) Mostre que f é holomorfa em $|y| \leq y_0 < 1$ e $0 < |x| \leq x_0$, $|\arg x| \leq \theta < \pi$.

(b) $\nexists \lim_{\substack{r\to 0\\ x=re^{i\theta}}} f(x,y)$, (não existe nenhum limite radial!). Logo f não admite desenvolvimento assintótico em potência de x.

Resumo: Seja S um setor em $\mathbf{C}$ (ou $\mathbf{C}_\infty$) e $f\colon S \to \mathbf{C}$ holomorfa.

Então f admite $\hat{f} = \sum a_r x^r \in \mathbf{C}[[x]]$ por desenvolvimento assintótico se e somente se

$$\exists \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in S^*}} f^{(r)}(x) = f_r \text{ com } S^* \subset S e f_r = r! a_r$$

Seja

$$\mathcal{A}(S) = \{f \in \mathcal{O}(S) | \exists \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in S}} f^{(r)}(x), \qquad \forall r = 0,1,\cdots\}$$

$\mathcal{A}(S)$ é uma subalgebra da algebra $\mathcal{O}(S)$ das funções holomorfas e a aplicação

$$\mathcal{A}(S) \xrightarrow{J} \mathbf{C}[[x]]$$

$$f \longmapsto Jf = \hat{f}$$

é bem definida e sobrejetora. Mas não é injetora.

A injetividade de J depende das propriedades de crescimento das constantes de assintocidade A_r e do domínio S.

§I.2 Desenvolvimento Assintótico com Estimativas Gevrey

As condições de assintoticidade são definidas pelo comportamento dos A_n quando $n \to \infty$. As seguintes condições são importantes.

(1) $A_n \leq CA^n$ $(C, A > 0)$ (assintoticidade geométrica). Neste caso, se $f \xrightarrow{\sim}$ com $|a_n| \leq A_n \leq CA^n$ então $\hat{f}$ é holomorfa no disco de raio $r < \frac{1}{A}$

(2) $A_n \leq CA^n n!$ $(C, A > 0)$ (Assintoticidade Gevrey-1)

(3) $A_n \leq CA^n (n!)^s$ $(C, A, s > 0)$ (**Assintoticidade Gevrey-s**)

Explicitamente, dada f holomorfa em $\mathcal{S}$ e $\hat{f} = \sum a_r x^r$ diremos que $f \in \mathcal{A}_s(\mathcal{S})$, $J_s f = \hat{f}$ se para todo n, $\left|f(x) - \sum_0^{n-1} a_r x^r\right| \leq CA^n (n!)^s |x|^n$, $x \in \mathcal{S}$.

Observação: Como neste caso $|a_n| \leq CA^n (n!)^s$ temos um subconjunto de $\mathbf{C}[[x]]$ definido por tais $\hat{f}$

$$\mathbf{C}[[x]]_s = \{\hat{f} = \sum a_r x^r \in \mathbf{C}[[x]] \text{ com } |a_n| \leq CA^n (n!)^s\}$$

Definição: $\mathbf{C}[[x]]_s$ é o conjunto das séries formais tipo Gevrey-s.

Note que: $|a_n| \leq CA^n (n!)^s \Leftrightarrow \frac{|a_n|}{(n!)^s} \leq CA^n \Leftrightarrow \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{(r!)^s} x^r$ é convergente.

Segue desta observação que $\mathbf{C}[[x]]_s$ é uma subalgebra de $\mathbf{C}[[x]]$.

Consideremos a aplicação $\mathcal{A}_s(\mathcal{S}) \xrightarrow{J} \mathbf{C}[[x]]_s$.

Neste caso, o fato essencial é que se $\mathcal{S}$ tem abertura "grande" $\geq s.\pi$ então J é injetora, isto é cada $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]_s$ codifica uma única função holomorfa em $\mathcal{S}$. Vamos provar este resultado na próxima secção quando estudamos também as classes quase-analíticas (Teorema de Denjoy-Carlemann).

Exemplo: Seja

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} e^t t^{-1} dt$$

Fazendo

$$u = t^{-1} \Rightarrow du = \frac{-1}{t^2} dt, \quad dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t.$$

Então:

$$\int_{-\infty}^{x} e^t t^{-1} dt = \frac{1}{x}e^x + \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2} e^t dt$$

Fazendo

$$u = \frac{1}{t^2} \Rightarrow du = \frac{-2}{t^3}dt; \quad dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2} e^t dt = \frac{1}{t^2} e^t |_{-\infty}^{x} + \int_{-\infty}^{x} e^t \frac{2}{t^3} dt = \frac{1}{x^2} e^x + \int_{-\infty}^{x} \frac{2e^t}{t^3} dt$$

Continuando temos:

$$\int_{-\infty}^{x} e^t t^{-1} dt = \frac{1}{x} e^x \left[1 + \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} + \cdots + \frac{m!}{x^m} + (m+1)! \right.$$
$$\left. \int_{-\infty}^{x} t^{-m-2} e^{t-x} dt \right]$$

Seja

$$R_m(x) = (m+1)! \int_{-\infty}^{x} t^{-m-2} e^{t-x} dt$$

Então:

$$|R_m(x)| = \left| (m+1)! x e^{t-x} t^{-m-2} |_{-\infty}^{x} + (m+2) x \int_{-\infty}^{x} e^{t-x} t^{-m-2} dt \right|$$

$$\leq (m+1)! \, |x|^{-m-1} + (m+2) \, |x| \left| \int_{-\infty}^{x} t^{-m-3} dt \right|$$

$$\leq \frac{2(m+1)!}{|x|^{m+1}}, \quad x < 0$$

Seja

$$\hat{f} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{x^n} \quad \text{e } g(x) = x e^{-x} f(x).$$

Então

$$\left|g(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{n!}{x^n}\right| \leq \frac{2(m+1)!}{|x|^{m+1}}, \quad x < 0$$

$\therefore$ $g(x)$ é assintótica à $\hat{f}$ com estimativas Gevrey-1 ao longo de $\mathbf{R}_-$ para $x \to -\infty$.

Note que podemos prolongar $f(x)$ analiticamente ao plano complexo. Veremos no capítulo seguinte que o desenvolvimento assintótico continua válido no "setor" $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+$ quando $|x| \to \infty$.

O Teorema seguinte dá uma outra caracterização da assintoticidade Gevrey-s.

Seja

$$V_{\alpha,\beta,R} = \{x = re^{i\theta} \in \mathbf{C}_\infty | \quad |\theta - \alpha| < \frac{\beta}{2}, \quad r < R\}$$

Se $\overline{W} - \{0\} \subset V_{\alpha,\beta,R}$ denotamos $W < V$.

Teorema. *Seja $s > 1$ e f holomorfa em V com desenvolvimento assintótico $\hat{f} = \sum a_n x^n$ para $x \to 0$. Então são equivalentes:*

(a) para todo $W < V$ existem $C_W > 0$ e $A_W > 0$ tais que:

$$\sup_{x \in W} \left|f^{(n)}(x)\right| \leq C_W A_W^n (n!)^s$$

(b) para todo $W < V$ existem $K_W > 0$ e $B_W > 0$ com

$$\sup_{x \in W} \left|\frac{f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r}{x^n}\right| \leq K_W B_W^n (n!)^{s-1}$$

Prova:

<u>$(a) \Rightarrow (b)$</u>: Por Taylor, dado $a \in V$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

Como f admite $\hat{f} = \sum a_n x^n$ por desenvolvimento assintótico $\Rightarrow \exists \lim_{a\to 0} f^{(j)}(a) = j! a_j$ em subsetor $W < V$.

Logo

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

$$\therefore \quad f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \quad \underline{x \in W < V}$$

$$\therefore \quad \left| f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r \right| \leq \frac{1}{(n-1)!}\sup_{x\in W}\left|f^{(n)}(x)\right| \int_0^x (x-t)^{n-1}dt$$
$$= \frac{|x|^n}{(n-1)!}\sup_{x\in W}\left|f^{(n)}(x)\right| \int_0^1 (1-s)^{n-1}ds$$
$$= \frac{|x|^n}{n!}\sup_{x\in W}\left|f^{(n)}(x)\right|$$
$$\leq \frac{|x|^n}{n!} C_W A_W^n (n!)^s$$
$$\Rightarrow \sup_{x\in W}\left|\frac{f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r}{x^n}\right| \leq C_W A_W^n (n!)^{s-1}$$

<u>$(b) \Rightarrow (a)$</u>: Como $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in W}} f^{(n)}(x) = n! a_n \Rightarrow$

$$\left|\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in W}} f^{(n)}(x)\right| \leq n!\,|a_n| \leq C_W A_w^n (n!)^s$$

$$\therefore \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq K_W B_W^n (n!)^s \quad \forall x \in W < V.$$

Teorema. *(Borel - Rith com majoração Gevrey).*

Seja $s > 1$ e V setor de $\mathbf{C}$ com bissetriz $\mathbf{R}_+$ e abertura $< (s-1)\pi$. Então dado $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]_s$ existe $f \in \mathcal{A}_s(V)$ com $Jf = \hat{f}$.

Prova:

Dado $\varphi(t) = \sum b_n t^n \in \mathbf{C}\{t\}$ com raio de convergência $R > 0$, definimos sua transformada de Leroy incompleta de ordem $K = \frac{1}{s-1}$,

$$\ell_{k,r}(\varphi)(x) = \frac{k}{x^k}\int_0^r \varphi(t) e^{-(\frac{t}{x})^k} t^{k-1} dt \qquad 0 < r < R$$

$$\text{(por exemplo: } k = 1, \quad \ell_{1,r}(\varphi) = \frac{1}{x}\int_0^r \varphi(t) e^{-\frac{t}{x}} dt)$$

Note que

$$\left|\varphi(t) t^{k-1} e^{-(\frac{t}{x})^k}\right| = |\varphi(t)|\,|t|^{k-1} \cdot e^{-t^k Re(\frac{1}{x^k})}$$

Se $x = re^{i\theta} \Rightarrow Re(\frac{1}{x^k} = \frac{1}{r^k})\cos k\theta$ e para que $Re(\frac{1}{x^k} > 0$ basta tomar $-\frac{\pi}{2k} < \theta < \frac{\pi}{2k}$ e como $k = \frac{1}{s-1}$; basta tomarmos $-\frac{\pi}{2}(s-1) < \theta < \frac{\pi}{2}(s-1)$. Assim, $x = re^{i\theta} \in V \Rightarrow Re(\frac{1}{x^k} > 0 \Rightarrow \ell_{k,r}(\varphi)(x)$ holomorfa em V.

Deixamos ao leitor mostrar que $\ell_{k,r}(\varphi)(x)$ é assintótica com estimativa Gevrey a $\sum a_n x^n$ onde tomamos como $\varphi(t) = \sum b_n t^n$ a série convergente $b_n = \frac{a_n}{\Gamma(1+\frac{n}{k})}$. Para tanto basta integrar por partes $\ell_{k,r}(\varphi)$.

Observação: O argumento usado nesta prova será melhor explicado no capítulo II quando estudaremos detalhadamente este tipo de transformação (de Leray). Lá nos atacharemos ao estudo das transformações de Borel e Laplace e suas relações com o desenvolvimento assintótico.

A seguir introduzimos alguns resultados relacionados com problema da unicidade da realização de $\hat{f}$, propriedade chamada de quase-analítica.

§I.3) Classes de funções quase-analíticas

A definição (e o interesse) das classes de funções quase-analíticas vem da seguinte propriedade de unicidade das funções analíticas:

Seja $D \subset \mathbf{C}$ uma região aberta e $z_0 \in D$. Dentre todas as funções holomorfas em D, a única que tem a propriedade: $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n)}(z_0) = \cdots = 0$ é a função nula.

Além disso, as funções holomorfas em D tem restrições no crescimento das derivadas em z_0, isto é; da fórmula de Cauchy

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

segue que $\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!K}{R^n}$ onde $C_R = \{z \in \mathbf{C} | |z - z_0| = R\}$ e $K = \sup_{z \in C_R} |f(z)|$.

A propriedade de unicidade acima é verificada para alguma subclasse de C^∞, na qual impomos restrições no crescimento das derivadas?

As classes $C\{M_n\}$: Sejam $M_0, M_1, M_2, \cdots$ números positivos

Definição: $C\{M_n\} = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ C^\infty$ tal que existem β_f e $B_f > 0$ com $\sup \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \beta_f B_f^n M_n\}$.

Observação: No momento vamos nos preocupar com as funções reais a extensão ao caso complexo é imediata.

Observação: (1) Se $f \in C\{M_n\}$, temos:

$$\sup\left|f^{(n)}(x)\right| \le \beta_f B_f^n M_n \Rightarrow \frac{\sup\left|f^{(n)}(x)\right|}{M_n} \le \beta_f B_f^n$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sup\frac{\left|f^{(n)}(x)\right|}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}} \le B_f$$

(2) A constante B_f é mais importante que β_f esta só e colocada para que $C\{M_n\}$ seja um espaço vetorial (pois, omitindo β_f na definição, teríamos $\sup|f(x)| \le M_0 \Rightarrow C\{M_n\}$ não seria espaço vetorial).

(3) Pode-se mostrar (exercício?) que qualquer sequência M_0, M_1, $M_2, \cdots$ é admissível, isto é, $C\{M_n\}$ contém infinitos elementos distintos. Assim os M_n não precisam estar sujeito a relações. Contudo vamos "normalizar" as sequências $\{M_n\}$ que consideraremos pela condição

$$M_0 = 1 \text{ e } M_n^2 \le M_{n-1}M_{n+1} \qquad \forall n$$

Proposição. *$C\{M_n\}$ é uma álgebra (com o produto usual).*

Prova: Dados $f, g \in C\{M_n\} \Rightarrow$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le \beta_f B_f^n M_n \text{ e } \left|g^{(n)}(x)\right| \le \beta_g B_g^n M_n$$

Então:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} f^{(j)}(x) g^{(n-j)}(x)$$

$$\Rightarrow \left|(fg)^{(n)}(x)\right| \le \beta_f\beta_g \sum_{j=0}^{n} B_f^j B_g^{n-j} M_j M_{n_j}\binom{n}{j}$$

Exercício: Se $M_0 = 1, M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1} \Rightarrow M_j M_{n-j} \leq M_n \, 0 \leq j \leq n$.
Usando o exercício temos:

$$\left|(fg)^{(n)}(x)\right| \leq \beta_f \beta_g \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_f^j B_g^{n-j} M_n = \beta_f \beta_g (B_f + B_g)^n M_n$$

$$\therefore \quad f \cdot g \in C\{M_n\}.$$

Definição: $C\{M_n\}$ é *quase-analítica* se a única função f de $C\{M_n\}$ que se anula num ponto x_0 junto com todas as derivadas é a função nula, isto é: $f \in C\{M_n\}$ e $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = \cdots = 0 \Rightarrow \underline{f \equiv 0}$.

Proposição 2. *$C\{n!\}$ é quase-analítica.*

Prova: Na verdade vamos mostrar que $C\{n!\}$ é uma classe analítica, ou seja, $C\{n!\} = \{f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ C^\infty | f$ tem extensão analítica e limitada à $|Imz| < \delta(\delta > 0)\}$.
De fato: Seja $f(z)$ holomorfa em $|Imz| < \delta$, $|f(z)| \leq M$. Dado $x \in \mathbf{R}$, por Cauchy:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{z - x} dz \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{M}{2\pi\delta}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz \Rightarrow \left|f^{(n)}(x)\right| \leq n! M \delta^{-n}$$

$$\therefore f \in C\{n!\}$$

Reciprocamente, suponha $f \in C\{n!\}$. Então: $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \beta B^n n!$. Afirmo que,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ se } |x - a| < \frac{1}{B}, \quad a \in \mathbf{R}$$

de fato: Por Taylor temos:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

Estimando o resto, temos:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt\right|$$
$$\leq \beta B^n n \left|\int_a^x (x-t)^{n-1}dt\right| = \beta\,|B(x-a)|^n$$

Se $|B(x-a)|^n \to 0$ quando $n \to \infty$ (ou seja se $|x-a| < \frac{1}{B}$) então $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ converge para $f(x)$. Se $|z-a| < \frac{1}{B}$, definimos $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ na faixa $|y| < \frac{1}{B}$, $z = x+iy$. Seja $0 < \delta < \frac{1}{B}$. Então: para $z = x+iy$, $|y| \leq \delta$.

$$|F(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(iy)^n\right|$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}|y|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta B^n n!\delta^n}{n!} = \frac{\beta}{1-\delta B}$$

$\therefore$ $F(z)$ é limitada na faixa $|y| \leq \delta$.

Proposição. *$C\{M_n\}$ é quase-analítica se e somente se a única função f de $C\{M_n\}$ com suporte compacto é a nula.*

Prova:

Se existe $f \not\equiv 0$, $f \in C\{M_n\}$ tal que $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbf{R} f(x) \neq 0\}}$ é compacto, então $\exists a \in \mathbf{R} | f^{(n)}(a) = 0\ \forall n \geq 1$. (Basta tomar $a \notin$ supp (f)).

Logo $C\{M_n\}$ não é quase-analítica. Reciprocamente, suponha $C\{M_n\}$ não-quase-analítica. Isto significa que existe $f \in \{M_n\}$ e $a \in \mathbf{R}$ tais que $f'(a) = f''(a) = \cdots = 0$. Suponha $a = 0$. Seja $x_0 > 0 | f(x_0) > 0$. Defina $g(x) = 0$ se $x < 0$ e $g(x) = f(x)$ se $x \geq 0$. Então $h(x) = g(x)g(2x_0 - x)$, $h \equiv 0$ se $x < 0$ verifica:

$$h(x) = 0 \text{ para } x > 2x_0$$

$h(x_0) = g(x_0)^2 > 0$, logo h não é sempre nula, $\operatorname{supp}(h) \subset [0, 2x_0]$ e $h \in C\{M_n\}$.

Veremos a seguir o teorema fundamental sobre classes quase-analíticas de funções reais. A mesma caracterização vale também para funções de $\mathbf{C}$ e a relação com o desenvolvimento assintótico será discutida a seguir. Os resultados que seguem são de Denjoy e Carleman.

O leitor interessado em mais detalhes pode consultar o excelente texto de Carleman, "Les fonctions quasi-analytiques".

Teorema. *(Denjoy-Carleman)*
Suponha

$$M_0 = 1, \quad M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1}.$$

Sejam

$$Q(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{M_n} \text{ e } q(x) = \sup_{n \geq 0} \frac{x^n}{M_n}, \quad x > 0$$

Então, as seguintes condições são equivalentes:

(a) $C\{M_n\}$ *não é quase-analítica*

(b) $\int_0^{+\infty} \log Q(x) \frac{dx}{1+x^2} < +\infty$

(c) $\int_0^{+\infty} \log q(x) \frac{dx}{1+x^2} < +\infty$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ *converge*

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_{n-1}}{M_n}$ *converge.*

Observação: Se $M_n \to +\infty$ rapidamente quando $n \to \infty$. Então $Q(x) \to \infty$ lentamente. Cada uma das condições diz que $M_n \to +\infty$ rapidamente.

Se $M_n = n!$ então $\frac{M_{n-1}}{M_n} = \frac{1}{n}$ e como $\sum \frac{1}{n}$ diverge temos $C\{n!\}$ quase-analítica.

Prova do Teorema:

(a) $\Rightarrow$ (b): $C\{M_n\}$ não quase-analítica $\Rightarrow \exists F \not\equiv 0$, $\text{supp}(F) = K$ compacto $\subset [0, A]$ e tal que $\sup\left|F^{(n)}(x)\right| \le \frac{M_n}{2^n} \quad \forall n.$

Defina $f(z) = \int_0^A F(t)e^{itz}dt$. Então: f é inteira (holomorfa em $\mathbf{C}$) e se

$$Imz > 0, \quad |f(z)| \le \int_0^A \left|F(t)e^{itz}\right| dt \le \int_0^A |F(t)|\, e^{-ty}dt$$

$$\le AM, \quad M = \sup_{0\le t\le A} |F(t)|$$

$\therefore \quad f$ é limitada no semi-plano $Im(z) > 0$. Seja $g(w) = f\left(\frac{i-iw}{1+w}\right)$. Então g é holomorfa e limitada no disco unitário U, e continua em $\overline{U}$, exceto em $w = -1$.

Como

$$F \not\equiv 0, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|g(e^{i\theta})\right| d\theta > -\infty$$

Se

$$x = \frac{i(1-e^{i\theta})}{1+e^{i\theta}} = tg\frac{\theta}{2} \Rightarrow d\theta = \frac{dx}{2(1+x^2)}$$

Então:

$$(*) \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log|f(x)|\, \frac{dx}{1+x^2} > -\infty$$

Integrando $f(z) = \int_0^A F(t)e^{itz}dt$, por partes, obtemos:

$$f(z) = \frac{1}{(iz)^n}\int_0^A F^{(n)}(t)e^{itz}dt, z \neq 0 \text{ (pois } F^{(n)}(0) = F^{(n)}(A) = 0)$$

e usando que $|F^n(x)| \leq \frac{M_n}{2^n}$, temos:

$$|x|^n\,|f(x)| \leq AM_n z^{-n} \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \qquad \forall n \geq 0.$$

Portanto:

$$Q(x)\,|f(x)| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\,|f(x)|}{M_n} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A}{2^n} = 2A$$

Tomando o logarithmo e integrando, obtemos:

$$\int_0^\infty \log Q(x)\frac{dx}{1+x^2} \leq \int_0^\infty \frac{\log 2A}{1+x^2}dx - \int_0^\infty \log|f(x)|\,\frac{dx}{1+x^2} < +\infty$$

em vista de $(*)$.

<u>$(b) \Rightarrow (c)$</u>: Temos $Q(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{M_n}$, $q(x) = \sup_{n\geq 0}\frac{x^n}{M_n}$. Então $q(x) \leq Q(x)$ e o resultado segue.

<u>$(c) \Rightarrow (d)$</u>: Seja $a_n = M_n^{\frac{1}{n}}$. Então:

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$

pois:

$$M_0 = 1; \quad M_1^2 \leq M_0M_2 \Rightarrow M_1 \leq M_2^{1/2}.$$

Então

$$M_2^2 \leq M_1M_2 \Rightarrow M_2^2 \leq M_2^{1/2}M_3 \Rightarrow M_2^{\frac{1}{2}} \leq M_3^{\frac{1}{3}}.$$

Suponha (hipótese de indução) $M_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \leq M_n^{\frac{1}{n}}$ Então:

$$M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1} \Rightarrow M_n^2 \leq M_n^{\frac{n-1}{n}}M_{n+1} \Rightarrow M_n^{\frac{1}{n}} \leq M_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}.$$

Se

$$x \geq ea_n = eM_n^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{x^n}{M_n} \geq e^n \Rightarrow \log q(x) \geq \log \frac{x^n}{M_n} \geq n$$

Então:

$$e \int_{ea_1}^{\infty} \log q(x) \frac{dx}{x^2} \geq e \sum_{n=1}^{N} n \int_{ea_n}^{ea_{n+1}} \frac{dx}{x^2} + e \int_{ea_{n+1}}^{\infty} (N+1) \frac{dx}{x^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} n \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) + \frac{N+1}{a_{N+1}} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{a_n}$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{M_n} \right)^{\frac{1}{n}} < +\infty.$$

<u>$(d) \Rightarrow (e)$</u>: Seja $\lambda_n = \frac{M_{n-1}}{M_n}$

$$\lambda_1 = \frac{M_0}{M_1} \geq \lambda_2 = \frac{M_1}{M_2} \geq \lambda_3 = \frac{M_2}{M_3} \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n \geq \cdots$$

Se $a_n = M_n^{\frac{1}{n}}$, temos:

$$(a_n \lambda_n)^n = (M_n^{\frac{1}{n}} \lambda_n)^n = M_n \lambda_n^n \leq M_n \lambda_n \lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_1$$

$$\therefore \quad (a_n \lambda_n)^n \leq 1 \Rightarrow \lambda_n^n \leq \frac{1}{a_n^n} = \frac{1}{M_n}$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{M_{n-1}}{M_n} \leq \left(\frac{1}{M_n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{n-1}}{M_n} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{M_n} \right)^{\frac{1}{n}} < +\infty$$

$\underline{(e) \Rightarrow (a)}$: Suponha $\sum \lambda_n = \sum \frac{M_{n-1}}{M_n} < +\infty$. A partir dos λ_n construimos a função:

$$f(z) = \left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)^2 \Pi_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda_n z}{\lambda_n z}.$$

Afirmações: (1) $f(z)$ é inteira (holomorfa em $\mathbf{C}$).

de fato: Como $1 - \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tem zero na origem $\Rightarrow \exists B > 0|$

$$\left|1 - \frac{\operatorname{sen} z}{z}\right| \leq B\,|z|, \quad |z| \leq 1$$

Segue que

$$\left|1 - \frac{\operatorname{sen} \lambda_n z}{\lambda_n z}\right| \leq B\lambda_n\,|z|; \quad |z| \leq \frac{1}{\lambda_n}$$

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{\operatorname{sen} \lambda_n z}{\lambda_n t}\right|$ converge uniformemente em compactos $|z| \leq \frac{1}{\lambda_n}$ e $\frac{1}{\lambda_n} \to \infty$ pois $\sum \lambda_n < +\infty$. Logo: $\Pi_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda_n z}{\lambda_n z}$ define uma função inteira não nula.

(2) $\exists C > 0_{\exists K > 0}|\ |f(z)| \leq K e^{C|z|}$ (isto é: f de tipo exponencial).

Prova:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{itz}dt \Rightarrow \left|\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right| \leq e^{|y|}, \quad (z = x + iy)$$

Então:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right|^2 \Pi_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} \lambda_n z}{\lambda_n z}\right| \\ &\leq e^{2|y|} \Pi_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n |y|} \\ &\leq e^{(2+\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n)|y|} \leq e^{C\cdot|z|}, \end{aligned}$$

com

$$C = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

(3) f) verifica as desigualdades: $\left|x^k f(x)\right| \leq M_k \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2$.
de fato: Usando $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ e $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, obtemos:

$$\left|x^k f(x)\right| \leq |x|^k \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \Pi_{n=1}^{k} \left|\frac{\operatorname{sen} \lambda_n x}{\lambda_n x}\right|$$

$$\leq \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 (\lambda_1 \cdots \lambda_k)^{-1} = M_k \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2.$$

Integrando esta última desigualdade temos:

$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|x^k f(x)\right| dx \leq M_k \Rightarrow$ a transformada de Fourier de f,

$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}dx$ $(t \in \mathbf{R})$ tem suporte compacto e F não é identicamente nula.

Alem disso F é C^{∞} e $F^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)^k f(x)e^{-itx}dx$. Logo $\sup\left|F^{(k)}(t)\right| \leq M_k$ e $F \in C\{M_n\}$.

$\therefore$ $C\{M_n\}$ não é quase-analítica. Vejamos agora a extenão do Teorema anterior ao plano complexo.

