

**MÉTODOS SIMPLICIAIS EM
COMPUTAÇÃO GRÁFICA**

Jonas Miranda e Geovan Tavares

COPYRIGHT © by JONAS MIRANDA e GEOVAN TAVARES

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,
por qualquer processo, sem a permissão do autor.

ISBN

85-244-0045-5

CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Estrada Dona Castorina, 110
22.460 - Rio de Janeiro - RJ

**Dedicamos este livro ao *Prof. Elon Lages Lima*
nos seus 60 anos de aniversário**

*Toda forma nasce uma segunda vez e
torna infinitamente a nascer.*

Do poema "Lição das Coisas" de
Carlos Drummond de Andrade.

PREFÁCIO

A importância de métodos computacionais para a pesquisa em Matemática, já havia sido percebida por John von Neumann, que numa carta de 1946 ao matemático inglês M. H. Newman (Manchester), chefe dos projetos dos computadores Colossus e Manchester Mark I, externou seu pensamento sobre o seu projeto EDVAC, então em construção no Instituto de Estudos Avançados de Princeton:

We propose to use it as a "experimental tool," i. e., in order to find out what to do with such device. That is, I am convinced, that the methods of "approximation mathematics" will have to be changed very radically in order to use such a device sensibly and effectively - and to get into the position of being able to use still faster ones. I think that the problem in this respect is partly logical and partly analytical, since finding suitable approximation methods and finding and coding the proper machine "setups" may be the main bottleneck. We want to do a good deal of mathematical and logical work in parallel with the engineering development, a good deal more, with the machine as the "experimental tool," when the machine is ready.

Citado por W. Aspray em
The Mathematical Reception of the Modern Computer:
John Von Neumann and the Institute
for Advanced Study Computer [Ph].

O que nos surpreende na carta de Newmann, é a sua atualidade. Sem sombra de dúvida essa carta seria atualmente assinada por qualquer matemático envolvido em métodos computacionais e de visualização. Apesar de estar, através de von Newmann e de A. Turing, fortemente ligada às origens do computador, a matemática foi uma das últimas ciências a abraçar as técnicas de Computação Gráfica com a finalidade de melhor compreender seus problemas, e buscar as suas soluções.

Os métodos de Visualização Científica além de possibilitarem a compreensão de vários fenômenos que fogem à nossa percepção estabelecem uma língua comum de comunicação entre as várias ciências. No caso particular da Matemática, a interação com métodos de visualização estabelece uma mão dupla: De um lado a Matemática fornece um subsídio essencial para o desenvolvimento dos métodos e técnicas de visualização, do outro lado faz-se notar o avanço em algumas áreas da Matemática nas quais o computador tem desempenhado em papel importante. Este curso é uma introdução a essa interface

Matemática \Rightarrow Visualização.

Alguns tópicos abordados no livro são na realidade parte de alguns projetos que estão em andamento. Gostaríamos de ter nos estendido mais no texto, e de ter incluído um maior número de figuras mais elaboradas. A limitação dos equipamentos disponíveis (microcomputadores do tipo PC) não nos permitiu atingir nossos objetivos. Fizemos o possível com esses equipamentos dentro das limitações.

Os autores agradecem a vários alunos do Departamento de Matemática da PUC-RJ pela colaboração na feitura deste livro. A Antonio Castelo e Sergio de Freitas pela colaboração científica no estudo de métodos simpliciais de variedades definidas implicitamente. A Renato Zornoff pela implementação do algoritmo de Wagner para o problema de Plateau em sua dissertação de mestrado. A Guilherme Fuhrken que implementou algoritmos de superfícies escondi-

das e iluminação. A Helio Cortes Vieira pela implementação de um algoritmo de linhas escondidas. O apoio do pessoal da Coordenação de Informática do IMPA ,em particular a Dion Villar Visgueiro, foi muito importante durante todo o trabalho de elaboração do livro.

Agradecimentos especiais a Giodana Holanda que pacientemente fez os slides da maioria das figuras relativas a esse livro.

Rio de Janeiro, Julho de 1989

Jonas de Miranda Gomes
Geovan Tavares dos Santos

CONTEÚDO

Capítulo 0: Visualização e Matemática Pura. 6

- Neste capítulo damos uma visão geral do estado atual dos métodos de visualização em várias áreas de matemática pura e modelagem geométrica.

Capítulo 1: Triangulando o Espaço Ambiente. 30

- Aqui introduz-se uma combinatória adequada à triangulação do plano e do espaço, indicando-se a conexão dessa combinatória com a teoria dos grupos de simetrias do espaço.

Capítulo 2: Topologia, Combinatória e Aproximação Simplicial. 43

- Nesse capítulo superfícies e curvas são aproximadas simplicialmente a partir das técnicas introduzidas no capítulo anterior.

Capítulo 3: Combinações de Sólidos e Funções Implícitas. 55

- Mostra-se nesse capítulo como é possível definir operações de combinações de superfícies utilizando a representação simplicial de curvas e superfícies definidas implicitamente.

Capítulo 4: Métodos Simpliciais em Superfícies Mínimas. 63

- Métodos de representação implícita, representação paramétrica, representação de Weirstrass e métodos variacionais associados a métodos de elementos finitos são usados para representar superfícies m'nimas.

Referências. 90

Visualização e Matemática Pura

1. Introdução

Apesar de estar fortemente ligada à origem do computador, e ter motivado até o desenvolvimento do mesmo, a Matemática foi uma das últimas ciências a embarcar na área de Visualização Científica. Apesar disso já se faz sentir fortemente na pesquisa atual a utilização da Computação Gráfica como uma ferramenta poderosa para atacar problemas em Matemática Pura e Aplicada.

Mencionamos abaixo dois motivos que a nosso ver constituem a razão do uso crescente das técnicas de Visualização Científica junto aos cientistas das mais diversas áreas da Matemática:

- A computação gráfica permite que novos fenômenos possam ser observados;
- Fenômenos já conhecidos podem ser reestudados à luz de experimentos computacionais;

Neste capítulo procuraremos ilustrar esses dois fatos através dos vários exemplos.

Além de ter se mostrado como um instrumento de pesquisa indispensável, a Computação Gráfica vem também permitindo uma maior aproximação entre as ciências. Tendo se mostrado ser a solução mais viável para o problema da comunicação homem-máquina, a Computação Gráfica será certamente o dialeto comum de comunicação entre cientistas de áreas diversas.

O objetivo principal da Visualização Científica é a Visualização de Dados. Nesse processo, tem-se primeiro que definir precisamente a que objetos desejamos visualizar, e a partir daí decidir como representá-los de modo a atingir os objetivos. Esses objetivos podem ser bem específicos, e dependem de cada caso a ser estudado, porém de modo genérico devemos exigir as seguintes propriedades do modelo de representação utilizado:

- É necessário que esta representação permita fácil acesso, e modificação;
- A representação deve ser suficientemente robusta do ponto de vista numérico, algoritmos estáveis, e permitir modificação dos dados sem criar inconsistências geométricas ou topológicas;
- Informações sobre os objetos devem estar facilmente disponíveis;
- A visualização dos objetos deve permitir uma melhor compreensão do fenômeno em estudo ou, e isto seria o ideal, a solução do problema que está sendo simulado.

Para atingir a este conjunto de objetivos é necessário definir, as estruturas geométricas tanto do ponto de vista matemático quanto computacional, de modo que os objetos possam ser representados com um grau de precisão sob controle e satisfazendo as propriedades descritas anteriormente. A ligação da estrutura geométrica de um problema com a estrutura computacional, é feita através da *estrutura de dados*.

Do bom relacionamento

$$\text{Estrutura Geométrica} \rightleftharpoons \text{Estrutura de Dados}$$

depende o sucesso da representação computacional dos objetos que pretendemos visualizar.

Como em várias outras áreas que se utilizam de recursos computacionais, o problema maior em Visualização Científica é o software. Não existe um software que seja adequado a todo o tipo de problema.

O problema do software em Visualização Científica se torna mais crítico quando abordamos o aspecto de Visualização de Dados, pois não existe um algoritmo genérico que possa ser utilizado para qualquer tipo de dados, e que seja adequado aos objetivos que pretendemos atingir.

O problema acima descrito, que chamamos de *Visualização Genérica de Dados* (VGD), fica então como uma meta a ser atingida, como um ideal que norteia as pesquisas nessa área. Fazendo uma análise mais detalhada desse problema, observamos que um dos gargalos está na entrada de dados para o programa de visualização. Essa entrada deve ser suficientemente genérica, robusta e flexível. Enfatizamos mais uma vez que essas características estão diretamente relacionadas com a estrutura de dados utilizada.

Discutiremos no que se segue vários exemplos do uso de Computação Gráfica em Matemática. Esses exemplos foram escolhidos dentre várias áreas, entre problemas de pesquisa recente, e problemas de visualização de problemas clássicos. Esperamos que este capítulo funcione como uma introdução a essa área, e sirva de motivação para o restante dos capítulos do livro.

2. Geometria Diferencial

O estudo das *superfícies mínimas* começou nos fins do século XVIII com o seguinte problema estudado por J. L. Lagrange:

“Determinar dentre todas as superfícies com o mesmo contorno, aquela que possui a menor área”.

Posteriormente, o físico belga J. Plateau ([Pl]), realizou vários experimentos com superfícies definidas por películas de sabão obtidas ao mergulhar uma curva feita com um fio metálico em uma substância formada por água, sabão e glicerina (ver [AlTa]). Essas superfícies constituem o modelo físico adequado das superfícies mínimas estudadas por Lagrange. Uma boa introdução ao estudo das superfícies mínimas pode ser visto em [doCarmo1] ou [BaCo]. A importância de técnicas de visualização em Geometria Diferencial, pode ser medida pela influência que os experimentos de Plateau tiveram no desenvolvimento da teoria das Superfícies Mínimas. Vários resultados teóricos foram motivados pelos experimentos com películas de sabão feitos por Plateau e posteriormente repetidos por vários matemáticos. Atualmente,

substituindo películas de sabão por Computação Gráfica as técnicas de visualização continuam sendo de extrema importância no estudo das superfícies mínimas; isto fica claro a partir da solução do problema que pretendemos descrever no que se segue.

O primeiro exemplo de superfície mínima (além do plano) foi descoberto, utilizando métodos variacionais, por Leonard Euler no século XVIII (1740), 20 anos antes da descoberta da equação das superfícies mínimas por Lagrange. Essa superfície é o *Catenoide*. (ver figura 1).

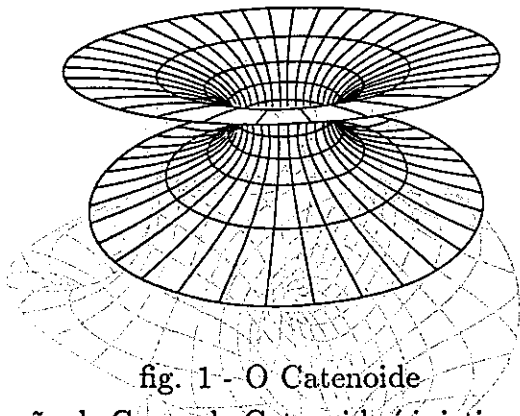


fig. 1 - O Catenoide

A aplicação de Gauss do Catenoide é injetiva, e portanto a sua curvatura total é finita (igual à área da esfera unitária em \mathbb{R}^3). Mais recentemente, vários resultados obtidos por R. Ossermann ([Os]) utilizando análise complexa para estudar superfícies mínimas com curvatura total finita. Os resultados de Ossermann levaram naturalmente à seguinte pergunta:

“Existem superfícies mínimas completas e mergulhadas em \mathbb{R}^3 com curvatura total finita, além do plano e do Catenoide?”

Em sua tese de doutorado no IMPA, C. J. da Costa ([Cos]) descobriu, utilizando as equações de Weierstrass, um novo exemplo de superfície mínima completa, cuja topologia era de gênero um e com três fins (um toro menos três pontos). Costa demonstrou também que os fins da superfície por ele descoberta eram mergulhados. Ela

era pois uma candidata natural para resolver o problema acima mencionado, para isto bastava mostrar que a parte da superfície contida em uma bola de raio suficientemente grande era mergulhada. O matemáticos americanos W. H. Meeks e D. Hoffman, resolveram numericamente as equações que definem a superfície de Costa, e utilizando técnicas de Computação Gráfica conseguiram desenhar a superfície no computador. O gráfico da superfície não apenas evidenciava que ela era de fato mergulhada, mas também mostrava as várias simetrias que ela possuía, o que auxiliou na demonstração teórica do fato dela ser mergulhada. A figura 3 mostra o gráfico da superfície de Costa

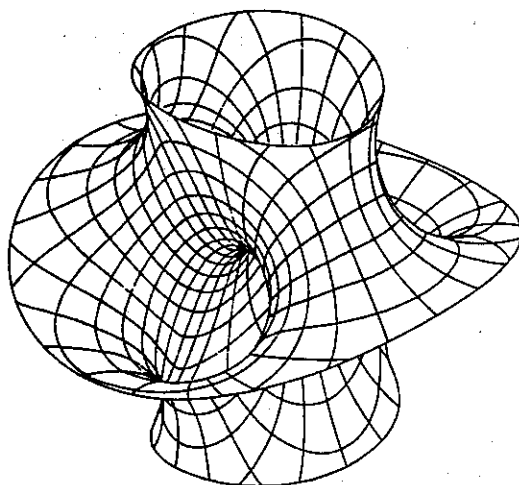


fig. 3 - Superfície do Costa

As técnicas de visualização utilizadas por Hoffman-Meeks não apenas possibilitaram obter o resultado acima mencionado mas também permitiram a extensão do resultado levando à descoberta de exemplos análogos com gênero maior do que três. Para maiores detalhes o leitor pode consultar [Ho].

Pretendemos abordar agora o uso de Computação Gráfica no estudo das superfícies de curvatura média constante. Como no caso

das superfícies mínimas essas superfícies possuem uma interpretação física interessante: São soluções do problema isoperimétrico, sendo pois solução do problema variacional com vínculos que consiste em minimizar a área mantendo o volume constante. Essas superfícies também foram objeto de estudos desde o século passado quando o matemático francês C. Delaunay classificou todas as superfícies de curvatura média constante que são invariantes pelo grupo $O(2)$ de isometrias (superfícies de rotação). Ao contrário das superfícies mínimas, não existe na literatura uma quantidade abundante de exemplos de superfícies com curvatura média constante, por esse motivo, talvez, o número de problemas em aberto nessa área é também muito grande.

Em [Go] foi feito um estudo análogo ao de Delaunay com a finalidade de descrever as superfícies de curvatura média constante que são invariantes por um grupo de isometrias do espaço hiperbólico H^3 (ver também [GoRiRo]). Como no caso das superfícies de rotação em R^3 estudadas por Delaunay, o estudo dessas superfícies se reduz ao estudo de uma equação diferencial ordinária no espaço de órbitas da ação do grupo, cujas soluções representam curvas geratrizes das superfícies. Utilizamos o computador para resolver a equação diferencial na tentativa de visualizar essas superfícies. Esse processo de visualização tornou possível fazer uma classificação completa dessa família de superfícies, o que resultou na obtenção de diversos contra-exemplos para alguns problemas que existiam nessa área e permitiu a demonstração de vários teoremas de caracterização das superfícies de curvatura média constante no espaço hiperbólico (ver [GoRiRo]). Além disso a análise do bordo assintótico dos elementos dessa família levou à descoberta de vários resultados na teoria dessas superfícies. A figura 4 abaixo mostra a curva geratriz do primeiro exemplo obtido na literatura de uma superfície de curvatura média constante em H^3 , diferente da horoesfera, e cujo bordo assintótico consiste de apenas

um ponto.

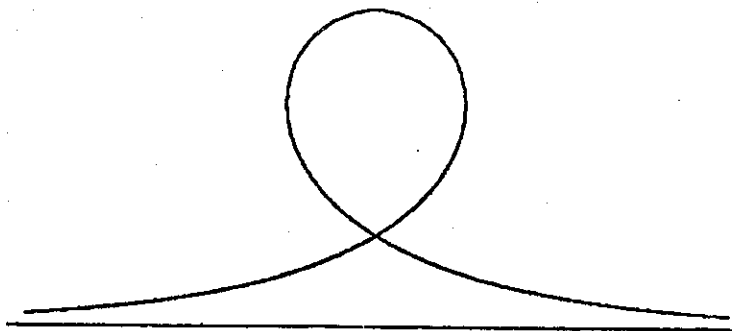


fig. 4 - curva geratriz em H^3

O próximo exemplo que pretendemos abordar mostra como o reestudo de um problema utilizando métodos de Computação Gráfica pode levar a novos resultados. Trata-se da solução da *Conjetura de Hopf*.

No início da década de 50 H. Hopf ([Hopf]) provou que qualquer imersão da esfera em R^3 com curvatura média constante, deve coincidir com a esfera euclidiana. Posteriormente A. Alexandrov mostrou que a esfera euclidiana é na realidade a única superfície compacta mergulhada com curvatura média constante em R^3 . Esses dois resultados levaram à chamada Conjetura de Hopf, que consistia em afirmar serem válidos os resultados acima sem qualquer hipótese sobre a topologia da superfície (Hopf) ou sobre o fato da imersão ser um mergulho (Alexandrov). Mais precisamente, a conjetura (que não foi formulada pelo Hopf) afirmava:

“A esfera é a única superfície compacta com curvatura média constante em R^3 ”.

Vários geométricos trabalharam nesse problema. Podemos citar o resultado parcial de Barbosa-do Carmo ([BaCo]), que mostraram ser o resultado verdadeiro com a hipótese adicional de estabilidade. A solução final do problema só surgiu em 1986, quando H. C. Wente ([Wen]) mostrou a existência de um toro imerso em R^3 com curvatura média constante. Todo o desenvolvimento acima em torno do problema não contou com a ajuda de quaisquer recursos com-

putacionais. O fato interessante é que em 1987 U. Abresch ([Ab]) utilizando o computador observou que as linhas de curvatura do toro de Wente eram curvas planas. Esse fato, por si só interessante, levou na realidade a uma demonstração mais simples da existência do toro de Wente. Na figura 5 mostramos o toro de Wente obtido no computador.

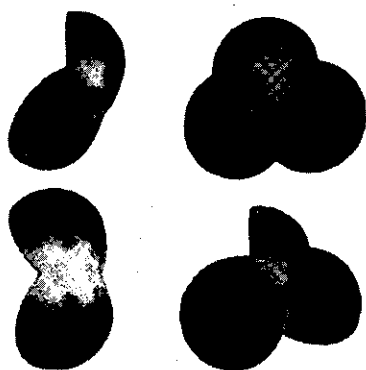


fig. 5 - toro de Wente

3. Sistemas Dinâmicos

A relação de Sistemas Dinâmicos com as Ciências Aplicadas tem sido constante desde a sua fundação por Poincaré e Lyapunov; portanto não é surpreendente que essa área e a Computação Gráfica se deixem influenciar mutuamente. Esta influência tem sido não só na proposição de novos problemas mas também com a finalidade de melhor compreender o comportamento das soluções de tais sistemas.

Não só a Matemática está ligada fortemente às origens do computador, como já mencionamos, mas Sistemas Dinâmicos tem participado ativamente desta ligação desde os primeiros experimentos numéricos utilizando o computador. Em 1947, S. Ulam e J. Von Neumann [UIVo] realizaram experimentos numéricos com a função $y = 4x(1 - x)$ com $x \in [0,1]$ que indicavam que o comportamento de órbitas de um ponto poderia ter propriedades estocásticas. Sabemos hoje que funções do intervalo podem apresentar um comportamento

dinâmico não trivial e o computador tem desempenhado um papel significativo nesse estudo [CoEc].

Estudando equações diferenciais que representavam modelos matemáticos associados à meteorologia E. N. Lorenz ([Lo]) obteve, em 1963, o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias a três parâmetros no \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - x; \\ \dot{y} &= rx - y - xz; \\ \dot{z} &= xy - bz;\end{aligned}$$

com $\sigma = 10$, $r = 28.0$ e $b = 8/3$. Experimentos numéricos realizados por Lorenz usando o computador mostraram que o comportamento desse sistema num conjunto para o qual todas as órbitas se aproximavam, era bastante complicado. Esse conjunto (figura 6) é chamado de *atrator de Lorenz* e faz parte de uma coleção de atratores chamada genericamente de *atratores estranhos*. Ele é hoje em dia uma fonte rica de problemas em sistemas dinâmicos tanto do ponto de vista teórico quanto computacional.

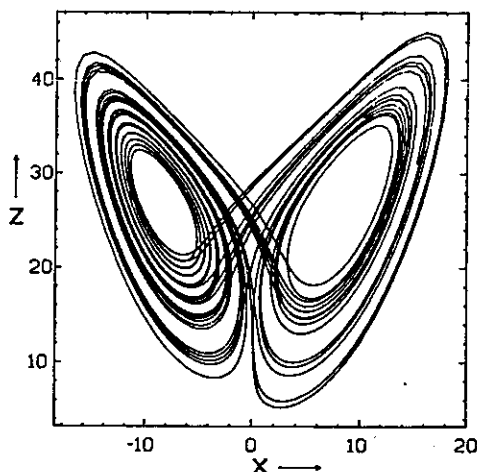


fig. 6 - atrator de Lorenz

Um outro atrator estranho descoberto por M. Hénon [He], envolve sistemas dinâmicos planares. A idéia de Hénon foi procurar

no plano um sistema dinâmico, que apresentasse um comportamento análogo ao atrator de Lorenz. Suas pesquisas resultaram na seguinte equação

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n + 1 + ax_n^2 \\ y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}$$

com $a = 1.4$ e $b = 0.3$.

