

**PROPRIEDADES ESPECTRAIS DO
LAPLACEANO**

Fernando Cardoso

COPYRIGHT © by FERNANDO CARDOSO

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,
por qualquer processo, sem a permissão do autor.

ISBN

85-244-0038-2

CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Estrada Dona Castorina, 110
22.460 – Rio de Janeiro – RJ

Canto da Serra dos Orgãos

Joaquim Cardozo

...

Os homens, uma vez, em Atenas
Descobriram a Idéia
Depois disso nada mais revelaram;
Continuaram a sonhar com Tôrres de Babel
E a adorar Bezerros de Ouro
E até hoje ignoram
Que não há diferenças
Entre o hexâmetro datílico
A frase popular de uma canção
Uma conjectura de Hilbert
A medida de Haar
Uma flor escarlate, um vestido de noiva
Um arco-parede de Maillard.

...

A EVA

Companheira (de) sempre

PREFÁCIO

O objetivo deste curso é o estudo de propriedades espectrais do Laplaceano em domínios compactos (problema interior) e não compactos (problema exterior) de \mathbb{R}^n . Embora sejam questões distintas do ponto de vista matemático, uma vez que no problema interior o espectro é constituído apenas de valores próprios ao passo que no problema exterior existe sempre espectro contínuo, nossa ênfase é mostrar as analogias entre as duas situações. Como ilustração da importância (e também da beleza) do tópico, fazemos (e mencionamos) aplicações a alguns *problemas inversos* e ao problema da *localização dos pólos da matriz de espalhamento*.

As ferramentas técnicas são da Análise Microlocal com utilização, em especial, de resultados um tanto difíceis sobre propagação de singularidades de soluções e construção de parametrizes de problemas mistos para a equação da onda. Além disso, no caso do problema exterior, estes fatos devem ser combinados com fórmulas explícitas da teoria de espalhamento uma vez que estudamos as propriedades espectrais do Laplaceano *relativamente* ao Laplaceano em todo \mathbb{R}^n . Em algumas ocasiões, no desenvolvimento do texto, optamos por uma prova mais acessível em detrimento do melhor teorema conhecido (e.g. (1.6.25) versus (1.6.26)). Achamos que esta atitude beneficiará o leitor, principalmente aquele, não especialista no assunto. Devido à exigüidade de tempo, este trabalho corresponde a uma visão quase instintiva que o autor possui dos temas abordados. Cremos (o que não deixa de ser óbvio) que o futuro indicará modificações que, com certeza, poderão melhorar a apresentação e, portanto, facilitar a compreensão do que foi aqui tratado.

Agradecemos a Paulo Santiago que, gentilmente, se dispôs a ajudar na correção dos erros de datilografia, e a Oscar Pereira da Silva Neto pela eficiência e cuidados com a impressão .

Recife – Pontas de Pedra

Abril de 1989.

ÍNDICE

	Pag.
PREFÁCIO.....	i
ÍNDICE.....	ii
CAPÍTULO 1: Teoria Espectral do Laplaceano em Variedades Compactas.....	1
§ 1.1: Mecânica Clássica versus Mecânica Quântica.....	1
§ 1.2: Fatos Básicos sobre o Operador de Laplace–Beltrami.....	5
§ 1.3: Relação de Poisson.....	11
§ 1.4: O Teorema de Periodicidade.....	20
§ 1.5: Fórmula de Poisson.....	28
§ 1.6: Fórmula de Weyl.....	41
§ 1.7: Comentários e Referências Bibliográficas.....	52
CAPÍTULO 2: Propriedades Espectrais do Laplaceano no Exterior de um Obstáculo....	54
§ 2.1: Propagação de Ondas Acústicas no Exterior de um Obstáculo.....	54
§ 2.2: Teoria de Espalhamento (um Resumo).....	57
§ 2.3: Fórmulas de Traço.....	64
§ 2.4: Relação de Poisson.....	72
§ 2.5: A Fase de Espalhamento (Fórmula de Weyl).....	77
§ 2.6: Localização dos Pólos da Matriz de Espalhamento.....	81
§ 2.7: Singularidades do Núcleo de Espalhamento (Fórmula de Poisson).....	86
§ 2.8: Comentários e Referências Bibliográficas.....	94
CAPÍTULO 3: Propriedades Genéricas de Geodésicas Periódicas e Raios (ω, θ)	98
§ 3.1: Introdução.....	98
§ 3.2: Preliminares.....	105
§ 3.3: Propriedades Genéricas de Mergulhos.....	111
§ 3.4: Independência Racional dos Comprimentos de Geodésicas Periódicas.....	114
§ 3.5: O Espectro da Aplicação de Poincaré de Raios Periódicos Ordinários em \mathbb{R}^2	118
§ 3.6: Igualdade da Relação de Poisson para Domínios Estritamente Convexos Genéricos em \mathbb{R}^2	125
§ 3.7: Comentários e Referências Bibliográficas.....	127

APÊNDICE	132
A.1: O Frente de Ondas de uma Distribuição	132
A.2: Distribuições Definidas por Integrais de Fourier	135
REFERÊNCIAS	143

Capítulo 1
Teoria Espectral do Laplaceano
em
Variedades Compactas

§ 1.1 Mecânica Clássica versus Mecânica Quântica

Possivelmente a melhor maneira de motivar o assunto deste capítulo, seja do ponto de vista ou da perspectiva da Física. Nas situações mais simples, a mecânica clássica descreve o movimento de um ponto $x(t)$ em um espaço \mathbb{R}_x^n (x é a posição) e, mais geralmente, numa variedade C^∞, X . Adicionando-se porém, a impulsão $\xi(t)$ do ponto, prefere-se trabalhar em $T^*(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ e, mais intrinsecamente, em $T^*(X)$, o fibrado cotangente de X . $T^*(X)$ é uma variedade simplética, o que significa que existe em $T^*(X)$ uma 2-forma canônica fechada, não-degenerada, ω . No caso de $T^*(\mathbb{R}^n)$, ω é definida por

$$\omega = \sum_j d\xi_j \wedge dx^j. \quad (1.1.1)$$

No caso de $T^*(X)$, se (x^j) é um sistema local de coordenadas e (ξ_j) o sistema dual, ω pode ser escrita da mesma maneira. Mais geralmente, se M é uma variedade simplética de dimensão $2n$, pode-se sempre achar localmente um sistema de coordenadas (x, ξ) , tal que ω é definida por (1.1.1). Estas coordenadas são chamadas coordenadas canônicas.

Na mecânica Hamiltoniana, o movimento é descrito por uma função C^∞, p , definida em $T^*(X)(= M)$ chamada o Hamiltoniano (ou função energia):

$$(x, \xi) \longrightarrow p(x, \xi). \quad (p(x, \xi) \text{ é a energia do sistema no estado } (x, \xi)) \quad (1.1.2)$$

Associado a este Hamiltoniano, define-se o vetor Hamiltoniano em M , que em coordenadas canônicas é dado por;

$$H_p = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}, -\frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (1.1.3)$$

Observe que H_p é sempre tangente a $p = 0$. O movimento de um ponto em M é descrito pelas curvas integrais de H_p (chamadas bicaracterísticas) que são soluções do sistema (de Hamilton):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial \xi}(x, \xi) \quad , \quad x(0, y, \eta) = y \\ \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x}(x, \xi) \quad , \quad \xi(0, y, \eta) = \eta. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Sabe-se que pelo menos localmente para $|t|$ pequeno, as soluções de (1.1.4) existem e pode-se então definir o fluxo Hamiltoniano $\phi_t = \exp t H_p$, por:

$$\phi_t(y, \eta) = (x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)). \tag{1.1.5}$$

(ϕ_t é um grupo uniparamétrico de transformações canônicas)

Em mecânica quântica, por outro lado, os estados do sistema físico são vetores em um espaço de Hilbert, H , e a dinâmica do sistema é descrita por um operador auto-adjunto (não limitado) P em H , chamado o operador (observável) energia. A equação de evolução do sistema é a equação de Schrödinger, ou seja, o movimento do sistema no tempo é descrito pelo grupo unitário

$$\exp(itP), \tag{1.1.6}$$

gerado por P . A energia do sistema no estado $u \in H$ é

$$\langle Pu, u \rangle / \langle u, u \rangle \tag{1.1.7}$$

onde \langle , \rangle denota o produto escalar em H . Uma preocupação central da Física, desde o final da década de vinte, têm sido como reconciliar esses dois aspectos. Como a descrição clássica é geralmente mais fácil de se obter, isso significa que, na prática, se tenta construir de forma intrínseca o par (H, P) , a partir do par (M, p) . Esse procedimento é chamado de quantização. Um dos problemas é achar um espaço de Hilbert H natural. Aqui, se se considera somente

o caso $M = T^*(X)$, a escolha natural é $H = L^2(X, \Omega_{1/2})$, espaço de Hilbert das densidades mensuráveis de grau um meio de quadrado integrável em X , cuja definição é completamente intrínseca; não depende da escolha de coordenadas locais, nem da escolha de uma densidade básica em X e no qual a medida é a medida canônica associada à estrutura Riemanniana (nos casos em que $X = \mathbb{R}^n$ ou $X =$ variedade compacta C^∞ , $L^2(X, \Omega_{1/2})$ é, de fato, completo). É necessário também um subespaço denso (geralmente $C^\infty(X, \Omega_{1/2})$ se X é compacto e $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ no caso de \mathbb{R}^n).

Seja $X = \mathbb{R}^n$. Por simplicidade assumimos que p é homogêneo de grau m em (x, ξ) , i.e.

$$p(\lambda x, \lambda \xi) = \lambda^m p(x, \xi), \text{ para } \lambda \geq 1 \text{ e } |x|^2 + |\xi|^2 \geq 1. \quad (1.1.8)$$

(Esta hipótese pode ser enfraquecida; veja [Ho2], the Weyl-Calculus, para condições mais gerais).

Podemos associar ao Halmiltoniano p um operador, a priori definido em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pelo processo de “quantização de Weyl”:

$$p \longrightarrow p^W(x, D_x) = P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} p\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi \quad (1.1.9)$$

Esta escolha não é a única possível porém é muito conveniente porque têm-se, por exemplo, que se p é real então, P é formalmente auto-adjunto, isto é

$$\langle Pu, v \rangle = \langle u, Pv \rangle \text{ para todo } u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.1.10)$$

Mais precisamente, o que é importante para os propósitos em mente, P é essencialmente auto-adjunto, isto é, possui uma única extensão auto-adjunta (não limitada) em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Têm-se ainda que se $m > 0$ e $p > 0$ para $|x|^2 + |\xi|^2 \geq 1$, o espectro de P é discreto e intersecta cada intervalo $(-\infty, \lambda)$ em apenas um número finito de pontos. Ademais, cada difeomorfismo de X sobre Y , induz um simpletomorfismo de $T^*(X)$ sobre $T^*(Y)$ e um operador unitário (que é um operador integral de Fourier, [Ho3]) de $L^2(X, \Omega_{1/2})$ sobre $L^2(Y; \Omega_{1/2})$. Obtém-se assim um isomorfismo funtorial entre uma subcategoria da categoria “clássica” de variedades simpléticas e simpletomorfismos e a categoria “quântica” de espaços de Hilbert e operadores unitários.

Voltando à associação $(M, p) \rightarrow (H, P)$, descrita acima, seria desejável que certas “regras básicas” fossem verdadeiras. Por exemplo, suponha que os conjuntos $p \leq \lambda$ são todos compactos, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, e que o espectro de P é discreto. Seja $N(\lambda)$ o número de valores próprios de P menores ou iguais a λ . Então pode-se esperar que

$$N(\lambda) \sim \text{volume}(p \leq \lambda), \quad \lambda \sim +\infty \quad (\text{Formúla de Weyl}) \quad (1.1.11)$$

uma vez que o lado direito mede o número de estados clássicos com energia menor ou igual a λ e o lado esquerdo mede o número de estados quânticos de energia menor que λ . Ainda mais, na descrição clássica um estado de equilíbrio é um ponto $m \in M$ tal que a bicaracterística de H_p que passa por m , é periódica. Na descrição quântica, por outro lado, um estado de equilíbrio é um vetor próprio, v , do operador P . O sistema clássico oscila, no estado m , com um período de oscilação igual ao período da bicaracterística que passa por m e, no sistema quântico essa oscilação tem como período $2\pi/\lambda$ onde λ é o valor próprio correspondente a v . Como estão relacionados esses períodos? Um dos postulados fundamentais da mecânica quântica (o chamado Princípio de Correspondência) diz que o sistema clássico deve descrever o comportamento limite do sistema quântico quando a constante de Planck “tende a zero”; portanto deve existir alguma relação entre esses dois períodos, pelos menos assintoticamente quando $\lambda \sim +\infty$. De fato este é o caso, a relação sendo dada pelas regras de quantização de Bohr-Sommerfeld e Maslov.

Na teoria dos operadores elíticos em variedades compactas (e também na teoria dos

operadores globalmente elícticos em \mathbb{R}^n (cf. [Helf]), cujo modelo mais importante é o oscilador harmônico em \mathbb{R}) têm-se uma situação muito semelhante a esta na mecânica quântica. Com efeito, seja X uma variedade compacta e $P : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ um operador (pseudo) diferencial elítico auto-adjunto positivo de ordem $m > 0$. O símbolo principal de P , $\sigma(P)$, é uma função C^∞ positiva, definida em $T^*(X) \setminus 0$ (o espaço cotangente de X menos a secção nula) e pode-se pensar em P como o “objeto quantizado” associado a $\sigma(P)$. Seja $p = \sigma(P)^{1/m}$ e H_p o vetor Hamiltoniano associado a p . Desde que X é compacta, H_p gera um fluxo global, $\exp tH_p$, em $T^*(X) \setminus 0$, que representa a dinâmica do sistema clássico cuja “quantização” é representada por P . Isto leva a suspeitar que existe um Princípio de Correspondência relacionando os períodos das bicaracterísticas periódicas de H_p com os valores próprios de P . Nos parágrafos seguintes descrevemos alguns resultados que podem, em certo sentido, ser vistos como manifestações desse princípio. Por conveniência e fidelidade ao título do Capítulo, nos limitaremos ao estudo do operador de Laplace–Beltrami numa variedade Riemanniana compacta.

§ 1.2 Fatos Básicos sobre o Operador de Laplace–Beltrami

Neste capítulo, X denota uma variedade C^∞ compacta; $\dim X = n$. Assumimos que X possui uma estrutura Riemanniana: para todo $x \in X$ é dada uma forma bilinear simétrica positiva-definida g_x no espaço tangente $T_x X$; g_x varia suavemente com x no sentido que se θ_1 e θ_2 são dois campos vectoriais C^∞ em X , então $g_x(\theta_1(x), \theta_2(x))$ é uma função C^∞ em X . Em coordenadas locais $(\mathcal{O}, x^1, \dots, x^n)$, representamos g_x na forma habitual

$$\sum_{i,j=0}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j. \quad (1.2.1)$$

Por ser não-degenerada, g_x define uma bijecção linear de $T_x X$ sobre o seu dual $T_x^* X$ (o espaço cotangente a x), denotada por \tilde{g}_x , e que serve para definir uma forma bilinear positiva-definida em $T_x^* X$. Seja $g(x, \xi)$ a forma quadrática associada. Em coordenadas locais

x^j temos

$$g(x, \xi) = \sum_{i,j=0}^n g^{ij}(x) \xi_i \xi_j, \quad (1.2.2)$$

onde

$$\sum_{k=1}^n g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (\text{índice de Kronecker}), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.2.3)$$

A forma $g(x, \xi)$ é “intrínseca”, i.e., não depende do sistema de coordenadas (de fato (g^{ij}) é um tensor contravariante de grau dois e (g_{ij}) é um tensor covariante do mesmo grau). Uma forma bilinear num espaço vetorial pode ser estendida naturalmente a uma forma bilinear em qualquer de suas potências exteriores. Assim podemos estender (g_{ij}) como uma forma bilinear positiva-definida em $\wedge^p T_x X$, para todo $p = 2, \dots, n$. A forma quadrática em $\wedge^n T_x X$, que tem dimensão um, associada a esta extensão, é positiva. Pode, portanto, ser vista como uma forma torcida de grau dois em $T_x X$. Quando x varia, obtêm-se então uma densidade de grau dois; sua raiz quadrada é uma densidade de grau um estritamente positiva em X , que é chamada de elemento de volume em X e que denotamos por

$$dV = (\det g)^{1/2} dx. \quad (1.2.4)$$

O significado da notação em (1.2.4) é que em coordenadas locais, dV é igual a $[\det(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}]^{1/2} dx^1, \dots, dx^n$. O elemento de volume define uma medida em X ; a medida de qualquer subconjunto (mensurável) de X é chamada seu volume. Notemos que o elemento de volume dV permite identificar as densidades de grau um meio e as funções por meio do isomorfismo

$$f \in C^\infty(X) \longrightarrow f\sqrt{dV} \in C^\infty(X, \Omega_{1/2}).$$

Quando se fala do espaço L^2 na variedade Riemanniana X , sempre se tem em mente o espaço L^2 relativamente à medida dV . Pode-se igualmente considerar o espaço L^2 das formas de grau p , para todo $p = 0, 1, \dots, n$. Se se denota por g_x a forma bilinear Hermitiana

em $\Lambda^p T_x^* X$ obtida por extensão de (g^{ij}) , define-se o produto escalar L^2 de duas p -formas C^∞ em X , como

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X g_x(\alpha(x), \bar{\beta}(x)) dV. \quad (1.2.5)$$

Seja d a derivada exterior, atuando de p -formas a $(p+1)$ -formas ($p \leq n-1$). Define-se o operador adjunto d^* de d pela formula

$$\langle d^* u, v \rangle = \langle u, dv \rangle, \quad (1.2.6)$$

onde $u \in C^\infty(X; \Lambda^{p+1})$, $v \in C^\infty(X; \Lambda^p)$. Assim $d^* : C^\infty(X; \Lambda^{p+1}) \rightarrow C^\infty(X; \Lambda^p)$.

Por definição o operador de Laplace-Beltrami, atuando em p -formas, é o operador diferencial de segunda ordem

$$-\Delta = dd^* + d^*d. \quad (1.2.7)$$

Como atuando em zero-formas (isto é, funções) d^* é identicamente zero temos

$$-\Delta = d^*d \quad \text{em zero-formas} \quad (1.2.8)$$

Se computarmos, neste caso, em coordenadas locais a expressão de $-\Delta$, obteremos que para todo $f \in C^\infty(\mathcal{O})$,

$$\Delta f = (\det g)^{-1/2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ (\det g)^{1/2} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right\}. \quad (1.2.9)$$

Em particular, vemos que o simbolo principal de $-\Delta$, agindo sobre funções, é igual a $g(x, \xi)$. Assim $-\Delta$ é um operador diferencial elítico auto-adjunto positivo de ordem dois. A positividade pode ser entendida em dois sentidos: primeiro, que o simbolo principal de $-\Delta$ é

estritamente positivo em $T^*(X) \setminus 0$; segundo, que $-\Delta$ é um operador positivo semi-definido em $L^2(X)$, uma vez que, de (1.2.8)

$$\langle -\Delta u, u \rangle = \|du\|^2, \quad u \in C^\infty(X), \quad (1.2.10)$$

onde $\| \cdot \|$ denota a norma em $L^2(X)$. De passagem, notamos que (1.2.10) implica que $\Delta u = 0$ e $du = 0$ são equivalentes, ou seja, se $H^0(X; \mathbb{C})$ denota o espaço das funções complexas localmente constantes definidas em X , temos

$$\text{Ker} \Delta = H^0(X; \mathbb{C}) \quad (\text{espaço das funções harmônicas em } X). \quad (1.2.11)$$

Claro que $H^0(X; \mathbb{C})$ tem dimensão finita exatamente igual ao número de componentes conexas de X .

Sabemos, através da utilização do cálculo de operadores pseudodiferenciais (cf. [Tr]), que $-\Delta$ possui uma parametriz G , que é um operador pseudodiferencial clássico, de ordem -2 em X , e portanto induz um operador compacto em $L^2(X)$. De fato, G pode ser escolhida de maneira que

$$-\Delta G = G(-\Delta) = I - K, \quad (1.2.12)$$

onde K é a projeção ortogonal, em $L^2(X)$, sobre $\text{Ker} \Delta = (\text{Im} \Delta)^\perp (= H^0(X, \mathbb{C}))$.

Considere agora distribuições f em X verificando, para algum $\chi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$-\Delta f = \chi f \quad (f \neq 0). \quad (1.2.13)$$

Como $-\Delta - \chi$ é hipoeĺítico, f é uma função C^∞ em X . Tomando-se o produto escalar de $L^2(X)$ de ambos os lados de (1.2.13) com f e levando-se em conta (1.2.8), obtém-se que

$\chi = \|df\|^2/\|f\|^2$ é um número real positivo. É óbvio que f é ortogonal a todas funções harmônicas e, portanto, de (1.2.12),

$$Gf = \chi^{-1}f. \quad (1.2.14)$$

Como G é compacto, tais f 's constituem um subespaço vetorial de dimensão finita, V_χ , de $C^\infty(X)$. Sendo Δ auto-adjunto, os subespaços V_χ e $V_{\chi'}$ são ortogonais (em $L^2(X)$), se $\chi \neq \chi'$. Como operador em $L^2(X)$ a norma de G satisfaz, por causa de (1.2.14).

$$\|G\|^{-1} \leq \chi. \quad (1.2.15)$$

Suponha agora que existe uma seqüência de valores próprios χ_j de $-\Delta$ convergindo para um número finito χ . Para cada j , seja f_j uma função própria de $-\Delta$ correspondente a χ_j e tendo norma L^2 igual a um. Como a bola unitária em $L^2(X)$ é fracamente compacta, podemos extrair uma subseqüência que sem perda de generalidade, supomos ser a própria seqüência f_j , que converge fracamente, digamos para uma função f da bola unitária. Sendo G compacto, a seqüência $Gf_j = \chi_j^{-1}f_j$ converge fortemente o que implica que também a seqüência f_j converge fortemente. Isto é um absurdo, uma vez que os f_j são dois a dois ortogonais, e, portanto, $\|f_j - f_k\| = \sqrt{2}$. É claro que existem valores próprios de $-\Delta$ arbitrariamente grandes pois o ortogonal da soma de Hilbert $\oplus_\chi V_\chi$ é invariante pela ação de G , e possui então uma função própria, o que é um absurdo. Assim os valores próprios χ de $-\Delta$ podem ser colocados em um seqüência crescente:

$$0 = \chi_0 \leq \chi_1 \leq \chi_2 \leq \dots \leq \chi_j \leq \dots \quad (1.2.16)$$

(com repetição de acordo com a multiplicidade). Temos

$$L^2(X) = H^0(X, \mathbb{C}) \oplus (\oplus_{\chi \neq 0} V_\chi). \quad (1.2.17)$$

Recordamos alguns fatos bem conhecidos sobre a resolução espectral do operador $-\Delta$. Denotemos por λ_j os distintos valores próprios de $-\Delta$:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_j < \dots, \quad (1.2.18)$$

e por P_λ a projeção ortogonal de $L^2(X)$ sobre o espaço próprio V_λ de $-\Delta$; se λ não é valor próprio de $-\Delta$, $P_\lambda \equiv 0$.

Têm-se então

$$-\Delta = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \lambda P_\lambda, \quad I = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \lambda P_\lambda. \quad (1.2.19)$$

A medida espectral de $-\Delta$ é a medida de Radon na reta a valores no espaço de operadores

$$dE_\lambda = \sum_{j=0}^{+\infty} P_{\lambda_j} \delta(\lambda - \lambda_j), \quad (1.2.20)$$

onde $\delta(\lambda)$ é a distribuição de Dirac suportada em zero. É a derivada no sentido de distribuição da função a valores operadores

$$E(\lambda) = \sum_{j=0}^{+\infty} P_{\lambda_j} \mathcal{H}(\lambda - \lambda_j),$$

onde \mathcal{H} representa a função de Heaviside. Se

$$N(\lambda) = \#\{j, \lambda_j < \lambda\} \quad (1.2.21)$$

é o número de valores próprios de $-\Delta$, repetidos de acordo com sua multiplicidade, cujo valor é $< \lambda$, temos

$$N(\lambda) = \text{Tr} E(\lambda) = \sum_{\lambda_j < \lambda} \dim V_{\lambda_j}, \quad (\text{Tr} = \text{traço}). \quad (1.2.22)$$

Para todo $\lambda < +\infty$, o operador $E(\lambda) : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ tem como imagem um subespaço de dimensão finita, precisamente a soma ortogonal

$$\bigoplus_{\lambda_j < \lambda} V_{\lambda_j}.$$

Se escolhermos, em cada V_{λ_j} , uma base ortonormal $(w_{j,1}, \dots, w_{j,d_j})$ relativamente ao produto escalar em $L^2(d_j = \dim V_{\lambda_j})$ e escrevermos

$$e(\lambda; x, y) = \sum_{\lambda_j < \lambda} \sum_{k=1}^{d_j} w_{j,k}(x) \overline{w_{j,k}(y)}, \quad (1.2.23)$$

é claro que $e(\lambda; x, y)$ é uma função C^∞ em $X \times X$ e que, para todo $f \in L^2(X)$,

$$E(\lambda)f(x) = \int_X e(\lambda; x, y)f(y)dV_y. \quad (1.2.24)$$

A função espectral $e(\lambda; x, y)$ é pois o núcleo de Schwartz do operador $E(\lambda)$ e

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j < \lambda} d_j = \int_X e(\lambda; x, x)dV. \quad (1.2.25)$$

§ 1.3 Relação de Poisson

Neste e nos parágrafos seguintes, denotamos por A a raiz quadrada positiva de $-\Delta$:

$$A = \sqrt{-\Delta}. \quad (1.3.1)$$

É um operador pseudodiferencial clássico elítico de primeira ordem, com símbolo principal $g(x, \xi)^{1/2}$. Escrevemos

$$\begin{aligned} dE_\lambda^A &= \sum_{j=0}^{+\infty} \delta(\lambda - \lambda_j^{1/2}) P_{\lambda_j} \\ E^A(\lambda) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{H}(\lambda - \lambda_j^{1/2}) P_{\lambda_j} = \int_{-\infty}^{\lambda} dE_\lambda^A. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

O operador

$$U(t) = \exp(-itA) = \sum_{j=0}^{+\infty} \exp(-it\lambda_j^{1/2}) P_{\lambda_j} \quad (1.3.3)$$

é um operador integral de Fourier unitário em $L^2(X, \Omega_{1/2})$ e, usando o fato que ele comuta com A^{-s} , é também limitado como operador em $H^s(X, \Omega_{1/2})$ (espaço de Sobolev de ordem s). Usando repetidas integrações por parte com respeito a t , segue que

$$\rho \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itA} \rho(t) dt = \hat{\rho}(A)$$

é uma aplicação linear contínua: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(X \times X, \Omega_{1/2})$. Aqui $\hat{\rho}$ é a transformada de Fourier de ρ , e $\hat{\rho}(A) = \int \hat{\rho}(\sqrt{\lambda}) dE_\lambda$.

Em particular,

$$\text{Traço } U : \rho \longrightarrow \text{Tr} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itA} \rho(t) dt = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{\rho}(\mu_j), \quad (1.3.4)$$

onde $\mu_j = \chi_j^{1/2}$ (note que estamos considerando a multiplicidade dos valores próprios), é uma distribuição temperada em \mathbb{R} . Recordamos que o traço de um operador \mathcal{K} com núcleo suave k , é definido por

$$\text{Traço } \mathcal{K} = \int_{x \in X} k(x, x) dV \quad (1.3.5)$$

(ver Reed e Simon [Re-Si], vol I. Cap. VI, secção 6 para uma justificativa desta terminologia).

O núcleo distribuição de $U(t)$ pode ser escrito como

$$U(t, x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-it\mu_j} \sum_{k=1}^{d_j} w_{j,k}(x) \overline{w_{j,k}(y)} \quad (1.3.6)$$

e portanto,

$$\text{Traço } U(t) = \int_{x \in X} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-it\mu_j} \sum_{k=1}^{d_j} |w_{j,k}(x)|^2 dV = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-it\mu_j} \quad (1.3.7)$$

é igual à transformada de Fourier $\hat{\sigma}$ da distribuição espectral

$$\sigma(\mu) = \sum_{j=0}^{+\infty} \delta(\mu - \mu_j). \quad (1.3.8)$$

Sendo a transformada de Fourier um isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, a identificação de Traço U com $\hat{\sigma}$ é justificada, provando ao mesmo tempo que σ é uma distribuição temperada, isto é

$$N^A(\mu) = \#\{j; \mu_j \leq \mu\} \leq C|\mu|^N \quad \text{para todo} \quad \mu > 0, \quad (1.3.9)$$

com certas constantes C e N . Adiante, no Paragrafo 1.6, mostraremos que o melhor (no caso o menor) N possível em (1.3.9), é $N = n = \dim X$. Seja

$$S(t) = \frac{1}{2} \text{Tr}(e^{itA} + e^{-itA}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \cos(\mu_j t). \quad (1.3.10)$$

Consideremos o operador das ondas $\square = \partial^2 / \partial t^2 - \Delta_x$ em $\mathbb{R} \times X$ ao qual associamos o núcleo do problema de Cauchy, isto é a distribuição $E(t; x, y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times X \times X)$, solução do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x \right) E(t; x, y) &= 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \times X \\ E(t; x, y) &= \delta(x - y) \quad \text{se} \quad t = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} E(t; x, y) &= 0 \quad \text{se} \quad t = 0, \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

onde y é um ponto arbitrário de X ; observe que as restrições têm sentido porque $t = 0$ é não-característico (cf. Apêndice A.1). Podemos representar $E(t; x, y)$ sob a forma

$$E(t; x, y) = \sum_{j=0}^{+\infty} \cos(\mu_j t) \sum_{k=1}^{d_j} w_{j,k}(x) \overline{w_{j,k}(y)} \quad (1.3.12)$$

d'onde se obtem

$$S(t) = \int_X E(t; x, x) dV. \quad (1.3.13)$$

De (1.3.13) segue que para se conhecer as singularidades de S , é suficiente conhecer uma parametriz do problema de Cauchy (1.3.11), isto é, que é suficiente raciocinar módulo C^∞ . De fato (ver [Tr], cap. VIII, secção 8), existe um operador integral de Fourier $\mathcal{F} \in I^{-1/4}(\mathbb{R} \times X, X; C)$ que satisfaz

$$\begin{aligned} \square \mathcal{F} &\equiv 0 \\ \mathcal{F}|_{t=0} &\equiv \text{Identidade em } \mathcal{D}(X) \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}|_{t=0} &\equiv 0 \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

onde \equiv significa congruência módulo operadores regulares em X (isto é operadores contínuos de $\mathcal{D}(X) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R} \times X)$) e C é uma relação canônica em $(T^*(\mathbb{R} \times X) \setminus 0) \times (T^*(X) \setminus 0)$ definida pelo fluxo Hamiltoniano de $\tau^2 - g(x, \xi)$, isto é

$$C = \{(t, \tau; y, \eta; x, \xi) \in (T^*(\mathbb{R} \times X) \setminus 0) \times (T^*(X) \setminus 0) : \quad (1.3.15)$$

o ponto $(t, \tau; y, \eta)$ está sobre a bicaracterística nula de \square que passa por um dos pontos $(0, \tau_0; x, \xi)$ onde $\tau_0 = \pm \sqrt{g(x, \xi)}$ \}.

Utilizamos as notações e terminologia do Apêndice A.2 para tudo que diz respeito aos operadores integrais de Fourier.

Recordamos que uma bicaracterística nula (ou simplesmente uma bicaracterística) de \square passando no ponto $(0, \tau_0; x, \xi)$ é uma aplicação

$$s \in \mathbb{R} \rightarrow (t(s), \tau(s); y(s), \eta(s)) \in T^*(\mathbb{R} \times X) \setminus 0 \quad (1.3.16)$$

que verifica o sistema de equações diferenciais (equação de Hamilton)

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= 2\tau & \frac{d\tau}{ds} &= 0 \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{\partial g}{\partial \xi}(y, \eta) & \frac{d\eta}{ds} &= -\frac{\partial g}{\partial x}(y, \eta) \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

$$(t, \tau; y, \eta)|_{s=0} = (0, \tau_0; x, \xi)$$

e a condição $\tau^2 - g(y, \eta) = 0$.

(têm-se imediatamente que $\tau = cte = \tau_0$ e $t = 2\tau_0 s$). Seja $F(t; x, y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times X \times X)$ o núcleo de Schwartz de \mathcal{F} . A distribuição $F(t; x, y)$ é uma distribuição de Fourier que, para $|t|$ pequeno, pode ser representada microlocalmente na forma (sugerimos ao leitor ver detalhes em [Tr])

$$F(t; x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i[\varphi(t, x, \theta) - \langle y, \theta \rangle]} k(t, x, \theta) d\theta, \quad (1.3.18)$$

onde a variável na fibra $\theta \in \mathbb{R}_n \setminus \{0\}$, a função fase φ é positivamente homogênea de grau um em relação a θ , e o símbolo formal (amplitude) k se escreve

$$k(t; x, \theta) = \sum_{j=0}^{+\infty} k_j(t, x, \theta); \quad (1.3.19)$$

aqui k_j é positivamente homogênea de grau $-j$ em relação a θ . A função φ é solução do problema de Cauchy para a equação eikonal

$$\begin{aligned} \varphi_t^2 &= g(x, \varphi_x) \\ \varphi|_{t=0} &= \langle x, \theta \rangle, \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

ao passo que os termos homogêneos k_j da amplitude k são soluções das equações de transporte (que descreve o crescimento da amplitude ao longo das curvas bicaracterísticas de \square)

$$Lk_j = F_j(k_0, \dots, k_{j-1}), \quad (1.3.21)$$

satisfazendo às condições iniciais

$$k_0|_{t=0} = 1, \quad k_j|_{t=0} = 0 \quad \text{para} \quad j > 0. \quad (1.3.22)$$

Em (1.3.21) o operador diferencial de primeira ordem L e as funções F ; são bem determinadas em termos do símbolo (total) de \square .

Sabemos que o frente de ondas de F , $WF(F)$, verifica a inclusão

$$WF(F) \subset \{(t, \tau; y, \eta; x, \xi) : (t, \tau; y, \eta; x, \xi) \in C\} = C'. \quad (1.3.23)$$

Como $\tau = \pm\sqrt{g(x, \xi)} \neq 0$ visto que $(x, \xi) \in T^*(X) \setminus 0$, decorre dos teoremas sobre WF (cf. Apêndice A.1) que se pode definir a restrição da distribuição F à variedade $\mathbb{R} \times D \subset \mathbb{R} \times X \times X$ onde D designa a diagonal de $X \times X$. Têm-se

$$WF(F)|_{\mathbb{R} \times D} \subset \{(t, \tau; x, \eta - \xi) : (t, \tau; x, \eta; x, \xi) \in C\} \quad (1.3.24)$$

e, integrando-se sobre X , segue que

$$WF\left(\int_X F(t; x, x) dV\right) \subset \{(t, \tau) : \text{existe } (x, \xi) \text{ tal que } (t, \tau; x, \xi; x, \xi) \in C\}. \quad (1.3.25)$$

De outra parte, como \mathcal{F} é uma parametriz (global), obtem-se também, de (1.3.13),

$$S - \left(\int_X F(t; x, x) dV\right) \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad (1.3.26)$$

e, por conseguinte, deduzimos que o suporte singular de S verifica a inclusão :

$$\begin{aligned} \text{supp. sing. } S \subset \{t : \text{existe } (x, \xi) \in T^*(X) \setminus 0 \\ \text{tal que } (t, \tau; x, \xi; x, \xi) \in C\} \\ \text{onde } \tau = \pm\sqrt{g(x, \xi)} \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

Se se recorda a definição (1.3.15) de C , constatamos que os valores de t que aparecem em (1.3.27) são 0 e \pm o tempo de percurso para se ir de (x, ξ) a (x, ξ) ao longo de uma bicaracterística (nula), isto é os períodos das bicaracterísticas periódicas no sentido da

Definição 1.3.1. Uma bicaracterística $s \mapsto (t(s), \tau(s); x(s), \xi(s))$ de \square é dita “periódica”, se a projeção $s \mapsto (x(s), \xi(s))$ é uma aplicação periódica. O tempo de percurso de uma ou várias voltas se chama os períodos da bicaracterística.

Denotamos por \mathcal{L}^+ , o conjunto desses períodos positivos e por $\mathcal{L} = \mathcal{L}^+ \cup (-\mathcal{L}^+)$.

Através da estrutura Riemanniana pode-se dar uma interpretação mais geométrica desses períodos. Para isso, calculemos o comprimento l da curva $s \mapsto x(s)$ para um tempo de percurso correspondente a um período $t > 0$. Com a parametrização por s , obtêm-se

$$l = \int_0^{t/2\tau_0} \left\| \frac{dx}{ds} \right\| ds. \quad (1.3.28)$$

Por definição, têm-se

$$\left\| \frac{dx}{ds} \right\|^2 = g_x \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds} \right). \quad (1.3.29)$$

De (1.3.17) deduz-se que

$$\frac{dx}{ds} = 2\tilde{g}_x^{-1} \xi(s), \quad (1.3.30)$$

d’onde segue que

$$\left\| \frac{dx}{ds} \right\|^2 = 4g(x, \xi) = 4\tau_0^2, \quad (1.3.31)$$

e, finalmente,

$$l = t. \quad (1.3.32)$$

Por outro lado (cf. [Tr], cap. XII, seção 3), é bem sabido que as projeções sobre X das bicaracterísticas de \square são precisamente as geodésicas de X ; pode-se então enunciar

Proposição 1.3.1. O conjunto $\mathcal{L} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dos períodos das bicaracterísticas periódicas de \square , pode ser interpretado como o conjunto dos comprimentos (e de seus opostos) das geodésicas periódicas de X .

A inclusão (1.3.27) permite formular o

Teorema 1.3.1. (Relação de Poisson) *A distribuição $S(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \cos(\mu_j t)$ é C^∞ fora do conjunto $\{0\} \cup \mathcal{L}$, isto é,*

$$\text{supp. sing. } S \subset \{0\} \cup \mathcal{L}. \quad (1.3.33)$$

Se X é uma variedade analítica real e g_x é analítica, então o mesmo resultado (1.3.33) é válido com “suporte singular” substituído por “suporte singular analítico” (cf. [An]). A priori, diferentes geodésicas com o mesmo comprimento l podem levar a um cancelamento da singularidade de S em l . Somente um estudo mais detalhado, usando hipóteses geométricas adicionais sobre o fluxo geodésico (se necessário), pode mostrar que tal cancelamento não se efetua (Veja Parágrafo 1.5).

Nenhuma afirmação semelhante ao Teorema 1.3.1 é válida se substituirmos o operador de primeira ordem $A = \sqrt{-\Delta}$ pelo de segunda ordem $-\Delta$. Por exemplo, seja $\Delta = -d^2/d\theta^2$ o operador de Laplace-Beltrami de $S^1 = \{e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi\}$; seus valores próprios são os números $k^2, k \in \mathbb{Z}$. A função

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{itk^2} \quad (1.3.34)$$

que pode ser olhada como o traço de $e^{-it\Delta}$, é uma função automorfa (cf. [Ser], Capítulo 7, §1,2). A órbita da origem sob a ação de transformação lineares fracionárias

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad (1.3.35)$$

é densa em \mathbb{R} , e isto mostra que o suporte singular de f é igual a \mathbb{R} .

O Teorema 1.3.1 pode ser estendido a variedades Riemannianas compactas X com bordo ∂X . Considere o problema de Dirichlet (condições de fronteira de Neumann e de Robin

também poderiam ser consideradas)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \text{ em } X \\ u|_{\partial X} &= 0. \end{aligned} \tag{1.3.36}$$

O operador não-limitado Δ_D em $L^2(X)$, definido como $-\Delta$ com domínio o espaço de Sobolev $\{u \in H_2(X); u|_{\partial X} = 0\}$, é auto-adjunto e possui espectro discreto

$$\text{spec}(\Delta_D) = \{0 = \mu_0 < \mu_1^2 \leq \mu_2^2 \leq \dots \rightarrow +\infty\}. \tag{1.3.37}$$

Se considerarmos a resolução espectral do operador Δ_D , podemos repetir os argumentos do final do Parágrafo 1.2 e do início do Parágrafo 1.3 e, em particular, introduzir as definições de função contagem $N(\lambda)$ e da função espectral $e(\lambda; x, y)$. Seja

$$S_D(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \cos(\mu_j t) \tag{1.3.38}$$

o traço de $\cos\sqrt{\Delta_D}t$. Então $S_D \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e

$$\text{supp.sing}S_D \subset \{0\} \cup \mathcal{L}_X, \tag{1.3.39}$$

onde \mathcal{L}_X é o conjunto dos comprimentos (e de seus opostos) de todas as geodésicas generalizadas periódicas em X , inclusive aquelas contidas integralmente em ∂X , correspondentes à métrica Riemanniana induzida em ∂X . As geodésicas generalizadas são obtidas como projeção em X das bicaracterísticas generalizadas do operador da onda $\square = \partial_t^2 - \Delta$, como definidas em [Me-Sj]. Uma geodésica generalizada é suave (i.e. C^∞) por partes, cada segmento suave sendo uma geodésica no sentido usual, e as únicas singularidades são os pontos de “reflexão” na fronteira. A noção de reflexão de uma geodésica no bordo é natural e obedece a lei usual de “ângulos iguais”.