Teorema de Unicidade de Carleman. *Seja $f\colon D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorfa, onde $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < R\}$ é um disco.*

Dado $p \in \partial D$, temos:

$$\left|\frac{f(z)}{(z-p)^n}\right| < A_n \quad \forall n \geq 1, \quad \forall z \in \overline{D} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \log\left(\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{r^{2v}}{A_v^2}\right)\right)\frac{dr}{r^2}$$

diverge

Observação: Em vista do teorema de Denjoy-Carleman,

$$\int_1^{\infty} \log\left(\sum_{v=1}^{\infty}\frac{r^{2v}}{A_v^2}\right)\frac{dr}{r^2} \text{ diverge } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{A_n}} \text{ diverge}$$

Corolário. *(Unicidade da realização do desenvolvimento assintótico, caso do disco).*

Dados um domínio D, $x_0 \in \partial D$ e $\hat{f} = \sum c_v(x-x_0)^v \in \mathbb{C}[[x-x_0]]$, existe uma unica função f holomorfa em D com

$$\left|\frac{f(x) - \sum_{v=0}^{n-1} c_v(x-x_0)^v}{(x-x_0)^n}\right| \leq B_n \qquad \forall_n, \qquad \forall x \in D$$

se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{B_n}}$ diverge.

Vejamos mais detalhadamente a relação entre as séries assintóticas e as funções C^∞ reais.

Condições necessária e suficiente para

a quase-analíticidade de funções reais C^∞

Dada $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ C^∞ com derivadas limitadas, isto é; para cada n, existe M_n com $\sup_{x\geq 0}\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M_n$, podemos definir a transformada de Laplace de f

$$\Phi(z) = \int_0^\infty f(x)e^{-xz}dx.$$

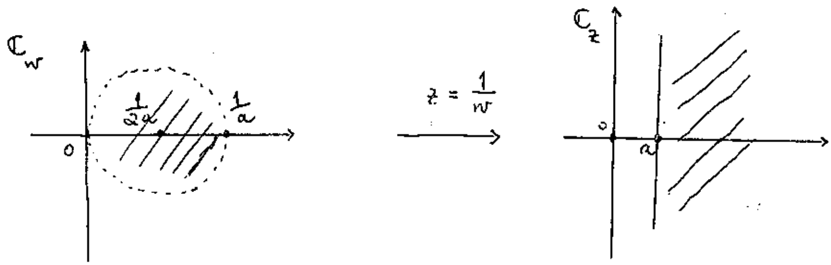
Φ tem as seguintes propriedades:

(a) É holomorfa para $Re(z) \geq a > 0$

(b) $\Phi(z)$ é assintótica à $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(o)}{z^{n+1}}$ quando $Re(z) \to +\infty$ (Basta integrar por partes!).

Observação: Note que a inversão $\frac{1}{z} = w$, transforma o semi- plano $Re(z) > a$ no disco de centro $\frac{1}{2a}$ e raio $\frac{1}{2a}$ que tem o 0 no bordo.

Então $\Phi(\frac{1}{w}) = \int_0^\infty f(x)e^{-\frac{x}{w}}dx$ é holomorfa no disco aberto $Re(\frac{1}{w}) > a$ e admite a série $\sum_{n\geq 0} f^{(n)}(0)w^{n+1}$ por desenvolvimento assintótico quando $x \to 0$, $x \in V$: setor contido em $Re(\frac{1}{w}) > a$. (veja figura a seguir)



Figura

Voltando, podemos escrever

$$\Phi(z) = \sum_{r=0}^{n-2} \frac{f^{(r)}(0)}{z^{r+1}} + \frac{\Phi_n(z)}{z^n}$$

onde

$$\Phi_n(z) = \int_0^{+\infty} f^{(n)}(x)e^{-xz}dx + f^{(n-1)}(0) \Rightarrow |\Phi_n(z)| < \frac{M_n}{a} + M_{n-1}.$$

Reciprocamente, a cada função $\Phi(z)$ assintótica à $\sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1}z^{-n}$ para $Re(z) \to +\infty$, com constantes de assintoticidade M_n isto é:

$$\left(\left| \Phi(z) - \sum_{v=0}^{n-1} c_{v-1} z^{-v} \right| |z|^n \leq M_n \right)$$

podemos associar uma função real definida por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Phi(z)e^{tz}dz \qquad (t > 0).$$

(Transformada de Laplace inversa!)

Então:

$$f \text{ é } C^{\infty}, \quad f^{(n)}(0) = C_n \text{ e } \left|f^{(n)}(t)\right| \leq m_n + e^{ta} m_{n+1}$$

Dados $A_1, A_2, \cdots$, lembremos que

$$C_A = \{f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} C^{\infty} | \sup \left|f^{(n)}(x)\right| \leq K_f^n A_n \quad n \geq 0\}$$

Então, revisitemos o teorema de Denjoy-Carleman:

Teorema. *Denjoy-Carleman*

C_A *é quase-analítica* $\Leftrightarrow \int_0^{\infty} \log\left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{r^{2v}}{A_v^2}\right) \frac{dr}{r^2}$ *diverge.*

Prova:

($\Leftarrow$) Se $\int_0^{\infty} \log\left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{r^{2v}}{A_v^2}\right) \frac{dr}{r^2}$ diverge $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt[n]{An}}$ diverge.

Seja $f \in C_A$ com $f^{(n)}(0) = 0 \; \forall n \geq 0$.

Então

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-zx} dx = \frac{1}{z^n} \int_0^{\infty} f^{(n)}(x) e^{-zx} dx$$

(integrando por partes e usando $f^{(n)}(0) = 0$).

Logo para $Re(z) \geq 1$, temos:

$$|\Phi(z)| \leq \frac{K_f^n A_n}{|z|^n} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{K_f^n A_n}{|z|^n}.$$

Para concluir que $\Phi(z)$ é identicamente nula usamos agora o seguinte lema:

Lema. *Sejam*

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \Lambda_2 < \cdots, \quad \lambda_n \to +\infty$$

$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots \qquad \textit{números positivos}$$

Suponha que Φ é holomorfa no semi-plano $Re(z) \geq a$ e satisfaz $|\Phi(z)| \leq \left|\frac{\beta_n}{z}\right|^{\lambda_n}$ $\forall n$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\beta_n}$ diverge então $\Phi \equiv 0$.

Sendo $\Phi(z) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-zx} dx \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

($\Rightarrow$) Se $\int_0^{\infty} \log\left(\sum_0^{\infty} \frac{r^{2v}}{A_v^2}\right) \frac{dr}{r^2} < +\infty$, existe $\Phi(z)$ holomorfa em $Re(z) \geq 1$, não identicamente nula e satisfazendo $|\Phi(z)| < \frac{A_n}{|z|^n}$ $n = 1, 2, \cdots$. Defina

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{x(z-1)} \frac{\Phi(z)}{z^2} dz.$$

Como $|\Phi(z)| < \frac{An}{|z|^n}$, obtemos que a integral converge uniformemente em $\mathbb{R}$, f é C^{∞} e

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{x(z-1)} (z-1)^n \frac{\Phi(z)}{z^2} dz \Rightarrow \left|f^{(n)}(x)\right| < \frac{An}{2}.$$

Pelo teorema de Cauchy, $f(x) = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{x(z-1)} \frac{\Phi(z)}{z^2} dz$ donde $f(x) = 0$ $x < 0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n$.

Finalmente f não pode se anular identicamente, pois

$$\frac{\Phi(z+1)}{(z+1)^2} = \int_0^{\infty} f(x) e^{-zx} dx$$

$\therefore$ *$f(x) = \int_0^{\infty} e^{x(z-1)} \frac{\Phi(z)}{z^2} dz$ é não identicamente nula e verifica $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq A_n$ $\forall n$.*

$\therefore$ *$C\{A_n\}$ não é quase-analítica.*

Estimativas Gevrey e Quase-analíticidade

Vamos agora demonstrar o teorema de unicidade da realização assintótica em setores (grandes) quando temos estimativas Gevrey.

Dado $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]_s$ $(s > 1)$ e um setor V de vértice 0, quando é que existe uma única f holomorfa em V e assintótica à $\hat{f}$? A resposta depende da abertura de V e de s.

Teorema. *Dados $s > 1$ e V: setor de abertura $\geq (s-1)\pi$, então para cada $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]_s$ existe no máximo uma $f \in O(V)$ com*

$$J_s f = \hat{f} .$$

Prova: (para o caso $s = 2$)
Suponha $f, g \in O(V)$ com $J_2 f = J_2 g = \hat{f}$. Isto é:

$$\left| f(x) - \sum_0^{n-1} a_r x^r \right| \leq \beta_f B_f^n n! \, |x|^n$$

$$\left| g(x) - \sum_0^{n-1} a_r x^r \right| \leq \beta_g B_g^n n! \, |x|^n$$

$$|h(x)| = |f(x) - g(x)| \leq C \cdot A^n n! \, |x|^n \quad \forall n, \quad \forall x \in V$$

$\therefore$ $|h(x)| \leq C \cdot A^n n! \, |x||^n$ $\forall n$; Para cada x fixo, vamos procurar o mínimo de $CA^n n! \, |x|^n$, $n \in \mathbf{N}$. Note que para x fixo, $|h(x)|$ é um limite inferior do conjunto $\{CA^n n! \, |x|^n; \, n \in \mathbf{N}\}$.
Então:

$$|h(x)| \leq c \cdot \inf_{n \in \mathbf{N}} \{A^n n! \, |x|^n\}$$

Consideremos inicialmente a proposição seguinte:

Proposição. $|\varphi(x)| \leq \frac{CA^k \cdot K^{k\alpha}}{|x^k|}$, $(\forall x > 0) \Rightarrow |\varphi(x)| \leq C' e^{-a|x|^{\frac{1}{\alpha}}}$.

Prova:

Como $\frac{CA^k K^{k\alpha}}{|x|^k} \geq |\varphi(x)|$ $\forall k \in \mathbf{N}$ (x: fixo). Temos:

$$|\varphi(x)| \leq C.\inf\left(\frac{A^k k^{k\alpha}}{|x|^k}\right) = C \cdot \mu_\alpha\left(\frac{x}{A}\right)$$

onde

$$\mu_\alpha(\xi) = \inf_K\{\frac{k^{k\alpha}}{|\xi|^k}\}.$$

Calculemos a forma explicita de $\mu_\alpha(\xi)$.

$$\underline{\text{Para } \alpha = 0}: \quad \mu_\alpha(\xi) = \inf_k \frac{1}{|\xi|^k} = \begin{cases} 1 & \text{se } |\xi| \geq 1 \\ 0 & \text{se } |\xi| > 1 \end{cases}$$

Resulta que $\mu_0(\frac{x}{A}) = 1$ para $|x| \leq A$ e 0 se $|x| > A$.

$\therefore$ $\varphi(x)$ tem suporte em $|x| \leq A$.

Inversamente se $\varphi(x)$ é C^∞ com suporte em $|x| \leq A$. Então $\left|x^k\varphi(x)\right| \leq CA^k$.

$$\therefore \quad \{\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, C^\infty | \, |\varphi(x)| \leq \frac{CA^k}{|x|^k}\} = \{\varphi: C^\infty | \operatorname{Supp}\varphi = \text{ compacto }\}.$$

<u>Para $\alpha > 0$</u>: Afirmo que a ordem de decrescimento de $\mu_\alpha(\xi)$ é dada por $e^{-a|\xi|^{\frac{1}{\alpha}}}$. Isto é

$$e^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \mu_\alpha(\xi) = \inf_k \frac{K^{k\alpha}}{|\xi|^k} \leq C \cdot e^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{\frac{1}{\alpha}}}$$

$$e^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \mu_\alpha(\xi) = \inf_k \frac{k^{k\alpha}}{|\xi|^k} \leq C \cdot e^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Para a demonstração, suponhamos que k seja uma variável contínua e procuraremos o mínimo da função $f(k) = \frac{K^{\cdot k\alpha}}{\xi^k}$.

Temos:

$$\log f(k) = \log \frac{K^{\cdot k\alpha}}{\xi^k} = \alpha k \log k - k \log \xi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \log f(k) = \alpha \log k + \alpha - \log \xi = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{e} \xi^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\frac{d^2}{dk^2} \log f(k) = \frac{\alpha}{k} > 0 \Rightarrow K_0 = \frac{1}{e} \xi^{\frac{1}{\alpha}}$$

é um ponto de mínimo local de f.

$$\min_k \log f(k) = \log f(k_0) = \log f(\frac{1}{e} \xi^{\frac{1}{\alpha}}) = -\frac{\alpha}{e} \xi^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\therefore \quad \min_k f(k) = e^{-(\frac{\alpha}{e} \xi^{\frac{1}{\alpha}})}$$

Como k só pode assumir os valores naturais $\min_k f(k)$ é um pouco superior ao valor calculado.

$$\underline{\min_k f(k) \geq e^{(-\frac{\alpha}{e} \xi^{\frac{1}{\alpha}})}}.$$

Se k_1 é o menor inteiro dentre os $k \in \mathrm{N} | k_0 \leq k$ temos:

$$\log f(k_1) = \log f(k_0) + \frac{\alpha}{2k_2}(k_1 - k_0)^2 < \log f(k_0) + \frac{\alpha}{2k_0}$$

$$\underline{k_0 < k_2 < k_1}$$

Então:

$$\min_k \log f(k) \leq \log f(k_1) < \log f(K_0) + \frac{\alpha}{2k_0}$$

$$= -\frac{\alpha}{e}\xi^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{\alpha e}{2} \cdot \xi^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\therefore \min_k f(k) < e^{(\frac{\alpha}{2}e\xi^{-\frac{1}{\alpha}})}e^{-(\frac{\alpha}{e}\xi^{\frac{1}{\alpha}})}$$

O primeiro fator para $\xi \geq 1$ é majorado por $C_1 = e^{\frac{\alpha e}{2}}$. Se $0 < \xi < 1$ temos:

$$\min_k \frac{k^{k\alpha}}{\xi^k} \leq 1 \leq e^{\frac{\alpha e}{2}} \cdot e^{(-\frac{\alpha}{e}\xi^{\frac{1}{\alpha}})} \Rightarrow \quad \forall 0 < \xi < \infty$$

$$e^{(-\frac{\alpha}{e}\xi^{\frac{1}{\alpha}})} \leq \mu_\alpha(\xi) \leq ce^{(-\frac{\alpha}{e}\xi^{\frac{1}{\alpha}})}$$

$$\therefore |\varphi(x)| \leq C'\mu_\alpha(\frac{x}{A}) \leq C'' \cdot e^{-\frac{\alpha}{e}(\frac{x}{A})^{\frac{1}{\alpha}}} = \overline{C} \cdot e^{-a|x|^{\frac{1}{\alpha}}};\ a = \frac{\alpha}{eA^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Considere agora a hipótese $|\varphi(x)| \leq \frac{CA^n n!}{|x|^n}$ $\forall x > 0$ $\forall n \geq 1$.
Então pela fórmula de Stirling

$$n! = n^n \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \cdot E_n \text{ com } \lim_{n\to+\infty} E_n = 1$$

Então como $\left|\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \cdot E_n\right| \leq K$ temos:

$$n! \leq K \cdot n^n$$

$$\therefore |\varphi(x)| \leq \frac{CA^n n!}{|x|^n} \leq \frac{KCA^n}{|x|^n} \cdot n^n \Rightarrow \underline{|\varphi(x)| \leq Me^{a|x|}}$$

fazendo $x = \frac{1}{x'} \Rightarrow \quad |h(x')| \leq Me^{-\frac{a}{|x|}}$

Para finalizar mostremos que $h(x) = 0 \; \forall x \in V$. Para tanto, utilizamos o Teorema de Phragmen-Lindelöf, deixamos ao leitor completar os detalhes.

§1.4 Desenvolvimentos Assintóticos Gerais

Séries de Dulac

É necessário em muitas aplicações, considerar o desenvolvimento assintótico de séries mais gerais do tipo

$$\hat{f} = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^{\lambda_n}; \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

isto é, séries "ramificadas". Um caso frequente é quando $\lambda_n = n \cdot \lambda$, $\lambda > 0$ dado.

A definição de desenvolvimento assintótico se estende naturalmente a este caso, temos:

$$\left| f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^{\lambda_r} \right| \leq A_n x^{\lambda_n},$$

as condições de assintoticidade geométrica ou Gevrey-1 se traduzem por

$$A_n \leq CA^{\lambda_n} \text{ e } A_n \leq CA^{\lambda_n} \Gamma(\lambda_n).$$

CAPÍTULO II

SOMABILIDADE

A grosso modo a teoria da somabilidade procura definir uma soma para séries divergentes. Neste capítulo vamos estudar somente o método da somação exponencial de E. Borel (veja [1]). A razão para a restrição é que as séries divergentes que vamos estudar nos capítulos III e IV são Borel-somáveis. Para maiores detalhes sobre outras teorias da somabilidade o leitor pode consultar Hardy [13].

Usaremos a transformada de Laplace para definir a soma de Borel de uma série divergente. O método transformada de Borel $\mapsto$ transformada de Laplace nos fornecerá um processo canônico para construir funções holomorfas em setores com um dado desenvolvimento assintótico.

O método de Borel se aplica muito bem às séries com raio de convergência não nula e nos fornece uma expressão para o prolongamento analítico, detectando em quais pontos do disco temos obstrução (singularidade) ao prolongamento (este método é chamado o Radar de Borel).

Os resultados expostos neste capítulo foram fortemente influenciados pelas excelentes notas de J. P. Ramis [8] e J. Martinet [7].

§II.1) Somação Exponencial de Borel - Soma de Borel de uma sequência numérica

Definição: Seja $s_n \in \mathbf{C}$ uma sequência numérica. Dizemos que s_n é *Borel - somável* com soma s se

i) $\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbf{R}$

e

ii) $\lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}\right) = s$

Observação: $S(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$ é a média de Poisson de parametro t sobre $\mathbf{N}$

Proposição 1. *Suponha s_n convergente com $s_n \to s$. Então s_n é Borel - somável com soma s.*

Prova: Como $s_n \to s$, $\limsup\limits_{n\to\infty} |\frac{s_n}{n!}|^{\frac{1}{n}} = 0$. Logo $\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbf{C}$. Mostremos que $\lim_{x\to\infty} \left(e^{-x} \sum_0^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}\right) = s$ temos

$$
\begin{aligned}
\left|e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!} - s\right| &= \left|e^{-x} \sum_{0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!} - \left(e^{-x} \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) s\right| \\
&= \left|e^{-x} \sum_{0}^{\infty} (s_n - s) \frac{x^n}{n!}\right|
\end{aligned}
$$

Como $s_n \to s, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0 | \forall n \geq N(\varepsilon): |s_n - s| < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon$ e $|s_n - s| \leq M$ $n = 0, 1, 2, \cdots$

$$\left| e^{-x} \sum_{0}^{\infty} (s_n - s) \frac{x^n}{n!} \right| = \left| e^{-x} \sum_{n=0}^{N-1} (s_n - s) \frac{x^n}{n!} + e^{-x} \sum_{N}^{\infty} (s_n - s) \frac{x^n}{n!} \right|$$

$$\leq e^{-x} M \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \leq e^{-x} M N x^{N-1} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \text{ se } x \geq 1.$$

Tomamos agora $\delta = \delta(\varepsilon) > 1$ tal que se $x \geq \delta$ Então $\frac{x^{N-1}}{e^x} < \frac{\varepsilon}{2MN}$.

$$\therefore x > \delta \Rightarrow \left| e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!} - s \right| < \varepsilon.$$

Assim, pela proposição 1, as sequências convergentes são Borel - somaveis. Seja agora $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} a_p = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$ o termo geral da série $\sum_{p=0}^{\infty} a_p$. (s_n é a soma dos n-primeiros termos da série). Se (s_n) é Borel - somável, dizemos que a série $\sum_{p=0}^{\infty} a_p$ é Borel - somável. Se este é o caso, a soma $s = \lim_{x \to \infty} e^{-x} \sum_{0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$ é a soma de Borel da série $\sum_{p=0}^{\infty} a_p$.

Seja

$$S(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}.$$

Então

$$S'(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!},$$

Logo

$$S(x) = \int_0^x S'(t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \lim_{x\to\infty} S(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x S'(t)dt$$

$$= a_0 + \int_0^{+\infty} \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \right) dt.$$

Assim, dada a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (em geral divergente!) e sua soma de Borel é dada pela integral acima.

§II-2 Soma de Borel de uma série de potências

Dada uma série de potências $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} \in \mathbb{C}[[x]]$, sem termo constante. Seja $s_k(x) = a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_{k-1} x^k$ a soma dos k-primeiros termos da série.

Definição 1: $s(x) = \lim_{t\to+\infty} e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} s_k(x) \frac{t^k}{k!}$ é a soma de Borel de $\hat{f}$ no ponto x.

Definição 2: Seja $\hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \in \mathbb{C}[[x]]$. Definimos a transformada de Borel (formal) de $\hat{f}$ como sendo a série (em geral também formal)

$$\mathcal{B}\hat{f} = \tilde{f} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

Observação (1): Note que não definimos a transformada de Borel de uma constante. Na secção sobre transformada de Laplace (=Borel inversa!) o leitor encontrará a definição adequada.

Observação (2): É útil considerar a partir deste momento duas cópias do plano complexo uma cópia $\mathbf{C}_x$ (onde vive a variável x) será chamado o *modelo formal* e outra cópia onde vive a variável $t, \mathbf{C}_t$ chamado *plano de Borel* (mais tarde este será o modelo convolutivo).

Lema 1. *Se $\hat{f} = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1}$ é convergente para $|x| < R$ então $\mathcal{B}\hat{f}$ é uma função inteira (=convergente em todo o plano) e do tipo exponencial.*

Prova:

1) Como $\limsup |a_{n-1}|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$, temos $\limsup \left|\frac{a_n}{n!}\right|^{\frac{1}{n}} = 0$ logo $\mathcal{B}\hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ é inteira ($R = +\infty$).

2) $\hat{f} = a_0 x + a_1 x + \cdots + a_n x^{n+1} + \cdots$. Então para $r < R$ temos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=r} \frac{f(x)}{x^{n+2}} dx = a_n.$$

Seja $M = \sup\{|f(x)| : |x| = r\}$. Então $|a_n| \leq \frac{M}{r^{n+2}}$. Logo

$$\left|\mathcal{B}\hat{f}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!} |t|^n$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M\,|t|^n}{n! r^{n+2}}$$

$$= \frac{M}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|t|}{r}\right)^n \cdot = \frac{M}{r^2} e^{\frac{|t|}{r}}$$

$$\sup_t \left| \mathcal{B}\hat{f}(t) e^{-\frac{|t|}{\lambda}} \right| < +\infty \quad (\forall \lambda \leq r)$$

$$(\text{ou } \mathcal{B}\hat{f}(t) = 0\left(e^{\frac{|t|}{\lambda}}\right) \quad |t| \to +\infty, \quad \forall \lambda \leq r < R).$$

Antes de passarmos às séries divergentes (nosso principal objetivo!) vejamos a belíssima aplicação da somação de Borel ao prolongamento analítico.

§II-3 Aplicação ao prolongamento analítico

(... escapando do disco de convergência!)

Sabemos que uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ convergente no disco $|z-a| < R$ representa uma função analítica $f(z)$. Isto significa que a sequência das somas parciais $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z-a)^k$ (que são polinômios) converge uniformemente para $f(z)$ em qualquer compacto de $|z-a| < R$. Recíprocamente cada função analítica $f(z)$ no disco $|z-a| < R$ pode se expandida em série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ que converge em compactos de $|z-a| < R$.

Vamos aplicar a somabilidade de Borel à sequência das somas parciais de uma série de potências convergente para $|z-a| < R$ e examinar a convergência uniforme em compactos de um dominio D que pode conter o disco $|z-a| < R$.

Definição 1: Dados $f(z)$ analítica em 0 e p um ponto singular de $f(z)$, seja $\ell(p)$ a reta perpendicular ao segmento $[0,p]$ passando por p. Seja $H(p)$ o semi-plano aberto com bordo $\ell(p)$ que contém a origem. O *polígono de Borel* de f é o conjunto

$$B(f) = \bigcap_{p \in \text{ sing } (f)} H(p)$$

Exemplos: 1) O polígono de Borel de $f(z) = \frac{1}{1-z}$ é todo o semiplano: $Re(z) < 1$.

2) O polígono de Borel de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ é o disco $|z| < 1$ (Exercício: verifique que os pontos singulares são densos no círculo $|z| = 1$).

Exercício 1: Se f é analítica na origem, então f é analítico no disco fechado (anterior + fronteira) D com diamêtro $[0,z]$ se e somente se $z \in B(f)$.

Definição: Dada f analítica na origem, definamos a *estrela de Borel* de f como a reunião dos discos abertos onde f é analítica e que contém a origem no bordo.

Exercício 2: Calcule a estrela de Borel de $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

Exercício 3: Mostre que a estrela de Borel contém o polígono de Borel. Verifique que são diferentes no exemplo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Teorema 1. *Seja* $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ *onde* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *tem raio de convergência* $R > 0$. *Se* $z \in B(f)$ *então*

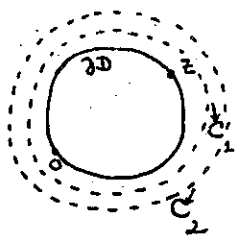
(a) $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n(z) \frac{x^n}{n!}\right) = s(z)$ *existe e é uma função holomorfa em* $B(f)$.

(b) se $|z| < R$ então: $s(z) = f(z)$.

Isto é, $s(z)$ define o prolongamento analítico de $f(z)$ ao polígono de Borel de f.

Prova: Dado $z \in B(f)$, se $z = 0$ o resultado é óbvio. Suponha $z \neq 0$. Pelo exercício 1, f é analítica no disco fechado D de diâmetro $[0, z]$.