O comportamento desse atrator é hoje em dia um tópico de pesquisa em sistemas dinâmicos, e desde a sua origem em 1976 explorações computacionais tem desempenhado papel importante no seu entendimento. A figura 7 mostra um esboço do atrator obtido no computador.

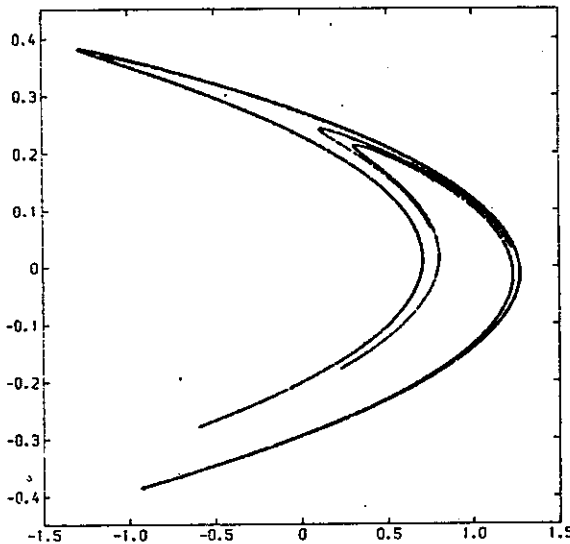


fig. 7 - atrator de Hénon

Um outro fenômeno importante em Sistemas Dinâmicos é o da bifurcação de Hopf, que dá condições para que uma órbita fechada nasça de uma singularidade degenerada numa família a um parâmetro de campos de vetores no \mathbb{R}^n . Na realidade o seu estudo começou com Poincaré e foi desenvolvido por Andronov e Hopf e representa um passo essencial no entendimento das propriedades qua-

litativas de famílias de sistemas dinâmicos. No começo da década de 70 o trabalho de Ruelle e Takens [RuTa] pôs em evidência a bifurcação de Hopf devido a sua conexão com certos fenômenos de turbulência. Estudos numéricos da bifurcação de Hopf tem sido desenvolvidos nos últimos anos e existem vários softwares que tratam do assunto ([HaKaWa]), entretanto métodos de visualização eficientes são praticamente inexistentes.

A área de Oscilações Não-Lineares é uma das que mais tem se beneficiado da relação de Sistemas Dinâmicos com Computação Gráfica. O entendimento de espaços de fase no plano e no espaço, de seções transversais de órbitas fechadas nas equações de Van der Pol e Duffing, por exemplo, tem progredido bastante desde a introdução de métodos de visualização em sistemas dinâmicos Para uma visão dessa área ver [GuHo].

No fim da primeira guerra mundial apareceram dois artigos dos matemáticos Fatou [Fat] e Julia [Ju] e um de Hausdorff [Ha] que 60 anos depois proporcionariam uma revolução em matemática pura e aplicada cujas conseqüências ainda não podemos avaliar inteiramente. A história que se passou nesse meio tempo é característica de como o desenvolvimento matemático é, às vezes, irregular, diríamos mesmo caótico.

O que Fatou e Julia estudavam era de como se comportavam as sucessivas compostas de uma função racional (o quociente de dois polinômios complexos), isto é, as propriedades do conjunto invariante de tal função (hoje conhecidos por conjunto de Julia) e do seu complementar. Em linguagem atual, o que eles iniciaram foi o estudo da dinâmica das funções racionais.

Exceto por poucos trabalhos o assunto só foi retomado a partir de 1980 por vários matemáticos dentre os quais D. Sullivan, R. Mañe, P. Sad, A. Douady, J. Hubbard, entre outros. Nessa mesma época B. Mandelbrot começou a fazer experimentos computacionais com polinômios quadráticos complexos e exibir os resultados com os recursos de Computação Gráfica, cunhando o nome "fractais" para indicar os conjuntos de Julia de dimensão de Hausdorff fracionárias. Os resultados desses experimentos influenciaram a área no sentido da utilização de Computação Gráfica em pesquisas posteriores em dinâmica de funções racionais.

Os experimentos de Mandelbrot [Mand] consistiam em fazer um dicionário do conjunto de Julia para a função $f(z) = z^2 + c$, onde c é um número complexo. É fácil verificar, usando uma mudança de coordenadas, que esse caso engloba todas as funções quadráticas a um parâmetro. A idéia de Mandelbrot consistia em catalogar cada parâmetro c do plano complexo para o qual o conjunto de Julia fosse conexo. O conjunto que daí resulta, hoje conhecido como *Conjunto de Mandelbrot*, é mostrado graficamente na figura que segue.

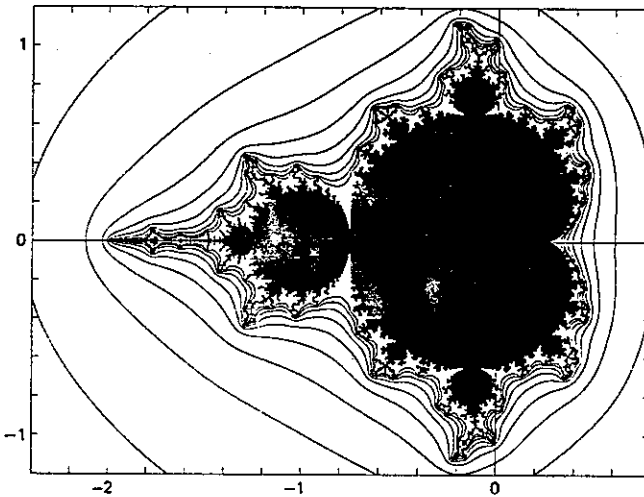


fig. 8 - conjunto de Mandelbrot

Para um texto introdutório e referências adicionais sobre a dinâmica de funções racionais v. [Sa].

Recentemente vários textos tem aparecido que exploram o lado computacional dos objetos fractais. Os textos de Peitgen-Richter [PeRi] e de Peitgen-Saupe [PeSa], são dois exemplos; o primeiro leva as idéias de visualização de conjuntos fractais de Mandelbrot de visualização às últimas consequências, e o segundo é uma coletânea de artigos de vários autores que estudam os conjuntos fractais de vários pontos de vista, e contém algoritmos para a criação desses conjuntos em diversos contextos.

Mesmo tendo havido um certo progresso, seria apropriado afirmar que na área de Sistemas Dinâmicos os métodos de Visualiza-

ção Científica são pouco desenvolvidos. Isto se deve em parte à quase não existência de software adequado ao entedimento de fenômenos em variedades, e de um estudo efetivo dos erros numéricos associados aos modelos dinâmicos.

4. Topologia e Visualização Multidimensional

Nesta seção daremos exemplos na área de topologia onde técnicas de visualização em Computação Gráfica são usadas para melhor entender fenômenos em dimensão superior a três. Procuraremos visualizar a estrutura do cubo unitário, e da esfera S^3 no espaço euclidiano \mathbb{R}^4 . Em ambos os casos utilizaremos “projeções” do \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^2 .

A técnica de utilizar transformações em espaços de dimensão mais baixa é a mais direta que pode ocorrer no que se refere à visualização de dados multidimensionais. Ao utilizar esse método devemos procurar uma aplicação que preserve alguma estrutura do modelo que esteja diretamente relacionada com o problema a ser estudado. No estudo do hipercubo, com sua estrutura linear, as projeções canônicas de \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^2 são suficientes. No caso da esfera unitária, veremos que a projeção estereográfica se mostra adequada ao problema.

O Hipercubo

É bastante clássico na literatura o problema de se compreender o hipercubo no espaço de quatro dimensões. Do ponto de vista computacional o primeiro a fazer esse estudo foi T. Banchoff, que produziu, juntamente com Strauss, um filme extremamente rico em detalhes ([BaSt]).

O *hipercubo* em \mathbb{R}^4 é o conjunto de pontos

$$\mathcal{K}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, 4\}.$$

A definição anterior se refere ao que podemos chamar de *hipercubo sólido*. No caso do cubo em \mathbb{R}^3 , seus elementos são classicamente conhecidos por vértices, arestas e faces. No caso do hipercubo é mais conveniente chamar cada elemento genericamente de *face*, e usarmos

a dimensão para distinguir os diversos tipos. Assim os *vértices* são faces de dimensão zero, as *arestas* são faces de dimensão um, e as faces propriamente ditas são faces de dimensão dois.

No hipercubo temos faces de dimensão zero, um, dois e três; as faces de dimensão três são cubos sólidos. Elas são obtidas fixando uma das coordenadas igual a ± 1 e permitindo que as outras três coordenadas variem, satisfazendo a condição da definição. Temos assim oito faces de dimensão três. As faces de dimensão dois são obtidas fixando duas coordenadas igual a ± 1 , e deixando que as outras variem segundo as desigualdades na definição de κ^3 . É fácil verificar que temos 24 faces bidimensionais. Analogamente obtemos as faces de dimensão um (num total de 32) e as faces de dimensão zero (vértices) que totalizam 16.

Em [GeGIKi] o leitor pode encontrar, com mais detalhes, os fatos acima mencionados sobre o hipercubo.

Para visualizar o hipercubo efetuamos projeções genéricas deste no \mathbf{R}^2 , essas projeções são obtidas primeiro fazendo rotações em relação aos planos x_1x_2 , x_2x_3 , x_3x_4 , etc. em \mathbf{R}^4 e depois projetando ortogonalmente. Estas transformações, sendo lineares, preservam a estrutura linear das faces do hipercubo.

Na figura 9 mostramos uma projeção do hipercubo em \mathbf{R}^4 com uma seção transversal obtida pelo corte de um hiperplano ortogonal

a uma das diagonais.

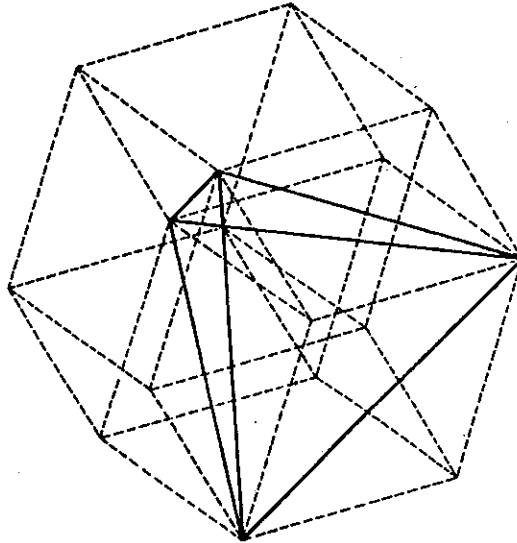


fig. 9 - Hiper-cubo de \mathbb{R}^4 com seção transversal

Fibração de Hopf e Visualização de S^3

Estudaremos agora a esfera unitária S^3 no espaço \mathbb{R}^4 . Esse estudo foi originalmente feito por T. Banchoff que produziu um belíssimo filme. A nossa exposição aqui se baseia no trabalho de H. Koçak e D. Laidlaw ([KoLa]) publicado no *Mathematical Intelligencer*.

Para estudarmos a esfera S^3 utilizaremos a projeção estereográfica $P: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$P(X) = \frac{x'}{1 - x_{n+1}}$$

onde $X = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, e $X' = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Essa projeção preserva duas estruturas geométricas da esfera S^3 , o que a torna ideal para estudar o problema em questão:

- P é uma aplicação conforme (preserva ângulo);

- P transforma círculos de S^3 em círculos de \mathbb{R}^3 .

Para visualizarmos S^3 utilizaremos pois a projeção P , juntamente com um resultado descoberto em 1931 por H. Hopf, que permite escrever a esfera S^3 como uma união de toros sendo que dois desses toros se degeneram em círculos (ver figura 10).

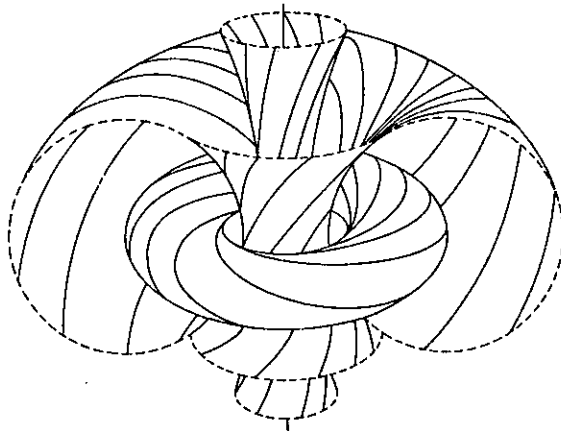


fig. 10 - folheação de S^3 por toros.

Mais precisamente, Hopf considerou a aplicação (hoje conhecida como *aplicação de Hopf*, $h: S^3 \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$, definida por $(x, y, z, w) \mapsto (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, onde

$$\begin{aligned}\hat{x} &= 2(xy + zw); \\ \hat{y} &= 2(xw - yz); \\ \hat{z} &= (x + z) - (y + w),\end{aligned}$$

e mostrou que para todo ponto $p \in S^2$, $h^{-1}(p)$ é um círculo em S^3 , chamado de *círculo de Hopf*. Segue-se pois que a imagem inversa de um círculo em S^2 é um toro em S^3 .

Se tomarmos pois a folheação \mathcal{F} de S^2 formada pelos círculos paralelos ao equador, e que possui duas singularidades nos polos, vemos que a imagem inversa de \mathcal{F} pela aplicação de Hopf define uma folheação de toros em S^3 , com dois círculos de singularidades correspondendo à imagem inversa de cada um dos polos (singularidades de \mathcal{F}).

Como no caso de Sistemas Dinâmicos, podemos dizer que Topologia é uma das áreas de Matemática que menos tem se beneficiado de Computação Gráfica para o seu desenvolvimento pela ausência de software adequado ao estudo de fenômenos em variedades. Como trabalho de destaque nessa área citamos o que está sendo desenvolvido por W. Thurston no estudo de variedades de dimensão 3; ele se insere num projeto mais amplo e dele participam J. Milnor, D. Mumford, B. Mandelbrot, A. Douady, entre outros.

5. Modelagem Geométrica

Para finalizar este capítulo vamos dar uma visão global de uma área da Computação Gráfica à qual os capítulos restantes do livro estão intimamente relacionados: Modelagem Geométrica. Essa área consiste no estudo de algoritmos e estrutura de dados que possibilitem a criação e representação de objetos geométricos no computador. A Modelagem Geométrica representa a etapa preliminar em qualquer sistema de visualização. Existem dois aspectos na área de modelagem: Um deles diz respeito às *técnicas de modelagem*, que consiste no estudo de modelos matemáticos utilizados para a criação dos dados do objeto geométrico a ser modelado; O outro, *técnicas de representação*, se refere à maneira como os dados estão estruturados no computador. Do ponto de vista matemático, enquanto as técnicas de modelagem estão intimamente ligadas a métodos geométricos, as técnicas de representação se relacionam com a topologia e combinatoria. Do ponto de vista computacional as técnicas de modelagem correspondem aos algoritmos numéricos enquanto as de representação dizem respeito a estrutura de dados. Em alguns casos a técnica de modelagem utilizada admite uma estrutura de dados natural a ela associada, e é esse fato que leva muitas vezes a não se fazer a distinção entre técnicas de modelagem e de representação.

A área de Modelagem Geométrica está, desde o seu início, associada à Computação Gráfica, com o sistema Sketchpad de I. Sutherland ([Sut]) no final da década de 50, que foi a pedra fundamental para computação gráfica interativa.

Vamos, no restante desta seção, dar uma idéia geral de alguns métodos utilizados em Modelagem Geométrica. Não nos preocuparemos em distinguir as técnicas de modelagem daquelas que se referem

à representação do modelo.

Modelagem por Formas Livres

Surgido na indústria automobilística no final da década de 50, com P. de Casteljaou (Citröen) e P. Bézier (Rénault), a modelagem por formas livres procurava determinar curvas e superfícies controlando suas formas a partir de poucos pontos.

Esta abordagem tinha três aspectos importantes: primeiro, ia de encontro aos sistemas de modelagem tradicional que com suas envoltórias, envolventes, curvas francesas, etc. procurava determinar formas com o mínimo de esforço do designer; segundo, porque ampliava esses mesmos sistemas permitindo gerar um repertório infinito de formas geométricas aumentando em muito as possibilidades de criação de novos modelos; e terceiro, porque permitia análise de erros numéricos dos modelos em questão.

A base matemática natural seria o teorema de aproximação de Weirstrass de funções contínuas por polinômios, o que era impraticável do ponto de vista computacional pois os polinômios aproximantes seriam de grau muito alto. A saída encontrada por Bézier foi utilizar os polinômios de Bernstein que foram definidos para dar uma prova construtiva do Teorema de Weirstrass e que permitiam não só manter baixo o grau dos polinômio aproximantes, mas defini-los a partir de poucos pontos que controlassem suas formas.

Modelagem por formas livres é hoje uma das áreas de modelagem mais desenvolvida. A figura 11 mostra uma superfície modelada

segundo essa técnica.

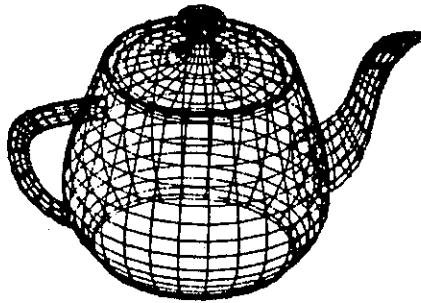


fig. 11 - objeto modelado por Formas Livres

Em [Far] é descrito o “estado da arte” dessa área de uma forma completa, precisa e elegante.

Modelagem CSG

Do ponto de vista matemático a modelagem *CSG* (Constructive Solid Geometry) é provavelmente a mais simples pois tem uma de suas componentes básicas as *Operações Booleanas Regularizadas* inspiradas nas operações básicas de teoria dos conjuntos: *união, interseção e diferença de conjuntos*. Em termos computacionais entretanto essas operações são bastante sutis se se leva em conta que o aspecto de homogeneidade (dimensionalidade) tem que ser mantido no objeto sendo modelado. A outra componente é a definição de Primitivas que sejam facilmente manipuláveis em termos computacionais e que tenham uma estrutura de dados simples; usualmente essas primitivas são o cubo, o cone, a esfera e superfícies quadráticas em geral. A principal componente computacional desse método de modelagem em termos de estrutura de dados são árvores binárias (ver figura 12) que refletem tanto as primitivas quanto as operações booleanas regularizadas. Uma referência para esse tipo de modela-

gem é ([Mant]).

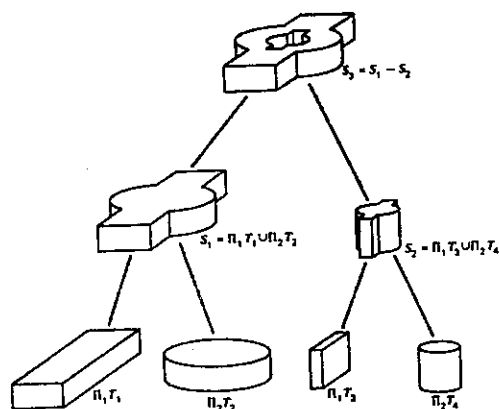


fig. 12 - sólido modelado por CSG

Modelagem BRep

Um dos principais problemas em Modelagem Geométrica é manter a consistência do modelo quando nele estamos fazendo constantes modificações. Por consistência entendemos que a estrutura topológica do modelo não muda quando o modificamos.

No começo da década de 70 B. Baumgart [Bau] propôs um sistema de Modelagem Geométrica baseado em topologia combinatória, a chamada estrutura "winged-edge", que não só permitia o controle da estrutura topológica do modelo mas usava ferramentas de topologia combinatória para estudar computacionalmente superfícies a partir de seus elementos básicos: vértices, arestas e faces. O ponto de partida para tal modelo foi o teorema de classificação das superfícies a partir de invariantes topológicos. Nessa classificação a fórmula de Euler e a estrutura de incidência das faces desempenhavam papel fundamental.

Modelagem BRep (Boundary Representation) cria os operadores de Euler a partir das fórmulas de Euler para dar consistência

topológica ao objeto sendo modelado e a matriz de incidência dá origem a estrutura winged-edge que permite o controle local e global da estrutura de dados associada a esse mesmo modelo. Do ponto de vista de implementação os modelos BRep estão associados a um grafo (ver figura 13) que mantém a consistência das estruturas.

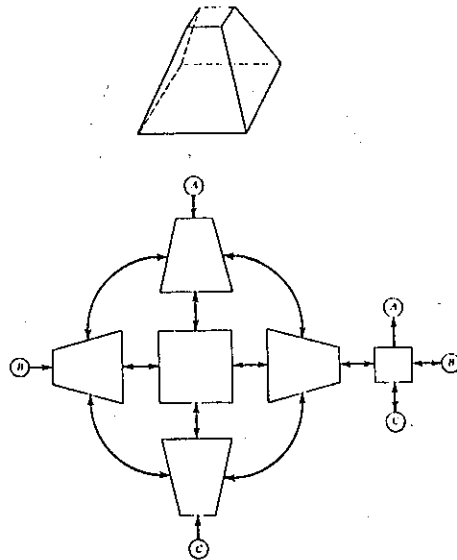


fig. 13 - superfície modelada por BRep

Uma descrição desse modelo, bem como de um sistema de modelagem baseado em BRep pode ser encontrada em [Mant].