Existem, no entanto, várias obstruções técnicas que tornam a demonstração de (1.3.39) muito mais difícil. Em particular a presença do bordo é imediatamente sentida de duas maneiras importantes; primeiro, por causa dele, não podemos lidar facilmente com $\sqrt{\Delta_D}$ e segundo, a análise dos conjuntos frentes de ondas, próximo dele, é complicada. Isto decorre da dificuldade de se construir uma parametriz microlocal do problema misto

$$\begin{aligned} \square E(t; x, y) &= 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \times X \\ E &= 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \times \partial X \\ E|_{t=0} &= \delta(x - y) \quad , \quad E_t|_{t=0} = 0 \end{aligned} \tag{1.3.40}$$

na vizinhança de pontos do bordo (especialmente em pontos do bordo onde geodésicas incidem tangencialmente com ordem de tangência elevada).

Finalmente mencionamos que se (X, g_x) pertence à categoria analítica real, as singularidades analíticas de S_D não estão necessariamente contidas no conjunto $\{0\} \cup \mathcal{L}$ pois sabe-se que (pelo menos) os comprimentos das geodésicas periódicas em componentes côncavas do bordo, devem ser incluídos.

§ 1.4 O Teorema de Periodicidade

O teorema de Periodicidade (Clustering Theorem) descreve uma ligação curiosa entre dois fenômenos aparentemente não relacionados: "periodicidade" no espectro de $A = \sqrt{-\Delta}$ e periodicidade no fluxo $\text{expt}H_{g^{1/2}} : T^*(X) \rightarrow T^*(X)$. Seja Σ o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $\{\mu_i - \mu_j\}, i, j = 0, 1, 2, \dots$, onde, recordamos, $0 = \mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$ é a sequência de valores próprios de A , repetidos de acordo com sua multiplicidade.

Teorema 1.4.1. $\Sigma \neq \mathbb{R}$ se e somente se toda curva integral de $H_{g^{1/2}}$ (isto é, bicaracterística de A) é periódica.

Demonstração: Sejam $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e B um operador pseudodiferencial de ordem zero.

Considere

$$B_f = \int \hat{f}(t) U(t)^{-1} B U(t) dt, \quad (1.4.1)$$

onde $U(t)$ é definido em (1.3.3). O teorema espectral permite escrever

$$A = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j^{1/2} P_{\lambda_j} \equiv \sum_{i=0}^{+\infty} \mu_i P_i \quad (\text{por reordenação}). \quad (1.4.2)$$

Substituindo em (1.4.1) obtemos

$$B_f = \sum_{i,j} \int \hat{f}(t) e^{i(\mu_i - \mu_j)t} P_i B P_j dt = \sum_{i,j} f(\mu_i - \mu_j) P_i B P_j. \quad (1.4.3)$$

Se $\sigma \notin \Sigma$, existe um intervalo I , $\sigma \in I$, contendo somente um número finito de $(\mu_i - \mu_j)$'s. Se $\text{supp } f \subset I$, B_f é, devido a (1.4.3), um operador regularizante de posto finito. Seja

$$B_f^R = \int_{-R}^R \hat{f}(t) U(t)^{-1} B U(t) dt. \quad (1.4.4)$$

Pelo Teorema de Egorov (cf. Apêndice A.2), B_f^R é um operador pseudodiferencial de ordem zero com símbolo principal

$$\int_{-R}^R \hat{f}(t) (\text{expt} H_{g,1/2})^* b dt \quad (1.4.5)$$

onde b é o símbolo principal de B (visto como uma função em $S^*(X)$, o fibrado coesférico de X , ou seja $(x, \xi) \in T^*(X) : g(x, \xi) = 1$). Como B_f é regularizante, $B_f^R - B_f$ é um operador pseudodiferencial de ordem zero com símbolo principal dado por (1.4.5) que, devido ao fato de $U(t)$ ser um operador unitário e f rapidamente decrescente, tende a zero na norma de operadores quando R tende a infinito. Isto implica que a norma do supremo do seu símbolo tende a zero, assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) (\text{expt} H_{g,1/2})^* b dt = 0. \quad (1.4.6)$$

Esta expressão tem uma interpretação interessante: seja \mathcal{D} a extensão autoadjunta em L^2 do operador diferencial de primeira ordem (derivada de Lie)

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}D_{H_g^{1/2}} : C^\infty(S^*(X)) \longrightarrow C^\infty(S^*(X)) \quad (1.4.7)$$

definido como

$$(D_{H_g^{1/2}}h)(m) = \frac{d}{dt}h(\exp tH_{g^{1/2}}(m))|_{t=0} = H_{g^{1/2}}h, \quad (1.4.8)$$

onde $m \in S^*(X)$ e $h \in C^\infty(S^*(X))$. A expressão (1.4.6) pode ser escrita

$$f(\mathcal{D})b = 0. \quad (1.4.9)$$

Como $b \in C^\infty(S^*(X))$ é arbitrário, temos

$$f(\mathcal{D}) = 0 \quad \text{para todo} \quad f \in C_0^\infty(I), \quad (1.4.10)$$

o que mostra que $I \cap \text{spec}(\mathcal{D}) = \emptyset$ e, em particular, $\sigma \notin \text{spec}(\mathcal{D})$. Provamos pois

Lema 1.4.1 $\text{spec}(\mathcal{D}) \subset \Sigma$.

Necessitamos agora do seguinte resultado:

Lema 1.4.2 Ou $\text{Spec}(\mathcal{D}) = \mathbb{R}$, ou todas bicaracterísticas de A são periódicas.

Demonstração : Suponha que a bicaracterística que passa em $m \in S^*(X)$ não é periódica. Considere o operador $f(\mathcal{D})$ aplicado a $b \in C^\infty(S^*(X))$. De (1.4.6), $f(\mathcal{D})b$ é contínua e seu valor no ponto m é dado por

$$f(\mathcal{D})b(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)b(\exp tH_{g^{1/2}}m)dt. \quad (1.4.11)$$

Mostraremos que se $f(\mathcal{D})b(m) = 0$ para todo $b \in C^\infty(S^*(X))$ então $f \equiv 0$ o que implica que $\text{Spec}(\mathcal{D}) = \mathbb{R}$. Primeiro, provaremos que dadas uma função qualquer $f_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e uma constante $K > 0$ arbitrária, existem $b \in C^\infty(S^*(X))$ e $f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ tais que

$$b[(\text{expt}H_{g^{1/2}})m] = f_1(t) + f_2(t), \quad (1.4.12)$$

onde $\|f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty$ e $\text{supp}f_2 \cap [-K, K] = \emptyset$. Com efeito, seja γ_K o segmento $-K \leq t \leq K$ na bicaracterística $(\text{expt}H_{g^{1/2}})m$ e seja Γ uma vizinhança tubular de γ_K da forma

$$\Gamma = [-K, K] \times D, \quad (1.4.13)$$

onde D é um disco pequeno. Então $b(t, y) = f_1(t)\rho(y)$ tem as propriedades requeridas, onde ρ é uma função $C_c^\infty(D)$, $\rho(0) = 1$, $\rho(y) < 1$ se $y \neq 0$. Substituindo (1.4.12) em (1.4.11) obtemos

$$f(\mathcal{D})b(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)f_1(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)f_2(t)dt. \quad (1.4.14)$$

Fixando f_1 e fazendo $K \rightarrow +\infty$, a segunda integral tende a zero. Portanto a primeira integral é zero para todo $f_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ o que implica $\hat{f} = 0$ e também $f = 0$. Isto conclui a prova do Lema 1.4.2.

Lemas 1.4.1 e 1.4.2 juntos mostram que se $\Sigma \neq \mathbb{R}$, então toda curva bicaracterística de A é periódica. Reciprocamente (o que termina a demonstração do Teorema 1.4.1) o seguinte resultado é válido:

Teorema 1.4.2. *Suponha que o fluxo associado a $H_{g^{1/2}}$ é completamente periódico de menor período $T > 0$, i.e. $(\text{exp}tH_{g^{1/2}})(m) = m$ para todo $m \in S^*(X)$. Então $\Sigma = \{2k\pi/T; k \in \mathbb{Z}\}$.*

Demonstração : Provaremos primeiro que

$$\Sigma \supset \{2k\pi/T; k \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.4.15)$$

Suponha que a bicaracterística que passa por $m \in S^*(X)$ é periódica e seja $\rho(m)$ o tempo necessário para ela retornar a m pela primeira vez (convencionaremos que $\rho(m) = +\infty$ se esta bicaracterística não é periódica). Não é difícil ver que $\rho(m)$ é uma função semicontinua inferior em $S^*(X)$. A inclusão (1.4.15) decorre do Lema 1.4.1 e do seguinte lema que é uma versão mais forte do Lema 1.4.2.

Lema 1.4.3. $Spec(\mathcal{D}) \supset \left\{ \frac{2k\pi}{\rho(x)}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Demonstração: A função $h(t) = b[\exp tH_{g,1/2}]m$ é C^∞ , de período $\rho(m)$. Na verdade, escolhendo b apropriadamente, toda h de período $\rho(m)$ pode ser expressa dessa maneira. Inserindo a serie de Fourier de h

$$\sum c_k \exp(2\pi i k t / \rho(m)) \quad (1.4.16)$$

em (1.4.11), obtemos

$$f(\mathcal{D})b(m) = \sum c_k f(2k\pi / \rho(m)). \quad (1.4.17)$$

Suponha $f(\mathcal{D}) \equiv 0$. Como os c'_k s formam uma sequência rapidamente decrescente arbitrária de números reais, devemos ter $f(2k\pi / \rho(m)) = 0$ para todo k , o que implica a inclusão do Lema 1.4.3.

De passagem, observamos que uma consequência dos Lemas 1.4.1 e 1.4.3 é

Corolario 1.4.1. Se $\sum \neq \mathbb{R}$, ρ é limitada.

Vamos nos concentrar agora em provar a inclusão oposta a (1.4.15). Decorre da hipótese do Teorema 1.4.2 que $U(T)$ é, na verdade, um operador pseudodiferencial (de ordem zero). Com efeito, $U(T)$ é associado com o gráfico canônico local C_T (c.f. Apêndice A.2), definido pelo fluxo $\exp tH_{g,1/2} = I : S^*(X) \rightarrow S^*(X)$, i.e., (microlocalmente) C_T é o gráfico da identidade $I : T^*(X) \setminus 0 \rightarrow T^*(X) \setminus 0$, ou seja $C_T = \text{diagonal em } T^*(X \times X) \setminus 0$. Ademais,

pelo teorema de Egorov, $U(T)$ preserva os conjuntos frente de ondas de distribuições, ou seja $U(T)$ é micro-local. Procuremos calcular o símbolo principal de $U(T)$. Seja $p > 0$ uma função homogênea de grau um em $T^*(X) \setminus \{0\}$, que comuta, no sentido do colchete de Poisson, com $g(x, \xi)^{1/2}$, i.e.

$$\{p, g^{1/2}\} \equiv H_p g^{1/2} = 0. \quad (1.4.18)$$

Seja P um operador pseudodiferencial elítico auto-adjunto positivo com símbolo principal $\sigma(P) = p$, e com símbolo subprincipal, $subP = 0$ (c.f. [Tr] para a definição de símbolo subprincipal). O cálculo simbólico dos operadores pseudodiferenciais nos diz que, dados dois operadores P e Q ($p = \sigma(P)$, $q = \sigma(Q)$),

$$\sigma[P, Q] = \{p, q\} \text{ e } sub[P, Q] = \{subP, q\} - \{subQ, p\}, \quad (1.4.19)$$

onde $[P, Q] = PQ - QP$ é o comutador de P e Q . É sabido que $sub\Delta = 0$ e, portanto, também $sub\sqrt{-\Delta} = 0$; porconsequente temos (com a escolha acima de P):

Lema 1.4.4. *Os símbolos principal e subprincipal de $[P, A]$ são nulos. Em particular, $[P, A]$ tem ordem -1 .*

Seja $V(s)$ o grupo unitário gerado pelo operador auto-adjunto P . Pelo Lema 1.4.4, $V(s)$ e $U(t)$ comutam módulo operadores compactos, portanto em particular

$$V(s) U(T) V(s)^{-1} = U(T) \text{ módulo um operador compacto }. \quad (1.4.20)$$

O teorema de Egorov (c.f. Teorema A.2.1 no Apêndice A.2), aplicado a $V(s)$, diz:

Lema 1.4.5. *O símbolo principal do operador pseudodiferencial $U(T)$ é invariante pelo fluxo Hamiltoniano gerado por p .*

Por outro lado, não é difícil mostrar que a coleção de fluxos Hamiltonianos gerados por funções p que (Poisson) comutam com o símbolo de $\sqrt{-\Delta}$, age transitivamente sobre $S^*(X)$; concluímos pois:

Lema 1.4.6. *O símbolo principal de $U(T)$ é constante.*

Como $U(T)$ é unitário, esta constante deve ter módulo um e, portanto, é da forma $e^{-i\frac{x}{2}\alpha}$. O número α é chamado índice de Maslov da variedade X e está relacionado com o índice de Morse e com o número de pontos conjugados de uma geodésica genérica simples de X .

Voltando à demonstração do Teorema 1.4.2, decorre do Lema 1.4.5 que o operador

$$\exp(iTA) - e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} I \tag{1.4.21}$$

é um operador pseudodiferencial de ordem -1 ; portanto o produto

$$A [\exp(iTA) - e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} I]$$

é um operador pseudodiferencial de ordem zero, ou seja contínuo de $L^2(X)$ em $L^2(X)$, cujos valores próprios são da forma:

$$\mu_k [\exp(i T \mu_k) - e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}] . \tag{1.4.22}$$

Obtemos pois

Lema 1.4.6. *A função*

$$\mu \left[\exp \left(i \left[\mu T - \frac{\pi}{2} \alpha \right] \right) - 1 \right] \tag{1.4.23}$$

é limitada no espectro de A .

Seja L o seguinte conjunto de pontos na reta

$$L = \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(k + \frac{\alpha}{4} \right); k = 1, 2, \dots \right\}. \quad (1.4.24)$$

É um exercício trivial verificar então, que

$$\left| \exp \left(i \left[\mu T - \frac{\pi}{2} \alpha \right] \right) - 1 \right| \geq \frac{2T}{\pi} d(\mu, L) \quad (1.4.25)$$

onde $d(\mu, L)$ denota a distância de um ponto $\mu \in \mathbb{R}$, a L .

Seja C uma cota superior de (1.4.23) no espectro de A . Combinando o Lema 1.4.6 com a estimativa (1.4.25), obtemos.

Lema 1.4.7. *Seja μ um valor próprio de $\sqrt{-\Delta}$ no intervalo $[N, \infty)$. Então*

$$d(\mu, L) \leq C_1/N \text{ com } C_1 = \pi C/2T. \quad (1.4.26)$$

Como μ_j tende a infinito com j , concluímos que

$$\sum \subset \{2k\pi/T; k \in \mathbb{N}\}. \quad (1.4.27)$$

De (1.4.15) e (1.4.27) obtemos o Teorema 1.4.2 e, por conseguinte (como já indicado), finalizamos a demonstração do Teorema 1.4.1. Dos argumentos dados acima, resulta também:

Corolário 1.4.2. *Sob as hipóteses do Teorema 1.4.2, existe uma constante $C_0 > 0$ tal que*

$$\text{Espectro}(\sqrt{-\Delta}) \subset \bigcup_{k \geq 1} \left[\frac{2\pi}{T} \left(k + \frac{\alpha}{4} \right) - \frac{C_0}{k}, \frac{2\pi}{T} \left(k + \frac{\alpha}{4} \right) + \frac{C_0}{k} \right]. \quad (1.4.28)$$

Observação 1.4.1. O Corolário 1.4.2 é um pouco insatisfatório porque ele não diz se existem realmente valores próprios no intervalo

$$I_k = \left[\frac{2\pi}{T} \left(k + \frac{\alpha}{4} \right) - \frac{C_0}{k}, \frac{2\pi}{T} \left(k + \frac{\alpha}{4} \right) + \frac{C_0}{k} \right]. \quad (1.4.29)$$

Para estudar esta questão, pode-se definir uma noção de multiplicidade aproximada: seja

$$d_j = \text{Card} \{k; \mu_k \in I_j\}. \quad (1.4.30)$$

Resulta imediatamente da definição que

$$d_j \leq N \left(\frac{2\pi}{T} \left(j + \frac{\alpha}{4} \right) + C_0 \right) - N \left(\frac{2\pi}{T} \left(j + \frac{\alpha}{4} \right) - C_0 - 1 \right) \quad (1.4.31)$$

onde $N(\mu)$ é a função contagem dos valores próprios. De estimativas assintóticas sobre $N(\mu)$ (cf. §1.6) pode-se deduzir

$$d_j = O(j^{n-1}), \quad j \rightarrow \infty. \quad (\text{lembre-se que } n = \dim X) \quad (1.4.32)$$

É possível de fato mostrar, sob hipóteses suplementares razoáveis (cf. Colin de Verdière, [Co2]), a existência de um polinômio $P_{n-1}(\lambda)$, de grau $(n-1)$, e de um inteiro j_0 tais que:

$$d_j = P_{n-1} \left(j + \frac{\alpha}{4} \right) \quad \text{para} \quad j \geq j_0. \quad (1.4.33)$$

No caso $n = 1$ se obtém assim a existência de j_0 tal que para $j \geq j_0$, se tem $d_j = 1$. Observamos que (1.4.33) é o análogo de certas fórmulas de geometria algébrica, em particular aquelas que permitem calcular o polinômio de Hilbert-Samuel de uma algebra graduada (cf. [Bou]).

§ 1.5 Fórmula de Poisson

Comecemos (novamente) com o exemplo $X = S^1 = \{e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ e seu Laplaceano $\Delta = -d^2/d\theta^2$. Por simplicidade, ao invés da raiz quadrada positiva de $-\Delta$, consideramos o operador $-\sqrt{-1}d/d\theta$ cujo espectro consiste dos inteiros e, portanto,

$$\text{Tr}U(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikt}. \quad (1.5.1)$$

Por outro lado, se indentificarmos funções em S^1 com funções periódicas de período 2π em \mathbb{R} , então a solução do problema de Cauchy

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) e(t; \theta, \psi) = 0, \quad e(0; \theta, \psi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\theta - \psi + 2k\pi), \quad (1.5.2)$$

é $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t + \theta - \psi + 2k\pi)$. Pondo $\theta = \psi$ e integrando no intervalo $[0, 2\pi]$, obtemos

$$\text{Tr}U(t) = \int_0^{2\pi} e(t; \theta, \theta) d\theta = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t + 2k\pi); \quad (1.5.3)$$

ou seja

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikt} = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t + 2k\pi); \quad (1.5.4)$$

esta é a chamada formula clássica de Poisson.

Nosso objetivo neste parágrafo é a generalização de (1.5.4) para qualquer variedade Riemanniana compacta X .

Seja l um ponto isolado de \mathcal{L} ; nos propomos a estudar a singularidade de S em l . Para isto, denotemos por $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ uma função cujo suporte está contido em uma vizinhança pequena de l que não intersecta o conjunto $\mathcal{L} \setminus \{l\}$, e verifica $\theta(l) = 1$. A singularidade de S em l é caracterizada pelo comportamento assintótico em τ da expressão

$$\widehat{\theta S}(\tau) = \langle S(t), \theta(t) e^{-i\tau t} \rangle. \quad (1.5.5)$$

Como raciocinamos módulo C^∞ , necessitamos, devido a (1.3.26), estudar o comportamento assintótico da expressão

$$I(\tau) = \int_{\mathbb{R} \times X} \theta(t) F(t; x, x) e^{-i\tau t} dt dV. \quad (1.5.6)$$

Notemos inicialmente que se pode restringir ao caso $\tau \rightarrow +\infty$ visto que S sendo a valores reais, $\widehat{\theta S}(-\tau) = \overline{\widehat{\theta S}(\tau)}$; ademais, desde que S é par, é suficiente considerar $l \in \mathcal{L}^+$. Escrevemos a distribuição $\theta F \in I^{-1/4}(\mathbb{R} \times X \times X; C')$ (cf. [Ho3]) como uma soma finita

$$\theta F = \sum_{\alpha \in A} F_{\alpha} \quad (1.5.7)$$

(A é um conjunto finito pois θF tem suporte compacto), onde os F_{α} são distribuições de Fourier ou seja, são definidas por integrais oscilatórias do tipo (1.3.18). Para isso, começa-se por um recobrimento da relação canônica C , em (1.3.15), por domínios C_{α} de cartas T_{α} associadas a funções de fase da forma

$$\Phi_{\alpha}(t, x, \eta, y) = \varphi_{\alpha}(t, x, \eta) - \langle y, \eta \rangle, \quad (1.5.8)$$

onde $\langle y, \eta \rangle = \sum_{j=1}^n y^j(x)\eta_j$; e os $(y^j(y)) = \chi_{\alpha}(y)$ são as coordenadas do ponto y em uma carta X_{α} de X . De maneira mais precisa, o aberto C_{α} é difeomorfo a um aberto cônico Z_{α} de $]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[\times X \times \Gamma_{\alpha}$ (com Γ_{α} um cone aberto de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) por meio da aplicação T_{α} definida por

$$(t, x, \eta) \in Z_{\alpha} \xrightarrow{T_{\alpha}} (t, \varphi_{\alpha t}; x, \varphi_{\alpha x}; y, -\Phi_{\alpha y}) \in C_{\alpha} \subset C \quad (1.5.9)$$

com y determinado por $\chi_{\alpha}(y) = \varphi_{\alpha \eta}(t, x, \eta)$ e onde $\varphi_{\alpha x}$ designa a derivada em x de φ_{α} . A distribuição F_{α} é então definida pela integral oscilatória

$$F_{\alpha}(t; x, y) = \int_{\Gamma_{\alpha}} e^{i\Phi_{\alpha}(t, x, \eta, y)} a_{\alpha}(t, x, \eta) \bar{d}\eta \quad (1.5.10)$$

onde $\bar{d}\eta = (2\pi)^{-n} d\eta$ e a_{α} designa um símbolo de grau 0 da forma (1.3.19), cujo suporte é um subconjunto cônico de base compacta contido em Z_{α} . Têm-se uma tal representação de F_{α} porque a relação canônica C pode ser também considerada como um gráfico local dependendo do parâmetro t (cf. [Ho3]).

À soma (1.5.7) corresponde para $I(\tau)$, a expressão

$$I(\tau) = \sum_{\alpha \in A} I_{\alpha}(\tau), \quad (1.5.11)$$

com

$$I_{\alpha}(\tau) = \int_{\mathbb{R} \times X} F_{\alpha}(t; x, x) e^{-i\tau t} dt dV, \quad (1.5.12)$$

ou ainda, devido a (1.5.10),

$$\begin{aligned} I_{\alpha}(\tau) &= \int_{Z_{\alpha}} (\exp[i\varphi_{\alpha}(t, x, \eta) - i \langle x, \eta \rangle - i\tau t]) a_{\alpha}(t, x, \eta) dt dV d\eta \\ &= \tau^n \int_{Z_{\alpha}} (\exp[i\tau \psi_{\alpha}(t, x, \eta)]) a_{\alpha}(t, x, \tau \eta) dt dV d\eta, \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

onde

$$\psi_{\alpha}(t, x, \eta) = \varphi_{\alpha}(t, x, \eta) - \langle x, \eta \rangle - t = \Phi_{\alpha}(t, x, \eta, x) - t. \quad (1.5.14)$$

Para estudar o comportamento assintótico de $I_{\alpha}(\tau)$, procura-se inicialmente os pontos críticos da fase ψ_{α} (omitiremos provisoriamente o índice α). Os pontos críticos de ψ em Z são dados por

$$\begin{aligned} \varphi_t(t, x, \eta) &= 1 \\ \Phi_x(t, x, \eta, x) &= -\Phi_y(t, x, \eta, x) \\ \Phi_{\eta}(t, x, \eta, x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

Pela aplicação T , dada por (1.5.9), esses pontos críticos estão em bijeção com o conjunto dos pontos de C , da forma

$$(t, 1; x, \xi; x, \xi) \quad \text{onde} \quad \xi = \varphi_x(t, x, \eta) \quad (1.5.16)$$

e, levando em consideração a definição (1.3.15) de C , isto significa que existe uma bicaracterística de \square que passa pelos pontos $(0, 1; x, \xi)$ e $(t, 1; x, \xi)$, o que mostra que t é um período de bicaracterística periódica; por outro lado, $t \in \text{supp}\theta$; por consequência deduzimos que

$$t = l. \quad (1.5.17)$$

A fase φ verifica a primeira equação de (1.3.20) que, juntamente com (1.5.15), fornece

$$g(x, \xi) = 1. \quad (1.5.18)$$

Designamos por W_l^+ , o subconjunto de C constituído pelos pontos $(l, 1; x, \xi; x, \xi)$ que são obtidos como imagem, pelas diversas cartas T_α , dos pontos críticos das diversas fases ψ_α . Este conjunto W_l^+ que vai desempenhar um papel fundamental, admite uma interpretação geométrica simples: seja D^* a diagonal do conjunto $S^*(X) \times S^*(X)$. Então as equações (1.5.15) e (1.5.18) significam exatamente que

$$W_l^+ = (\{l, 1\} \times D^*) \cap C. \quad (1.5.19)$$

Ademais, W_l^+ está em bijeção com o conjunto das bicaracterísticas periódicas de \square que admitem l como período e que são percorridas no sentido de t crescente (aquelas que são percorridas no sentido de t decrescente correspondem a -1 em $\{l, -1\}$, intervêm apenas no comportamento quando $\tau \rightarrow -\infty$ e estão em bijeção com o conjunto W_l^- definido de maneira semelhante). Seja

$$W_l = W_l^+ \cup W_l^-. \quad (1.5.20)$$

Mostramos assim que se l não é um período, as fases ψ_α não possuem pontos críticos e por conseguinte, $I(\tau)$ é rapidamente decrescente, o que implica que S é C^∞ numa vizinhança de l ; isto da uma nova prova da Relação de Poisson (Teorema 1.3.1). Por outro lado, se $l \in \mathcal{L}$, o conjunto W_l é não vazio, por definição, e podemos determinar o desenvolvimento assintótico de $I(\tau)$. Para isto, utilizaremos uma extensão do Teorema da fase estacionária (cf. [Col]):

Definição 1.5.1. ([Mey]) *Seja Z uma variedade e $\Phi : Z \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação C^∞ . Suponha que o conjunto dos pontos críticos de Φ é uma subvariedade conexa $W \subset Z$. Dizemos que*

W é uma variedade crítica não-degenerada em relação à fase Φ , se para todo $z \in W$, o Hessiano $\Phi''(z)$ induz uma forma quadrática não-degenerada $\Phi''(z)|_N$ sobre o espaço normal $N_z = T_z Z / T_z W$.

Se $z \in W$, designamos por σ a assinatura do Hessiano = $\text{sgn} \Phi''(z)$ = (número de quadrados positivos) - (número de quadrados negativos) e que é também igual à assinatura da forma induzida. Enunciamos agora a extensão do teorema da fase estacionária aludida acima.

Teorema 1.5.1. *Sejam Z uma variedade Riemanniana de dimensão d , $a \in C_0^\infty(Z)$ e $\Phi \in C^\infty(Z)$ uma fase a valores reais. Suponha que os pontos críticos de Φ situados no suporte de a constituem uma subvariedade compacta conexa W de Z , de dimensão ν . Suponha ainda que W é uma variedade crítica não-degenerada em relação a Φ e seja σ sua assinatura. Então têm-se o seguinte comportamento assintótico*

$$J(\tau) = \int_Z e^{i\tau\Phi(z)} a(z) dv(z) = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{d-\nu}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma} e^{i\tau\Phi(w)} p(\tau) \quad (1.5.21)$$

onde $p(\tau)$ admite, para $\tau \rightarrow \infty$, um desenvolvimento assintótico da forma

$$p(\tau) \approx \sum_{k \geq 0} a_k \tau^{-k} \quad (1.5.22)$$

com

$$a_0 = \int_W a(z) |\det \Phi''(z)|_N|^{-1/2} d_W v(z) \quad (1.5.23)$$

e $d_W v$ designa a medida induzida em W .

A prova deste Teorema é consequência de um análogo (para esta situação) do conhecido Lema de Morse (cf. [Mey]) e pode ser encontrada em [Ch2]. Vamos aplicar o Teorema 1.5.1 para obter o desenvolvimento assintótico de $I(\tau)$. Neste sentido, façamos a seguinte hipótese sobre W_i :

O conjunto W_l é uma união finita de subvariedades conexas compactas

$$W_l = \bigcup_{j \in J_l} W_{l,j} \quad , \quad \dim W_{l,j} = \nu_j \quad (1.5.24)$$

Estas variedades críticas $W_{l,j}$ são não-degeneradas em relação às fases $\psi_\alpha \circ T_\alpha^{-1}$; denotemos por $\sigma_{j,\alpha}$ a assinatura correspondente.

Uma maneira equivalente de enunciar (1.5.24) é a seguinte (cf. Lema 3.1 em [Ca-Me]): seja C_l o gráfico canônico local definido pelo fluxo Hamiltoniano $\text{expl}H_{g,1/2} : T^*(X) \setminus 0 \rightarrow T^*(X) \setminus 0$ e D_X^* a diagonal em $(T^*(X) \setminus 0) \times (T^*(X) \setminus 0)$. Então (através de (1.5.19)) a hipótese (1.5.24) pode ser reescrita:

$$C_l \cap D_X^* \quad \text{têm uma interseção limpa} \quad . \quad (1.5.25)$$

O significado de (1.5.25) é que a interseção, \tilde{W}_l , de C_l e D_X^* , é uma variedade, cujo espaço tangente (em todos os pontos) é exatamente igual à interseção dos espaços tangentes de C_l e D_X^* . Uma outra interpretação de (1.5.25) é que a variedade \tilde{W}_l , dos pontos fixos de $\text{expl}H_{g,1/2} : S^*(X) \rightarrow S^*(X)$ é limpa no sentido de [Bot]. É óbvio que existe uma bijeção natural entre os conjuntos W_l, \tilde{W}_l e $\tilde{\tilde{W}}_l$.

Vamos separar em $I(\tau)$ as contribuições das diversas componentes $W_{l,j}$ de W_l . Para isto, sem perda de generalidade, refinando, se necessário, o recobrimento (C_α) de C , podemos supor que os abertos C_α são conexos e nunca intersectam duas variedades críticas simultaneamente. Seja (r_α) uma partição da unidade subordinada a (C_α) ; então o Lema A.2.1 do Apêndice A.2 permite escrever

$$F \equiv \sum_{\text{finita}} F_\alpha \quad (\text{igualdade módulo } C^\infty), \quad (1.5.26)$$

onde F_α tem símbolo principal $r_\alpha a$, a sendo o símbolo principal de F . Designemos por $I_\alpha(\tau)$,

a integral (1.5.6) relativamente a F_α . Têm-se de imediato

$$I(\tau) \equiv \sum_{\alpha} I_{\alpha}(\tau), \quad (1.5.27)$$

onde o sinal \equiv significa aqui igualdade módulo um termo rapidamente decrescente em τ . Para j fixado, seja $I_{j,\alpha}(\tau)$ os termos de $I_{\alpha}(\tau)$, quando C_{α} intersecta $W_{l,j}$. Define-se a contribuição de $W_{l,j}$ por

$$I_j(\tau) = \sum_{\alpha} I_{j,\alpha}(\tau); \quad (1.5.28)$$

obtêm-se

$$I(\tau) \equiv \sum_{j \in J_l} I_j(\tau). \quad (1.5.29)$$

Nos propomos agora, estudar o comportamento de um termo $I_j(\tau)$. Note inicialmente que $I_{j,\alpha}(\tau)$ se exprime por uma integral do tipo (1.5.13), na qual a_{α}^0 designa a imagem do símbolo $r_{\alpha} a$ pela carta T_{α} . A aplicação do Teorema 1.5.1 a esta integral (não existe dificuldade na generalização às integrais oscilatórias) da a expressão

$$I_{j,\alpha}(\tau) = e^{-i\tau l} \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^{(1-\nu_j)/2} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha}} p_{j,\alpha}(\tau), \quad (1.5.30)$$

onde $p_{j,\alpha}(\tau)$ admite um desenvolvimento assintótico

$$p_{j,\alpha}(\tau) \sim \sum_{k \geq 0} p_{j,\alpha}^k \tau^{-k}; \quad (1.5.31)$$

com o termo principal $p_{j,\alpha}^0$ da forma (cf. (1.5.23))

$$p_{j,\alpha}^0 = \int_{T_{\alpha}^{-1}(W_{l,j} \cap C_{\alpha})} a_{\alpha}^0(l, x, \eta) |\det(\psi_{\alpha}''|_N)|^{-1/2} dV \bar{\alpha} \eta. \quad (1.5.32)$$

Note que esta integral tem sentido pois, na verdade, é uma integral sobre o compacto $T_{\alpha}^{-1}(W_{l,j} \cap (\text{supp. } r_{\alpha} a))$.

Para reagrupar os diferentes termos $e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha}} p_{j,\alpha}^0$ que definem a parte principal de $I_j(\tau)$, utilizamos a

Proposição 1.5.1. *Fixado j , os termos não nulos da forma*

$$e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha}} p_{j,\alpha}^0 \quad (1.5.33)$$

têm todos o mesmo argumento.

Começamos demonstrando o

Lema 1.5.1. *Existe um inteiro n_α tal que se tem em $T_\alpha^{-1}(W_{i,j} \cap C_\alpha)$,*

$$a_\alpha^0(l, x, \eta) = e^{in_\alpha \frac{\pi}{2}} |a_\alpha^0(l, x, \eta)|. \quad (1.5.34)$$

Demonstração do Lema 1.5.1. Recordamos que (cf. Apêndice A.2 e, para maiores detalhes, [Tr]) o símbolo principal, a , de F é uma secção de $L \otimes \Omega_{1/2}$ sobre a variedade Lagrangeana C , onde L e $\Omega_{1/2}$ são respectivamente os fibrados de Maslov e das densidades de grau um meio sobre C . Como Δ é auto-adjunto, a primeira igualdade de (1.3.14) implica que a verifica a equação

$$\mathcal{L}_{H_\square} a = 0, \quad (1.5.35)$$

onde \mathcal{L}_{H_\square} designa a derivada de Lie associada ao Hamiltoniano H_\square levado, pela projecção natural de $T^*(\mathbb{R} \times X) \times T^*(X) \rightarrow T^*(\mathbb{R} \times X)$, para C . Ademais, as condições (1.3.14) implicam que a restrição $a|_{\{(0,1) \times D^*\}}$ é idêntica a 1. De (1.5.35) deduz-se então que a restrição $a|_{\{(t,1) \times D^*\} \cap C = W_t^+}$ é uma secção constante. O valor desta restrição, na trivialização de L definida pela carta T_α , é então uma potência inteira de $\sqrt{-1}$ (pela definição do fibrado de Maslov L); seja $e^{in_\alpha \pi/2}$ este valor. Por conseguinte, a amplitude $a_\alpha^0(l, x, \eta)$ tem sempre o mesmo argumento sobre o domínio de integração de (1.5.32), visto ser ela a imagem de $r_\alpha a$ na carta T_α .

Comparamos agora os argumentos em duas cartas que se intersectam /

Lema 1.5.2. *Sejam α, β tais que $\text{suppr}_\alpha \cap \text{suppr}_\beta \cap W_{i,j} \neq \emptyset$. Então têm-se*

$$e^{(i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha} + in_\alpha \frac{\pi}{2})} = e^{(i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\beta} + in_\beta \frac{\pi}{2})} \quad (1.5.36)$$

Demonstração do Lema 1.5.2. Existe então $\lambda \in \text{suppr}_\alpha \cap \text{suppr}_\beta \cap W_{i,j}$. Seja V uma vizinhança cônica de λ contida em $C_\alpha \cap C_\beta$ e na qual r_α e r_β não se anulam. Escolhamos uma função $C^\infty, r \geq 0$, suportada em V , homogênea de grau zero, e igual a um em λ . Podemos escrever

$$\frac{r}{r_\alpha}(r_\alpha a) = \frac{r}{r_\beta}(r_\beta a) = ra. \quad (1.5.37)$$

Designemos por G , uma distribuição de $I^{-1/4}(\mathbb{R} \times X \times X; C')$, admitindo ra para símbolo principal. Se se calcula a expressão (1.5.6) relativa a G , nas duas cartas T_α e T_β , obtém-se a igualdade

$$\begin{aligned} & e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha}} \int_{T_\alpha^{-1}(W_{i,j} \cap C_\alpha)} \left(\frac{r}{r_\alpha}\right) a_\alpha^0(l, x, \eta) |det(\psi''_\alpha|_N)|^{-1/2} dV_x d\eta \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\beta}} \int_{T_\beta^{-1}(W_{i,j} \cap C_\beta)} \left(\frac{r}{r_\beta}\right) a_\beta^0(l, y, \xi) |det(\psi''_\beta|_N)|^{-1/2} dV_y d\xi \end{aligned} \quad (1.5.38)$$

onde $\left(\frac{r}{r_\alpha}\right)$ designa a imagem da função $\left(\frac{r}{r_\alpha}\right)$ na carta T_α . Então (1.5.36) decorre imediatamente da igualdade (1.5.38) e do Lema 1.5.1.

Demonstração da Proposição 1.5.1. Inicialmente notemos que a igualdade (1.5.36) é ainda válida para todos os índices α, β tais que $\text{suppr}_\alpha \cap W_{i,j} \neq \emptyset$ e $\text{suppr}_\beta \cap W_{i,j} \neq \emptyset$. Com efeito, $W_{i,j}$ sendo conexo, pode-se relacionar dois tais índices através de índices intermediários que verificam as hipóteses do Lema 1.5.2. Nestas condições, a igualdade (1.5.36) mostra que (cf. (1.5.32)), todos os termos $e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha}} p_{j,\alpha}^0$, não nulos, têm um argumento independente de α .

Introduzimos então um inteiro σ_j tal que o valor comum dos dois membros de (1.5.36) se escreve

$$e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_j} \quad (1.5.39)$$

Diremos que σ_j é a assinatura da variedade crítica $W_{l,j}$ e que o inteiro $\frac{1}{2}(\nu_j - \sigma_j)$ é o índice de $W_{l,j}$.

Voltemos ao estudo do comportamento de $I_j(\tau)$. Combinando (1.5.28) e (1.5.30) e a definição de σ_j , obtemos

$$I_j(\tau) = e^{-i\pi l} \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{(1-\nu_j)/2} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_j} p_j(\tau), \quad (1.5.40)$$

onde $p_j(\tau)$ admite um desenvolvimento assintótico da forma

$$p_j(\tau) \sim \sum_{k \geq 0} p_j^k \tau^{-k}. \quad (1.5.41)$$

Observamos que $p_j^0 > 0$. Com efeito, têm-se

$$p_j^0 = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_j} \sum_{\alpha} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_{j,\alpha}} p_{j,\alpha}^0 = \sum_{\alpha} \int_{T_{\alpha}^{-1}(W_{l,j} \cap C_{\alpha})} |a_{\alpha}^0(l, x, \eta)| |\det(\psi_{\alpha}''|_N)|^{-1/2} dV \bar{d}\eta, \quad (1.5.42)$$

de onde segue $p_j^0 > 0$ visto que a restrição de a a $W_{l,j}$ é uma constante não nula. Resumindo, mostramos que se l é um ponto isolado de \mathcal{L} e se a hipótese (1.5.24) é satisfeita, então o comportamento assintótico de $\widehat{\theta S}(\tau)$ é dado por

$$\widehat{\theta S}(\tau) \equiv I(\tau) \equiv \sum_{j \in J_l} I_j(\tau) \quad (1.5.43)$$

onde I_j corresponde a uma componente conexa de dimensão ν_j e assinatura σ_j da variedade crítica, e satisfaz (1.5.40). Para interpretar (1.5.40) lembremos a definição (cf. [Tr] e Apêndice A.2) dos espaços de distribuições de Fourier. Obtemos então

Teorema 1.5.2. *Seja l um ponto isolado de \mathcal{L} . Se (1.5.24) é válido então, num intervalo aberto contendo l , temos*

$$S = \sum_{j \in J_l} S_{l,j}, \quad (1.5.44)$$

onde $S_{l,j} \in I^{\nu_j/2-1/4}(\mathbb{R}, \mathbb{L}), \mathbb{L} = T_l^* \mathbb{R} \setminus 0$. Para todo j , o símbolo principal de $S_{l,j}$ não se anula em nenhum ponto de \mathbb{L} .