Sejam $C_1 = \partial D_1$ e $C_2 = \partial D_2$ círculos concêntricos com ∂D tais que f é analítica em int (D_2), $D \subsetneq D_1 \subsetneq D_2$



Temos

$$\begin{aligned}
s_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(t)}{t^{k+1}} dt \right) z^k \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(t)}{t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{z}{t}\right)^k \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(t)}{t} \left[\frac{1-(z/t)^n}{1-z/t} \right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(t)}{t-z} \left(1 - \left(\frac{z}{t}\right)^n \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(t)}{t-z} \left(\frac{z}{t}\right)^n dt \\
&= f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(t)}{t-z} \left(\frac{z}{t}\right)^n dt.
\end{aligned}$$

Então:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} s_k(z) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \{ e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f(z) - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(t)}{t-z} \left(\frac{z}{t}\right)^k dt \right) \}$$

$$= f(z) - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(t)}{t-z} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{xz}{t}\right)^k dt$$

$$= f(z) - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(t)}{t-z} e^{x[\frac{z}{t}-1]} dt$$

Então, se $Re\left(\frac{z}{t}-1\right) \leq -\varepsilon < 0$ para algum $\varepsilon > 0$ e todo $t \in C_1$, segue que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}e^{x[\frac{z}{t}-1]}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\sup_{t\in C_1}\left|\frac{f(t)}{t-z}\right| L(C_1)e^{xRe(\frac{z}{t}-1)}$$

$$=\leq \frac{1}{2\pi}M\cdot L(C_1)e^{-\varepsilon x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} s_n(z)\frac{x^n}{n!} = f(z)$$

Mostremos então que $\exists\varepsilon = \varepsilon(z) > 0 |\ \forall t \in C_1,\ Re\left(\frac{z}{t}-1\right) \leq -\varepsilon$ de fato:

Sejam $z = u + iv$ e $t = x + iy$

$$Re\left(\frac{z}{t}\right) = Re\left(\frac{u+iv}{x+iy}\right) = \frac{ux+vy}{x^2+y^2}$$

O círculo C_1 tem equação:

$$|t - z/2|^2 = \left(\frac{|z|}{2}+\delta\right)^2$$

onde $\delta = \text{dist}\,(C_1, C) > 0$ Então

$$|t-z/2|^2 = (x-u/2)^2 + (y-v/2)^2 = x^2+y^2-(ux+vy)+\frac{u^2}{4}+\frac{v^2}{4}$$

e

$$\left(\frac{|z|}{2}+\delta\right)^2 = \frac{|z|^2}{4}+|z|\,\delta+\delta^2.$$

Logo

$$x^2+y^2-(ux+vy)+\frac{u^2}{4}+\frac{v^2}{4} = \frac{|z|^2}{4}+|z|\,\delta+\delta^2$$

$$\Rightarrow 1 - Re\left(\frac{z}{t}\right) = \frac{\delta\,|z|+\delta^2}{x^2+y^2} = \frac{\delta'}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \quad Re\frac{z}{t} = 1 - \frac{\delta'}{x^2+y^2}$$

Como

$$|t|^2 = x^2+y^2 \leq (|z|+\delta)^2 \Rightarrow Re\left(\frac{z}{t}\right) = 1 - \frac{\delta'}{x^2+y^2}$$

$$\leq 1 - \frac{\delta'}{(|z|+\delta)^2} = 1 - \frac{\delta|z|+\delta)}{(|z|+\delta)^2} = 1 - \frac{\delta}{|z|+\delta}$$

$$\therefore \quad Re\left(\frac{z}{t}\right) - 1 = Re\left(\frac{z}{t} - 1\right) \leq -\frac{\delta}{|z|+\delta} = -\varepsilon.$$

§II-4 Fórmula Integral para o prolongamento analítico

O Radar de Borel

O teorema anterior mostra que a soma de Borel

$$s(z) = \lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} s_n(z)\frac{x^n}{n!}\right)$$

de uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, convergente para $|z| < R$, está definida no polígono de Borel, que pode ser maior que o disco de convergência inicial e fornece portanto o prolongamento analítico da série.

Vamos agora deduzir uma expressão integral para $s(z)$ que nos dará o prolongamento analítico de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ à sua estrela de Borel (que é maior que o polígono, em geral).

A expressão integral será usada em seguida para definirmos a soma de Borel de uma série divergente.

Considere então $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1}$, convergente para $|z| < R$. Sejam: $s_n(z) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^{p+1} = a_0 z + \cdots + a_{n-1} z^n$ = soma dos n primeiros termos da série,

$$s(x,z) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n(z) \frac{x^n}{n!} \text{ e } s(z) = \lim_{x\to+\infty} s(x,z).$$

Teorema 2. *Se* $(\mathcal{B}f)(t) = \tilde{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ *então*

$$s(z) = \int_0^{+\infty\cdot z} \tilde{f}(t) e^{-\frac{t}{z}} dt$$

(a integração é feita sobre a semi-reta de suporte $[0, z]$*)*

Prova: Primeiro, como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$ é convergente sua transformada de Borel é uma função inteira e $\left|\tilde{f}(t)\right| \leq M e^{\frac{|t|}{\lambda}}$ onde $\lambda \leq r < R$(Lema II.1). Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty\cdot z} \tilde{f}(t) e^{-t/z} dt &= \int_0^{+\infty} z \tilde{f}(s\cdot z) e^{-\frac{sz}{z}} ds \\ &= z \int_0^{+\infty} \tilde{f}(s\cdot z) e^{-s} ds.\end{aligned}$$

$$\therefore \left|\tilde{f}(s\cdot z)\right| e^{-s} = \mu e^{s\left(\frac{|z|}{\lambda}-1\right)}$$

e se $|z| < \lambda$ a integral converge.

Logo para todo z tal que $|z| < R$, $\int_0^{+\infty\cdot z} \tilde{f}(t)e^{-\frac{t}{z}}dt$ converge e define uma função holomorfa de z.

Suponha agora que ao longo da direção $e^{i\theta}$, temos

$$\left|\tilde{f}(t)\right| \leq \mu e^{\frac{|t|}{A}}, \quad A > 0 (t = s\cdot e^{i\theta}, s \geq 0)$$

Então a integral $\int_0^{+\infty\cdot e^{i\theta}} \tilde{f}(t)e^{-\frac{t}{z}}dt$ é convergete para $Re\left(\frac{e^{i\theta}}{z}\right) > \frac{1}{A}$. De fato:

$$\left|\tilde{f}(t)e^{-\frac{t}{z}}\right| = \left|\tilde{f}(s\cdot e^{i\theta})e^{-\frac{se^{i\theta}}{z}}\right| \leq \mu e^{s/A} e^{sRe\left(\frac{e^{i\theta}}{z}\right)} = M\mu e^{s(1/A - Re(\frac{e^{i\theta}}{z}))}$$

$\therefore$ se $Re(\frac{e^{i\theta}}{z}) > 1/A$ a integral converge. Note que $Re(\frac{e^{i\theta}}{z}) > 1/A =$ disco de diâmetro A gerado pelo segmento $[0, Ae^{i\theta}]$.

Assim, se $\left|\tilde{f}(t)\right| \leq \mu e^{\frac{|t|}{A}}$ ao longo de uma direção $d(= e^{i\theta})$ a integral $\int_d \tilde{f}(t)e^{-t/z}dt$ está definida no disco de diâmetro $[0, Ae^{i\theta}]$ e se $A > R$ obtemos uma função definida fora do disco inicial de $f(z)$.

Vejamos agora que a integral é o prolongamento analítico de $f(z)$, isto é

$$f(z) = \int_d e^{-t/z}\tilde{f}(t)dt \text{ se } |z| < R$$

Substituindo $\tilde{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ na integral, obtemos:

$$\int_d \left(e^{-t/z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \right) dt = \int_0^{+\infty \cdot z} \left(e^{-t/z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \right) dt$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \int_0^{u \cdot z} \left(e^{-t/z} \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \right) dt$$

Considere a integral $\int_0^{u \cdot z} \left(e^{-t/z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \right) dt$.

Fazendo a mudança de variáveis $\xi = t/z$, temos :

$$\int_0^{u \cdot z} \left(e^{-t/z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \right) dt$$

$$= \int_0^{u} \left(e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (\xi z)^n \right) z \cdot d\xi$$

$$= \int_0^{u} \left(e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \xi^n z^{n+1} \right) d\xi.$$

Por outro lado, $s(x,z) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n(z) \frac{x^n}{n!}$ e derivando com relação a x, temos:

$$\frac{d}{dx} s(x,z) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} z^{n+1}$$

$$\therefore \quad \int_0^{u} \left(e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \xi^n z^{n+1} \right) d\xi$$

$$= \int_0^{u} \left(\frac{d}{d\xi} s(\xi, z) \right) d\xi = s(u,z)$$

$\therefore$ Voltando, temos:

$$s(z) = \lim_{u \to +\infty} s(u, z) = \lim_{u \to +\infty} \int_0^{u \cdot z} \left(e^{-t/z} \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \right) dt$$

$$= \int_d e^{-t/z} \tilde{f}(t) dt.$$

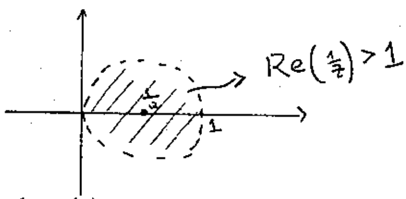
Mas, pelo teorema 1, $s(z) = f(z)$ no polígono de Borel, logo $f(z) = \int_d e^{-t/z} \cdot \tilde{f}(t)dt$ no disco $|z| < R$ e como a integral converge eventualmente em discos com diâmetro $[0, Ae^{i\theta}]$ $A \geq R$ (se $\left|\tilde{f}(t)\right| < \mu e^{\frac{|t|}{A}}$) obtemos o prolongamento analítico de $f(z)$ à estrela de Borel de f. Isto termina a prova do lema 2.

A integral $\int_d e^{-t/z} \tilde{f}(t)dt$ é chamada o *Radar de Borel.*

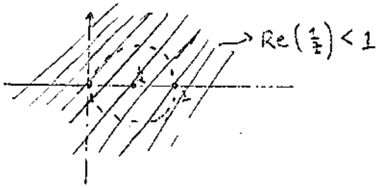
Variando d ela nos diz quais pontos na fronteira do disco de convergência são singularidades.

Assim, a possibilidade de extender $f(z)$ numa direção d, depende do crescimento da transformada de Borel $\tilde{f}(t)$ ao longo de d (se vale $\left|\tilde{f}(t)\right| < \mu e^{\frac{|t|}{A}}$ e $A > R$, podemos extender).

Exemplo: $f(z) = \sum_{n \geq 0} z^{n+1}$. Então $\tilde{f}(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} = e^t$. Dada uma direção d, temos $\int_d e^t e^{-t/z} dt = \int_d e^{t(1-1/z)} dt$. Se $d = \mathbf{R}^+$, $\int_0^{+\infty} e^{t(1-1/z)} dt$ converge se $Re(1 - 1/z) < 0$, ou seja $Re(1/z) > 1$.



Se $d = \mathbf{R}^-$; $\int_0^{+\infty} e^{-t(1-1/z)} dt$ converge se $Re(1 - 1/z) > 0$ ou seja $Re(1/z) < 1$



Observe que se $d = \mathbf{R}^-$, $|e^t| = e^{Re t} < e^{\frac{|t|}{A}}$, $\forall A > 0$

$\therefore \quad f(z) = \int_{\mathbf{R}^-} e^{t(1-1/z)} dt$ no disco de diâmetro $[0, -\infty)$ (= semiplano $Re(z) < 0$).

Assim, $\int_d e^{t(1-1/z)} dt$ define o prolongamento de $f(z)$ à $\mathbf{C} - \{1\}$.

Observação: Fazendo $d = \mathbf{R}^+$ e $z = 1/x$ na integral $\int_d \tilde{f}(t) e^{-t/z} dt$ obtemos

$$\int_{\mathbf{R}^+} \tilde{f}(t) e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(t) e^{-tx} dt$$

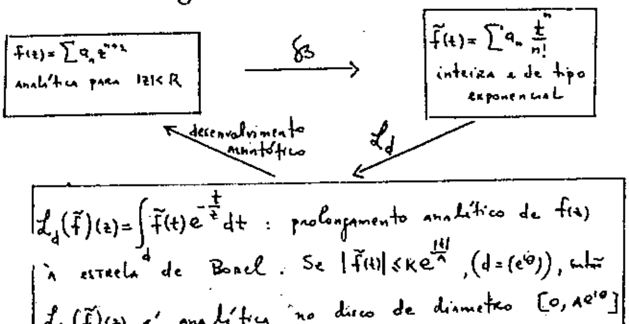
que é a transformada de Laplace de $\tilde{f}(t)$.

Definição: Definimos a transformada da Laplace na direção d como sendo

$$\mathcal{L}_d(\tilde{f})(z) = \int_d \tilde{f}(t) e^{-t/z} dt$$

Assim, vemos que o teorema 2 nos dá $f(z) = \mathcal{L}_d(\mathcal{B}f)(z)$ e obtivemos um processo para prolongar $f(z)$.

Resumindo temos o diagrama:



Exercício: Mostre que a série de Taylor de $\mathcal{L}_d(\tilde{f})(z)$ na origem é igual a $\sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1}$ (Integre por partes!).

Exercício: Sejam $\mathbb{C}_0\{z\} = \{$ séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1}$ convergentes $\}$ e $I =$ {funções inteiras de tipo exponencial} mostre que $\mathcal{B}\colon \mathbb{C}_0\{z\} \to I$ é bijeção com inversas $\mathcal{L}_d(\forall d)$.

Proposição 2. *Seja $f(z) = \sum a_n z^{n+1}$ analítica em 0, e $C = \{z\,|z| = \delta\}$ um círculo contido no disco de convergência de $f(z)$. Então:*

$$(\mathcal{B}f)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)e^{t/z}\frac{dz}{z^2}$$

(a expressão acima nos dá uma representação integral para $\mathcal{B}f$).

Prova:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\delta} f(z)e^{t/z}\cdot\frac{dz}{z^2} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\delta}\left(e^{t/z}\sum a_n z^{n+1}\right)\frac{dz}{z^2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{|z|=\delta} e^{t/z}z^{n-1}dz\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{|z|=\delta}\left(z^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{z^j j!}\right)dz\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}t^n = (\mathcal{B}f)(t)\end{aligned}$$

§II.5 A transformada de Borel do produto - o produto de Convolução

Sejam $\tilde{f}(t)$ e $\tilde{g}(t)$ funções integráveis em $[0,+\infty)$. O produto de convolução de $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ é definido por:

$$(\tilde{f} * \tilde{g})(t) = \int_0^t \tilde{f}(s) \cdot \tilde{g}(t-s)ds$$

A importância do produto de convolução vem do fato de que ele é a imagem do produto usual pela transformada de Borel (como veremos). Assim no modelo formal temos o produto usual de funções (de séries...) e quando passamos ao plano de Borel temos o produto de convolução (é bem conhecido que a transformada de Laplace leva o produto de convolução no produto usual).

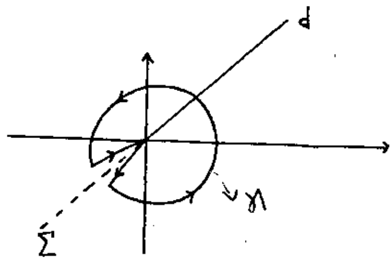
Temos então:

Proposição: Se $f(z)$ e $g(z)$ são analíticas em 0 então

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(f \cdot g)(t) &= (\mathcal{B}f)(t) * (\mathcal{B}g)(t)\\ &= \int_0^t (\mathcal{B}f)(s) \cdot (\mathcal{B}g)(t-s)ds\end{aligned}$$

Corolário. *A transformada de Borel define um isomorfismo de anel entre* $(\mathbf{C}_0\{x\}, +, \cdot)$ e $(I, +, *)$ *com inversa* $\mathcal{L}_d$ *($\forall d$: direção).*

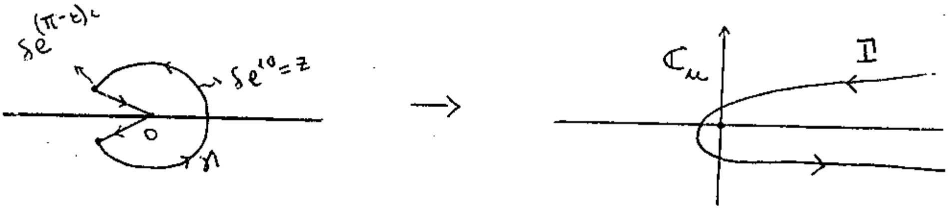
Vamos agora começar a extender o isomorfismo acima. Primeiro vamos definir a transformada de Borel para funções holomorfas em setores e depois passamos ao caso de séries divergentes.



§II-6 Transformada de Borel de funções com singularidade

1º caso: f possuí um ponto de ramificação na origem. Seja $\sum$ uma semi-reta e f função com ramificação na origem, considere uma determinação de f em $\mathbf{C} - \sum$. Dada uma direção $d \neq \sum$, partindo da expressão integral para a transformada de Borel (prop.2) temos:

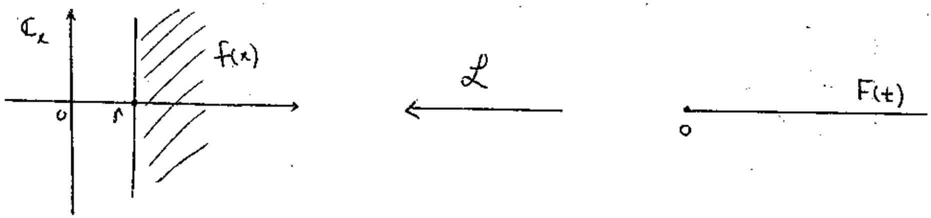
Definição: A transformada de Borel de f é definida pela integral $\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{t/z} f(z) \frac{dz}{z^2}$ onde γ é o contorno:



Proposição 3. *Se* $f(z) = z^\alpha$, $\alpha \notin \mathrm{N}^n$, *então* $(\mathcal{B}f)(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, *(*$\Gamma$*: função gama).*

Prova: Precisamos calcular a integral $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{t/z} z^{\alpha-2} dz$ onde γ é o contorno formado do arco $|z| = \delta e^{i\theta}, -\pi + \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$ mais os segmentos $[\delta e^{(\pi-\varepsilon)i}, 0]$, $[0, \delta e^{(-\pi+\varepsilon)i}]$.

Considere a mudança de variável $t/z = -u$. A imagem de γ é o caminho I abaixo



Então:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{t/z} z^{\alpha-2} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{I} e^{-u} t^{\alpha-1}(-u)^{-\alpha} du$$

$$= t^{\alpha-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{I} e^{-u}(-u)^{-\alpha} du = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

pois, pela fórmula de Hankel (ver apendice I)

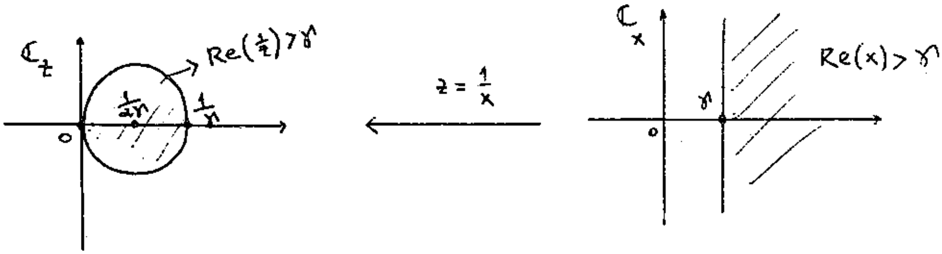
$$\int_{I} e^{-u}(-u)^{-\alpha} du = \frac{2\pi i}{\Gamma(\alpha)}.$$

2º caso: f possuí um polo na origem.

Queremos agora definir a transformada de Borel das funções racionais, como $1/z, 1/z^2$; Para tanto, lembremos algumas propriedades da transformada de Laplace (lembre que a transformada de Laplace inversa é a transformada de Borel).

Seja $F(t)$ definida para $t > 0$. Então $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} F(t) dt = \mathcal{L}\{F\}$ é a transformada de Laplace de F (existe quando a integral converge).

Se $F(t)$ é contínua e de tipo exponencial ($|F(t)| \leq \mu e^{\gamma t}$ então $\mathcal{L}\{F\}$ está definida e é holomorfa para $Re(x) > \gamma$



Observação: Note que a inversão $1/x = z$ transforma o semi-plano $Re(x) > \gamma$ no disco (com a origem no bordo) $Re(1/z) > \gamma$ de centro $\frac{1}{2\gamma}$ e raio $\frac{1}{2\gamma}$.

Lembremos que a transformada inversa de Laplace é definida por:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xt} f(x) dx = F(t)$$

Assim, podemos definir a transformada de Borel de uma função holomorfa no disco aberto $Re(1/z) > \gamma$.

Definição: Seja $f(z)$ holomorfa no disco $Re(1/z) > \gamma$. Então

$$(\mathcal{B}f)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Re(1/z)=c} e^{t/z} f(z)dz; \quad (c > \gamma)$$

No próximo parágrafo veremos como as propriedades de $f(z)$ estão relacionadas com as de $F(t)$ ($F(t) = \mathcal{B}f$, $f = \mathcal{L}\{F\}$).

- Algumas propriedades da Transformada de Laplace

1) $\mathcal{L}\{c_1F_1 + c_2F_2\} = c_1\mathcal{L}\{F_1\} + c_2\mathcal{L}\{F_2\}$.

2) $\mathcal{L}\{F\} = f$, $\mathcal{L}\{G\} = g \Rightarrow \mathcal{L}\{F * G\} = f \cdot g$

   $(F * G)(t) = \int_0^t F(\mu)G(t-u)du)$

3) $\mathcal{L}\{F(at)\} = 1/af(s/a)$

4) $\mathcal{L}\{F\} = f \Rightarrow \mathcal{L}\{F^{(n)}_{(t)}\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - sF^{(n-2)}_{(0)} - F^{(n-1)}_{(0)}$ (supondo $F(t)$, $F'(t), \cdots, F^{(n-1)}_{(t)}$ contínuas e de ordem exponencial).

5) $\mathcal{L}\{F\} = f \Rightarrow \mathcal{L}\{\int_0^t F(u)du\} = \frac{f(s)}{s}$

6) $\mathcal{L}\{F\} = f \Rightarrow \mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n f^{(n)}_{(s)}$

7) $\mathcal{L}\{F\} = f \Rightarrow \mathcal{L}\{\frac{F(t)}{t}\} = \int_s^\infty f(u)du$

Transformada de Laplace do delta de Dirac

Seja $\delta(t)$ = função impulso unitário de Dirac.

Definição:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty \text{ se} & t = 0 \\ 0 \text{ se} & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Podemos visualisar δ como o limite das funções:

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon \text{ se} & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 \text{ se} & t > \varepsilon \end{cases}$$

Então

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(t).$$

A propriedade fundamental do δ é

$$\int_0^{+\infty} \delta(t) G(t) dt = G(0) \quad \forall G\text{: contínua}$$

Assim δ é uma distribuição, mais que isso, uma medida. O leitor interessado em maiores detalhes deve consultar Schwartz [ ].

Proposição. $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ *(Isto é δ é elemento neutro do produto de convolução: $\delta * G = G \ \forall G$).*

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \delta(t) dt &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{+\infty} e^{-xt} F_\varepsilon(t) dt \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} 1/\varepsilon \int_0^{\varepsilon} e^{-xt} dt \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1/\varepsilon \left(-1/x e^{-xt}\big|_{t=0}^{t=\varepsilon}\right)\right) \\
&\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1 - e^{-x\varepsilon}}{\varepsilon \cdot x}\right) = 1
\end{aligned}$$

Exercício: $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-ax}$.

Voltando à transformada de Borel...

Definição: $\mathcal{L}^{-1}\{1\} = \mathcal{B}(1) = \delta_0$ (1=função constante $\equiv 1$).

Assim, chegamos a definição de transformada de Borel de uma série qualquer.

$$a + a_0 z^{-1} + a_1 z^{-2} + \cdots \overset{\mathcal{B}}{\longmapsto} a \cdot \delta_0 + \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$$

Seja $F(t)$ uma função analítica na origem. Então

$$F(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{F(t)}{t} dt = \int_{|t|=r} F(t) \cdot \frac{dt}{2\pi i t}$$

Assim identificamos (como distribuição)

$$\delta_0 \sim \frac{1}{2\pi i t}$$

e suas derivadas

$$\delta_0^{(n)} \sim (-1)^n \frac{n!}{2\pi i t^{n+1}}$$

$$\delta_a(t) \sim \frac{1}{2\pi i (t-a)}$$

Resumo:

$$\begin{array}{ccc} z \sim \infty & \mathcal{B} & \\ f(z) & \longrightarrow & (\mathcal{B}f)(t) = \tilde{f}(t) \\ & \longleftarrow & \\ & \mathcal{L} & \end{array}$$

1) Holomorfas:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{z^{n+1}}, n \geq 0 & \longleftrightarrow & \frac{t^n}{n!} \\ 1 & \longleftrightarrow & \delta_0 \sim \frac{1}{2\pi i t} \end{array}$$

2) Meromorfas:

$$z^n (n \geq 1) \longleftrightarrow \delta_0^{(n)} \sim \frac{(-1)^n n!}{2\pi i t^{n+1}}$$

3) **Multiforme:**

$$z^{\alpha}(\alpha \in \mathbf{C}) \longleftrightarrow \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

4) **Sing-essencial:**

$$e^{az}_{(z\sim\infty)} \longleftrightarrow \delta(t-a) \sim \frac{1}{2\pi i(t-a)}$$

Passemos agora ao caso de séries inteiras divergentes.

§II-7 Séries divergentes

Dada $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1} \in \mathbf{C}[[z]]$ definimos sua transformada de Borel como $(\mathcal{B}\hat{f})(t) = \tilde{f}(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$

Vimos no capítulo I, que $\tilde{f}$ é convergente se e somente se $\exists C, A > 0$ com $|a_n| \leq Cn!A^n$, isto é, se e somente se $\hat{f} \in \mathbf{C}_2[[z]]$ (anel das séries formais Gevrey-2).

Note que a transformada de Borel $\mathcal{B}\colon \mathbf{C}_2[[z]] \to \mathbf{C}\{t\}$ define um isomorfismo.

Exercício: Prove que $\mathcal{B}\left(z^2\frac{d\hat{f}}{dz}\right) = t\cdot(\mathcal{B}\hat{f})(t)$ (Isto é, a transformada de Borel leva a derivação $\hat{f} \mapsto z^2\frac{d\hat{f}}{dz}$ de $\mathbf{C}_2[[z]]$ na derivação $\tilde{f} \mapsto t\tilde{f}$ de $\mathbf{C}\{t\}$).

Exercício: Mostre que $\mathcal{L}(\sum b_n t^n) = \sum b_n n! z^{n+1}$ é o inverso de $\mathcal{B}\colon \mathbf{C}_2[[z]] \to \mathbf{C}\{t\}$.

Estamos interessados em construir somas canônicas para uma série $\hat{f}$ de $\mathbf{C}_2[[z]]$. Vimos que sua transformada de Borel $\tilde{f}$ é convergente numa vizinhança da origem. No entanto, se quisermos definir sua soma, retornando do modelo formal pela transformada de Laplace precisamos de hipóteses adicionais sobre $\hat{f}$ que garantam a existência do prolongamento de $\tilde{f}$ à uma semi-reta d, com crescimento tipo exponencial.

Proposição 1. *Seja $F\colon [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ contínua e satisfazendo:*

a) $\exists \mu > 0$ tal que para $z \in \mathbf{C}$ com $Re(z) > \mu$ temos $e^{-tz}F(t) \in L^1([0, +\infty))$.

b) $F(t)$ admite $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$ por desenvolvimento assintótico em 0.