Hoje em dia esta área se encontra em uma fase de grande maturidade, já existindo modelos que vão além da estrutura tradicional de superfície permitindo que se tenham estruturas não necessariamente homogêneas em torno de cada um de seus pontos [Wei].

Modelagem de Fenômenos Naturais

Entendemos por *modelagem de fenômenos naturais* o estudo de métodos e técnicas de modelagem geométrica para criar formas existentes na natureza (plantas, montanhas, água etc.), ou produzidas na natureza através da manifestação de fenômenos físico-químicos (nuvem, fogo, raios etc.). O objetivo maior das pesquisas nessa

área consiste em se produzir “vida” artificial no computador. É claro que esse objetivo é no momento ainda inatingido.

Alguns trabalhos hoje clássicos na literatura mostram a íntima relação entre formas existentes na natureza e equações matemáticas, como exemplo desse fato, já vimos neste capítulo que as películas de sabão podem ser modeladas usando a teoria das superfícies mínimas (ver [AlTa], [Pl]). De modo mais elementar, algumas equações clássicas da matemática podem ser identificadas no estudo de algumas formas de vida encontradas na natureza conforme propôs Thompson (ver [Thomp]); e usando a teoria das Singularidades de Aplicações René Thom (ver [Thom]) propõe a explicação de fenômenos naturais e biológicos, atualizando dessa forma o trabalho de Thompson.

Recentemente a teoria matemática que possibilitou um grande avanço na área de modelagem de fenômenos naturais foi o estudo dos conjuntos de dimensão fracionária (fractais). Esses conjuntos já eram conhecidos de vários matemáticos desde o começo século, porém só na década de 70 B. Mandelbrot utilizou técnicas de Computação Gráfica para estudar esses conjuntos (ver [Mand]). Para utilizarmos os fractais na modelagem de fenômenos naturais temos dois problemas a serem resolvidos:

- Identificar uma estrutura fractal associada ao modelo desejado;
- Desenvolver algoritmos para gerar conjuntos com estrutura fractal no computador.

Os dois problemas acima em geral são difíceis, e têm uma grande dependência do contexto de aplicação dos modelos. Daremos no que se segue dois exemplos de aplicações de fractais nessa área.

Utilizando o conceito de Movimento Browniano Fracionário (ver [PeSa]) e a associação desse tipo de função a conjuntos de dimensão fracionária, permitiu a Mandelbrot implementar um algoritmo para a geração de curvas e superfícies fractais, isto é, conjuntos em \mathbb{R}^3 com dimensão fracionária variando no intervalo $[0, 3]$. O algoritmo de Mandelbrot se mostrou adequado para a modelagem de

montanhas, como pode-se verificar na figura 14.

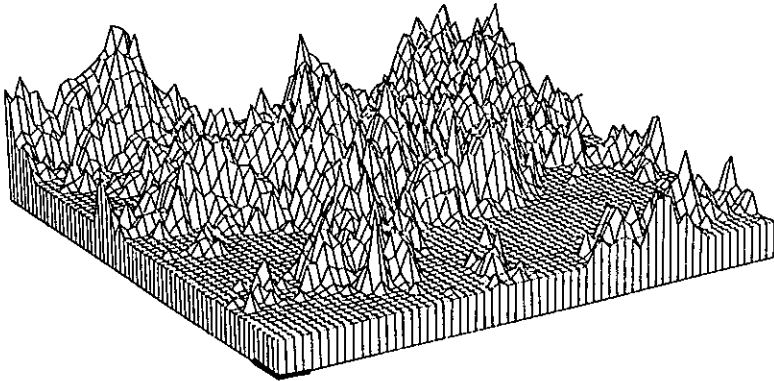


fig. 14 - montanha modelada com fractal

A modelagem de plantas é outra área que sofreu grande impulso recentemente desde que Alvy Ray Smith ([Sm]) descobriu o trabalho de identificação de plantas feito pelo biólogo Lindmayer e nele identificou a existência de um modelo matemático com uma estrutura que não apenas enquadrava as plantas no contexto de objetos com estrutura fractal, mas também introduzia uma linguagem algorítmica para gerar essa estrutura. Tinha-se pois resolvido os dois problemas que mencionamos anteriormente relacionados com o uso de fractais na modelagem de fenômenos naturais. A figura 15 mostra dois exemplos bidimensionais de plantas geradas usando esse

método.

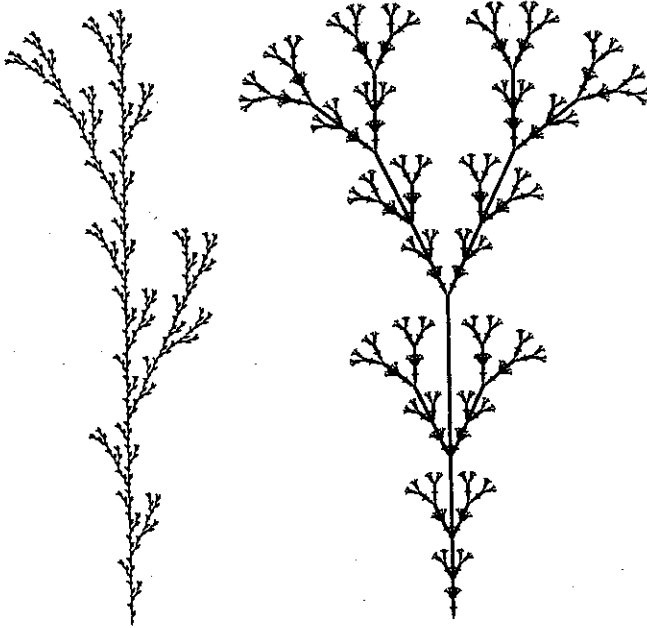


fig. 15 - Plantas geradas como fractais

Triangulando o Espaço Ambiente

Neste capítulo decompomos o espaço onde estamos trabalhando de uma forma apropriada ao desenvolvimento dos algoritmos simpliciais. Esta decomposição faz parte de uma família descoberta por Coxeter [Cox] em conexão com grupos finitos de simetria do espaço euclidiano, posteriormente Freudenthal [Fre] redescobriu a triangulação que aqui apresentamos em conexão com robustez de triangulações (os chamados triângulos “gordos”); recentemente Kuhn utilizou essa mesma triangulação para uma reformulação do algoritmo de Scarf para encontrar pontos fixos de funções contínuas ([Kuhn]).

1. Células e Simplexos

Os blocos básicos de que nos utilizaremos para representar objetos geométricos no computador serão definidos nesta seção. Indicaremos por E tanto a reta R , quanto o plano R^2 , ou o espaço ambiente R^3 .

Dado um conjunto de pontos $v_0, v_1, \dots, v_k \in E$ a *célula* gerada

por estes pontos é o conjunto

$$[v_0, v_1, \dots, v_k] = \left\{ v = \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i v_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i = 1 \right\}$$

Se $v_0 \neq \lambda v_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, a célula gerada por $[v_0, v_1]$ é um segmento de reta. Analogamente, a célula gerada por $[v_0, v_1, v_2]$ pode ser um ponto, um segmento ou um triângulo, de acordo com a relação de dependência linear dos vetores $v_1 - v_0$ e $v_2 - v_0$.

Dado um conjunto de pontos v_0, v_1, \dots, v_m no espaço \mathbb{R}^n , digamos que eles estão em *posição geral*, se para qualquer subconjunto v_0, v_1, \dots, v_k de pontos, com $k \leq n$, os vetores $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0$ são linearmente independentes. O conjunto dos vértices de um quadrado em \mathbb{R}^2 estão em posição geral. Analogamente, o conjunto dos vértices de um cubo no espaço \mathbb{R}^3 estão em posição geral.

Quando $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ estão em posição geral, $k \leq n$, a célula por eles gerada é chamada de *simplexo de dimensão k*. Indicaremos tal simplexo por (v_0, v_1, \dots, v_k) . Os simplexos de dimensão 0 são *pontos*, os de dimensão 1 são *segmentos de reta*, os de dimensão 2 são *triângulos*, e os simplexos de dimensão 3 são *tetraedros* (ver figura abaixo).

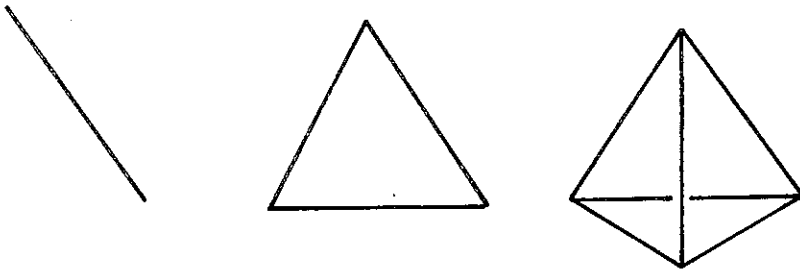


Fig. 1 - Simplexos do espaço ambiente

Dado um simplexo $\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, cada ponto v_i é chamado

de *vértice*. Os sub-simplexos de dimensão 1 gerados por par $[v_i, v_j]$, $i \neq j$, são chamados de *arestas*. Os simplexos de dimensão dois definidos pelos vértices v_i, v_j, v_k , com i, j e k distintos, são chamados de *faces* de σ .

É fácil verificar que se dois simplexos σ_1 e σ_2 coincidem, então seus vértices também coincidem a menos de uma permutação, em particular os simplexos possuem a mesma dimensão.

Dado um ponto x em um simplexo $\sigma = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$, segue-se da definição que

$$x = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Como os vértices estão em posição geral, os números reais λ_i ficam determinados de maneira única. Eles são chamados de *coordenadas baricêntricas* do ponto $x \in \sigma$.

Será útil posteriormente o fato de que a noção de “pontos em posição geral” no espaço é uma condição aberta. Isto significa que perturbando um sistema de pontos em posição geral, obtemos um outro sistema também em posição geral. Mais precisamente, vale a propriedade

(P1) Se $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ são pontos do espaço em posição geral, então existe um número real $\varepsilon > 0$, tal que se x_1, \dots, x_n , são pontos do espaço satisfazendo $|v_i - x_i| < \varepsilon$, os pontos x_1, x_2, \dots, x_n também estão em posição geral.

Os sistemas de pontos em posição geral do espaço formam também um “conjunto denso” no sentido de que dado qualquer conjunto de pontos no espaço podemos aproximá-los por um conjunto de pontos em posição geral. Mais precisamente, vale a propriedade

(P2) Se $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ é um conjunto de n pontos do espaço, e $\varepsilon > 0$ é um número real, existe um conjunto de pontos x_1, \dots, x_n , em posição geral tal que $|v_i - x_i| < \varepsilon$.

O conceito de simplexo nos permite particionar o espaço E de modo que propriedades geométricas de objetos nesse espaço podem ser traduzidas em uma estrutura de dados apropriada ao estudo de objetos geométricos em E com o uso do computador. Para isto vamos definir o que entendemos por uma decomposição celular e por uma triangulação do espaço E .

Uma *decomposição celular* de um subconjunto $D \subset \mathbb{E}$ é um conjunto de células $\mathcal{C} = \{c_i, i \in N\}$ que satisfazem às seguintes propriedades:

1. $D = \cup c_i$;
2. Se $c_i, c_j \in \mathcal{C}$ então $c_i \cap c_j \in \mathcal{C}$.

Quando todos os elementos de uma decomposição celular de D são *simplexos* dizemos que ela é uma *triangulação* de D que indicamos por T .

Como exemplo de decomposição celular temos o quadrado unitário de vértices $v_0 = (0, 0)$, $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1)$, que possui células de 0, 1 e 2 dimensões, dadas por

$$\begin{aligned} \text{dimensão 0} &: v_0, v_1, v_2, v_3 \\ \text{dimensão 1} &: [v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_0] \\ \text{dimensão 2} &: [v_0, v_1, v_2, v_3] \end{aligned}$$

A figura abaixo mostra a decomposição celular do quadrado.

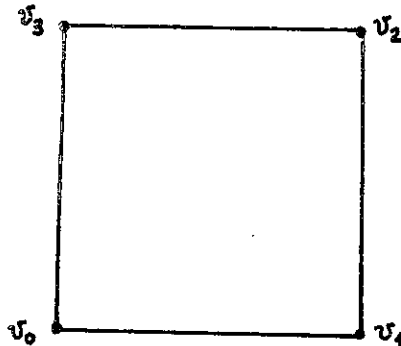


Fig. 2 – decomposição celular do quadrado unitário

Nosso interesse em triangulação reside na possibilidade de explorar a simplicidade da estrutura linear por partes de um espaço triangulado. Portanto estamos mais interessados na triangulação geométrica do que em sua contrapartida topológica. Ao estudarmos objetos geométricos definidos por equações não lineares, o máximo que podemos obter são aproximações desse objeto por um outro

objeto decomposto em células. Do ponto de vista topológico essa aproximação é na maioria das vezes viável de ser obtida, o grau de dificuldade variando de acordo com a especificação do objeto original. Do ponto de vista geométrico os problemas são maiores, pois devemos ter um controle efetivo do erro cometido na aproximação do espaço pelo seu correspondente triangulado, e na discretização dos conceitos geométricos do espaço triangulado.

2. A Triangulação de Coxeter-Freudenthal-Kuhn

A decomposição celular do quadrado da seção anterior dá origem a uma triangulação formada pelos simplexos

$$\begin{array}{cccc} v_0, & v_1, & v_2, & v_3, \\ [v_0, v_1], & [v_1, v_2], & [v_2, v_3], & [v_3, v_1], \\ & [v_0, v_1, v_3], & [v_0, v_2, v_3] & \end{array}$$

o que mostramos na figura abaixo.

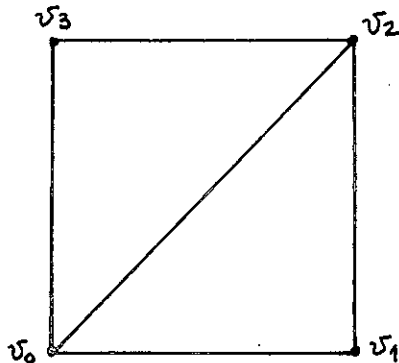


Fig. 3 - triangulação do quadrado unitário

Daremos agora um método para triangular o cubo unitário de \mathbb{R}^3 , que terá um papel fundamental nos capítulos seguintes. Definimos o *cubo unitário* como sendo o poliedro regular sólido em \mathbb{R}^3 cujos vértices são definidos por $v_0 = (0, 0, 0)$, $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0)$, $v_4 = (0, 0, 1)$, $v_5 = (1, 0, 1)$, $v_6 = (0, 1, 1)$, e $v_7 = (1, 1, 1)$. Para obtermos uma triangulação do cubo unitário, procedemos como segue: consideramos uma diagonal D principal do cubo. Projetamos ortogonalmente essa diagonal em cada quadrado do bordo do cubo de modo a obtermos a triangulação do quadrado que descrevemos

anteriormente. Com isto obtemos uma triangulação de todo o bordo do cubo. Acrescentando a cada simplexo de dimensão dois dessa triangulação o vértice da diagonal D que não pertence a esse simplexo, obtemos um total de 6 simplexos de dimensão 3. Esses simplexos, com seus subsimplexos de dimensão 0, 1 e 2, juntamente com a triangulação do bordo, formam a triangulação do cubo unitário. Se tomarmos a diagonal D como sendo a formada pelos vértices v_0 e v_7 , os simplexos de dimensão três obtidos são dados por

$$\sigma_0 = \langle v_0, v_1, v_3, v_7 \rangle;$$

$$\sigma_0 = \langle v_0, v_1, v_5, v_7 \rangle;$$

$$\sigma_0 = \langle v_0, v_2, v_3, v_7 \rangle;$$

$$\sigma_0 = \langle v_0, v_2, v_6, v_7 \rangle;$$

$$\sigma_0 = \langle v_0, v_4, v_5, v_7 \rangle;$$

$$\sigma_0 = \langle v_0, v_4, v_6, v_7 \rangle.$$

Essa triangulação é mostrada na figura abaixo.

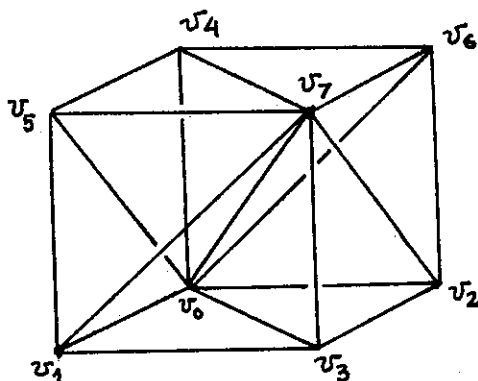


Fig. 4 - triangulação do cubo unitário

Observe que foi possível fazer uma ordenação dos vértices de modo que ao descrevermos os simplexos de dimensão três os vértices v_0 e v_7 ficam fixos nos extremos. Podemos obter imediatamente uma triangulação do espaço ambiente fazendo uma subdivisão uniforme do espaço em "cubos unitários" e repetindo convenientemente a triangulação dada acima em cada cubo. Essa triangulação será a

base de nosso estudo, e veremos como defini-la precisamente no que se segue.

Aplicando aos vértices $v_i, i = 0, \dots, 7$ do cubo unitário a matriz

$$M^\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

obtemos um paralelepípedo cujos lados são paralelos aos eixos coordenados, e têm comprimento δ_1, δ_2 e δ_3 . Continuaremos a chamar esse paralelepípedo de “cubo”, e o indicaremos por $Q^\delta(0, 0, 0)$, ou simplesmente Q^δ , onde δ é o vetor $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Dado um vetor $k = (k_1, k_2, k_3)$, cujas coordenadas, k_i , são números inteiros, indicaremos por $k\delta$ o vetor $(k_1\delta_1, k_2\delta_2, k_3\delta_3)$. O cubo obtido trasladando Q^δ pelo vetor $k\delta$ será indicado por $Q^{k\delta}$. Como a triangulação do cubo unitário é preservada por transformações afins, variando as coordenadas do vetor k no conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros, obtemos uma decomposição celular do espaço ambiente. Mais precisamente, obtemos uma triangulação do espaço

$$\mathbb{R}^3 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^3} Q^{k\delta}.$$

que possui a propriedade de ser invariante por translações definidas por vetores do tipo $k\delta, k \in \mathbb{Z}^3, \delta \in \mathbb{R}^3$. Essa triangulação é chamada de *Triangulação de Coxeter-Freudenthal-Kuhn*, ou simplesmente *triangulação CFK* e será indicada por T^δ . Indicaremos também por T_i^δ , o conjunto de todos os simplexes de dimensão i da triangulação T^δ . Esse conjunto é chamado de *esqueleto de dimensão i* da triangulação da triangulação. Desse modo, T_0^δ (esqueleto de dimensão 0) é o conjunto de todos os vértices, T_1^δ (esqueleto de dimensão 1) é o conjunto de todas as arestas dos simplexes da triangulação, etc.

Variando o vetor δ obtemos uma infinidade de triangulações do espaço, tais que qualquer uma delas pode ser obtida de uma outra através da aplicação linear definida pela matriz M^δ . No caso em que o δ é previamente fixado, a triangulação CFK T^δ será indicada simplesmente por T .

Dado um cubo C na decomposição do espaço em cubos, com vértices v_0, \dots, v_7 , e $\varepsilon > 0$, seja $B_i(v_i, \varepsilon)$ a bola aberta de centro no vértice v_i , e raio ε , e $C(\varepsilon)$ o paralelepípedo obtido escolhendo-se um

vértice \hat{v}_i em cada bola $B_i(v_i, \epsilon)$. Como os vértices do cubo estão em posição geral, para ϵ suficientemente pequeno, os novos pontos \hat{v}_i também estarão em posição geral, portanto o paralelepípedo $C(\epsilon)$ resultante é não degenerado (isto é, tem volume positivo). Nesse caso $C(\epsilon)$ será chamado de um *quase-cubo*. Indicaremos por $v_i(\epsilon)$ o vértice do quase cubo que está na bola $B_i(v_i, \epsilon)$.

Pela construção acima, vemos que para cada ϵ suficientemente pequeno, obtemos uma decomposição do espaço em quase-cubos. Além disso, essa decomposição satisfaz às seguintes propriedades:

1. Se $\sigma = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ é um simplexo tri-dimensional (tetraedro) em um cubo C da decomposição então,

$$\sigma(\epsilon) = \langle v_1(\epsilon), v_2(\epsilon), v_3(\epsilon), v_4(\epsilon) \rangle$$

é um simplexo no quase-cubo $C(\epsilon)$ da decomposição por quase-cubos. Esse simplexo será chamado de um *quase-tetraedro*.

2. Se $C_i = \bigcup_{j=1}^6 \sigma_i^j$ é um cubo na triangulação CFK de \mathbb{R}^3 então $C_i(\epsilon) = \bigcup_{j=1}^6 \sigma_i^j(\epsilon)$ é um quase-cubo da nova triangulação.