Corolário 1.5.1. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1.5.2, suponha que a subvariedade de W_l tendo dimensão máxima é conexa. Então l pertence ao suporte singular de S .*

De uma maneira completamente análoga, pode-se mostrar que a origem $l = 0$ (que é um ponto isolado em $\{0\} \cup \mathcal{L}$) sempre pertence ao suporte singular de S (ver também os resultados do Parágrafo 1.6). Com efeito, sabemos que para $|t|$ pequeno as fases $\varphi_\alpha(t, x, \eta)$ verificam (1.3.20), de maneira que (1.5.17) e (1.5.18) se reduzem aqui a

$$\begin{aligned} g(x, \eta) &= 1 \\ t &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.45)$$

A variedade crítica correspondente W_0 é então dada por

$$W_0 = W_0^+ \cup W_0^- = (\{0, 1\} \times D^*) \cup (\{0, -1\} \times D^*).$$

É imediato que W_0 é uma variedade crítica compacta não-degenerada de assinatura nula, constituída de duas componentes conexas (ao menos se $n \geq 2$) W_0^+ e W_0^- de dimensão $2n - 1$. Por conseguinte, o desenvolvimento assintótico de $\widehat{\theta S}(\tau)$ é, neste caso,

$$\widehat{\theta S}(\tau) = (2\pi)^{1-n} \tau^{n-1} p(\tau) \quad (1.5.46)$$

com

$$p(\tau) \approx \sum_{k \geq 0} p_k \tau^{-k}, \quad p_0 = \int_{g(x, \eta)=1} dV \, d\eta, \quad (1.5.47)$$

$p_1 = (1 - n) \int_{g(x,\eta)=1} \text{sub}\sqrt{-\Delta} dV \, d\eta = 0$ (uma vez que $\text{sub}\Delta = 0$ e, portanto, também $\text{sub}\sqrt{-\Delta} = 0$).

Por utilização de uma partição da unidade conveniente, têm-se finalmente a fórmula de Poisson para a variedade Riemanniana X .

Teorema 1.5.3. *Suponha que o conjunto \mathcal{L} dos períodos é um subconjunto discreto da reta e que para todo $l \in \mathcal{L}$, a hipótese (1.5.24) é satisfeita. Então têm-se a fórmula de Poisson seguinte*

$$S = \sum_{l \in \{0\} \cup \mathcal{L}} S_l \quad (\text{no sentido de } D'(\mathbb{R})), \quad (1.5.48)$$

onde a soma à direita é localmente finita. Para cada l , a distribuição S_l tem suporte compacto e se escreve

$$S_l = \sum_{j \in J_l} S_{l,j}, \quad (1.5.49)$$

onde $S_{l,j} \in I^{\nu_{l,j}/2-1/4}(\mathbb{R}, \mathbb{L}_l)$, $\mathbb{L}_l = T_l^* \mathbb{R} \setminus 0$, e $\nu_{l,j}$ é a dimensão da variedade crítica $W_{l,j}$.

Se as hipóteses do Corolário 1.5.1 são satisfeitas para todo $l \in \mathcal{L}$, temos

$$\text{supp. sing } S = \{0\} \cup \mathcal{L}. \quad (1.5.50)$$

Neste caso, o espectro do Laplaceano determina os comprimentos das geodésicas periódicas.

Observação 1.5.1. *Existe uma fórmula análoga a (1.5.48) no caso de X ser uma variedade Riemanniana compacta com bordo (ver (1.3.36)-(1.3.38)) com uma "geometria não muito complicada" (cf. [Gu-Me]) e se investiga as singularidades relacionadas com geodésicas generalizadas periódicas ordinárias γ (ordinária significa que γ não possui segmentos tangentes a ∂X). Para tais γ se pode definir a aplicação (linear) de Poincaré P_γ . O espectro de P_γ*

desempenha então um papel essencial nas aplicações ao estudo dessas singularidades. Em particular é importante que γ seja não-degenerada, isto é um não seja valor próprio de P_γ .

§ 1.6 Fórmula de Weyl

Começemos com um exemplo simples do tipo de fórmulas que pretendemos neste parágrafo. Seja D uma região compacta, convexa, com fronteira C^∞ , em \mathbb{R}^n , tendo a origem como ponto interior. Seja $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ o reticulado dos inteiros e $N^\sharp(\lambda)$ a cardinalidade de $\lambda D \cap \mathbb{Z}^n$. Então (no caso $n = 2$ é um teorema clássico de Van der Corput)

$$N^\sharp(\lambda) = \lambda^n \text{vol}(D) + o(\lambda^{n-1}) \quad , \quad (\text{vol}(D) = \text{volume } D). \quad (1.6.1)$$

A prova de (1.6.1) é completamente elementar: podemos estimar o volume de D por baixo (resp. por cima) pelo número de pontos do reticulado $\frac{1}{\lambda} \mathbb{Z}^n$ contidos em $(1 - \frac{\epsilon}{\lambda})D$ (resp. em $(1 + \frac{\epsilon}{\lambda})D$). A discrepância entre as duas estimativas é menor que $(C'/\lambda)\text{vol}(\partial D)$. Suponha que D é definida pela igualdade

$$D = \{ \xi, p(\xi) \leq 1 \} \quad , \quad (1.6.2)$$

onde p é uma função C^∞ , positiva, homogênea de grau um em $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Seja $\chi(\xi)$ uma função C^∞ em \mathbb{R}^n , zero numa vizinhança da origem e um se $|\xi| \geq 1$, e seja P_0 o operador pseudodiferencial (operador de convolução)

$$u \longmapsto (2\pi)^{-n} \int \chi(\xi) p(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (1.6.3)$$

Como P_0 comuta com translações, ele transforma funções periódicas em funções periódicas e, portanto, define um operador pseudodiferencial auto-adjunto, positivo, elítico de primeira ordem, $P : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ (\mathbb{T}^n é o n -toro), cujos valores próprios são

$$\{ p(2\pi z) ; z \in \mathbb{Z}^n \}. \quad (1.6.4)$$

Seja $N(\lambda)$ o número de valores próprios menores ou iguais a λ . Então de (1.6.1), obtemos

$$N(\lambda) = \frac{\lambda^n}{(2\pi)^n} \text{vol}(D) + o(\lambda^{n-1}). \quad (1.6.5)$$

Nosso propósito é conseguir resultados análogos a (1.6.5), sobre o crescimento de $N^A(\lambda)$ (cf. (1.3.9)) quando $\lambda \rightarrow +\infty$.

Como ilustração (e também por conveniência), consideraremos o caso do problema de Dirichlet para o Laplaceano $\Delta = -\sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$ (cf. (1.3.36)) numa região compacta $X \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira $C^\infty, \partial X$. É óbvio que (cf. (1.2.22) e (1.2.25))

$$N^A(\lambda) = N(\lambda^2) = \text{Tr} E(\lambda^2) = \int_X e(\lambda^2; x, x) dV \quad (1.6.6)$$

(aqui, $A = \sqrt{\Delta_D}$).

Não é difícil provar propriedades assintóticas de $e(\lambda^2; x, y)$ diretamente. Habitualmente toma-se alguma transformada de $e(\lambda^2; x, y)$ cujas propriedades assintóticas podem ser determinadas por técnicas de EDP e então usa-se teoremas Tauberianos para deduzir propriedades assintóticas de e . Por exemplo, de propriedades assintóticas do núcleo (de Schwartz) do resolvente

$$S.K.(\Delta - z)^{-1} = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda - z} \frac{d}{d\lambda} e(\lambda; x, y) d\lambda \quad (1.6.7)$$

pode-se deduzir por um argumento Tauberiano (cf. [Ag]) a estimativa

$$e(\lambda; x, x) \leq C\lambda^{n/2}, \quad \forall x \in X \quad (n = \dim X). \quad (1.6.8)$$

Observe que integrando (1.6.8) obtém-se $N(\lambda) \leq C\lambda^{n/2}$. Daremos uma prova elementar de (1.6.8), sugerida por Hörmander.

Considere a transformada de Laplace da função espectral do operador Δ_D

$$v(t; x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{d}{d\lambda} e(\lambda; x, y) d\lambda. \quad (1.6.9)$$

É claro que $v(t; x, y)$ é o núcleo do operador (do calor), $\exp(-t\Delta_D)$, ou seja, se $y \in$ interior X é fixado, $v(t; x, y)$ é solução de

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_D\right)v &= 0 \\ v(t; x, y) &= 0 \quad \text{se } x \in \partial X \\ v(0; x, y) &= \delta(x - y). \end{aligned} \tag{1.6.10}$$

Seja

$$v_0(t; x, y) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} e^{-|x-y|^2/4t} \tag{1.6.11}$$

a solução fundamental da equação do calor em \mathbb{R}^n . Considere a diferença $w(x, t) = v_0(t; x, y) - v(t; x, y)$ na região

$$\{(x, t), x \in X, 0 \leq t < \infty\}; \tag{1.6.12}$$

$w(x, t)$ é zero se $t = 0$ desde que v e v_0 têm a mesma condição inicial, e $w(x, t)$ é não-negativa em ∂X uma vez que v_0 é não-negativa em todos os pontos e v anula-se em ∂X . Pelo princípio do mínimo para a equação do calor, $w(x, t) \geq 0$ na região (1.6.12). Fazendo $x = y$ obtem-se então

$$v(t; x, x) \leq \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} \quad \text{para todo } x \in X. \tag{1.6.13}$$

Apelamos agora para o seguinte (trivial) teorema Tauberiano para a transformada de Laplace

Teorema 1.6.1. *Seja $a(\lambda), 0 \leq \lambda < \infty$, uma função não-decrescente continua por partes, $a(0) = 0$. Se*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{d\lambda} a(\lambda) d\lambda \leq Ct^{-n/2} \quad \text{para todo } t \tag{1.6.14}$$

então $a(\lambda) \leq (eC)\lambda^{n/2}$ para todo λ .

Demonstração. Para todo $\lambda_0 > 0$ e $t > 0$,

$$e^{-\lambda_0 t} a(\lambda_0) = \int_0^{\lambda_0} e^{-\lambda_0 t} \frac{d}{d\lambda} a(\lambda) d\lambda \leq \int_0^{\lambda_0} e^{-\lambda t} \frac{d}{d\lambda} a(\lambda) d\lambda \leq C t^{-n/2}.$$

Fazendo $t = 1/\lambda_0$, têm-se

$$e^{-1} a(\lambda_0) \leq C \lambda_0^{n/2}.$$

Aplicando este teorema à desigualdade (1.6.13), obtemos (1.6.8) para todo $\lambda > 0$, com $C = e(4\pi)^{-n/2}$.

Seguindo Hörmander, [Ho1], trabalharemos com transformada cosseno

$$E(t; x, y) = S.K. \cos t \sqrt{\Delta_D} = \int_0^{+\infty} \cos \lambda t \frac{d}{d\lambda} e(\lambda^2; x, y) d\lambda \quad (1.6.15)$$

que é a solução fundamental do problema (1.3.40). Uma razão para se escolher a transformada cosseno é que existe um Teorema Tauberiano simples, relacionando o comportamento de $E(t; x, x)$ para t pequeno, ao comportamento de $e(\lambda; x, x)$ para λ grande. Uma outra razão é que no caso de variedades sem fronteira (cf. [Ho1]) é possível escrever uma fórmula explícita para $E(t; x, y)$ quando t é pequeno. Infelizmente, como indicado anteriormente no Parágrafo 1.3, isto não é mais verdadeiro na presença de uma fronteira o que causou grande dificuldade na adaptação do método do Hörmander a esta situação. Seeley, [See], contornou esta questão com um argumento baseado na “velocidade finita de propagação”: seja $E^0(t; x, y)$ a solução fundamental do problema de Cauchy para a equação da onda em \mathbb{R}^n . Então

Teorema 1.6.2. *Se y está a uma distância maior do que t da fronteira ∂X , então*

$$E(t; x, y) = E^0(t; x, y). \quad (1.6.16)$$

Demonstração. Considere $E^0(t; x, y)$ como função de x com y fixo. O impulso representado por $\delta_y = \delta(x - y)$ leva o tempo $t = d(y, \partial X)$ para propagar até a fronteira; portanto, se t é

menor do que $d(y, \partial X)$, então $E^0(t; x, y) = 0$ em ∂X , i.e. $E^0(t; x, y)$ satisfaz a condição de contorno o que implica (1.6.16).

É fácil escrever uma expressão para $E^0(t; x, y)$. Seja Δ_0 o Laplaceano atuando no espaço do Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Temos se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$-\widehat{\Delta_0 f} = |\xi|^2 \widehat{f} \quad \text{e} \quad \cos t\sqrt{-\Delta_0} f = \cos t|\xi| \widehat{f}. \quad (1.6.17)$$

Como $E^0(t; x, y)$ é o núcleo de Schwartz do operador $\cos t\sqrt{-\Delta_0}$ obtemos de (1.6.17)

$$E^0(t; x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \cos t|\xi| d\xi. \quad (1.6.18)$$

Em particular, pondo $x = y$ obtemos

$$E^0(t; x, x) = (2\pi)^{-n} \omega_n \int_0^\infty \cos(st) s^{n-1} ds \quad (1.6.19)$$

onde $\omega_n = n\gamma_n = \text{vol}(S^{n-1})$. Combinando isto com o teorema precedente têm-se

$$E(t; x, x) = \frac{\gamma_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \cos(st) \frac{d}{ds} s^n ds \quad \text{se} \quad d(x, \partial X) > t. \quad (1.6.20)$$

Para converter (1.6.20) numa afirmação sobre as propriedades assintóticas de $e(\lambda^2; x, x)$ faremos uso do seguinte teorema Tauberiano (cf. [Le]):

Teorema 1.6.3. *Seja $r_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função $r_n(\lambda) = \lambda^n$ e $m : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-decrescente de crescimento polinomial com $m(0) = 0$. Suponha que as transformadas cossenos de $\frac{dm}{d\lambda}$ e $\frac{dr_n}{d\lambda}$ são iguais no intervalo, $|t| \leq \delta$. Então*

$$|m(\lambda) - \lambda^n| \leq C_n \left(\frac{1}{\delta^n} + \frac{\lambda^{n-1}}{\delta} \right) \quad \text{para} \quad \lambda > 0, \quad (1.6.21)$$

onde C_n é uma constante universal dependente somente de n .

Provaremos este teorema no fim deste parágrafo.

Aplicando o Teorema 1.6.3 à expressão (1.6.20) obtemos:

$$\left| e(\lambda^2; x, x) - \frac{\gamma_n}{(2\pi)^n} \lambda^n \right| \leq C_n \left(\frac{1}{\delta^n} + \frac{\lambda^{n-1}}{\delta} \right) \quad \text{se} \quad d(x, \partial X) > \delta. \quad (1.6.22)$$

Podemos agora estimar $N(\lambda^2) - \frac{\gamma_n}{(2\pi)^n} \text{vol}(X) \lambda^n$ por

$$\int_X \left| e(\lambda^2; x, x) - \frac{\gamma_n}{(2\pi)^n} \lambda^n \right| dV. \quad (1.6.23)$$

Escrevemos esta integral como soma de duas integrais: uma na região $d(x, \partial X) \leq \frac{1}{\lambda}$ e a outra na região $d(x, \partial X) > \frac{1}{\lambda}$. De (1.6.8), $e(\lambda^2; x, x) \leq C \lambda^n$ uniformemente em X ; portanto a primeira integral é da ordem de $O(\lambda^{n-1})$. Por (1.6.22), a segunda integral é majorada por constante vezes

$$\int_{1/\lambda}^a \left(\frac{1}{\delta^n} + \frac{\lambda^{n-1}}{\delta} \right) d\delta, \quad a \quad \text{suficientemente grande.} \quad (1.6.24)$$

É fácil ver que (1.6.24) é da ordem de $O(\lambda^{n-1} \text{Log} \lambda)$.

Derivamos pois a seguinte fórmula clássica de Weyl-Courant:

$$N(\lambda) = \frac{\gamma_n}{(2\pi)^n} \text{vol}(X) \lambda^{n/2} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}} \text{Log} \lambda\right), \quad \gamma_n = \text{vol}(B^n), \quad (1.6.25)$$

onde B^n denota a bola unitária em \mathbb{R}^n .

Pequenas mudanças no argumento acima permitem provar a mesma fórmula (1.6.25) no caso de X ser uma variedade Riemanniana compacta com bordo (Neste caso, $\gamma_n \text{vol}(X) = \int_{d(x, \xi) \leq 1} dV \, d\xi$).

Em relação ao erro em (1.6.25), Pham The Lai, [Pha], (generalizando um resultado de Seeley, [See], para $n = 3$) mostrou que para o Laplaciano Δ em um domínio limitado C^∞ do \mathbb{R}^n , têm-se

Teorema 1.6.4. Para $\lambda \rightarrow +\infty$

$$N(\lambda) = (2\pi)^{-n} \gamma_n \text{vol}(X) \lambda^{n/2} + o(\lambda^{\frac{n-1}{2}}). \quad (1.6.26)$$

Observação 1.6.1. A conjectura de Weyl diz que $N(\lambda)$ admite um desenvolvimento assintótico para $\lambda \rightarrow +\infty$, com dois termos associados ao $\text{vol}(X)$ e ao $\text{vol}(\partial X)$. V. Ivrii, [Iv], demonstrou esta conjectura sob a hipótese que o conjunto

$$\Sigma_X = \{(x, \xi) \in \partial X \times S^{n-1} \quad \text{tais que existe uma geodésica generalizada} \quad (1.6.27)$$

ordinária periódica passando por x na direção ξ é de medida nula em $\partial X \times S^{n-1}$.

Em outras palavras, sob a hipótese (1.6.27) (e lembrando que $\gamma_n = \text{vol}(S^{n-1})/n$), têm-se

$$N(\lambda) = \frac{(4\pi)^{-n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \text{vol}(X) \lambda^{n/2} - \frac{(4\pi)^{-(\frac{n-1}{2})}}{4\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} \text{vol}(\partial X) \lambda^{\frac{n-1}{2}} + o(\lambda^{\frac{n-1}{2}}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (1.6.28)$$

Observação 1.6.2. Helffer e Pham The Lai, [He-Ph], mostraram que existe um operador de Laplace-Beltrami em um círculo de \mathbb{R}^2 para o qual a fórmula (1.6.28) não é satisfeita.

Observação 1.6.3. Petkov-Stojanov, [Pe-St2], provaram que a propriedade (1.6.27) é “genericamente” verdadeira (“genericamente” significa aqui movendo-se genericamente a fronteira; a métrica em \mathbb{R}^n permanecendo fixa. A definição precisa será dada no Capítulo 3). Como consequência a fórmula (1.6.28) é “genericamente” correta.

Observação 1.6.4. O erro em (1.6.26) é o melhor possível, mesmo quando $\partial X = \emptyset$. Neste caso, ele pode ser melhorado se se impõe restrições geométricas sobre X (cf. [Be]) ou se

a propriedade (1.6.27) for válida, isto é: para todo $t > 0$ o conjunto dos pontos fixos de $\text{expt}H_g : S^*(X) \rightarrow S^*(X)$ possui medida nula. Com esta última condição, o erro $0(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$ pode ser substituído por $o(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$ (cf. [Du-Gu]).

Exemplo 1.6.1. Sejam (r, θ) as coordenadas esféricas em \mathbb{R}^{n+1} , $-\Delta_\theta$ o operador de Laplace-Beltrami na esfera S^n . O Laplaceano em \mathbb{R}^{n+1} é dado por

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{n}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\theta. \quad (1.6.29)$$

Seja u uma distribuição em \mathbb{R}^{n+1} , harmônica em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, positiva-homogênea de grau $m : u(r, \theta) = r^m f(\theta)$. Temos

$$\Delta u = r^{m-2} (\Delta_\theta f + m(m+n-1)f), \quad (1.6.30)$$

e portanto, $\lambda = m(m+n-1)$ é um valor próprio de Δ_θ , e

$$-\Delta_\theta f = \lambda f. \quad (1.6.31)$$

Reciprocamente, suponha que isto acontece; então $u(r, \theta) = r^m f(\theta)$ deve ser harmônica no complemento da origem. Se $m > 0$, então u é uma função contínua em \mathbb{R}^{n+1} e, portanto, é harmônica em todos os pontos. Porém isto é possível somente se m é um inteiro positivo, e então u é um polinômio harmônico. Se $m \leq 1$ qualquer polinômio é harmônico. Quando $m \geq 2$ considere Δ como um operador linear do espaço \mathcal{P}_h^m de polinômios harmônicos homogêneos de grau m em $n+1$ variáveis (com coeficientes complexos), em \mathcal{P}_h^{m-2} . Identifique \mathcal{P}_h^m ao seu dual via a dualidade

$$\langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)} g^{(\alpha)}. \quad (1.6.32)$$

Então o transposto de $-\Delta$ é a multiplicação por r^2 , que é injetiva. Segue que $\Delta : \mathcal{P}_h^m \rightarrow \mathcal{P}_h^{m-2}$ é sobrejetivo e, portanto, a dimensão do seu núcleo é igual à codimensão de \mathcal{P}_h^{m-2} em

\mathcal{P}_k^m , i.e., a

$$N_m = \frac{(m+n)!}{m!n!} - \frac{(m+n-2)!}{(m-2)!n!}, \quad (1.6.33)$$

que é a dimensão do espaço próprio V_λ correspondente ao valor próprio λ . Consequentemente,

$$N(\lambda+0) = \sum_{j=0}^m N_m = \frac{(m-n)!}{m!n!} + \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!} + n+1 \sim 2m^n/n! \quad (1.6.34)$$

para m grande. Porém quando m é grande, $m \sim \lambda^{1/2}$. Isto está de acordo com (1.6.26) se usarmos o fato que

$$(2\pi)^{-n} \text{vol}(S_n) \text{vol}(S_{n-1})/n = 2/n!. \quad (1.6.35)$$

Demonstração do Teorema 1.6.3: Começamos estendendo a função m a toda reta pondo $m^\sharp(s) = m(|s|) \text{sgns}$. Analogamente, $r_n^\sharp(s) = r_n(|s|) \text{sgns}$. Então a transformada cosseno de $\frac{d}{ds}m(s)$ e $\frac{d}{ds}r_n(s)$ são metade da transformada de Fourier de $\frac{d}{ds}m^\sharp$ e $\frac{d}{ds}r_n^\sharp$ respectivamente; portanto no teorema podemos substituir transformada cosseno por transformada de Fourier e m e r_n por m^\sharp e r_n^\sharp . É fácil ver também que, por uma mudança de escala, podemos tomar $S = 1$. Estamos pois reduzidos a provar

Teorema 1.6.5. *Seja $r_n(s) = |s|^n \text{sgns}$ e seja $m(s)$ uma função não-decrescente na reta tendo crescimento polinômial, e $m(0) = 0$. Suponha que as transformadas de Fourier de $\frac{dm}{ds}$ e $\frac{d}{ds}r_n$ são iguais no intervalo, $|t| < 1$. Então, para $s > 0$,*

$$|m(s) - s^n| \leq C_n(1 + s^{n-1}) \quad (1.6.36)$$

onde C_n é uma constante universal dependente somente de n .

Demonstração: Escolhamos $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ com as seguintes propriedades:

- i) $\rho(s) = \rho(-s)$, $\rho \geq 0$ e $\rho > 0$ em $[-1, 1]$
- ii) $\hat{\rho}(0) = 1$, $\hat{\rho} \leq 1$ e $\hat{\rho} = 0$ para $|t| > 1$.

$$(1.6.37)$$

É fácil construir tal função : seja ϕ uma função $C^\infty(\mathbb{R})$ positiva, par e com suporte em $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Seja ρ_0 definida por

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{c} \phi * \phi \quad \text{onde} \quad c = (\phi * \phi)(0). \quad (1.6.38)$$

Então $\rho_0 \geq 0$, $\rho_0(s) = \rho_0(-s)$, $\hat{\rho}_0(0) = 1$ e $\hat{\rho}_0(t) = 0$ para $|t| \geq 1$.

Ademais, $\hat{\rho}_0(t) \leq \int |\rho_0| ds = \int \rho_0 ds = 1$.

Como $\rho_0(0) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\rho}_0(t) dt > 0$, $\rho_0(s) > 0$ num intervalo pequeno $|s| < a < 1$.

Tomamos então $\rho(s) = a\rho_0(as)$.

No que segue, C_n denotará sempre alguma constante universal dependente apenas de n , que pode mudar a cada linha.

Lema 1.6.1. $|(\rho * r_n - r_n)(s)| \leq C_n(1 + |s|^{n-1})$.

Prova: $\rho * r_n(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(s') |s - s'|^n ds' = |s|^n \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(s') ds' + \dots = |s|^n + h(s)$

onde $h(s)$ é estimável por potências inferiores de $|s|$.

Lema 1.6.2. $|\rho * \frac{dm}{ds} - n|s|^{n-1}| \leq C_n(1 + |s|^{n-2})$.

Prova: Como $\hat{\rho}$ tem suporte no intervalo $|t| < 1$, $\widehat{\rho \frac{dm}{ds}} = \widehat{\rho} \widehat{\frac{dm}{ds}}$; portanto $\rho * \frac{dm}{ds} = \rho * \frac{dr_n}{ds}$.

Pelo Lema 1.6.1, $|\rho * \frac{dr_n}{ds} - \frac{dr_n}{ds}| \leq C_n(1 + |s|^{n-2})$,

e isto implica a estimativa acima.

Lema 1.6.3. $|m(s+1) - m(s)| \leq C_n(1 + |s|^{n-1})$.

Prova: Por (1.6.35), $\rho \geq 0$ e $\rho(s) > C > 0$ se $|s| \leq 1$. Como $m(s)$ é monotona

$$|m(s+1) - m(s)| = \int_s^{s+1} \frac{dm}{ds'}(s') ds' \leq \frac{1}{C} \int_s^{s+1} \rho(s-s') \frac{dm}{ds'} ds' \leq \frac{1}{C} \rho * \frac{dm}{ds}, \quad (1.6.39)$$

e, do Lema 1.6.2, segue o Lema 1.6.3

Lema 1.6.4. Para todo σ

$$|m(s+\sigma) - m(s)| \leq C_n(1 + |\sigma|^n)(1 + |s|^{n-1}). \quad (1.6.40)$$

Prova: É bastante provar isto quando σ é um inteiro positivo. Podemos escrever

$$\begin{aligned} m(s+\sigma) - m(s) &= m(s+1) - m(s) + m(s+2) - m(s+1) + \dots \quad (\sigma \text{ termos}) \\ &\leq C_n |\sigma| (1 + (|s| + \sigma)^{n-1}), \end{aligned}$$

de onde segue a estimativa requerida.

Provamos agora o Teorema 1.6.5. Pelo Lema 1.6.4

$$|\rho * m(s) - m(s)| \leq \int \rho(-\sigma) (|m(s+\sigma) - m(s)|) d\sigma \leq C_n(1 + |s|^{n-1}), \quad (1.6.41)$$

uma vez que ρ é rapidamente decrescente. Integrando a estimativa no Lema 1.6.2, obtemos

$$|(\rho * m)(s) - |s|^n| \leq C_n(1 + |s|^{n-1}). \quad (1.6.42)$$

Combinando (1.6.41) e (1.6.42) temos o Teorema 1.6.5.

§ 1.7 Comentários e Referências Bibliográficas

Os principais teoremas do Capítulo 1 (Teoremas 1.3.1, 1.4.1, 1.4.2, 1.5.2, 1.5.3 e 1.6.4) se generalizam para o caso de um operador pseudodiferencial elítico, essencialmente auto-adjunto de ordem m , numa variedade compacta (conexa) X , que define um operador auto-adjunto positivo P sobre o espaço L^2 das densidades de grau $1/2$. Para isto se utiliza o operador das ondas

$$\partial^2/\partial t^2 - p^{2/m}, \quad (1.7.1)$$

se inspirando num procedimento de redução introduzido por Hörmander em [Hol]. Na definição da distribuição S (cf. (1.3.10)) se substitue $\chi_k^{1/2}$ por $\chi_k^{1/m}$.

Os mesmos teoremas permanecem válidos para a classe de operadores denominados (cf. [Helf] e [Ca-Me]) globalmente elíticos (ver também (1.1.9)) e as considerações feitas no Parágrafo 1.1) cujo modelo típico é o oscilador harmônico em \mathbb{R} , $-\partial_x^2 + x^2$. Porém a analogia é somente formal uma vez que, por exemplo, para o oscilador harmônico a geometria depende de “termo de grau zero” (ou seja o símbolo principal do oscilador harmônico nesta teoria é $\xi^2 + x^2$ e sua “ordem” é um), enquanto no caso de variedade compacta, somente o símbolo principal do operador intervém.

Teoremas análogos foram obtidos por Boutet de Monvel e Guillemin, [Bo-Gu] na teoria espectral de operadores de Toeplitz.

Na “Aproximação Semi-Clássica” (cf. [Ro]) se considera operadores $p^w(x, h D_x)$ (cf. (1.1.9)) e se estuda o comportamento do espectro quando a “constante de Planck” h tende a zero. Desta forma, grandezas ligadas a $p^w(x, h D_x)$ são relacionadas com grandezas da mecânica clássica (Princípio de Correspondência), i.e. grandezas definidas a partir do campo Hamiltoniano

$$H_p(x, \xi) = \partial_\xi p(x, \xi) \partial_x - \partial_x p(x, \xi) \partial_\xi. \quad (1.7.2)$$

§ 1.3 O Teorema 1.3.1 é devido a Chazarain, [Ch2], e Duistermaat–Guillemin, [Du–Gu]. Sua extensão a variedades com bordo foi feita por Andersson–Melrose, [An–Me] (no caso de bordo geodésicamente convexo ou côncavo) e Melrose–Sjöstrand, [Me–Sj].

§ 1.4 O Teorema 1.4.1 foi provado por Duistermaat–Guillemin, [Du–Gu]. No entanto a demonstração apresentada no Parágrafo 1.4 segue as idéias de Helton, [Helt], e pode ser encontrada em [Gu2].

Fórmulas para o polinômio P_{n-1} em (1.4.33) foram dadas por Boutet de Monvel e Guillemin, [Bo–Gu].

§ 1.5 A fórmula de Poisson foi obtida por Chazarain, [Ch2], e Duistermaat–Guillemin, [Du–Gu]. Seguimos a demonstração de [Ch2].

§ 1.6 O melhor resultado (i.e. com o melhor erro possível $O(\lambda^{-\frac{n-1}{2}})$) no caso de variedades sem bordo, é de Hörmander, [Ho1]. Uma extensão e comentários históricos sobre a fórmula de Weyl, (1.6.28), podem ser encontrados em Hörmander, [Ho3], Secção 29.3. O Teorema 1.6.5 é uma versão simplificada (cf. [Gu4]) do teorema Tauberiano usado por Hörmander, [Ho1].

Capítulo 2

Propriedades Espectrais do Laplaceano no Exterior de um Obstáculo

§ 2.1 Propagação de Ondas Acústicas no Exterior de um Obstáculo

Nosso interesse, neste capítulo, é o estudo de propriedades espectrais do Laplaceano no exterior de um obstáculo. As diferenças entre os problemas exterior e interior são tão grandes que elas tendem a esconder os pontos de similaridade. O propósito é então, colocar em evidência certas analogias entre estes dois problemas. Como vimos no Capítulo 1, se \mathcal{O} é um domínio compacto de \mathbb{R}^n , com fronteira C^∞ , $\partial\mathcal{O}$, as soluções do problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 && \text{em } \mathbb{R} \times \mathcal{O} \\ u &= 0 && \text{em } \mathbb{R} \times \partial\mathcal{O} \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

podem ser representadas, utilizando-se a decomposição espectral de Δ em \mathcal{O} , como superposição de movimentos harmônicos com frequências $\mu_k = \mu_k(\mathcal{O}) > 0$:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k e^{i\mu_k t} + b_k^{-i\mu_k t} \right) w_k(x), \quad (2.1.2)$$

onde μ_k^2 são os valores próprios de $-\Delta$ arranjados numa sequência crescente tendendo a ∞ , e $w_k \in L^2(\mathcal{O})$ são as correspondentes funções próprias:

$$\Delta w_k + \mu_k^2 w_k = 0 \quad \text{em } \mathcal{O}, \quad w_k(x) = 0 \quad \text{em } \partial\mathcal{O}. \quad (2.1.3)$$

Consideremos agora o comportamento das soluções da equação da onda no exterior

$\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$, de \mathcal{O} , submetidas às mesmas condições de fronteira, i.e., o problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \text{em} & \mathbb{R} \times \Omega \\ u &= 0 & \text{em} & \mathbb{R} \times \partial\Omega \quad (\partial\Omega \equiv \partial\mathcal{O}) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Neste curso utilizamos sempre condições de fronteira de Dirichlet porém todos os resultados podem ser estendidos a condições de fronteira de Neumann. Suporemos (sempre) também que nenhuma bicaracterística generalizada associada a (2.1.4) é tangente em um ponto de $\partial\Omega$ com ordem infinita (cf. [Me-Sj]).

Pode-se então mostrar quer diretamente quer como uma consequência da teoria de espalhamento para o problema (2.1.4) (cf. [La-Ph1]), que a extensão auto-adjunta Δ_D de (2.1.4) não tem funções próprias em $L^2(\Omega)$ e que, na verdade, seu espectro é contínuo (de multiplicidade infinita), estendendo-se de 0 a $+\infty$. Como antes, as soluções de (2.1.4) podem ser expressas como superposição de movimentos harmônicos envolvendo todas as frequências. Resulta que tal representação não dá nenhuma informação sobre o comportamento de $u(x, t)$ para $t \sim +\infty, x$ fixo. Para se ter uma idéia do tipo de representação assintótica que interessa, recordemos inicialmente que a solução da equação da onda em \mathbb{R}^n ($\mathcal{O} \equiv \phi$), n ímpar, obedece ao princípio de Huyghens: *se os dados iniciais $u|_{t=0}, u_t|_{t=0}$, têm suporte compacto, digamos contidos em $\{x; |x| < R\}$, a solução será identica a zero no cone $\{x; |x| < t - R\}$.* Isto entretanto, não é mais verdadeiro na presença de um obstáculo. Não obstante, se o obstáculo satisfaz certas condições geométricas, i.e., \mathcal{O} é não-confinante (cf. Definição 2.2.1) e a dimensão do espaço $n \geq 3$, é ímpar, então todas (tais) soluções decaem exponencialmente quando t tende a infinito e x permanece fixo. De fato, para t grande, elas se comportam assintoticamente na forma:

$$u(x, t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{i\lambda_j t} v_j(x), \quad (2.1.5)$$

onde os números c_j dependem dos dados iniciais; entretanto os números λ_j e as funções v_j são determinados somente pelo obstáculo \mathcal{O} e são, num sentido generalizado, valores próprios

e funções próprias do operador Δ_D no domínio exterior Ω . Cada λ_j possui uma parte imaginária positiva e escolhemos índices de maneira que

$$0 < \text{Im}\lambda_1 \leq \text{Im}\lambda_2 \leq \dots \longrightarrow +\infty. \quad (2.1.6)$$

Em outras palavras, o papel desempenhado pelos valores próprios μ_j , no problema interior (2.1.1), passa a ser feito aqui pelos pólos λ_j da matriz de espalhamento $\mathcal{S}(z)$, associada ao problema (2.1.4). Por exemplo se

$$\partial\Omega \subset \{x, |x| < r\}, \quad (2.1.7)$$

a relação de Poisson é então a afirmação que $\sum_j e^{i\lambda_j t}$ é uma distribuição em $(2r, \infty)$ cujo suporte singular está contido no conjunto dos comprimentos dos raios (geodésicas) periódicos em Ω .

No caso particular onde Ω é o complemento de duas partes compactas, estritamente convexas e disjuntas, é possível completar a relação de Poisson com uma fórmula de Poisson que pode ser utilizada para obter resultados precisos sobre a localização dos pólos da matriz $\mathcal{S}(z)$. Assim se demonstra (cf. [Ba-Gu-Ra]) que para todo $\epsilon > 0$, existe sempre uma infinidade de pólos de $\mathcal{S}(z)$ na região $\{\text{Im} z \leq \epsilon \log|z|\}$. Este é o exemplo mais simples de obstáculo confinante e o resultado apresentado acima completa aquele de Lax-Phillips, [La-Ph3]; eles estabeleceram que para obstáculos não-confinantes, existe um número $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\text{Im} \lambda_j \geq \epsilon_0 \log|\lambda_j| \quad \text{para todo} \quad \lambda_j. \quad (2.1.8)$$

Mais importante ainda, o resultado de [Ba-Gu-Ra], foi completado por Ikawa, [Ik2], que mostrou a existência de um $\alpha > 0$ tal que a matriz $\mathcal{S}(z)$ não possui pólos na região $\{\text{Im}\lambda \leq \alpha\}$. Isto liquidou com uma conjectura de Lax-Phillips, [La-Ph1], que previa, para

obstáculos confinantes, a existência de uma seqüência de pólos convergindo para o eixo real. Uma modificação desta conjectura, devida a Ikawa, [Ik7], será comentada adiante.

Veremos ainda que a fase de espalhamento (cf. (2.2.13)) desempenha (muitas vezes) no problema exterior, papel semelhante ao da função contagem $N(\lambda)$ no problema interior.

Nossa abordagem será a da teoria de espalhamento (scattering theory) no sentido que estudaremos as propriedades espectrais do Laplaceano em Ω *relativamente* ao Laplaceano em todo \mathbb{R}^n . As ferramentas técnicas são fornecidas pela análise microlocal, principalmente resultados sobre propagação de singularidades de soluções e construção de parametrizes do problema misto para a equação da onda em Ω . Entretanto, para serem aplicados, necessitamos combiná-los com fórmulas explícitas da teoria de espalhamento. Portanto o plano deste capítulo será, em primeiro lugar, recordar os resultados (necessários) da teoria de espalhamento; em seguida, apresentaremos os resultados “espectrais assintóticos” e, finalmente, mostraremos como se pode utilizá-los para precisar a posição dos pólos da matriz de espalhamento.

§ 2.2 Teoria de Espalhamento (um Resumo)

Os detalhes do material apresentado neste parágrafo podem ser encontrados no livro de Lax-Phillips, [La-Ph1]. Faremos aqui um resumo para poder justificar principalmente (2.1.5) e (2.1.6) bem como definir as noções introduzidas no parágrafo anterior.

Considere o problema (2.1.4). Em teoria de espalhamento começa-se estudando a interação do feixe de ondas planas $\exp(i\sigma(t - \langle \theta, x \rangle))$, $|\theta| = 1$, $\sigma > 0$, com $\partial\Omega$. Este feixe satisfaz a equação diferencial porém não satisfaz as condições de fronteira. Como consequência, procura-se soluções de (2.1.4) da forma

$$u(t, x) = e^{i\sigma(t - \langle x, \theta \rangle)} + e^{i\sigma t} w_\sigma(x), \quad (2.2.1)$$

onde

$$\Delta w_s + \sigma^2 w_s = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad (2.2.2)$$

$$e^{-i\sigma\langle x, \theta \rangle} + w_s = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \quad (2.2.3)$$

Para se obter solução única de (2.2.2)-(2.2.3) se requer que w_s seja o limite da (única) solução em L^2 do mesmo problema quando $Im\sigma < 0$ - esta é uma forma da "condição de radiação". Com este requisito adicional, w_s existe e é única (cf. [Sh-Th] ou [He-Ra]). Ademais,

$$w_s(x) = \frac{e^{-i\sigma|x|}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} a(\theta', \theta, \sigma) + 0 \left(\frac{1}{|x|^{\frac{n+1}{2}}} \right) \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (2.2.4)$$

onde $\theta' = \frac{x}{|x|}$ é o ângulo de espalhamento. Observe que o feixe de ondas refletidas $\exp(i\sigma t)w_s$ é esférico para $|x|$ grande, e se propaga para fora como intuitivamente correto. Observe também que, dado (2.2.2) e $a(\theta', \theta, \sigma)$, w_s é unicamente determinado; portanto é natural se estudar $a(\theta', \theta, \sigma)$ ao invés de w_s . O coeficiente $a(\theta', \theta, \sigma)$ é chamado de *amplitude de espalhamento* (também de coeficiente de transmissão) e satisfaz certas identidades entre as quais a "lei de reciprocidade":

$$a(-\theta', \theta, \sigma) = a(-\theta, \theta', \sigma) \quad (2.2.5)$$

A prova de (2.2.5) utiliza um argumento típico de muitos cálculos em teoria de espalhamento qual seja, uma combinação da fórmula de Green e do método da fase estacionária. Assim temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|x|=R} \left(w_s(x, \theta, \sigma) \frac{\partial w_s}{\partial r}(x, \omega, \sigma) - w_s(x, \omega, \sigma) \frac{\partial w_s}{\partial r}(x, \theta, \sigma) \right) dS \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(-e^{-i\sigma\langle x, \theta \rangle} \frac{\partial w_s}{\partial \nu}(x, \omega, \sigma) + e^{-i\sigma\langle x, \omega \rangle} \frac{\partial w_s}{\partial \nu}(x, \theta, \sigma) \right) dS \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(w_s(x, \omega, \sigma) \frac{\partial}{\partial \nu}(e^{-i\sigma\langle x, \theta \rangle}) - e^{-i\sigma\langle x, \theta \rangle} \frac{\partial w_s}{\partial \nu}(x, \omega, \sigma) \right) dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\partial\Omega} \left(w_s(x, \theta, \sigma) \frac{\partial}{\partial\nu} (e^{-i\sigma\langle x, \omega \rangle}) - e^{-i\sigma\langle x, \omega \rangle} \frac{\partial w_s}{\partial\nu}(x, \theta, \sigma) \right) dS \\
& = \int_{|x|=R} \left(w_s(x, \omega, \sigma) \frac{\partial e^{-i\sigma\langle x, \theta \rangle}}{\partial r} - e^{-i\sigma\langle x, \theta \rangle} \frac{\partial w_s}{\partial r}(x, \omega, \sigma) \right) dS \\
& - \int_{|x|=R} \left(w_s(x, \theta, \sigma) \frac{\partial}{\partial r} e^{-i\sigma\langle x, \omega \rangle} - e^{-i\sigma\langle x, \omega \rangle} \frac{\partial w_s}{\partial r}(x, \theta, \sigma) \right) dS
\end{aligned}$$

Os termos principais das integrais, na última, equação acima, podem ser calculados pelo método da fase estacionária (cf. [La-Ph2]). Quando $R \rightarrow \infty$ obtém-se então:

$$0 = b(\sigma)a(-\theta, \omega, \sigma) - b(\sigma)a(-\omega, \theta, \sigma) \quad \text{onde} \quad b(\sigma) \neq 0 \quad (2.2.6)$$

a função $\varphi_+ = e^{-i\sigma\langle x, \theta \rangle} + w_s(x, \theta, \sigma)$ é conhecida como onda plana distorcida de saída. Note que $\varphi_-(x, \theta, \sigma) \equiv \varphi_+(x, -\theta, \sigma)$ também satisfaz (2.2.2)-(2.2.3). Entretanto, $\varphi_- - e^{-i\sigma\langle x, \theta \rangle}$ é o limite de soluções em L^2 para $\text{Im}\sigma > 0$. No quadro descrito acima, $e^{i\sigma t}\varphi_-(x, \theta, \sigma)$ é uma onda plana mais uma onda refletida assintoticamente esférica, que se propaga para dentro. Daí chamar φ_- de onda plana distorcida de entrada.