Então: $f(z) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{z}} f(t)dt$ é holomorfa no disco aberto $Re(\frac{1}{z}) > \mu$ e admite $\hat{f} = \sum n! b_n z^{n+1}$ por desenvolvimento assintótico uniforme quando $z \to 0$, z no setor $V_{-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}, \rho} \subset \{z | Re(\frac{1}{z}) > \mu\}$ onde $(0 < \theta < \pi/2)$, $|z| < p$

Proposição 2. *Seja $f(z)$ holomorfa no disco aberto $D_\mu = \{z | Re(\frac{1}{z}) > \mu\}$ com desenvolvimento assintótico uniforme com estimativas Gevrey em todo disco fechado D_λ contido em D_μ. (Isto é existem $C_\lambda > 0$ e $A > 0$ com:*

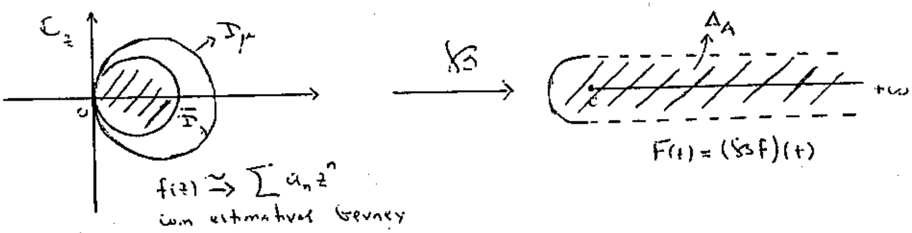
(a) $|a_n| \leq C_\lambda A^n n!$ e

(b) $\left| f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p \right| \leq C_\lambda A^n n! \, |z|^n \; \forall z \in \overline{D}_\lambda - \{0\}$

Então

$$F(t) = (\mathcal{B}f)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re(\frac{1}{z}) = \lambda} f(z) e^{\frac{t}{z}} \frac{dz}{z^2}$$

é holomorfa numa vizinhança tubular de $\mathbf{R}^+$ $\Delta_A = \bigcup_{t_0 \geq 0}\{t \in \mathbf{C}: |t - t_0| < 1/A\}$. *Alem disso,* $F(t)$ *verifica* $|F(t)| \leq K_{\lambda,A'}\, e^{\lambda Re(t)}$ $\forall t \in \Delta_{A'}, A' > A$.



Proposição 3. *Seja* $F(t)$ *analítica em* Δ_A *e tal que* $\forall \lambda > \mu$, $A' > A$ *existe* $K_{\lambda,A'} > 0$ *com* $|F(t)| \leq K_{\lambda,A'} e^{\lambda Re(t)}$ $\forall t \in \Delta_{A'}$.

Então $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t/z} F(t)dt$ *verifica:*

(a) $f(z)$ *é holomorfa no disco* $D_\mu = \{z \in \mathbf{C} \mid Re(\frac{1}{z}) > \mu\}$

(b) $f(z)$ *é assintótica à* $\hat{f} = \sum a_n z^{n+1}$ *com estimativas Gevrey em cada disco fechado* $\overline{D}_\lambda - \{0\}$ *(como consequência* $|a_n| \leq C_\lambda n! A^n$, $\hat{f} \in \mathbf{C}_2[[z]]$*)*

Prova da Proposição 1:

a) Por hipótese $e^{-xt}F(t) \in L^1([0, +\infty))$ $\forall_{x} Re(x) > \mu \Rightarrow f(x) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-xt}F(t)dt$ é holomorfa no semi-plano $Re(x) > \mu$.

Logo $f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{z}}F(t)dt$ é holomorfa no disco aberto $Re(\frac{1}{z}) > \mu$.

Para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, considere a diferença

$$G_n(t) = F(t) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p t^p$$

Então

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{+\infty} F(t)e^{-t/x}dt \\
&= \int_0^{+\infty} (\sum_0^{n-1} a_p t^p)e^{-\frac{t}{x}}dt + \int_0^{+\infty} (F(t) - \sum_0^{n-1} a_p t^p)e^{-\frac{t}{x}}dt \\
&= \sum_0^{n-1} a_p p! x^{p+1} + \int_0^{+\infty} G_n(t)e^{-\frac{t}{x}}dt
\end{aligned}$$

Logo:

$$\int_0^{+\infty} G_n(t)e^{-\frac{t}{x}}dt \text{ existe .}$$

Por hipótese, $\exists K_n > 0 |\ |G_n(t)| \leq K_n t^n$ se $t \in (0, 1]$

Então:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 G_n(t)e^{-\frac{t}{x}}dt\right| \leq \int_0^1 K_n t^n e^{-tRe(\frac{1}{x})}dt \\
&= K_n \int_0^1 t^n \cdot \frac{1}{1 + tRe(\frac{1}{x}) + \frac{t^2(Re(\frac{1}{x}))^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n(Re(\frac{1}{x}))^n}{n!} + \cdots} dt \\
&\leq K_n \int_0^1 t^n \cdot \frac{n!}{t^n(Re(\frac{1}{x}))^n} dt = K_n \cdot n!(Re(\frac{1}{x}))^{-n} \\
&\leq K_n n! \frac{|x|^n}{(\cos\theta)}
\end{aligned}$$

Lema. $0 < \theta < \pi/2$; $x \in \overline{V}_{\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2},p} \Rightarrow Re(\frac{1}{x}) \geq \frac{\cos\theta}{|x|}$.

Seja agora $\int_1^{+\infty} G_n(t)e^{-\frac{t}{x}}dt$.

Considere $Re(\frac{1}{x}) \geq \chi > \mu$ *e* $H_n(t) = \int_1^t G_n(t)e^{-t\chi}dt$.

Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} G_n(t)e^{-\frac{t}{x}}dt &= \int_1^{+\infty} G_n(t)e^{-(\frac{1}{x}-\chi)t}e^{-\chi t}dt \\ &= (\frac{1}{x}-\chi)\int_1^{+\infty} H_n(t)e^{-(\frac{1}{x}-\chi)t}dt\end{aligned}$$

Como $H_n(t)$ *é limitada em* $[1,+\infty[$, *temos:*

$$\begin{aligned}\left|\int_1^{+\infty} G_n(t)e^{-\frac{t}{x}}dt\right| &\leq \frac{\left|\frac{1}{x}-\chi\right|}{Re(\frac{1}{x})-\chi}K_n' e^{-(Re(\frac{1}{x})-\chi)} \\ &\leq \left|\frac{1}{x}-\chi\right|\cdot\frac{|x|}{\cos\theta-\chi|x|}\cdot K_n' e^{-(Re\frac{1}{x}-\chi)} \\ &= \frac{|1-\chi x|}{\cos\theta-\chi|x|}\cdot K_n' e^{-(Re(\frac{1}{x})-\chi)} \\ &\leq \frac{|1-\chi x|}{\cos\theta-\chi|x|}K_n' e^{\frac{\chi|x|-\cos\theta}{|x|}}\end{aligned}$$

$$= \frac{|1-\chi x|}{\cos\theta-\chi|x|}K_n' e^{\chi}\cdot e^{-\frac{\cos\theta}{|x|}} \leq K_n''(\theta,p)\,|x|^n$$

$\therefore$

$$\left|f(x)-\sum_{0}^{n-1}a_p p!x^{p+1}\right| = \left|\int_0^{+\infty} G_n(t)e^{-\frac{t}{x}}dt\right|$$

$$\leq \left|\int_0^{1} G_n(t)e^{-\frac{t}{x}}dt\right| + \left|\int_1^{+\infty} G_n(t)e^{-\frac{t}{x}}dt\right|$$

$$\leq K_n n!\frac{|x|^n}{(\cos\theta)^n} + K_n''(\theta,p)\,|x|^n$$

$$= C_n\,|x|^n, \qquad C_n = C_n(\theta,p).$$

$\therefore$ $f(x)$ *é assintótico à* $\sum_{p=0}^{\infty} a_p p!x^{p+1}$ em $V_{-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2},p}$ quando $x \to 0$.

Demonstração da Proposição (2):

1) Seja $\mu > 0$, $A > 0$, $B > 0$ ($B \leq A$) e duas sequências crescentes (M_n), (N_n) com $N_n \leq M_n$.

Seja f holomorfa no disco $D_\mu = \{x | Re(\frac{1}{x}) > \mu\}$ e suponha $f \xrightarrow{\sim} \hat{f} = \sum a_n x^{n+1}$ quando $x \to 0$, $x \in D_\mu$, isto é; existe para cada $\chi > \mu$ uma constante $C_\chi > 0$ tal que

(a) $|a_n| \leq C_\chi N_{n+1} B^{n+1}$

(b) $\left|\frac{f(x)-\sum_{p=0}^{n-1} a_p x^{p+1}}{|x|^{n+1}}\right| \leq C_\chi M_{n+1} A^{n+1}$, $\forall x \in \overline{D}_\chi - \{0\}$.

Então

$$F(t) = (\mathcal{B}f)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Re(\frac{1}{x})=\chi} f(x)e^{\frac{t}{x}}\frac{dx}{x^2} \text{ satisfaz}$$

(1) F é C^∞ em $[0,+\infty)$ e

(2) $\left|F^{(n)}(t)\right| \leq C_\chi \sup(1, \frac{1}{2\chi})(N_n B^n + M_{n+1}A^{n+1})e^{\chi t}, t \geq 0$

Prova:

Vimos que: $\mathcal{B}(x^{p+1}) = \frac{t^p}{p!}$. Então

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Re(\frac{1}{x})=\chi}$$

$$\left(f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^{p+1}\right) e^{\frac{t}{x}}\frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{Re(\frac{1}{x})=\chi}$$

$$\left(\sum_{0}^{n-1} a_p x^{p+1}\right) e^{\frac{t}{x}}\frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow F(t) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \frac{t^p}{p!} + \frac{1}{2\pi i}\int_{Re(\frac{1}{x})=\chi} (f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^{p+1}) e^{\frac{t}{x}}\frac{dx}{x^2}$$

Seja agora $g(x) = f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^{p+1}$. Então $g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(n)}(0) = 0$ e $\frac{g(x)}{x^p}$ satisfaz $(L\mu)$ para $p = 0, 1, \cdots, n-1$.

Então:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}\int_{Re(\frac{1}{x})=\chi} g(x) e^{\frac{t}{x}}\frac{dx}{x^2} = \int_{Re(\frac{1}{x})=\chi} g(x) e^{\frac{t}{x}}\frac{dx}{x^{n+2}}$$

Logo

$$F(t) \text{ é } C^\infty \text{ em } [0, +\infty[.$$

Note que

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}\left(F(t) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p \frac{t^p}{p!}\right) = F^{(n-1)}(t) - F^{(n-1)}(0)$$

Então:

$$F^{(n-1)}(t) = F^{(n-1)}(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{Re(\frac{1}{x})=\chi} g(x)e^{\frac{t}{x}}\frac{dx}{x^{n+2}}$$

$$\left|F^{(n-1)}(t)\right| \le \left|F^{(n-1)}(0)\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{Re(\frac{1}{x})=\chi} g(x)e^{\frac{t}{x}}\frac{dx}{x^{n+2}}\right| \le \left|F^{(n-1)}(0)\right|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} C_\chi M_{n+1}A^{n+1}\left|x\right|^{n+1}e^{t\chi}\frac{dy}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\left|x\right|^{n+1}}$$

$$\le C_\chi N_n B_n + \frac{1}{2\pi}C_\chi M_{n+1}A^{n+1}e^{t\chi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}$$

$$= C_\chi \sup\left(1,\frac{1}{2\chi}\right)\left(N_n, B^n + M_{n+1}A^{n+1}\right)e^{\chi t}$$

Se $M_n = N_n = n!$ isto é se $\hat{f} = \sum a_n x^{n+1} \in \mathbf{C}_2[[x]]$ e $f(x) \overset{\sim}{\Rightarrow} \hat{f}$ com estimativas Gevrey-2 então $A = B > 0$ temos $N_nB^n + M_{n+1}A^{n+1} = n!A^n + (n+1)^{n!}A^{n+1} = n!A^n(1+(n+1)A)$. Assim

$$\left|F^{(n)}(t)\right| \le C_\chi n!A^n(1+(n+1)A)e^{\chi t}$$

Como consequência temos: se

(a) $|a_n| \le C_\chi(n!)A^n$ e

(b) $\left|\frac{f(x)-\sum_0^{n-1}a_p x^{p+1}}{|x|^{n+1}}\right| \le C_\chi(n!)A^n$ para $x \in \overline{D}_\chi - \{0\}$.

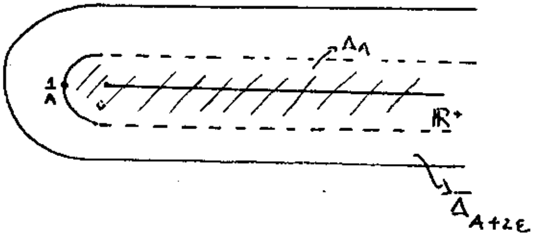
Então $\forall\varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon > 0|$.

$$\left|F^{(n)}(t)\right| \le K_\varepsilon C_\chi n!(A+\varepsilon)^n e^{\chi t} \quad t \ge 0, n \in \mathbf{N}.$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F^{(n)}(t)}{n!}\right| \le C'_{\chi,\varepsilon}(A+\varepsilon)^n e^{\chi t} \quad t \ge 0$$

Escreva: $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n$ considerando que $\left|\frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}\right| \leq C'_{\chi,\varepsilon}(A+\varepsilon)^n e^{\chi t_0}$, temos: $F(t)$ é analítica na vizinhança de $\mathbf{R}+$

$$\Delta_A = \bigcup_{t_0 \geq 0} \{t \in \mathbf{C} | t - t_0| < \frac{1}{A}\}$$



de fato: Seja $t \in \Delta_A \Rightarrow |t - t_0| < \frac{1}{A}$ para algum $t_0 \in \mathbf{R}+$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $|t - t_0| \leq \frac{1}{A+2\varepsilon}$ com $t \in \overline{\Delta}_{A+2\varepsilon}$.
Então:

$$F(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{F^n(t_o)}{n!}(t - t_0)^n$$

$$\Rightarrow |F(t)| \leq \sum_{n \geq 0} \left|\frac{F^{(n)}t_0)}{n!}\right| |t - t_0|^n$$

$$\leq \sum_{n \geq 0} C'_{\chi,\varepsilon}(A+\varepsilon)^n e^{\chi t_0} \cdot \frac{1}{(A+2\varepsilon)^n}$$

$$= C'_{\chi,\varepsilon} e^{\chi t_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{A+\varepsilon}{A+2\varepsilon}\right)^n = C'_{\chi,\varepsilon} e^{\chi t_0} \frac{1}{1 - \frac{A+\varepsilon}{A+2\varepsilon}}$$

$$= C''_{\chi,\varepsilon} e^{\chi t_0} \leq C''_{\chi,\varepsilon} e^{\chi(Ret + \frac{1}{A})} \leq C'''_{\chi,\varepsilon} e^{\chi Re(t)}$$

Assim, $F(t)$ é analítica em Δ_A e verifica $|F(t)| \leq K_{\chi,A'} e^{\chi Re t}$ $\forall t \in \Delta_{A'}$, $A' > A$.

Demonstração da Proposição 3:

A proposição 3 corresponde a recíproca da proposição 2.

Seja $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} F(t) dt$, integrando por partes $f(x) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^{p+1} + x^n \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} F^{(n)}(t) dt$.

Pela fórmula de Cauchy, temos.

$F^n(t) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \frac{F(u)du}{(u-t)^{n+1}}$, onde γ_t: pequeno círculo em torno de t e contido em $\Delta_{A'}, A' > A$.

Por hipótese

$$|F(u)| \leq K_{\chi',A'} e^{\chi' Re(u)} \leq K_{\chi,A'} e^{\frac{\chi'}{A'}} \cdot e^{\chi' t} \text{ para } u \in \gamma_t$$

Então:

$$\begin{aligned}\left|F^{(n)}(t)\right| &\leq K_{\chi',A'} e^{\frac{\chi'}{A'}} A'^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{(\chi - Re\frac{1}{x})t} dt \\ &\leq K_{\chi',A'} e^{\frac{\chi'}{A'}} \frac{A'}{\chi - \chi'} n! (A+\varepsilon)^n \text{ para } Re\frac{1}{x} \geq \chi > \chi'.\end{aligned}$$

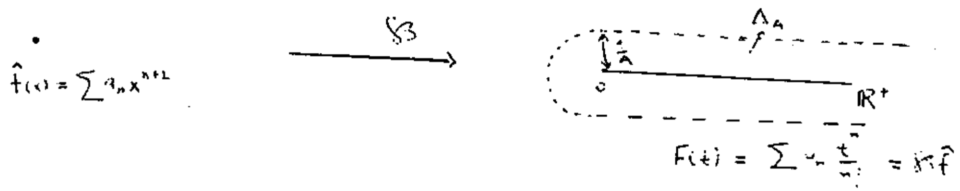
$$\begin{aligned}\therefore \quad \left|f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^{p+1}\right| &\leq |x|^{n+1} \left|\int_0^{+\infty} F^{(n)}(t) e^{-\frac{t}{x}} dt\right| \\ &\leq |x|^{n+1} K_{\chi',A'} e^{\frac{\chi'}{A'}} \frac{A'}{\chi - \chi'} n! (A+\varepsilon)^n \int_0^{+\infty} e^{-t Re\frac{1}{x}} dt \\ &\leq |x|^{n+1} C_{\chi',A'} (A+\varepsilon)^{n+1} \cdot (n+1)!.\end{aligned}$$

§II-8 Séries Borel-somáveis e 1-somáveis

Definição: Seja $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$. Dizemos que $\hat{f}$ é Borel somável na direção $\mathbf{R}+$ se $F(t) = \mathcal{B}\hat{f}(t)$ verifica:

(1) $F(t)$ é convergente $(\because \hat{f} \in \mathbf{C}_2[[x]])$ e

(2) $F(t)$ se prolonga analíticamente a uma vizinhança tubular de $\mathbf{R}^+$ com crescimento exponencial, isto é $\exists K > 0| \; (|F(t)e^{-\chi t}| < K, \; t \in \Delta_A,$ algum $\chi > 0)$.



Observação: Substituindo $\mathbf{R}+$ por um raio d, definimos as séries Borel-somáveis na direção d.

Pelas proposições (2) e (3) anteriores. As séries Borel-somáveis na direção se identificam aos germes de funções holomorfas definidos nos discos abertos $D_\mu = \{x \in \mathbf{C}|Re(\frac{1}{x}) > \mu\}$ e que possuem desenvolvimento assintótico com estimativas Gevrey em 0.

Definição: Seja $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ Borel-somável na direção $\mathbf{R}+$ (direção d).

Então definimos a *soma de Borel de $\hat{f}$ na direção* $\mathbf{R}+$ como sendo a função

$$f(x) = \mathcal{L}(\mathcal{B}\hat{f})(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}(\mathcal{B}\hat{f})(t)dt$$

Se

$$\hat{f} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

então

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \tilde{f}(t) dt$$

com $\tilde{f}(t)$ = prolongamento analítico de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ à uma vizinhança de $\mathbf{R}+$.

Assim, $f(x)$ é uma materialização de $\hat{f}$, é uma função holomorfa no disco $D_\mu = \{Re(\frac{1}{x}) > \mu\}$ e que representa $\hat{f}$ assintóticamente, com estimativas Gevrey.

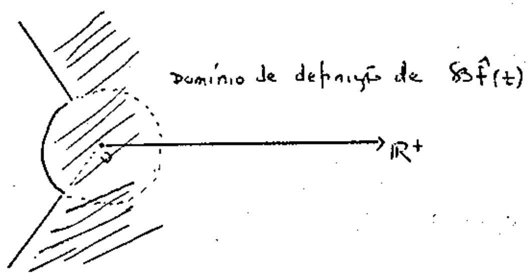
Observação: $\mathbf{C}[[x]]$ contém o sub anel das séries Borel- somáveis numa direção d.

Para os nossos propósitos (unicidade da soma) precisamos de mais um refinamento, o que nos leva ao conceito de ***séries 1-somáveis*** numa dada direção.

Definição: Seja $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$. Dizemos que $\hat{f}$ é ***1-somável na direção*** $\mathbf{R}+$ se

(1) $\mathcal{B}\hat{f}(t)$ é convergente $(\therefore \hat{f} \in \mathbf{C}_2[[x]])$

(2) $\mathcal{B}\hat{f}(t)$ possui extensão holomorfa à uma vizinhança setorial de $\mathbf{R}^+$ com crescimento exponencial.



Neste caso, a soma de Borel de $\hat{f}$; $f(x) = \int_{\mathbf{R}+} e^{-\frac{t}{x}}(\mathcal{B}\hat{f})(t)dt$ admite extensão analítica à um setor de bissetriz $\mathbf{R}+$ e abertura $> \pi$. Basta observar que $f^+(x) = \mathcal{L}_{d^+}(\mathcal{B}\hat{f})$ e $\overline{f}(x) = \mathcal{L}_{d^-}(\mathcal{B}\hat{f})$ d^+ = semi-reta de ângulo θ^+ com $\mathbf{R}_+$ (d^-=semi-reta de ângulo $\overline{\theta}$).
são prolongamentos de $f(x) = \mathcal{L}_{\mathbf{R}^+}\mathcal{B}\hat{f}$.

Assim, neste caso podemos variar a semi-reta de integração e prolongar a soma de Borel de $\hat{f}$ à um domínio que contém um setor grande ($> \pi$).

O radar de Borel de $\hat{f}$ é então a soma $f(x) = \int_d e^{-\frac{t}{x}}(\mathcal{B}\hat{f})(t)dt$ quando d varia.

Teorema de Unicidade. *Se $\hat{f}$ é 1-somável na direção $\mathbf{R}^+$ então a soma de Borel $f(x) = \int_{\mathbf{R}_+} e^{-\frac{t}{x}}(\mathcal{B}\hat{f})(t)$ de $\hat{f}$ é a unica função holomorfa num setor de abertura $> \pi$ e bissetriz $\mathbf{R}^+$ que é assintótica com estimativas Gevrey à $\hat{f}$ quando $x \to 0$.*

Demonstração:

1ª Prova: Segue do Teorema de Denjoy-Carleman (veja capítulo I) pois as constantes de assintocidaddde $B_n = Cn!A^n$ verificam:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt[n]{B_n}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{Ac^{\frac{1}{n}}(n!)^{\frac{1}{n}}} \text{ divergente}$$

2ª Prova: Veja a prova da unicidade do desenvolvimento assintótico quando temos estimativas Gevrey em setores grandes. (Teorema 1(§I.3) Capítulo I).

Definição: Dizemos que $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ é *1-somável* se for 1-somável em toda direção d exceto um nº finito $\sum_1, \cdots, \sum_m$.

$\sum_1, \cdots, \sum_m$ são chamados direções singulares de $\hat{f}$.

Ou seja, $\hat{f}$ é 1-somável se $(\mathcal{B}\hat{f})(t)$ for convergente e se prolongar à $\mathbf{C} - \sum_1 \cup \cdots \cup \sum_m$ com crescimento exponencial (uniforme) em cada semi-reta $d \neq \sum_j$.

Exemplo: $\hat{f} = \sum_{n \geq 0} n! x^{n+1}$ é 1-somável com uma unica direção singular, $\mathbf{R}^+$.

Exercício: Se $\hat{f} = \sum a_n x^{n+1}$ é 1-somável em todas as direções, mostre que $\hat{f}$ é convergente.

Exercício: Considere a equação diferencial $\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = y - x$. Mostre que a solução $\hat{y}(x)$ com $\hat{y}(0) = 0$ é 1-somável.

Podemos agora definir uma função ressurgente.

Definição (1ª versão): Seja Ω um sub grupo discreto de $\mathbf{C}$ (só usaremos o caso $\Omega = \omega \cdot \mathbf{Z}$, $\omega \in \mathbf{C}$). Seja $\widetilde{\mathbf{C} - \Omega}$ a superfície de Riemann simplesmente conexa que recobre $\mathbf{C} - \Omega$ (podemos pensar que $\widetilde{\mathbf{C} - \Omega}$ é um disco). Toda função holomorfa em $\widetilde{\mathbf{C} - \Omega}$ com crescimento exponencial no ∞ será chamada função resurgente.

Assim, estamos interessados nas funções de $\mathbf{C} - \Omega$ que possuem singularidades (ramificações) em Ω e que tem bom crescimento no infinito.

Exemplo: $f(z) = (z-1)^{\alpha} \log(z-1)$ $(\Omega = \mathbf{Z})$.

Definição: Uma série formal $\hat{f} \in \mathbf{C}[[x]]$ é ressurgente se sua transformada de Borel $\mathcal{B}\hat{f}$ o for.

Observação: Note que não existe relação geral entre séries 1-somáveis e resurgentes. Se uma série 1-somável possui uma direção singular $\sum$ com todos os pontos singulares, ela não é ressurgente (a resurgência implica que as singularidades são discretas).

Por outro lado podemos ter uma função resurgente com infinitas direções singulares (Exemplo: tome $\Omega = \omega_1 \mathbf{Z} \oplus \omega_2 \mathbf{Z}$ ω_1, ω_2 linearmente independentes em $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$).

No próximo capítulo vamos estudar com detalhes a algebra das funções resurgentes.

Resumimos, para facilidade de consulta, as propriedades principais da transformada de Borel que usaremos nos próximos capítulos.

$$\varphi(z)^{z \sim \infty}: \text{holomorfa em} Rez \geq C \overset{\mathcal{B}}{\longmapsto} \tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Rez=c} \varphi(z) e^{tz} dz$$

$\varphi(z) = \int_{\mathbf{R}^+} \tilde{\varphi}(t) e^{-tz} dt \overset{\mathcal{L}}{\longleftarrow} \tilde{\varphi}(t)$: holomorfa numa vizinhança de $\mathbf{R}^+$ e a crescimento exponencial.

Propriedades

1) $\frac{1}{z^{n+1}}$, $n \geq 0 \longmapsto \frac{t^n}{n!}$, $1 \mapsto \delta_0 \sim \frac{1}{2\pi i t}$; $z^n \mapsto \delta_0^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2\pi i t^{n+1}}$.

2) z^α $\alpha \in \mathbf{C} \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $e^{-\frac{a}{z}} \longmapsto \delta(t-a) = \frac{1}{2\pi(t-a)i}$

3) $\varphi(\lambda z) \longmapsto \frac{1}{\lambda}\tilde{\varphi}(\frac{t}{\lambda})$.

4) $\varphi(z+\lambda) \longmapsto e^{-\lambda t}\tilde{\varphi}(t)$.

