

**PONTOS SINGULARES DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ANALÍTICAS**

**CÉSAR CAMACHO
PAULO SAD**

COPYRIGHT © by César Camacho and Paulo Sad

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,
por qualquer processo, sem a permissão do autor.

ISBN 85-244-0029-3

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Estrada Dona Castorina, 110
22.460 – Rio de Janeiro – RJ

CONTEÚDO

	<u>Pág.</u>
1 - Singularidades de Curvas Planas e Resolução	1
2 - Singularidades de Equações Diferenciais Analíticas e Resolução	17
3 - Topologia das Singularidades Irredutíveis	44
4 - A Sela-Nó Complexa	65
5 - Existência de Integrais Primeiras	98
6 - O Teorema da Separatriz	113
7 - Referências.....	130

INTRODUÇÃO

As curvas integrais de um campo de vetores holomorfo $Z: U \rightarrow \mathbb{C}^n$ em um aberto U de \mathbb{C}^n definem uma folheação holomorfa \mathfrak{F}_Z de dimensão complexa um, com singularidades nos pontos onde Z se anula. As folhas de \mathfrak{F}_Z (integrais de Z) são definidas localmente pelas soluções da equação diferencial

$$\frac{dz}{dT} = Z(z)$$

parametrizadas por $T \in \mathbb{C}$.

A estrutura topológica de \mathfrak{F}_Z na vizinhança de um ponto regular de Z é trivial, isto é, \mathfrak{F}_Z é equivalente a uma folheação produto. Já na vizinhança de um ponto singular de Z , a folheação \mathfrak{F}_Z pode oferecer um comportamento topológico bastante complexo, mesmo quando $n = 2$.

O objetivo deste livro é apresentar, num contexto unificado, uma análise desta situação em dimensão dois. Utilizaremos para este fim um método de resolução de campos de vetores por transformações quadráticas. O método é ilustrado nos Capítulos I e II, onde se expõe a teoria clássica de resolução de curvas e o Teorema de Resolução para campos de vetores. Via este método, mostra-se que é possível reduzir o estudo de qualquer singularidade à análise local de singularidades irredutíveis, mais a análise dos invariantes globais da resolução. Os tipos irredutíveis são caracte-

rizados, e dentre eles a singularidade hiperbólica e a sela-nó são classificadas analiticamente (Capítulos III e IV). A resolução é aplicada na demonstração de dois resultados fundamentais da teoria: a caracterização topológica dos campos que admitem integral primeira (Capítulo V) e o Teorema da Separatriz (Capítulo VI).

Agradecemos a Lais Ventura Santos pela datilografia eficiente e tratamento atencioso.

Maio de 1987

César Camacho
Paulo Sad

CAPÍTULO I

SINGULARIDADES DE CURVAS PLANAS E RESOLUÇÃO

Discutiremos aqui de maneira informal a topologia local das curvas analíticas em \mathbb{C}^2 , e como ela é influenciada pelo uso de transformações quadráticas.

§1 - Pares de Puiseux

Consideremos a curva analítica C de um aberto $U \subset \mathbb{C}^2$, sendo $(0,0) \in C$. Tem-se que $C = \{(x,y) \in U; f(x,y) = 0\}$ para alguma função analítica $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Caso $df(0,0) \neq 0$, podemos ver C como praticamente uma linha reta numa pequena vizinhança de $(0,0)$; entretanto, se $df(0,0) = 0$ (diremos que C é singular na origem), encontramos uma topologia bastante rica. De fato, se $B_R = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2; |x|^2 + |y|^2 \leq R^2\}$, para $R > 0$ suficientemente pequeno C é transversal a ∂B_R e conseqüentemente $C_R = C \cap \partial B_R$ é uma curva fechada de dimensão real 1 dentro de ∂B_R , ou seja, um laço. No caso presente, um laço bastante especial, cuja descrição depende dos pares de Puiseux de C em $(0,0)$.