A matriz de espalhamento, $\mathcal{S}(\sigma)$, pode ser definida como o operador de $L^2(S^{n-1})$ em $L^2(S^{n-1})$ que transforma $\bar{\varphi}_+(x, \cdot, \sigma)$ em $\bar{\varphi}_-(x, \cdot, \sigma)$. Para ver que existe tal operador e determiná-lo explicitamente, é suficiente encontrar um núcleo C^∞ em $S^{n-1} \times S^{n-1}$ tal que

$$0 \equiv \bar{\varphi}_-(x, \theta, \sigma) - \bar{\varphi}_+(x, \theta, \sigma) - \int_{S^{n-1}} K(\theta, \omega, \sigma) \bar{\varphi}_+(x, \omega, \sigma) d\omega. \quad (2.2.7)$$

Fazendo $|x| \rightarrow \infty$, calculando $\int_{S^{n-1}} K(\theta, \omega, \sigma) e^{i\sigma\langle x, \omega \rangle} d\omega$ pelo método da fase estacionária, e substituindo a forma assintótica (2.2.4) nos φ 's, vê-se que $K(\theta, \omega, \sigma)$ é necessariamente $c(\sigma)\bar{a}(-\omega, \theta, \sigma)$, que é igual (pela lei de reciprocidade) a $c(\sigma)\bar{a}(-\theta, \omega, \sigma)$, onde $c(\sigma) = \left(-\frac{i\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}$. Ademais, com esta escolha de K a função no membro direito de (2.2.7) satisfaz

$$\Delta u + \sigma^2 u = 0, \quad u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \quad (2.2.8)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i\sigma u = 0 \left(|x|^{-\frac{n+1}{2}} \right), \quad u = 0 \left(|x|^{-\frac{n-1}{2}} \right). \quad (2.2.9)$$

Portanto, pelo teorema de unicidade de Rellich (cf. [La-Ph1]), $u \equiv 0$ e (2.2.7) é válido identicamente para $x \in \Omega$. Assim

$$\mathcal{S}(\sigma) = I + \mathcal{K}(\sigma), \quad I = \text{identidade}, \quad (2.2.10)$$

onde $\mathcal{K}(\sigma)$ é o operador integral com núcleo $K(\theta, \omega, \sigma)$.

Finalmente, se se retorna a (2.2.7) e se calcula o termo principal do desenvolvimento assintótico quando $|x| \rightarrow \infty$ do membro direito, têm-se

$$0 = -\bar{a}(\theta', \theta, \sigma) - \frac{c(\sigma)}{\bar{c}(\sigma)} a(\theta, \theta', \sigma) - \int_{S^{n-1}} c(\sigma) a(\theta, \omega, \sigma) \bar{a}(\theta', \omega, \sigma) d\omega, \quad (2.2.11)$$

que mostra que $\mathcal{S}(\sigma)$ é unitário.

É imediato que, fixados $(\theta, \omega) \in S^{n-1} \times S^{n-1}$, $K(\theta, \omega, \cdot) \in S'(\mathbb{R})$. Se $S(t, \theta, \omega) = \mathcal{F}_{\sigma \rightarrow t}^{-1} K(\theta, \omega, \sigma)$ é a transformada de Fourier inversa de $K(\theta, \omega, \sigma)$, $S(t - t', \theta, \omega)$ é chamado o núcleo de espalhamento; ele é o núcleo de Schwartz do operador $S - Id$ onde S é o operador de espalhamento, associado ao problema de Dirichlet para a equação da onda em $\mathbb{R} \times \Omega$. O operador S é um operador unitário de $L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})$ em $L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})$.

Como é fácil provar que $w_s(x, \omega, \sigma)$ pode ser estendida a uma função holomorfa em $Im \sigma < 0$ e como vale a seguinte fórmula (cuja obtenção esta implícita na demonstração da lei de reciprocidade):

$$\int_{\partial\Omega} \left(e^{-i\sigma \langle x, \omega \rangle} \frac{\partial}{\partial \nu} (e^{i\sigma \langle x, \theta \rangle}) - e^{i\sigma \langle x, \theta \rangle} \frac{\partial w_s}{\partial \nu}(x, \omega, \sigma) \right) dS = b(\sigma) a(\theta, \omega, \sigma), \quad (2.2.12)$$

segue que $a(\theta, \omega, \sigma)$ e portanto, também $\mathcal{S}(\sigma)$, podem ser estendidas holomorficamente em $Im\sigma < 0$.

De (2.2.10) onde $\mathcal{K}(\sigma)$ possui núcleo C^∞ e é, por conseguinte, um operador nuclear (ou seja tem traço), segue que $\det \mathcal{S}(\sigma)$ existe e é holomorfa em $Im\sigma < 0$. Assim definindo $\mathcal{S}(\sigma) = (\mathcal{S}^*(\bar{\sigma}))^{-1}$ (princípio de reflexão de Schwarz) temos uma continuação meromorfa de $\mathcal{S}(\sigma)$ a $\mathbb{C} - \{\sigma \leq 0\}$. No caso em que n é ímpar ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) esta continuação analítica estende-se através o eixo real negativo e $\mathcal{S}(\sigma)$ é meroforma em \mathbb{C} . A função

$$s(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \log \det \mathcal{S}(\sigma) \quad (2.2.13)$$

é real desde que $|\det \mathcal{S}(\sigma)| = 1$, e é conhecida como a fase de espalhamento.

Seja $H_E(\Omega)$ o espaço de Hilbert de todos os dados iniciais com energia finita. O espaço $H_E(\Omega)$ é definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$ na norma

$$\| \{f_1, f_2\} \|_E^2 = \int_{\Omega} (|\nabla f_1|^2 + |f_2|^2) dx . \quad (2.2.14)$$

Seja r , escolhido como em (2.1.7). Chamamos uma solução de saída se ela é zero para $|x| < t + r$, $t \geq 0$, e de entrada se ela é zero para $|x| < r - t$, $t \leq 0$. O conjunto dos dados iniciais de todas as soluções de saída (de entrada) é denotado por $D_+^r (D_-^r)$. A aplicação $U(t)$ que associa dados iniciais em $C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$ à solução do problema (2.1.4)

$$U(t) : \{u(0), u_t(0)\} \longrightarrow \{u(t), u_t(t)\} , \quad (2.2.15)$$

é uma isometria na norma (2.2.14) e pode ser estendida como um grupo a um parâmetro de operadores unitários em $H_E(\Omega)$ (princípio de conservação da energia). O grupo correspondente em $H_E(\mathbb{R}^n)$ é denotado por $U_0(t)$. Os grupos $U(t)$ e $U_0(t)$ são *gerados* respectivamente por

$$G = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.16)$$

onde $\Delta = \Delta_D$ é a extensão auto-adjunta do Laplaceano no domínio exterior Ω , submetido a condições de Dirichlet sobre $\partial\Omega$, e Δ_0 é a extensão auto-adjunta do Laplaceano em \mathbb{R}^n . É conveniente estender $U(t)$ a $H_E(\mathbb{R}^n)$ definindo-o igual a zero em $H_E(\mathbb{R}^n) \ominus H_E(\Omega)$.

Em seguida consideramos os operadores

$$Z(t) = P_+^r U(t) P_-^r, \quad t \geq 0, \quad (2.2.17)$$

onde $P_+^r (P_-^r)$ é a projeção ortogonal sobre o complemento ortogonal de $D_+^r (D_-^r)$. O efeito da projeção P_-^r é remover sinais que podem estar chegando de longe e o efeito de P_+^r é remover a parte do sinal que já foi convertida numa onda de saída e não mais interage com o obstáculo. Como os dados em D_+^r e D_-^r são zero no interior da bola $\{x, |x| < r\}$, vemos que, para dados $f = (f_1, f_2)$ com suporte nesta bola,

$$[Z(t)f](x) = [U(t)f](x) \quad (2.2.18)$$

para todo $|x| < r$; assim para tais dados, os dois lados são iguais próximo ao obstáculo.

Se n é ímpar, os subespaços D_+^r e D_-^r são ortogonais; isto e o fato que, para $t > 0$, $U(t)$ transforma D_+^r em si próprio, implicam que os operadores $\{Z(t)\}$ anulam D_+^r e D_-^r e formam um semi-grupo de operadores no subespaço

$$K^r = H_E(\Omega) \ominus (D_+^r \oplus D_-^r). \quad (2.2.19)$$

É um fato conhecido na teoria de semi-grupos de operadores (cf. [La-Ph1], Teorema 5.4 do Capítulo III) que se $Z(t)$ é um operador compacto para algum $t > 0$, então para todo f em K^r se pode expressar $Z(t)f$ assintoticamente como

$$Z(t)f \sim \sum c_j e^{\nu_j t} v_j(x), \quad (2.2.20)$$

onde os $\{\nu_j\}$ são os valores próprios e os $\{v_j\}$ as funções próprias correspondentes do gerador infinitesimal, B , de $Z(t)$. Como os operadores $Z(t)$ são contrações, $\operatorname{Re} \nu_j < 0$. Isto implica, em particular, que se para algum t , $Z(t)$ é compacto, então $\{Z(t)\}$ decaí exponencialmente.

O parâmetro r (satisfazendo (2.1.7)) é arbitrário; felizmente, entretanto, os valores próprios $\{\nu_j\}$ não dependem de r , e o mesmo é verdade para as funções próprias quando $|x| < r$. De fato, $v_j(x)$ para vários valores de $r \rightarrow +\infty$, convergem para uma função própria de Δ com valor próprio ν_j^2 (cf. (2.2.2) com $\sigma = -i\nu_j$). Estas funções próprias satisfazem (2.2.4) (com $\sigma = -i\nu_j$) e, portanto, não pertencem ao espaço de Hilbert $H_E(\Omega)$.

O resultado central da teoria de Lax-Phillips, [La-Ph1], é:

$$\begin{aligned} \nu_j \text{ é um valor próprio de } B \text{ se e somente se } \nu_j = i\lambda_j, \text{ onde } \lambda_j \text{ é um polo de } \mathcal{S}(z) \\ \text{(com a mesma multiplicidade).} \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Isto, combinado com (2.2.18) e (2.2.20), demonstra (2.1.5) e (2.1.6).

Para relacionar a eventual compacidade de $Z(t)$ com as propriedades geométricas de \mathcal{O} , introduzimos o seguinte conceito: começando em algum ponto x na esfera $|x| = r$, considere um raio (geodésica) numa direção interior ω ; se este raio encontra o obstáculo, reflita-o de acordo com a lei clássica de reflexão, (i) raio incidente, raio refletido e normal ao obstáculo no ponto de reflexão determinam um mesmo plano; ii) ângulo de incidência igual a ângulo de reflexão). Continuando este processo o raio (refletido) retornará eventualmente à esfera $|x| = r$. Seja $l(x, \omega)$ o seu comprimento total (possivelmente infinito) e seja $l(\mathcal{O})$ o supremo de $l(x, \omega)$ quando $|x| = r$ e $|\omega| = 1$. Claro que $l(\mathcal{O})$ pode ser infinito.

Definição 2.2.1. Chamamos \mathcal{O} confinante se $l(\mathcal{O}) = \infty$. Caso contrário \mathcal{O} é dito não-confinante.

Em outras palavras, \mathcal{O} é não-confinante se para todo $r > 0$ com $\mathcal{O} \subset B_r = \{x; |x| \leq r\}$, existe um número $T(r) > 0$ tal que nenhuma *geodésica generalizada* de comprimento maior ou igual a $T(r)$ está contida em $\Omega \cap B_r$. Lax-Phillips (cf. pag. 155 em [La-Ph1]) conjecturaram que se $l(\mathcal{O}) < \infty$, então $Z(t)$ é um operador compacto para todo $t > l(\mathcal{O}) + 12r$ e que, por outro lado, se $l(\mathcal{O}) = \infty$, então $\|Z(t)\|_E = 1$ para todo t . Ralston, [Ra1], mostrou num caso especial importante de obstáculo confinante, que $Z(t)$ não é jamais compacto qualquer que seja t . Na direção oposta, Ludwig e Morawetz, [Lu-Mo], e Phillips, [Phi], mostraram que se \mathcal{O} é convexo então $Z(t)$ é eventualmente compacto.

§ 2.3 Fórmulas de Traço

Por analogia com o problema interior (cf. Parágrafo 1.3) deveríamos considerar o operador $\int_{\mathbb{R}} \rho(t) \cos t \sqrt{-\Delta} dt$, onde $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $\Delta = \Delta_D$ é a extensão auto-adjunta do Laplaceano no domínio exterior Ω , submetido à condição de Dirichlet sobre $\partial\Omega$. Acontece que este operador não é nuclear (ou seja não possui traço). No entanto, se estendermos operadores em $L^2(\Omega)$ como zero em $L^2(\mathbb{R}^n - \Omega)$, temos:

Teorema 2.3.1. *O operador $\int_{\mathbb{R}} \rho(t) (\cos t \sqrt{-\Delta} - \cos t \sqrt{-\Delta_0}) dt$ é nuclear em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Tr} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t) (\cos t \sqrt{-\Delta} - \cos t \sqrt{-\Delta_0}) dt \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{\rho}}{d\sigma}(\sigma) s(\sigma) d\sigma \quad (2.3.1)$$

onde $s(-\sigma) = -s(\sigma)$, $s(\sigma)$ sendo a fase de espalhamento (cf. (2.2.13)), e $\hat{\rho}(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma t} \rho(t) dt$ é a transformada de Fourier.

Demonstração: Este teorema é uma consequência da teoria de Krein, [Kr1], [Kr2], [Bi-Kr], sobre o "spectral shift". Daremos aqui uma prova intuitiva devido a Buslaev, [Bu1]. As funções $\varphi_+(\cdot, \omega; \sigma)$ (cf. Parágrafo 2.2) formam um conjunto completo de funções próprias generalizadas do Laplaceano em Ω (cf. [Sh-Th]). Portanto, se $\psi(\sigma) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, o operador $\psi(\Delta)$,

no cálculo funcional de Δ , tem núcleo

$$(2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} d\omega \int_{\mathbb{R}^+} \varphi_+(x, \omega, \sigma) \psi(-\sigma^2) \bar{\varphi}_+(y, \omega, \sigma) \sigma^{n-1} d\sigma. \quad (2.3.2)$$

Assim, assumindo que $\psi(A) - \psi(\Delta_0)$ é nuclear e calculando seu traço como a integral de seu núcleo restrito à diagonal, temos

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\psi(\Delta) - \psi(\Delta_0)) &= \lim_{R \rightarrow \infty} (2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} d\omega \\ &\int_{\mathbb{R}^+} \psi(-\sigma^2) \sigma^{n-1} d\sigma \int_{|x| \leq R} (|\varphi_+(x, \omega, \sigma)|^2 - 1) dx, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

onde $\varphi_+ \equiv 0$ no complemento de Ω . Diferenciando $\Delta\varphi_+ + \sigma^2\varphi_+ = 0$ em relação a σ , têm-se $(\Delta + \sigma^2) \frac{\partial \varphi_+}{\partial \sigma} = -2\sigma\varphi_+$ que substituída em (2.3.3) e após utilização da fórmula de Green, fornece

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\psi(\Delta) - \psi(\Delta_0)) &= \lim_{R \rightarrow \infty} (2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} d\omega \int_{\mathbb{R}^+} \psi(-\sigma^2) \sigma^{n-2} d\sigma \\ &\int_{|x|=R} -\frac{1}{2} \left[\frac{2\sigma|x|}{n} + \varphi_+ \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial|x|\partial\sigma} - \frac{\partial \bar{\varphi}_+}{\partial|x|} \frac{\partial \varphi_+}{\partial\sigma} \right] dS. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Neste ponto é claro que $\text{Tr}(\psi(\Delta) - \psi(\Delta_0))$ depende somente do comportamento assintótico de φ_+ quando $|x| \rightarrow \infty$. Substituindo a forma assintótica de φ_+ e usando fase estacionária, obtém-se, depois de certo cálculo e para $n > 1$:

$$\text{Tr}(\psi(\Delta) - \psi(\Delta_0)) = - \int_0^{+\infty} \psi(-\sigma^2) \frac{ds}{d\sigma}(\sigma) d\sigma. \quad (2.3.5)$$

Aplicando (2.3.5) com $\psi(\sigma) = \hat{\rho}(\sqrt{-\sigma}) + \hat{\rho}(-\sqrt{-\sigma})$ chega-se ao resultado (2.3.1), pelo menos formalmente. Entretanto para se ter uma demonstração rigorosa, deve-se conhecer o comportamento de $s(\sigma)$ quando $\sigma \rightarrow \infty$. A vantagem da teoria de Krein é que ela sobrepassa esta dificuldade: se se sabe que (cf. Observação 2.3.1)

$$(I - \Delta)^{-\frac{n}{2}-\epsilon} - (I - \Delta_0)^{-\frac{n}{2}-\epsilon} \quad (2.3.6)$$

é nuclear, segue que (2.3.1) é válido e

$$\int_0^{+\infty} |s(\sigma)\sigma|(1+\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1-\epsilon} d\sigma < \infty. \quad (2.3.7)$$

Observação 2.3.1. O operador $e^{t\Delta}$ também não é nuclear. No entanto, se tomarmos $\psi(\sigma) = e^{\sigma t}$ em (2.3.5), prova-se igualmente que (cf. [Je-Ka])

$$\text{Tr}(e^{t\Delta} - e^{t\Delta_0}) = t \int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} s(\sqrt{\sigma}) d\sigma. \quad (2.3.8)$$

Para utilizar os resultados de Lax-Phillips do parágrafo anterior necessitamos passar de $L^2(\mathbb{R}^n)$ a $H_E(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.3.2. O operador $C = \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))dt$, onde $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, é nuclear em $H_E(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{H_E(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))dt \right) &= \\ &= \text{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left(2 \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(\cos t\sqrt{-\Delta} - \cos t\sqrt{-\Delta_0})dt \right). \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Demonstração: Suponha que o suporte de ρ esteja contido no intervalo $(-T, T)$, $T > 0$. Seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) = 1$ se $|x| < T + r$ e $\psi(x) = 0$ quando $|x| > T + 2r$, onde r é definido em (2.1.7). Usando o fato que a energia se propaga com velocidade finita igual a um, temos para todo $h \in H_E(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))h dt = \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))\psi h dt. \quad (2.3.10)$$

Da mesma maneira, para $|x| > 2T + 2r$,

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U_0(t)\psi h)(x)dt = 0. \quad (2.3.11)$$

Por outro lado, escrevendo $h = \{h_1, h_2\}$, obtemos para $|x| > 2T + 2r$

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t)\psi h)(x)dt = \int_{\mathbb{R}} \rho(t)dt \{u(x), 0\}, \quad (2.3.12)$$

onde u é a única função que satisfaz

$$\begin{aligned} u(x) &= \psi(x)h_1(x) \quad \text{sobre} \quad 2\Omega \\ \Delta u &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

O significado de (2.3.13) é que se P é o projetor ortogonal de $H_E(\mathbb{R}^n)$ sobre $H_E(\Omega)$, então

$$P(\{h_1, h_2\}) = \{h_1 - u, \chi_\Omega h_2\},$$

onde χ_Ω é a função característica de Ω .

Seja agora $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi(x) = 1$ se $|x| < 2T + 2r$ e $\varphi(x) = 0$ se $|x| > 2T + 3r$.

Têm-se então

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))h dt = \int_{\mathbb{R}} \rho(t)\varphi(U(t) - U_0(t))\psi h dt + \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t)dt \right) (1 - \varphi)\{u, 0\}. \quad (2.3.14)$$

Chamemos $A : H_E(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_E(\mathbb{R}^n)$, o operador

$$h \rightarrow (1 - \varphi) \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t)dt \right) \{u, 0\}. \quad (2.3.15)$$

A expressão (2.3.14) pode ser reescrita na forma

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t)) dt = \varphi \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))\psi dt + A. \quad (2.3.16)$$

Não é difícil mostrar (cf. [Ba-Gu-Ra], Lema 1 e Lema 2) que cada um dos operadores no membro direito de (2.3.16) é nuclear de $H_E(\mathbb{R}^n)$ em si próprio, o que demonstra a primeira parte do Teorema 2.3.2. Para obter (2.3.9) começamos provando que

$$\text{Tr} A = 0. \quad (2.3.17)$$

Para isto, consideramos uma base ortonormal $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ de $H_E(\Omega)$ visto como subespaço fechado de $H_E(\mathbb{R}^n)$. Seja $(\tilde{\alpha}_k)_{k \geq 1}$ uma base ortonormal de $H_E(\mathbb{R}^n) \ominus H_E(\Omega)$. Denotamos por $(a_k)_{k \geq 1}$ a base ortonormal de $H_E(\mathbb{R}^n)$, reunião de $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ e $(\tilde{\alpha}_k)_{k \geq 1}$. Como A é um operador nuclear, é suficiente mostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} (Aa_k, a_k)_{H_E(\mathbb{R}^n)} = 0$. Por definição do operador A têm-se $A\alpha_k = 0$ para todo k e $A\tilde{\alpha}_k \in H_E(\Omega)$ para todo k . Portanto $(Aa_k, a_k) = 0$ para todo k , o que demonstra (2.3.17) (o leitor não familiarizado com as noções de traço de um operador nuclear deve consultar o livro de Reed-Simon, [Re-Si]).

Temos pois, de acordo com (2.3.16) e (2.3.17):

$$\text{Tr} C = \text{Tr} \varphi \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))\psi dt. \quad (2.3.18)$$

Seja agora $\Omega_{r_0} = \Omega \cap B(0, r_0)$ com $r_0 = 3r + 2T$. Seja $(\beta_k)_{k \geq 1}$ uma base ortonormal de $L^2(\Omega_{r_0})$ constituída por funções próprias do Laplaceano em Ω_{r_0} com a condição de Dirichlet sobre a fronteira $\partial\Omega_{r_0}$. Seja $0 \geq \chi_1 \geq \chi_2 \geq \dots \geq \chi_n \geq \dots$ o correspondente espectro do Laplaceano. A reunião de $(\{(-\chi_k)^{-1/2}\beta_k, 0\})_{k \geq 1}$ e $(\{0, \beta_k\})_{k \geq 1}$ é uma base ortonormal de $H_E(\Omega_{r_0})$. Seja $(\tilde{\beta}_k)_{k \geq 1}$ uma base ortonormal de $H_E(\mathbb{R}^n) \ominus H_E(\Omega_{r_0})$. Denotamos por $(b_k)_{k \geq 1}$ a base ortonormal de $H_E(\mathbb{R}^n)$, reunião de $(\beta_k)_{k \geq 1}$ e $(\tilde{\beta}_k)_{k \geq 1}$. Como $(\tilde{\beta}_j, f)_{H_E(\mathbb{R}^n)} = 0$ para todo $f \in H_E(\Omega_{r_0})$ e todo j , obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(\varphi U(t)\psi \tilde{\beta}_k) dt = 0, \quad k \geq 1 \quad (2.3.19)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi U(t) \psi \, dt &= \sum_{k=1}^{\infty} (-\chi_k)^{-1} \int \left(\int_{\Omega_{r_0}} \nabla \beta_k \cdot \nabla [\varphi e^{tG} \{\psi \beta_k, 0\}]_1 \, dx \right) \rho(t) \, dt \\ &+ \int \left(\int_{\Omega_{r_0}} \beta_k [\varphi e^{tG} \{0, \psi \beta_k\}]_2 \, dx \right) \rho(t) \, dt \end{aligned}$$

onde G é definido em (2.2.16). Integrando por partes o primeiro termo e observando que:

$$[U(t)\{0, \psi \beta_k\}]_2 = [U(t)\{\psi \beta_k, 0\}]_1, \quad (2.3.20)$$

obtem-se finalmente:

$$\text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi U(t) \psi \, dt = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \int \left(\int_{\Omega_{r_0}} \beta_k \varphi (\cos[t\sqrt{-\Delta}] \psi \beta_k) \, dx \right) \rho(t) \, dt. \quad (2.3.21)$$

Se se estende (como sempre) operadores em $L^2(\Omega)$ como zero em $L^2(\mathbb{R}^n - \Omega)$, e se utiliza o Lema 1 de [Ba-Gu-Ra] para mostrar que $\int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi \cos[t\sqrt{-\Delta}] \psi \, dt$ é um operador nuclear em $L^2(\mathbb{R}^n)$, a expressão (2.3.21) fornece

$$\text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi U(t) \psi \, dt = 2 \text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi \cos[t\sqrt{-\Delta}] \psi \, dt. \quad (2.3.22)$$

Da mesma maneira, têm-se:

$$\text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi U_0(t) \psi \, dt = 2 \text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi \cos[t\sqrt{-\Delta_0}] \psi \, dt. \quad (2.3.23)$$

Repetindo o argumento baseado na propagação da energia com velocidade finita, feito anteriormente pode-se obter facilmente

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(t) (\cos t\sqrt{-\Delta} - \cos t\sqrt{-\Delta_0}) \, dt = \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi (\cos t\sqrt{-\Delta} - \cos t\sqrt{-\Delta_0}) \psi \, dt \quad (2.3.24)$$

que, juntamente com (2.3.16), (2.3.17), (2.3.22) e (2.3.23), acabam a demonstração de (2.3.9) e do Teorema 2.3.2.

Suponha agora que $\rho \in C_0^\infty(2r, \infty)$ (cf. (2.1.7)). Segue então que

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))f dt = 0 \quad \underline{\text{se}} \quad f \in D_+^r \quad (2.3.25)$$

e

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))dt \right)^* f = \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(-t) - U_0(-t))f dt = 0 \quad \underline{\text{se}} \quad f \in D_-^r. \quad (2.3.26)$$

Assim,

$$\text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))dt = \text{Tr} P_-^r \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))dt P_+^r. \quad (2.3.27)$$

Quando n é ímpar, P_+^r e P_-^r comutam (cf. [La-Ph1], Capítulo IV) e usando o fato que $\text{Tr} AB = \text{Tr} BA$, temos

$$\text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))dt = \text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(P_+^r U(t) P_-^r - P_+^r U_0(t) P_-^r) dt. \quad (2.3.28)$$

Como $P_+^r U_0(t) P_-^r \equiv 0$ se $t > 2r$, obtemos

$$\text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))dt = \text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t)Z(t)dt, \quad (2.3.29)$$

onde $Z(t)$, definido em (2.2.17), é o semigrupo de Lax-Phillips. Como $\int_{\mathbb{R}} \rho(t)Z(t)dt$ é um operador compacto que comuta com $Z(t)$, segue que seus (diferentes de zero) valores próprios são (com a mesma multiplicidade) $\sqrt{2\pi}\hat{\rho}(\lambda_j)$ (cf. (2.2.21)). Assim pelo teorema de Lidskii, [Ri],

$$\text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t)Z(t)dt = \sum_j \sqrt{2\pi}\hat{\rho}(\lambda_j). \quad (2.3.30)$$

Combinando (2.3.1), (2.3.9), (2.3.29) e (2.3.30), demonstramos o seguinte teorema

Teorema 2.3.3: *Seja $n \geq 3$, ímpar. Para todo $\rho \in C_0^\infty(2r, \infty)$, $\int_{\mathbb{R}} \rho(t)Z(t)dt$ é um operador nuclear e*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} Tr \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t) (\cos t\sqrt{-\Delta} - \cos t\sqrt{-\Delta_0}) dt \right) = \frac{1}{2} \sum_j \hat{\rho}(\lambda_j). \quad (2.3.31)$$

Adiante vamos necessitar do seguinte corolário:

Corolário 2.3.1: *Os pólos de $\mathcal{S}(z)$ satisfazem à seguinte condição:*

$$\sum_{j \geq 1} \frac{e^{-2rIm\lambda_j}}{|\lambda_j|^{n+2}} < \infty. \quad (2.3.32)$$

Demonstração: Da prova que o operador $C = \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U(t) - U_0(t))dt$ é nuclear e de (2.3.9), segue que :

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} \rho(t) (\cos t\sqrt{-\Delta} - \cos t\sqrt{-\Delta_0}) dt \right\|_{Tr} \leq const. \|\rho\|_{n+1} \quad (2.3.33)$$

onde $\|\cdot\|_{Tr}$ é a norma traço de um operador nuclear e $\|\cdot\|_{n+1}$ é a norma de Sobolev em $H_0^{n+1}(2R, T)$. Usa-se então (2.3.31) com $\hat{\rho}$ igual a

$$\hat{\rho}_a(\xi) = e^{-2ir\xi} e^{-ia(n+2)\xi} \left(\frac{2sen a\xi}{\xi} \right)^{n+2}. \quad (2.3.34)$$

Como a norma do traço domina a soma dos módulos dos valores próprios, conclue-se que

$$\sum_{\text{pólos}} |\hat{\rho}_a(\bar{\lambda}_j)| < const., \quad (2.3.35)$$

uniformemente para $1 \leq a \leq 2$. Integrando (2.3.35) de 1 a 2 em a , obtemos (2.3.32).

Observação 2.3.2: Melrose, [Me3], mostrou (2.3.31) para todo $\rho \in C_0^\infty(0, \infty)$.

§ 2.4 Relação de Poisson

A expressão (2.3.31) diz que a distribuição em $\mathcal{D}(2r, \infty)$

$$\langle \lambda, \rho \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Tr \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t) (\cos t\sqrt{-\Delta} - \cos t\sqrt{-\Delta_0}) dt \right) \quad (2.4.1)$$

é igual a

$$\lambda(t) = \sum_{\text{pólos}} e^{i\lambda_j t}$$

onde a soma é interpretada no sentido de distribuições. Esta identidade corresponde ao primeiro passo na derivação da relação e fórmula de Poisson no caso do problema interior (cf. Parágrafo 1.3). Na verdade, após uma redução simples, a prova da relação de Poisson aqui, é precisamente aquela usada para o problema interior. Com efeito, para estudar as singularidades de λ em $(2r, T)$, é suficiente supor que $\rho \in C_0^\infty(2r, T)$. Como $\cos t\sqrt{-\Delta}$ é a solução fundamental do problema misto (2.1.4) com condições iniciais $u(0) = f, u_t(0) = 0$, segue de argumentos usuais sobre o domínio de dependência que, se $\psi, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ são tais que

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > r + T + 1 \\ 1 & \text{se } |x| < r + T \end{cases} \quad (2.4.3)$$

e

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > r + 2T + 2 \\ 1 & \text{se } |x| < r + 2T + 1, \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \rho(t) (\cos t\sqrt{-\Delta} - \cos t\sqrt{-\Delta_0}) dt = \\ & = \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi \cos t\sqrt{-\Delta} \psi dt - \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi \cos t\sqrt{-\Delta_0} \psi dt. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Os dois operadores no lado direito de (2.4.4) são nucleares, e, pelo princípio de Huyghens, o núcleo C^∞ de $\int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi \cos t\sqrt{-\Delta_0} \psi dt$ se anula vizinhança da diagonal. De fato, operador $\int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi \cos t\sqrt{-\Delta} \psi dt$ se escreve explicitamente na forma:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi \cos t\sqrt{-\Delta_0} \psi dt \right) u(x) = \int \int \int \rho(t) \varphi(x) \cos t|\xi| e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \psi(y) u(y) dy d\xi dt .$$

Seu núcleo é:

$$\int \int \rho(t) \varphi(x) \cos t|\xi| e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \psi(y) d\xi dt ,$$

e seu traço se calcula explicitamente pela fórmula:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi \cos t\sqrt{-\Delta_0} \psi dt \right) &= \int \varphi(x) \psi(x) dx \int \int \cos t|\xi| |\rho(t)| d\xi dt \\ &= c_n \left(\int \varphi(x) \psi(x) dx \right) \rho^{(n-1)}(0) = 0 . \end{aligned}$$

Assim para todo $\rho \in C_0^\infty(2r, T)$,

$$\text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t) (\cos t\sqrt{-\Delta} - \cos t\sqrt{-\Delta_0}) dt = \text{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \varphi \cos t\sqrt{-\Delta} \psi dt . \quad (2.4.5)$$

Os argumentos de Andersson–Melrose (cf. [An–Me], Proposição 8.20) podem então ser aplicados diretamente ao lado direito de (2.4.5), fornecendo o

Teorema 2.4.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ímpar, uma região exterior tal que $\partial\Omega$ possui contacto de ordem finita com todos segmentos de reta tangentes. Então a distribuição $\lambda(t) = \sum \text{pólos } e^{i\lambda_j t} \in \mathcal{D}'(2r, \infty)$, satisfaz*

$$\text{supp.sing } \lambda \subset \mathcal{L}_\Omega , \quad (2.4.6)$$

onde \mathcal{L}_Ω é o conjunto dos comprimentos dos raios (geodésicas) generalizados periódicos contidos em Ω .

De fato, o resultado é imediato se o obstáculo é convexo pois então a hipótese (8.6) de [An-Me] é satisfeita. É fácil ver, no entanto, que a demonstração de [An-Me] se adapta diretamente ao caso em que Ω é o complementar de uma união finita de convexos limitados (devido a ausência de raios “deslizantes” sobre a fronteira). Para tratar o caso mais geral de contactos de ordem superior, porém finitos, entre o raio e a fronteira, utiliza-se uma generalização das Proposições 8.17 e 8.20 de [An-Me], levando-se em consideração os resultados de Melrose-Sjöstrand, [Me-Sj].

Vamos agora examinar o que pode ser considerado o análogo à relação de Poisson para o caso de raios não-confinantes γ , denominados raios (ω, θ) , $\omega, \theta \in S^{n-1}$, $\omega \neq \theta$. Estes raios consistem de dois segmentos não limitados e um número finito de segmentos lineares que se refletem sobre $\partial\Omega$ de acordo com a lei de ótica geométrica. Mais precisamente, seja $\gamma = \bigcup_{i=0}^k l_i$ uma curva em \mathbb{R}^n , tal que $l_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, k-1$ ($k \geq 1$), são segmentos finitos, onde $x_i \in \partial\Omega$ são os pontos de reflexão sobre o obstáculo, enquanto $l_0(l_k)$ é um segmento infinito iniciando em x_1 (respect. em x_k) tendo direção $-\omega$ (respect. θ). Então γ é chamado um raio (ω, θ) se as seguintes condições são verificadas:

$$\text{os segmentos abertos } \overset{\circ}{l}_i, i = 0, 1, \dots, k, \text{ não intersectam } \partial\Omega \text{ transversalmente} \quad (2.4.7)$$

$$\begin{aligned} &\text{para todo } i = 0, 1, \dots, k-1, \text{ os segmentos } l_i \text{ e } l_{i+1} \\ &\text{satisfazem a lei de reflexão em } x_{i+1}. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Um raio (ω, θ) é chamado *ordinário* se ele não possui segmentos tangentes a $\partial\Omega$. Para raios (ω, θ) ordinários, γ , podemos introduzir os números T_γ e J_γ , conhecidos na literatura de física como o *tempo de permanência* (sojourn time) e a *secção transversal diferencial* (differential cross section) respectivamente (cf. [Gu3], [Pe1]). O tempo de permanência é o análogo do período de geodésicas generalizadas periódicas ordinárias cujo comportamento, como vimos, é importante nas aplicações a vários problemas espectrais (cf. Capítulo 1, Teorema 2.4.1 e Parágrafo 2.6). Seja B_r uma bola aberta de raio $r > 0$ contendo o obstáculo

\mathcal{O} . Denote por α e β (chamados respectivamente, planos de incidência e de reflexão) os hiperplanos tangentes a B_r com vetores normais respectivamente $-\omega$ e θ , apontando para $\mathbb{R}^n \setminus B_r$ (Ver Fig.)

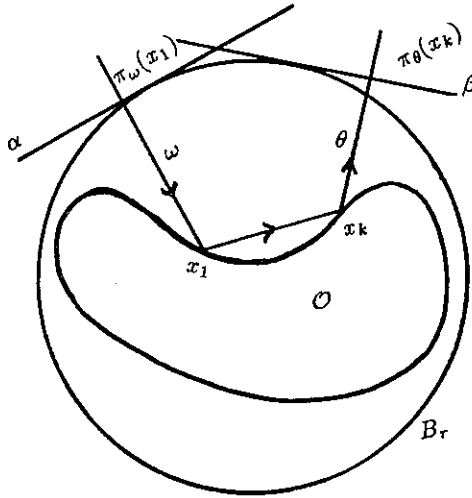


Fig.

Sejam π_ω e π_θ as projeções ortogonais de \mathbb{R}^n sobre α e β respectivamente. Considere um raio (ω, θ) ordinário tendo sucessivos pontos de reflexão $x_1, \dots, x_k, x_i \in \partial\mathcal{O}$.

O tempo de permanência T_γ de γ é o número

$$T_\gamma = \|\pi_\omega(x_1) - x_1\| + \sum_{i=1}^{k-1} \|x_{i+1} - x_i\| + \|x_k - \pi_\theta(x_k)\| - 2r. \quad (2.4.9)$$

É fácil ver que T_γ não depende de r . Considere agora a aplicação do plano de incidência α em S^{n-1} , que transforma o ponto $A \in \alpha$, próximo de $\pi_\omega(x_1)$, no ângulo de espalhamento,

$\theta(A)$, do único raio $(\omega, \theta(A))$ que passa por A . Esta aplicação $A \rightarrow \theta(A)$ é bem definida (para A próximo de $\pi_\omega(x_1)$) e diferenciável. Seu (determinante) Jacobiano no ponto $\pi_\omega(x_1)$ é, por definição, a secção transversal diferencial J_γ de γ . Diz-se que γ é não-degenerado se $J_\gamma \neq 0$. Isto é o análogo à noção de que uma geodésica generalizada periódica ordinária é não-degenerada, fato importante, como vimos na Observação 1.5.1, na investigação da fórmula de Poisson (cf. [Gu-Me]). Da definição segue que se γ é não-degenerada, então não existem raios próximos de γ , com a mesma direção de incidência e a mesma direção de espalhamento de γ . Portanto, se todos os raios com direção de incidência ω e direção de espalhamento θ são não-degenerados, só pode haver um número finito deles tendo um tempo de permanência T , prescrito.

Os raios (ω, θ) , por sua vez, estão intimamente relacionados com as singularidades do núcleo de espalhamento $S(t, \theta, \omega)$ e (portanto) com o comportamento assintótico da amplitude de espalhamento $a(\theta, \omega, \sigma)$, para frequências altas ($\sigma \rightarrow \infty$) (cf. Parágrafo 2.2, para as definições). Com efeito o seguinte resultado é válido:

Teorema 2.4.2. *Seja $n \geq 3$, ímpar, e suponha $\theta \neq \omega$. Então*

$$\text{supp.sing. } S(\cdot, \theta, \omega) \subset \bigcup_{\gamma \in \mathcal{L}_{\omega, \theta}} \{-T_\gamma\} \quad (2.4.10)$$

onde $\mathcal{L}_{\omega, \theta}$ é o conjunto de todos os raios (ω, θ) (i.e. com direção de incidência ω e direção de espalhamento θ) com reflexões sobre $\partial\mathcal{O}$.

Observe que, da definição de T_γ ,

$$-T_\gamma \leq \langle x_1, \theta - \omega \rangle \leq \max_{y \in \partial\mathcal{O}} \langle y, \theta - \omega \rangle \equiv h(\theta - \omega). \quad (2.4.11)$$

Portanto (2.4.10) está de acordo com o resultado que diz que para o problema de Dirichlet e $\theta \neq \omega$:

$$\max_t \text{supp.sing. } S(t, \theta, \omega) = h(\theta - \omega). \quad (2.4.12)$$

Quando $\theta = -\omega$, (2.4.12) foi obtido por Majda, [Ma], e, quando $\theta \neq \omega$ por Cooper-Strauss, [Co-St] (onde se considera o espalhamento por um *obstáculo móvel*), e Petkov, [Pe3] (tanto para o problema de Dirichlet como o de Neumann).

O problema inverso de espalhamento, relacionado com a singularidade de $S(\cdot, \theta, \omega)$ em $h(\theta - \omega)$, foi estudado por Majda, [Ma], Lax-Phillips, [La-Ph5], Cooper-Strauss, [Co-St], Cardoso-Petkov, [Ca-Pe].