A triangulação por quase-cubos, que também será chamada de triangulação CFK do espaço, é definida pelos simplexos

$$\{\sigma_i^j(\epsilon); i \in Z, 1 \leq j \leq 6\}$$

onde σ_i^j são os simplexos da triangulação original. Essa triangulação será indicada por T_ϵ^δ .

Uma vez fixados a perturbação ϵ e o vetor δ , continuaremos representando a triangulação CFK simplesmente por T . O *diâmetro* de T_ϵ^δ é definido como o supremo dos diâmetros dos tetraedros da triangulação e será representado por $\text{diam}(T_\epsilon^\delta)$. Observe que o diâmetro de uma triangulação T_ϵ^δ é controlado pelos valores do número ϵ e, principalmente, do vetor δ .

Os conceitos e resultados desta seção podem facilmente ser estendidos para o espaço \mathbb{R}^n .

3. Gerando a triangulação CFK via combinatória

Nesta seção daremos uma combinatória associada à triangulação CFK como construída na seção anterior. Essa combinatória

faz com que os vértices dos cubos perturbados tenham índices que permitam o controle efetivo das manipulações desses vértices sem incorrer em erros devidos a operações de ponto flutuante. Ou seja, operações com os vértices serão substituídas por operações com os índices, que são números inteiros.

Dado um vértice do cubo unitário, suas coordenadas são formadas por 0 ou 1, podemos pois associar a cada vértice um número inteiro cuja representação na base 2 é dada pelas coordenadas dos vértices. Esse número será chamado de *representação binária* do vértice. Faremos uma indexação do cubo unitário associando a cada vértice sua representação binária.

Essa correspondência é explicitada na tabela abaixo:

$v_0 = (0, 0, 0)$	\rightarrow	$0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = 0$
$v_1 = (1, 0, 0)$	\rightarrow	$1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = 1$
$v_2 = (0, 1, 0)$	\rightarrow	$0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = 2$
$v_3 = (1, 1, 0)$	\rightarrow	$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = 3$
$v_4 = (0, 0, 1)$	\rightarrow	$0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 4$
$v_5 = (1, 0, 1)$	\rightarrow	$1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 5$
$v_6 = (0, 1, 1)$	\rightarrow	$0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 6$
$v_7 = (1, 1, 1)$	\rightarrow	$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 7$

Note que a ordem dos índices dos vértices foram escolhidas anteriormente de modo a satisfazer a regra de indexação acima.

Nosso objetivo agora é descrever um algoritmo combinatório que permita a geração automática de todos os simplexes de dimensão três na triangulação do cubo unitário.

Dado uma triangulação τ do cubo unitário, dizemos que um vértice v_i de τ é o *pivoteado* de um vértice v_j , se

$$j \equiv 2 \cdot i \pmod{7}. \quad (*)$$

Por exemplo, na triangulação *CFK* obtida anteriormente, v_0 e v_7 são pivoteados deles próprios; v_1 é pivoteado de v_2 ; v_6 é pivoteado de v_5 etc. A relação “ser pivoteado de” possui uma interpretação geométrica interessante que descreveremos em seguida. Dois vértices v_i e v_j em uma triangulação τ são pivoteados, se existem dois simplexes de dimensão 3 com uma face σ_2 em comum, tal que v_i e v_j não

são vértices de σ_2 . A figura abaixo ilustra a definição acima.

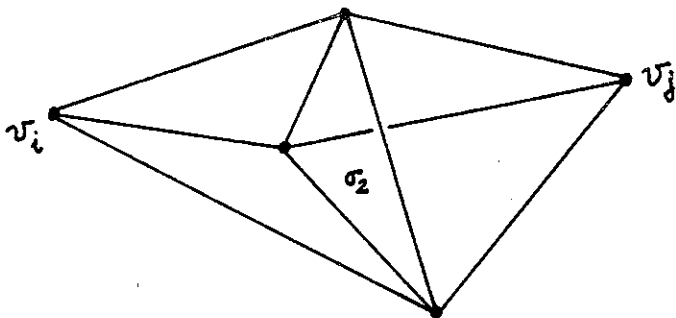


Fig. 6 - Vértices pivoteados

Vamos agora descrever um algoritmo combinatório que permitirá a geração de todos os simplexes de uma triangulação do cubo unitário, baseado no conceito de pivoteamento.

Iniciamos com um simplexo $\sigma_0 = (v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3})$ prefixado, onde tomamos os vértices de modo que $v_{i_0} = v_0$ e $v_{i_3} = v_7$. Em seguida determinamos um vértice \bar{v}_{i_1} por pivoteamento do vértice v_{i_1} de σ (poderíamos ter escolhido v_{i_2} ao invés de v_{i_1}). Construímos então um novo simplexo $\sigma_1 = (v_{i_0}, \bar{v}_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3})$. Repetimos então a operação com o vértice v_{i_2} do simplexo σ_1 , obtendo um simplexo σ_2 , e assim sucessivamente sempre fazendo uma troca do vértice a ser pivoteado no novo simplexo obtido. O teorema abaixo nos assegura que o processo para após um número finito de vezes, e que são gerados todos os simplexes da triangulação.

Teorema Dada a sequência de simplexes $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots$, obtidas no parágrafo anterior, então

- (1) Existe um $n > 0$ tal que $\sigma_n = \sigma_0$;
- (2) Se n_0 é o menor valor de n tal que $\sigma_{n_0} = \sigma_0$, então a sequência $\sigma_0, \dots, \sigma_{n_0}$ contém todos os simplexes de dimensão 3 da triangulação do cubo.

O teorema acima segue-se facilmente de resultados elementares da Teoria dos grupos. Apresentamos abaixo uma matriz cujas colunas são os simplexes da triangulação do cubo, e cujas linhas são

os vértices desses simplexos. A regra de pivoteamento (*) acima aplicada a essa matriz se reduz a substituir em cada coluna, a partir da coluna 1, o vértice v_i pelo vértice

$$v_{i-1} - v_i + v_{i+1},$$

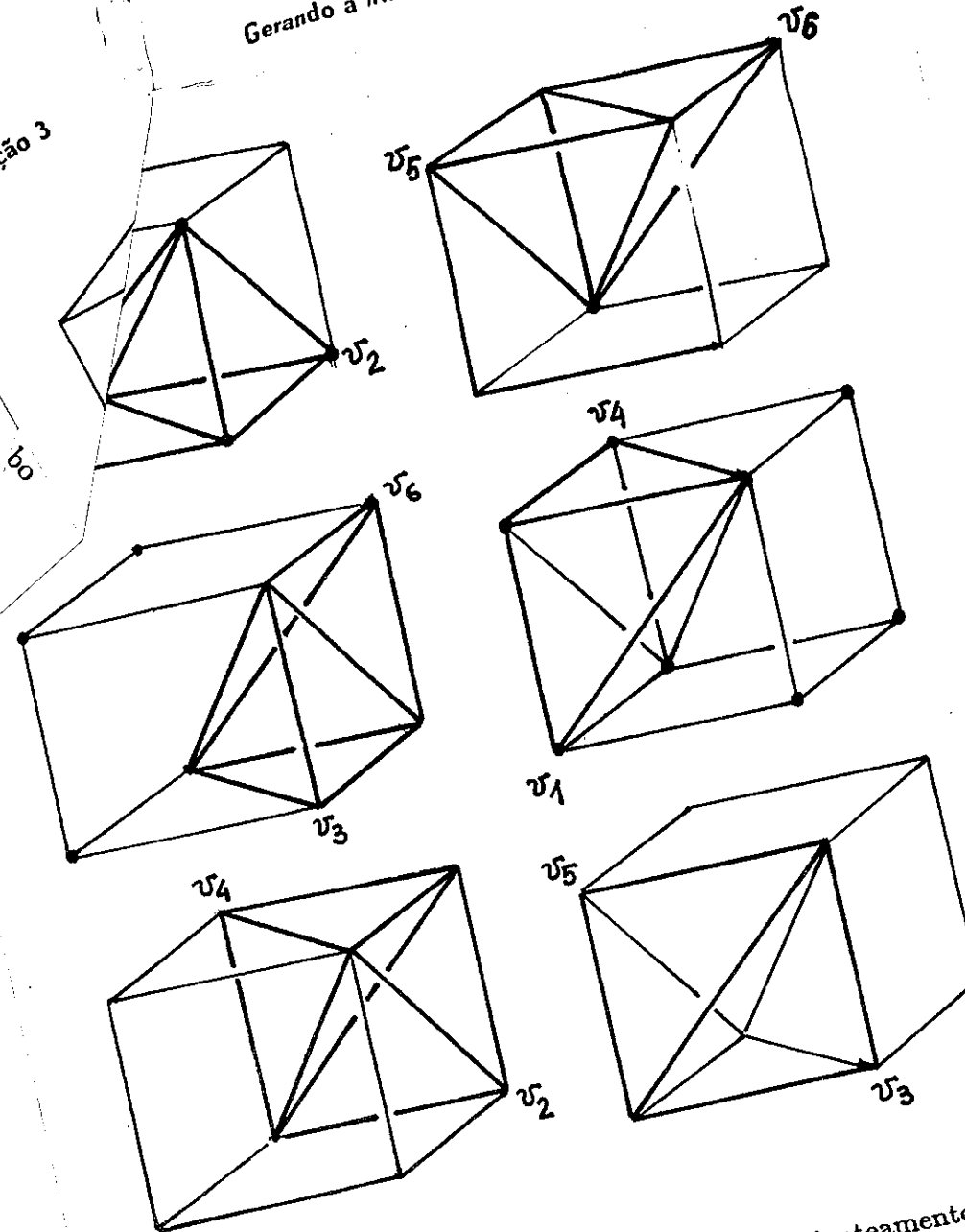
onde a soma é feita na representação binária do vértice. A seta (\rightarrow) na frente de um vértice indica que ele está sendo pivoteado.

	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
$v_{i_0} :$	v_0	v_0	v_0	v_0	v_0	v_0
$v_{i_1} :$	$\rightarrow v_1$	v_2	$\rightarrow v_2$	v_4	$\rightarrow v_4$	v_1
$v_{i_2} :$	v_3	$\rightarrow v_3$	v_6	$\rightarrow v_6$	v_5	$\rightarrow v_5$
$v_{i_3} :$	v_7	v_7	v_7	v_7	v_7	v_7

É interessante observar que na matriz dos vértices acima, a regra

Utilizando a interpretação geométrica da operação de pivoteamento dada anteriormente, podemos observar a sequência acima geometricamente na figura da página seguinte, onde o simplexo sombreado indica a face comum dos simplexos cujos vértices estão sendo pivoteados.

Seção 3



As faces de cada tetraedro da triangulação CFK são geradas tomando as combinações $\binom{4}{3}$ de seus vértices.

4. Exercícios

1. Faça uma decomposição celular do cubo unitário do \mathbb{R}^3 .
2. De quantas maneiras é isso possível triangular o cubo unitário do \mathbb{R}^3 ?
3. Gerar triangulações do \mathbb{R}^3 a partir das triangulações do cubo unitário do exercício anterior.
4. Explique por que as regras de pivoteamento são as mesmas com os vértices e com os seus índices.

Topologia, Combinatória e Aproximação Simplicial

Neste capítulo introduzimos o conceito de curvas e superfícies tanto diferenciáveis quanto lineares por partes. Seu objetivo principal é transformar conceitos topológicos em conceitos combinatórios para aproximar objetos diferenciáveis por lineares por partes. Para isto usamos a triangulação CFK e, tanto quanto possível, aritmética inteira em vez de real, para descrever um algoritmo computacional que descreva tal aproximação. A partir daí introduzimos uma estrutura de incidência apropriada para o estudo de fenômenos locais e globais em curvas e superfícies lineares por partes.

1. Curvas e Superfícies Diferenciáveis

Dada uma função $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o gráfico de f é o subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} definido por

$$G_f = \{(X, f(X)); X \in U\}.$$

Estudaremos apenas curvas em \mathbb{R}^2 , e superfícies em \mathbb{R}^3 . Uma *Superfície (Curva) $S \subset \mathbb{R}^3$ ($C \subset \mathbb{R}^2$) diferenciável* é um subconjunto de \mathbb{R}^3 tal que todo ponto tem uma vizinhança que é o gráfico de uma função de classe C^1 definida em um aberto de \mathbb{R}^2 . A figura abaixo

ilustra a definição acima.

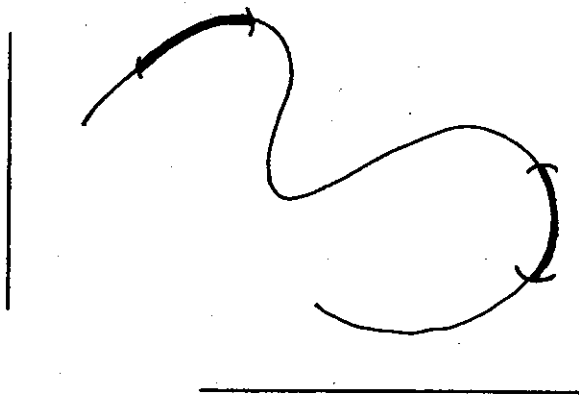


Fig. 1 – Curva diferenciável em \mathbb{R}^2 .

Uma superfície S (curva C) em \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^2) é definida implicitamente, se existe uma função F (f) definida em \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^2) tal que $S = F^{-1}(0)$ ($C = f^{-1}(0)$). Nem toda equação implícita define uma superfície ou curva diferenciável. Para que isto ocorra precisamos de hipóteses adicionais sobre as funções F ou g .

Dizemos que 0 é um *valor regular* da função F (f), se o seu gradiente

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

nunca se anula em $F^{-1}(0)$ ($f^{-1}(0)$).

Teorema 1 Se 0 é valor regular de F (f) então S é uma superfície (curva) diferenciável.

Demonstração: Já que o gradiente de F não se anula em S então dado $p_0 \in S$ uma das derivadas parciais de F não se anula em p_0 , $\frac{\partial F}{\partial z}(p_0)$ por exemplo. Daí pelo teorema da função implícita podemos escrever F como gráfico de um função $z = f(x, y)$, em um vizinhança de p_0 . A prova para o caso de curvas é inteiramente análogo.

O teorema acima é uma grande fonte de geração de exemplos

de superfícies diferenciáveis. Tomando $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, vemos que a esfera unitária em \mathbb{R}^3 é uma superfície diferenciável.

É importante observar que nem toda superfície diferenciável pode ser definida como imagem inversa de um valor regular. Por outro lado, mesmo que 0 não seja valor regular, a equação $F(x, y, z) = 0$ pode definir uma superfície em \mathbb{R}^3 .

2. Curvas e Superfícies Linear por Partes

As curvas e superfícies lineares por partes (LP) desempenham um papel fundamental em Computação Gráfica, seja pela maneira bastante flexível de estruturar os dados em termos computacionais, seja pelo modo como podemos tratar esses dados com o propósito de apresentá-los visualmente. A seguir introduzimos vários conceitos de Topologia LP que usaremos posteriormente em vários de nossos teoremas e algoritmos. Esses conceitos não serão dados em toda sua generalidade.

Dados dois conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ a *junção* de X e Y é o conjunto $XY = \{\lambda x + \mu y; \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1\}$. Geometricamente, XY é o conjunto de todos os segmentos de reta que possuem uma extremidade no conjunto X , e a outra no conjunto Y . A figura abaixo ilustra a

definição.

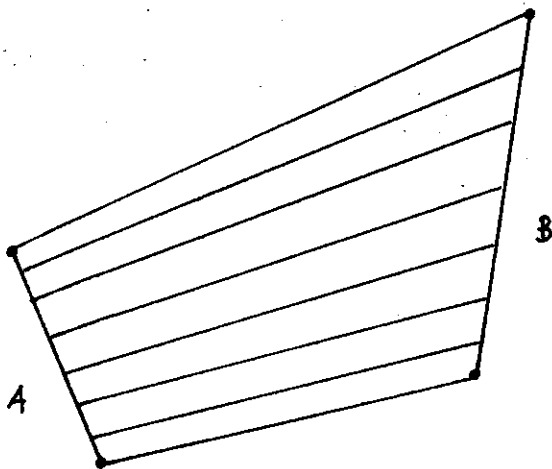


Fig. 2 - Junção dos conjuntos A e B

Quando $X = \{a\}$, indicamos a junção de X e Y por aY . Se a representação de cada ponto de aY na forma $\lambda a + \mu y$; $\lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1$ é única, o chamamos de um *conede* base Y e vértice a . Se tomarmos na definição acima $\lambda > 0$, obtemos um *cone aberto*, que indicaremos

por $\bar{a}Y$. (ver figura abaixo)

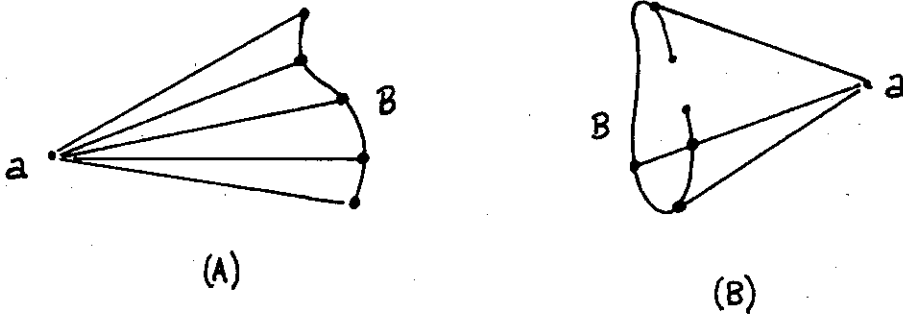


Fig. 3 - (A) um cone de base B e vértice a .
(B) não é um cone.

Uma aplicação $A : aY \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfaz $A(\lambda a + \mu y) = \lambda A(a) + \mu A(y)$ é, por definição uma aplicação LP do cone aY em \mathbb{R}^2 . Se A é contínua e bijetiva ela é chamada um *homeomorfismo LP*.

Uma *superfície linear por partes* ou simplesmente *superfície LP* é um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ que satisfaz às seguintes propriedades:

1. Existe uma decomposição celular bi-dimensional de S ;
2. Para todo ponto $a \in S$ existe um cone aberto $N = \bar{a}Y \subset S$ que é de uma aplicação LP $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 .

De modo intuitivo, uma superfície LP é um objeto em \mathbb{R}^3 que possui uma decomposição "homogênea" em células bi-dimensionais. Um exemplo de uma superfície linear por partes é o conjunto formado pelas faces bi-dimensionais de um tetraedro. O bordo do cubo unitário, com a decomposição celular definida no capítulo anterior é também uma superfície LP.

Considere uma triangulação \mathcal{CFK} , T , em \mathbb{R}^3 , e seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Definimos uma aplicação $F_T : T \rightarrow \mathbb{R}$,

como segue:

$$x = \sum_{i=0}^{i=3} \lambda_i v_i \mapsto F_T(x) = \sum_{i=0}^{i=3} \lambda_i F(v_i).$$

A aplicação F_T é chamada de *aplicação simplicial induzida* pela aplicação F . Uma observação importante é que a aplicação induzida F_T só depende dos valores de F nos vértices do simplexo.

Daremos no que se segue o conceito de valor regular para a aplicação induzida F_T , para isto precisaremos definir aplicação afim.

Uma *transformação afim* do espaço E , é uma composição de translações (i.e. aplicações da forma $T(x)=x+c$, com $c \in E$ fixado), com transformações lineares do espaço. Um *subespaço afim* de E é um subconjunto S da forma $p + V$, onde p é um vetor em E , e V é um subespaço de E . Nesse caso, dizemos que S é o subespaço afim gerado por V , e indicamos por $\text{aff}(V)$. Dada uma aplicação linear $T:V \rightarrow \mathbb{R}$, podemos estender T a uma aplicação afim \bar{T} , de $S \rightarrow \mathbb{R}$. \bar{T} é chamada de *aplicação afim induzida por T* .

Dizemos que 0 é *valor regular* de $F_T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se para todo quase-tetraedro $\sigma = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ que intercepta $F_T^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$, a aplicação a aplicação afim induzida $\bar{F}_T : v_0 + \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva.

É fácil demonstrar que a aplicação \bar{F}_T definida no quase-tetraedro $\sigma = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ é sobrejetiva se, e somente se, existem dois índices distintos i, j tais que $\bar{F}_T(v_i) \neq \bar{F}_T(v_j)$.

Segue-se pelo teorema do posto e da imagem da Álgebra Linear, que se 0 é valor regular de \bar{F}_T , então a interseção do conjunto $\bar{F}_T^{-1}(0)$ com o interior de cada quase-tetraedro da triangulação CFK do espaço ou é vazia, ou é um simplexo de dimensão 2 (triângulo). Desse fato decorre o seguinte

Teorema 2 Se 0 é valor regular de \bar{F}_T , então $\bar{F}_T^{-1}(0)$ é uma superfície LP.

Deixaremos como exercício o estudo dos conceitos LP para o caso de curvas.