Para iniciarmos com um exemplo bastante simples, tomemos $C = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2; y^2 - x^3 = 0\}$. Numa vizinhança pequena de $(0,0)$ a curva C encontra-se próxima ao eixo $y = 0$ pois $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|y|}{|x|} = 0$ ao longo de C . Portanto, pode-se descrever C_R , para $R > 0$

pequeno, a partir de $C \cap T_R$, onde $T_R = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2; |x| = R, |y| \leq R\}$ é um toro sólido de eixo $L_R = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2; |x| = R \text{ e } y = 0\}$. Vamos descrever $C \cap T_R$ em relação a L_R . Parametrizaremos L_R como

$$x(\theta) = R e^{2\pi i \theta}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Resulta que $C \cap T_R$ estará parametrizada como

$$y(\theta) = R^{3/2} e^{3\pi i \theta}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Portanto, ao percorrermos $C \cap T_R$ ao longo da direção L_R executamos simultaneamente um movimento de rotação em torno desta linha. Mais precisamente: partindo por exemplo do ponto $(R, R^{3/2})$, $C \cap T_R$ dá duas voltas ao longo de L_R enquanto gira três vezes em torno de L_R . Não existe nenhuma isotopia $\varphi_t: \partial B_R \rightarrow \partial B_R$, $0 \leq t \leq 1$, onde cada φ_t é um homeomorfismo, $\varphi_0 = \text{id}$ (em particular $\varphi_0(L_R) = L_R$) e $\varphi_1(L_R) = C_R$. Segue-se que C_R é um nó, isto é, um laço conexo, não trivial. A propósito, pode-se verificar rapidamente que C_R é um nó trivial se $d_f(0,0) \neq 0$.

A situação geral se descreve no mesmo espírito graças ao Teorema de Puiseux. Vamos supor que C possua em $(0,0)$ um único ramo (irredutível).

(1.1) Teorema (Puiseux) [12] - Existem aplicações analíticas $a(t)$, $b(t)$, com $t \in \mathbb{C}$ e $|t| \leq \epsilon$, tais que $a(0) = b(0) = 0$ e $f(a(t), b(t)) = 0$. Em outras palavras, C é uma curva parametrizada em $(0,0)$.

Voltando ao exemplo anterior, podemos escolher $a(t) = t^2$ e $b(t) = t^3$, ou $a(t) = t^{2t}$ e $b(t) = t^{3t}$ para $t \in \mathbb{N}$. Gostaríamos de tomar sempre o menor grau possível, de modo que acrescentamos ao enunciado acima o complemento: "a menos de difeomorfismos locais de \mathbb{C} , existe uma única parametrização $(a(t), b(t))$ tal que $\min\{\text{multiplicidade } a(t) \text{ em } t = 0, \text{ multiplicidade } b(t) \text{ em } t = 0\} = \text{multiplicidade } f(x,y) \text{ em } (0,0)$ ". Uma tal parametrização chama-se primitiva.

Suponhamos, para simplificar, que $a(t) = t^k$ onde $k = \text{multiplicidade } f(x,y) \text{ em } (0,0)$. Sendo $b(t) = \sum_{j \geq k} b_j t^j$, escrevemos formalmente a parametrização como $y = \sum_{j \geq k} b_j t^{j/k}$. Para a descrição topológica que temos em mente, necessitamos apenas de um número finito de termos desta expansão em série de potências fracionárias (denominada desenvolvimento de Puiseux de \mathbb{C} em $(0,0)$). Antes de entrar em mais detalhes, observe-se que o desenvolvimento produz k funções analíticas em setores do plano dos x 's onde a raiz k -ésima está bem definida; estas funções permutam-se ao variarmos $x \in \mathbb{C}$ em torno de $0 \in \mathbb{C}$. Portanto, o Teorema de Puiseux é um tipo de uniformização como encontramos no estudo das superfícies de Riemann.

Os pares de Puiseux se definem do modo seguinte, para

$$y = \sum_{j \geq 1} b_{N_j} x^{N_j/k} :$$

(i) $\text{m.d.c. } (m_1, n_1) = 1$ e $n_1/m_1 = N_1/k$

(ii) definidos $(m_1, n_1), \dots, (m_{j-1}, n_{j-1})$, temos $\text{m.d.c. } (m_j, n_j) = 1$ e $n_j/m_1 \dots m_{j-1} m_j = N_j/k$.

Terminamos assim que $m_1 \dots m_j \dots m_\ell = k$, para algum $\ell \in \mathbb{N}$. (Colocaremos também a exigência $m_1 > 1$, de vez que sempre podemos obter isto após uma mudança de coordenadas conveniente). Em particular, uma curva não-singular em $(0,0)$ não possui pares de Puiseux; além disso, se $k \in \mathbb{N}$ é a multiplicidade de C em $(0,0)$, temos no máximo k pares. Por exemplo, a curva $a(t) = t^2$ e $b(t) = t^3$ (ou $y = x^{3/2}$) possui $(2,3)$ como único par de Puiseux; já $a(t) = t^4$ e $b(t) = t^6 + t^7$ (ou $y = x^{3/2} + x^{7/4}$) possui $(2,3)$ e $(2,7)$ como pares.