A inclusão (2.4.10), é semelhante à relação de Poisson (cf. (1.3.33), (1.3.39) e (2.4.6)). Por esta razão $\{T_\gamma : \gamma \in \mathcal{L}_{\omega, \theta}\}$ é chamado o *espectro de comprimentos de espalhamento*, correspondente a ω, θ . A prova do Teorema 2.4.2 é um tanto difícil devido aos problemas decorrentes do aparecimento de raios deslizantes (glancing rays). A fim de evitá-los, Guillemin, [Gu3], provou o Teorema 2.4.2 no caso de meios onde há refração pois, então, tais raios não existem. Petkov, [Pe1], deu a demonstração completa do Teorema 2.4.2 usando a construção de uma parametriz global do problema misto para a equação da onda, devida a Chazarain, [Ch1], e Guillemin-Melrose, [Gu-Me].

§ 2.5 A Fase de Espalhamento (Fórmula de Weyl)

Começamos por descrever situações que mostram que a fase de espalhamento (cf. 2.2.13) desempenha para o problema de Dirichlet exterior o mesmo papel que a função contagem $N(\lambda) = \{\# \text{ valores próprios } \leq \lambda\}$ desempenha para o problema de Dirichlet interior. Com efeito, no Parágrafo 1.3, vimos ao estudar as propriedades espectrais assintóticas do Laplaceano num domínio interior, \mathcal{O} , que

$$\text{Tr}(e^{t\Delta}) = \sum_j e^{-\mu_j^2 t} \quad (2.5.1)$$

e (cf. (1.3.38))

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Tr} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t) \cos t\sqrt{-\Delta} dt \right) = \frac{1}{2} \sum_j \hat{\rho}(\pm\mu_j), \quad \rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad (2.5.2)$$

onde μ_j^2 são os valores próprios de $-\Delta$ em \mathcal{O} , repetidos de acordo com sua multiplicidade. Podemos reescrever estas fórmulas da seguinte maneira:

$$\text{Tr}(e^{t\Delta}) = t \int_0^\infty e^{-\sigma t} N(\sqrt{\sigma}) d\sigma \quad (2.5.1)'$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Tr} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(t) \cos t\sqrt{-\Delta} dt \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{\rho}}{d\sigma}(\sigma) N(\sigma) d\sigma, \quad (2.5.2)'$$

onde se $\lambda < 0$, colocamos $N(\lambda) = -N(-\lambda)$. Vemos pois que (2.5.1)' e (2.5.2)' são análogas, respectivamente, a (2.3.8) e (2.3.1), estabelecidas para o problema de Dirichlet exterior.

Nosso objetivo agora é formular o análogo do Teorema de Weyl (cf. Parágrafo 1.6) para a fase de espalhamento. O primeiro resultado sobre o comportamento assintótico de $s(\sigma)$, quando $\sigma \rightarrow \infty$, relativo ao problema de Dirichlet no exterior de um obtáculo estritamente convexo, foi anunciado por Buslaev, [Bu2]. Em seguida, o mesmo problema foi estudado (sempre com n ímpar) numa serie de três artigos, por Majda e Ralston, [Ma-Ra], que utilizaram técnicas ligadas às fórmulas de traço (cf. Parágrafo 2.3) e também os importantes progressos feitos por Melrose, [Me2], na investigação do “peak” de difração posterior (forward diffraction peak), $a(\theta, \theta, \sigma)$ (cf. (2.2.4)), para obstáculos estritamente convexos; eles acharam os três primeiros termos na fórmula assintótica de $s(\sigma)$. No caso de obstáculos não convexos, os primeiros e mais conhecidos resultados são de Jensen e Kato, [Je-Ka], para obstáculos estrelados. Neste artigo, os autores se basearam nas fórmulas de traço e no fato que se \mathcal{O} é estrelado, $s(\sigma)$ é uma função monótona; isto lhes permitiu usar um teorema Tauberiano de G. Freud, para obter o primeiro termo na fórmula assintótica de $s(\sigma)$. Entretanto, para domínios com um geometria mais complicada não se sabe se $s(\sigma)$ é monótona (cf. [Ka]) o que dificultou a extensão do método de [Je-Ka] a situações mais gerais. Finalmente, Petkov e Popov, [Pe-Po], demonstraram que a fórmula assintótica de [Ma-Ra] pode ser estendida a qualquer obstáculo não-confinante, $n \geq 3$, com condições quer de Dirichlet, quer de Neumann, quer dissipativas sobre a fronteira. A análise deles é baseada numa investigação precisa

da transformada de Fourier $\hat{s}(t)$ de $s(\sigma)$. Para estudar $\hat{s}(t)$ quando $|t| \rightarrow \infty$, eles utilizaram alguns resultados sobre o núcleo do operador de espalhamento, enquanto no exame de $\hat{s}(t)$, t próximo a zero, eles aplicaram as técnicas de perturbação, desenvolvidas por Ivrii, [Iv], para estabelecer (1.6.28). Aqui, neste texto, nos limitaremos a dar um idéia da prova de Majda-Ralston, [Ma-Ra], aludida acima. O ponto de partida é a fórmula (2.3.8). O comportamento assintótico de $\text{Tr}(e^{t\Delta} - e^{t\Delta_0})$ quando $t \rightarrow 0_+$, em potências crescentes de t , é obtido dos resultados sobre o núcleo do operador do calor, contidos nos artigos de Pleyel, Minakshisundaram e McKean-Singer (cf. [Mc-Si]). Portanto, se se sabe que $s(\sigma)$ possui uma expansão assintótica quando $\sigma \rightarrow \infty$, e se iguala os coeficientes dos dois membros de (2.3.8), pode-se mostrar que (lembre-se que estamos considerando o problema de Dirichlet no exterior de um obstáculo estritamente convexo e $n \geq 3$)

$$s(\sigma) = \frac{(4\pi)^{-n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \text{vol}(\mathcal{O})\sigma^n - \frac{(4\pi)^{-(n-1)/2}}{4\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} \text{vol}(\partial\mathcal{O})\sigma^{n-1} \quad (2.5.3)$$

$$- \frac{(4\pi)^{-n/2}}{6\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\int_{\partial\mathcal{O}} H(x) dS_x \right) \sigma^{n-2} + o(\sigma^{n-3}), \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

onde $H(x)$ denota a curvatura média em $x \in \partial\mathcal{O}$ e dS_x é a medida de Lebesgue em $\partial\mathcal{O}$. A grande dificuldade, no entanto, é provar que $s(\sigma)$ tem tal expansão assintótica. No caso em que $\bar{\mathcal{O}}$ é estritamente convexo, Melrose, [Me2], usando técnicas hiperbólicas, obteve:

$$\frac{ds}{d\sigma} = \sum_{i=1}^{j-1} \sigma^{n_i} (a_i + b_i \log \sigma) + O(\sigma^{n_j} \log \sigma), \quad (2.5.4)$$

onde $n_i \searrow -\infty$. Na verdade, ao invés de $s(\sigma)$, Melrose considerou o “peak” de difração posterior, $a(\theta, \theta, \sigma)$. Descreveremos a relação entre estes dois problemas. Da identidade (cf. [Go-Kr]):

$$\frac{d}{d\sigma} \log \det \mathcal{S}(\sigma) = \text{Tr} \left(\mathcal{S}^* \frac{d\mathcal{S}}{d\sigma} \right) = -\text{Tr} \left(\mathcal{S} \frac{d\mathcal{S}^*}{d\sigma} \right) \quad (2.5.5)$$

e de manipulações típicas com a fórmula de Green (cf. [He-Ra], Addendum) obtém-se a seguinte expressão para o núcleo de $-\mathcal{S} \frac{d\mathcal{S}^*}{d\sigma}$:

$$\frac{i}{8\pi^2} \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{n-3} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi_+}{\partial\nu}(-\theta) \frac{\partial\bar{\varphi}_+}{\partial\nu}(-\omega) \langle x, \nu \rangle dS, \quad (2.5.6)$$

onde ν é a normal exterior a \mathcal{O} e φ_+ é definida no Parágrafo 2.2. Assim temos

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{16\pi^3} \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{n-3} \int_{|\theta|=1} d\theta \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial\varphi_+}{\partial\nu}(x, \theta, \sigma) \right|^2 \langle x \cdot \nu \rangle dS. \quad (2.5.7)$$

Por outro lado (cf. [Ma], [Ma-Ta], [Me2]), mostra-se que

$$a(\theta, \theta, \sigma) = \frac{i}{4\pi} \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{n-2} \int_{\partial\Omega} e^{i\sigma\langle x, \theta \rangle} \frac{\partial\varphi_+}{\partial\nu}(x, \theta, \sigma) dS. \quad (2.5.8)$$

Os métodos de [Me2] servem, de fato, para provar que dada qualquer forma quadrática Hermitiana Q em $e^{-i\sigma\langle x, \theta \rangle}$, $\varphi_+(x, \theta, \sigma)$ e suas derivadas em x , então

$$\int_{\partial\Omega} Q dS \quad (2.5.9)$$

tem uma expansão da forma (2.5.4). Ademais, esta expansão é uniforme em θ , o que implica que $\frac{ds}{d\sigma}$ tem também uma expansão da forma (2.5.4). Uma consequência de (2.5.4), se se compara as expansões, quando $t \rightarrow 0_+$, aludidas acima, é que todos os n_i em (2.5.4) são inteiros, os n_i negativos são pares, e não existem termos logarítmicos, ou seja $b_i \equiv 0$ para todo i . Finalmente observamos que, recentemente, Melrose, [Me4], mostrou que (se n é ímpar) sob a hipótese de Ivrii (cf. (1.6.27)) o erro em (2.5.3) pode ser melhorado, isto é

$$s(\sigma) = \frac{(4\pi)^{-n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \text{vol}(\mathcal{O}) \sigma^n - \frac{(4\pi)^{-(n-1)/2}}{4\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} \text{vol}(\partial\mathcal{O}) \sigma^{n-1} + o(\sigma^{n-1}), \text{ quando } \sigma \rightarrow \infty. \quad (2.5.10)$$

Observação 2.5.1. Melrose, [Me3], estabeleceu o seguinte resultado:

$$\exists N, M \quad \text{tal que} \quad \forall R, \quad \#\{\lambda_j : |\lambda_j| \leq R\} \leq M(R+1)^N. \quad (2.5.11)$$

que, apesar de insatisfatório em vários aspectos, pode ser interpretado (também) como “correspondente” à fórmula de Weyl (cf. Parágrafo 1.6).

§ 2.6 Localização dos Pólos da Matriz de Espalhamento

Como no caso do problema interior (cf. Parágrafo 1.5), podemos calcular as contribuições às singularidades de λ (cf. (2.4.2)), feitas pelos raios generalizados ordinários periódicos contidos em Ω . Acontece que (diferentemente do problema interior onde existem “muitos” raios periódicos e o espectro de comprimentos, além de não ser discreto, comporta-se de forma irregular, quando $t \rightarrow \infty$) o problema exterior é, algumas vezes, tão bem comportado que é possível usar a fórmula de Poisson para obter novas informações sobre a localização dos pólos. Para ilustrar este fato, vamos examinar a situação mais simples possível (cf. [Ba-Gu-Ra], [Ik2], [Ik5]) na qual aparecem raios periódicos (raios confinantes): ou seja, consideremos o domínio exterior, Ω , formado pela remoção de dois conjuntos estritamente convexos limitados disjuntos, \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 , de \mathbb{R}^n . Neste exemplo existe um único raio confinante L e o conjunto dos comprimentos de raios periódicos é então:

$$\{2md : m \in \mathbb{Z}^+\} \quad \text{onde} \quad d = \text{dist}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2). \quad (2.6.1)$$

Como a bicaracterística refletida, L , possui índice de Maslov nulo, deduz-se então de [Gu-Me], a fórmula de Poisson. (cf. Observação 1.5.1):

$$\sum_{\text{pólos}} e^{i\lambda_j t} = 2d \sum_{m \geq 1} |\det(P^m - 1)|^{-1/2} \delta(t - 2md) + h(t), \quad (2.6.2)$$

onde P é a aplicação de Poincaré associada a L , δ é a medida de Dirac na origem, e $h(t) \in \mathcal{L}_{loc}^2$. Esta fórmula é válida para $t > 2r$ (cf. (2.1.7)) e sob a condição que se tenha mostrado que

L é não-degenerada (hiperbólica), isto é, $\underline{\text{um}}$ não é valor próprio de P . Na verdade, neste exemplo (cf. [Ba-Gu-Ra]) todos os valores próprios de P são reais positivos, diferentes de um e ocorrem em pares recíprocos uma vez que P é (sempre) simplética. Denotemos os valores próprios de P menores do que $\underline{\text{um}}$ por $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ ($0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{n-1} < 1$).

A demonstração de (2.6.2) baseia-se (cf. (2.4.1), (2.4.2) e (2.4.5)) na construção de uma parametriz de $\cos t\sqrt{-\Delta}$, numa vizinhança microlocal de L , ou seja, no estudo da singularidade da distribuição

$$\text{Tr} \rho_T \cos t\sqrt{-\Delta} \rho_T, \quad \rho_T \equiv 1 \text{ numa vizinhança de } L,$$

para $t > 2r$, e no cálculo da singularidade da distribuição escrita formalmente

$$\int \rho_T^2(x) k(x, x, t) dx$$

onde $k(x, y, t)$ é o núcleo de tal parametriz numa vizinhança cônica de $(x_0 + s\xi_0, \xi_0, x_0 + s\xi_0, -\xi_0, 2md)$.

Podemos reescrever (2.6.2) na forma:

$$\left(\sum_{\text{pólos}} e^{i\lambda_j t} \right) - h(t) = \sum_{(m_0, m) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}_+^{n-1}} e^{[2\pi i m_0 + (\frac{1}{2} + m_1)\beta_1 + \dots + (\frac{1}{2} + m_{n-1})\beta_{n-1}] \frac{t}{2i}}, \quad (2.6.3)$$

onde $\beta_j = \log \alpha_j$. Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} |\det(P^m - 1)|^{-1/2} &= \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j^{m/2}}{1 - \alpha_j^m} = \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha_j^{m/2}} - \frac{1}{1 + \alpha_j^{m/2}} \right) = \prod_{j=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_j^{m(1/2+k)}. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Ademais, a fórmula clássica de Poisson diz que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2ik\pi t/2d} = 2d \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2kd). \quad (2.6.5)$$

De (2.6.4) e (2.6.5) obtemos facilmente (2.6.3).

Introduzimos a notação :

$$\begin{aligned} \nu_0 &= -\frac{1}{4d}(\beta_1 + \dots + \beta_{n-1}) \\ \vec{\beta} &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \\ \vec{m} &= (m_1, m_2, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ \alpha_{m_0, \vec{m}} &= \frac{\pi}{d}m_0 + i(\nu_0 - \langle \vec{m}, \frac{\vec{\beta}}{2d} \rangle). \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Definição 2.6.1. Para todo $(m_0, \vec{m}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{n-1}$, $\alpha_{m_0, \vec{m}}$ é chamado um pseudopólo do problema exterior considerado.

Têm-se obviamente

$$\operatorname{Im} \alpha_{m_0, \vec{m}} \geq \nu_0 > 0.$$

A expressão (2.6.2) toma então a forma:

$$\sum_{\text{pólos}} e^{i\lambda_j t} = \sum_{\text{pseudopólos}} e^{i\alpha_{m_0, \vec{m}} t} + h(t), \quad (2.6.7)$$

onde $h \in L^2_{loc}((2r, \infty))$. Esta fórmula para bicaracterísticas periódicas hiperbólicas, é o análogo da fórmula para o caso elítico, em [Gu-We]. Uma pergunta natural é se a distribuição dos pólos é semelhante à distribuição dos pseudopólos. Nesta direção um resultado modesto mas interessante é:

Teorema 2.6.1. *Seja Ω o complemento da união de dois obstáculos compactos disjuntos e estritamente convexos em \mathbb{R}^n , n ímpar. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe uma infinidade de pólos da matriz de espalhamento, $\mathcal{S}(z)$, na região:*

$$0 < \text{Im } z < \epsilon \log |z|. \quad (2.6.8)$$

Demonstração: É uma demonstração por absurdo. Suponhamos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que os pólos, λ_j , estão na região

$$\text{Im } z \geq \epsilon_0 \log |z|. \quad (2.6.9)$$

Podemos então, sem perda de generalidade, assumir que os pólos λ_j estão na região

$$\text{Im } z > \max\{2\nu_0, \epsilon_0 \log |z|\}, \quad (2.6.10)$$

onde ν_0 é definido em (2.6.6). Com efeito, o número de pólos na região

$$\max\{0, \epsilon_0 \log |z|\} \leq \text{Im } z \leq 2\nu_0, \quad (2.6.11)$$

é sempre finito. Seja J o conjunto de índices correspondentes a estes pólos. Temos

$$\sum_{j \in J} e^{i\lambda_j t} \in L^2_{loc}((2r, \infty)), \quad (2.6.12)$$

e, restringindo-se a soma ao complementos de J , absorve-se $\sum_{j \in J} e^{i\lambda_j t}$ no termo $h(t)$.

Em seguida multiplicamos ambos os lados de (2.6.7) por $e^{-i(\tau+i\nu_0)t} \sigma_a(t)$, onde $\sigma_a(t) = \rho_a(t-a)$, ρ_a sendo a função em (2.3.34), e integramos. Como ρ_a tem suporte em $[2r, 2r+2a(n+2)]$, obtemos que

$$\sum_{\text{pólos}} \hat{\sigma}_a(\tau + i\nu_0 - \lambda_j) - \sum_{\text{pseudopólos}} \hat{\sigma}_a(\tau + i\nu_0 - \alpha_{m_0 \bar{m}}) \quad (2.6.13)$$

é uma função de quadrado integrável em τ . Entretanto, devido a (2.6.10), concluímos de (2.3.32) e da forma explícita de σ_a que, se $a \geq a(\epsilon_0) = \frac{n+2}{\epsilon_0}$,

$$\left| \sum_{\text{pólos}} \hat{\sigma}_a(\tau + i\nu_0 - \lambda_j) \right|$$

é uniformemente limitada para $\tau \in \mathbb{R}$, independentemente de a . Igualmente para os pseudopólos, o mesmo tipo de estimativa direta mostra que

$$\left| \sum_{\text{pseudopólos}} \hat{\sigma}_a(i\nu_0 - \alpha_{m_0, \bar{m}}) \right| > (2a)^{n+2} - C$$

onde C não depende de a . Como

$$\sum_{\text{pseudopólos}} \hat{\sigma}_a(\tau + i\nu_0 - \alpha_{m_0, \bar{m}})$$

é uma função contínua e periódica em τ , com período $\frac{\pi}{d}$, obtemos uma contradição, quando a é suficientemente grande, ao fato que, pelo teorema de Riemann-Lebesgue, o limite de (2.6.13) quando $|\tau| \rightarrow \infty$ (para todo $a > 0$) é zero. Isto completa a prova do Teorema 2.6.1.

Observação 2.6.1. Em [La-Ph3], Lax e Phillips provaram que se o obstáculo é não-confiante então existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\text{Im} \lambda_j \geq \epsilon_0 \log |\lambda_j| \quad \text{para todos os pólos } \lambda_j \text{ de } \mathcal{S}(z). \quad (2.6.14)$$

Na verdade eles estabeleceram (2.6.14) no caso do “princípio de Huyghens generalizado” ser válido. Entretanto, os resultados de [Me1], [Me-Sj] mostram que este princípio é válido para obstáculos não-confiantes.

Observação 2.6.2. Petkov, [Pe4], demonstrou que se (2.6.14) é verdade, então para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $T_m > 0$ tal que se $t \geq T_m$, a distribuição $\lambda(t)$ (cf. (2.4.2)) pertence a C^m . Este fato e (2.6.2) implicam o Teorema 2.6.1.

Observação 2.6.3. A conjectura (cf. [Ra2]) básica sobre pólos e raios periódicos (confinantes) é que tais raios dão lugar a pólos próximos do eixo real e que os pólos são tanto mais próximos quanto mais estáveis são os raios. Como o exemplo considerado no Teorema 2.6.1 é o “menos” estável possível, espera-se que a desigualdade (2.6.8) seja verdadeira todas as vezes que existam raios confinantes. Petkov, [Pe4], provou isto para uma certa classe de obstáculos.

§ 2.7 Singularidades do Núcleo de Espalhamento (Fórmula de Poisson)

O resultado que queremos, ou seja, o estudo das singularidades da matriz de espalhamento $S(t, \theta, \omega)$, está relacionado com o comportamento assintótico da amplitude de espalhamento, $a(\theta, \omega, \sigma)$, para energias altas ($\sigma \rightarrow \infty$) (cf. Parágrafo 2.2).

Por simplicidade, assumiremos que o obstáculo em questão é um domínio convexo, com fronteira C^∞ , contido na bola $|x| < 1$ e, como sempre, denotaremos por Ω , o exterior de \mathcal{O} . Suporemos ainda que a *representação translacional de saída* (cf. [La-Ph1]) associada a $(H_E(\Omega), U(t), D_+^1)$, é a representação translacional do grupo livre $U_0(t)$, deslocada uma unidade à esquerda. Analogamente, a *representação translacional de entrada*, associada a $(H_E(\Omega), U(t), D_-^1)$, é a representação translacional livre deslocada uma unidade à direita.

Como vimos no parágrafo 2.2, podemos expressar explicitamente $a(\theta, \omega, \sigma)$ em termos de certas soluções da equação da *onda reduzida*. Ademais o núcleo de Schwartz da matriz de espalhamento $\mathcal{S}(\sigma)$ pode ser escrito na forma $e^{2i\sigma} \delta(\theta - \omega)$ mais o termo

$$\left(\frac{-i\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-2i\sigma} \bar{a}(-\omega, \theta, \sigma). \quad (2.7.1)$$

Observação 2.7.1: O fator $e^{-2i\sigma}$ não está presente na fórmula (5.5) do Teorema 5.4 do Capítulo V de Lax-Phillips, [La-Ph1]. Isto deve-se ao fato de Lax-Phillips terem normalizado as representações translacionais colocando-as iguais à representação translacional livre em D_+^1 e D_-^1 enquanto que aqui, nós as deslocamos uma unidade à esquerda e à direita respectivamente.

Vamos examinar agora o comportamento assintótico de $a(\theta, \omega, \sigma)$ quando $\sigma \rightarrow \infty$. Começamos com o

Lema 2.7.1: Se $\theta + \omega \neq 0$, então

$$a(\theta, \omega, \sigma) = \int_{\partial\mathcal{O}} h(y, \theta, \omega, \sigma) e^{-i\sigma \langle \theta + \omega, y \rangle} dy \quad (2.7.2)$$

onde

$$h(y, \theta, \omega, \sigma) \sim (-i\sigma)^{\frac{n-1}{2}} \gamma_n \sum_{k=0}^{-\infty} h_k(y, \theta, \omega) \sigma^k \quad (2.7.3)$$

no conjunto $\langle \omega, n_y \rangle \neq 0$. (Aqui $\gamma_n = -\frac{1}{2}(2\pi)^{-(n-1)/2}$). Além disso

$$h_0(y, \theta, \omega) = \begin{cases} \langle \theta + \omega, n_y \rangle & \text{quando } \langle \omega, n_y \rangle > 0 \\ \langle \theta - \omega, n_y \rangle & \text{quando } \langle \omega, n_y \rangle < 0 \end{cases}, \quad (2.7.4)$$

n_y sendo a normal unitária exterior a $\partial\mathcal{O}$ em y .

Demonstração: Pela fórmula (4.20) e (4.21) do Capítulo IV, Parágrafo 4 de [La-Ph1], temos (cf. (2.2.2) – (2.2.4)):

$$a(\theta, \omega, \sigma) = \gamma_n (-i\sigma)^{\frac{n-3}{2}} \left(\int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial w_s}{\partial n}(y) e^{-i\sigma \langle \theta, y \rangle} - w_s(y) (-i\sigma) \langle \theta, n_y \rangle e^{-i\sigma \langle \theta, y \rangle} dy \right). \quad (2.7.5)$$

Por hipótese $w_s(y) = -e^{-i\sigma \langle \omega, y \rangle}$ em $\partial\mathcal{O}$. Mostraremos que em $\partial\mathcal{O}$, $\frac{\partial w_s}{\partial n}(y)$ pode ser escrita como uma série assintótica em potências negativas de σ . De fato, w_s sendo uma

solução de entrada (cf. [La-Ph1], Capítulo IV, Parágrafo 4) da equação da onda reduzida, com dados iniciais oscilatórios sobre $\partial\mathcal{O}$, pode ser expandida numa série assintótica

$$b(x, \sigma)e^{i\sigma\varphi}, \quad b(x, \sigma) \sim \sum_{i=0}^{\infty} b_i(x)\sigma^{-i}, \quad (2.7.6)$$

com $b \equiv 1$ em $\partial\mathcal{O}$, e φ a solução de entrada da equação eiconal

$$\sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right)^2 = 1, \quad \varphi = -\langle \omega, y \rangle \text{ em } \partial\mathcal{O}. \quad (2.7.7)$$

Para isto, basta expandir a fórmula integral (4.20) de [La-Ph1], Capítulo IV, referente a w_s , pelo método da fase estacionária. (Existe um problema de escolha do ramo de $(\frac{\partial\varphi}{\partial n})^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial \tan})^2 = 1$ nos pontos onde ω é tangente a $\partial\mathcal{O}$, porém estamos considerando que $\langle \omega, n_y \rangle \neq 0$). Diferenciando (2.7.7) em $y \in \partial\mathcal{O}$, com $\langle \omega, n_y \rangle \neq 0$, obtemos

$$\frac{\partial w_s}{\partial n} = i\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n} e^{-i\sigma\langle y, \omega \rangle} + \dots, \quad (2.7.8)$$

os pontos indicando termos de ordem inferior em σ . Como

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial \tan}\right)^2} = -|\omega_n| = -|\langle \omega, n_y \rangle|, \quad (2.7.9)$$

obtemos

$$\frac{\partial w_s}{\partial n}(y) = \begin{cases} -i\sigma \langle \omega, n_y \rangle e^{-i\sigma\langle \omega, y \rangle} + \dots, & \langle \omega, n_y \rangle > 0 \\ i\sigma \langle \omega, n_y \rangle e^{-i\sigma\langle \omega, y \rangle} + \dots, & \langle \omega, n_y \rangle < 0 \end{cases} \quad (2.7.10)$$

Substituindo isto em (2.7.5), chegamos a (2.7.3) e (2.7.4).

Aplicamos agora o método da fase estacionária a (2.7.2). Os pontos críticos da função fase, $\langle \theta + \omega, y \rangle$ em $\partial\mathcal{O}$, são exatamente aqueles pontos $y_0 \in \partial\mathcal{O}$ para os quais

$$\theta + \omega = c n_{y_0}, \quad (2.7.11)$$

para alguma constante c . Como $\theta + \omega \neq 0$, por hipótese, $c \neq 0$. Ademais, como θ e ω são unitários:

$$\langle \theta, n_{y_0} \rangle = \langle \omega, n_{y_0} \rangle = \frac{c}{2}. \quad (2.7.12)$$

As equações (2.7.11) e (2.7.12) afirmam que a direção de incidência ω , a direção de reflexão θ e a normal n_{y_0} a $\partial\mathcal{O}$ são coplanares, e que ω e θ fazem o mesmo ângulo com n_{y_0} , nomeadamente

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{c}{2}. \quad (2.7.13)$$

Portanto se, $c > 0$, ω e θ são as direções inicial e final de um raio refletido (ver Fig. 1), enquanto que, se $c < 0$, o ponto crítico y_0 é representado na situação (fisicamente menos plausível) mostrada na Fig. 2, i.e., o raio atravessa o obstáculo e é refletido pela parede interior (Veremos abaixo que tais pontos críticos não afetam a parte principal da expressão assintótica). Observe também que, devido a (2.7.12), em todos os pontos críticos y_0 , $\langle \omega, n_{y_0} \rangle \neq 0$; portanto podemos ignorar os pontos onde $\langle \omega, n_{y_0} \rangle = 0$ quando do cálculo de (2.7.2) pelo método da fase estacionária.

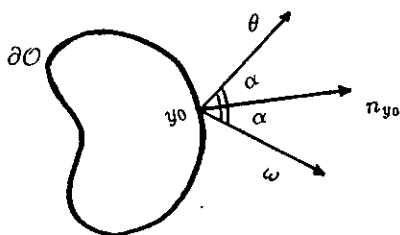


Fig.1

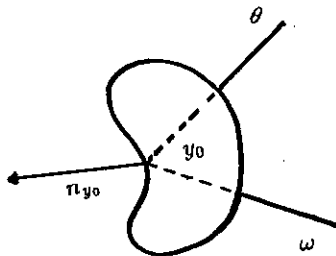


Fig.2

Vamos agora calcular explicitamente a contribuição do ponto crítico y_0 à integral (2.7.2). O Hessiano da função fase $\langle \theta + \omega, y \rangle$ é (cf. Guillemin-Sternberg, [Gu-St], Capítulo I) cII_{y_0} ,

onde II_{y_0} é a segunda forma fundamental da hipersuperfície $\partial\mathcal{O}$, no ponto y_0 . O determinante deste em relação à primeira forma fundamental é, portanto, $c^{n-1}K(y_0)$, onde $K(y_0)$ denota a curvatura Gaussiana de $\partial\mathcal{O}$ em y_0 . O coeficiente do termo oscilatório no integrando de (2.7.2) é igual a

$$(-i\sigma)^{\frac{n-1}{2}} \gamma_n c + 0(\sigma^{(n-3)/2}), \quad \text{quando } c > 0$$

e é $0(\sigma^{(n-3)/2})$ quando $c < 0$, por (2.7.4). Por conseguinte, a contribuição total a $a(\theta, \omega, \sigma)$, no ponto crítico y_0 , é (cf. (1.5.21) com $d = n - 1$ e $\nu = 0$):

$$\frac{1}{2} c^{-(n-3)/2} K(y_0)^{-1/2} e^{-i\sigma \langle \theta + \omega, y_0 \rangle} + 0(\sigma^{-1}) \quad (2.7.14)$$

quando $c > 0$, e $0(\sigma^{-1})$ quando $c < 0$. Aqui, $c/2$ é o cosseno do ângulo de reflexão α , na Fig. 1. A curvatura K é sempre maior do que zero pois $\partial\mathcal{O}$ é convexo.

Substituindo (2.7.14) em (2.7.1), obtemos a seguinte fórmula para a matriz de espalhamento em (θ, ω, σ) , com $\theta \neq \omega$:

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{i\sigma}{2\pi} \right)^{(n-1)/2} \sum_{y_0} c^{-(n-3)/2} (K(y_0))^{-1/2} e^{-i\sigma(2 - \langle \theta - \omega, y_0 \rangle)} + 0(\sigma^{(n-3)/2}), \quad (2.7.15)$$

a soma sendo tomada sobre todos os pontos críticos $y_0 \in \partial\mathcal{O}$ para os quais $c > 0$, i.e. aqueles y_0 correspondentes a raios refletidos como na Fig. 1. O termo que aparece na exponencial tem a seguinte interpretação geométrica: é o tempo de permanência T_{γ_0} (cf. (2.4.9)) do raio refletido γ_0 na Fig. 1. Com efeito, note que a distância do ponto y_0 ao plano de incidência, $\langle \omega, x \rangle = -1$ é $1 + \langle \omega, y_0 \rangle$, e a distância de y_0 ao plano de reflexão $\langle \theta, x \rangle = 1$ é $1 - \langle \theta, y_0 \rangle$; portanto, $T_{\gamma_0} = 2 - \langle \theta - \omega, y_0 \rangle$.

Observamos ainda que na prova de (2.7.15), o erro $0(\sigma^{(n-3)/2})$ é uma soma finita de expressões da forma $a(\sigma)e^{-iT_{\gamma_0}\sigma}$, onde $a(\sigma)$ admite uma expansão assintótica em potências

de σ^{-1} . Portanto, se tomarmos a transformada de Fourier inversa de (2.7.15), em relação a σ (fixando θ e ω), obtemos uma soma finita de distribuições $\hat{a}(t + T_{\gamma_0})$ sobre as quais temos bastante informação. De fato, se escrevemos

$$a(\sigma) = \sum_{i=(n-3)/2}^0 a_i \sigma^i + r, \quad r = O(\sigma^{-1}) \quad (2.7.16)$$

então

$$\hat{a}(t) = \sum_{i=(n-3)/2}^0 a_i D_i^i \delta(t) + \hat{r}(t), \quad (2.7.17)$$

$\hat{r}(t)$ sendo uma função limitada. Em particular, se desprezarmos todos os termos em (2.7.17), exceto o principal, temos a fórmula de Poisson:

Teorema 2.7.1: *Para θ e ω fixos, $\theta \neq \omega$, o núcleo de espalhamento $S(t, \theta, \omega)$ se escreve como*

$$S(t, \theta, \omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \right)^{(n-1)/2} \left\{ \left(\sum_j c_j^{-(n-3)/2} K_j^{-1/2} \delta(t + T_j) \right) + h_0 \right\} \quad (2.7.18)$$

onde h é uma função mensurável limitada. A soma é tomada sobre todos os pontos $y_j \in \partial\mathcal{O}$ para os quais existe um raio γ_j encontrando o obstáculo em y_j e tendo ω e θ como direções de incidência e de reflexão respectivamente. T_j é o tempo de permanência de γ_j , K_j é a curvatura Gaussiana de $\partial\mathcal{O}$ em y_j , e $c_j/2$ é o cosseno do ângulo de reflexão em y_j .

Observação 2.7.2. *Apesar dos raios do tipo que aparecem na Fig. 2 não contribuírem para o termo principal em (2.7.18), é possível que eles produzam contribuições para os termos de ordem inferior.*

Observação 2.7.3. *Seja*

$$J_j = 4c_j^{(n-3)} K_j. \quad (2.7.19)$$

O coeficiente da distribuição δ em (2.7.18) é $J_j^{-1/2}$. Mostraremos que (2.7.19) é igual à secção transversal diferencial de γ_j , introduzida no Parágrafo 2.4. Para isto, escolhamos coordenadas (x^1, \dots, x^n) em \mathbb{R}^n de tal maneira que ω é o vetor unitário apontando na direção positiva do eixo x^n . Então o plano de incidência, $\langle x, \omega \rangle = -1$, é o plano $x^n = -1$. Seja γ_0 o raio com direção de incidência ω que encontra o obstáculo no ponto y_0 e é refletido na direção θ_0 . Seja x_0 o ponto onde γ_0 intersecta o plano de incidência. Considere, para cada x no plano de incidência próximo de x_0 , o raio com direção inicial ω e posição inicial x . Seja y o ponto onde este raio encontra o obstáculo e seja θ a sua direção de reflexão.

Teorema 2.7.2. *A derivada da aplicação $x \rightarrow \theta$ tem determinante Jacobiano igual a $4c^{n-3}K, c/2$ sendo o cosseno do ângulo de reflexão no ponto y e K a curvatura Gaussiana do obstáculo em y .*

Demonstração: θ pode ser determinado a partir de x pelas equações :

$$\begin{aligned} \theta &= c\vec{n} - \omega \\ \langle \theta, \vec{n} \rangle &= \langle \omega, \vec{n} \rangle = c/2, \end{aligned} \tag{2.7.20}$$

\vec{n} sendo a normal unitária exterior em y . Aqui, ω é fixado e θ, c e \vec{n} são funções de $x = (x^1, \dots, x^{n-1}, -1)$. Vamos calcular o determinante Jacobiano, J , pela fórmula

$$\frac{\partial \theta}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \theta}{\partial x^{n-1}} \wedge \theta = J dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}. \tag{2.7.21}$$

Fazendo a substituição (2.7.20), obtemos para o membro esquerdo de (2.7.21):

$$\begin{aligned} c^n \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \vec{n}}{\partial x^{n-1}} \wedge \vec{n} \right) - c^{n-1} \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \vec{n}}{\partial x^{n-1}} \wedge \omega \right) \\ - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial c}{\partial x^i} c^{n-2} \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \vec{n} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \vec{n}}{\partial x^{n-1}} \right) \wedge \omega, \end{aligned} \tag{2.7.22}$$

o \bar{n} na última linha ocorrendo na i -ésima posição. Seja

$$\omega = \frac{c}{2} \bar{n} + a_1 \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^1} + \cdots + a_{n-1} \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^{n-1}}. \quad (2.7.23)$$

Substituindo (2.7.23) no segundo termo da primeira linha de (2.7.22), temos que a primeira linha de (2.7.22) torna-se igual a

$$\frac{c^n}{2} \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^{n-1}} \wedge \bar{n} \right). \quad (2.7.24)$$

Na linha inferior de (2.7.22), podemos trocar as posições de ω e \bar{n} e escrever $2 \langle \omega, \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^i} \rangle$ em lugar de $\frac{\partial c}{\partial x^i}$, obtendo:

$$2 \sum c^{n-2} \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \left(\langle \omega, \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^i} \rangle \right) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^{n-1}} \right) \wedge \bar{n}. \quad (2.7.25)$$

Finalmente, fazendo uso de (2.7.23), (2.7.25) pode ser escrita como:

$$2c^{n-2} \sum a_i \left(\langle \omega, \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^i} \rangle \right) \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^{n-1}} \right) \wedge \bar{n} \quad (2.7.26)$$

ou

$$2c^{n-2} \langle \omega, \omega - \frac{c}{2} \bar{n} \rangle \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^{n-1}} \wedge \bar{n} \right)$$

ou

$$2c^{n-2} \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^{n-1}} \wedge \bar{n} \right) - \frac{c^n}{2} \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^{n-1}} \wedge \bar{n} \right).$$

O segundo termo cancela (2.7.24); portanto, a conclusão de nossos cálculos é que (2.7.22) é igual a

$$2c^{n-2} \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^{n-1}} \wedge \bar{n} \right). \quad (2.7.27)$$

Seja $H dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ a forma de curvatura da superfície $\partial\mathcal{O}$ do obstáculo, no ponto de $\partial\mathcal{O}$ correspondente a (x^1, \dots, x^{n-1}) . Então

$$H dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \frac{\partial \vec{n}}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \vec{n}}{\partial x^{n-1}} \wedge \vec{n} \quad (2.7.28)$$

(pela fórmula para a curvatura como o Jacobiano da aplicação de Gauss). Agora,

$$H dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = K dA, \quad (2.7.29)$$

onde K é a curvatura escalar e dA a forma de área da superfície. Ademais

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = \langle \vec{n}, \omega \rangle dA = \frac{c}{2} dA, \quad (2.7.30)$$

uma vez que ω é o vetor unitário na direção positiva do eixo x^n . Assim $H = \frac{2}{c}K$. Substituindo isto em (2.7.27) e (2.7.21), obtemos, finalmente, $J = 4c^{n-3}K$.

A fórmula (2.7.18) pode, portanto, ser reescrita da seguinte maneira:

$$S(t, \theta, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \left(\sum_j J_j^{-1/2} \delta(t + T_j) \right) + h_0 \right\}. \quad (2.7.31)$$

(O leitor é convidado a fazer uma comparação entre (2.7.31) e (2.6.2)).

§ 2.8 Comentários e Referências Bibliográficas

§ 2.3 O Teorema 2.3.1, para n ímpar e domínios estrelados, foi provado por Lax-Phillips, [La-Ph6], e, no caso geral, por Bardos-Guillot-Ralston, [Ba-Gu-Ra]. Uma maneira rigorosa de demonstrá-lo, é explorar a propriedade nuclear do operador

$$(I - \Delta)^{-K} - (I - \Delta_0)^{-K} \quad (2.8.1)$$

onde $K > \frac{n}{2}$. Este fato foi estabelecido por Birman, [Bi1], [Bi2], tanto para o problema de Dirichlet como para o de Neumann, sob a hipótese que a fronteira é regular. Para domínios

com geometria mais complicada, resultados semelhantes podem ser encontrados em Deift, [De]. Uma prova do Teorema 2.3.1, sem apelar para a propriedade nuclear de (2.7.1) foi dada por Petkov, [Pe2].

O análogo de (2.3.8) para os resolventes correspondentes (multiplique ambos os membros de (2.3.8) por $t^{\frac{n}{2}+\epsilon}e^{-\mu t}$ e integre de 0 a ∞) foi mostrado por Buslaev, [Bu2], e o análogo de (2.3.8) para o Laplaceano mais um potencial (operador de Schrödinger) foi obtido por Colin de Verdière, [Co3], e Guillopé, [Gui].

O Teorema 2.3.2 e o Corolário 2.3.1 estão em [Ba-Gu-Ra].

§ 2.4 O Teorema 2.4.1 foi estabelecido em [Ba-Gu-Ra], para obstáculos que não admitem bicaracterísticas tangentes de ordem infinita a $T^*(\mathbb{R} \times \partial\Omega)$, e por Petkov e Popov, [Pe-Po], no caso geral.

Um corolário do Teorema 2.4.1 é que se o obstáculo \mathcal{O} é não-confinante então $\lambda \in C^\infty(2r, \infty)$. Se, além disso, \mathcal{O} é analítico (ou seja, $\partial\mathcal{O}$ é analítico) então (cf. [Ba-Le-Ra]) $\lambda \in G^3(2r, \infty)$, onde G^3 denota a classe de Gevrey 3 (cf. [Ho3]). No caso de obstáculos estritamente convexos, não-confinantes e analíticos (ver final do Parágrafo 1.3), λ é analítica, exceto nos números $l \in \mathcal{L}_{\partial\Omega}$, a união dos comprimentos de geodésicas periódicas em $\partial\Omega$ (cf. [Ba-Le-Ra]). Mencionamos ainda que, pela Observação 2.3.2, o intervalo $(2r, \infty)$ pode ser substituído, nos resultados aludidos acima, por $(0, \infty)$.