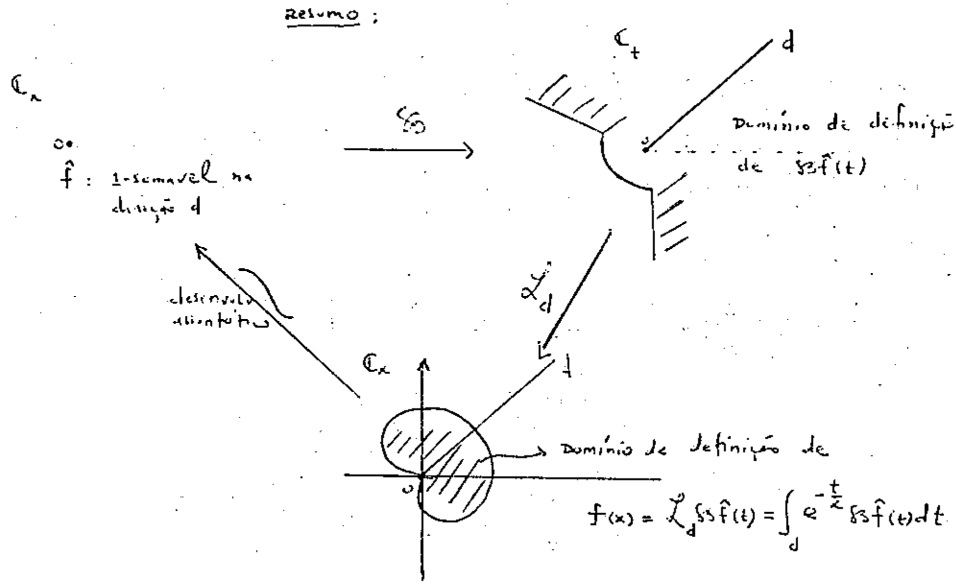
5) $\varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z) \longmapsto \tilde{\varphi}_1(t) * \tilde{\varphi}_2(t) = \int_0^t \tilde{\varphi}_1(u)\tilde{\varphi}_2(t-u)du$.

6) $\frac{d}{dz}\varphi(z) \longmapsto -t\tilde{\varphi}(t)$; $\frac{d}{dz} \longmapsto \partial =$ multiplicação por $-t$.

7) $z\varphi(z) \longmapsto \frac{d}{dt}\tilde{\varphi}(t)$.

8) $\varphi_3(z) = \varphi_1(z+\varphi_2) = \varphi_1 \circ (Id + \varphi_2)$, $\varphi_2 = 0(z^2)$ $\varphi_3 = \varphi_1 + (\frac{\partial}{\partial z}\varphi_1)\varphi_2 + \frac{1}{2!}(\frac{\partial^2}{\delta z^2}\varphi_1)\varphi_2^2 + \cdots \mapsto \tilde{\varphi}_1 + \sum \frac{(-1)^n \varphi^{*n}}{n!} * (t^n \tilde{\varphi}_1)$.

9) $\exp_* \varphi = \sum \frac{\varphi^{*^n}}{n!} = Id + \varphi + \varphi * \frac{\varphi}{2!} + \cdots$.



APÊNDICE (AO CAPÍTULO II)

A FUNÇÃO GAMA

Considere o produto $ze^{\gamma z}\Pi_{n=1}^{\infty}\{(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\}$ onde $\gamma = \lim_{m\to\infty}\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \log m\} = 0,5772157\cdots$ (γ = Euler - Mascheroni: constante).

O produto acima representa uma função de z para todos os valores de z, pois:

$$\left|\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right| = \left|-\frac{1}{2}\frac{z^2}{n^2} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{n^3} - \cdots\right|$$

$$\leq \frac{|z|^2}{n^2}\{1 + \left|\frac{z}{n}\right| + \left|\frac{z}{n}\right|^2 + \cdots\}$$

$$\leq \frac{1}{4}\frac{N^2}{n^2}\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{N^2}{n^2}$$

Desde que a série $\sum_{n+1}^{\infty}\frac{N^2}{2n^2}$ converge, quando $|z| \leq \frac{1}{2}N$.

$\sum_{n=N+1}^{\infty}\{\log(1+\frac{z}{n}) - \frac{z}{n}\}$ é absolutamente e uniformemente convergente. Logo define uma função analítica. Sua exponencial. $\Pi_{N+1}^{\infty}\{(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\}$ é analítica para $|z| \leq \frac{1}{2}N$.

Definição: $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\Pi\{(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\}$.

- $\Gamma(z)$ é analítica exceto nos pontos $z = 0, -1, -2, \cdots$ onde tem polos simples.

Proposição. $\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{sen}\,\pi z}$.

Prova:

Pela definição

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2}\Pi_{n=1}^{\infty}\{(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\}\Pi_{n=1}^{\infty}\{(1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}}\}\frac{-\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$$

Como $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ temos o resultado.

Expressão Integral para $\Gamma(z)$:

A integral $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ representa uma função analítica para $Re(z) > 0$.

Proposição. $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$.

Prova: Seja $x = Re(z) > 0$; $e^{-t} = \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{t}{n})^n$. Então

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{z-1}dt.$$

Se

$$\pi(z,n) = \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{z-1}dt,$$

temos

$$\pi(z,n) = n^z\int_0^1 (1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau \quad \text{onde } \tau = \frac{t}{n}$$

Vamos agora integrar $\int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau$ por partes:

$$u = (1-\tau)^n \Rightarrow du = n(1-\tau)^{n-1}(-1)d\tau$$

$$dv = \tau^{z-1} d\tau \Rightarrow v = \int \tau^{z-1} d\tau = \frac{1}{z}\tau^z$$

$$\int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau = (1-\tau)^n \cdot \frac{1}{z}\tau^z \Big|_{\tau=0}^{\tau=1} + \int_0^1 n(1-\tau)^{n-1} \frac{1}{z}\tau^z d\tau$$

$$= 0 + \frac{n}{z}\int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\tau^z d\tau$$

Integrando novamente,

$$\int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau = \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \int_0^1 (1-\tau)^{n-2}\tau^{z+1} d\tau$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau$$

$$= \left(\frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}\right)\left(\tau^{z+n}\Big|_{\tau=0}^{\tau=1}\right)$$

$$= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

$$\therefore \pi(z,n) = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} n^z \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(z).$$

Observação: Seja $\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{z-1} dt$ e $\Gamma_1(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$. Então:

$$\Gamma_1(z) - \Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} [\int_0^n \{e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n\} t^{z-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt]$$

Agora, $\lim_{n\to\infty}\int_n^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = 0$ pois $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ converge.

Mostremos que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\{e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n\}t^{z-1}dt = 0$ observe que $0 \leq e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n \leq \frac{t^2e^{-t}}{n}$

$$\therefore \int_0^n \left|e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n\right| |t|^{z-1}\,dt \leq \int_0^n \frac{t^2e^{-t}}{n} t^{x-1}dt$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^{x+1}dt \leq \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x+1}dt}_{\Gamma(x+2)}$$

$$\downarrow_{0} \; n \to +\infty$$

$$\therefore \quad \Gamma(z) = \Gamma_1(z)$$

$$\therefore \quad Re(z) > 0 \quad : \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

Observação: A fórmula $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ não é aplicavel quando $Re(z) < 0$. Contudo podemos extendê-la. Considere a função

$$\Gamma_2(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}(e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2!} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{t^k}{k!}dt$$

onde $k \in \mathbf{Z}| - k > x > -k-1$, $x = Re(z)$. Integrando por partes temos, quando $x < -1$

$$\Gamma_2(z) = \left[\frac{t^z}{z}\left(e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2!} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{t^k}{k!}\right)\right]_0^{\infty}$$

$$+ \frac{1}{z}\int_0^{\infty} t^z\left(e^{-t} - 1 + t - \cdots + (-1)^k\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right)dt$$

como $x+k<0$ e $x+k+1>0$ a 1ª parte tende a 0

Logo

$$\Gamma_2(z) = \frac{1}{z}\Gamma_2(z+1)$$

A mesma prova aplica-se quando x está entre 0 e 1 e obtemos então:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma_2(z) \qquad 0 > x > -1$$

Esta última equação mostra que para $-1 < x < 0$, $x = Rez$

$$\Gamma_2(z) = \Gamma(z)$$

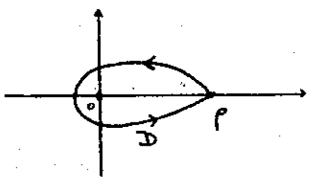
Obtemos assim o teorema de Cauchy e Saalschiitz

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\left(e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2!} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{t^k}{k!}\right)dt$$

onde $k \in \mathbf{Z}$ é o menor inteiro mais próximo de $Re(z)$.

A Fórmula de Hankel para $\Gamma(z)$ como Integral de contorno:

Seja D o contorno



Considere $\int_D (-t)^{z-1} e^{-t} dt$, onde $Re(z) > 0$, $z \notin \mathbf{Z}$

$$\begin{cases} (-t)^{z-1} = e^{(z-1)\log(-t)}, \log(-t) \in \mathbf{R} \text{ se } t \in \mathbf{R} \\ \text{em } D\text{:} \quad -\pi \leq \arg(-t) \leq \pi \end{cases}$$

Vamos deformar D no caminho D':

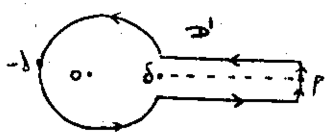
isto não altera o valor da integral.

Então: sobre o eixo real $\arg(-t) = -\pi$

e portanto:

$$\begin{aligned} (-t)^{z-1} &= e^{(z-1)\log(-t)} \\ = e^{(z-1)(\log t + i(-\pi))} &= e^{(z-1)\log t} \cdot e^{-i\pi(z-1)} \\ &= e^{-i\pi(z-1)} \cdot t^{z-1} \end{aligned}$$

e sob o eixo real (na última parte do caminho), $\arg(-t) = \pi$, $(-t)^{z-1} = e^{i\pi(z-1)} t^{z-1}$.



Sobre o círculo $|t| = \delta$, $-t = \delta e^{i\theta} \Rightarrow$

$$\int_D (-t)^{z-1} e^{-t} dt = \int_\rho^\delta e^{-i\pi(z-1)} t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} (\delta e^{i\theta})^{z-1} \cdot e^{\delta(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} \cdot \delta e^{i\theta} \cdot i d\theta$$

$$+ \int_\delta^\rho e^{i\pi(z-1)} \cdot t^{z-1} \cdot e^{-t} dt$$

$$= \int_\delta^\rho \left(e^{i\pi(z-1)} - e^{-i\pi(z-1)} \right) t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$+ i\delta^z \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta z} \cdot e^{\delta(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} d\theta$$

$$= \int_\delta^\rho \left(e^{i\pi z} \cdot e^{-\pi i} - e^{-i\pi z} \cdot e^{i\pi} \right) t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$+ i\delta^z \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta z + \delta(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} d\theta$$

$$= \int_\delta^\rho - \left(e^{i\pi z} - e^{-\pi z i} \right) t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$+ i\delta^z \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta z + \delta(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} d\theta$$

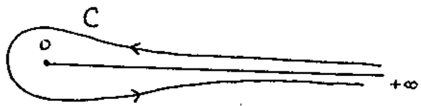
$$= -2i \operatorname{sen} \pi z \int_\delta^\rho t^{z-1} e^{-t} dt + i\delta^z \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta z + \delta(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} d\theta$$

Isto é verdade para todo $0 < \delta \leq \rho$. Faça agora $\delta \to 0$. Então: $\delta^z \to 0$ e $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta z + \delta(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} d\theta \to \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta z} d\theta$ pois $e^{i\theta z + \delta(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} \to e^{i\theta z}$ uniformemente.

Então:

$$\int_D (-t)^{z-1} e^{-t} dt = -2i \operatorname{sen} \pi z \int_0^\rho t^{z-1} e^{-t} dt$$

Fazendo então $\rho \to +\infty$ e seja C o limite do contorno D.



Então:

$$\int_C (-t)^{z-1} e^{-t} dt = -2i \operatorname{sen} \pi z \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt}_{\Gamma(z)}$$

$$\therefore \quad \Gamma(z) = -\frac{1}{2i \operatorname{sen} \pi z} \int_C (-t)^{z-1} e^{-t} dt$$

Esta é a *fórmula de Hankel* para $\Gamma(z)$. Note que como C não passa por $t = 0$, não precisamos da hipótese que $Re(z) > 0$ e $\int_C (-t)^{z-1} e^{-t} dt$ e analítica uni-valente, $\forall z$.

$\therefore$ A fórmula de Hankel vale $\forall z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

$\therefore \quad \forall z \in \mathbf{C} - \mathbf{Z}$,

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i \operatorname{sen} \pi z} \int_C (-t)^{z-1} e^{-t} dt.$$

Observação: Trocando z por $1-z$ e usando $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$ obtemos

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi} \int_C (-t)^{-z} e^{-t} dt.$$

Fórmula de Hankel

CAPÍTULO III

O CÁLCULO DIFERENCIAL RESURGENTE
TEORIA SIMPLIFICADA

§III-1) Introdução, motivação inicial (A sela-nó-linear)

Neste capítulo vamos introduzir a derivada de Ecalle na álgebra das funções resurgentes. Nos limitaremos ao caso mais simples e apenas ilustraremos as propriedades da derivada. As demonstrações requerem uma abordagem mais fina. Adotaremos o ponto de vista dos livros de cálculo, onde as demonstrações são deixadas para a análise.

Motivação inicial: Considere $\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{x^{n+1}}$, $\mathcal{B}f(t) = \tilde{f}(t) = \frac{1}{1-t}$ é uma função meromorfa com somente um polo simples em $t = 1$.

Vimos no capítulo anterior que

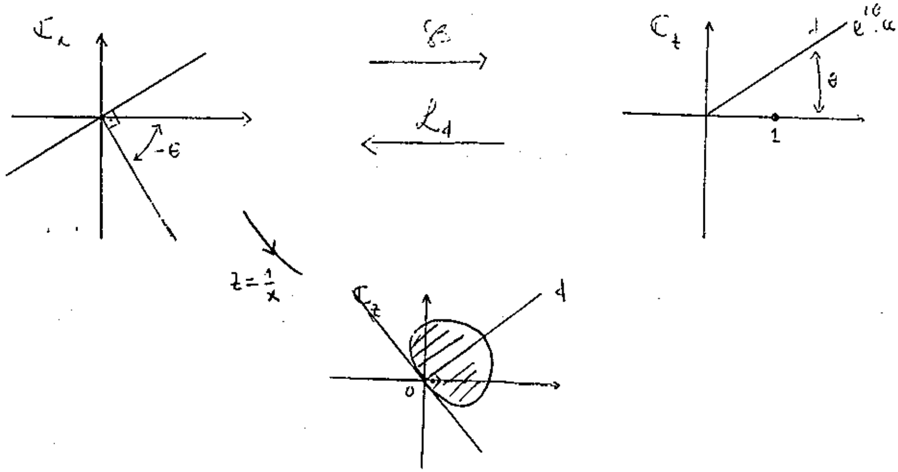
$$f^{\theta}(x) = \int_0^{e^{i\theta}\infty} e^{-xt} \frac{dt}{1-t}$$

é a soma de Borel de $\hat{f}(x)$ no semiplano $-\theta - \pi/2 < arg x < -\theta + \pi/2$ (condição para que $Re(xt) > 0$ quando $\arg t = \theta$).

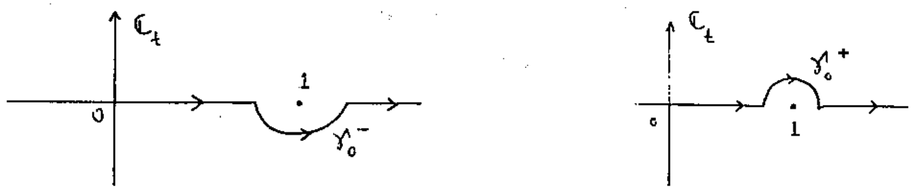
Para $\theta = 0$, definimos de modo analogo duas funções φ^{0+} e φ^{0-} integrando nos caminhos γ_0^+ e γ_0^- abaixo.

As funções φ^{θ}, φ^{0+} e φ^{0-} se deduzem uma das outras por prolongamento analítico. Por exemplo, podemos partir de

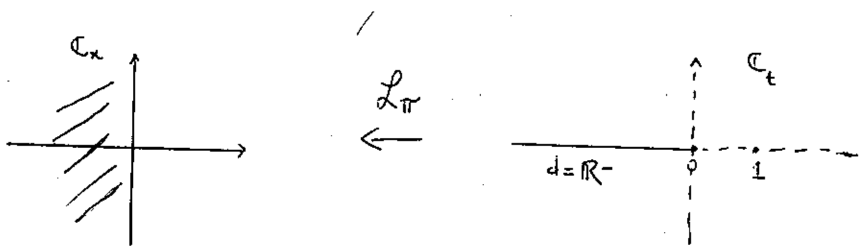
$$\varphi^{\pi}(x) = \int_{\mathbf{R}_-} e^{-xt} \frac{dt}{1-t}$$



Figura



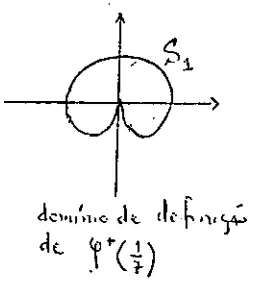
Figura

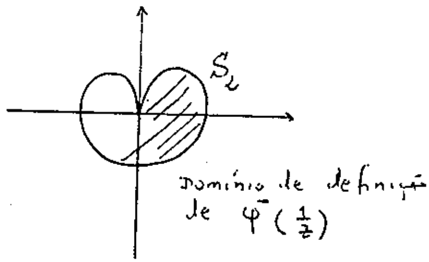


Figura

definida para $Rex < 0$

Variando a semi-reta de integração $\mathbf{R}_-$ no intervalo $]0, \pi]$ obtemos uma função φ^+ analítica para $\arg x \neq \pi/2$ e variando a semi-reta de integração no intervalo $[\pi, 2\pi[$ obtemos φ^- analítica em $\arg x \neq -\pi/2$.





Figura

Então no semi-plano $Re x < 0$ temos

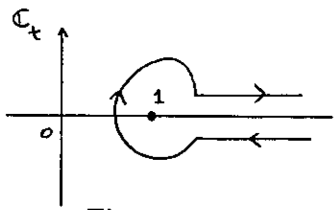
$$\varphi^\pi = \varphi^+ = \varphi^- \qquad \text{e} \qquad \varphi^{0+} = \varphi^+, \quad \varphi^{0-} = \varphi^-$$

Logo no semi-plano $Re x > 0$,

$$\varphi^+ - \varphi^- = \varphi^+(x) - \varphi^{0-}(x) = \int_\gamma e^{-xt} \frac{dt}{1-t}$$

$$= -2\pi i Res \left(\frac{e^{-tx}}{1-t} \right) \Big|_{t=1} = 2\pi i e^{-x}$$

onde γ é o caminho abaixo



Figura

Vemos assim que a ambiguidade no processo de resomação pode ser medida no plano de Borel, pois:

$$\varphi^{0^+}(x) = \varphi^{0^-}(x) + 2\pi i e^{-x}$$

Relação com a equação de Euler:

Note que $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} n!x^{n+1}$ é solução (formal) de $x^2\frac{dy}{dx} - y = x$ (equação de Euler), cuja solução geral é $y = \hat{f} + Ce^{-\frac{1}{x}}$. As somas φ^{0+} e φ^{0-} de $\hat{f}$ são soluções pois:

$$\mathcal{B}\left(x^2\frac{dy}{dx} - y = x\right) = t\tilde{f}(t) - \tilde{f}(t) = -1$$

E $\tilde{f}(t) = \frac{1}{1-t}$. Logo a monodromia na direção singular $\mathbf{R}_+$ é

$$\varphi^{0+} - \varphi^{0-} = 2\pi i e^{-\frac{1}{x}}$$

que é obtida então estudando o resíduo na singularidade.

A sela-nó linear: A equação de Euler é o exemplo mais simples dentro da classe de campos de vetores $X\colon \mathbf{C}^2, 0 \to \mathbf{C}^2, 0$ que chamamos sela-nó, estes tem a propriedade de que $DX(0)$ tem dois autovalores λ_1 e λ_2 com $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$.

Estes campos estão contidos na classe dos campos ressonantes que são campos de vetores $X : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^n, 0$ com $DX(0)$ tendo auto-valores $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ que verificam uma condição do tipo.

$$\exists m_1, \cdots m_n \in \mathbf{Z}\text{com} \sum m_j \geq 2$$

e

$$\sum m_j\lambda_j = 0.$$

A ressonância provoca o aparecimento de soluções divergentes com divergência do tipo que poderemos controlar (divergência tipo fatorial (Gevrey')) e são a fonte natural das funções resurgentes que vamos estudar.

Dito isto, voltemos à sela-nó linear geral:

$$x^2\frac{dy}{dx} = y(1+\lambda x) + f(x)$$

com $f(x)$ holomorfo e $f(0) = 0$.

1º caso: $\lambda = 0$. $x^2y' + ky = g(x)$, $g(0) = 0$, estamos interessados na solução $y(0) = 0$.

Seja $f(x) = xa(x)$, $g(x) = xb(x)$ então:

$x^2\frac{da}{dx} + (x+k)a = b(x)$ aplicando a transformada de Borel, obtemos:

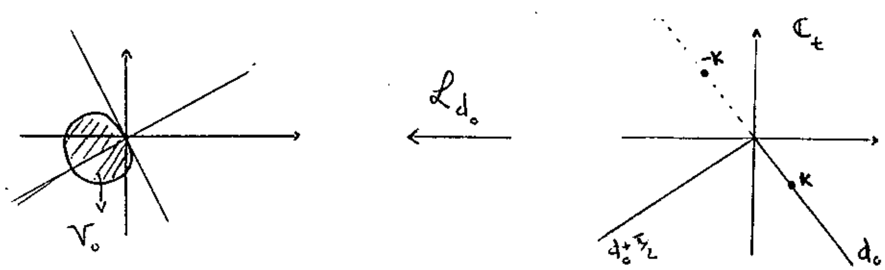
$$\mathcal{B}\left(x^2\frac{da}{dx} + (x+k)a\right) = \mathcal{B}b$$

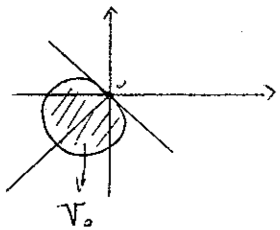
$$\Rightarrow (t+k)\mathcal{B}a = \mathcal{B}b$$

$\therefore$ $(\mathcal{B}a)(t) = \frac{(\mathcal{B}b)(t)}{t+k}$ tem somente um polo simples em $t = -k$.

Seja $\tilde{a}_d(x) = \int_d \frac{(\mathcal{B}b)(t)}{t+k} e^{-\frac{t}{x}}dt = \mathcal{L}_d\mathcal{B}a$, com $d \neq \arg(-k)$.

Fixemos a direção $d_0 = \arg(k)$



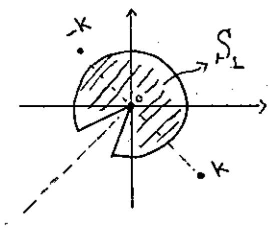


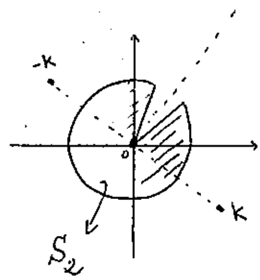
$\tilde{a}_{d_0}(x)$: holomorfa em V_0

com $\tilde{a}_{d_0}(x) \underset{x\to 0}{\xrightarrow{\sim}} a(x)$

Então $\tilde{a}_{d_0}(x)$ é holomorfa em V_0 (veja figura) e $\tilde{a}_{d_0}(x) \underset{x\to 0}{\xrightarrow{\sim}} a(x)$.

Podemos prolongar $\tilde{a}_{d_0}$ à $\tilde{a}^+(x)$ definida no setor S, de abertura $2\pi - \delta (\forall \delta > 0)$ e bissetriz em arg $(k) + \pi/2$; e também prolongar $\tilde{a}_{f_0}$ à $\tilde{a}^-(x)$ ao setor S_2 de bissetriz arg $k - \pi/2$.





Assim,

$$\tilde{a}^+(x) = \int_{\gamma^+} \mathcal{B}a(t) e^{-\frac{t}{x}} dt$$

$$\tilde{a}^-(x) = \int_{\gamma^-} \mathcal{B}a(t) e^{-\frac{t}{x}} dt.$$

Em $S_1 \cap S_2 = V_0 \cup V_1$ temos: $\tilde{a}^+ = \tilde{a}^-$ em V_0 e

$$\tilde{a}^+ - \tilde{a}^-|_{V_1} = \int_{\gamma^+ - \gamma^-} \mathcal{B}a(t) e^{-\frac{t}{x}} dt$$

$$= 2\pi i e^{-\frac{k}{x}} (\mathcal{B}b)(-k) = 2\pi i e^{-\frac{k}{x}} \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} (-k)^n.$$

Caso Geral: $x^2 y' = y(1 + \lambda x) + f(x)$, $f(0) = 0$ holomorfo.

Primeiro verifica-se que existe uma única solução $y(x)$ com $y(0) = 0$.

Integrando diretamente, temos:

$$y' = y \left(\frac{1 + \lambda x}{x^2} \right) + \frac{f(x)}{x^2},$$

então

$$\exp \left(- \int \left(\frac{1 + \lambda x}{x^2} \right) dx \right) = x^{-\lambda} e^{\frac{1}{x}}$$

é o fator integrante, logo:

$$\frac{d}{dx} \left(y x^{-\lambda} e^{\frac{1}{x}} \right) = f(x) x^{-2-\lambda} e^{\frac{1}{x}}$$

Então:

$$y(x) = x^{\lambda} e^{-\frac{1}{x}} \int_0^x f(t) t^{-2-\lambda} e^{\frac{1}{t}} dt$$

onde integramos no segmento $[0, x]$ para $Rex < 0$. Note que $y(x)$ é holomorfa em $\{Rex < 0\} \cap D_f$ fazendo a mudança de variaveis $-\frac{\xi}{x} = \frac{1}{t} - \frac{1}{x}$ obtemos:

$$y(x) = - \int_0^{-\infty} (1 - \xi)^{\lambda} f \left(\frac{x}{1 - \xi} \right) e^{-\frac{\xi}{x}} \cdot \frac{d\xi}{x}.$$

Seja $d \neq \mathbf{R}^+$, defina

$$y_d(x) = -\int_d (1-\xi)^\lambda f\left(\frac{x}{1-\xi}\right) e^{-\frac{\xi}{x}} \cdot \frac{d\xi}{x}$$

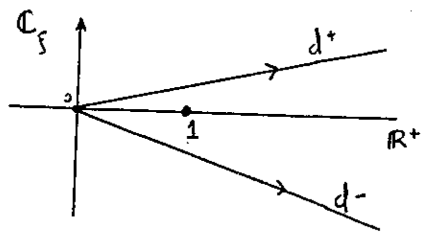
Se partirmos de $y_{\mathbf{R}^-}$ e variamos d até $\mathbf{R}^+$ (o integrando tem singularidade logaritmica em $\xi = 1$!) obtemos prolongamento analítico de $y_{\mathbf{R}^-}$ à setores grandes (de comprimento 3π na superfície de Riemann de $\log z$).