3. Aproximações Simpliciais de Curvas e Superfícies Implícitas

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que dada uma superfície S definida implicitamente em \mathbb{R}^3 , existe uma superfície LP que aproxima S . Mais precisamente, se $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, e 0 é um valor regular de F , existe uma triangulação \mathcal{CFK} , T , de \mathbb{R}^3 tal que a aplicação simplicial induzida \bar{F}_T define uma superfície LP \bar{S} que dizemos aproximar a superfície S . Do ponto de vista computacional, é a superfície \bar{S} que nos interessa.

Seja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável que tem 0 como valor regular. Como anteriormente denotaremos $S = F^{-1}(0)$, que como sabemos é uma superfície diferenciável.

Lema 1 *Existe uma vizinhança U de S tal que se $p \in U$ então $F^{-1}(F(p))$ é uma superfície diferenciável.*

Demonstração: Já que 0 é valor regular de F existe um intervalo $(-a, a)$ tal que se $\eta \in (-a, a)$ então $F^{-1}(\eta)$ é uma superfície diferenciável. Basta agora tomar $U = \bigcup_{\eta \in (-a, a)} F^{-1}(\eta)$.

Consideremos agora uma triangulação \mathcal{CFK} , T^δ , e tomamos um domínio $D^\delta = \bigcup_{i=1}^{i=n} Q_i^\delta$, onde Q_i^δ são cubos na decomposição celular do \mathbb{R}^m associadas a T^δ . Se $1 \leq i_1 \leq i_n \leq n$ definimos $\mathcal{V}^\delta = \bigcup_{i=i_1}^{i=i_n} Q_i^\delta$ tais que $Q_i^\delta \cap S \neq \emptyset$. O conjunto \mathcal{V}^δ , chamado de *enumeração espacial* de S em D relativa à triangulação T , consiste da união de todas os quase-cubos de T que interceptam a superfície S , como indicamos na

figura abaixo

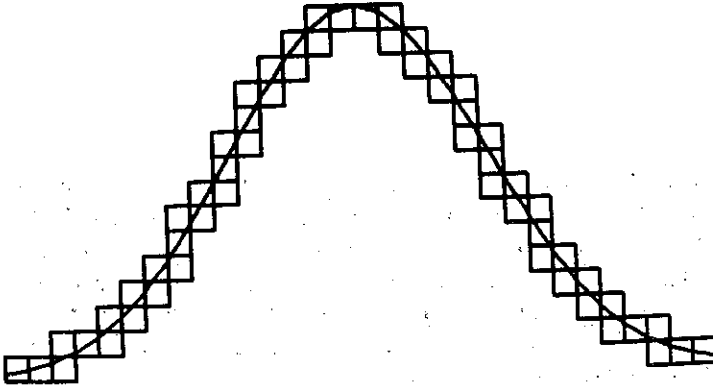


Fig. 4 - Enumeração espacial de S .

A vizinhança \mathcal{V}^δ também é conhecida como a *sombrade* S na decomposição de E em quase cubos.

Se U é a vizinhança dada pelo Lema, podemos tomar uma triangulação *CFK* suficientemente fina, de modo que em cada domínio compacto D de \mathbb{R}^3 , a enumeração espacial de S está contida em U . Este é essencialmente o conteúdo do corolário abaixo.

Corolário *Existe δ tal que em cada domínio compacto de S , $\mathcal{V}^\delta \subset U$ e $\Gamma_0 = \bigcup_{v \in \mathcal{V}^\delta \cap T_0^\delta} F^{-1}(F(v))$ é um número finito de superfícies (possivelmente com bordo).*

Toda superfície tem medida zero no espaço \mathbb{R}^3 , i. e., dado $\nu \geq 0$ ela pode ser coberta com uma quantidade enumerável de bolas B_i , de volume $\text{vol}(B_i)$, tais que $\sum_i \text{vol}(B_i) \leq \nu$. Segue-se do corolário que Γ_0 tem medida zero. Isto significa que a maioria dos pontos de \mathcal{V}^δ não estão em $F^{-1}(F(T_0^\delta \cap \mathcal{V}^\delta))$.

O teorema de aproximação que se segue proporciona uma maneira apropriada de representar superfícies definidas implicitamente no computador.

Teorema 3 *Se $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, e 0 é valor regular de F , então Existe uma triangulação *CFK*, $T = T^\delta(\varepsilon)$, de \mathbb{R}^3 tal que*

0 é valor regular de \bar{F}_T . Em particular $S_T = \bar{F}_T^{-1}(0)$ é uma superfície LP.

Demonstração: Dado um simplexo $\sigma = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ de dimensão 3 em \mathcal{V}^δ que intercepta S_T , se $\bar{F}_T(v_0) = \bar{F}_T(v_1) = \bar{F}_T(v_2) = \bar{F}_T(v_3)$, fazemos uma perturbação da triangulação T^δ de modo que não ocorra pelo menos uma das igualdades acima. Como temos um número finito de simplexos σ em \mathcal{V}^δ , podemos fazer essa perturbação de modo a obter a condição em todos os simplexos.

Nosso objetivo agora é descrevermos um algoritmo para obter computacionalmente a aproximação simplicial da F cuja existência está garantida pela Teorema acima. Precisaremos do seguinte

Lema 2 *Existe um δ suficientemente pequeno tal que se σ_1 é um simplexo de dimensão 1 no esqueleto T_1^δ da triangulação de \mathcal{V}^δ , então σ_1 intercepta S em um único ponto, ou $\sigma_1 \cap S = \emptyset$*

Demonstração: Existe uma vizinhança tubular de raio ϵ de S . Basta tomarmos $\delta = \epsilon/2$, e teremos a triangulação com a propriedade desejada.

3. O Algoritmo de Aproximação Simplicial

Nesta seção exibimos um algoritmo um algoritmo computacional de como aproximar superfícies diferenciáveis definidas implicitamente, por superfícies implícitas LP. A principal hipótese é aquela da seção anterior: 0 é valor regular da aplicação $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Vimos na seção anterior que essa hipótese se traduz geometricamente em uma condição de transversalidade, que será fundamental na elaboração do nosso algoritmo. Mais precisamente, existe uma triangulação CFK T^δ de \mathbb{R}^3 , de tal modo que se $\sigma_3 \in T_1^\delta$ é um simplexo de dimensão 3 na enumeração espacial (sombra) \mathcal{V}^δ de S , e $S \cap \sigma_3 \neq \emptyset$ então a aplicação afim induzida $\bar{F}_T: \sigma_3 \rightarrow \mathbb{R}$ é não degenerada. Além disso, se $\sigma_1 \in T_1^\delta$ é um simplexo de dimensão 1 em T^δ então ou $\sigma_1 \cap S = \emptyset$, ou σ_1 intercepta S transversalmente em um único ponto.

Cabem aqui duas observações. A primeira é que na prática ainda não é possível determinar computacionalmente a priori δ e ϵ , isto se deve ao fato de ainda inexistir uma teoria de erros que permita determinar qual o tamanho da vizinhança de validade do teorema; observamos que a determinação de ϵ é com "probabilidade 1", pois

o conjunto onde a sua escolha pode implicar na não existência da superfície LP aproximante é de medida zero. A segunda observação é que a estrutura do algoritmo que elaboraremos a seguir permite o estudo tanto de fenômenos locais quanto globais em superfícies. A estrutura local provem do fato que os simplexes estão empacotados em cubos, nesse sentido êle lembra a estrutura do sistema de modelagem Octree, permitindo portanto o uso de pouca memória computacional; a estrutura global permite obter informações topológicas sobre a superfície diferenciável original.

Uma vez estabelecidas as condições acima, para determinarmos a aproximação simplicial de F em cada simplexo σ_3 , devemos determinar o "núcleo" da aplicação induzida \bar{F}_T nesse simplexo. Para isto, devemos procurar soluções positivas do sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ F(v_0) & F(v_1) & F(v_2) & F(v_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou equivalentemente, procurar soluções positivas dos subsistemas lineares:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ F(v_i) & F(v_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $0 \leq i, j \leq 3$. Seja agora $\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \mathcal{V}^\delta(\varepsilon)$ e $\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$.

Se $\tau = \langle v_0, v_1 \rangle$ e $\tau \mathcal{S} \neq \emptyset$ então $F(v_0) \cdot F(v_1) < 0$; portanto o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ F(v_0) & F(v_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tem soluções positivas

$$\mu_0 = \frac{F(v_1)}{F(v_1) - F(v_0)}$$

$$\mu_1 = \frac{-F(v_0)}{F(v_1) - F(v_0)}$$

Prosseguindo dessa forma com todas as interseções de $\tau \in T_1^{\delta} \mathcal{V}^\delta$ com \mathcal{S} no simplexo σ , determinamos uma face de \mathcal{S}_T . Todas as faces de \mathcal{S}_T são determinadas dessa forma. Daremos o algoritmo completo em seguida.

Inicialmente escolhemos uma triangulação CFK , $T = T^\delta(\epsilon)$, de \mathbb{R}^3 e fixamos ϵ e δ . Como cada cubo de T é uma cópia do cubo unitário podemos usar este para indexar os vértices de um cubo qualquer dessa triangulação. Assim podemos, uma vez escolhido o domínio $D = D^\delta(\epsilon)$, i. e., damos uma regra de enumeração dos cubos de D , localizar o nosso algoritmo num dado cubo $Q \subset D$.

Os vértices do cubo Q são enumerados de 0 a 7 como no cubo unitário e os seus simplexes 3-dimensionais podem ser gerados por pivoteamento na ordem indicada na seção 2 deste capítulo. Portanto temos não só uma maneira de gerar esses simplexes mas também uma maneira de enumerar os seis simplexes $\sigma_1, \dots, \sigma_6$ que compoem o cubo Q . Em cada um desses seis simplexes testamos no máximo quatro mudanças de sinal para encontrar os vértices da face da aproximação linear procurada. O número de testes de sinal é no máximo quatro devido ao fato que uma vez encontrada uma aresta com mudança de sinal em uma face, existe no máximo outra aresta nessa mesma face onde a função muda de sinal.

No cubo Q o algoritmo é descrito da seguinte forma:

- Comece com o simplexo σ_1
 - Localize, se existir, um vértice da face de $F_{\sigma_1}^{-1}(0)$ e a partir daí determine todos os seus vértices.
 - Passe por pivoteamento para o próximo simplexo σ_2 , e repita a operação do item anterior, até percorrer todos os simplexes.

No que se segue mostramos a aproximação simplicial da superfície definida implicitamente pela equação

$$\cos(x^2 + y^2)e^{-x^2+y^2}(x^2 + y^2) - z = 0$$

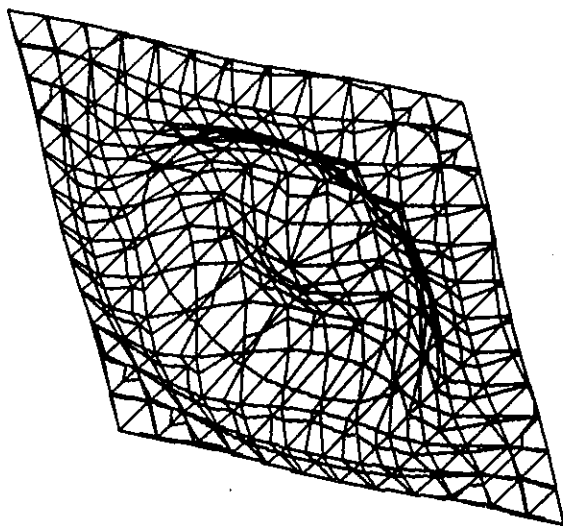


Fig. 5

Outros exemplos de superfícies geradas com o algoritmo acima serão vistos no Capítulo 3 sobre métodos de Combinação de Superfícies.

4. Exercícios

1. Defina curvas LP e mostre o análogo do teorema 1.
2. Mostre que as faces bi-dimensionais de um tetraedro formam uma superfície LP.
3. Seja S uma superfície LP.
 - a) Defina valor regular para aplicações LP de S em \mathbb{R} ;
 - b) Mostre que a imagem inversa de um valor regular é uma superfície.

Combinação de Sólidos e Funções Implícitas

Uma técnica poderosa de se criar modelos em Computação Gráfica é definir operações que permitam que objetos geométricos simples (primitivas geométricas) sejam adequadamente combinadas de modo a criar modelos mais complexos. Um exemplo desse método é a representação de modelos conhecida por CSG (Constructive Solid Geometry), onde são utilizadas as operações booleanas regularizadas ([Re]) para se combinar primitivas geométricas. Nosso objetivo nesse capítulo é descrever uma outra técnica de combinação de superfícies, e mostrar como essa técnica está intimamente relacionada com a utilização de superfícies implícitas em Computação Gráfica.

Do ponto de vista matemático podemos afirmar que enquanto as operações booleanas se utilizam de métodos de interpolação, os métodos que apresentaremos aqui se utilizam da teoria de aproximação de funções.

1. Deformação de Superfícies Implícitas

Dada uma aplicação $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ a equação $f = 0$ define o conjunto

$$f^{-1}(0) = \{p \in E; f(p) = 0\}$$

do espaço E . Se não exigirmos algum grau de diferenciabilidade da função f , o conjunto $f^{-1}(0)$ pode ter uma topologia extremamente complicada. Por esse motivo, salvo menção explícita em contrário, vamos admitir neste capítulo que f é de classe C^1 , isto é, f é diferenciável e todas as derivadas parciais são contínuas. Como motivação ao nosso estudo daremos um exemplo já clássico na área de modelagem (ver [Barr]).

Consideramos a família de funções implícitas dadas por

$$\frac{|x|^{\epsilon_1}}{a^2} + \frac{|y|^{\epsilon_2}}{b^2} = 1$$

Quando os parâmetros ϵ_1, ϵ_2 variam de 0 a ∞ , com $\epsilon_1 = \epsilon_2$ essa família de curvas vai desde duas retas que se cruzam na origem, até o quadrado unitário, passando pelo quadrado $|x| + |y| = 1$. Essas curvas são chamadas de supercônicas.

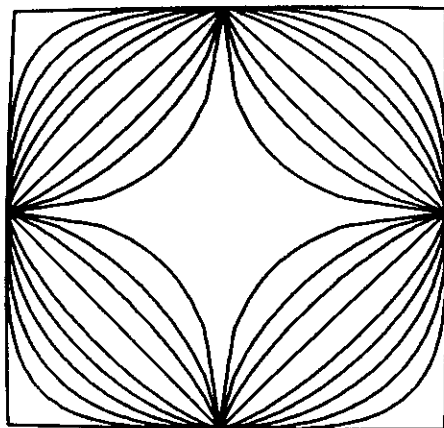


Fig. 1 - Família de supercônicas

A família de funções acima pode ser interpretada do seguinte modo. O quadrado, que pode ser definido implicitamente por quatro funções, sendo aproximado por uma funções implícitas de classe C^∞ , e portanto deformamos o quadrado com o propósito de atenuar suas quinas.

O mesmo tipo de deformação pode ser efetuada com o cubo, por exemplo.

2. Combinação de Superfícies Implícitas

Nesta seção generalizamos o exemplo dado na seção anterior e mostramos como o uso das métricas usuais do \mathbb{R}^3 , quando associado com funções definidas implicitamente, pode ser usado para definir operações de combinação de superfícies. A utilização de combinações de superfícies tem uma importância fundamental na área de modelagem; por um lado elas permitem criar novos objetos a partir de modelos dados e por outro, como vimos na seção anterior, podemos usa-las para atenuar quinas de objetos.

As superfícies implícitas, tem a sobre as superfícies parametrizadas, facilidade de se realizar operações booleanas, ou seja, para testar se um determinado ponto p do espaço está dentro ou fora de um sólido definido implicitamente por uma fun' ao f , basta verificarmos o sinal de $f(p)$.

Acreditamos pois que a combinação de superfícies parametrizadas juntamente com modelos definidos implicitamente, permitem o desenvolvimento de um sistema de modelagem extremamente flexível e robusto.

Uma das aplicações pioneiras do uso de funções implícitas em modelagem geométrica foi dada por P. Comba ([Com]). O problema por ele abordado consiste em detectar a interseção de objetos no espaço, onde cada objeto é definido por uma número finito de funções convexas implícitas. O problema se reduz então à área de otimização não linear. A abordagem de Comba consiste em definir uma função que aproxima os modelos em questão com um grau de aproximação variável, de modo que o problema da interseção de modelos, dentro de uma certa tolerância, se reduz a testar o sinal da função G nos pontos dos sólidos. Vale ressaltar que o método de Comba pode também ser utilizado como uma ferramenta de modelagem, onde os modelos dados originalmente são substituídos pelos modelos aproximados definidos pela função dada.

No que se segue veremos como podemos efetuar operações de combinação de superfícies definidas implicitamente. Veremos como

esse problema pode ser reduzido ao problema de aproximação de funções.

No que se segue vamos generalizar o exemplo acima mostrando que ele é caso particular de uma teoria geral de combinação de sólidos geométricos. O trabalho pioneiro nesse estudo foi feito por A. Ricci (ver [Ri]) que se inspirou no trabalho de Comba mencionado anteriormente.

Dada $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(x) \geq 0$, definimos o sólido

$$S = \{p \in \mathbb{R}^3; f(p) = 1\} = f^{-1}(1)$$

em \mathbb{R}^3 . A função f é chamada *função característica* do sólido S . Dizemos também que S é definido implicitamente pela equação $f(p) = 1$. Observamos que a função característica de um sólido não é única. Note que exigimos apenas que a função f seja contínua, isto é necessário pois como veremos posteriormente, ao fazermos operações com modelos definidos implicitamente, a classe de diferenciabilidade pode diminuir.

Se f é de classe C^1 , S é uma superfície fechada em \mathbb{R}^3 , e divide o espaço em duas componentes conexas. Definimos o *interior* de S como sendo o conjunto $S_i = \{p \in \mathbb{R}^3; f(p) < 1\}$. o exterior de S é analogamente definido por $S_e = \{p \in \mathbb{R}^3; f(p) > 1\}$. Temos pois que $\mathbb{R}^3 = S_i \cup S \cup S_e$. Utilizaremos os conceitos acima mesmo que a função f seja apenas contínua.

O teorema abaixo mostra como a união de sólidos definidos implicitamente pode ser definido implicitamente por uma única função.

Teorema 1 *Sejam S_1, \dots, S_n n sólidos com funções características dadas respectivamente por f_1, \dots, f_n . O sólido interseção $S = \cup_{i=1}^n S_i$ é definido pela função característica $f = \min\{f_1, \dots, f_n\}$.*

Demonstração: Basta mostrarmos que $f(p) = 1$ se, e somente se, $p \in S_1 \cap \dots \cap S_n$. Se $p \in S_1 \cap \dots \cap S_n$, então $f_i(p) = 1, i = 1, \dots, n$, logo $f(p) = \max\{f_1(p), \dots, f_n(p)\} = 1$. Reciprocamente, se $f(p) = 1$, então $\max\{f_1, \dots, f_n\} = 1$, logo $f_i(p) \leq 1$, e portanto p está na interseção S .

O teorema que se segue é o análogo do teorema 1 para a união de sólidos.

Teorema 2 *Sejam S_1, \dots, S_n n sólidos com funções características dadas respectivamente por f_1, \dots, f_n . O sólido interseção $S = \bigcap_{i=1}^n S_i$ é definido pela função característica $f = \max\{f_1, \dots, f_n\}$.*

Deixamos a demonstração do Teorema 2 para o leitor.

As funções *max* e *min* que aparecem nos Teoremas 1 e 2, não são em geral diferenciáveis. Para obtermos então métodos robustos de combinação de sólidos devemos encontrar métodos eficientes de aproximar as funções *max* e *min* por aplicações diferenciáveis. Os dois teoremas que daremos em seguida nos fornecem dois métodos de aproximarmos essas funções.

Teorema 3 *Dadas f_1, \dots, f_n contínuas, temos que*

$$a) \lim_{p \rightarrow \infty} (f_1^p + \dots + f_n^p)^{\frac{1}{p}} = \max(f_1, \dots, f_n)$$

$$b) \lim_{p \rightarrow \infty} (f_1^{-p} + \dots + f_n^{-p})^{-\frac{1}{p}} = \min(f_1, \dots, f_n)$$

Demonstração: a) Após uma possível renumeração dos índices, podemos supor que

$$f_1 \geq f_i \quad \forall i \geq 1.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} f_1 &\leq \sqrt[p]{f_1^p + \dots + f_n^p} \\ &= \sqrt[p]{f_1^p \left(1 + \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^p + \dots + \left(\frac{f_n}{f_1}\right)^p\right)} \\ &= f_1 \sqrt[p]{1 + \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^p + \dots + \left(\frac{f_n}{f_1}\right)^p} \\ &\leq f_1 n^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

A última desigualdade decorre do fato de que $f_j/f_1 \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$. Passando ao limite quando $p \rightarrow \infty$, segue-se o teorema.

b) Esse resultado segue diretamente do resultado em a), observando

que

$$\min(f_1, \dots, f_n) = \frac{1}{\max\{\frac{1}{f_1}, \dots, \frac{1}{f_n}\}}$$

Observe que o item b) do teorema acima, juntamente com o Teorema 2, generalizam o exemplo com superelipses que vimos no início desta seção.