§ 2.5 A fase de espalhamento, $s(\sigma)$, coincide com a “spectral shift”, estudada por Krein, [Kr1], [Kr2], e Krein-Birman, [Bi-Kr]. Ela pode ser escolhida de forma que $s(\sigma)$ seja diferenciável se $\sigma > 0$. Este fenômeno é ligado com o teorema de unicidade de Rellich que é válido para o problema em consideração (cf. [La-Ph1], [La-Ph4]).

Em [Pe-Po], as condições de fronteira de Neumann têm a forma

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \gamma(x)u(x) \right)_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.8.2)$$

onde $\gamma(x) \in C^\infty(\partial\Omega)$, $\gamma(x) \geq 0$ e ν é a normal unitária exterior a $\partial\Omega$, apontando para \mathcal{O} . A correspondente fórmula assintótica para $s_N(\sigma)$ (\mathcal{O} não-confinante $n \geq 3$), estabelecida em [Pe-Po], é:

$$s_N(\sigma) = \frac{(4\pi)^{-n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \text{vol}\mathcal{O}\sigma^n + \frac{(4\pi)^{-\frac{(n-1)}{2}}}{4\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} \text{vol}\partial\mathcal{O}\sigma^{n-1} - \frac{(4\pi)^{-n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\int_{\partial\mathcal{O}} \left(\frac{H(x)}{6} - 2\gamma(x) \right) dS_x \right) \sigma^{n-2} + o(\sigma^{n-3}), \sigma \rightarrow +\infty. \quad (2.8.3)$$

Ikawa, [Ik3], deu um exemplo que mostra que a fórmula assintótica (2.5.3) não é válida, em geral, para obstáculos confinantes.

§ 2.6 Lax-Phillips, [La-Ph1], conjecturaram:

i) se o obstáculo é não-confinante, a matriz $\mathcal{S}(z)$ não possui pólos em $\{z; \text{Im}z \leq \alpha\}$ para alguma constante $\alpha > 0$.

ii) se o obstáculo é confinante, $\mathcal{S}(z)$ tem uma sequência de pólos $\{\lambda_j\}$ tal que $\text{Im}\lambda_j \rightarrow 0$, quando $j \rightarrow \infty$.

A desigualdade (2.6.14) implica que a parte i) da conjectura é correta. No entanto, os resultados de Ikawa, [Ik2,5], mostram que a parte ii) é falsa, em geral. Ainda assim parece que a conjectura permanece válida para muitos obstáculos confinantes. Ikawa, [Ik4], deu um (primeiro) exemplo para o qual é provada a existência de uma sequência de pólos da matriz de espalhamento, convergindo para o eixo real e em, [Ik7], propôs a seguinte modificação para ii):
iii) se o obstáculo é confinante, existe $\alpha > 0$ tal que a região $\{z \in \mathbb{C}; 0 < \text{Im}z < \alpha\}$ contém

uma infinidade de pólos. A existência de tal α serviria, então, para caracterizar obstáculos confinantes. Ainda em [Ik7], Ikawa mostrou que iii) é verdade no caso em que o obstáculo \mathcal{O} é composto por vários corpos estritamente convexos disjuntos, que satisfazem uma certa condição de visibilidade (cf. (3.7.5) e comentários no Parágrafo 3.7).

O Teorema 2.6.1 é devido a Bardos–Guillot–Ralston, [Ba–Gu–Ra].

Bardos, Lebeau e Rauch, [Ba–Le–Ra], demonstraram que se o obstáculo \mathcal{O} é *não-confinante* e $\partial\mathcal{O}$ é analítica, então (2.6.14) pode ser melhorado para

$$Im\lambda_j \geq \epsilon_0 |\lambda_j|^{1/3} \quad \text{para todos os pólos } \lambda_j \text{ de } \mathcal{S}(z). \quad (2.8.4)$$

Quando $\mathcal{O} = \{x : |x| \leq R\}$, pode ser mostrado, por um cálculo explícito; que existe uma infinidade de j com $Im\lambda_j \leq \epsilon_0 |\lambda_j|^{1/3}$. Portanto, neste caso, (2.8.4) é o melhor possível. O mesmo acontece para a “maioria” dos obstáculos não-confinantes, estritamente convexos e analíticos (cf. [Ba–Le–Ra]).

§ 2.7 O Parágrafo 2.7 segue a apresentação feita por Guillemin em [Gu1]. Ele foi reproduzido aqui pelo fato de [Gu1] não ser uma publicação de fácil acesso.

Uma fórmula análoga a (2.7.31), foi obtida por Petkov, [Pe1], para obstáculos *não-convexos*, fazendo algumas restrições sobre a geometria dos raios (ω, θ) (cf. (3.7.2) no Parágrafo 3.7).

Capítulo 3

Propriedades Genéricas de Geodésicas Periódicas e Raios (ω, θ) .

§ 3.1 Introdução

Neste capítulo, denotamos por $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$, um domínio limitado com fronteira $C^\infty, \partial\mathcal{O} = X$, e por $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$. Seja $C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ o espaço das aplicações C^∞ munido da topologia de Whitney (cf. [Go-Gu]). $C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ é então um espaço de Baire. O subespaço $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ de todos os mergulhos (i.e. embeddings) C^∞ é um conjunto aberto de $C^\infty(X; \mathbb{R}^n)$ e, portanto, também um espaço de Baire. Recordamos que um conjunto R é chamado residual se R é uma intersecção enumerável de conjuntos abertos densos. Se $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$, denotamos por \mathcal{O}_f o conjunto limitado com fronteira $f(X)$ e escrevemos $\Omega_f = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}_f$.

Estamos interessados nas propriedades P de raios (geodésicas) periódicos refletindo sobre a variedade $f(X)$ (cuja definição precisa será dada no Parágrafo 3.2).

Definição 3.1.1. *Uma propriedade P é dita genericamente verdadeira se ela é verdadeira para todo f pertencente a um conjunto residual $R_P \subset C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$.*

A fim de descrever as propriedades genéricas que serão objeto deste capítulo, referimos às fórmulas de Poisson (1.3.39) e (2.4.6) (lembramos que no caso de (2.4.6), $n \geq 3$ é ímpar). Para estudar alguns problemas inversos em teoria espectral e em teoria de espalhamento para obstáculos confinantes, é importante examinar a seguinte questão: seja γ uma geodésica

generalizada periódica em \mathcal{O} (resp. em Ω) (ver Fig. 3.1) e $T_\gamma \in \mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ (resp. $T_\gamma \in \mathcal{L}_\Omega$) o seu comprimento.

$$\text{Quando } T_\gamma \in \text{supp.sing.}S_D \text{ (resp. } \text{supp. sing } \lambda)? \quad (3.1.1)$$

O ponto de partida para a análise de (3.1.1) é uma fórmula de traço adequada, envolvendo a solução fundamental do problema de Dirichlet para a equação da onda. Por exemplo, da teoria espectral, segue que (cf. (1.3.38))

$$S_D(t) = \text{Tr } \cos(\sqrt{\Delta_D}t) = \int_{\mathcal{O}} E(t; x, x) dx \quad (3.1.2)$$

onde $E(t; x, y)$ denota a solução do problema (1.3.40). Uma fórmula de traço similar, ligando $\lambda(t)$ à solução fundamental do problema de Dirichlet exterior para a equação da onda em Ω , foi estabelecida em [Me3].

Para estudar as singularidades de $S_D(t)$, a partir de (3.1.2), é necessário obter alguma representação da solução fundamental para t próximo de T_γ . Uma parametriz global para $E(t; x, y)$, numa vizinhança suficientemente pequena de um raio com múltiplas reflexões, foi construída em [Ch1],[Gu-Me]. Por esta razão, é conveniente restringir nossa atenção a estes raios (uma vez que tal construção é muito complicada na vizinhança de outros tipos de raios). Por outro lado, parece razoável conjecturar que, genericamente, não existem geodésicas generalizadas periódicas, diferentes de raios com múltiplas reflexões e de geodésicas contidas na fronteira.

Como em geral as singularidades, relativas a dois raios, podem se cancelar, são importantes os seguintes problemas:

(I) *Se genericamente existe apenas uma geodésica periódica γ de comprimento T_γ ?*

(II) *Se genericamente a aplicação (linear) de Poincaré P_γ , correspondente a um raio periódico ordinário γ (cf. Observação 1.5.1), não possui valores próprios iguais a $\sqrt[p]{1}$, $\forall p \in \mathbb{N}$?*

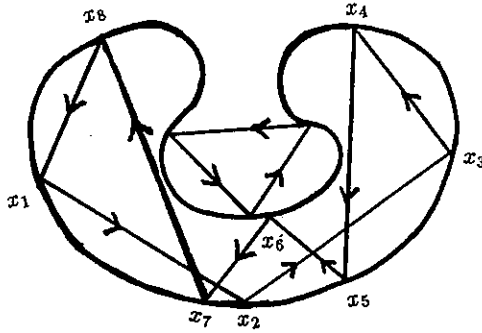


Fig. 3.1

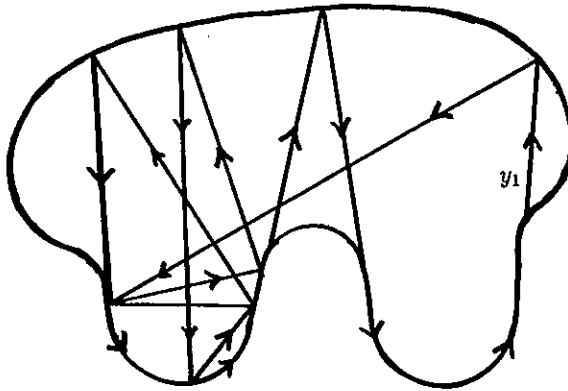
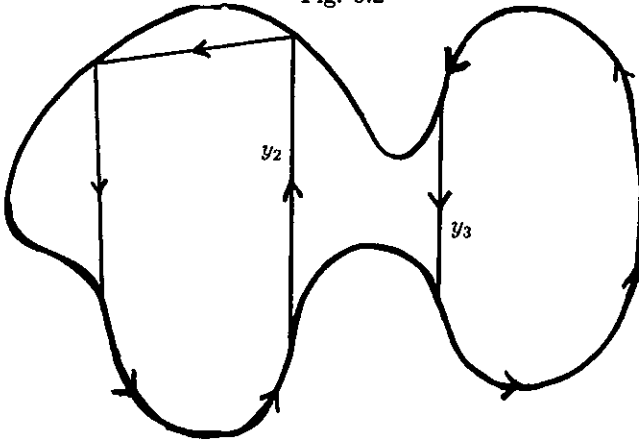


Fig. 3.2



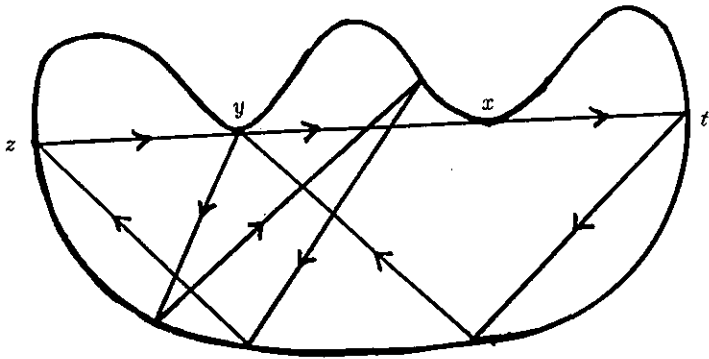


Fig. 3.3

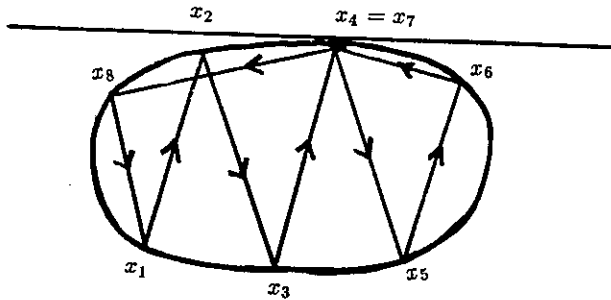


Fig. 3.4

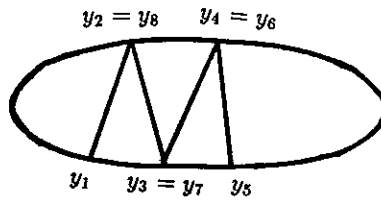


Fig. 3.5

No caso de variedades Riemannianas sem fronteira e para um conjunto residual de métricas Riemannianas, a resposta a estas perguntas é afirmativa (cf. [Kl-Ta]). Aqui, a questão é mais complicada uma vez que a métrica em \mathbb{R}^n é fixa e podemos “mover” genericamente apenas a fronteira.

A situação mais simples de se lidar é quando \mathcal{O} é um domínio estritamente convexo em \mathbb{R}^2 pois, então, os únicos raios periódicos são os ordinários e $\partial\mathcal{O}$. Neste caso, I e II possuem respostas afirmativas (cf. [Pe-St2]; na verdade a resposta a (I) é sempre afirmativa qualquer que seja a dimensão $n \geq 2$ e a geometria de \mathcal{O}) e, como consequência, para domínios estritamente convexos genéricos em \mathbb{R}^2 , a relação (1.3.39) torna-se uma igualdade, ou seja:

$$\text{Genericamente o espectro } \{\mu_j^2\} \text{ determina o espectro } \mathcal{L}_{\mathcal{O}} \text{ de comprimentos } T_{\gamma}. \quad (3.1.3)$$

O significado preciso desta afirmação é que

$$\text{supp. sing. } S_D^f = \{0\} \cup \mathcal{L}_{\mathcal{O}}, \quad \text{para todo } f \in R, \quad (3.1.4)$$

onde R é um conjunto residual em $C_{emb}^{\infty}(X, \mathbb{R}^2)$, $S_D^f(t) = \sum_j \cos \mu_j^f t$ e $\{(\mu_j^f)^2\}$ é o espectro do problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \mu^2 u \quad \text{em } \mathcal{O}_f \\ u|_{f(X)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Quando se considera domínios em \mathbb{R}^2 com geometria arbitrária, duas dificuldades aparecem na investigação do (I) e (II):

(III) A existência de geodésicas generalizadas periódicas tendo arcos sobre $\partial\mathcal{O}$ e segmentos lineares no interior de \mathcal{O} . (Ver Fig. 3.2)

(IV) A existência de raios periódicos não ordinários, (i.e. tendo segmentos tangentes, no seu interior, a $\partial\mathcal{O}$) que se refletem em $\partial\mathcal{O}$. (Ver Fig. 3.3).

Uma geodésica generalizada tendo arcos sobre $\partial\mathcal{O}$ e segmentos lineares no interior de \mathcal{O} , aparece quando a fronteira $\partial\mathcal{O}$ possui um ponto de inflexão x , onde a curvatura de $\partial\mathcal{O}$ se anula com ordem um. Então a geodésica generalizada contém um segmento linear l tangente a $\partial\mathcal{O}$ em x e um segmento de arco sobre $\partial\mathcal{O}$, começando em x e terminando em algum outro ponto de inflexão. Geodésicas generalizadas deste tipo não podem ser evitadas uma vez que domínios não-convexos genéricos em \mathbb{R}^2 sempre têm (um número finito) pontos de inflexão onde a curvatura se anula com ordem um. Na verdade domínios genéricos de \mathbb{R}^2 não possuem pontos na fronteira onde a curvatura se anula com ordem dois (cf. [Pe-St1]). Ademais, pelo fato da curvatura se anular com ordem um, as geodésicas generalizadas são bem determinadas uma vez que o correspondente fluxo Hamiltoniano é bem determinado (cf. [Me-Sj]). A situação muda consideravelmente se restringirmos nossa atenção a geodésicas generalizadas periódicas. De, fato, em [Pe-St1] foi mostrado que, genericamente, o fenômeno (III) não pode ocorrer. Ainda, no mesmo artigo, Petkov e Stojanov provaram que genericamente todos os raios periódicos são ordinários (ou seja (IV) também não ocorre genericamente) e que a resposta a (II) permanece afirmativa. Como consequência, têm-se que para domínios genéricos, em \mathbb{R}^2 , com geometria arbitrária, a relação de Poisson (1.3.39) é uma igualdade. É claro que o comprimento de $\partial\mathcal{O}$ pertence a $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ se e somente se o domínio genérico \mathcal{O} é estritamente convexo.

A questão (3.1.3) permanece aberta à investigação para domínios genéricos em \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. De fato, a única obstrução é quanto à validade ou não de (III) em domínios genéricos de \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Todavia, seguindo os argumentos de [Pe-St1], é possível obter resultados parciais para domínios em \mathbb{R}^3 , considerando que geodésicas generalizadas periódicas (tendo arcos sobre $\partial\mathcal{O}$ e segmentos lineares no interior de \mathcal{O}) começam em pontos onde a curvatura Gaussiana se anula.

Com respeito à relação de Poisson exterior (2.4.6), Petkov e Stojanov provaram em [Pe-St2] que para domínios genéricos da forma $\mathcal{O} = \cup_{i=1}^M \mathcal{O}_i$, onde $\mathcal{O}_i, i = 1, \dots, M$ são

estritamente convexos em \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, ímpar, e $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset$ para $i \neq j$, (2.4.6) é uma igualdade. A demonstração usa novamente respostas afirmativas a (I) e a um fortalecimento de (II) qual seja: genericamente, a aplicação de Poincaré P_γ , de um raio ordinário γ , não possui valor próprio em $|z| = 1$. A existência então de uma sequência $mT_\gamma \nearrow \infty$ de singularidades de λ implica (no caso genérico), pela Observação 2.6.2, que os pólos λ_j (associados a $\Omega_f, f \in$ conjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R})$) da matriz de espalhamento $\mathcal{S}(\lambda)$, satisfazem (2.6.8).

O comportamento de geodésicas periódicas desempenha um papel essencial na análise de problemas inversos em teoria espectral (cf. [Gu-Me], [Pe-St1,2]). Quando se estuda problemas inversos em teoria de espalhamento para a equação das ondas no domínio não-limitado $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$, é importante examinar o comportamento dos raios (ω, θ) (cf. Parágrafo 2.4). Em [Pe1], Petkov investigou o comportamento assintótico da amplitude de espalhamento $a(\theta, \omega, \sigma)$ para $\sigma \rightarrow \infty$ (Ver também o Parágrafo 2.7). Foi observado que este comportamento está ligado com o tempo de permanência T_γ e também com a secção transversal diferencial J_γ (cf. Parágrafo 2.4) de raios (ω, θ) , γ . Pode-se provar (cf. [Pe-St3,6]) que algumas restrições impostas em [Pe1], são genericamente satisfeitas. Em particular, os seguintes resultados, análogos a (I) e (II), são verdadeiros:

(I') *Genericamente existe apenas um raio (ω, θ) , γ , com tempo de permanência T_γ (cf. [Pe-St5]).*

(II') *Genericamente J_γ é diferente de zero (cf. [Pe-St6]).*

Certamente (I') e (II') são passos importantes na investigação de se (2.4.10) é genericamente uma igualdade.

Para ilustrar um pouco as técnicas envolvidas na abordagem dos problemas mencionados nesta introdução, damos adiante, no Parágrafo 3.6, a demonstração de (3.1.3) quando \mathcal{O} é um domínio estritamente convexo de \mathbb{R}^2 . Antes, porém, no Parágrafo 3.2, fazemos al-

guma preparação; no Parágrafo 3.3 obtemos algumas propriedades genéricas de elementos de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$; no Parágrafo 3.4 estudamos a questão (I) (quaisquer que sejam a dimensão e a geometria) e, finalmente, no Parágrafo 3.5, respondemos afirmativamente a (II) quando $n = 2$ (qualquer que seja a geometria de \mathcal{O}).

§ 3.2 Preliminares

3.2.1 Seja γ uma curva fechada em \mathbb{R}^n tendo a forma $\gamma = \bigcup_{i=1}^k l_i$, onde $l_i = [x_i, x_{i+1}] = \{y \in \mathbb{R}^n; y = \alpha x_i + (1 - \alpha)x_{i+1}, 0 \leq \alpha \leq 1\}$ são segmentos lineares, $x_i \in X, i = 1, \dots, k, x_1 = x_{k+1}$. A curva γ será chamada de *raio* (geodésica) *periódico refletindo sobre X*, se as seguintes condições são verdadeiras:

os segmentos abertos $\overset{0}{l}_i = l_i \setminus (\{x_i\} \cup \{x_{i+1}\})$ não intersectam transversalmente X , para todo $i = 1, \dots, k$,

$$(3.2.1)$$

pondo $l_{k+1} = l_1$, temos ou $l_i \cap l_{i+1} = \{x_{i+1}\}$ para todo $i = 1, \dots, k$ ou então existe m com $k \equiv 2m$ e tal que $l_i \cap l_{i+1} = \{x_{i+1}\}$ para $i = 1, \dots, m-1$ e $l_{m-i} = l_{m+1+i}$ para $i = 0, 1, \dots, m-1$.

$$(3.2.2)$$

para $1 \leq i \leq k$, os segmentos l_i e l_{i+1} fazem ângulos agudos iguais com um dos vetores normais, N_{i+1} , a X em x_{i+1} e l_i, l_{i+1} , e N_{i+1} estão em um mesmo plano bi-dimensional. (3.2.3)

Os pontos x_1, \dots, x_k são chamados pontos de reflexão de γ . Observe que γ pode estar em $\bar{\mathcal{O}}$ ou em $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O} = \Omega$ (Ver Fig. 3.1). Ademais, alguns raios bem gerais, que não correspondem a raios em \mathcal{O} que refletem (sobre X), são admissíveis na definição acima. Alguns pontos de reflexão podem coincidir (Ver Fig. 3.4) e algum segmento l_i de γ pode ser tangente a X em algum ponto interior x de l_i . (Ver Fig. 3.3) Neste caso, o ponto x da Figura 3.3 não é considerado um ponto de reflexão. Se γ não possui segmento ortogonal a X , a primeira parte de (3.2.2) é válida. Do contrário, a segunda parte de (3.2.2) é verdadeira (Ver Fig. 3.5), e,

então, γ tem apenas dois segmentos l_1 e l_m ortogonais a X e γ passa duas vezes por cada segmento.

3.2.2. Sejam $s \geq 2, r \geq 1$ inteiros (fixos) e considere o fibrado $J^r(X, \mathbb{R}^n)$ de r -jatos. Recordaremos algumas notações (cf. [Go-Gu], Capítulo II). Sejam

$$\alpha : J^r(X, \mathbb{R}^n) \longrightarrow X \quad \text{e} \quad \beta : J^r(X, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.2.4)$$

as aplicações *fonte* e *alvo* respectivamente, isto é $\alpha(j^r f(x)) = x, \beta(j^r f(x)) = f(x)$ para todo elemento $j^r f(x)$ de $J^r(X, \mathbb{R}^n)$. Aqui, $j^r f(x)$ é o r -jato gerado por $f \in C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ e $x \in X$. Introduzimos as projeções

$$\begin{array}{ccc} & (J^r(X, \mathbb{R}^n))^s & \\ & \alpha^s \swarrow \quad \searrow \beta^s & \\ X^s & & (\mathbb{R}^n)^s. \end{array} \quad (3.2.5)$$

O chamado fibrado de s -cópias de r -jatos é dado por

$$J_s^r(X, \mathbb{R}^n) = (\alpha^s)^{-1}(X^s)$$

onde usamos a notação

$$A^{(s)} = \{(a_1, \dots, a_s) \in A^s; \quad a_i \neq a_j \text{ quando } i \neq j\}. \quad (3.2.6)$$

Para todo $f \in C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$, obtemos a aplicação

$$j_s^r f : X^{(s)} \longrightarrow J_s^r(X, \mathbb{R}^n), \quad (3.2.7)$$

definida por

$$j_s^r f(x_1, \dots, x_s) = (j^r f(x_1), \dots, j^r f(x_s)). \quad (3.2.8)$$

Obviamente, o conjunto

$$V = \{j^r f(x) \in J^r(X, \mathbb{R}^n); \text{ posto } df(x) = n - 1\} \quad (3.2.9)$$

é aberto em $J^r(X, \mathbb{R}^n)$. Portanto, se U é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n)^{(s)}$, então

$$M = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)}) \cap (\beta^s)^{-1}(U) \cap V^s \quad (3.2.10)$$

é uma subvariedade aberta de $J_s^r(X, \mathbb{R}^n)$.

3.2.3. Necessitamos descrever um atlas em M para $r = 1, 2$. Tomemos vizinhanças coordenadas V_1, \dots, V_s , de elementos de X com $V_i \cap V_j = \emptyset$, se $i \neq j$, e fixemos cartas $\Theta_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Considere

$$\mathcal{D} = M \cap \Pi_{i=1}^s J^r(V_i, \mathbb{R}^n) \quad (3.2.11)$$

e defina a carta Θ em \mathcal{D} como segue. Para $r = 1$ ponha

$$\Theta(j^1 f_1(x_1), \dots, j^1 f_s(x_s)) = (u; v; a) \in (\mathbb{R}^{n-1})^{(s)} \times (\mathbb{R}^n)^{(s)} \times \mathbb{R}^{n(n-1)s}, \quad (3.2.12)$$

onde

$$u = (u_1, \dots, u_s), v = (v_1, \dots, v_s), a = \left(a_{ij}^{(t)} \right)_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq n-1 \\ 1 \leq t \leq n}} \quad (3.2.13)$$

e

$$u_i = \Theta_i(x_i), \quad v_i = f_i(x_i), \quad (3.2.14)$$

$$a_{ij}^{(t)} = \frac{\partial \left(f_i^{(t)} \circ \Theta_i^{-1} \right)}{\partial u_i^{(j)}}(u_i) \quad (3.2.15)$$

para $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq t \leq n$. Aqui

$$f_i = (f_i^{(1)}, \dots, f_i^{(n)}) \quad , \quad u_i = \left(u_i^{(1)}, \dots, u_i^{(n-1)} \right) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$v_i = (v_i^{(1)}, \dots, v_i^{(n)}) \in \mathbb{R}^n.$$

Observe que se $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação C^∞ , então

$$\frac{\partial(F \circ (f_1 \circ \Theta_1^{-1}) \times \dots \times (f_s \circ \Theta_s^{-1}))}{\partial u_i^{(j)}}(u) = \sum_{t=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i^{(t)}}(v) a_{ij}^{(t)}. \quad (3.2.16)$$

Necessitamos especialmente o caso $n = 2, r = 2$. Então se \mathcal{D} tem a forma (3.2.11) com $r = 2$ e $n = 2$, consideramos a carta

$$\Theta: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{(s)} \times (\mathbb{R}^2)^{(s)} \times \mathbb{R}^{4s} \quad (3.2.17)$$

dada por

$$\Theta(j^2 f_1(x_1), \dots, j^2 f_s(x_s)) = \left(u_1, \dots, u_s; v_1, \dots, v_s; (a_i^{(t)})_{\substack{t=1,2 \\ 1 \leq i \leq s}}; (b_i^{(t)})_{\substack{t=1,2 \\ 1 \leq i \leq s}} \right), \quad (3.2.18)$$

onde u_i e v_i são como em (3.2.14) e

$$a_i^{(t)} = \frac{d(f_i^{(t)} \circ \Theta_i^{-1})}{du_i}(u_i), \quad (3.2.19)$$

$$b_i^{(t)} = \frac{d^2(f_i^{(t)} \circ \Theta_i^{-1})}{du_i^2}(u_i) \quad (3.2.20)$$

para $i = 1, \dots, s, t = 1, 2$. Aqui, $f_i = (f_i^{(1)}, f_i^{(2)})$, $u_i \in \mathbb{R}$ e $v_i = (v_i^{(1)}, v_i^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$. Note que $(a_i^{(1)}, a_i^{(2)})$ é a matriz da aplicação $d(f_i \circ \Theta_i^{-1})(u_i): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Como $(j^2 f_1(x_1), \dots, j^2 f_s(x_s)) \in \mathcal{D} \subset M \subset V$, temos $df_i(x_i) \neq 0$, que implica

$$(a_i^{(1)})^2 + (a_i^{(2)})^2 \neq 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (3.2.21)$$

Na nossa notação, se $f_i \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2)$,

$$N_i = (a_i^{(2)}, -a_i^{(1)}) \quad (3.2.22)$$

é o vetor normal a $f_i(X)$ no ponto $f_i(x_i)$.

3.2.4. Propomos aqui uma classificação combinatória elementar de raios periódicos γ que refletem numa subvariedade C^∞ compacta $Y \subset \mathbb{R}^n$, de dimensão $n - 1$. Sejam y_1, \dots, y_s os diferentes pontos de reflexão de γ , ordenados de maneira arbitrária. Em geral, γ pode passar duas ou mais vezes por algum dos seus pontos de reflexão. Entretanto, podemos sempre achar um inteiro $k \geq s$ e uma aplicação

$$\omega : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, s\}, \quad (3.2.23)$$

tal que

$$y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(k)}, y_{\omega(k+1)} = y_{\omega(1)}$$

são (todos) os sucessivos pontos de reflexão de γ . Em outras palavras, a aplicação ω mostra a ordem na qual o raio γ passa por todos os seus pontos de reflexão. Diremos que γ tem tipo ω .

Por convenção, pomos $\omega(m) = \omega(i)$ para $m = i + pk, 1 \leq i \leq k, p \in \mathbb{N}$. Portanto, temos

$$\omega(i) \neq \omega(i + 1) \quad , \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.2.24)$$

Se γ não possui segmentos ortogonais a Y , então

$$\{\omega(i), \omega(i + 1)\} \neq \{\omega(j), \omega(j + 1)\} \quad (3.2.25)$$

para $1 \leq i < j \leq k$, e ω será chamada não-simétrica. Se γ tem (dois) segmentos ortogonais a Y , então $k = 2m$ e ω pode ser escolhida de tal maneira que, para algum $1 \leq i_0 \leq k$, a condição (3.2.25) é válida se $i_0 \leq i < j \leq i_0 + m$, enquanto

$$\omega(i_0 + m + j) = \omega(i_0 + m - j), j = 1, \dots, m - 1. \quad (3.2.26)$$

Neste caso ω é dita simétrica. Por uma aplicação admissível, entenderemos uma aplicação (3.2.23) que é ou simétrica ou não-simétrica. Obviamente, o conjunto de todas as aplicações admissíveis é enumerável.

3.2.5 Dada uma aplicação admissível ω , pomos

$$I_i(\omega) = \{j; \text{ existe } t, 1 \leq t \leq k, \text{ com } \{i, j\} = \{\omega(t), \omega(t+1)\}\} \text{ para todo } i \in \text{Im}\omega. \quad (3.2.27)$$

Definimos

$$U_\omega = \{(y_1, \dots, y_s) \in (\mathbb{R}^n)^{(s)}; y_i \notin \text{envolvente convexa de } \{y_j; j \in I_i(\omega)\} \text{ para todo } i \in \text{Im}\omega\}. \quad (2.3.28)$$

Obviamente, U_ω é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n)^{(s)}$. Finalmente introduzimos a aplicação

$$F : (\mathbb{R}^n)^{(s)} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.2.29)$$

dada por

$$F(y_1, \dots, y_s) = \sum_{i=1}^k \|y_{\omega(i)} - y_{\omega(i+1)}\|. \quad (3.2.30)$$

Observe que para um raio periódico γ de tipo ω , $I_i(\omega)$ é o conjunto de todos os índices j tais que existe um segmento de γ ligando y_i e y_j . Ademais, $y = (y_1, \dots, y_s) \in U_\omega$ e $F(y)$ é o comprimento (período primitivo) de γ .

Se $Y = f(X)$ e $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$, então existe $x = (x_1, \dots, x_s) \in X^{(s)}$ com $f(x_i) = y_i, i = 1, \dots, s$. Seja $f^s : X^s \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^s$, a aplicação

$$f^s(x_1, \dots, x_s) = (f(x_1), \dots, f(x_s)). \quad (3.2.31)$$

É claro que x é um ponto crítico da aplicação $F \circ f^s : X^{(s)} \longrightarrow \mathbb{R}$.

3.2.6 Seja $M \subset J_s^r(X, \mathbb{R}^n)$ dada por (3.2.10) e seja Σ um subconjunto arbitrário de M . Denote por $\text{Dim } \Sigma$ o menor inteiro $t, 0 \leq t \leq \dim M$, tal que existe um número finito ou enumerável de subvariedades $C^\infty, \{W_m\}_m$, de M tais que $\Sigma \subset \bigcup_m W_m$ e $\dim W_m \leq t$ para todo m . Ponha

$$\text{Codim } \Sigma = \dim M - \text{Dim } \Sigma. \quad (3.2.32)$$

Observe que se tal cobertura $\{W_m\}_m$ existe e se

$$\text{Codim } \Sigma > s(n-1) = \dim X^{(s)}, \quad (3.2.33)$$

então o conjunto

$$T = \{f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n); j_s^r f(X^{(s)}) \cap \Sigma = \phi\} \quad (3.2.34)$$

contém um subconjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$. De fato, então $\text{codim } W_m > \dim X^{(s)}$ e $j_s^r f \pitchfork W_m$ é equivalente a $j_s^r f(X^{(s)}) \cap W_m = \phi$. (Aqui $j_s^r f \pitchfork W_m$ significa que $j_s^r f$ intersecta W_m transversalmente; cf. Definição 4.1 em [Go-Gu]). Portanto, o teorema de transversalidade para multijatos (cf. [Go-Gu], Teorema 4.13 no capítulo II) implica que o conjunto

$$T_m = \{f \in C^\infty(X, \mathbb{R}^n); j_s^r f(X^{(s)}) \cap W_m = \phi\} \quad (3.2.35)$$

é residual em $C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$. Como

$$T \supset \bigcap_m T_m \cap C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n), \quad (3.2.36)$$

T contém um subconjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$.

§ 3.3 Propriedades Genéricas de Mergulhos

Estudamos neste parágrafo algumas propriedades genéricas dos mergulhos $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$, X sendo uma subvariedade C^∞ compacta de \mathbb{R}^n , de dimensão $n-1$, que serão importantes nos parágrafos seguintes (cf. [Pe-St2]).

Teorema 3.3.1: Seja $n \geq 2, s \geq 2, p$ e q inteiros e seja U um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n)^{(s)}$.

Suponhamos que

$$H = (H_1, \dots, H_p) : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$L = (L_1, \dots, L_q) : U \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

sejam aplicações C^∞ com as seguintes propriedades:

para todo $i = 1, \dots, s$ existe $r_i, 1 \leq r_i \leq p$ tal que $\text{grad}_y H_{r_i} \neq 0$ para todo $y \in U$, (3.3.1)

$y = (y_1, \dots, y_s)$ (designamos por $y_i = (y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(n)})$ $i = 1, \dots, s$ as variáveis em $(\mathbb{R}^n)^{(s)}$); para todo $y \in U, dL(y) \neq 0$ (i.e., L não possui pontos críticos em U). (3.3.2)

Seja $T \subset C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das aplicações f tais que para todo ponto crítico x de $H \circ f^s$ com $f^s(x) \in U$, temos $L(f^s(x)) \neq 0$. Então T contém um subconjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Inicialmente observamos que é suficiente considerar o caso $q = 1$. Com efeito, suponha que o teorema é válido se $q = 1$, e denote por

$$U_t = \{y \in U : dL_t(y) \neq 0\} \quad , \quad t = 1, \dots, q.$$

Então U_t é aberto em $(\mathbb{R}^n)^{(s)}$ e $U = \bigcup_{t=1}^q U_t$. Consequentemente, $T \supset \bigcap_{t=1}^q T_t$, onde T_t é o conjunto dos $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ tais que para todo $x \in X^{(s)}$ com $f^s(x) \in U$, temos $L_t(f^s(x)) \neq 0$ se x é um ponto crítico de $H \circ f^s$. Como cada T_t contém um subconjunto residual, o mesmo é verdade para T . Assumimos pois que $q = 1$.

Seja Σ o conjunto dos elementos

$$\sigma = (j^1 f_1(x_1), \dots, j^1 f_s(x_s)) \in M \subset J_s^1(X, \mathbb{R}^n)$$

(M definido em (3.2.10)), tais que $x = (x_1, \dots, x_s)$ é um ponto crítico de $H \circ (f_1 \times \dots \times f_s)$ e $L \circ (f_1 \times \dots \times f_s)(x) = 0$. Obviamente,

$$T = \{f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n) ; j_s^1 f(X^{(s)}) \cap \Sigma = \emptyset\}. \quad (3.3.3)$$

O teorema 3.3.1 é então consequência do seguinte lema (cf. Parágrafo 3.2.6):

Lema 3.3.1. *Existe uma família enumerável $\{W_m\}_{m=1}^{\infty}$ de subvariedades C^{∞} de M com as propriedades:*

$$\text{codim } W_m = (n-1)s + 1, \quad (3.3.4)$$

$$\Sigma \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} W_m. \quad (3.3.5)$$

Demonstração: Seja \mathcal{D} uma vizinhança coordenada de um elemento de Σ , definida em (3.2.11) com $r = 1$, e seja Θ a carta em \mathcal{D} , dada por (3.2.12)–(3.2.15). É suficiente provar que $\Theta(\mathcal{D} \cap \Sigma)$ está contido em uma subvariedade de $\Theta(\mathcal{D})$ com codimensão $(n-1)s + 1$. De acordo com nossa hipótese (3.3.1), existe $1 \leq t \leq n$ tal que

$$\frac{\partial H_{r_i}}{\partial y_i^{(t)}}(y) \neq 0 \quad \text{para todo } y \in U. \quad (3.3.6)$$

Ponha para $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq n-1$,

$$b_{ij}(\xi) = \sum_{t=1}^n \frac{\partial H_{r_i}}{\partial y_i^{(t)}}(v) a_{ij}^{(t)}, \quad (3.3.7)$$

onde $\xi \in \Theta(\mathcal{D})$ é dado por (3.2.12)–(3.2.15).

Agora definimos duas aplicações, $R_1 : \Theta(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^{(n-1)s}, R_2 : \Theta(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^{(n-1)s+1}$ pondo

$$R_1(\xi) = (b_{ij}(\xi))_{\substack{1 \leq j \leq n-1 \\ 1 \leq i \leq s}}, \quad (3.3.8)$$

$$R_2(\xi) = (R_1(\xi); L(v)). \quad (3.3.9)$$

Usando as definições de $\Sigma \subset \Theta$ e (3.2.16), (3.3.7) e (3.3.8), obtemos

$$\Theta(\mathcal{D} \cap \Sigma) \subset R_2^{-1}(0). \quad (3.3.10)$$

Resta agora verificar que R_2 é uma submersão sobre $\Theta(\mathcal{D})$. Suponha $\xi = (u, v, a) \in \Theta(\mathcal{D})$ e

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{n-1} B_{ij} \text{grad } b_{ij}(\xi) + C \text{grad } \hat{L}(\xi) = 0 \quad (3.3.11)$$

para algumas constantes reais C e B_{ij} , $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq n-1$. Aqui $\hat{L} : \Theta(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\hat{L}(\xi) = L(v)$ e os gradientes acima são considerados como vetores em $(\mathbb{R}^{n-1})^s \times (\mathbb{R}^n)^s \times (\mathbb{R}^{n(n-1)})^s$. Devido a (3.2.12) e ao fato que $\xi \in \Theta(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} \subset M$, obtemos $v \in U$. Fixe $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq n-1$. Então existe t , $1 \leq t \leq n$, para o qual (3.3.6) é válida com $y = v$. De (3.3.7), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{ij}}{\partial a_{ij}^{(t)}}(\xi) &= \frac{\partial H_{r_i}}{\partial y_i^{(t)}}(v) \neq 0, \\ \frac{\partial b_{i'j'}}{\partial a_{ij}^{(t)}}(\xi) &= 0 \quad \text{se } i' \neq i \text{ e } j' \neq j. \end{aligned}$$

Ademais, $\frac{\partial \hat{L}}{\partial a_{ij}^{(t)}}(\xi) = 0$. Assim, considerando em (3.3.11) somente as componentes correspondentes às derivadas com respeito a $a_{ij}^{(t)}$, obtemos $B_{ij} \frac{\partial H_{r_i}}{\partial y_i^{(t)}}(v) = 0$ e, por conseguinte $B_{ij} = 0$ para todo $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, n-1$. Portanto (3.3.11) implica $C \text{grad } \hat{L}(\xi) = 0$ e, de (3.3.2), deduzimos $C = 0$. Assim R_2 é uma submersão e isto completa a prova do Lema 3.3.1 e, consequentemente, do Teorema 3.3.1.