Sejam

$$y_{d^+}(x) = \int_{d^+} (1-\xi)^\lambda f\left(\frac{x}{1-\xi}\right) e^{-\frac{\xi}{x}} \frac{d\xi}{x}$$

$$y_{d^-}(x) = \int_{d^-} (1-\xi)^\lambda f\left(\frac{x}{1-\xi}\right) e^{-\frac{\xi}{x}} \frac{d\xi}{x}$$

onde $d^+ = \arg z = \varepsilon > 0$, $d^- = \arg z = -\varepsilon$



Seja

$$g(x) = y_{d^+} - y_{d^-} = \int_{d^+ - d^-} (1-\xi)^\lambda f\left(\frac{x}{1-\xi}\right) e^{-\frac{\xi}{x}} \frac{d\xi}{x}$$

Se $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$, temos:

$$g(x) = \sum a_n x^n \int_{d^+ - d^-} (1-\xi)^{\lambda - n} e^{-\frac{\xi}{x}} \frac{d\xi}{x}$$

Precisamos agora calcular $\int_{d^+-d^-}(1-\xi)^\alpha e^{-\frac{\xi}{x}}\frac{d\xi}{x}$.

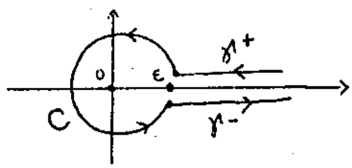
1º caso: $\alpha \in -\mathbf{N}$, $\alpha = -n$. Pelo Teorema dos Residuos temos:

$$\frac{1}{x}\int_{d^+-d^-}\frac{e^{-\frac{\xi}{x}}}{(1-\xi)^n}d\xi = \frac{2\pi i}{x}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}(e^{-\frac{\xi}{x}})|_{\xi=1}$$
$$= \frac{2\pi i(-1)^n}{(n-1)!x^n}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}2\pi i x^\alpha e^{\frac{1}{x}}.$$

2º caso: $\underline{\alpha \notin -\mathbf{N}}$:

Precisamos do lema:

Lema. *(fórmula de Hankel para $\Gamma(z)$) veja apêndice ao capítulo II)* $\int_C e^{-w}(-w)^{\beta-1}dw = \frac{-2\pi i}{\Gamma(1-\beta)}$ *onde C é o caminho da figura:*



Prova: Cortamos o plano dos w ao longo do eixo $\mathbf{R}^+$. Então $0 < \arg w < 2\pi$.

Em

$$\gamma^+: (-w)^{\beta-1} = e^{(\beta-1)}\log(-w)$$
$$= e^{(\beta-1)}[\log|w| + i(\arg w + \pi)]$$

Então:

$$\int_{\gamma+} e^{-w}(-w)^{\beta-1}dw = \int_{+\infty}^{\varepsilon}\exp[(\beta-1)(\log|w| +$$

com $\arg w = 0$, $w = \sigma + it$, $dw = d\sigma$. No outro lado do corte (γ^-) temos: $\arg w = 2\pi$, então:

$$
\begin{aligned}
(-w)^{\beta-1} &= e^{(\beta-1)\log(-w)} \\
&= e^{(\beta-1)(\log|w|+i(\arg w-\pi))} \\
&= e^{(\beta-1)(\log|w|+i(\arg w-\pi+2\pi)-2\pi i)} \\
&= e^{-2\pi i\beta} \cdot e^{(\beta-1)(\log|w|+i(\arg w+\pi)}.
\end{aligned}
$$

Então:

$$
\int_{\gamma-} e^{-w}(-w)^{-\beta-1}dw = e^{-2\pi\beta i} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-w} e^{(\beta-1)(\log|w|+i(\arg w+\pi))} dw
$$

Como

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|w|=\varepsilon} e^{-w}(-w)^{\beta-1}dw = 0,
$$

temos:

$$
\int_C = \int_{\gamma+} + \int_{\gamma-} = (e^{-2\pi i\beta} - 1) \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-w}(-w)^{\beta-1}dw.
$$

Como vamos integrar sobre o segmento $[w_1, \infty)$ com $\arg w_1 \sim 0^+$, temos:

$$
\begin{aligned}
(-w)^{\beta-1} = e^{(\beta-1)\log(-w)} &= e^{(\beta-1)(\log|w|+i\arg w+\pi i)} \\
&= e^{\pi i(s-1)} w^{\beta-1}
\end{aligned}
$$

Então:

$$
\begin{aligned}
&(e^{-2\pi i\beta}-1)\int_\varepsilon^\infty e^{-w}(-w)^{\beta-1}dw\\
&=(e^{-2\pi i\beta}-1)\int_\varepsilon^\infty e^{-w}e^{\beta\pi i}e^{-\pi i}w^{\beta-1}dw\\
&=(-1)e^{\beta\pi i}(e^{-2\pi i\beta}-1)\int_\varepsilon^\infty e^{-w}w^{\beta-1}dw\\
&=(e^{\pi\beta i}-e^{-\pi\beta i})\int_\varepsilon^\infty e^{-w}w^{\beta-1}dw\\
&=2i\,\mathrm{sen}\,\pi\beta\cdot\Gamma(\beta)=\frac{2\pi i}{\Gamma(1-\beta)}
\end{aligned}
$$

Voltemos agora ao cálculo da integral

$$\int_{d^+-d^-}(1-\xi)^\alpha e^{-\frac{\xi}{x}}\frac{d\xi}{dx}=\int_1=\int_{C_1+C_2+C_3}.$$

Fazendo $1-\xi=-w$ temos:

$$
\begin{aligned}
&\int(-w)^\alpha e^{-(\frac{1+w}{x})}\frac{dw}{x}\\
&=\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\int(-w)^\alpha e^{-\frac{w}{x}}dw\\
&=x^\alpha e^{-\frac{1}{x}}\int(-\frac{w}{x})^\alpha e^{-\frac{w}{x}}d(\frac{w}{x})\cdot\\
&=x^\alpha e^{-\frac{1}{x}}\int(-t)^\alpha e^{-t}dt\\
&=x^\alpha e^{-\frac{1}{x}}\frac{(-2\pi i}{\Gamma(-\alpha)}=-\frac{2\pi i x^\alpha e^{-\frac{1}{x}}}{\Gamma(-\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Então, voltando à $g(x) = y_{d^+} - y_{d^-}$ temos:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum a_n x^n \int_{d^+ - d^-} (1-\xi)^{\lambda-n} e^{\frac{-\xi}{x}} \frac{d\xi}{x} \\
&= \sum a_n x^n (-2\pi i) \frac{x^{\lambda-n} e^{-\frac{1}{x}}}{\Gamma(n-\lambda)} \\
&= -2\pi i x^{\lambda} e^{-\frac{1}{x}} \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\Gamma(n-\lambda)} \\
\therefore \quad g(x) &= -2\pi i x^{\lambda} e^{-\frac{1}{x}} \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\Gamma(n-\lambda)}.
\end{aligned}
$$

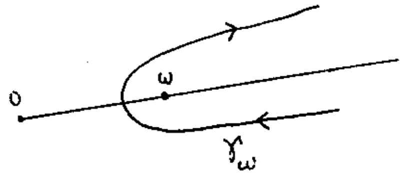
Visto que as ambiguidades do processo de resomação setorial podem ser analizadas diretamente no plano de Borel, vamos formalizar a idéia de Ecalle para este fim.

§III-2) O Cálculo Diferencial Resurgente

Com as notações anteriores, consideremos duas funções setoriais vizinhas φ^{θ_+} e φ^{θ_-} e suponhamos, para simplificar que a semi reta arg $t = \theta$ só contém um ponto singular de $\tilde{\varphi} = \mathcal{B}\hat{\varphi}$, denotado por ω. Então a diferença de φ^{θ_+} e φ^{θ_-} é dada por:

$$
\varphi^{\theta_+}(x) - \varphi^{\theta_-}(x) = \int_{\gamma\omega} e^{-xt} \tilde{\varphi}(t) dt.
$$

veja figura



Suponhamos que a singularidade de $\tilde{\varphi}(t)$ em ω não seja somente um polo simples (como para a equação de Euler) mas uma singularidade logarithmica (com um polo) como no exemplo estudado no parágrafo III-1, sela- nó linear geral, então, numa vizinhança de ω podemos escrever:

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{2\pi i}\varphi_\omega(t-\omega)\log(t-\omega) + \psi_\omega(t-\omega).$$

onde ψ_ω é meromorfa com polo simples em 0 e φ_ω é holomorfa numa vizinhança de 0.

Como $\tilde{\varphi}$ só tem a singularidade ω na semi-reta $\arg t = \theta$, vemos que a função $\varphi_\omega(t-\omega)$, diferença de duas determinações de $\tilde{\varphi}(t)$, se prolonga à esta semi-reta, e como log é integrável numa vizinhança de o temos:

$$\varphi^{\theta^+}(x) - \varphi^{\theta_-}(x) = -e^{-\omega x}[b_0 + \int_0^\infty e^{-xt}\varphi_\omega(t)dt]$$

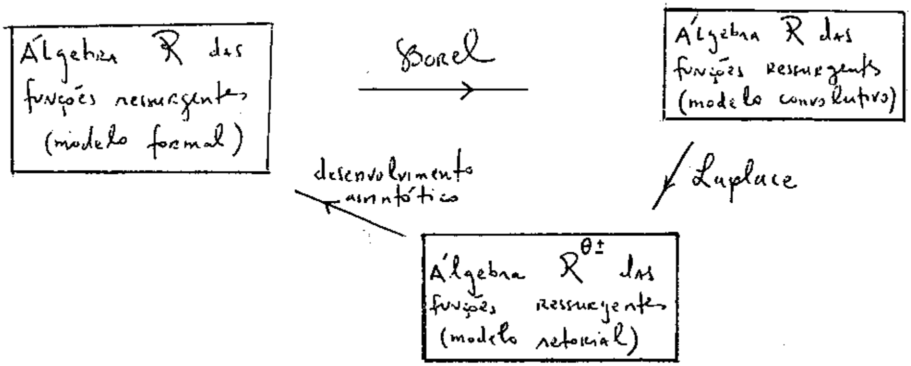
onde $b_0 = 2\pi i Res_0 \psi_\omega$.

Assim, a diferença de duas funções setoriais vizinhas é um exponencialmente pequeno $e^{-\omega x}$ multiplicado por uma expressão que só depende da singularidade de $\tilde{\varphi}$ em ω, se chamarmos singularidade o par $(b_0 = 2\pi i Res_0 \psi_\omega, \varphi_\omega)$.

Idéia de Ecalle: Definir uma algebra comutativa $\mathcal{R}$, a algebra das funções resurgentes de uma variável t; os elementos de $\mathcal{R}$ serão as funções $\tilde{\varphi}$ convenientemente generalizadas, as duas leis de composição são a adição usual e o produto de convolução complexo (que se tornará o produto usual após transformação de Laplace). Esta algebra será estável pelas operações lineares Δ_ω correspondendo intuitivamente à "tomar a singularidade em ω" que serão derivações da algebra, isto é verificam

$$\Delta_\omega(\tilde{\varphi} * \tilde{\psi}) = (\Delta_\omega \tilde{\varphi}) * \tilde{\psi} + \tilde{\varphi} * (\Delta_\omega \tilde{\psi}).$$

Paralelamente à esta descrição de funções resurgentes (modelo convolutivo) temos duas outras descrições que se deduzem graças aos dicionários "Borel" e "Laplace" segundo o esquema a seguir:



Passemos agora a definir a algebra de funções resurgentes (apenas uma subalgebra da algebra geral) e a derivada de Ecalle nesta algebra.

Seja ${}^{+}R(1)$ o conjunto das séries formais $\hat{f} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$ tais que sua transformada de Borel.

$$\mathcal{B}\hat{f}(t) = \tilde{f}(t) = a_0\delta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

se prolonga (como função multivalente) à $\mathbf{C}_\infty - \Omega$ onde Ω é um subgrupo discreto e, as singularidades de $\tilde{\varphi}$ em Ω são tipo polo ou lograritmo.

Observação: A introdução do δ de Dirac como $\mathcal{B}(1)$ está de acordo com a convenção usual de que a transformada de Laplace de δ é 1.

Temos assim o diagrama.

$$\begin{tikzcd}
R^{+}(1) \text{ : modelo formal} \arrow[rr, "\mathcal{B}"] & & \widetilde{R^{+}}(1) \text{ : modelo convolutivo} \arrow[dl, "\mathcal{L}_\theta"] \\
& R^{\theta\pm}(1) \text{ : modelo setorial} \arrow[ul, "\text{desenv assintótico}"] &
\end{tikzcd}$$

As derivadas ${}^{+}\tilde{R}(1)$ são indexadas por $\omega \in \mathbf{C}^*$ temos:

Definição: 1) $\Delta_\omega \delta = 0 \ \forall \omega$.

2) Se $\tilde{\varphi}(t)$ só possui uma singularidade no ponto $t = \omega$ na semi- reta arg $t =$ arg ω, com

$$\tilde{\varphi}(t-\omega) = \frac{1}{2\pi i}\varphi_\omega(t-\omega)\log(t-\omega) + \psi_\omega(t-\omega).$$

φ_ω holomorfa numa vizinhança de 0 e ψ_ω tem um polo simples em 0, então definimos $(\Delta_\omega\tilde{\varphi})(t)$ como sendo o par $(b_0 = 2\pi i Res_0 \psi_\omega, \varphi_\omega)$ isto é:

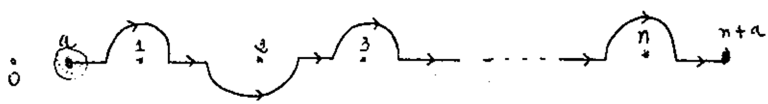
$$(\Delta_\omega\tilde{\varphi})(t) = b_0\delta + \varphi_\omega(t).$$

(Desta forma $\mathcal{L}(\Delta_\omega\tilde{\varphi})$ corresponde à diferença $-e^{\omega x}(\varphi^{\theta_+} - \varphi^{\theta_-})$ de determinações das somas de $\hat{f}$).

3) No caso geral, onde o prolongamento analítico à partir da origem ao longo da semi-reta $\arg t = \arg \omega$ encontra mais de uma singularidade antes de chegar à ω, $\Delta_\omega\tilde{\varphi}$ é a soma ponderada das singularidades em ω das diversas determinações de $\tilde{\varphi}$ obtidas ao longo de todos os desvios possíveis das singularidades precedentes (desvios para a esquerda ou direita indiferentemente, mas sem recuos). O coeficiente de ponderação é $\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ onde p é o número de desvios, pela direita e q pela esquerda.

Formalizemos um pouco mais esta definição. Consideremos o caso $\Omega = \mathbf{Z}$ (o que será suficiente para os exemplos que estudaremos). Seja $0 < |a| < 1$, e para $n \in \mathbf{Z}$ seja γ_n um caminho de $\mathbf{C} - \mathbf{Z}$ com inicio em a e final em $n + a$ construido da seguinte forma:

Partimos do segmento $[a, n+a]$ e mudamos o segmento nas vizinhanças de $b = 1, 2, \cdots, n$ por um pequeno semi-círculo à direita ou à esquerda de $b = 1, 2, \cdots, n-1$, mas sempre à esquerda (por cima) no último obstáculo $b = n$ (a menos de homotopia existem 2^{n-1} caminhos deste tipo.



Associamos um peso a γ_n da seguinte forma: $\varepsilon(\gamma_n) = \frac{p!q!}{n!}$ onde $p =$ número de pontos $b \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ que γ_n contorna pela esquerda (por cima) e claro, $q = n - p - 1$.

Se $\tilde{f}$ é holomorfa (multiforme) em $\mathbf{C} - \mathbf{Z}$ definimos $\Delta_{\gamma_n}\tilde{f}$ como sendo a função obtida da seguinte forma:

Seja var $\tilde{f} \in \mathcal{O}_a$, var $\tilde{f} = T\tilde{f}_a - \tilde{f}_a$ = difrença entre duas determinações de $\tilde{f}$, $T =$ transformação de monodromia associada ao laço $\varepsilon e^{i\theta} 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$T\tilde{f}_a - \tilde{f}_a = \text{ var. } \tilde{f}$$

Considere o prolongamento analítico de $\text{var}\tilde{f}$ ao longo de γ_n, denotado por $g, g \in \mathcal{O}_{n+a}$.

Seja $h \in \mathcal{O}_a$ o germe $g \circ \tau$, onde $\tau(x) = x + a$. Então

$$\Delta_{\gamma_n} \tilde{f} = h$$

Em particular denotamos $\Delta_n^+ = \Delta_{\gamma_n} +$ onde $\gamma_n +$ é o caminho que contorna todas as singularidades pela esquerda (por cima). Podemos agora enunciar a definição formal de derivada:

Definição: $\Delta_n = \sum_{\gamma_n} \varepsilon(\gamma_n)\Delta_{\gamma_n}$ isto é;

$$\Delta_n \tilde{f} = \sum_{\gamma_n} \varepsilon(\gamma_n)\Delta_{\gamma_n} \tilde{f}$$

Teorema. *Os Δ_n são derivações da algebra $\tilde{C}(\mathbf{Z})$.*

Observação: Podemos deduzir os Δ_n^+ à partir dos Δ_n usando à identidade (de series formais não comutativas).

$$\log(id + \sum_{n \geq 1} \Delta_n^+ t^n) = \sum_{n \geq 1} \Delta_n t^n$$

ou

$$\exp(\sum_{n \geq 1} \Delta_n t^n) = id + \sum_{n \geq 1} \Delta_n^+ t^n.$$

Para obter esta identidade, observe que

$$\Delta^+[[t]] = id + \sum_{n \geq 1} \Delta_n^+ t^n \colon \mathrm{C}(\mathbf{Z}) \to C(\mathbf{Z})[[t]]$$

munindo $C(\mathbf{Z})$ do produto de convolução e $C(\mathbf{Z})[[t]]$ do produto usual de series formais $(\sum f_p t^p) * (\sum g_q t^q) = \sum f_p * g_q t^{p+q}$ temos que $\Delta^+[[t]]$ é um homomorfismo de algebras.

Temos assim uma família de derivações indexadas por $n \in \mathbf{Z}(\omega \in \Omega)$.

Estas derivações forman uma algebra de Lie livre de dimensão infinita (não existem relações entre elas).

Passemos agora às fórmulas do Cálculo Resurgente, análogos da regra da cadeia e do teorema da função inversa do cálculo usual.

Seja $f \overset{\partial}{\longmapsto} -xf$ a derivação interna de $\hat{C}(\mathbf{Z})$ deduzimos que

$$\Delta_n(x^P f) = (x+n)^P \Delta_n f$$

isto é: $\Delta_n \partial^P = (\partial - n)^P \Delta_n$ (p inteiro $p \geq 0$).

Composição convolução:

$$\hat{f} \underset{(id+\hat{h})}{\circ} \hat{g} = \sum_{n\geq 0} \frac{\hat{f}^{(n)}(t)}{n!}(\hat{h})^n (\text{modelo formal})$$

$$\downarrow \mathcal{B}$$

$$\tilde{f} \otimes \tilde{g} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(\partial^n f) * h^{*n} (\text{modelo convolutivo})$$

Temos:

Regra da cadeia:

$$\text{modelo convolutivo} \begin{cases} \partial(f \otimes g) = (\partial f \otimes g) * \partial g \\ \Delta_n(f \otimes g) = (\partial f \otimes g) * \Delta_n g + \\ \exp_*(-nh) * ((\Delta_n f) \otimes g) \end{cases}$$

$$\text{modelo formal} \begin{cases} \frac{d}{dx}(f \circ g) = \frac{df}{dx} \circ g \cdot \frac{dg}{dx} \\ \hat{\Delta}_n(\hat{f} \circ \hat{g}) = \left(\frac{d\hat{f}}{dx} \circ \hat{g}\right) \cdot \Delta_n \hat{g} + e^{-n\hat{h}}(\Delta_n \hat{f}) \circ \hat{g} \end{cases}$$

Verifiquemos a segunda destas fórmulas (regra da cadeia) no modelo formal.

$$\Delta_n(\hat{f}\circ\hat{g}) = \Delta_n(f(id+h)) = \Delta_n\left(\sum_{p\geq 0}\frac{(\frac{d^P}{dx^P}f}{p!}\cdot h^P\right)$$

$$= \sum_{p\geq 0}\frac{1}{P!}\left[\Delta_n\left(\frac{d^P}{dx^P}f\right)\cdot h^P + \left(\frac{d^P}{dx^P}f\right)\Delta_n h^P\right]$$

$$= \sum_{p\geq 0}\frac{h^p}{p!}\left(\frac{d}{dx}-n\right)^P\Delta_n f + \sum_{p\geq 1}\frac{1}{p!}ph^{p-1}(\Delta_n h)\frac{d^P}{dx^P}f$$

$$= \left(\sum_{p\geq 1}\frac{h^{p-1}}{(p-1)!}\frac{d^P f}{dx^P}\right)\Delta_n h + \sum_{p\geq 0}\frac{1}{p!}h^P\left(\frac{d}{dx}-n\right)^P\Delta_n f$$

$$= \left(\frac{df}{dx}\circ g\right)\cdot\Delta_n g + e^{-nh}[(\Delta_n f)\circ g]$$

onde

$$\left(\frac{d}{dx}-n\right)^P\Delta_n f = \frac{d^P}{dx}\Delta_n f + p!\left(\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\Delta_n f\right)\cdot(-n)+\cdots$$

$$+(-n)^{p-1}\frac{d}{dx}\Delta_n f + (-n)^P$$

Observação: A igualdade $\sum\frac{1}{p!}h^P\left(\frac{d}{dx}-n\right)^P\Delta_n f = e^{-nh}(\Delta_n f)\circ g)$ é facilmente verificada se escrevemos:

$$e^{-nh} = \sum_{p\geq 0}\frac{(-nh)^P}{p!};(\Delta_n f)\circ g = \sum_{q\geq 0}\frac{\frac{d^q}{dx^q}(\Delta_n f)}{q!}\cdot h^q$$

e multiplicamos.

$\therefore$ a regra da cadeia decorre diretamente das relações: $\Delta_n\varphi^P = p\varphi^{P-1}\Delta_n\varphi$ (Δ_n é derivação) e $\Delta_n\partial^P\varphi = (\partial-n)^P\Delta_n\varphi$ que se deduz de $\Delta_n(x^P f) = (x+n)^P\Delta_n f$.

Exercício: Verifique a fórmula acima se $f = f_\omega(t-\omega)\log(t-\omega)$ ω: única singularidade.

Neste caso: $\Delta_\omega f = f_\omega$.

CAPÍTULO IV

APLICAÇÃO DO CÁLCULO RESURGENTE:

§IV-1) Introdução

Neste capítulo vamos utilizar o cálculo diferencial resurgente esboçado no capítulo III para obtermos invariantes analíticas para os germes de difeomorfismos $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ tangentes à identidade e para as equações diferenciáveis não lineares resonantes (com somente uma resonância) de $\mathbf{C}^2$.

§IV-2) Difeomorfismos de $\mathbf{C}, 0$ tangentes à identidade

Nesta seção vamos estudar os difeomorfismos (germes em 0).

$f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ com $f'(0) = 1$, isto é $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ com f holomorfa em 0.

Definição: f e g são conjugados se existe um difeomorfismo h tal que $f \circ h = h \circ g$.

Se h é holomorfo dizemos que f e g são analíticamente conjugados.

Se h é formal, dizemos que f e g são formalmente conjugados.

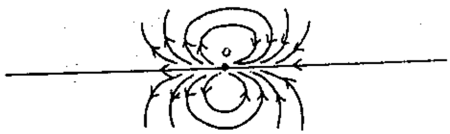
Exercício 1: Verifique que se f e g são analíticamente conjugados então eles são formalmente conjugados.

Exercício 2: Verifique que $f \circ h = h \circ g$ com h difeomorfismo analítico então h manda órbita de g em órbita de f. (Isto é f e g tem a mesma dinâmica na vizinhança de 0).

A seguir vamos analizar o exemplo seguinte: Consideramos os difeomorfismos $f(z) = z - z^2 + z^3 + 0(z^4)$ que são formalmente conjugados à $f_0 = \frac{z}{1+z}$.

Exercício: Mostre que $f(z) = z - z^2 + z^3 + a_4 z^4 + \cdots$ é formalmente conjugado à $f_0(z) = \frac{z}{1+z}$.

Exercício: Desenhe as órbitas de $f_0(z) = \frac{z}{1+z}$ (note que $f_0^n(z) = \frac{z}{1+nz}$).



Figura

O problema é calcular as classes de conjugação analíticamente distintas que possuem f_0 como modelo formal.

É cômodo de considerar a inversão $\frac{1}{z} = \xi$, então se $f(z) = z - z^2 + z^3 + 0(z^4)$ temos:

$$
\begin{aligned}
g(\xi) &= \frac{1}{f(\frac{1}{\xi})} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^3} + 0(\frac{1}{\xi^4})} = \frac{\xi}{1 - \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} + 0(\frac{1}{\xi^3})} \\
&= \xi + 1 + \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{\xi^n}
\end{aligned}
$$

e

$$g_0(\xi) = \frac{1}{f_0(\frac{1}{\xi})} = \xi + 1.$$

Assim no ∞, g_0 é a translação de 1 e g uma perturbação da translação.

Decorre do fato de que f_0 e f são formalmente conjugados (por um único difeomorfismo $\hat{f}$ com $\hat{f}'(0) = 1$) que existe uma única série formal.

(IV.2.1) $$\varphi(\xi) = \xi + 0(\frac{1}{\xi})$$

que verifica

$$\varphi \circ g = g_0 \circ \varphi = \varphi + 1$$

Seja $\psi = \varphi^{-1}$. Então

(IV.2.1) $$g_0\psi = \psi_0 g_0 = \psi(\xi + 1)$$

As equações acima são as equações de conjugação entre g e g_0, φ e ψ são os difeomorfismos de conjugação.

Exercício: Suponha g' outra série (convergente) analoga à g e também formalmente conjugada à g_0 ($\varphi' g' = g_0 \varphi'$).

Mostre que g e g' são analíticamente conjugados se e somente se $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ é convergente.

Para termos uma idéia das obstruções à convergência de φ, consideremos o problema análogo para deformações infinitesimais de ordem 1 de g_0.

Considere a família a um parâmetro

$$g = g_0 + t\overline{g} \quad , \quad \overline{g}(\xi) = 0(\xi^{-2});$$

a conjugação infinitesimal $\varphi = \xi + t\overline{\varphi}$ $\overline{\varphi} = 0(\xi^{-1})$ verifica $\varphi \circ g = g_0 \circ \varphi$ (mod t^2) isto é

$$\overline{\varphi}(\xi + 1) - \overline{\varphi}(\xi) = -\overline{g}(\xi).$$

Esta equação determina $\overline{\varphi}$. Se $\overline{g} = \sum_{n\geq 2} \frac{a_n}{\xi^n}$, $\overline{\varphi} = \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{\xi^n}$ considere a transformada de Borel $\overline{g}_B = \mathcal{B}\overline{g} = \sum_{n\geq 2} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1}$, $\overline{\varphi}_B = \mathcal{B}\overline{\varphi} = \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{(n-1)!} x^{n-1}$.