Mostramos abaixo o modelo obtido pela combinação das superfícies $f^{-1}(1)$ e $g^{-1}(1)$, onde

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

e

$$g(x, y, z) = (x - 2.2)^2 + y^2 + z^2 - 0.1.$$

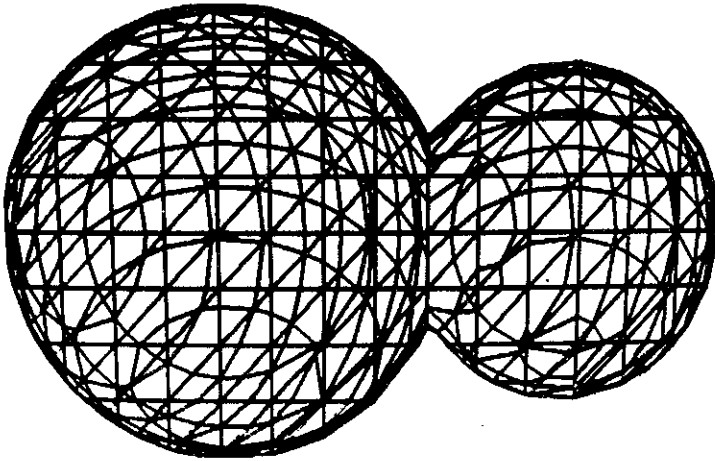


Fig. 2 - Modelo em "wireframe".

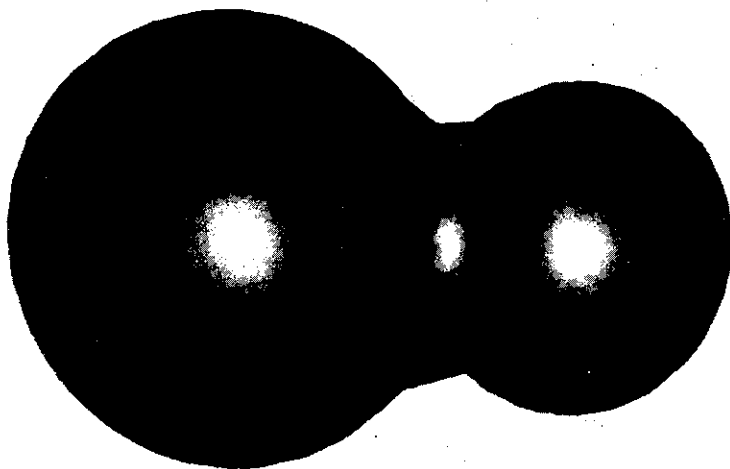


Fig. 3 - Modelo com iluminação de Phong.

O modelo abaixo foi obtido pela combinação das superfícies $f_1^{-1}(1)$ e $g_1^{-1}(1)$, onde $f_1(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2$ e $g(x, y, z) = (x - 3.5)^2 + y^2 + z^2 - 0.1$.

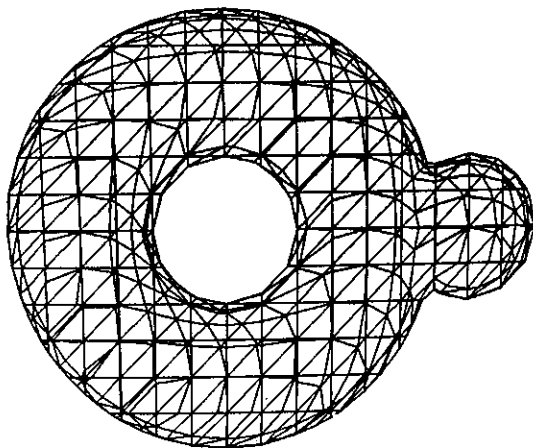


Fig. 4 - Modelo em "wireframe".

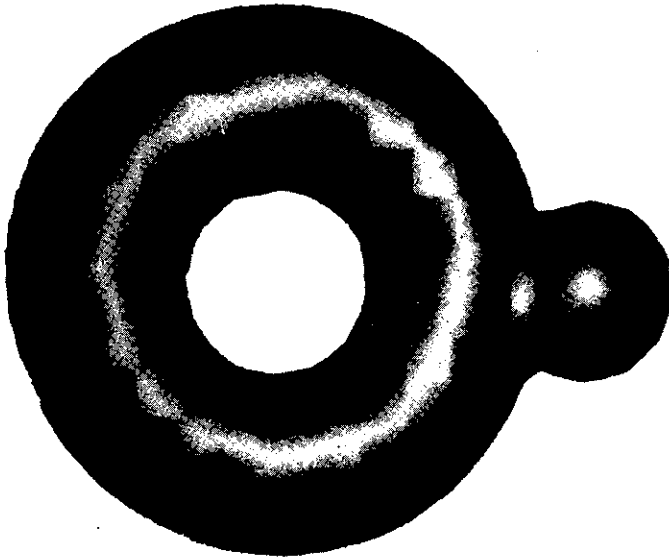


Fig. 5 – Modelo com iluminação de Phong.

Os modelos acima foram obtidos utilizando o algoritmo de aproximação simplicial do Capítulo 2.

3. Exercícios

1. O que acontece com o método de aproximação da seção 1 quando tomamos $\epsilon_1 = k\epsilon_2$ com k inteiro.
2. Generalize o exemplo da seção 1 para o caso do cubo em \mathbb{R}^3 .
3. Como o método de Ricci descrito na seção 2 generaliza aquele da seção 2.

Métodos Simpliciais em Superfícies Mínimas

Nosso objetivo neste capítulo é fazer um estudo das superfícies mínimas do ponto de vista computacional. Mais precisamente, utilizaremos métodos numéricos com a finalidade de obter aproximações simpliciais para imersões mínimas em \mathbb{R}^3 , com o objetivo de visualizar essas superfícies. Esses métodos são de grande importância, e influenciaram decisivamente, por exemplo, para demonstrar o fato de que a superfície de Costa (ver Capítulo 0) é mergulhada.

Existem muitas maneiras de definir o conceito de superfície mínima. Dentre elas, a mais simples é dizer que uma superfície é mínima se a sua curvatura média H se anula em todos os pontos, onde

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

é definida como sendo a média das curvaturas principais da superfície (ver [doCarmo]).

Como a curvatura média de uma superfície S é, a menos de um fator multiplicativo, igual ao divergente de um campo de vetores unitário e normal a S , segue-se que se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então o gráfico de f , $S = \{(u, v, f(u, v)); (u, v) \in U\}$ é uma

superfície mínima se, e somente se, f é solução da seguinte equação diferencial parcial (elítica) não-linear,

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0. \quad (ESM)$$

A equação acima é chamada de *equação das superfícies mínimas*, e será referenciada no que se segue por ESM.

Neste capítulo estudamos um método numérico para a solução aproximada do problema de Plateau, que utiliza a interpretação das superfícies mínimas como solução de um problema variacional. Essa formulação, que foi originalmente estudada por Euler ([Eu]) e Lagrange ([La]), será importante no presente capítulo e por essa razão faremos uma breve exposição nos parágrafos seguintes.

Dada uma imersão $X:U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, seja $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Uma *variação normal* de X é uma família a um parâmetro de aplicações X^t , $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, definidas por

$$X^t(u, v) = X(u, v) + t f(u, v) N(u, v),$$

onde N é um campo de vetores normais em $X(U)$. Para t suficientemente pequeno, X^t é também uma imersão. Dada uma variação normal X^t da imersão X definida anteriormente. Se R é uma região compacta de U , $X^t(R)$ é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^3 . Definimos a função área $A:(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, pondo $A(t) = \text{Área } X^t(R)$. Pode-se demonstrar (ver [doCarmo]) que

$$A'(0) = - \int_R H f dA.$$

onde H é a curvatura média da superfície.

Usando a equação acima é fácil demonstrar que uma superfície é ponto crítico da área se, e somente se, a curvatura média $H = 0$. Foi utilizando essa formulação variacional que Lagrange chegou à equação das superfícies mínimas (ESM).

Existem várias maneiras de se obter uma aproximação simplicial para uma dada superfície mínima S , dependendo do modo como ela está definida. S pode ser dada como o gráfico de uma função

$$z = f(x, y),$$

definida em um domínio U do plano (esta é a chamada forma não-paramétrica de S); pode ainda ser dada por suas equações em forma paramétrica

$$x = x(u, v);$$

$$y = y(u, v);$$

$$z = z(u, v),$$

onde x , y e z estão definidas em um domínio U do plano, e também podemos definir S como imagem inversa $S = F^{-1}(0)$, onde F é uma função definida em um domínio de \mathbb{R}^3 tendo 0 como valor regular.

O número de superfícies mínimas que admite uma das representações acima, onde as funções envolvidas são dadas explicitamente, é muito pequeno. Para obtermos exemplos mais interessantes dessas superfícies devemos trabalhar diretamente com a equação (ESM) das superfícies mínimas.

Trataremos neste capítulo de algumas representações para superfícies mínimas do ponto de vista de aproximações LP: equações paramétricas, representação de Weierstrass e métodos numéricos para o Problema de Plateau.

1. Aproximação simplicial de equações paramétricas

Dentre as várias maneiras de definir uma superfície no espaço ambiente, as mais comuns são :

- Forma implícita;
- Gráfico de uma função ;
- Forma parametrizada.

Se uma superfície S é definida como gráfico de uma função f , sua representação pode ser reduzida a qualquer dos casos anteriores. Com efeito, tomando $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, vê-se facilmente que $S = F^{-1}(0)$. Por outro lado S pode ser facilmente parametrizada tomando

$$x(u, v) = u;$$

$$y(u, v) = v;$$

$$z(u, v) = f(u, v).$$

A forma parametrizada da representação de uma superfície é uma das mais importantes em problemas de visualização. Em geral, mesmo que uma superfície não admita uma parametrização global, ela pode ser obtida como uma união de conjunto finito de parametrizações e esse fato é largamente explorado em programas de modelagem na área de Computação Gráfica. A importância das superfícies implícitas em problemas de visualização só recentemente passou a merecer maior atenção, principalmente devido ao surgimento de algoritmos eficientes e robustos que permitem a sua poligonização conforme vimos no capítulo 2.

Nesta seção descreveremos como obter uma aproximação simplicial de uma superfície definida parametricamente. No que se segue as equações em (1) serão chamadas de *equações paramétricas* da superfície, e a aplicação $F: U \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

será chamada de uma *parametrização* da superfície.

O método consiste nas seguintes etapas:

- Obtemos uma triangulação T de uma região compacta $R \subset U$ do domínio da parametrização. Em alguns casos, para efeito de visualização, é mais conveniente fazermos uma decomposição celular ao invés de uma triangulação da região R .
- Consideramos a transformação afim F_T induzida por F na triangulação T . A aproximação simplicial é a superfície LP definida pela imagem da aplicação F_T no espaço \mathbb{R}^3 .

No caso em que a parametrização F não é um mergulho (porem a derivada ainda tem posto 2), a imagem de F_T não é uma superfície LP. No caso mais comum essa imagem apresenta auto-interseções. De um modo geral, a dificuldade do método de aproximação simplicial acima descrito reside na triangulação da região compacta R , que pode apresentar irregularidades difíceis de serem resolvidas computacionalmente. O ideal é que essa triangulação seja adaptada de modo a refletir as propriedades geométricas da parametrização.

No que se segue vamos obter explicitamente uma expressão para a transformação afim F_T induzida.

Com a finalidade de simplificar a notação indicaremos também por F a transformação afim F_T induzida na triangulação T pela parametrização F na triangulação T da região R . Se $\tau = \langle p_0, p_1, p_2 \rangle$ é um simplexo (triângulo) de T , e (u, v) é um vetor do espaço afim definido por τ (isto é, um vetor de \mathbb{R}^2 com origem em p_0), segue-se que

$$F(u, v) = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + C,$$

onde A é uma matriz 3×2

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix},$$

e

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

é um vetor em \mathbb{R}^3 .

Devemos determinar os coeficientes $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, e c_1, c_2, c_3 . Seja $\Delta = \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ a imagem do simplexo σ no espaço \mathbb{R}^3 . Obtemos um sistema linear de nove equações

$$F(p_i) = P_i \quad i = 0, 1, 2,$$

envolvendo os coeficientes que pretendemos determinar. Como F é não degenerada, pois X é um mergulho, o sistema acima admite uma única solução que determina pois a matriz A , e o vetor C que definem a transformação afim F .

Para fazermos os cálculos explicitamente, sejam

$$p_0 = (u_0, v_0), \quad p_1 = (u_1, v_1), \quad p_2 = (u_2, v_2),$$

e

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad P_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad P_2 = (x_2, y_2, z_2).$$

Um cálculo imediato mostra que

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & v_0 & 1 \\ x_1 & v_1 & 1 \\ x_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix}}{T}, \quad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & v_0 & 1 \\ y_1 & v_1 & 1 \\ y_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix}}{T}, \quad a_3 = \frac{\begin{vmatrix} z_0 & v_0 & 1 \\ z_1 & v_1 & 1 \\ z_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix}}{T},$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_0 & x_0 & 1 \\ u_1 & x_1 & 1 \\ u_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}}{T}, \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} u_0 & y_0 & 1 \\ u_1 & y_1 & 1 \\ u_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{T}, \quad b_3 = \frac{\begin{vmatrix} u_0 & z_0 & 1 \\ u_1 & z_1 & 1 \\ u_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}}{T},$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & x_0 \\ u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \end{vmatrix}}{T}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & y_0 \\ u_1 & v_1 & y_1 \\ u_2 & v_2 & y_2 \end{vmatrix}}{T}, \quad c_3 = \frac{\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & z_0 \\ u_1 & v_1 & z_1 \\ u_2 & v_2 & z_2 \end{vmatrix}}{T},$$

onde as duas barras verticais $| \quad |$ indicam o determinante, e

$$T = \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Sabemos que $R = \cup_{i=1}^n \tau_i$, onde os τ_i são os simplexes da triangulação T . Indicando por F_i a restrição da transformação afim induzida F_T ao triângulo τ_i , e por Φ_i a função característica de τ_i , a transformação afim F_T induzida pela parametrização F será dada por

$$F_T(u, v) = \sum_{i=1}^n \Phi_i F_i(u, v). \quad (AS)$$

Esta é a decomposição em *elementos finitos* triangulares da parametrização F (ou da superfície S).

Estamos particularmente interessados neste capítulo em aproximações simpliciais (ou celulares) das superfícies mínimas. Se uma superfície mínima S for definida implicitamente, podemos utilizar o algoritmo descrito no capítulo 2 para obter uma superfície LP que aproxima S . Esse é o caso por exemplo da *Superfície de Scherk* que

pode ser definida como imagem inversa do 0 pela aplicação $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = e^z \cos x - \cos y$.

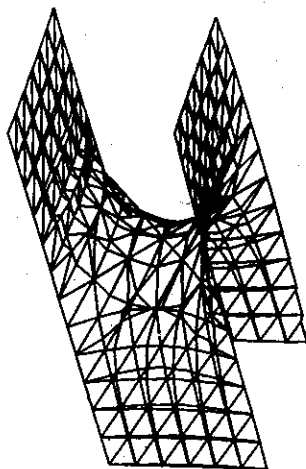


Fig. 1 - Superfície de Scherk

Algumas superfícies mínimas são também definidas globalmente por equações paramétricas. A aproximação simplicial do *Catenoide* que aparece na Fig. 1 do capítulo 0 foi obtida utilizando a parametrização dada por

$$x = \cos v \cos u;$$

$$y = \sin v \sin u;$$

$$z = u,$$

na região $R = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$. Nesse caso a decomposição celular do domínio foi obtida usando um reticulado uniforme.

O *Helicoide* que aparece na figura abaixo também foi obtido com o mesmo método, usando as equações paramétricas

$$x = \cos v \sinh u;$$

$$y = \sin v \sinh u;$$

$$z = v;$$

na região $R = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$, que também foi decomposta em uma

malha uniforme de células quadradas.

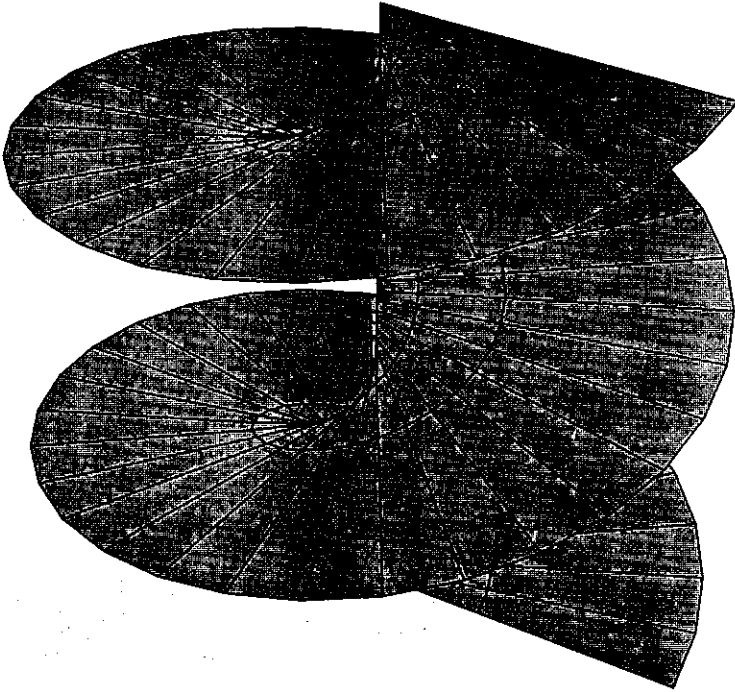


Fig. 2 - O Helicoide

Um outro exemplo de superfície mínima para a qual podemos obter uma aproximação simplicial com o método acima é a superfície de *Enneper* (Fig. 3), cujas equações paramétricas são dadas por

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2\right); \\y &= \frac{1}{2}\left(-v + \frac{v^3}{3} - u^2v\right); \\z &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2);\end{aligned}$$

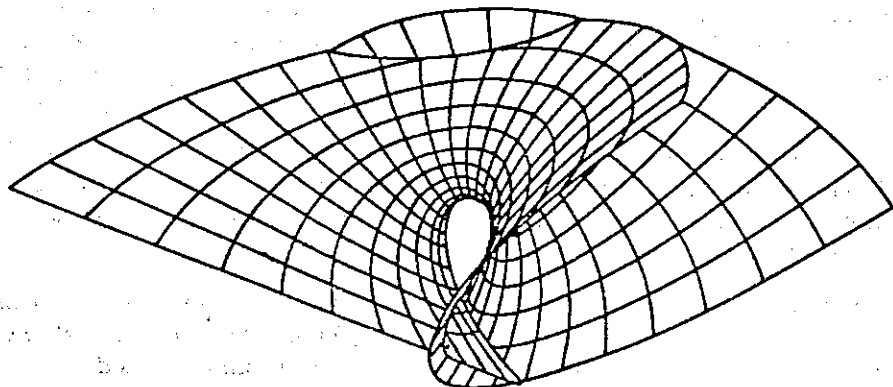


Fig. 3 – Superfície de Enneper

A superfície de Enneper não é mergulhada, a aproximação simplicial possui autointerseções.

2. Representação de Weirstrass

Os exemplos mais interessantes de superfícies mínimas não aparecem explicitamente na forma paramétrica ou não paramétrica que discutimos na seção anterior. Para utilizarmos métodos numéricos em problemas de visualização, devemos pois trabalhar diretamente com a forma variacional ou com a equação elítica diferencial que define uma superfície mínima. A representação de Weirstrass representa uma solução intermediária entre essas duas posições.

A *representação de Weirstrass* resolve a equação das superfícies mínimas determinando uma forma parametrizada da superfície, onde as funções coordenadas são dadas por uma equação integral envolvendo formas holomorfas em uma superfície de Riemann.

Essa representação tem sido utilizada como uma fonte geradora de novos exemplos de superfícies mínimas. Sua importância entretanto não está reduzida a esse caso, pois ela tem sido funda-

mental no desenvolvimento da teoria das superfícies mínimas ao permitir a redução de problemas nessa área a problemas na teoria das funções analíticas complexas. Com o advento das técnicas de visualização científica no estudo das superfícies mínimas, a representação de Weirstrass vem mostrando ser um instrumento poderoso para a obtenção de uma aproximação simplicial de uma superfície mínima.

Uma exposição clara e detalhada da representação de Weirstrass pode ser vista em [BaCo]. No que se segue vamos apenas enunciar o resultado, de modo a melhor esclarecer a sua utilização numérica.

Teorema (Representação de Weirstrass) *Suponha que temos definido em uma superfície de Riemann \mathcal{M} uma função meromorfa g e uma função holomorfa f , tais que os zeros de f coincidem com os polos de g , de modo que cada zero de ordem m de f corresponde a um polo de ordem $2m$ de g . Se as formas*

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)fdz;$$

$$\alpha_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)fdz;$$

$$\alpha_3 = gfdz;$$

não possuem período real, as equações

$$x(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \alpha_1;$$

$$y(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \alpha_2; \quad (*)$$

$$z(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \alpha_3;$$

$z_0 \in \mathcal{M}$ definem uma imersão mínima \mathcal{S} de \mathcal{M} em \mathbb{R}^3 . (Re indica a parte real de um número complexo).