§ 3.4 Independência Racional dos Comprimentos de Geodésicas Periódicas

O objetivo neste parágrafo é provar o seguinte (cf. [Pe-St2])

Teorema 3.4.1. *Seja X uma subvariedade C^∞ compacta de \mathbb{R}^n , de dimensão $n-1$ e seja \mathcal{M} o conjunto dos $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ tais que dois raios (geodésicas) periódicos quaisquer que têm pontos de reflexão sobre $f(X)$, possuem comprimentos (períodos) racionalmente independentes. Então \mathcal{M} contém um subconjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$.*

Este teorema resulta de uma aplicação do Teorema 3.3.1. Para isto, necessitamos de

alguma preparação. Seja $Y = f(X)$, $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ e sejam γ_1 e γ_2 dois raios periódicos distintos refletindo sobre Y . Denote por y_1, \dots, y_s todos os pontos de reflexão de ambos γ_1 e γ_2 . Obviamente, existem aplicações admissíveis (cf. Parágrafo 3.2.4)

$$\omega : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, s\}, \delta : \{1, \dots, l\} \longrightarrow \{1, \dots, s\} \quad (3.4.1)$$

tais que γ_1 (respect. γ_2) tem tipo ω (respect. δ). Isto significa que $y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(k)}$ são todos os sucessivos pontos de reflexão de γ_1 , enquanto $y_{\delta(1)}, \dots, y_{\delta(l)}$ são todos os sucessivos pontos de reflexão de γ_2 . Observe que

$$Im\omega \cup Im\delta = \{1, 2, \dots, s\}, \quad (3.4.2)$$

$$\{\omega(i), \omega(i+1)\} \neq \{\delta(j), \delta(j+1)\}, \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq l, \quad (3.4.3)$$

e que $Im\omega \cap Im\delta$ pode ser não vazio (de fato existem exemplos onde $Im\omega = Im\delta$).

Um símbolo $\Gamma = (k, l, s, \omega, \delta)$ será chamado uma configuração se k, l, s são inteiros ≥ 2 e ω, δ são aplicações admissíveis, da forma (3.4.1), satisfazendo (3.4.2) e (3.4.3). Diremos então que o par (γ_1, γ_2) tem tipo Γ . Neste caso temos

$$y = (y_1, \dots, y_s) \in U_\omega \cap U_\delta. \quad (3.4.4)$$

Suponha que Γ é uma configuração e que o par (γ_1, γ_2) tem tipo Γ . Assuma ainda que os comprimentos (períodos) de γ_1 e γ_2 são racionalmente dependentes. Então existem dois inteiros positivos a e b tais que $F(y) = G(y)$, onde $F, G : (\mathbb{R}^n)^{(s)} \longrightarrow \mathbb{R}$ são dadas por

$$F(z_1, \dots, z_s) = a \sum_{i=1}^k \|z_{\omega(i)} - z_{\omega(i+1)}\|, \quad (3.4.5)$$

$$G(z_1, \dots, z_s) = b \sum_{i=1}^l \|z_{\delta(i)} - z_{\delta(i+1)}\|. \quad (3.4.6)$$

Como ω e δ são admissíveis, F e G são C^∞ em $(\mathbb{R}^n)^{(s)}$. Por outro lado, $Y = f(X)$, portanto existe $x = (x_1, \dots, x_s) \in X^{(s)}$ com $f(x_i) = y_i, i = 1, \dots, s$. Claro que x é um ponto crítico de ambas $F \circ f^s$ e $G \circ f^s : X^{(s)} \rightarrow \mathbb{R}$.

O conjunto de todos os ternos (Γ, a, b) (Γ configuração, a e b inteiros) é enumerável; podemos pois restringir nossa atenção a Γ, a, b fixos. Para estabelecer o Teorema 3.4.1, é suficiente provar o seguinte

Lema 3.4.1. *Seja $\mathcal{M}_{\Gamma, a, b}$ o conjunto dos $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ tais que para todo $x \in X^{(s)}$ com $f(x) \in U_\omega \cap U_\delta$, temos $F(f^s(x)) \neq G(f^s(x))$ se x é um ponto crítico de ambos $F \circ f^s$ e $G \circ f^s$. Então $\mathcal{M}_{\Gamma, a, b}$ contém um subconjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$.*

Necessitamos primeiro da seguinte propriedade elementar de F que explica o papel do conjunto U_ω .

Lema 3.4.2. *Para todo $y \in U_\omega$ e todo $i \in Im\omega$, existe $j \leq n$ com $\frac{\partial F}{\partial y_i^{(j)}}(y) \neq 0$, onde $y = (y_1, \dots, y_s) \in (\mathbb{R}^n)^{(s)}, y_i = (y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(n)})$.*

Prova do Lema 3.4.2. Usando (3.4.5), (3.2.24), (3.2.25) e (3.2.26), temos

$$\frac{\partial F}{\partial y_i^{(j)}}(y) = a' \sum_{t \in I_i(\omega)} \frac{y_i^{(j)} - y_t^{(j)}}{\|y_i - y_t\|}, \quad (3.4.7)$$

onde $a = a'$ se ω é não-simétrico e $a' = 2a$ se ω é simétrico. Supondo $\frac{\partial F}{\partial y_i^{(j)}}(y) = 0$ para cada $j = 1, \dots, s$, temos

$$\sum_{t \in I_i(\omega)} \frac{y_i - y_t}{\|y_i - y_t\|} = 0,$$

que implica $y_i = \sum_{t \in I_i(\omega)} a_t y_t$ com $\sum_{t \in I_i(\omega)} a_t = 1$. Consequentemente, $y_i \in$ envolvente convexa de $\{y_t; t \in I_i(\omega)\}$, o que contradiz o fato que $y \in U_\omega$. Isto prova o Lema 3.4.2. Analogamente, para todo $y \in U_\delta$ e todo $i \in Im\delta$ existe $j \leq n$ tal que $\frac{\partial G}{\partial y_i^{(j)}}(y) \neq 0$.

Prova do Lema 3.4.1. O conjunto

$$Z = \{y \in U_\omega \cap U_\delta; d(F - G)(y) \neq 0\}, \quad (3.4.8)$$

é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n)^{(s)}$. Pelo Lema 3.4.2 e (3.4.2), vemos que as condições do Teorema 3.3.1 são satisfeitas se escolhermos $H_1 = F, H_2 = G, U = Z, L = F - G, p = 2, q = 1$. Denote por T' o conjunto dos $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ tais que para todo $x \in X^{(s)}$ com $f^s(x) \in Z$, temos $(F - G)(f^s(x)) \neq 0$ se x é um ponto crítico de ambas $F \circ f^s$ e $G \circ f^s$. De acordo com o Teorema 3.3.1, T' contém um subconjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$.

Vamos aplicar o Teorema 3.3.1 novamente. Sem perda de generalidade, podemos supor que $1 \in Im\omega$. Ponha

$$L_t(y) = \frac{\partial F}{\partial y_1^{(t)}}(y) - \frac{\partial G}{\partial y_1^{(t)}}(y) \quad (3.4.9)$$

para $t = 1, \dots, n, y \in (\mathbb{R}^n)^{(s)}$. Então

$$L = (L_1, \dots, L_n) : (\mathbb{R}^n)^{(s)} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.4.10)$$

é uma aplicação C^∞ . Precisamos verificar que $dL(y) \neq 0$ para todo $y \in (\mathbb{R}^n)^{(s)}$. Assuma $y = (y_1, \dots, y_s) \in (\mathbb{R}^n)^{(s)}$ e $dL_t(y) = 0$ para $t = 1, \dots, n$. Substituindo em (3.4.9) as derivadas de F e G por suas expressões, obtemos

$$L_t(y) = a' \sum_{i \in I_1(\omega)} \frac{y_1^{(t)} - y_i^{(t)}}{\|y_1 - y_i\|} - b' \sum_{i \in I_t(\delta)} \frac{y_1^{(t)} - y_i^{(t)}}{\|y_1 - y_i\|},$$

com $b' = b$ ou $2b$. Tomando $i \in I_1(\omega)$, a condição (3.4.3) garante $i \notin I_1(\delta)$. Consequentemente,

$$0 = \frac{1}{a'} \frac{\partial L_t}{\partial y_i^{(t)}}(y) = \left(\sum_{j \neq t} (y_1^{(j)} - y_i^{(j)})^2 \right) / \|y_1 - y_i\|^3$$

para $t = 1, \dots, n$. Como $n \geq 2$, obtemos $y_1^{(j)} = y_i^{(j)}$ para cada $j = 1, \dots, n$, isto é $y_1 = y_i$. Isto contradiz as condições $i \neq 1, i \in I_1(\omega)$ e $y \in (\mathbb{R}^n)^{(s)}$; portanto $dL(y) \neq 0$.

Temos de considerar dois casos. Primeiro, assuma que $Im\omega = \{1, \dots, s\}$. Então as hipóteses do Teorema 3.3.1 são satisfeitas com $H = F, U = U_\omega$ e L definida por (3.4.9), (3.4.10). Denote por T'' o conjunto dos $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ tais que para todo $x \in X^{(s)}$ com $f^s(x) \in U_\omega$, temos $L(f^s(x)) \neq 0$ se x é um ponto crítico de $F \circ f^s$. Pelo teorema 3.3.1, T'' contém um subconjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ e o mesmo é verdade de $T = T' \cap T''$. Para mostrar que $T \subset \mathcal{M}_{\Gamma, a, b}$, seja $f \in T$ e assuma que $x \in X^{(s)}$ é um ponto crítico de ambas aplicações $F \circ f^s$ e $G \circ f^s$ e $f^s(x) \in U_\omega \cap U_\delta$. A condição $f \in T''$ implica $L(f^s(x)) \neq 0$, e de (3.4.9), $d(F - G)(f^s(x)) \neq 0$; portanto, $f^s(x) \in Z$. Por outro lado, $f \in T'$ e obtemos $F(f^s(x)) \neq G(f^s(x))$, isto é $f \in \mathcal{M}_{\Gamma, a, b}$. Assim, neste caso, $\mathcal{M}_{\Gamma, a, b}$ contém um subconjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$.

Agora considere o caso em que $Im\omega$ é um subconjunto próprio de $\{1, \dots, s\}$. Então

$$Z = U_\omega \cap U_\delta. \quad (3.4.11)$$

De fato, $Z \subset U_\omega \cap U_\delta$ segue de (3.4.8). Seja $i \leq s$ com $i \notin Im\omega$. Então $\frac{\partial F}{\partial y_i^{(j)}}(y) = 0$ para todo $y \in (\mathbb{R}^n)^{(s)}$ e todo $j \leq n$. Por outro lado, devido a (3.4.2), temos $i \in Im\delta$ e, como mencionamos acima, para todo $y \in U_\delta$ existe $j \leq n$ com $\frac{\partial G}{\partial y_i^{(j)}}(y) \neq 0$. Assim, $d(F - G)(y) \neq 0$ para cada $y \in U_\delta$, o que mostra que $U_\omega \cap U_\delta \subset Z$. De (3.4.11) concluímos que $T' \subset \mathcal{M}_{\Gamma, a, b}$. Isto completa a prova do Lema 3.4.1 e, conseqüentemente, também do Teorema 3.4.1.

§ 3.5 O Espectro da Aplicação de Poincaré de Raios Periódicos Ordinários em \mathbb{R}^2 .

Neste parágrafo somente consideramos raios periódicos ordinários γ (em $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$) refletindo sobre $X = \partial\mathcal{O}$. Nosso objetivo é estudar o espectro da aplicação de Poincaré P_γ , associada a γ , quando \mathcal{O} é genérico. Primeiro, necessitamos recordar algumas notações e resultados sobre a representação de P_γ , provada em [Pe-Vo]. Sejam $Q_1, \dots, Q_k, Q_{k+1} = Q_1$ os

sucessivos pontos de reflexão de γ . Denote por D_i a reta orientada passando pelos pontos Q_i e Q_{i+1} , $i = 1, \dots, k$, com direção colinear com a do vetor $\overrightarrow{Q_i Q_{i+1}}$. Seja Π_i a reta ortogonal a D_i . Escolha um ponto $P_1 \in D_k$ tal que $\|\overrightarrow{Q_1 P_1}\| = 1$, $\overrightarrow{Q_1 P_1}$ tem a direção de D_k . O produto $\Pi_k \times \Pi_k$ é um subespaço simplético de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Para obter a representação de P_γ , exploremos o conjunto das retas orientadas que estão suficientemente próximas a D_k . Estas retas podem ser identificadas com os pares $(u, v) \in \Pi_k \times \Pi_k$, suficientemente próximos de $(0, 0)$. Mais precisamente, dado $(u, v) \in \Pi_k \times \Pi_k$, considere a reta $l(u, v)$ que passa em $P_1 + u$ com direção $\overrightarrow{Q_1 P_1} + v$. (Aqui identificamos o vetor $P_1 + u$ com um ponto). A imagem de $l(u, v)$, após m reflexões em $\partial\mathcal{O}$, é uma reta orientada $l(\tilde{u}, \tilde{v})$, determinada pelo par $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \Pi_k \times \Pi_k$. Assim, obtemos uma aplicação

$$\phi_k : (u, v) \in \Pi_k \times \Pi_k \longrightarrow (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \Pi_k \times \Pi_k, \quad (3.5.1)$$

definida para (u, v) numa pequena vizinhança de $(0, 0)$. O diferencial $d\phi_k(0, 0)$ é a aplicação de Poincaré P_γ , associada a γ , expressa na base de Π_k (cf. [Pe-Vo]). A escolha do ponto inicial sobre γ não muda P_γ , exceto por uma similitude. Assim o espectro de P_γ é independente da escolha do ponto inicial sobre γ .

Para descrever a representação de P_γ (na base de Π_k), obtida em [Pe-Vo], introduzimos algumas notações. Seja σ_i a simetria com relação à reta tangente α_i a $\partial\mathcal{O}$ em Q_i , e seja $\|\overrightarrow{Q_i Q_{i+1}}\| = \lambda_i$, $i = 1, \dots, k$. Ponha $s_k = \sigma_k \cdots \sigma_2 \sigma_1$ e sejam ψ_i os números

$$\psi_i = \frac{2}{\lambda_i} [\langle N_{Q_i}, Q_{i+1} - Q_i \rangle \epsilon_i \kappa_i], \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.5.2)$$

onde $\epsilon_i = \pm 1$, N_{Q_i} é a normal a $\partial\mathcal{O}$ no ponto Q_i , κ_i é a curvatura de $\partial\mathcal{O}$ em Q_i e \langle, \rangle denota o produto escalar em \mathbb{R}^2 . Observe que s_k é uma aplicação unitária na reta Π_k e, portanto, $s_k = \epsilon = \pm 1$.

Então temos a seguinte representação (cf. [Pe-Vo]):

$$P_\gamma = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_k \\ \psi_k & 1 + \lambda_k \psi_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ \psi_1 & 1 + \lambda_1 \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.5.3)$$

Suponha agora que X é uma subvariedade C^∞ compacta de dimensão um de \mathbb{R}^2 , que ω é uma aplicação admissível e que $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2)$. Considere um raio periódico ordinário γ refletindo em $f(X)$, de tipo ω . Então existe $x = (x_1, \dots, x_s) \in X^{(s)}$ tal que $f(x_{\omega(1)}), \dots, f(x_{\omega(k)})$ são os sucessivos pontos de reflexão de γ . Podemos supor, por razões técnicas, que a curvatura de $f(X)$ não se anula em $f(x_i)$ para todo $i = 1, \dots, s$. Esta propriedade é genericamente verdadeira (cf. [Pe-St2], Teorema B.3 no Apêndice B). Sejam

$$\lambda_i = \|f(x_{\omega(i+1)}) - f(x_{\omega(i)})\|, \quad (3.5.4)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_i \\ \psi_i & 1 + \lambda_i \psi_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.5.5)$$

Aqui os números ψ_i são dados, de acordo com (3.5.2), por

$$\psi_i = \frac{2}{\lambda_i} [\langle N_{\omega(i)}, f(x_{\omega(i+1)}) - f(x_{\omega(i)}) \rangle > \epsilon_{\omega(i)} \kappa_{\omega(i)}] \quad (3.5.6)$$

onde $\epsilon_i = \pm 1$, κ_i é a curvatura de $f(X)$ em $f(x_i)$. O vetor normal N_i a $f(X)$ no ponto $f(x_i)$ tem a forma (3.2.22). Os números $\epsilon_{\omega(i)}$ são escolhidos de tal forma que $\frac{\psi_i}{\kappa_{\omega(i)}} > 0$, $i = 1, \dots, k$.

Se o número complexo μ pertence ao espectro da aplicação de Poincaré P_γ , então $\mu \in \mathbb{R} \cup S^1$, uma vez que P_γ é uma aplicação real simplética. Portanto, obtemos

$$\text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} A_k \cdots A_1 \right] - \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) = 0. \quad (3.5.7)$$

Introduzimos o multiíndice

$$\chi = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_s), \quad \epsilon_i = \pm 1, \quad i = 1, \dots, s. \quad (3.5.8)$$

Considere a aplicação (3.2.29)-(3.2.30). Fixando a aplicação admissível ω , o multiíndice χ e os números $\epsilon = \pm 1$, $\mu \in \mathbb{R} \cup S^1$, denotamos por $T(\omega, \chi, \epsilon, \mu)$ o conjunto dos $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2)$ tais que para todo ponto crítico $x \in X^{(s)}$ da aplicação F o f^s , com $f^s(x) \in U_\omega$, a condição (3.5.7) não é válida. Nosso propósito é mostrar que $T(\omega, \chi, \epsilon, \mu)$ contém um subconjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2)$. Para isto, se M é dada em (3.2.10) com $r = 2, n = 2$, necessitamos do

Lema 3.5.1. *Seja Σ o conjunto dos $\sigma = (j^2 f_1(x), \dots, j^2 f_s(x_s)) \in M$ tais que $x = (x_1, \dots, x_s)$ é um ponto crítico de F o f^s e (3.5.7) é válido com A ; dado por (3.5.4)-(3.5.6). Então existem subvariedades C^∞ , $\{W_m\}_{m=1}^\infty$, de M tendo as propriedades:*

$$\text{codim } W_m = s + 1, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.5.9)$$

$$\Sigma \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} W_m. \quad (3.5.10)$$

Demonstração: Considere uma vizinhança coordenada \mathcal{D} de um elemento de σ , dada por (3.2.11) com $r = 2, n = 2$, e seja Θ uma carta determinada por (3.2.18). É suficiente mostrar que $\Theta(\mathcal{D} \cap \Sigma)$ pode ser coberto por um número finito de subvariedades C^∞ de $\Theta(\mathcal{D})$, de codimensão $s + 1$.

Um elemento $\xi \in \Theta(\mathcal{D})$ tem a forma

$$\xi = (u; v; a; b) \in \mathbb{R}^{(s)} \times (\mathbb{R}^2)^{(s)} \times \mathbb{R}^{2s} \times \mathbb{R}^{2s}, \quad (3.5.11)$$

onde u, v são dados por (3.2.13)-(3.2.14) e $a = (a_i^{(t)})_{\substack{t=1,2 \\ 1 \leq i \leq s}}$ e $b = (b_i^{(t)})_{\substack{t=1,2 \\ 1 \leq i \leq s}}$ são como em (3.2.19) e (3.2.20) respectivamente.

Ponha

$$E(\xi) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} A_k \cdots A_1 \right] - \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right). \quad (3.5.12)$$

Aqui, os A_i são definidos por (3.5.5), onde

$$\lambda_i = \|v_{\omega(i+1)} - v_{\omega(i)}\|, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.5.13)$$

$$\psi_i = \frac{1}{\lambda_i} \left[a_j^{(2)} \left(v_{\omega(i+1)}^{(1)} - v_{\omega(i)}^{(1)} \right) - a_j^{(1)} \left(v_{\omega(i+1)}^{(2)} - v_{\omega(i)}^{(2)} \right) \right] \epsilon_j \kappa_j(\xi), \quad (3.5.14)$$

com $j = \omega(i)$, $i = 1, \dots, k$ e

$$\kappa_j(\xi) = \frac{a_j^{(1)} b_j^{(2)} - a_j^{(2)} b_j^{(1)}}{\left(a_j^{(1)2} + a_j^{(2)2} \right)^{3/2}}, \quad j = \omega(i). \quad (3.5.15)$$

Obviamente, $E(\xi)$ pode ser escrito como um polinômio $E(\xi) = \sum_{|\tau| \leq k} d_\tau \kappa^\tau$, onde $\tau = (t_1, \dots, t_s)$ é um multiíndice, $|\tau| = t_1 + \dots + t_s$, $t_i \in \mathbb{N}$, $\kappa^\tau = \kappa_1^{t_1} \dots \kappa_s^{t_s}$ e $d_\tau = d_\tau(\chi, \epsilon, \mu, v, a)$. É importante observar que o polinômio $E(\xi)$ é não-trivial uma vez que $E(\xi)$ é um polinômio não trivial com respeito a ψ_1, \dots, ψ_k , tendo, no máximo, um coeficiente nulo. Devido a (3.2.16), (3.5.12) e à definição de \sum , obtemos

$$\Theta(\mathcal{D} \cap \sum) = \{ \xi \in \Theta(\mathcal{D}); E(\xi) = 0 \text{ e } c_i(\xi) = 0 \text{ para } i = 1, \dots, s \}, \quad (3.5.16)$$

onde

$$c_i(\xi) = \frac{\partial F}{\partial y_i^{(1)}}(v) a_i^{(1)} + \frac{\partial F}{\partial y_i^{(2)}}(v) a_i^{(2)}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (3.5.17)$$

Dados dois multiíndices τ, τ' , escrevemos $\tau < \tau'$ se $\tau = (t_1, \dots, t_s)$, $\tau' = (t'_1, \dots, t'_s)$ e $t'_i \geq t_i$, $i = 1, \dots, s$, $|\tau'| > |\tau|$. Sejam τ e τ' tais que $\tau < \tau'$, $|\tau| + 1 = |\tau'| \leq k$ e ponha

$$M(\tau, \tau') = \left\{ \xi \in \Theta(\mathcal{D}); c_i(\xi) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad \frac{\partial^{|\tau|} E}{\partial \kappa^\tau}(\xi) = 0, \quad \frac{\partial^{|\tau'|} E}{\partial \kappa^{\tau'}}(\xi) \neq 0 \right\}. \quad (3.5.18)$$

Temos então,

$$\sum \subset \bigcup_{\substack{\tau < \tau' \\ |\tau| + 1 = |\tau'| \leq k}} M(\tau, \tau').$$

Precisamos mostrar que $M(\tau, \tau')$ são subvariedades C^∞ de $\Theta(\mathcal{D})$, de codimensão $s + 1$. Com efeito, defina a aplicação $R_\tau : \Theta(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^{s+1}$ por

$$R_\tau(\xi) = \left(c_1(\xi), \dots, c_s(\xi), \frac{\partial^{|\tau|} E}{\partial \kappa^\tau}(\xi) \right). \quad (3.5.19)$$

Provaremos que R_τ é uma submersão em todo ponto $\xi \in M(\tau, \tau')$. Seja $\xi \in M(\tau, \tau')$ e suponha que

$$\sum_{i=1}^s C_i \text{grad } c_i(\xi) + A \text{grad } \frac{\partial^{|\tau|} E}{\partial \kappa^\tau}(\xi) = 0 \quad (3.5.20)$$

com constantes C_i e A . Seja

$$\tau = (t_1, \dots, t_s), \quad \tau' = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_i + 1, t_{i+1}, \dots, t_s)$$

para algum $i \in \{1, \dots, s\}$. Então, (3.5.15) fornece $\frac{\partial \kappa_i}{\partial b_i^{(1)}}(\xi) = 0$ para $i \neq j$ e $\frac{\partial \kappa_j}{\partial b_j^{(1)}}(\xi) = -a_j^{(2)} / (a_j^{(1)2} + a_j^{(2)2})^{3/2}$.

Ademais, temos

$$\frac{\partial}{\partial b_i^{(1)}} \left(\frac{\partial^{|\tau|} E}{\partial \kappa^\tau} \right) (\xi) = \frac{\partial^{|\tau'|} E}{\partial \kappa^{\tau'}}(\xi) \frac{\partial \kappa_i}{\partial b_i^{(1)}}(\xi).$$

Derivando (3.5.20) com respeito a $b_i^{(1)}$, obtemos

$$A \frac{\partial^{|\tau'|} E}{\partial \kappa^{\tau'}}(\xi) a_i^{(2)} / (a_i^{(1)2} + a_i^{(2)2})^{3/2} = 0.$$

Por outro lado, $\xi \in M(\tau, \tau')$ implica $A a_i^{(2)} = 0$. Analogamente, considerando a derivada de (3.5.20) com respeito a $b_i^{(2)}$, achamos $A a_i^{(1)} = 0$. Consequentemente, explorando (3.2.21), concluímos que $A = 0$. Tomamos agora as derivadas de (3.5.20) com respeito a $a_i^{(t)}$, $i = 1, \dots, s$. De (3.5.17) segue que $C_i \frac{\partial F}{\partial v_i^{(t)}}(v) = 0$, $t = 1, 2$. Como $\xi \in \Theta(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} \subset M$, deduzimos de (3.2.14) e (3.2.10), que $v = (v_1, \dots, v_s) \in U_\omega$. Estamos agora em condições de aplicar o

Lema 3.4.2 e concluir que $\frac{\partial F}{\partial y_i^{(t)}}(v) \neq 0$ para $t = 1$ ou 2 . Assim $C_i = 0$ para $i = 1, \dots, s$ e R_τ é uma submersão em qualquer ponto de $M(\tau, \tau')$. De acordo com (3.5.18) e (3.5.19), obtemos $M(\tau, \tau') = R_\tau^{-1}(0) \cap \mathcal{O}_{\tau'}$ com $\mathcal{O}_{\tau'} = \{\xi \in \Theta(\mathcal{D}); \frac{\partial^{|\tau'|} E}{\partial \kappa^{\tau'}}(\xi) \neq 0\}$.

Por conseguinte, $M(\tau, \tau')$ é uma subvariedade C^∞ de $\Theta(\mathcal{D})$, de codimensão $s + 1$, o que termina a prova do Lema 3.5.1.

Do fato que

$$T(\omega, \chi, \epsilon, \mu) = \{f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2); j_s^2 f(X^{(s)}) \cap \sum = \phi\}, \quad (3.5.21)$$

obtemos, pelos argumentos dados no Parágrafo 3.2.6, o

Corolário 3.5.1. *$T(\omega, \chi, \epsilon, \mu)$ contém um subconjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2)$.*

Seja \mathcal{A} um conjunto enumerável de números complexos $\mu \in \mathbb{R} \cup S^1$. Denote por $T'_\mathcal{A}$ o conjunto dos $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2)$ tais que para todo raio periódico ordinário γ , refletindo em $f(X)$ em pontos onde a curvatura de $f(X)$ não se anula, o espectro de P_γ não intersecta \mathcal{A} . É óbvio que

$$T'_\mathcal{A} \supset \bigcap_{\omega} \bigcap_{\chi} \bigcap_{\epsilon = \pm 1} \bigcap_{\mu \in \mathcal{A}} T(\omega, \chi, \epsilon, \mu), \quad (3.5.22)$$

onde ω percorre todas aplicações admissíveis e χ percorre todos os multiíndices $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_s)$ com $\epsilon_i = \pm 1, i = 1, \dots, s$. Aplicando o Corolário 3.5.1, concluímos que $T'_\mathcal{A}$ contém um subconjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2)$.

O resultado principal deste parágrafo é

Teorema 3.5.1. *Seja \mathcal{A} um conjunto enumerável de números complexos $\mu \in \mathbb{R} \cup S^1$. Seja $T_\mathcal{A}$ o conjunto dos $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2)$ tais que para todo raio periódico ordinário γ refletindo*

em $f(X)$, o espectro da aplicação de Poincaré P_γ , associada a γ , não intersecta \mathcal{A} . Então $T_{\mathcal{A}}$ contém um subconjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2)$.

Demonstração: Seja $T'_{\mathcal{A}}$ o conjunto definido acima e seja R o conjunto dos $f \in C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2)$ tais que para todo raio periódico ordinário γ refletindo em $f(X)$, a curvatura de $f(X)$ não se anula em nenhum ponto de reflexão de γ . De acordo com o Teorema B.3 do Apêndice B de [Pe-St2], R contém um subconjunto residual de $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2)$. Obviamente $T_{\mathcal{A}} \supset T'_{\mathcal{A}} \cap R$. Isto prova o Teorema.

O Teorema 3.5.1, pode ser considerado como a primeira parte de um teorema de tipo Kupka-Smale para bilhares em variedades com bordo. Naturalmente, o caso mais importante é quando \mathcal{A} é o conjunto de todas as raízes da unidade $\sqrt[p]{1}$, $p \in \mathbb{N}$. Neste caso, o resultado foi estabelecido em [La] para domínios genéricos estritamente convexos do \mathbb{R}^2 . Por outro lado, um resultado análogo para geodésicas periódicas em variedades Riemannianas *sem fronteira*, foi obtido em [Kl-Ta]. Nestes artigos, os autores exploram perturbações locais respectivamente da fronteira e da métrica Riemanniana.

§ 3.6 Igualdade da Relação de Poisson para Domínios Estritamente Convexos Genéricos em \mathbb{R}^2 .

Seja \mathcal{O} um domínio estritamente convexo de \mathbb{R}^2 com fronteira $\partial\mathcal{O} = X$, e denote por W a vizinhança da Id em $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2)$ tal que para todo $f \in W$ o domínio limitado \mathcal{O}_f é estritamente convexo. De acordo com os resultados dos Parágrafos 3.4. e 3.5, existe um subconjunto residual, $R \subset W$, tal que para todo $f \in R$, os comprimentos (períodos) de todas as geodésicas periódicas ordinárias γ , refletindo em $f(X)$ (lembramos que, neste caso, os únicos raios periódicos são os ordinários e $f(X)$); neste parágrafo γ denotará sempre uma tal geodésica) são racionalmente independentes e o espectro da aplicação de Poincaré P_γ , associada a qualquer γ , não contém $\sqrt[p]{1}$, $p \in \mathbb{N}$.

Seja $S_D^f(t) = \sum_j \cos \mu_j^f t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ com $f \in R \subset C_{\text{emb}}^\infty(X; \mathbb{R}^2)$, onde $\{(\mu_j^f)^2\}$ é o espectro do problema (3.1.5). Mostraremos que, genericamente, para todo γ , o período T_γ é um ponto isolado em $\text{supp.sing.} S_D^f(t)$. Para este propósito, aplicaremos o Teorema 3.4.1. Entretanto, para algum γ poderíamos ter $T_\gamma/L_f \in \mathbb{Q}$ (conjunto dos racionais), L_f sendo o comprimento da fronteira $f(X)$. É conhecido (cf. [Ma-Me]) que para todo $m \in \mathbb{N}$, mL_f não é isolado em $\text{supp.sing.} S_D^f(t)$ e o mesmo seria então verdade de qT_γ para um $q \in \mathbb{N}$, adequado. Para evitar esta dificuldade usaremos o seguinte lema cuja demonstração pode ser encontrada em [Pe-St2];

Lema 3.6.1. *Existe um subconjunto residual R' de W tal que para todo $f \in R'$, temos*

$$T_\gamma \neq \frac{p}{q} L_f, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad \forall \gamma. \quad (3.6.1)$$

Construimos pois um conjunto residual $R_0 = R \cap R'$, em W , tal que para todo $f \in R_0$ e toda geodésica periódica ordinária γ , refletindo em $f(X)$, o período T_γ é um ponto isolado em $\text{supp.sing.} S_D^f(t)$ e, ademais, existe somente um raio γ com período T_γ . A segunda afirmação segue do Teorema 3.4.1 e do Lema 3.6.1. Para provar a primeira, assumimos que para algum raio periódico ordinário γ , refletindo em $f(X)$, $f \in R_0$, existe uma sequência γ_m de tais raios, com $T_{\gamma_m} \rightarrow T_\gamma$, quando $m \rightarrow \infty$. Suponha que γ_m passa no ponto $x_m \in f(X)$, com direção $\xi_m \in S^1$. Extraindo uma subsequência, podemos assumir que $\lim_{m \rightarrow \infty} (x_m, \xi_m) = (x_0, \xi_0)$. Se γ passa em x_0 com direção ξ_0 , obtemos uma contradição com o fato de $1 \notin \text{espectro}(P_\gamma)$. Do contrário, a continuidade do fluxo Hamiltoniano generalizado (cf. [Me-Sj]) implica a existência de uma geodésica generalizada γ_0 , em \mathcal{O}_f , passando em x_0 com direção ξ_0 , tal que $T_{\gamma_0} = T_\gamma$. Se $\langle \xi_0, N_{x_0} \rangle > 0$, γ_0 é um raio periódico ordinário, refletindo em $f(X)$, e obtemos uma contradição com a conclusão do Teorema 3.4.1. Se $\langle \xi_0, N_{x_0} \rangle = 0$, temos $\gamma_0 = f(X)$ o que contradiz o Lema 3.6.1.

Como a aplicação de Poincaré P_γ para todo $\gamma, f \in R_0$, não possui valores próprios da forma $\sqrt[p]{1}$, $p \in \mathbb{N}$, estamos em condições de aplicar o resultado de Guillemin-Melrose (cf.

[Gu-Me], Teorema 2, e Observação 1.5.1) que nos diz que $S_D^f(t)$, próximo de T_γ , é igual a

$$(-1)^{N_\gamma} T_\gamma |\det(Id - P_\gamma)|^{-1/2} \delta(t - T_\gamma) + h(t), \quad (3.6.2)$$

onde N_γ é o número de reflexões de γ (o fator de Maslov σ que aparece em [Gu-Me] é igual, no nosso caso especial, a um) e $h(t) \in L_{loc}^1$. Assim obtemos, de imediato, que $T_\gamma \in \text{supp.sing.} S_D^f(t)$. Analogamente, o mesmo argumento mostra que $mT_\gamma \in \text{supp.sing.} S_D^f(t)$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Como mencionado acima, mL_f pode ser aproximado por períodos $T_{\gamma_{m,s}}$ de raios periódicos ordinários $\gamma_{m,s}$ refletindo em $f(X)$, tendo número de rotação m e s reflexões (cf. [Ma-Me]). Assim $mL_f \in \text{supp.sing.} S_D^f(t)$ também, e obtemos o seguinte (cf. [Pe-St2]).

Teorema 3.6.1. *Suponha $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ estritamente convezo. Então existe uma vizinhança W da Id em $C_{emb}^\infty(X, \mathbb{R}^2)$ e um conjunto residual R em W tal que para todo $f \in R$, temos*

$$\text{supp.sing.} S_D^f(t) = \{0\} \cup \mathcal{L}_\mathcal{O}, \quad (3.6.3)$$

onde $S_D^f(t) = \sum_j \cos \mu_j^f t$ e $\{(\mu_j^f)^2\}_{j=1}^\infty$ é o espectro do problema (3.1.5).

Observação 3.6.1. *Em [Pe-St2], os autores mostraram também que se pode recuperar o espectro de P_γ, γ sendo um raio periódico ordinário refletindo em $f(X)$, $f \in R$, a partir de $\{(\mu_j^f)^2\}$.*

§ 3.7 Comentários e Referências Bibliográficas.

O Teorema 3.5.1 foi demonstrado em [Pe-St6] para $n \geq 2$. No mesmo artigo os autores provaram que genericamente todos os raios periódicos, refletindo em $X = \partial\mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, são ordinários (ou seja (IV) não ocorre genericamente mesmo se $n \geq 2$). Um teorema interessante (com $n \geq 2$) mostrado em [Pe-St7] é que, genericamente, para todo $s \geq 2$, existe, no máximo, um número finito, $\mathcal{N}(s)$, de raios periódicos refletindo em X , tendo exatamente s

pontos de reflexão. Aqui o surpreendente é que a geometria de X é arbitrária e não é necessário investigar (III) ou seja, a existência e comportamento das geodésicas generalizadas periódicas (tendo arcos sobre $\partial\mathcal{O}$ e segmentos lineares no interior de \mathcal{O}) que poderiam ser aproximadas por raios periódicos refletindo em $\partial\mathcal{O}$. Este resultado permite colocar o problema (ainda em aberto): qual é o comportamento assintótico de $\mathcal{N}(s)$, quando $s \rightarrow \infty$, no caso de domínios genéricos tais que $\mathcal{N}(s) < \infty$ para todo $s \in \mathbb{N}$? A resposta deve estar relacionada com as propriedades ergódicas do sistema dinâmico discreto associado à aplicação bilhar. Uma outra consequência é que, genericamente, o conjunto de raios periódicos, refletindo em $\partial\mathcal{O}$, é, no máximo, enumerável. Isto prova que a propriedade (1.6.27) é genericamente verdadeira (cf. Observação 1.6.3).

Para a obtenção desses teoremas foi importante estabelecer que, genericamente, todo raio periódico passa apenas uma vez por cada um de seus pontos de reflexão, e que dois raios periódicos diferentes não possuem pontos de reflexão comuns (cf. [St1]). Convém observar que todos os resultados genéricos mencionados acima (ou seus análogos como (II')) permanecem válidos para raios (ω, θ) ; em particular, genericamente todos os raios (ω, θ) são ordinários (cf. [Pe-St7]).

Resultados genéricos sobre a igualdade em (2.4.10) são pouco conhecidos. Não obstante, em [Pe-St4], os autores demonstraram que se

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^M \mathcal{O}_i, \quad \bar{\mathcal{O}}_i \cap \bar{\mathcal{O}}_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad \mathcal{O}_i \text{ estritamente convexos para } i = 1, \dots, M, \quad (3.7.1)$$

então, para direções genéricas (ω, θ) , os simétricos dos tempos de permanência de todos os raios (ω, θ) ordinários estão incluídos no suporte singular de $S(t, \theta, \omega)$; em outras palavras se $\omega \in S^{n-1}$ é fixado, existe um subconjunto residual $\mathcal{R}(\omega) \subset S^{n-1}$ tal que para cada $\theta \in \mathcal{R}(\omega), \theta \neq \omega$, temos:

$$\text{supp.sing.} S(\cdot, \theta, \omega) = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{L}'_{\omega, \theta}} \{-T_\gamma\}, \quad (3.7.2)$$

onde $\mathcal{L}'_{\omega, \theta}$ designa o conjunto de todos os raios (ω, θ) ordinários (com direção de incidência ω e direção de espalhamento θ) com reflexões sobre $\partial\mathcal{O}$. Ademais, próximo de $-T_\gamma$, temos a seguinte “fórmula de Poisson” (cf. [Pe1])

$$S(t, \theta, \omega) = (2\pi)^{(1-n)/2} (-1)^{m_\gamma - 1} i^{\sigma_\gamma} \cdot \left| \frac{J_\gamma \langle \nu(x_\gamma), \omega \rangle}{\langle \nu(y_\gamma), \theta \rangle} \right|^{-1/2} \delta^{(n-1)/2}(t + T_\gamma) \quad (3.7.3)$$

+ termos mais regulares .

Aqui, m_γ é o número de reflexões de γ , $\sigma_\gamma \in \mathbb{N}$ é o índice de Maslov, J_γ é a secção transversal diferencial de γ , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar em \mathbb{R}^n , x_γ (respect. y_γ) é o primeiro (respect. último) ponto de reflexão e $\nu(x)$ é a normal unitária exterior a $\partial\mathcal{O}$ no ponto $x \in \partial\mathcal{O}$ (apontando para $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$). As expressões (3.7.2) e (3.7.3) indicam que se $\omega \in S^{n-1}$, $\theta \in \mathcal{R}(\omega)$, $\theta \neq \omega$, podemos, a partir das singularidades de $S(t, \theta, \omega)$, recuperar como dados de espalhamento, todos os $T_\gamma, \gamma \in \mathcal{L}_{\omega, \theta}$, juntamente com os correspondentes coeficientes C_γ de $\delta^{(n-1)/2}(t + T_\gamma)$. Todavia, não podemos através do núcleo de espalhamento, $S(t, \theta, \omega)$, determinar quando $\theta \in \mathcal{R}(\omega)$.

Os resultados de Melrose e Sjöstrand, [Me1], [Me-Sj], implicam que para obstáculos não-confinantes, os tempos de permanência T_γ , de todos os raios $(\omega, \theta), \gamma$, são uniformemente limitados quando (ω, θ) varia em $S^{n-1} \times S^{n-1}$. Para obstáculos confinantes, espera-se que caso ω, θ sejam adequadamente escolhidos, tenha-se:

$$\sup\{T_\gamma : \gamma \in \mathcal{L}_{\omega, \theta}\} = \infty . \quad (3.7.4)$$

Petkov e Stojanov, [Pe-St4], estabeleceram (3.7.4) para obstáculos do tipo (3.7.1), fazendo a hipótese adicional

$$\text{para todos os ternos } (i_1, i_2, i_3) \in \{1, \dots, M\}^3, i_j \neq i_k, j \neq k, \quad (3.7.5)$$

a envolvente convexa de $\mathcal{O}_{i_1} \cup \mathcal{O}_{i_2}$ não intersecta \mathcal{O}_{i_3}

Esta condição foi introduzida por Ikawa, [Ik6], que provou que para cada *configuração* $\alpha = (i_1, \dots, i_k)$, $i_1 \neq i_k$, existe um único raio periódico γ_α com sucessivos pontos de reflexão $\tilde{x}_j \in \partial\mathcal{O}_{i_j}$, $j = 1, \dots, k$. Por uma configuração α , de comprimento k , entendemos um símbolo $\alpha = (i_1, \dots, i_k)$, com $i_j \in \{1, \dots, M\}$ para todo j , e $i_j \neq i_{j+1}$ para $j = 1, 2, \dots, k-1$. Sob a condição (3.7.5), foi mostrado em [Pe-St4], que para cada α , escolhendo-se adequadamente ω, θ , para todo $q \geq 0$, existe um raio (ω, θ) ordinário γ_m^{1l} com $m = qk + l$ pontos de reflexão $x_{pk+j} \in \partial\mathcal{O}_{i_j}$, $0 \leq p \leq q$, $1 \leq j \leq k$ ($1 \leq j \leq l$ se $p = q$). A escolha de ω e θ depende de uma *condição de visibilidade* envolvendo \mathcal{O}_{i_1} e \mathcal{O}_{i_l} , que é possível obter-se utilizando (3.7.5).