Examinaremos agora como a coleção $\{(m_1, n_1), \dots, (m_\ell, n_\ell)\}$ determina o nó C_R , para $R > 0$ suficientemente pequeno. Uma observação importante: se a curva C possui vários ramos em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, as coleções de pares de Puiseux associadas a estes ramos permitem também descrever o laço C_R , isto é, o entrelaçamento entre os nós. O leitor interessado pode consultar [12].

§2 - Pares de Puiseux e Topologia

Consideremos então a curva C irredutível em $(0,0)$ com pares de Puiseux $\{(m_1, n_1), \dots, (m_\ell, n_\ell)\}$; vamos estudar sucessivamente as curvas $C_1: y = a_1 x^{n_1/m_1}$, $C_2: y = a_1 x^{n_1/m_1} + a_2 x^{n_2/m_1 n_1}$, \dots , $C_\ell: y = a_1 x^{n_1/m_1} + \dots + a_\ell x^{n_\ell/m_1 \dots m_\ell}$, e verifique que a topologia em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ desta última não se altera com o acréscimo das parcelas extras.

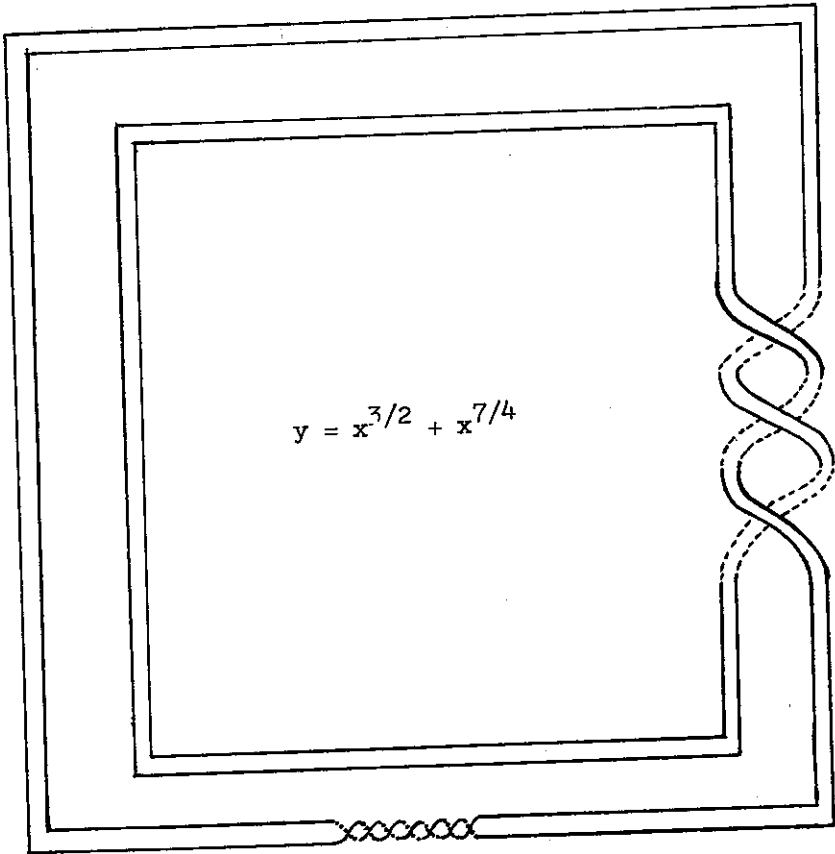
Do mesmo modo que no exemplo da seção anterior, todas estas curvas se encontram próximas ao eixo horizontal; portanto, po

demos estudá-las no toro sólido T_R . A idéia a se seguir é que, para R suficientemente pequeno, cada uma das curvas C_2, \dots, C_t é uma pequena deformação da anterior. Em outras palavras, cada C_{j+1} está contida numa vizinhança tubular de C_j , $1 \leq j \leq t-1$, de diâmetro reduzido; assim, vamos obtendo um nó cada vez mais complicado.