No que se segue indicamos por \mathbb{C} o conjunto dos números complexos (plano complexo). Identificamos o plano complexo \mathbb{C} com o ponto do infinito como sendo a esfera de Riemann $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Nos casos em que as integrais da representação de Weirstrass admitem uma primitiva obtemos uma representação paramétrica explícita da superfície \mathcal{S} . Isto ocorre, por exemplo, com as seguintes

superfícies:

Superfície de Enneper

$$M = \mathbb{C};$$

$$f(z) = 1;$$

$$g(z) = z.$$

Helicoide

$$M = \mathbb{C};$$

$$f(z) = e^{-z};$$

$$g(z) = -ie^z.$$

Em geral não conseguimos uma solução explícita das equações na representação de Weirstrass. Devemos então utilizar métodos numéricos para obter uma aproximação simplicial. Note que a representação (*) nos dá uma equação paramétrica de S em forma integral, para obtermos uma aproximação simplicial procedemos então como visto na seção 1. Fazemos uma triangulação da superfície de Riemann \mathcal{M} (ou de uma parte compacta de \mathcal{M}), e para cada simplexo $\sigma = (v_0, v_1, v_2)$ dessa triangulação calculamos numericamente o valor das coordenadas x, y, z dadas por (*) em cada vértice v_i de modo a obter a imagem $\bar{\sigma}$ de σ no espaço \mathbb{R}^3 , que será um simplexo na triangulação da aproximação simplicial de S .

Vamos agora dar maiores detalhes sobre a visualização do Catenóide usando o método acima descrito. A representação de Weirstrass do Catenóide é dada por

$$M = S^2 - \{(0, 0), \infty\} \text{ (esfera de Riemann menos dois pontos);}$$

$$\alpha_1 = \frac{1 - z^2}{2z^2} dz;$$

$$\alpha_2 = i \frac{1 + z^2}{2z^2} dz;$$

$$\alpha_3 = \frac{dz}{z};$$

$$g(z) = -ie^z.$$

É fácil verificar que a equação acima é simétrica em relação ao círculo unitário S^1 , cuja imagem é a interseção do Catenóide com

o plano de simetria $z = 0$. Tomamos o domínio R como sendo um anel do plano cujo raio interno é 1, e o raio externo é $1 + r_0$, $r_0 > 0$. A imagem do domínio R dá uma das metades da superfície, a outra metade é obtida usando uma reflexão no plano $z = 0$. A decomposição celular da região R é mostrada na figura abaixo

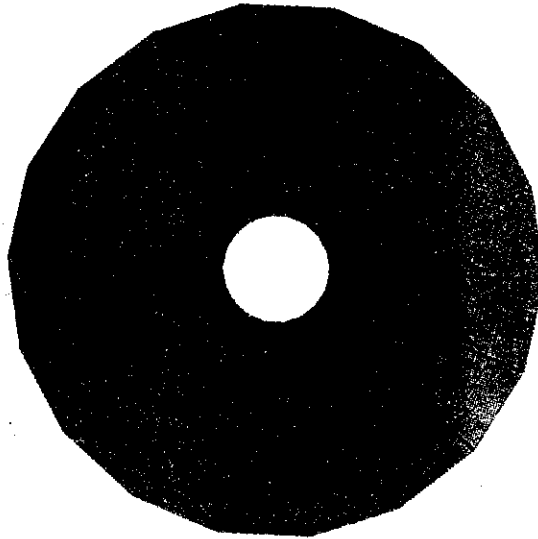


Fig. 4 – Decomposição da região R .

Existem vários métodos de implementar o problema, dependendo do ambiente computacional (software e hardware) existente. O modo mais simples de implementar consiste em introduzir coordenadas polares

$$u = r \cos \theta$$

$$v = r \sin \theta$$

na região R , e integrar as formas α_1 , α_2 e α_3 em um reticulado uniforme da plano uv , separando o integrando em suas partes real e imaginária.

Foi feita uma implementação em um microcomputador utilizando o software Mathematica, e obteve-se o Catenóide que aparece

na figura abaixo.

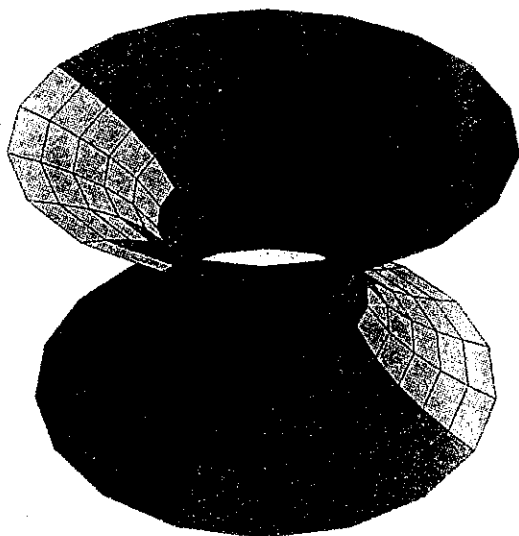


Fig. 5 - O Catenoide.

Como já ressaltamos anteriormente, a dificuldade do problema acima está concentrada na triangulação do domínio. A geometria do domínio permitiu uma decomposição adaptada à integração numérica através do uso de coordenadas polares. Note-se também que fizemos uso da simetria do catenoide no espaço, o que em geral é difícil de ser percebido diretamente da representação de Weirstrass. Para dar uma idéia ao leitor da dificuldade do problema, deixamos como exercício para o leitor descobrir a região, e a decomposição utilizada para obter o Catenoide de três fins (Jorge-Meeks) mostrado

na figura abaixo.

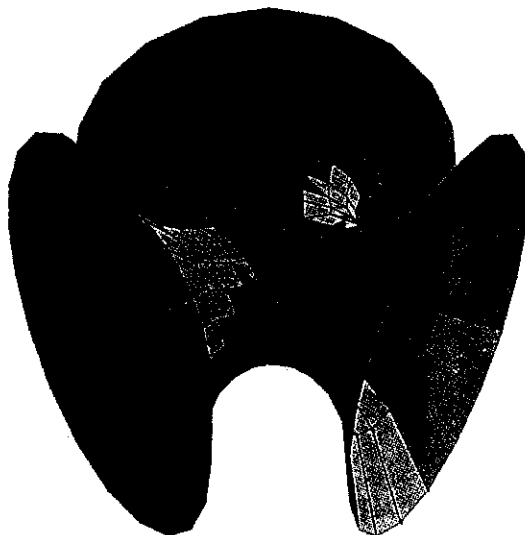


Fig. 6 – O Catenoide de três fins.

A representação de Weirstrass, dessa superfície é dada por

$$M = S^2 - \{z \in \mathbb{C}; z^3 = 1\}$$

$$g(z) = \begin{cases} z^2 & \text{se } z \neq \infty; \\ \infty & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

$$f(z) = \begin{cases} 1/(z^3 - 1)^2 & \text{se } z \neq \infty; \\ 0 & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

Um método mais flexível de implementar métodos numéricos relacionados com a representação de Weirstrass, consiste em utilizar triangulações conformes do plano complexo (ver [MiTa]).

3. Cálculo das Variações e Superfícies Mínimas

Como sabemos da seção sobre Geometria Diferencial no capítulo Visualização e Matemática Pura, o *Problema de Plateau* conforme proposto no século XVIII por J. L. Lagrange ([La]) é o se-

guinte:

“Determinar dentre todas as superfícies com o mesmo bordo aquela que possui a menor área”.

Conforme enfatizado por Radó [Ra, pp. 32-33], existem vários problemas de Plateau. Isto significa que existem várias maneiras de interpretar de modo preciso os diversos conceitos que participam do enunciado do problema. Como exemplo, podemos citar:

- A noção de “bordo”.
- Os tipos de singularidades que se admite no bordo da superfície;
- O tipo topológico da superfície mínima a ser encontrada;
- A classe de diferenciabilidade das superfícies onde nos propomos resolver o problema, etc.

Desde o século XIX, o problema de Plateau foi estudado em termos numéricos. Já em 1870 Lindelöf ([Lindel]) encontrava uma aproximação numérica para a distância máxima entre dois discos coaxiais em planos paralelos para que estes fossem bordo de um catenoide estável: 1,32549, quando temos dois círculos unitários. Em seus experimentos Plateau (1859) havia encontrado 1,333 ([P11]).

Existem vários trabalhos que propõem esquemas numéricos para resolver alguma das várias formulações do problema de Plateau. O problema de Plateau para superfícies não paramétricas ($z = f(x, y)$) foi o primeiro a ser abordado do ponto de vista numérico. De modo mais preciso, o problema é o seguinte:

“Dada uma região R do plano xy limitada por uma curva C e uma aplicação contínua $g: C \rightarrow \mathbb{R}$, determinar a função $z = f(x, y)$ contínua em R tal que $f = g$ no contorno C , e satisfaz a equação das superfícies mínimas (ESM) no interior de R ”.

Um dos trabalhos pioneiros para obter aproximações numéricas para o problema acima foi feito por J. Douglas em 1928 ([Dou1]) que usou método de diferenças finitas; O mesmo tipo de abordagem foi feito por P. Concus ([Con]) em 1967, e posteriormente por Hinata, Shimasaki e Kiyono ([HiShKi]).

O leitor interessado em uma análise completa do problema de Plateau para superfícies não paramétricas pode consultar [EkTe].

Do ponto de vista de correntes (ver [Mor]), e sob a suposição de que as duas curvas estejam contidas em um cilindro existe o trabalho de Almgren e Super ([AlSu]) que dá um esquema numérico para se obter soluções do problema.

Em 1977, Wagner ([Wa]), usou um enfoque variacional associado com o método de elementos finitos com a finalidade de descrever um método numérico que permitisse obter aproximações simpliciais para soluções do problema de Plateau para o caso parametrizado. É sobre esse método que trata o restante deste capítulo. Uma implementação computacional se encontra em [Zo].

4. Elementos Finitos e o Problema de Plateau

Nesta seção estaremos interessados no seguinte problema de Plateau:

“Seja $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$ uma união de curvas de Jordan em \mathbb{R}^3 . Determinar uma superfície mínima S , de classe C^1 , mergulhada e com bordo, de modo que $\partial S = C$ ”

Em 1930 Jesse Douglas mostrou que o problema acima possui solução para o caso em que o bordo C consiste em apenas uma curva de Jordan, e o domínio de parametrização da superfície é o disco de \mathbb{R}^2 . Para dar uma idéia da dificuldade do problema acima, mencionamos que o teorema da Uniformização de Riemann para domínios planos segue-se como um corolário da demonstração de Douglas.

A existência de soluções para o problema de Plateau como formulado acima só foi demonstrada recentemente por Tromba. Estudamos nesta seção um esquema numérico que permite obter uma superfície LP que aproxima a solução do problema.

Dada a curva $C \subset \mathbb{R}^3$, seja S uma superfície (diferenciável) parametrizada com bordo $\partial S = C$. Nosso objetivo nesta seção é construir uma sequência (S_n) de superfícies LP em \mathbb{R}^3 , cujo bordo é C de modo que S_0 é uma aproximação simplicial de S , e quando $n \rightarrow \infty$ S_n se aproxima de uma superfície LP \bar{S} de área mínima com bordo C . \bar{S} representa pois uma aproximação simplicial da solução do problema

de Plateau com bordo C .

Vamos descrever precisamente o problema, para isto faremos inicialmente duas suposições:

- Existe uma região compacta $R \subset \mathbb{R}^2$, e um mergulho $X: R \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $X^{-1}(C) \subset \partial R$.
- Existe uma triangulação T da região R .

As duas condições acima nos garantem, usando o método descrito na seção 1, que existe uma superfície LP, imagem de T por X , em \mathbb{R}^3 cujo bordo é C . Essa superfície será o primeiro elemento S_0 na sequência.

É a partir desta aproximação simplicial S_0 que vamos construir uma sequência de superfícies LP que se aproximam de uma solução do problema de Plateau. Para isto veremos inicialmente a versão discreta do conceito de variação normal de uma superfície.

Dada uma superfície LP S_T precisamos definir o conceito de um campo de vetores normais a S_T . Um *vetor normal* a S_T em um vértice V_i , será definido como sendo a média de todos os vetores normais dos simplexos (triângulos) que têm V_i como vértice. Mais precisamente, se $\Delta_i^1, \dots, \Delta_i^l$ são todos os triângulos que tem V_i como vértice, definimos a normal N a S_T em V_i , pondo

$$N = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \eta^j$$

onde η^j é normal ao triângulo Δ_i^j . Esse conceito é ilustrado na figura

abaixo.

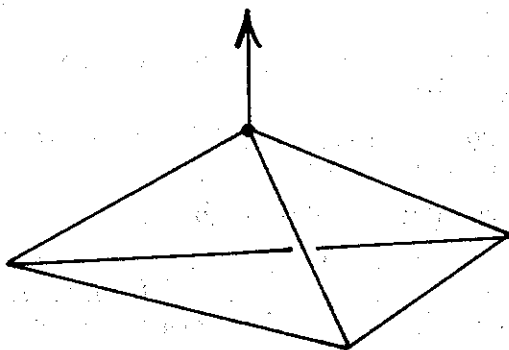


Fig. 7 - A normal em um vértice LP

Um *campo de vetores* em uma superfície LP \mathcal{S}_T é uma aplicação $V: \{V_1, \dots, V_I\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa a cada vértice V_i da superfície um vetor $V(i)$ no espaço afim de dimensão 3 cuja origem é V_i . Se cada vetor $V(i)$ for normal, teremos um *campo de vetores normais* a \mathcal{S}_T . Se cada vetor $V(i)$ tiver norma 1, dizemos que o campo é unitário.

Se N é um campo unitário de vetores normais em \mathcal{S}_T e $f: \mathcal{S}_T \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real definida em \mathcal{S}_T uma *variação normal* de \mathcal{S}_T é uma aplicação

$$F: (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{S}_T \rightarrow \mathbb{R}^3$$

que associa a cada número real t e a cada vértice V_i de \mathcal{S}_T o conjunto de vértices P_i em \mathbb{R}^3 dados por

$$P_i = F(t, V_i) = V_i + t f(V_i) N(V_i). \quad (2)$$

Se ε é suficientemente pequeno, para cada valor de t o novo conjunto de vértices define uma superfície LP no espaço onde cada simplexo $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ é obtido como imagem do simplexo $\langle V_0, V_1, V_2 \rangle$ pela variação F_t . Isto é, a superfície é a imagem da superfície \mathcal{S} pela transformação afim $(F_t)_T$ induzida pela variação F_t . Essa superfície é chamada de *variação normal da superfície* \mathcal{S}_T . Observe que a aplicação f basta estar definida nos vértices da superfície LP inicial. A definição acima de variação normal é exatamente a discretização daquela para o caso

diferenciável. Se tomarmos a aplicação f na equação (2) de modo que

$$f(V_k) = \begin{cases} t_i \neq 0, & \text{se } k = i; \\ 0, & \text{se } k \neq i. \end{cases}$$

obtemos uma variação normal que consiste em perturbar ao longo da normal apenas o vértice V_i da superfície. Geometricamente essa variação perturba todos os simplexos da estrela do vértice V_i , deixando o bordo fixo. Essa variação será chamada de *variação do vértice* V_i . Ela é o análogo da variação de suporte compacto no caso diferenciável.

Como no caso diferenciável, associamos a uma variação normal F_i a função área

$$A: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}$$

que associa a cada vetor número real $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a área da superfície $LP(F_i)_T(S)$.

A versão discreta do problema variacional para superfícies mínimas consiste em determinar superfícies LP que são pontos críticos da função área acima definida. Para resolver esse problema, devemos achar “zeros” do gradiente G da função área

$$G = (G_1, \dots, G_I) = \text{grad } A: (-\varepsilon, \varepsilon)^I \rightarrow \mathbf{R}^I,$$

isto é, devemos resolver a equação $G = 0$. Nosso interesse está no estudo de métodos numéricos para resolver essa equação.

O algoritmo numérico que iremos estudar, para determinar soluções numéricas para o problema de Plateau, consiste em construir, a partir de uma superfície LP S_0 com bordo C , uma seqüência (S_n) de superfícies LP, também com o mesmo bordo C , tais que

$$A_{i+1} = \text{Area}(S_{i+1}) \leq A_i = \text{Area}(S_i).$$

Como a seqüência (A_n) das áreas é decrescente e limitada inferiormente (pois $A_n \geq 0$), existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Dizemos então que a seqüência de superfícies LP S_n converge para uma superfície LP \bar{S} que é uma aproximação simplicial de uma solução do problema de Plateau com bordo C . Na implementação do problema, especificamos uma tolerância tol , e suspendemos a execução quando

$$|A_{n+1} - A_n| \leq tol.$$

Descrevemos agora a construção da seqüência (S_n) de aproximações simpliciais. Para isto, vamos olhar a equação (2) da variação normal de um outro ponto de vista: fazendo $t = 1$ e variando f , vemos que uma variação normal pode ser considerada como uma família de superfícies a I parâmetros, que associa a cada vetor de parâmetros (t_1, \dots, t_I) a superfície LP cujos vértices são dados por

$$V_i + t_i N(V_i), \quad i = 1, \dots, I.$$

A superfície S_1 será obtida como variação normal da superfície LP $S_0 = \mathcal{S}$, devemos pois determinar um vetor

$$\bar{t} = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$$

que define a variação. Esse vetor será obtido usando um método de relaxação: obteremos uma seqüência finita t^1, t^2, \dots, t^I de vetores em \mathbb{R}^I tal que $t^I = \bar{t}$. Cada vetor da seqüência (t^i) de vetores será obtido sucessivamente a partir de um vetor $t = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_I^0)$ dado como condição inicial, da maneira seguinte:

$$t^1 = (t_1^1, t_2^0, t_3^0, \dots, t_I^0) \text{ é obtido de } t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_I^0)$$

calculando a primeira coordenada t_1^1 através do método de Newton

$$t_1^1 = t_1^0 - \omega \left(\frac{\partial F_1}{\partial t_1}(t^0) \right)^{-1} \cdot F_1(t^0).$$

com um parâmetro de relaxação conveniente ω .

$$t^2 = (t_1^1, t_2^2, t_3^0, \dots, t_I^0) \text{ é obtido de } t^1 = (t_1^1, t_2^0, \dots, t_I^0)$$

calculando a segunda coordenada t_2^2 aplicando mais uma vez o método de Newton com relaxação:

$$t_2^2 = t_2^1 - \omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial t_2}(t^1) \right)^{-1} \cdot F_2(t^1).$$

com o mesmo parâmetro de relaxação ω .

Procedendo como acima, após I etapas teremos obtido todas as coordenadas do vetor $\bar{t} = t^I$ procurado.

Para construir a superfície LP S_2 da seqüência, usamos o vetor \bar{t} como vetor de condição inicial t para obtermos um novo vetor de parâmetros.

O método acima de calcular zeros de uma função $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamado de *método de Newton SOR*. Sob condições apropriadas podemos garantir a convergência desse método para um valor conveniente do parâmetro de relaxação w (ver [Sc]). Observe que ele reduz o problema de achar zeros de uma função em \mathbb{R}^n a um problema de cálculo de zeros na reta.

Na construção da seqüência t^1, \dots, t^l utilizamos o método de Newton SOR, e para isto precisamos calcular a derivada parcial da função área. Veremos nesta seção como proceder de modo a obter um cálculo algébrico dessa derivada com a finalidade de minimizar problemas de erros numéricos. Inicialmente lembramos como calcular a área de um triângulo em \mathbb{R}^3 em função das coordenadas de seus vértices.

Dado um triângulo $\Delta = (P_0, P_1, P_2)$ em \mathbb{R}^3 , com $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, sua área A_Δ é dada em função do produto vetorial de $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ pela expressão

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \|(P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0)\|.$$

Um cálculo imediato mostra que

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{(A_{xy})^2 + (A_{yz})^2 + (A_{xz})^2}.$$

Onde

$$A_{yz} = \begin{pmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ y_0 - y_2 & z_0 - z_2 \end{pmatrix},$$

$$A_{xz} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 & z_0 - z_1 \\ x_0 - x_2 & z_0 - z_2 \end{pmatrix},$$

$$A_{xy} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ x_0 - x_2 & y_0 - y_2 \end{pmatrix}.$$

Geometricamente A_{xy} , A_{xz} e A_{yz} são as áreas das projeções do triângulo Δ nos planos coordenados xy , xz e yz respectivamente.

Se indicarmos por A_i , a área de um triângulo Δ_i , da triangulação $T = \cup \Delta_i$, de uma superfície LP, S , a área de S pode ser

calculada pela expressão

$$A(S_T) = \sum_{i=1}^n (A_i).$$

onde n é o número de simplexos na triangulação.

Dado um triângulo Δ de vértices $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ a área $A(t)$ do triângulo Δ^t imagem de Δ pela variação normal do vértice P_0 , depende quadraticamente do parâmetro t (pois cada lado depende linearmente do parâmetro t), podemos então escrever

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (*)$$

Vamos obter uma expressão algébrica para os coeficientes a_0 , a_1 e a_2 em função das coordenadas $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ dos vértices do triângulo original Δ , e do vetor normal por $N_0 = (n_0, n_1, n_2)$ no vértice P_0 .