Como $\overline{g}$ é holomorfa no ∞ (por hipótese), temos que $\overline{g}_B$ é inteira (e de tipo exponencial, veja Cap. I). Transformando a equação $\overline{\varphi}(\xi+1) - \overline{\varphi}(\xi) = -\overline{g}(\xi)$ por Borel, obtemos:

$$(e^{-x} - 1)\overline{\varphi}_B = -\overline{g}_B,$$

logo

$$\overline{\varphi}_B = -\frac{\overline{g}_B}{e^{-x} - 1}.$$

Então, $\overline{\varphi}_B$ é meromorfa em $\mathbf{C}$ com polos simples em $2\pi i\mathbf{Z} - \{0\}$.

As obstruções à convergência de $\overline{\varphi}$ são os resíduos de $\overline{\varphi}_B$.

Estas são as únicas obstruções, pois se $\overline{g}'$ é outra função analoga à $\overline{g}$ e se $\overline{\varphi}_B$ e $\overline{\varphi}'_B$ possuem os mesmos resíduos, então $\overline{\varphi}_B - \overline{\varphi}'_B$ é inteira e da forma $\frac{1}{e^{-x}-1} \times$ função inteira de tipo exponencial. Logo $\overline{\varphi} - \overline{\varphi}'$ converge no ∞ e $\overline{g}$ e $\overline{g}'$, são analiticamente conjugados na 1ª ordem.

O teorema seguinte mostra que as obstruções à conjugação de 1ª ordem são de fato gerais, temos:

Teorema. *φ_B = transformada de Borel do difeomorfismo de conjugação φ é resurgente com singularidades em $2\pi i\mathbf{Z} - \{0\}$.*

Deduziremos a seguir as "relações de resurgência" que φ_B e ψ_B verificam, estas são caso particular da "equação da ponte".

Voltemos à equação de conjugação inicial (IV.2.1)

$$g_0\psi = \psi_0 g_0 = \psi(\xi + 1)$$

Transformando por Borel, temos:

$$g_B \otimes \psi_B = \psi_B \otimes g_{0B} \tag{IV.2.3}$$

Seja $\omega = 2n\pi i$ $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$. Então

$$\Delta_\omega g_B = \Delta_\omega g_{0B} = 0$$

(g_B e g_{0B} são inteiras). Derivando (aplicando Δ_ω a IV.2.3) temos

$$\Delta_\omega(g_B \otimes \psi_B) = \Delta_\omega(\psi_B \otimes g_{0B})$$

Vamos daqui para frente trabalhar no modelo formal. Então, temos a igualdade

$$\Delta_\omega(g \circ \psi) = \Delta_\omega(\psi \circ g_0)$$

e pela regra da cadeia (veja capítulo III).

$$\begin{aligned}
\Delta_\omega(g \circ \psi) &= \left(\frac{dg}{d\xi} \circ \psi\right) \cdot \Delta_\omega \psi + e^{-\omega(\psi-\xi)}(\Delta_\omega g) \circ \psi \\
&= \left(\frac{dg}{d\xi} \circ \psi\right) \cdot \Delta_\omega \psi, \quad \text{pois} \quad \Delta_\omega g = 0.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta_\omega(\psi_0 g_0) &= \left(\frac{d\psi}{d\xi} \circ g_0\right) \cdot \Delta_\omega g_0 + e^{-\omega(g_0-\xi)} \cdot (\Delta_\omega \psi) \circ g_0 \\
&= e^{-\omega}(\Delta_\omega \psi) \circ g_0, \quad \text{pois} \quad \Delta_\omega g_0 = 0.
\end{aligned}$$

Então obtemos:

$$\left(\frac{dg}{d\xi} \circ \psi\right) \cdot \Delta_\omega \psi = (\Delta_\omega \psi)(\xi + 1) \tag{(A)}$$

pois $e^{-\omega} = e^{-2n\pi i} = 1$.

Por outro lado, derivando (usualmente) a igualdade $g \circ \psi = \psi(\xi + 1)$ temos

$$\text{((B))} \qquad \left(\frac{dg}{d\xi} \circ \psi\right) \cdot \frac{d\psi}{d\xi} = \frac{d\psi}{d\xi}(\xi + 1)$$

Considere então a equação (em η)

$$\left(\frac{dg}{d\xi} \circ \psi\right) \cdot \eta = \eta(\xi + 1)$$

Pode-se mostrar que esta admite uma única solução formal $\eta(\xi) = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{\xi^n}$, a menos de uma constante.
Logo

$$\Delta_\omega \psi = A_\omega \frac{d\psi}{d\xi}, \quad A_\omega \in \mathbf{C}$$

(equação da ponte no modelo formal)

ou seja, voltando ao modelo formal

$$\Delta_\omega \psi_B = A_\omega \partial \psi_B, \quad A_\omega \in \mathbf{C}$$

(equação da ponte no modelo convolutivo)

Esta equação é chamada por Ecalle de "equação da ponte" pois liga a derivada resurgente Δ_ω à derivada usual $\frac{d}{d\xi}$.
Usando a relação $(\psi \circ \varphi)(\xi) = \xi$, obtemos:

$$\Delta_\omega(\psi \circ \varphi) = \Delta_\omega(id) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\psi}{d\xi} \circ \varphi\right) \cdot \Delta_\omega \varphi + e^{-\omega(\varphi - \xi)} \cdot (\Delta_\omega \psi) \circ \varphi \equiv 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\psi}{d\xi} \circ \varphi\right) \cdot \Delta_\omega \varphi = -e^{-\omega(\varphi - \xi)} \cdot (\Delta_\omega \psi) \circ \varphi$$

$$= -e^{-\omega(\varphi - \xi)} A_\omega \left(\frac{d\psi}{d\xi} \circ \varphi\right).$$

Logo

$$\Delta_\omega \varphi = -A_\omega e^{-\omega(\varphi-\xi)}$$

(equação da ponte para φ no modelo formal)

Passando ao modelo convolutivo, obtemos:

$$\Delta_\omega \varphi_B = -A_\omega \exp_*(-\omega(\varphi_B - \delta'))$$

(equação da ponte para φ_B no modelo convolutivo)

(note que $\delta' = \mathcal{B}\xi$).

Vamos mostrar agora que os números A_ω $\omega \in 2\pi i\mathbf{Z} - \{0\}$ que aparecem na equação da ponte são invariantes analíticos dos difeomorfismos com modelo formal g_0.

Teorema. *(Ecalle): Sejam g e g' formalmente conjugados à g_0.*

Então g e g' são analíticamente conjugados se e somente se $A'_{2n\pi i} = A_{2n\pi i}$, $\forall_n \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

Prova:

Por hipótese, $\varphi \circ g = g_0 \circ \varphi$ e $\varphi' \circ g' = g_0 \circ \varphi'$. Então $g' = h \circ g \circ h^{-1}$ com $\varphi = \varphi' \circ h$ ou $h = (\varphi')^{-1} \circ \varphi$. Assim, h é transformada de Laplace de h_B, onde h_B verifica $\varphi_B = \varphi'_B \otimes h_B$. Passando ao inverso de φ, ψ temos:

$\psi' = h \circ \psi$ e aplicando Δ_ω temos:

$$\begin{aligned}\Delta_\omega \psi' &= \Delta_\omega(h \circ \psi) \\ &= \left(\frac{dh}{d\xi} \circ \psi\right) \cdot \Delta_\omega \psi + e^{-\omega(\psi-\xi)}(\Delta_\omega h) \circ \psi.\end{aligned}$$

Mas $\Delta_\omega\psi' = A'_\omega \frac{d\psi'}{d\xi}$ e $\Delta_\omega\psi = A_\omega \frac{d\psi}{d\xi}$, substituindo temos:

$$\begin{aligned} A'_\omega \frac{d\psi'}{d\xi} &= \left(\frac{dh}{d\xi} \circ \psi\right) \cdot A_\omega \frac{d\psi}{d\xi} + e^{-\omega(\psi-\xi)}(\Delta_\omega h) \circ \psi \\ &= A_\omega \left(\frac{d}{d\xi}(h \circ \psi)\right) + e^{-\omega(\psi-\xi)}(\Delta_\omega h) \circ \psi \\ &= A_\omega \cdot \frac{d\psi'}{d\xi} + e^{-\omega(\psi-\xi)}(\Delta_\omega h) \circ \psi. \end{aligned}$$

Suponha g e g' analíticamente conjugados. Então $h = (\varphi')^{-1} \circ \varphi$ é analítico e portanto $\Delta_\omega h = 0$. Pela última equação,

$$A'_\omega \frac{d\psi'}{d\xi} = A_\omega \frac{d\psi'}{d\xi} \Rightarrow A_\omega = A'_\omega.$$

Reciprocamente, suponha $A_\omega = A'_\omega$ para todo ω. Então

$$e^{-\omega(\psi-\xi)}(\Delta_\omega h) \circ \psi \equiv 0 \Rightarrow \Delta_\omega h \equiv 0.$$

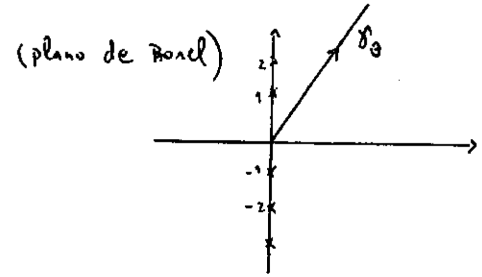
Como $\Delta h_B \equiv 0 \Rightarrow h_B$ é uma função inteira (e de tipo exponencial). Logo h é convergente e g e g' são analíticamente conjugados.

Para uma interpretação geométrica dos A_ω vejamos a relação com o método setorial.

Normalização Setorial dos difeomorfismos tangentes à identidade

Considere a relação $\varphi_0 g = g_0 \circ \varphi$. Seja $\varphi_B = B\varphi$. Como as singularidades de φ_B estão sobre o eixo imaginário, dado $\theta \neq \pm\pi/2$, temos a soma

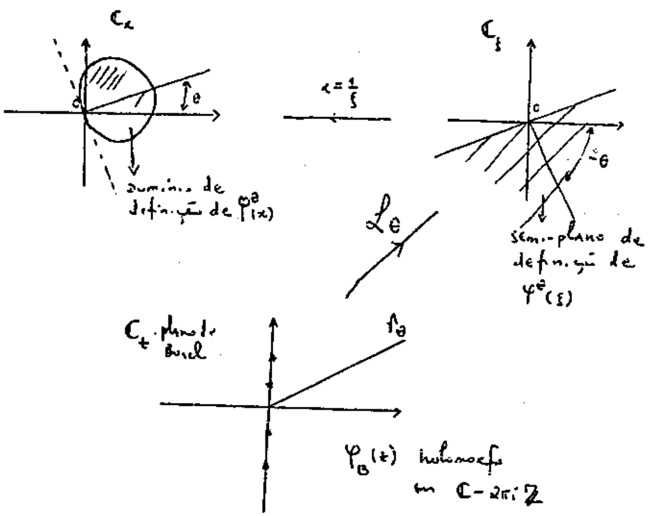
$$\varphi^\theta(\xi) = \int_{\gamma_\theta} \varphi_B(t) e^{-t\xi} dt =$$



Figura

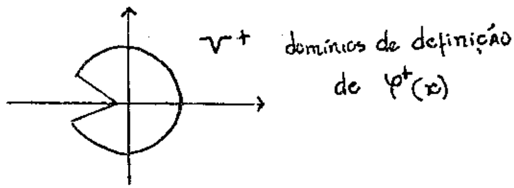
transformada de Laplace na direção θ de φ_B

Voltando à variável inicial $x = \frac{1}{\xi}$, temos que $\varphi^\theta(x) = \int_{\gamma_\theta} \varphi_B(t)e^{-t/x}dt$, é assintótica à $\varphi(x)$ para $x \to 0$, x no setor aberto de bissetriz θ e abertura $\pi - \varepsilon(\varepsilon > 0)$.



Figura

É claro, pela construção que $\varphi^\theta(x)$ conjuga f e f_0 no disco D_θ de diâmetro $[0, re^{i\theta}]$ $r > 0$, pequeno.



Variando γ_θ desde $\theta = -\frac{\pi}{2} + \delta$ à $\frac{\pi}{2} - \delta$ ($\delta > 0$ pequeno) obtemos a soma $\varphi^+(x)$ que conjuga f e f_0 num setor V^+ de bissetriz $\mathbf{R}+$ e abertura $2\pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$)

V^+: domínio de definição de $\varphi^+(x)$.

Embora f e f_0 sejam somente formalmente conjugados, no setor V^+, $\varphi^+(x)$ realiza a conjugação analítica entre f e f_0.

Exercício: Mostre que f é atrator em V^+ isto é, $f(V^+) \subset V^+$; todas as órbitas entram em V^+ e convergem para 0.

Analogamente definimos $\varphi^-(x)$ no setor V^- = setor de bissetriz $\mathbf{R}^-$ e abertura $2\pi - \varepsilon$, e φ^- conjuga f e f_0 em V^-.

(Note que V^- é um setor repulsor de f isto é; $\forall p \in V^-$, algum iterado $f(p)^{(j>0)}$ escapa de V^-.

$\therefore$ nos setores atratores e repulsores, onde a dinâmica é simples, temos que f é analíticamente conjugado à sua forma normal f_0.

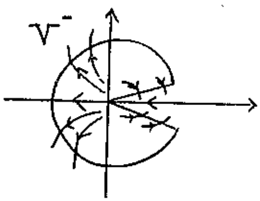
Notação: φ^+ e φ^- são as normalizações setoriais de f.

Ponto de vista de $\xi = \frac{1}{x}$.

Passando ao plano $\mathbf{C}_\xi$ temos:

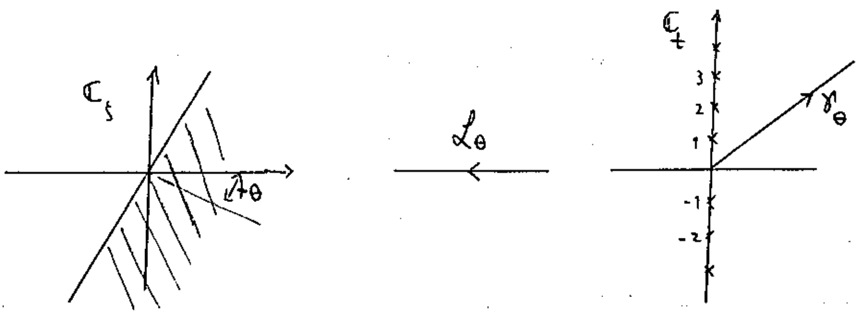
$$\varphi^\theta(\xi) = \int_{\gamma_\theta} \varphi_B(t) e^{-t\xi} dt$$

é holomorfa para $|\arg \xi + \theta| < \pi/2$ e $|\xi| > R$.



V^- : setor repulsor

Figura

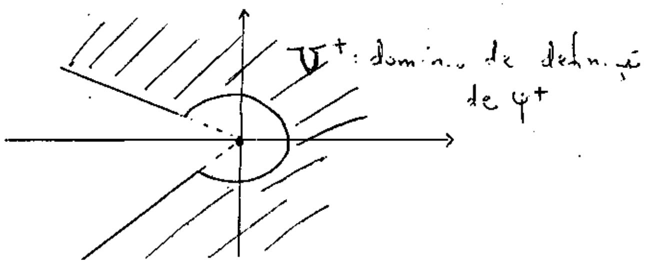


Sejam:

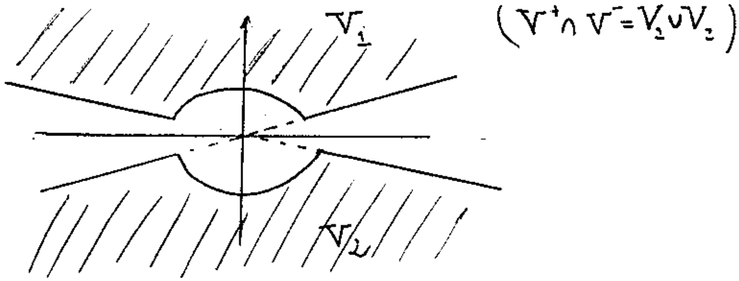
$\varphi_+(\xi) =$ prolongamento de φ^θ para $|\arg\theta| < \pi/2$.

$\varphi_-(\xi) =$ prolongamento de φ^θ para $|\pi - \arg\theta| < \pi/2$.

Então $\varphi^+(\xi)$ é holomorfa para $|\xi| > R$ e $\xi \in \mathbf{C} - \mathbf{R}_-$.



e $\varphi^-(\xi)$ é holomorfa para $|\xi| > R$ e $\xi \in \mathbf{C} - \mathbf{R}_+$.



Figura

Considere a composição $\varphi_+ \circ (\varphi_-)^{-1}$ em $V^+ \cap V^- = V_1 \cup V_2$

$$V^+ \cap V^- \equiv |Im\xi| > r$$

Como φ_+ e φ_- são assintóticas à φ para $\xi \to \infty$, temos $\varphi_+ \circ (\varphi_-)^{-1} \xrightarrow{\sim} id$ para

$$\xi \in V_1 \cup V_2, \quad |Im\xi| \to +\infty.$$

Então, seja $\varphi_+ \circ (\varphi_-)^{-1}(\xi) = \xi + \chi(\xi)$ com $\chi \xrightarrow{\sim} 0$ se $|Im\xi| \to +\infty$.

Como $\varphi_+ \circ (\varphi_-)^{-1}$ comuta com g_0, temos:

$$\begin{aligned} g_0(\xi + \chi(\xi)) &= \xi + \chi(\xi) + 1 \\ &= \xi + 1 + \chi(\xi + 1) \Rightarrow \chi(\xi) = \chi(\xi + 1) \end{aligned}$$

$\therefore \quad \chi$ é periódica de período 1 e

$$\begin{aligned} \chi_g(\xi) &= \sum_{n \geq 1} \chi_n e^{2n\pi i \xi} \text{ em } Im\xi > r, \xi \in (\mathcal{V}_1) \\ &= \sum_{n \leq -1} \chi_n e^{2n\pi i \xi} \text{ em } Im\xi < r; \xi \in (\mathcal{V}_2) \end{aligned}$$

Note que de $\varphi_+ \varphi_-^{-1} = \xi + \chi$ segue que

$$\varphi_+ - \varphi_- = \chi(\varphi_-) = \sum \chi_n e^{2n\pi i \varphi_-}$$

Podemos agora enunciar o teorema de classificação pelo método setorial.

Teorema. *(Invariantes analíticos, método setorial).*

(1) Dados g e g' formalmente conjugados à g_0, sejam χ_g e $\chi_{g'}$ os coeficientes de Fourier definidos anteriormente.

Então: g e g' são analíticamente conjugados se e somente se $\chi_g = \chi_{g'}$.

(2) *Reciprocamente, dada χ periódica em $|Im\xi| > R$, do tipo de χ_g, existe $g(\xi) = \xi + 1 + 0(\xi^{-2})$ formalmente conjugado à g_0 e tal que $\chi_g = \chi$.*

Vamos agora ver a relação entre os invariantes setoriais χ_g e os resurgentes A_ω.

Usando a fórmula $\exp(\sum \Delta_n t^n) = id + \sum \Delta_n^+ t^n$ *podemos exprimir os Δ_n^+ como polinômios universais nos Δ_n. Então deduzimos que existe $A_\omega^+ \in \mathbf{C}$ com*

$$\Delta_\omega^+ \varphi = -A_\omega^+ e^{-\omega(\varphi - \xi)}$$

os A_ω^+ são polinômios nos A_ω.

Então temos o teorema seguinte:

Teorema. *(Ecalle - Malgrange)* $A_{2\pi i n}^+ = \chi_{-n}$.

Idéia da Prova: Seja γ_θ a semi-reta $e^{i\theta}[0, +\infty[$ orientada de 0 a ∞.

Então, vimos que

$$\int_{\gamma_\theta} \varphi_B(t) e^{-t\xi} dt = \begin{cases} \varphi_+ \text{ se } |\arg\theta| < \frac{\pi}{2} \\ \varphi_- \text{ se } |\pi - \arg\theta| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vejamos então o que se passa quando θ cruza $\pi/2$. Então, para $Im\xi << 0$, $-\pi + \varepsilon < \arg\xi < -\varepsilon$, temos

$$\varphi_+ - \varphi_- = \sum \int_{\gamma_n} \Delta_{2n\pi i}^+ \varphi_B(t) e^{-t\xi - 2n\pi i\xi} dt.$$

onde γ_n = transladado por $2n\pi i$ de γ_θ $(\theta = \frac{\pi}{2} + 0)$. Como

$$\Delta_\omega^+ \cdot \varphi_B = -A_\omega^+ e^{-\omega(\varphi_B - t)}, \quad \omega = 2n\pi i,$$

temos:

$$\begin{aligned} &\Delta_{2n\pi i}^+ \varphi_B(t) e^{-t\xi - 2n\pi i\xi} \\ &= -A_{2n\pi i}^+ e^{-2n\pi i(\varphi_B - t)} \cdot e^{-t\xi} \cdot e^{-2n\pi i t} \\ &= -A_{2n\pi i}^+ e^{-2n\pi i\varphi_B} \cdot e^{-t\xi} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \int_{\gamma_n} \Delta^+_{2n\pi i}\varphi_B(t)e^{-t\xi-2n\pi i\xi}dt$$

$$= -A^+_{2n\pi i}\int_{\gamma_n} e^{-2n\pi i\varphi_B}e^{-t\xi}dt.$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad & \varphi_+ - \varphi_- \\
&= \sum -A^+_{2n\pi i}\int_{\gamma_n} e^{-2n\pi i\varphi_B}e^{-t\xi}dt \\
&= \sum_{n>0} A^+_{2n\pi i}e^{-2n\pi i\varphi_-}.
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \chi_{-n} = A^+_{2n\pi i}.$$

§IV.3) A Sela-nó não linear

Considere o campo de vetores holomorfo em $(0,0)$-

$$\text{(IV.3.1)} \qquad X: \begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = a_0(x) + y(1+\lambda x) + \sum_{n\geq 2} a_n(x)y^n \end{cases}$$

com $a_0(0) = 0$.

Note que $(0,0)$ é singularidade isolada de X, que o eixo dos $y's$ é invariante, mas o eixo dos $x's$ não é invariante.

Contudo, sempre existe uma única solução formal $\hat{y}(x)$ com $\hat{y}(0) = 0$, a qual chamamos variedade central formal.

Exercício: Prove as afirmações acima.

Para analisarmos as obstruções à convergência de $\hat{y}$, procedemos como no caso dos difeomorfismos tangentes à identidade, estudados em (IV.2).

Pela inversão, $T = \frac{1}{x}$ a equação (IV.3.1) é transformada em

$$\text{(IV.3.2)} \qquad -\frac{dy}{dT} = y(1+\lambda T^{-1}) + a_0(T^{-1}) + \sum_{n\geq 2} a_n(T^{-1})y^n$$

Considere a família I_ε, a um parâmetro ε, que liga a forma normal formal

$$\text{(IV.3.3)} \qquad \frac{dy}{dT} = y(1+\lambda T^{-1})$$

à equação inicial (IV.3.2)

$$\text{(IV.3.4)} \qquad I_\varepsilon: -\frac{dy}{dT} = y(1+\lambda T^{-1}) + \varepsilon(a_0(T^{-1}) + \sum_{n\geq 2} a_n(T^{-1})y^n)$$

Seja $\hat{y}_\varepsilon(T) = \sum_{n\geq 0} \Phi_n(T)\varepsilon^n$ a solução formal de I_ε com $\hat{y}_\varepsilon(\infty) = 0$, expandida em potências do parâmetro ε.

Substituindo $\hat{y}_\varepsilon(T)$ em I_ε temos:

$$-\sum_{n\geq 0} \Phi_n'(T)\varepsilon^n = (\sum_{n\geq 0} \Phi_n(T)\varepsilon^n)(1+\lambda T^{-1})$$
$$+ \varepsilon(a_0(T^{-1}) + \sum_{n\geq 0} a_n(T^{-1})(\sum_{p\geq 0} \Phi_P(T)\varepsilon^P)^n)$$

igualando os coeficientes das potências de ε obtemos:

$$\underline{n=0}: \quad -\Phi_0'(T) = (1+\lambda T^{-1})\Phi_0(T) \Rightarrow \Phi_0(T) \equiv 0$$

(o que concorda com o fato de I_0 admitir $y = 0$ como solução).

$$\underline{n=1}: \quad -\Phi_1'(T) = (1+\lambda T^{-1})\Phi_1 + a_0(T^{-1})$$

que é uma equação linear não homogenea em Φ_1. Vimos em (III.1) que esta equação admite uma solução resurgente com uma única singularidade logarítmica (se $\lambda \neq 0$) no ponto $t = 1$ do plano de Borel

$$\underline{n=2}: \quad -\Phi_2' = (1+\lambda T^{-1})\Phi_2 \Rightarrow \Phi_2 \equiv 0.$$

$$\underline{n=3}: \quad -\Phi_3' = (1+\lambda T^{-1})\Phi_3 + a_2 \cdot \Phi_1^2$$

$n \quad : \quad \Phi_n' = (1+\lambda T^{-1})\Phi_n + a_{n-1}\Phi_1^n +$ polinômio em $\Phi_j, j < n$, com coeficientes a_p $p = 1, 2, \cdots$.

Considere a equação:

$$-\Phi_3' = (1+\lambda T^{-1})\Phi_3 + a_2\Phi_1^2$$

Transformando por Borel, obtemos:

$$(t-1)\tilde{\Phi}_3 = \lambda \int_0^t \tilde{\Phi}_3(s)ds + \tilde{a}_2 * \tilde{\Phi}_1 * \tilde{\Phi}_1$$

(notação: $\tilde{a} = \mathcal{B}a$).

Vemos assim, que $\tilde{\Phi}_3$ possui singularidades em $t = 1$ e $t = 2$ (pois o produto de convolução propaga as singularidades)

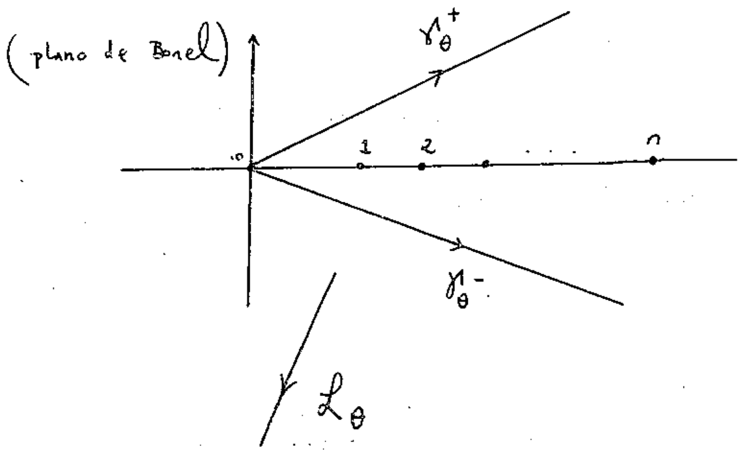
Exercício: Mostre que se $\varphi(t) = \frac{1}{t-1}$ então $\varphi * \varphi$ possui singularidade logaritmica em $t = 1$ e um polo simples em $t = 2$.