Ainda em [Pe-St4], os autores estudaram o comportamento assintótico dos tempos de permanência T_{qk+l}^{1l} de γ_{qk+l}^{1l} , quando $q \rightarrow \infty$. O termo principal deste desenvolvimento assintótico é qd_α , d_α sendo o comprimento de γ_α . Consequentemente, o espectro dos comprimentos de espalhamento $\{T_\gamma : \gamma \in \mathcal{L}'_{\omega, \theta}\}$ determina os comprimentos de todos os raios periódicos γ_α . Por esta razão, podemos considerar d_α como invariante de espalhamento. Em [Pe-St2] (cf. comentários no Parágrafo 3.1), os mesmos autores provaram que os d_α podem ser recuperados a partir das singularidades da distribuição λ (cf. (2.4.2) e (2.4.6)), contanto que o obstáculo \mathcal{O} (da forma 3.7.1) seja genérico. O resultado acima diz que podemos obter as mesmas informações utilizando o espectro dos comprimentos de espalhamento.

Marvizi e Melrose, [Ma-Me], e Colin de Verdière, [Co4], estudaram o comportamento assintótico dos comprimentos de geodésicas periódicas em regiões estritamente convexas $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$. Em [Ma-Me], estas geodésicas aproximavam a fronteira $\partial\mathcal{O}$, enquanto em [Co4], elas aproximavam um raio periódico *elítico*. Na situação descrita acima, γ_α é um raio *hiperbólico* e no desenvolvimento assintótico de T_{qk+l}^{1l} são obtidos dois termos módulo um resto $O(\delta^q)$, com $0 \leq \delta < 1$.

Ainda em [Pe-St4], foi examinado o comportamento assintótico do coeficiente C_m^{1l} de $\delta^{(n-1)/2}(t + T_m^{1l})$, em (3.7.3), quando $m \rightarrow \infty$. O resultado é que o termo principal do

desenvolvimento assintótico de $\ln|C_{qk+t}^{1l}|$ quando $q \rightarrow \infty$, é

$$qc_\alpha = -\frac{1}{2}q \sum_{j=1}^{n-1} \ln|\mu_j|, \quad (3.7.6)$$

onde $\mu_j, |\mu_j| > 1$, são os valores próprios da aplicação de Poincaré associada a γ_α .

Nó caso de dois obstáculos $\mathcal{O}_i, i = 1, 2$ (cf. Parágrafo 2.6), a condição (3.7.5) é trivial. Então, do espectro dos comprimentos de espalhamento, podemos recuperar os invariantes $d = \text{dist}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ e $c_d = -\sum_{j=1}^{n-1} \ln|\mu_j|$, relacionados ao raio periódico L (Na notação do Parágrafo 2.6, $\mu_j = 1/\alpha_j$). Ademais, pode ser determinada a primeira sequência de pseudopólos (cf. Definição 2.6.1):

$$-(ic_d)/d + j(d/\pi), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.7.7)$$

Finalmente, em [St2], L. Stojanov obteve uma estimativa exponencial superior para o número de pontos periódicos da aplicação bilhar (billiard ball mapping) associada a bilhares semidispersivos (cf. [Si]).

APÊNDICE

Faremos aqui um resumo muito breve da análise microlocal que necessitamos. Como referências sugerimos o livro de Hörmander, [Ho3], de Duistermaat, [Du] e de Treves, [Tr].

Os operadores pseudodiferenciais foram desenvolvidos como uma ferramenta no estudo das equações diferenciais elíticas. Versões adequadas, mais gerais, podem ser utilizadas também em equações hipolíticas. Entretanto, muitos operadores que surgem na solução de equações diferenciais não são pseudolocais (i.e. não preservam o suporte singular de distribuições). Por exemplo, o operador que leva os dados u e $\partial u/\partial t$, no tempo $t = 0$, na solução no tempo t do problema de Cauchy para a equação da onda, não é pseudolocal. Em [Ho1], Hörmander introduziu uma classe mais ampla de operadores, denominados operadores integrais de Fourier, não mais pseudolocais, a fim de estudar certas equações hiperbólicas. Eles desempenham, no caso de coeficientes variáveis, um papel tão importante quanto o da transformada de Fourier no estudo de equações com coeficientes constantes.

A.1. O Frente de Ondas de uma Distribuição

O (conjunto) *frente de ondas* de uma distribuição é um refinamento da noção de *suporte singular* de uma distribuição .

Seja $u \in D'(X)$, X um conjunto aberto contido em \mathbb{R}^n . De acordo com o teorema de Paley-Wiener, u é C^∞ numa vizinhança de $x_0 \in X$, i.e. $x \notin \text{supp.sing.}u$, se e somente se existe uma vizinhança U de x_0 tal que para todo $\phi \in C_0^\infty(U)$

$$\widehat{\phi u}(\tau\xi) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle e^{-i\tau\langle \cdot, \xi \rangle} \phi, u \rangle = o(\tau^{-N}), \quad \text{para todo } N, \quad (\text{A.1.1})$$

quando $\tau \rightarrow \infty$, uniformemente em $|\xi| = 1$.

Resulta que é útil não apenas localizar em relação a x porém também em relação a ξ .

Isto leva à seguinte definição :

Definição A.1.1 Se $u \in D'(X)$, o frente de ondas de u (denotado $WF(u)$) é o complemento em $T^*(X) \setminus 0$ do conjunto de todos $(x_0, \xi^0) \in T^*(X) \setminus 0$ tais que para alguma vizinhança U de x_0 e alguma vizinhança V de ξ^0 , têm-se para todo $\phi \in C_0^\infty(U)$:

$$\widehat{\phi u}(\tau\xi) = o(\tau^{-N}), \quad \text{para todo } N, \quad \text{quando } \tau \rightarrow \infty. \quad (\text{A.1.2})$$

A noção de $WF(u)$ (devida a Hörmander) pode ser dada de maneira invariante em relação a mudanças de coordenadas o que serve para definir $WF(u)$ se $u \in D'(X)$, X sendo uma variedade.

Exemplo A.1.1 Seja $u = \delta(x) \in D'(\mathbb{R})$. Então $WF(\delta) = \{0\} \times (\mathbb{R} \setminus 0)$.

Proposição A.1.1 $WF(u)$ é um cone fechado em $T^*(X) \setminus 0$ e $\pi(WF(u)) = \text{supp. sing. } u$, onde $\pi : T^*(X) \rightarrow X$ é a projeção natural.

Um subconjunto $\Gamma \subset T^*(X) \setminus 0$ é chamado um cone se

$$(x, \xi) \in \Gamma \implies (x, \tau\xi) \in \Gamma \quad \text{para todo } \tau > 0. \quad (\text{A.1.3})$$

Proposição A.1.2 Se $A : C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ é um operador pseudodiferencial então

$$WF(Au) \subset WF(u) \subset WF(Au) \cup \text{char}(A) \quad (\text{A.1.4})$$

(onde $\text{char}(A)$ é o conjunto característico de A).

A primeira parte em (A.1.4) melhora a propriedade pseudolocal de A ; a segunda parte estende o teorema de regularidade para operadores elíticos.

Daremos agora algumas propriedades do “cálculo do frente de ondas”, utilizadas no texto.

Proposição A.1.3 *Sejam X, Y abertos de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m respectivamente, e φ uma aplicação $C^\infty, \varphi : X \rightarrow Y$. Seja*

$$N_\varphi = \{(y, \eta) \in T^*(Y) \setminus 0; \quad y = \varphi(x), \quad {}^tD\varphi_x \eta = 0 \quad \text{para algum } x \in X\} \quad (A.1.5)$$

onde ${}^tD\varphi_x$ denota a transposta da derivada de φ em x . Então

$$\begin{aligned} \varphi^* : C^\infty(Y) &\rightarrow C^\infty(X) \\ g &\rightarrow g \circ \varphi \end{aligned}$$

se estende a uma aplicação

$$\varphi^* : D'_\Gamma(Y) \rightarrow D'(X)$$

onde $D'_\Gamma(Y) = \{u \in D'(Y); WF(u) \subset \Gamma\}$ e o cone Γ satisfaz $\Gamma \cap N_\varphi = \emptyset$. Ademais $WF(\varphi^*u) \subset \varphi^*(WF(u))$.

Observe que o “pull-back” φ^*u é definido para todo $u \in D'(Y)$ precisamente quando φ' é sobrejetiva, caso em que se conhece bem que tal definição é possível. Em particular, se $X \subset Y$ é uma subvariedade e φ é a inclusão $: X \rightarrow Y$, então φ^* é o operador restrição $: C^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$. Neste caso,

$$N_\varphi = \{(y, \eta) \in T^*(Y) \setminus 0; \quad y \in X, \quad \eta|_{T_x(X)} = 0\}, \quad (A.1.6)$$

isto é N_φ é o fibrado conormal $N^*(X)$ de X em $T^*(Y) \setminus 0$. Podemos pois, definir a restrição de u a X se o fibrado conormal $N^*(X)$ não intersecta $WF(u)$. Por exemplo, se $u \in D'(Y)$ e $Au \in C^\infty$ para algum operador pseudodiferencial A , podemos definir a restrição a X se X

é não-característico, i.e. as normais a X são não-características em relação a A . Este é um fato bem conhecido de *hipoeliticidade parcial*.

Proposição A.1.4 *O "push-forward" $\varphi_* = \int \varphi^*$ é uma aplicação contínua do espaço $\{u \in D'(X); \varphi : \text{supp } u \rightarrow Y \text{ é uma aplicação própria}\}$ em $D'(Y)$. Para um tal u , temos:*

$$WF(\varphi_* u) \subset \{(y, \eta) \in T^*(Y) \setminus 0; y = \varphi(x) \text{ e } (x; \int \mathbb{D}\varphi_x \eta) \in WF(u) \text{ para algum } x \in X\}.$$

Finalmente recordamos o teorema do núcleo de Schwartz (este resultado tem uma extensão óbvia a variedades se se considera densidades de ordem $1/2$).

Teorema A.1.1 *Sejam X, Y abertos do \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m respectivamente. Seja A uma aplicação linear contínua $A : C_0^\infty(X) \rightarrow D'(Y)$. Então existe uma única distribuição $K_A \in D'(X \times Y)$ tal que*

$$A(\varphi)(\psi) = K_A(\varphi \otimes \psi),$$

onde $\varphi \in C_0^\infty(X), \psi \in C_0^\infty(Y)$ e $(\varphi \otimes \psi)(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$.

Em outras palavras temos (formalmente)

$$A(\varphi)(x) = \int K_A(x, y)\varphi(y)dy,$$

ou seja, podemos identificar operadores lineares contínuos A com seus núcleos de Schwartz, K_A .

A.2. Distribuições Definidas por Integrais de Fourier

Formalmente, o núcleo distribuição de um operador pseudodiferencial $A = a(x, D)$, associado ao símbolo $a(x, \xi)$, é dado por

$$(x, y) \mapsto (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) d\xi. \tag{A.2.1}$$

Analogamente, a solução fundamental da equação da onda $\partial^2 u / \partial t^2 - \Delta u = 0$ em n variáveis espaciais ($n > 1$) com polo em $(y, 0)$ é, no tempo $t > 0$, dada por

$$(x, y) \mapsto (2\pi)^{-n} \left(\int e^{i(\langle x-y, \xi \rangle + t|\xi|)} (2i|\xi|)^{-1} d\xi - \int e^{i(\langle x-y, \xi \rangle - t|\xi|)} (2i|\xi|)^{-1} d\xi \right). \quad (\text{A.2.2})$$

Estes exemplos mostram a importância da classe de distribuições que vamos estudar.

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e seja Γ um cone aberto em $X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ para algum N , inteiro positivo. Suponha dada um função real $\varphi \in C^\infty(\Gamma)$, satisfazendo as seguintes condições :

- i) φ é positivamente homogênea de grau um em relação à variável $\theta \in \mathbb{R}^N$
(i.e. $\varphi(x, \lambda\theta) = \lambda\varphi(x, \theta)$, $\lambda > 0$)
- ii) $d\varphi \neq 0$ em todo Γ .
- iii) φ é não-degenerada (i.e. as diferenciais $d(\partial\varphi/\partial\theta_j)$, $j = 1, \dots, N$, são linearmente independentes em

$$C_\varphi = \{(x, \theta) \in \Gamma : \varphi'_\theta(x, \theta) = 0\}. \quad (\text{A.2.3})$$

Tal função será chamada *função fase*. Seja $S_0^m(\Gamma)$ o conjunto das funções $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ que se anulam em uma vizinhança cônica do complemento de Γ . Recordamos que o espaço dos *símbolos* de ordem m , $S^m(X \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, é o conjunto de funções $a \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ tais que para todo compacto $K \subset X$ e todos multi-índices α, β , a estimativa

$$|\partial_x^\beta \partial_\theta^\alpha a(x, \theta)| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\theta|^{m-|\alpha|}), \quad x \in K, \theta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad (\text{A.2.4})$$

é válida para alguma constante $C_{\alpha, \beta, K}$.

A função $a \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ é um *símbolo clássico* de ordem m se

$$a \sim \sum_{j \leq m} a_j(x, \theta), \quad (\text{A.2.5})$$

onde a_j é positivamente homogênea de ordem j em relação a θ . O sinal \sim significa que $\forall M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left(a - \sum_{j=m-M}^m a_j(x, \theta) \right) \in S^{m-(M+1)}(X \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}). \quad (A.2.6)$$

Define-se

$$S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m(X \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}). \quad (A.2.7)$$

Se $a \in S_0^m(\Gamma)$, a "integral"

$$A(x) = \int e^{i\varphi(x, \theta)} a(x, \theta) d\theta \quad (A.2.8)$$

pode ser considerada não necessariamente como uma função de x porém como uma distribuição em X . Para isto, seja o funcional linear

$$\langle A, u \rangle = I_\varphi(au) = \int \int e^{i\varphi(x, \theta)} a(x, \theta) u(x) dx d\theta, \quad u \in C_0^\infty(X). \quad (A.2.9)$$

Devido a ii), o fato de $e^{i\varphi} = \partial(e^{i\varphi})/i\partial\varphi$, permite, através de sucessivas integrações por parte (formais), reduzir o crescimento do integrando em infinito até que ele torna-se integrável. Isto dá a definição precisa de $I_\varphi(au)$ e o funcional linear $u \rightarrow I_\varphi(au)$ é então uma distribuição $A \in D'(X)$ (distribuição de Fourier). Chamaremos (A.2.8) uma *integral oscilatória* porém usaremos a notação habitual de integral para designá-la. É fácil ver que se $a \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ então $A(x)$, em (A.2.8), é uma função $C^\infty(X)$ (operadores regularizantes ou suavizantes).

Calculamos agora o frente de ondas de integrais oscilatórias. O fato de φ ser não-degenerada implica que o conjunto C_φ é uma subvariedade cônica C^∞ de dimensão n , de $X \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e que a aplicação

$$C_\varphi \ni (x, \theta) \mapsto (x, \varphi'_x(x, \theta)) \in T^*(X) \setminus \{0\} \quad (A.2.10)$$

é uma imersão ; sua imagem Λ_φ é uma subvariedade C^∞ cônica de dimensão n . A restrição da forma $\sum \xi_j dx^j$ a Λ_φ é $\varphi'_x dx = d\varphi - \varphi'_\theta d\theta = 0$ desde que $\varphi'_\theta = 0$ em C_φ e, portanto, pela identidade de Euler, $\varphi = \langle \theta, \varphi'_\theta \rangle = 0$ em C_φ . Devido à homogeneidade, isto é equivalente ao anulamento em Λ_φ de sua diferencial que é a forma canônica (simplética) $\omega = \sum d\xi_j \wedge dx^j$. Assim, Λ_φ é uma *variedade Lagrangeana*. Reciprocamente, pode ser mostrado que toda subvariedade Lagrangeana cônica, Λ , de $T^*(X) \setminus 0$, é localmente igual a Λ_φ para alguma função fase não-degenerada φ .

Usando o *método da fase estacionária* para investigar o comportamento assintótico de integrais da forma (A.2.9), obtemos

$$WF(A) \subset \Lambda_\varphi . \quad (A.2.11)$$

Definição A.2.1. Um operador integral de Fourier é uma aplicação linear contínua $A : C_0^\infty(X) \rightarrow D'(Y)$ tal que K_A pode ser escrito como uma integral oscilatória (A.2.8) com uma função de fase não-degenerada φ em um cone $\Gamma \subset X \times Y \times \mathbb{R}^N \setminus 0$ e com $a \in S^{-\infty}(X \times Y \times \mathbb{R}^N \setminus 0)$ no complemento de Γ .

Exemplo A.2.1. Seja $A : C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ um operador pseudodiferencial. Neste caso K_A é dado por (A.2.1) e

$$WF(K_A) \subset \{(x, y; \xi, \eta); x = y, \xi = -\eta\} \quad (A.2.12)$$

que é o fibrado normal à diagonal em $X \times X$.

Exemplo A.2.2 Seja $A : C_0^\infty(X) \rightarrow D'(\mathbb{R} \times X)$ o operador cujo núcleo K_A é dado por (A.2.2). É fácil ver que $WF(K_A)$ está contido no fibrado normal ao cone de luz: $|x - y|^2 = t^2$.

Exemplo A.2.3 Distribuições de Fourier (cf. (A.2.8)) em Y podem ser vistas como operadores integrais de Fourier, tomando-se $X = \{\text{ponto}\}$.

Exemplo A.2.4. Seja $\psi : Y \rightarrow X$, de classe C^∞ . Então $\psi^* : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(Y)$ definida por

$$\psi^*u(y) = (u \circ \psi)(y) = (2\pi)^{-n} \int \int e^{i\langle \psi(y) - x, \eta \rangle} u(x) dx d\eta \quad (A.2.13)$$

é um operador integral de Fourier, definido por uma função fase não-degenerada φ tal que

$$\Lambda'_\varphi = \{(x, \xi), (y, \eta) : x = \psi(y), \eta = {}^t D\psi_y \xi\}. \quad (A.2.14)$$

(escrevemos $\Lambda' = \{(x, \xi), (y, \eta) \in T^*(X) \times T^*(Y); (y, x; \eta, -\xi) \in \Lambda\}$)

Se ψ é um difeomorfismo então Λ'_φ é o gráfico da transformação canônica induzida $\tilde{\psi} : T^*(Y) \setminus 0 \rightarrow T^*(X) \setminus 0$, definida por $\tilde{\psi}(y, \eta) = (\psi(y), ({}^t D\psi_y)^{-1} \eta)$.

Se Y é uma subvariedade de X , $\dim Y < \dim X$ e ψ é a identidade (inclusão) : $Y \rightarrow X$ então ψ^* é o operador restrição : $C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(Y)$. Neste caso

$$\Lambda'_\varphi = \{(x, \xi), (y, \eta); x = y, \eta = \xi|_{T_y(Y)}\}. \quad (A.2.15)$$

O termo principal da expansão assintótica de (A.2.9) (aludida acima) da lugar quando colocado de forma invariante ao símbolo principal de A (como uma densidade de grau $1/2$ com valores num fibrado linear complexo sobre Λ , chamado fibrado de Maslov). Localmente, a classe de distribuições que podem ser escritas na forma (A.2.8) para algum $a \in S_0^{m+n/4-N/2}(\Gamma)$, $n = \dim X$, e uma função fase não-degenerada φ , depende somente da variedade Lagrangeana Λ_φ . Suponha agora que Λ é uma (arbitrária) variedade Lagrangeana cônica fechada em $T^*(X) \setminus 0$. Então uma integral de Fourier (global) A de ordem m , definida em Λ , é localmente uma soma finita de distribuições A_j , da forma (A.2.8), com $\varphi = \varphi_j$, $a = a_j \in S^{m+n/4-N_j/2}(\Gamma_j)$, $\Gamma_j \subset X \times \mathbb{R}^{N_j} \setminus 0$, e tais que Λ_{φ_j} formam uma cobertura localmente finita de Λ . (O número $-N_j/2$ no grau de crescimento, é necessário a fim de se obter ordem m para A independentemente do número de variáveis θ . O número $n/4$

é introduzido para se obter aditividade das ordens quando se compõe operadores integrais de Fourier). Podemos pois definir o espaço $I^m(X, \Lambda)$ de distribuições (de ordem m) cujo *frente de ondas* está contido em Λ e que, localmente, são representadas na forma (A.2.8) com $a \in S^{m+n/4-N/2}(\Gamma)$, $\Gamma \subset X \times \mathbb{R}^N \setminus 0$, $n = \dim X$, e φ definindo uma parte de Λ , de acordo com (A.2.10). Pela Definição A.2.1, as distribuições de $I^m(Y \times X, \Lambda)$ (usa-se também a notação $I^m(Y, X; \Lambda)$), Λ uma subvariedade Lagrangeana cônica de $T^*(Y \times X) \setminus 0$, podem ser identificadas com os operadores integrais de Fourier, de ordem m , de $C^\infty(X) \rightarrow \mathcal{D}(Y)$. As noções de ordem e de símbolo principal (e, portanto também de conjunto característico e de eliticidade) das distribuições em $I^m(Y \times X, \Lambda)$ coincidem com as definições habituais no caso de operadores pseudodiferenciais (cf. (A.2.1)).

Quando $\Lambda \subset (T^*(Y) \setminus 0) \times (T^*(X) \setminus 0)$, o operador integral de Fourier correspondente é, na verdade, um operador contínuo de $C_0^\infty(X)$ em $C^\infty(Y)$ e de $\mathcal{E}'(X)$ em $\mathcal{D}(Y)$. O conjunto

$$\Lambda' = \{(y, \eta; x, -\xi); (y, \eta; x, \xi) \in \Lambda\} \quad (A.2.16)$$

é então chamado uma *relação canônica homogênea*; ele é Lagrangeano em relação à forma simplética $\omega_Y - \omega_X$. Sob certas condições de "transversalidade", o cálculo simbólico pode então ser estendido a um cálculo funcional de operadores. Sejam X, Y e Z três variedades (ou se quiserem abertos do $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ e \mathbb{R}^q respectivamente) e sejam C_1 e C_2 relações canônicas de $(T^*(Y) \setminus 0) \times (T^*(X) \setminus 0)$ e $(T^*(Z) \setminus 0) \times (T^*(Y) \setminus 0)$ respectivamente. Então a composição $B \circ A$ de operadores propriamente suportados, $A \in I^{m_1}(Y \times X; C_1')$ e $B \in I^{m_2}(Z \times Y; C_2')$, pertence a $I^{m_1+m_2}(Z \times X; (C_1 \circ C_2)')$ e o símbolo principal de $B \circ A$ é o produto dos símbolos principais de A e B . Aqui, se $R_1 \subset U \times V, R_2 \subset V \times W$ são relações, então a composição $R_1 \circ R_2 \subset U \times W$ é definida por

$$R_1 \circ R_2 = \{(u, w) \in U \times W; \text{ existe } v \in V : (u, v) \in R_1 \text{ e } (v, w) \in R_2\}. \quad (A.2.17)$$

O seguinte lema é (quase) evidente:

Lema A.2.1. *Seja $F \in I^m(X, \Lambda)$ e seja (V_j) um recobrimento de Λ por abertos cônicos. Seja (r_j) uma partição da unidade formada por funções homogêneas de grau zero e subordinada a (V_j) . Então a distribuição F se decompõe*

$$F \equiv \sum_j F_j \quad (\equiv \text{significa igualdade módulo } C^\infty)$$

onde $F_j \in I^m(X; \Lambda)$ e $WF(F_j) \subset V_j$. Ademais, se a designa o símbolo principal de F , o símbolo principal de F_j é $r_j a$.

Terminamos este apêndice com o importante teorema de Egorov. Suponha que X e Y têm a mesma dimensão e que Λ' é o gráfico de uma transformação canônica homogênea χ de $T^*(Y)$ em $T^*(X)$. Dizer que χ é canônica significa que $\chi^* \omega_X - \omega_Y = 0$ ou que $\omega_X - \omega_Y$ se anula em Λ' , ou seja que temos uma relação canônica no sentido explicado acima. Se $K \in I^m(X \times Y, \Lambda)$, então o adjunto K^* pertence à transformação inversa χ^{-1} e as composições KK^* e K^*K pertencem à identidade, isto é, são operadores pseudodiferenciais em X e Y respectivamente. Se A é um operador pseudodiferencial em X de ordem μ , então o produto $AK \in I^{m+\mu}(X \times Y, \Lambda)$ e o seu símbolo principal é o produto do símbolo principal de K (considerado sobre Λ') pelo de A (trazido de $T^*(X)$ para Λ' pela projeção $\Lambda' \rightarrow T^*(X)$). Se, por outro lado, multiplicarmos à direita, o resultado é o mesmo exceto que usamos a projeção $\Lambda' \rightarrow T^*(Y)$. Se A e B são operadores pseudodiferenciais em X e Y respectivamente e se $AK = KB$, concluímos que os símbolos principais a e b de A e B satisfazem

$$a(\chi(y, \eta)) = b(y, \eta), \tag{A.2.18}$$

se o símbolo principal de K não se anula (i.e. K é elítico) em $(\chi(y, \eta), (y, -\eta))$. Reciprocamente, (A.2.18) implica que $AK - KB$ tem ordem inferior; podemos, portanto, construir sucessivamente o símbolo de B , para um dado A , de maneira que $AK - KB$ tem ordem $-\infty$, caso $WF(A)$ esteja concentrado numa vizinhança de um ponto elítico de K . Este argumento

permite, muitas vezes, passar de um operador a outro com símbolo principal modificado por uma transformação canônica homogênea; isto é um ponto fundamental no estudo local das equações pseudodiferenciais. Em resumo, enunciamos o teorema de Egorov:

Teorema A.2.1. *Seja $P : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ um operador pseudodiferencial elítico de ordem um auto-adjunto positivo. Seja p o seu símbolo principal e seja H_p o correspondente Hamiltoniano. Então, para todo operador pseudodiferencial, A , o conjugado por $\exp(it P)$: $(\exp it P)A \exp(it P)^{-1}$, também é um operador pseudodiferencial (de mesma ordem que A) e seu símbolo principal é:*

$$(\exp t H_p)^* \sigma(A), \tag{A.2.19}$$

onde $\sigma(A)$ denota o símbolo principal de A .

REFERÊNCIAS

- [Ag] Agmon, S., "On the kernels, eigenvalues and eigenfunctions of operators related to elliptic problems", *Comm. Pure Appl. Math.* 18, 627-663 (1965).
- [An] Andersson, K.G., "Analytic wave front sets for solutions of linear differential equations of principal type", *Trans. Am. Math. Soc.* 177, 1-27 (1973).
- [An-Me] Andersson, K.G., Melrose, R., "The propagation of singularities along gliding rays", *Invent. Math.* 41, 197-232 (1977).
- 3a-Gu-Ra] Bardos, C., Guillot, J.C., Ralston, J., "La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non-borné, application à la théorie de la diffusion", *Comm. Partial Differential Equations* 7, 905-958 (1982).
- Ba-Le-Ra] Bardos, C., Lebeau, G., Rauch, J., "Scattering frequencies and Gevrey 3 singularities", *Invent. Math.* 90, 77-114 (1987).
- [Be] Bérard, P. "On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points". *Math. Z.* 155, 249-276 (1977).
- [Bi] Birman, M.S.:
- [1] "Perturbation of the spectrum of a singular elliptic operator under the variation of boundaries and boundary conditions", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 137, 761-763 (1961) (in Russian); *Soviet. Math. Dokl.* 2, 326-328 (1961).
- [2] "Perturbation of the continuous spectrum of a singular elliptic operator for changing boundary and boundary conditions", *Vestnik Leningrad Univ.* 1, 22-55 (1962) (in Russian).
- [Bi-Kr] Birman, M.S., Krein, M.G., "On the theory of wave operators and scattering operators", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 144, 475-478 (1962) (in Russian).
- [Bot] Bott, R., "On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory", *Comm. Pure Appl. Math.* 9, 176-206 (1956).
- [Bou] Boutet de Monvel, L., "Nombre de valeurs propres d'un opérateur elliptique et polynôme de Hilbert-Samuel", *Séminaire Bourbaki* N° 532 (1978)/(1979).
- [Bo-Gu] Boutet de Monvel, L., Guillemin, V., "The spectral theory of Toeplitz operators", *Ann. of Math. Studies* 99 (1981).

- [Bu] Buslaev, V.S.:
- [1] "Trace formulas for the Schrödinger operator in a three-dimensional space", Dokl. Akad. Nauk. SSSR 143, 1067-1070 (1962) (in Russian).
 - [2] "Scattering of plane waves, spectral asymptotics and trace formulas in exterior problems", Dokl. Akad. Nauk. SSSR 197, 999-1002 (1971) (in Russian).
- [Ca-Me] Cardoso, F., Mendoza, R., "The spectral distribution of a globally elliptic operator". Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 14, 142-163 (1987).
- [Ca-Pe] Cardoso, F., Petkov, V., "Leading singularity of the scattering kernel for moving obstacles with dissipative boundary condition", preprint (1988).
- [Ch] Chazarain, J.:
- [1] "Construction de la paramétrix du problème mixte hyperbolique pour l'équation des ondes", C.R. Acad. Sci. Paris 276, 1213-1215 (1973).
 - [2] "Formule de Poisson pour les variétés Riemanniennes", Invent. Math. 24, 65-82 (1974).
- [Co] Colin de Verdière, Y.:
- [1] "Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II", Compositio Math. 27, 150-184 (1973).
 - [2] "Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques", Comment. Math. Helv. 54, 508-522 (1979).
 - [3] "Une formule de trace pour l'opérateur de Schrödinger dans \mathbb{R}^3 ", Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 14, 27-39 (1981).
 - [4] "Sur les longueurs des trajectoires périodiques d'un billiard", dans Geometrie Symplectique et de Contact, Autour du théorème de Poincaré-Birkhoff, Hermann, 122-139, (1984).
- [Co-St] Cooper, J., Strauss, W., "The leading singularity of a wave reflected by a moving boundary", J. Diff. Equations, 175-203 (1984).
- [De] Deift, P., "Classical scattering theory with a trace condition", Dissertation, Princeton University, (1976).
- [Du] Duistermaat, J.J., "Fourier integral operators", New York University Lecture Notes, (1973).

- [Du-Gu] Duistermaat, J.J., Guillemin, V., "The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics", *Invent. Math.* 29, 39-79 (1975).
- [Go-Gu] Golubitsky, M., Guillemin, V., "Stable Mappings and their singularities", Springer, New York, (1973).
- [Go-Kr] Gohberg, I., Krein, M.G., "Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators", AMS Translations 18, Providence (1969).
- [Gu] Guillemin, V.:
- [1] "Notes on scattering theory", M.I.T. Math. Dept., (1976).
 - [2] "Lectures on spectral theory of elliptic operators", *Duke Math. J.* 44, 485-517 (1977)
 - [3] "Sojourn time and asymptotic properties of the scattering matrix", *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 12 Supl., 69-88 (1977).
 - [4] "Some classical theorems in spectral theory revisited". Seminar on sing. of sol. of diff. eq., Princeton University Press, Princeton, N.J., 219-259 (1979).
- [Gu-Me] Guillemin, V., Melrose, R., "The Poisson summation formula for manifolds with boundary", *Advances in Math.* 32, 204-232 (1979).
- [Gu-St] Guillemin, V., Sternberg, S., "Geometric Asymptotics, A.M.S.", (1977).
- [Gu-We] Guillemin, V., Weinstein A., "Eigenvalues associated with a closed geodesic", *Bull. AMS* 82, 92-94 (1976).
- [Gui] Guillopé, L., "Une formule de trace pour l'opérateur de Schrödinger dans \mathbb{R}^n ", thèse, Université Scient. et Médicale, Grenoble, (1981).
- [Helf] Helffer, B., "Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques", *Astérisque* 112 (1984).
- [He-Ph] Helffer, B., Pham The Lai, "Remarque sur la conjecture de Weyl", *Math. Scand.* 48, 39-40 (1981).
- [Helt] Helton, W., "An operator algebra approach to partial differential equations, propagation of singularities and spectral theory", *Indiana J. Math.* 26, 997-1018 (1977).
- [He-Ra] Helton, W., Ralston, J.V., "The first variation of the scattering matrix", *J. Diff. Equations* 21, 378-394 (1976), Addendum, *J. Diff. Equations* 28, 155-162 (1978).

[Ho] Hörmander, L.:

- [1] "The spectral function of an elliptic operator", Acta Math. 121, 193-218 (1968).
- [2] "The Weyl calculus of pseudo-differential operators", Comm. Pure Appl. Math. 32, 359-443 (1979).
- [3] "The analysis of linear partial differential operators", Vol. I, II, III e IV, Springer-Verlag. Berlin, (1985).

[Ik] Ikawa, M.:

- [1] "Decay of solutions of the wave equation in the exterior of two convex obstacles", Osaka J. Math. 19, 459-509 (1982).
- [2] "On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles", J. Math. Kyoto Univ. 23, 127-194 (1983); Addendum 23, 795-802 (1983).
- [3] "On the scattering matrix for two convex obstacles", Taniguchi Symp. Hert. Katata, 63-84, (1984).
- [4] "Trapping obstacles with a sequence of poles of the scattering matrix converging to the real axis", Osaka J. Math. 22, 657-689 (1985).
- [5] "Precise informations on the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles", 27, 69-102 (1987).
- [6] "Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several convex bodies", preprint (1987).
- [7] "On the poles of the scattering matrix for several convex bodies", preprint.

[Iv] Ivrii, V. Ia., "On the second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary", Funct. Analysis and its Appl. 14, 25-34 (1980). English translation 14, 98-106 (1980).

Je-Ka] Jensen, A., Kato, T., "Asymptotic behavior of the scattering phase for exterior domains", Comm. Partial Differential Equations 3, 1165-1195 (1978).

[Ka] Kato, T., "Monotonicity theorems in scattering theory", Hadronic Journal 1, 134-154 (1978).

Kl-Ta] Klingenberg, W. Takens, F., "Generic properties of geodesic flows", Math. Ann. 197, 323-337 (1972).

- [Kr] Krein, M.G.:
- [1] "On the trace formula in the theory of perturbation", Mat. Sb. 33, 597-626 (1953) (in Russian).
 - [2] "On perturbation of determinants and a trace formula for unitary and self-adjoint operators", Dokl. Akad. Nauk SSSR 144, 268-271 (1962).
- [La-Ph] Lax, P., Phillips, R.:
- [1] "Scattering theory", Academic Press, New York and London (1967).
 - [2] "Decaying modes for the wave equation in the exterior of an obstacle" Comm. Pure Appl. Math. 22, 737-787 (1969).
 - [3] "A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix", Arch. Rational Mech. Anal. 40, 268-280 (1971).
 - [4] "Scattering theory for the wave equation in even space dimensions", Indiana Univ. Math. J. 22, 101-134 (1972)
 - [5] "The scattering of sound waves by an obstacle", Comm. Pure Appl. Math. 30, 195-233 (1977).
 - [6] "The time delay operator and a related trace formula", Topics in functional analysis, Advances in Math. Suppl. Studies 3, 197-295 (1978).
- [La] Lazutkin, V.F., "Convex billiard and eigenfunctions of the Laplace operator", Ed. Leningrad University, (1981) (in Russian).
- [Le] Levitan, B.M., "On a special Tauberian theorem", Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 17, 269-284 (1953).
- [Lu-Mo] Ludwig, D., Morawetz, C.S., "The generalized Huyghens principle for reflecting bodies", Comm. Pure Appl. Math. 22, 189-205 (1969).
- [Ma-Me] Marvizi, S., Melrose, R., "Spectral invariants of convex planar regions", J. Diff. Geometry 17, 475-502 (1982).
- [Ma] Majda, A., "A representation formula for the scattering operator and the inverse problem for arbitrary bodies", Comm. Pure Appl. Math. 30, 165-194 (1977).
- [Ma-Ra] Majda, A., Ralston, J., "An analogue of Weyl's theorem for unbounded domains, I, II, III", Duke Math. J. 45, 183-196, 513-536 (1978) and 46, 725-731 (1979).

- [Ma-Ta] Mayda, A., Taylor, M., "Inverse scattering problems for transparent obstacles, electromagnetic waves and hyperbolic systems", *Comm. Partial Diff. Eq.* 2, 395-433 (1977).
- [Mc-Si] McKean, H., Singer, I., "Curvature and the eigenvalue of the Laplacian", *J. Diff. Geometry* 1, 43-69 (1967).
- [Me] Melrose, R.:
- [1] "Singularities and energy decay in acoustical scattering", *Duke Math. J.* 46, 43-59 (1979).
 - [2] "Forward scattering by a convex obstacle", *Comm. Pure Appl. Math.* 33, 461-499 (1980).
 - [3] "Polynomial bound on the number of scattering poles", *J. Funct. Anal.* 53, 287-303 (1983).
 - [4] "Weyl asymptotics for the phase in obstacle scattering", *Comm. Partial Diff. Eq.* 13, 1431-1439 (1988).
- [Me-Sj] Melrose, R., Sjöstrand, J., "Singularities of boundary value problems I, II", *Comm. Pure Appl. Math.* 31, 593-617 (1978); 35, 129-168 (1982).
- [Mey] Meyer, W., "Kritische mannigfaltigkeiten in Hilbert mannigfaltigkeiten", *Math. Ann.* 170, 45-66 (1967)
- [Pe] Petkov, V.:
- [1] "High frequency asymptotics of the scattering amplitude for non-convex bodies", *Comm. Partial Diff. Equations* 5, 293-329 (1980)
 - [2] "Comportement asymptotique de la phase de diffusion pour des obstacles non-convexes", *Séminaire Goulaouic - Meyer - Schwartz*, (1980)/(1981), Exposé 13.
 - [3] "Singularities of the scattering kernel", *Collège de France Seminar on nonlinear partial differential equations and their applications*, Vol. VI, Pitman, Boston, 288-296 (1984).
 - [4] "Note on the distribution of poles of the scattering matrix", *J. Math. Anal and Appl.* 101, 582-587 (1984).
- [Pe-Po] Petkov, V., Popov, G., "Asymptotic behaviour of the scattering phase for non-trapping obstacles", *Ann. Inst. Fourier* 32, 111-149 (1982).
- [Pe-Vo] Petkov, V., Vogel, I., "La représentation de l'application de Poincaré correspondant aux rayons périodiques réfléchissants", *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A*, 296, 633-635 (1983).
- [Pe-St] Petkov, V., Stojanov, L.:
- [1] "Periodic geodesics of generic non-convex domains in \mathbb{R}^2 ", *Notas e Comunicações* 138, UFPE (1985).

- [2] "Periods of multiple reflecting geodesics and inverse spectral results", Amer. J. Math. 109, 619-668 (1987).
- [3] "Spectrum of the Poincaré map for periodic reflecting rays in generic domains", Math. Z. 194, 505-517 (1987).
- [4] "Singularities of the scattering kernel and scattering invariants for several strictly convex obstacles", a preprint Trans. A.M.S.
- [5] "Sojourn time for reflecting scattered rays", preprint.
- [6] "Generic properties and the spectrum of the Poincaré map for multiple reflecting rays", preprint.
- [7] "On the number of periodic reflecting rays in generic domains", Ergod. Th. & Dynam. Sys 8, 81-91 (1988).
- [Pha] Pham The Lai, "Meilleures estimations asymptotiques des restes de la fonction spectrale et des valeurs propres relatifs au Laplacien", Math. Scand. 48, 5-38 (1981).
- [Phi] Phillips, R.S. "A remark on the preceding paper of C. S. Morawetz and D. Ludwig", Comm. Pure Appl. Math. 22, 207-211 (1969).
- [Ra] Ralston, J.:
- [1] "Energy decay problems in scattering theory", thesis Stanford University, (1968).
- [2] "Propagation of singularities and the scattering matrix", in "Singularities of Boundary Value Problems", 169-184, Reidel, Dordrecht, (1981).
- [Re-Si] Reed, M., Simon, B., "Methods of modern mathematical physics", Vol. I, Functional Analysis, Academic Press, New York, (1972).
- [Ri] Ringrose, J.R., "Compact Non-self-adjoint Operators", Van Nostrand, New York, (1971).
- [Ro] Robert, D., "Autour de l'approximation semi-classique", Progress in Mathematics, Vol. 68, Birkhauser, (1987).
- [See] Seeley, R., "A sharp asymptotic remainder estimate for the spectrum of the Laplacian in a domain of \mathbb{R}^3 ", Advances in Math. 29, 244-269 (1978).
- [Ser] Serre, J.P., "A course in arithmetic", Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, (1973).

- [Sh-Th] Shenk, N., Thoe, D., "Eigenfunction expansions and scattering theory for perturbations of $-\Delta$ ", J. Math. Anal. and Appl. 36, 313-351 (1971).
- [Si] Sinai, Ya.G., "Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards", Russ. Math. Surveys 25, 137-189 (1970).
- [St] Stojanov, L.:
- [1] "Generic properties of periodic reflecting rays", Ergod. Th. & Dynam. Sys 7, 597-609 (1987).
- [2] "An estimate from above of the number of periodic trajectories for semidispersing billiards", preprint.
- [Tr] Treves, F., "Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Volume 1: Pseudodifferential operators, Volume 2: Fourier integral operators", Plenum Press, New York and London (1980).



Impresso na Gráfica GD