O triângulo Δ^t tem vértices

$$P_0^t = P_0 + tN_0, \quad P_1, \quad \text{e} \quad P_2.$$

utilizando a equação (3) da área do triângulo obtemos

$$a_0 = a_{01} + a_{02} + a_{03}$$

$$a_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13}$$

$$a_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23}$$

onde os valores dos coeficientes a_{ij} são dados por

$$\begin{aligned} a_{01} = & y_1^2 z_0^2 - 2y_1^2 z_0 z_2 + y_1^2 z_2^2 + 2y_1 z_1 y_2 z_0 \\ & - 2y_1 z_1 y_2 z_2 - 2y_1 z_1 y_0 z_0 - 2y_1 z_1 y_0 z_2 - 2y_1 y_2 z_0^2 \\ & - 2z_1^2 y_2 z_0 + 2z_1^2 y_0 z_0 - 2z_1 y_2 y_2 z_0 + 2z_1 y_2 y_0 z_0 \\ & + 2z_1 y_2 y_0 z_2 - 2z_1 y_0 y_0 z_2 + y_2^2 z_0^2 - 2y_2 y_0 z_0 z_2 \\ & + y_0^2 z_2^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{02} = & x_1^2 z_0^2 - 2x_1^2 z_0 z_2 + x_1^2 z_2^2 + 2x_1 x_2 z_1 z_0 \\
 & - 2x_1 x_2 z_1 z_2 - 2x_1 x_2 z_0^2 + 2x_1 x_2 z_0 z_2 - 2x_1 z_1 x_0 z_0 \\
 & + 2x_0 x_1 z_1 z_2 + 2x_1 x_0 z_0 z_2 - 2x_1 x_0 z_2^2 + x_2^2 z_1^2 \\
 & - 2x_2^2 z_1 z_0 - 2x_2 x_0 z_0 z_2 + z_1^2 x_0^2 - 2z_1 x_0^2 z_2 \\
 & - 2x_0^2 z_2^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{03} = & x_1^2 y_2^2 - 2x_1^2 y_2 y_0 + x_1^2 y_0^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 \\
 & + 2x_1 x_2 y_1 y_0 + 2x_1 x_2 y_2 y_0 - 2x_1 x_2 y_0^2 + 2x_1 y_1 y_2 x_0 \\
 & - 2x_1 y_1 x_0 y_0 - 2x_1 y_2 y_2 x_0 + 2x_1 y_2 x_0 y_0 - 2x_2^2 y_1^2 \\
 & - 2x_2^2 y_1 y_0 + x_2^2 y_0^2 - 2x_2 y_1^2 x_0 + 2x_2 y_1 y_2 x_0 \\
 & + 2x_2 y_1 x_0 y_0 - 2x_2 y_2 x_0 y_0 + y_1^2 x_0^2 - 2y_1 y_2 x_0^2 \\
 & + 2y_2^2 x_0^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} = & -2(s_0 y_1 z_1 z_0 - s_0 y_1 z_1 z_2 - s_0 y_1 z_0 z_2 - s_0 y_1 z_2 z_2 \\
 & + s_0 z_1^2 y_2 - s_0 z_1^2 y_0 - s_0 z_1 y_2 z_0 - s_0 z_1 y_2 z_2 \\
 & + 2s_0 z_1 y_0 z_2 + s_0 y_2 z_0 z_2 - s_0 y_0 z_2^2 - t_0 y_1^2 z_0 \\
 & + t_0 y_1^2 z_2 - t_0 y_1 z_1 y_2 + t_0 y_1 z_1 y_0 + 2t_0 y_1 y_2 z_0 \\
 & - t_0 y_1 y_2 z_2 - t_0 y_1 y_0 z_2 + t_0 z_1 y_2^2 - t_0 z_1 y_2 y_0 \\
 & - t_0 y_2^2 z_0 + t_0 y_2 y_0 z_2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{12} = & -2(r_0 x_1 z_1 z_0 - r_0 x_1 z_1 z_2 - r_0 x_1 z_0 z_2 - r_0 x_1 z_2 z_2 \\
 & + r_0 x_2 z_1 z_1 - r_0 x_2 z_1 z_0 - r_0 x_2 z_1 z_2 + r_0 x_2 z_0 z_2 \\
 & - r_0 z_1 z_1 x_0 + r_0 z_1 x_0 z_2 - r_0 x_0 z_2 z_2 - r_0 x_1 x_1 z_0 \\
 & + t_0 x_1 x_1 z_2 - t_0 x_1 x_2 z_1 + 2t_0 x_1 x_2 z_0 - t_0 x_1 x_2 z_2 \\
 & + t_0 x_1 z_1 x_0 - t_0 x_1 x_0 z_2 + t_0 x_2 z_2 z_1 - t_0 x_2 z_2 z_0 \\
 & - t_0 x_2 z_1 x_0 + t_0 x_2 x_0 z_2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{13} = & 2(r_0 x_1 y_1 y_2 - r_0 x_1 y_1 y_0 - r_0 x_1 y_2^2 + r_0 x_1 y_2 y_0 \\
 & - r_0 x_2 y_1^2 + r_0 x_2 y_1 y_2 + r_0 x_2 y_1 y_0 - r_0 x_2 y_2 y_0 \\
 & + r_0 y_1^2 x_0 - 2r_0 y_1 y_2 x_0 + r_0 y_2^2 x_0 - s_0 x_1^2 y_2 \\
 & + s_0 x_1^2 y_0 + s_0 x_1 x_2 y_1 + s_0 x_1 x_2 y_2 - 2s_0 x_1 x_2 y_0 \\
 & x_0 s_0 x_1 y_1 x_0 + s_0 x_1 y_2 x_0 - s_0 x_2^2 y_1 + s_0 x_2^2 y_0 \\
 & + s_0 x_2 y_1 x_0 - s_0 x_2 y_2 x_0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= s_0^2 z_1 z_1 - 2s_0^2 z_1 z_2 + s_0^2 z_2^2 - 2s_0 t_0 y_1 z_1 \\
 &\quad + 2s_0 t_0 y_1 z_2 + 2s_0 t_0 z_1 y_2 - 2s_0 t_0 y_2 z_2 + t_0 t_0 y_1^2 \\
 &\quad - 2t_0 t_0 y_1 y_2 + t_0^2 y_2^2, \\
 a_{22} &= r_0^2 z_1^2 - 2r_0^2 z_1 z_2 + r_0^2 z_2^2 - 2r_0 t_0 x_1 z_1 \\
 &\quad + 2r_0 t_0 x_1 z_2 + 2r_0 t_0 x_2 z_1 - 2r_0 t_0 x_2 z_2 + t_0^2 x_1^2 \\
 &\quad - 2t_0^2 x_1 x_2 + t_0^2 x_2^2, \\
 a_{23} &= r_0^2 y_1^2 - 2r_0^2 y_1 y_2 + r_0^2 y_2^2 - 2r_0 s_0 x_1 y_1 \\
 &\quad + 2r_0 s_0 x_1 y_2 + 2r_0 s_0 x_2 y_1 - 2r_0 s_0 x_2 y_2 + s_0^2 x_1^2 \\
 &\quad - 2s_0^2 x_1 x_2 + s_0^2 x_2^2,
 \end{aligned}$$

Os cálculos acima foram feitos no computador utilizando o programa REDUCE de Álgebra Computacional.

Na próxima seção estudaremos alguns exemplos de superfícies mínimas obtidas com o algoritmo acima descrito.

5. Resolução Numérica do Problema de Plateau

Vimos na seção anterior como obter uma seqüência (S_n) de superfícies LP que convergem para uma solução do problema de Plateau com um dado bordo C .

Geometricamente, o algoritmo estudado consiste em se obter uma variação normal de um vértice V_i da superfície S_0 de modo que a superfície de variação obtida possui área menor (ou igual) à área da superfície original, em um dado vértice V_i da superfície. A superfície obtida é usado como condição inicial para repetirmos o processo em outro vértice $V_{i+1} \neq V_i$, e assim sucessivamente. Quando se fizer a variação normal em todos os vértices ter-se-á obtido uma superfície S_1 com a propriedade de que

$$\text{Area } S_1 \leq \text{Area } S_2.$$

A superfície S_1 é então usada como condição inicial e o processo se repete até que a diferença entre as áreas de duas superfícies consecutivas seja menor do que uma tolerância previamente dada.

A seguir daremos exemplos de condições de contorno para o problema de Plateau juntamente com a superfície mínima associada.

Em todas esses exemplos obedecemos a duas condições:

- A tolerância usada foi da ordem de 10^{-6} .
- A região R é sempre um retângulo, e foi triangulado como indicamos na figura abaixo

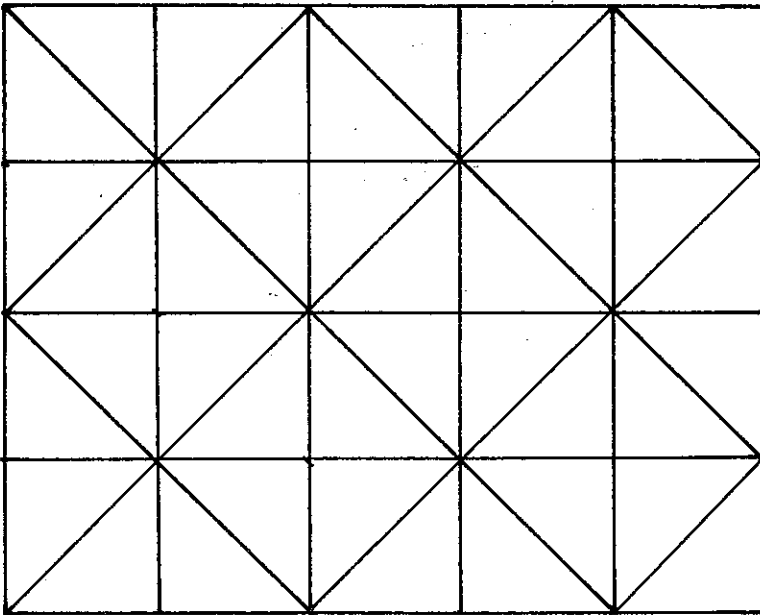


Fig. 8 - Triangulação da região R

Com a triangulação acima o número máximo de triângulos em volta de cada vértice é 8.

Utilizamos o método acima para exibir a "Superfície de Courant", que consiste em obter a solução do Problema de Plateau para

a curva esboçada na figura abaixo

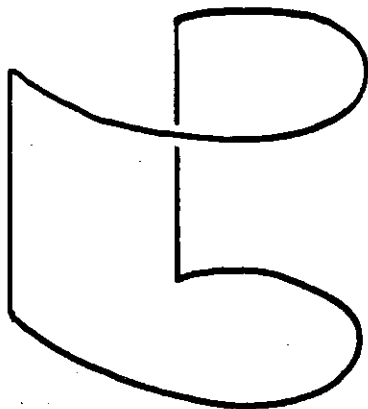


Fig. 9

Esse problema admite mais de uma solução, esboçamos na figura abaixo uma delas.

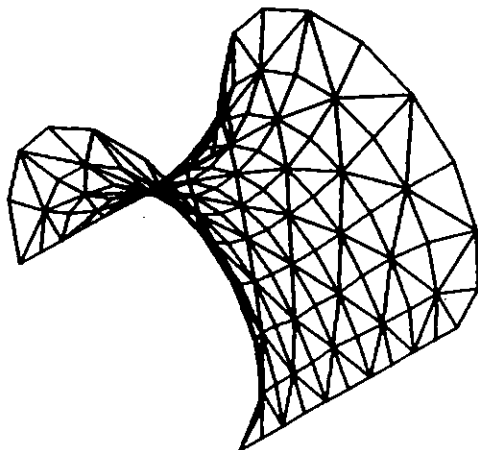


Fig. 10

Como último exemplo apresentamos o Catenóide, que foi obtido pelo método acima tomando como condição inicial o cilindro tendo como bordo dois círculos paralelos. Mostramos o resultado abaixo

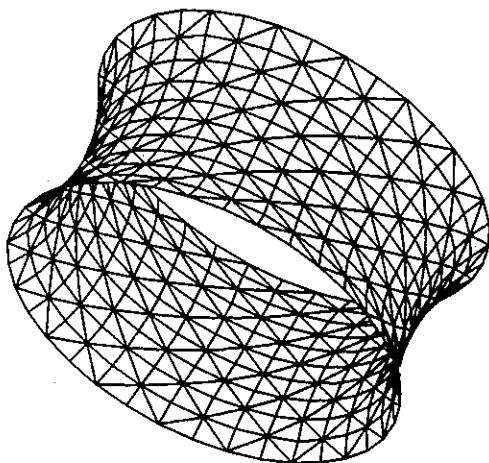


Fig. 11 – Catenóide em wireframe.

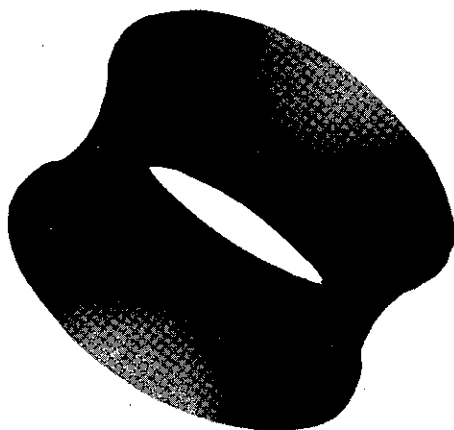


Fig. 12 – Catenóide com iluminação de Phong.

REFERÊNCIAS

- [Ab] U. Abresch - Constant Mean Curvature Tori in Terms of Elliptic Functions. *J. Reine Angew. Math.* 374 (1987) 169-192.
- [AlGe] E. Allgower, K. Georg - Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations. *SIAM Review* 22(1) (1980) 28-85.
- [AlSu] F. J. Almgren, B. Super - Multiple Valued Functions in the Geometric Calculus of Variations. *Astérisque* 118 (1984) 13-32.
- [AlTa] F. J. Almgren, J. Taylor - The Geometry of Soap Films and Soap Bubbles. *Scientific American*, July 1976, 82-93.
- [BaCo] J. L. Barbosa, G. Colares - *Minimal Surfaces*. Lectures Notes in Mathematics # 1195, Springer-Verlag, 1987.
- [BaSt] T. Banchoff, R. Strauss - *The Hypercube*. Banchoff-Strauss Prod.
- [Barn] M. Barnsley - *Fractals Everywhere*. Academic Press, 1988

- [Barr] A. Barr - Superquadrics and Angle-Preserving Transformations. IEEE Computer Graphics, 1 (1981) 11-23.
- [Bau] B. Baumgart - A polyhedron representation for computer vision. In National Computer Conference, AFIPS Conf. Proc. (1975) 589-596.
- [CaFrTa] A. Castelo, S. R. Freitas, G. Tavares - PL Approximation to Manifolds and its Applications to Implicit ODE's. A sair em Lectures in Applied Mathematics of the Amer. Math. Soc.
- [CoEc] P. Collet, J.-P. Eckmann - *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Birkhäuser, 1980
- [Com] P. G. Comba - A procedure for Detecting Intersections of Three dimensional Objects, Jr. of the ACM, 15(3) (1972) pp. 354-366.
- [Cos] C. J. Costa - Example of a Complete Minimal Immersion in \mathbb{R}^3 of genus one and three embedded ends. Bol. Soc. Bras. Mat. 15 (1984) 47-54.
- [Con] P. Concus - Numerical Solution of the Minimal Surface Equation. Math. Comp. 21 (1967) 340-350.
- [Cox] H. S. M. Coxeter - Discrete groups generated by reflections. Annals of Math. 35 (1934) 588-621.
- [De-Kr] R. Devaney; M. Krych - Dynamics of $\text{Exp}(z)$. Ergodic Theory, and Dynamical Systems, 4(1984) 35-52.
- oCarmol] M. P. do Carmo - *Superfícies Mínimas*. 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1987.
- DoHu] A. Douady, J. H. Hubbard - Iteration de Polynomes Quadratic Complexes. Comptes Rendus Acad. Sciences Paris 249 (1982) 123-126.

- [EkTe] I. Ekeland, R. Temam - *Convex Analysis and Variational Problems*. North Holland, 1976.
- [Eu] L. Euler - Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes Sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti. Opera Omnia, Ser. Prima XXIV, Füssli, Turici, 1952, (Ed. C. Carathéodory). (Método de Achar Curvas Gozando da Propriedade do Mínimo ou do Máximo, ou a Solução do Problema Isoperimétrico no Sentido Mais Amplo.)
- [Far] G. Farin - *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, 1988.
- [Fat] P. Fatou - Sur les équations fonctionnelles. Bull. Soc. Math. de France, 47 (1919) 161-270.
- [Fre] H. Freudenthal - Simplizialzerlegungen von beschränkter Flachheit. Ann. of Math 43 (1942) 580-582.
- [GeGlKi] I. M. Gelfand, E. G. Glagoleva, A. A. Kirilov - *The Method of Coordinates*. The MIT Press.
- [Go] J. M. Gomes - Sobre Hypersuperfícies de Curvatura Média Constante no Espaço Hipérbólico. Tese de Doutorado (IMPA) - 1984.
- [GoRiRo] J. M. Gomes, J. B. Ripoll, Lucio L. Rodriguez - On Surfaces of Constant Mean Curvature in Hyperbolic Space. Preprint, IMPA 1986.
- [GuHo] J. Guckenheimer, P. J. Holmes - *Non-Linear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, 1983.
- [Ha] F. Hausdorff - Dimension und Äusseres Mass. Math. Annalen 79 (1919) 157-179.

- [aKaWa] B.-D. Hassard, N. D. Kazarinoff, Y.-H. Wang - *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. London Math. Soc. Lecture Notes Series # 41 (1981).
- [He] M. Hénon - A Two-Dimensional Mapping with a Strange Atractor. *Commun. Math. Phys.* 50 (1976) 69-77.
- [Hi] M. Hinata, M. Shimasaki, T. Kiyono - Numerical Solution of Plateaus Problem. *Math. Comp.* 28 (1974) 45-60.
- [Ho] D. Hoffman - The Computer-Aided Discovery of New Embedded Minimal Surfaces. *Math. Intel.* 9 (3) (1987) 8-21.
- [Hopf] H. Hopf - *Differential Geometry in the Large*. Lecture Notes in Mathematics # 1000. Springer-Verlag.
- [Ju] G. Julia - Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *J. de Math. Pures e Appl.* 8 (1918) 47-245.
- [KoLa] H. Koçak, D. Laidlaw Computer Graphics and the Geometry of S^3 . *Mathematical Intelligencer*, 9 (1) (1987) 8-10.
- [Kuhn] H. W. Kuhn - Simplicial approximation of fixed points. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 61 (1968) 1238-1242.
- [Lo] E. N. Lorenz - Deterministic Non-Periodic Flows. *J. Atoms. Sci.*, 20 (1963) 130141.
- [Mant] M. Mäntylä - *An Introduction to Solid Modeling*. Computer Science Press, 1988
- [Mand] B. Mandelbrot - *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, 1982.
- [Os] R. Osserman - *A Survey of Minimal Surfaces*. Dover, 1969.

- [PeRi] H.-O. Peitgen, P. H. Richter - *The Beauty of Fractals*. Springer-Verlag, 1986.
- [PeSa] H.-O. Peitgen, D. Saupe - *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, 1988.
- [Ph] E. R. Philips (ed.) - *Studies in The History of Mathematics*. MAA Studies in Mathematics # 26.
- [Pl] J. F. Plateau - *Statique Expérimentale et Théorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moléculaires*. Gauthier-Villiar, Paris, 1873.
- [Ra] T. Radó - *Plateau's Problem*. Springer-Verlag, 1933.
- [Ri] A. Ricci, A Constructive Geometry for Computer Graphics. *The Computer Journal*, 16(2) (1973) pp. 157-160
- [RoSa] C. P. Rourke, B. J. Sanderson - *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Springer-Verlag, 1982.
- [RuTa] D. Ruelle, F. Takens - On the Nature of Turbulence. *Comm. Math. Phys.* 20 (1971) 167-192.
- [Sa] P. Sad - *Introdução à Dinâmica das Funções Racionais na Esfera de Riemann*. 14º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1987.
- [Sm] A. R. Smith - Plants, Fractals, and Formal Languages. *Computer Graphics* 18(3) 1-10. SIGGRAPH 1984 Proceedings.
- [Sul1] D. Sullivan - Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics I. *Ann. of Math.* 122 (1985) 401-418.
- [Sul2] D. Sullivan - Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics II, III. Preprints.

- [Sut] I. E. Sutherland - Sketchpad: a Man-Machine Graphical Communication System. Proceedings of the SJCC 23 (1963) 329-349.
- [Thom] R. Thom - *Structural Stability and Morphogenesis*. Benjamin, 1975.
- [Thomp] D. Thompson - *On Growth and Form*. Cambridge University Press, 1917.
- [UIVo] S. Ulam, J. Von Neumann - On combinations of Stochastic and Deterministic Processes. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 1120.
- [Wa] H.-J. Wagner - A Contribution to the Numerical Approximation of Minimal Surfaces. Math. Comp. 19 (1977) 35-58.
- [Wei] K. J. Weiler - Topological Structures for Geometric Modeling. PhD Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, 1986.
- [Wen] H. C. Wente - Counterexample to a Conjecture of H. Hopf. Pac. Jour. of Math. 121 (1986) 193-243.
- [Zo] Zornoff, R. - Aproximações Simpliciais para o Problema de Plateau. Dissertação de Mestrado, Depto. de Matemática, PUC-RJ - 1989.

Impresso na Gráfica do