Continuando a análise das demais equações ($n = 4, \cdots$) vemos que a solução formal $\hat{y}_\varepsilon = \sum_{n\geq 0} \Phi_n \varepsilon^n$ é resurgente com singularidades em $\mathbf{N}^*$ (Isto é, $\mathcal{B}\hat{y}_\varepsilon = \sum_{n\geq 0}(\mathcal{B}\Phi_n)(t)\varepsilon^n$ é, para cada $\varepsilon > 0$, uma função multiforme com singularidades (tipo polo simples e/ou logaritmica) em $\mathbf{N}^*$.

Observação:

1) Não estamos considerando questões tais como a convergência uniforme da série, e o crescimento exponencial no infinito de $\tilde{y}_\varepsilon(t)$. Para estes problemas remetemos o leitor aos trabaalhos de Ecalle [5].

2) Para obtermos os modelos setoriais da variedade central, basta considerar a transformada de Laplace de $\hat{y}$ nas direções $\theta^+ = \varepsilon > 0$ e $\theta^- = -\varepsilon$, conforme o esquema:



Figura

$$\tilde{y}^+(T) = \int_{\gamma_\theta^+} (\sum \mathcal{B}\Phi_n(t))e^{-Tt}dt = \sum_{n\geq 0} \int_{\gamma_\theta^+} \mathcal{B}\Phi_n(t)e^{-Tt}dt$$

$$\tilde{y}^-(T) = \int_{\gamma_\theta^-} (\sum_{n\geq 0} \mathcal{B}\Phi_n(t))e^{-Tt}dt = \sum_{n\geq 0} \int_{\gamma_\theta^-} \mathcal{B}\Phi_n(t)e^{-Tt}dt$$

$\therefore$

$\tilde{y}^+$ e $\tilde{y}^-$ são os modelos setoriais de $\hat{y}$.

Não vamos insistir neste ponto, maiores detalhes podem ser obtidos no capítulo III.

Cálculo das derivadas de $\hat{y}$:

Considere a solução formal $\hat{y} = \sum_{n\geq 0} \Phi_n(T)$. Vimos que sua transformada de Borel possui singularidades em $\mathbb{N}^*$.

Vamos agora calcular $\Delta_\omega \tilde{y}$.

Para tanto voltemos às equações que determinam Φ_1, Φ_2, Φ_3, etc. Temos:

$$-\Phi_1' = \Phi_1(1 + \lambda T^{-1}) + a_0(T^{-1}).$$

Transformando por Borel vem:

$$t\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\Phi}_1 + \lambda * \tilde{\Phi}_1 + \tilde{a}_o$$
$$\Rightarrow (t-1)\tilde{\Phi}_1 = \lambda * \tilde{\Phi}_1 + \tilde{a}_0$$

Aplicando Δ_ω, obtemos:

$$\Delta_\omega((t-1)\tilde{\Phi}_1) = \Delta_\omega(\lambda * \tilde{\Phi}_1) + \Delta_\omega \tilde{a}_0$$
$$\Rightarrow (t - 1 + \omega)\Delta_\omega \tilde{\Phi}_1 = \lambda * \Delta_\omega \tilde{\Phi}_1$$

pois $\Delta_\omega \tilde{a}_0 = 0 \ \forall_\omega$, já que $\tilde{a}_0$ é inteira e $\Delta_\omega \partial = (\partial - \omega)\Delta_\omega$ onde $\partial =$ multiplicação por $-t$.

Como $\tilde{\Phi}_1$ só possui singularidade em $t = 1$ temos $\Delta_\omega \tilde{\Phi}_1 = 0$ se $\omega \neq 1$.

Portanto a única derivada não nula de $\tilde{\Phi}_1$ é Δ_1 ($\Delta_1 \tilde{\Phi}_1$ pode ser calculada como (IV.1), ou diretamente usando a equação $(t - 1 + \omega)\Delta_\omega \tilde{\Phi}_1 = \lambda * \Delta_\omega \tilde{\Phi}_1$.

Considere agora a equação seguinte:

$$-\Phi_3' = \Phi_3(1 + \lambda T^{-1}) + a_2 \cdot \Phi_1^2.$$

Por Borel obtemos:

$$(t-1)\tilde{\Phi}_3 = \lambda * \tilde{\Phi}_3 + \tilde{a}_2 * \tilde{\Phi}_1 * \tilde{\Phi}_1$$

e aplicando Δ_ω temos:

$$\begin{aligned}(t-1+\omega)\Delta_\omega\tilde{\Phi}_3 &= \lambda * \Delta_\omega\tilde{\Phi}_3 + \Delta_\omega\tilde{a}_2 * \tilde{\Phi}_1 * \tilde{\Phi}_1\\ &\quad + \tilde{a}_2 * \Delta_\omega(\tilde{\Phi}_1 * \tilde{\Phi}_1)\\ \Rightarrow (t-1+\omega)\Delta_\omega\tilde{\Phi}_3 &= \lambda * \Delta_\omega\tilde{\Phi}_3 + 2\tilde{a}_2 * \tilde{\Phi}_1 * \Delta_\omega\tilde{\Phi}_1\end{aligned}$$

Como $\Delta_\omega\tilde{\Phi}_1 \equiv 0$ se $\omega \neq 1$, temos

$$(t-1+\omega)\Delta_\omega\tilde{\Phi}_3 = \lambda * \Delta_\omega\tilde{\Phi}_3$$

se

$$\lambda = 0\colon (t-1+\omega)\Delta_\omega\tilde{\Phi}_3 \equiv\Rightarrow \Delta_\omega\tilde{\Phi}_3 = 0.$$

Observação: Note que uma igualdade do tipo

$$t\Delta_1\tilde{\Phi}_3 = 0 \Rightarrow -\partial\Delta_1\tilde{\Phi}_3 = 0 \Rightarrow \Delta_1\tilde{\Phi}_3 = c.\delta.$$

Logo

$$\Delta_\omega\tilde{\Phi}_n = 0 \text{ se } \omega \neq 1.$$

Resumindo temos a proposição:

Proposição. *Se* $\hat{y} = \sum \Phi_n(T)$ *é solução formal de (IV.3.2) com* $\hat{y}(\infty) = 0$. *Então*

a) sing $\tilde{\Phi}_n \subset \{1, 2, \cdots n-1\}$

b) $\Delta_\omega\tilde{\Phi}_n = 0$ se $\omega \neq 1$.

Isto é: *a única derivada que age não trivialmente sobre* $\hat{y} = \sum \hat{\Phi}_n$ *é* Δ_1.

Voltemos a equação inicial (IV.3.2)

$$-\frac{dy}{dT} = a_0(T^{-1}) + y(1+\lambda T^{-1}) + \sum_{n\geq 2} a_n(T^{-1})y^n$$

fazendo $z = y - \hat{y}$ obtemos:

$$-\frac{dz}{dT} = z(1+\lambda T^{-1}) + \sum_{n\geq 2} b_n(T)z^n \tag{IV.3.4}$$

onde $b_n(T)$ é formado dos a_n e de potências de $\hat{y}$.

Vimos que os $b_n(T)$ são tais que $\tilde{b}_n(T)$ é resurgente com singularidades em $\mathbf{N}^*$. (IV.3.4 define uma equação na algebra das funções resurgentes). Mas lembre que $\Delta_\omega \hat{y} = 0$ se $\omega \neq 1 \Rightarrow \Delta_\omega \tilde{b}_n = 0$ se $\omega \neq 1$. Note que $z = 0$ é solução de (IV.3.4).

Vamos estudar agora a transformação

$$\hat{H}(T,z) = (T, z + \sum_{n\geq 2} h_n(T)z^n)$$

que reduz (IV.3.4) à forma normal formal

$$-\frac{dw}{dT} = w(1+\lambda T^{-1})$$

Escrevendo a equação de conjugação e igualando os coeficientes de mesma potência em z obtemos $h_0(T) \equiv 0, h_1(T) \equiv 1$ e

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 2} h_n' z^n &= \sum_{n\geq 2} (n-1)h_n(1+\lambda T^{-1})z^n + \sum_{n\geq 2} b_n z^n \\ &+ (\sum_{n\geq 2} n h_n z^{n-1})(\sum_{p\geq 2} b_p z^p) \end{aligned} \tag{IV.3.5}$$

$\underline{n=2}$: $h_2' = h_2(1+\lambda T^{-1}) + b_2$

$\underline{n=3}$: $h_3' = 2h_3(1+\lambda T^{-1}) + 2h_2 b_2$

$\underline{n=4}$: $h_4' = 3h_4(1+\lambda T^{-1}) + b_4 + 2h_2 b_3 + 3h_3 b_2$

$\underline{n}$: $h_n' = (n-1)h_n(1+\lambda T^{-1}) + b_n + \sum_{j=1}^{n-2} b_{j+1}(n-j)h_{n-j}$

Considere a primeira dessas equações:

$h_2' = (1+\lambda T^{-1})h_2 + b_2$. Transformando por Borel vem:

$$-(t+1)\tilde{h}_2 = \lambda * \tilde{h}_2 + \tilde{b}_2.$$

Como $\tilde{b}_n$ tem singularidades em $\mathbf{N}^*$, $\tilde{h}_2$ possui singularidade em $\mathbf{N}^* \cup \{-1\} = \{-1, 1, 2 \cdots\}$.

Aplicando Δ_ω à equação que determina h_2 temos:

$$\begin{aligned}\Delta_\omega(-(t+1)\tilde{h}_2) &= \Delta_\omega(\lambda * \tilde{h}_2) + \Delta_\omega \tilde{b}_2 \\ &= \lambda * \Delta_\omega \tilde{h}_2 + \Delta_\omega \tilde{b}_2\end{aligned}$$

Logo

$$\Delta_\omega(-(t+1)\tilde{h}_2) = -(t+1+\omega)\Delta_\omega \tilde{h}_2 = \lambda * \Delta_\omega \tilde{h}_2 + \Delta_\omega \tilde{b}_2.$$

Suponha $\omega \neq 1$, então $\Delta_\omega \tilde{b}_2 = 0$ e obtemos:

$$-(t+1+\omega)\Delta_\omega \tilde{h}_2 = \lambda * \Delta_\omega \tilde{h}_2$$

Se $\lambda = 0$, $-(t+1+\omega)\Delta_\omega \tilde{h}_2 = 0$ e para $\omega \neq -1 \Rightarrow \Delta_\omega \tilde{h}_2 = 0$.

Se $\omega = -1$, como $\tilde{h}_2$ possui um polo simples (se $\lambda = 0$) em $t = 1$, temos $\Delta_{-1}\tilde{h}_2 =$ resíduo de $\tilde{h}_2$ em $t = -1$.

Se $\lambda \neq 0$, $\tilde{h}_2$ possui singularidade logaritmica em $t = -1$. Em qualquer caso $\Delta_\omega \tilde{h}_2 = 0$ se $\omega \neq -1, 1$. De um modo geral temos:

$$h'_n = (n-1)(1+\lambda T^{-1})h_n + b_n + \sum_{j=1}^{n-2} b_{j+1}(n-j)h_{n-j}$$

e transformando por Borel vem:

$$\begin{aligned} -t\tilde{h}_n = (n-1)\tilde{h}_n + (n-1)\lambda * \tilde{h}_n + \tilde{b}_n \\ + \sum_{j=1}^{n-2} \tilde{b}_{j+1} * (n-j)\tilde{h}_{n-j} \end{aligned}$$

ou

$$(-t-n+1)\tilde{h}_n = (n-1)\lambda * \tilde{h}_n + \tilde{b}_n + \sum_{j=1}^{n-2} \tilde{b}_{j+1} * (n-j)\tilde{h}_{n-j}.$$

Proposição.

a) *$\tilde{h}_n$ possui singularidade em $\{1-\cancel{n}1, 2\cdots\}$*

b) *as singularidades de $\sum \tilde{h}_n(t)z^n$ são $\mathbf{Z}^* - \{0\}$.*

c) *As únicas derivadas não nulas de*

$\sum \tilde{h}_n(t)z^n$ são Δ_ω, $\omega \in \{1, -1, -2, -3, \cdots\}$ $-\mathbf{N}^* \cup \{1\}$.

de fato:

$$(-t-n+1)\tilde{h}_n = (n-1)\lambda * \tilde{h}_n + \tilde{b}_n + \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{b}_{j+1} * (n-j)\tilde{h}_{n-j}.$$

Suponha $\lambda = 0$

$$(-t-n+1)\tilde{h}_n = \tilde{b}_n + \sum \tilde{b}_{j+1} *$$

$$\begin{aligned} \Delta_\omega(-t-n+1)\tilde{h}_n = \Delta_\omega \tilde{b}_n \\ + \sum \Delta_\omega \tilde{b}_{j+1} * \tilde{h}_{n-j} + \tilde{b}_{j+1}\Delta_\omega \tilde{h} \end{aligned}$$

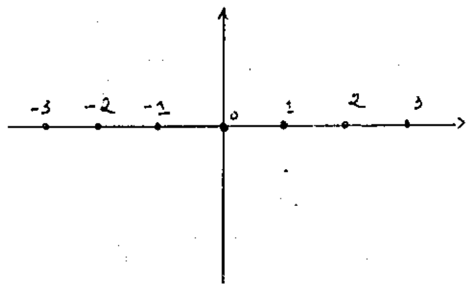
Se $\underline{\omega \neq 1} \Rightarrow \Delta_\omega \tilde{b}_j = 0 \; \forall_j$

$$(-t - n + 1 - \omega)\Delta_\omega \tilde{h}_n = 0 \Rightarrow \Delta_\omega \tilde{h}_n = 0 \; \omega \neq 1 - n$$

ou

$$\Delta_\omega \tilde{h}_n = \delta \quad \omega = 1 - n.$$

Assim vemos que $\hat{h}_2(T, z) = z + \sum_{n \geq 2} h_n(T) z^n$ é tal que $\mathcal{B}\hat{h}_2 = z + \sum_{n \geq 2} \mathcal{B} h_n(t) z^n$ possui singularidades em $t = n$, $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$ (cada $\tilde{h}_n$ possui singularidades em $-1, -2, \cdots - n$ e os $\tilde{b}_j$ possuem singularidades em $1, 2, \cdots, j - 1$).



Figura

plano de Borel ($\mathcal{B}\hat{h}_2 = \tilde{h}_2$ *é multiforme em* $\mathbf{C} - \mathbf{Z}^*$

Logo a transformação normalizante $\hat{H}$ é tal que sua transformada de Borel

$$\mathcal{B} h_2(t, y) = y + \tilde{h}_0(t) + \sum_{n \geq 2} \tilde{h}_n(t) y^n$$

é multiforme com relação à variavel t em $\mathbf{C} - \mathbf{Z}^*$ e possui em $\mathbf{Z}^*$ singularidades tipo polo simples ou logaritmica, mas

$$\Delta_\omega \left(\sum \tilde{h}_n(t) z^n\right) \neq 0$$

somente se

$$\omega \in \Omega = \{1, -1, -2, -3, \cdots\}.$$

Se somarmos $\hat{h}_2$ por Laplace segundo as direções $\theta^+ = \varepsilon > 0$ e $\theta^- = -\varepsilon$, obtemos as normalizações setoriais da sela-nó. Isto é, se

$$\hat{H} = (x, y + h_0(x) + \sum_{n \geq 2} h_n(x) y^n)$$

Então:

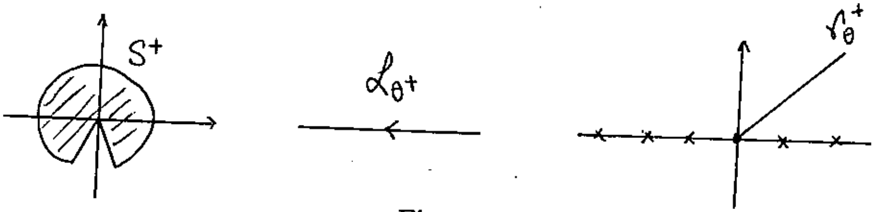
$$h_2^+ = y + \mathcal{L}_{\theta^+} \tilde{h}_0 + \sum_{n \geq 2} (\mathcal{L}_{\theta^+} \tilde{h}_n) y^n \text{e}$$

$$h_2^- = y + \mathcal{L}_{\theta^-} \tilde{h}_0 + \sum_{n \geq 2} (\mathcal{L}_{\theta^-} \tilde{h}_n) y^n$$

são as transformadas de Laplace de $\tilde{h}_2$ segundo θ^+ e θ^-, temos:

(1) $H^+ = (x, h_2^+)$ é uma conjugação holomorfa entre (IV.3.2) e o modelo formal (IV.3.3) no "setor" $V^+ = S^+ \times D_y$ com

$$S^+ = \{|x| < r, \quad |\arg x - \pi/2| < \pi\}, \quad D_y = \{|y| < R\}.$$



Figura

(2) $H^- = (x, \tilde{h}_2^-)$ é uma conjugação entre (IV.3.2) é o modelo formal (IV.3.3) em $V^- = S^- \times D_y$.

(3) Por construção $\tilde{h}_2^+$ é assintótico à $\hat{h}_2$ para $x \to 0$, $x \in S^+$ e $y \in D_y$; o mesmo valendo para $\tilde{h}_2^-$ em S^-.

Exercício: Verifique que se expandirmos $\hat{h}_2$ com relação a variável x isto é se escrevermos $\hat{h}_2(x,y) = \sum_{n\geq 0} \varphi_n(y)x^n$ então todos os $\varphi_n(y)$ são holomorfos num mesmo disco $|y| < \delta$. Isto é: $\hat{h}_2 \in \mathbf{C}\{y\}[[x]]$.

Resumo:

$$
\begin{aligned}
x^2\frac{dy}{dx} =& a_0(x) + y(1+\lambda x) + \sum_{n\geq 2} a_n(x)y^n \\
&\downarrow x = \frac{1}{T} \\
-\frac{dy}{dT} =& a_0(T^{-1}) + y(1+\lambda T^{-1}) + \sum_{n\geq 2} a_n(T^{-1})y^n \\
&\downarrow z = y - \hat{y} \\
-\frac{dz}{dT} =& z(1+\lambda T^{-1}) + \sum_{n\geq 2} b_n(T)z^n \\
&\downarrow w = z + \sum_{n\geq 2} h_n(T)z^n \\
-\frac{dw}{dT} =& w(1+\lambda T^{-1})
\end{aligned}
$$

1) - A equação da ponte:

Considere a equação: $\frac{dy}{dz} = y + b_0 + \sum_{n\geq 2} b_n(z)y^n$

$$(1) \qquad \partial_z\varphi - \varphi = b_0(z) + \sum_{n\geq 2} b_n(z)\varphi^n$$

Aplicando $\dot{\Delta}_\omega (= e^{-\omega x}\Delta_\omega$ no modelo formal)

$$\dot{\Delta}_\omega\partial_z\varphi - \dot{\Delta}_\omega\varphi = \dot{\Delta}_\omega b_0 + \sum b_n n\varphi^{n-1}\dot{\Delta}_\omega\varphi$$

(pois $\dot{\Delta}_\omega b_n = 0$)

$$\therefore \quad \partial_z(\dot{\Delta}_\omega\varphi) - \dot{\Delta}_\omega\varphi = (\dot{\Delta}_\omega\varphi)\sum_{n\geq 2} nb_n\varphi^{n-1}$$

$\therefore \quad \dot{\Delta}_\omega\varphi$ é solução da equação linear homogenea

$$* \quad \partial_z\psi - \psi = \psi \cdot \sum_{n\geq 2} nb_n\varphi^{n-1}.$$

Por outro lado $u\partial_u\varphi$ também resolve $*$. ($\varphi = \varphi(z,u)$, u: constante de integração).

de fato:

Aplicando $u\partial_u$ em (1)

$$u\partial_u(\partial_z\varphi - \varphi) = u\partial_u(b_0 + \sum_{n\geq 2} b_n(z)\varphi^n)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \partial_z(u\partial_u\varphi) - u\partial_u\varphi &= \sum b_n u\partial_u\varphi^n \\ &= \sum nb_n\varphi^{n-1}(u\partial_u\varphi) \\ &= (u\partial_u\varphi)\sum nb_n\varphi^{n-1}\end{aligned}$$

$\therefore$ $u\partial u\varphi$ e $\dot{\Delta}_\omega\varphi$ são soluções de $*$.

Logo

$$\dot{\Delta}_\omega\varphi = a_\omega(u)u\partial_u\varphi$$

Exercício: Mostre que $a_\omega(u) = u^\omega A_\omega$.

Então:

$$\dot{\Delta}_\omega\varphi = u^\omega A_\omega u\partial u\varphi$$

$$\dot{\Delta}_\omega\varphi = A_\omega \cdot \varphi$$

$$\mathbf{A}_\omega = u^\omega A_\omega u\partial u$$

equação da ponte

Algumas consequências da equação da ponte:

$$\dot{\Delta}_\omega\varphi = \mathbf{A}_\omega\varphi, \qquad \mathbf{A}_\omega = u^\omega A_\omega u\partial u$$

1ª) O "reseau de resurgence" de φ está contido em Ω, isto é, as derivadas iteradas $\Delta_{\omega_r}\Delta_{\omega_{r-1}}\cdots\Delta_1$ não nulas em φ são tais que todos os $\omega_i \in \Omega$ $\Omega = \{-1, 1, 2, \cdots\}$.

2ª) Potências de Δ_{-1} sobre $\varphi^{(0)}$.

$$\dot{\Delta}_{-1}\varphi = e^z\Delta_{-1}\varphi = A_{-1}\partial_u\varphi$$

Substituindo

$$\varphi = \sum u^n e^{nz}\varphi^{(n)}$$

temos

$$\begin{aligned} e^z\Delta_{-1}\varphi &= e^z\sum_{n\geq 0} u^n e^{nz}\Delta_{-1}\varphi^{(n)} \\ &= e^z\Delta_{-1}\varphi^{(0)} + e^{2z}u\Delta_{-1}\varphi^{(1)} + u^2e^{3z}\Delta_{-1}\varphi^{(2)} + \cdots \end{aligned}$$

Por outro lado

$$A_{-1}\partial u\varphi = A_{-1}\sum_{n\geq 0} nu^{n-1}e^{nz}\varphi^{(n)}$$
$$= A_{-1}e^{z}\varphi^{(1)} + A_{-1}2ue^{2z}\varphi^{(2)} + \cdots$$

Comparando potências de u obtemos:

$$\Delta_{-1}\varphi^{(0)} = A_{-1}\varphi^{(1)}; \quad \Delta_{-1}\varphi^{(1)} = 2A_{-1}\varphi^{(2)}, \cdots$$
$$\Delta_{-1}\varphi^{(n)} = (n+1)A_{-1}\varphi^{(n+1)}$$

$$\therefore \quad \Delta_{-1}(\Delta_{-1}\varphi^{(0)}) = \Delta_{-1}(A_{-1}\varphi^{(1)})$$
$$= A_{-1}\Delta_{-1}\varphi^{(1)} = A_{-1}\cdot 2A_{-1}\varphi^{(2)}$$
$$= 2(A_{-1})^2\varphi^{(2)}$$

$$\therefore \quad (\Delta_{-1})^2\varphi^{(0)} = 2(A_{-1})^2\varphi^{(2)}.$$

$$\therefore \quad \varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_{-1}}{A_{-1}}\right)^2\varphi^{(0)}.$$

Logo:

$$\varphi^{(n)} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\Delta_{-1}}{A_{-1}}\right)^n\varphi^{(0)}.$$

Vemos que a ***solução geral*** (integral formal) é "gerada pela ressurgência" da solução formal particular $\varphi^{(0)}$ (variedade central).

Temos a fórmula:

$$\tilde{\varphi}(z,u) = \exp\left(\frac{u\dot{\Delta}_{-1}}{A_{-1}}\right)\cdot\varphi^{(0)}(z)$$
$$= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}u^n\left(\frac{\dot{\Delta}_{-1}}{A_{-1}}\right)^n\cdot\varphi^{(0)}.$$

Teorema. *Sejam* $(I)\colon x^2\frac{dy}{dx} = y + \sum_{n\geq 2} a_n(x)y^n$ *e* $(II)\colon x^2\frac{dy}{dx} = y + \sum_{n\geq 2} b_n(x)y^n$ *duas equações formalmente conjugadas à* $x^2\frac{dy}{dx} = y$.

Sejam A_ω *e* A'_ω *os números associados pela equação da ponte. Então* (I) *e* (II) *são analíticamente conjugados* $\Leftrightarrow A'_\omega = A_\omega\ \forall_\omega \in \Omega$.

Referências

(1) *E. Borel - Mémoire sur les séries divergentes Ann École Norm Sup. 3ª série XVI, 1899, 2-136.*

(2) *W. Wasow - Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations.*

(3) *W. Rudin - Real and Comples Analysis.*

(4) *T. Carleman - Les Fonctions Quasi-Analytiques.*

(5) *J. Ecalle - Les Fonctions Resurgentes vol.I, II e III, Publications Mathematiques d'Orsay (Université de Paris-Sud).*

(6) *J. Martinet e J. P. Ramis: - Problèmes de Modules pour des équations différentielles non lineaires du premier ordre - Publications Math. I.H.E.S. - vol. 55 1982, pg.63 - 164.*

- Classification Analytique des Équations Différentielles non linéaires ressonantes du premier ordre - Ann. Scient. École Normal sup. 4ª série, t.16 1983 p.571 à 621.

(7) *J. Martinet - Prolongement Analytique et Resommation (manuscrito, 1988).*

(8) *J. P. Ramis - Notas sobre a Teoria de Galois Diferenciável (manuscritos, 1988).*

(9) *J. P. Ramis - Les series K-sommables et leurs applications - Lecxtures Notes in Physics, 126 (Springer 1980).*

(10) *B. Candelpergher, C. Nosmas e F. Pham: "Visite aux Sources" em Resurgence et Développements semi-classiques (livre à paraitre, 1988).*

(11) *C. Camacho, P. Sad - Pontos Singulares de Equações Diferenciáveis Analíticas, 16º Colóquio Brasileiro de Matemática (1987).*

(12) *B. Malgrange - Introduction aux Travaux de J. Ecalle (1984) - Grenoble.*

(13) *Hardy - Divergente Series.*

Impresso na Gráfica do