A curva C_1 é o nó que aparece ao percorrermos longitudinalmente o eixo L_R de T_R m_1 vezes ao mesmo tempo que giramos em torno dele, transversalmente, n_1 vezes (sempre que $m_1 = 1$, C_1 é isotópico a L_R ; por isto eliminamos o par $(1, n_1)$). Para analisarmos C_2 , introduzimos as coordenadas $x_2 = x^{1/m_1}$, $y_2 = y - a_1 x^{n_1/m_1}$. Esta transformação leva a vizinhança tubular de C_1 dada por $|x| = R$, $|y - a_1 x^{n_1/m_1}| \leq \delta$ (onde estará contida C_2) no toro sólido $T^{(2)} = \{|x_2| = R^{1/m_1}, |y_2| \leq \delta\}$; o eixo deste toro é o transformado de C_1 . Note-se que os paralelos de $T^{(2)}$ são os transformados de curvas "paralelas" a C_1 , de modo que a mudança de coordenadas "endireita" a vizinhança tubular de C_1 . Além disso, a curva C_2 passa a ter por equação $y_2 = a_2 x_2^{n_2/m_2}$, que já sabemos descrever. Portanto, C_2 é um nó composto; desenvolve-se como um nó (m_2, n_2) em torno da "guia" C_1 , a qual por sua vez é um nó (m_1, n_1) em torno de L_R .

Por composições sucessivas chegamos a descrever o nó C_t , o qual em coordenadas (x_t, y_t) obtidas prosseguindo o raciocínio acima, escreve-se como $y_t = a_t x_t^{n_t/m_t}$ (tais coordenadas transformam uma vizinhança tubular de C_{t-1} em um toro sólido $T^{(t)}$)

"canônico"). O que se passa em seguida? A curva C_R é uma de-
formação de C_l , e se introduzimos as coordenadas $x_{l+1} = x_l^{1/m_l}$,
 $y_{l+1} = y_l - a_l x_l^{n_l/m_l}$, sua equação torna-se $y_{l+1} = a_{l+1} x_{l+1}^{N_{l+1}} +$
 $a_{l+2} x_{l+1}^{N_{l+2}} + \dots$, a qual é isotópica a $y_{l+1} = 0$. Conclusão: o
nó C_R é isotópico a C_l , e este é um nó composto provindo das
composições sucessivas $(m_1, n_1), \dots, (m_l, n_l)$, começando-se com
 L_R .



Tais considerações permitem enunciar o teorema seguinte.

(2.1) Teorema (Burau)[12] - Os nós associados a singularidades de curvas analíticas planas têm sua classe de isotopia determinada pelos pares de Puiseux.

Pode-se pensar que um dado nó composto se obtém por diferentes etapas sucessivas. Surpreendentemente, não é este o caso.

(2.2) Teorema (Zariski) - Os nós associados a singularidades de curvas analíticas planas são isotópicos (se e) somente se possuem os mesmos pares de Puiseux.

Para a demonstração, consultar [16].

§3 - Resolução de Singularidades

Discutiremos agora um método que permite desingularizar (ou resolver) as singularidades de curvas planas. Este método - o uso de explosões (blowing-up's) - emprega-se em situações muito gerais (na desingularização de conjuntos analíticos) e será também uma importante ferramenta no estudo dos campos de vetores analíticos em \mathbb{C}^2 .

Definamos inicialmente o que vem a ser a explosão de \mathbb{C}^2 no ponto $0 = (0,0)$. Seja $\mathbb{C}P(1)$ o espaço projetivo de dimensão complexa 1, isto é, o conjunto de retas passando por $0 \in \mathbb{C}^2$. Adotamos como coordenadas as aplicações

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P(1), \alpha_1(t) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2; y = tx\} \\ \alpha_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P(1), \alpha_2(u) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2; x = uy\} \end{array} \right.$$

Observe-se que as coordenadas associadas a um ponto de $\mathbb{C}P(1)$ relacionam-se pela equação $tu = 1$; portanto, trata-se de esfera de Riemann usual.

Sejam $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{C}^2$ e Op a reta ligando O a $p \in \mathbb{C}^2$; designemos por Ox e Oy os eixos horizontal e vertical, respectivamente.

(3.1) Definição - A explosão de \mathbb{C}^2 em $O \in \mathbb{C}^2$ é o subconjunto de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P(1)$ dado por $\mathbb{C}_O^2 = \{p, Op\}, p \in \mathbb{C}^2, p \neq O\} \cup (\{O\} \times \mathbb{C}P(1))$.

Mostremos que \mathbb{C}_O^2 é uma superfície complexa; mais precisamente, trata-se de um fibrado vetorial complexo de posto 1, com base $\mathbb{C}P(1)$. Sejam $\eta: \mathbb{C}_O^2 \rightarrow \mathbb{C}P(1)$ a projeção contínua $\eta(p, Op) = Op, \eta(O, Op) = Op$, e $V_1 = \mathbb{C}P(1) \setminus \{Oy\}, V_2 = \mathbb{C}P(1) \setminus \{Ox\}$. Definamos $\beta_i: \eta^{-1}(p_i) \rightarrow \mathbb{C}^2, i = 1, 2$ por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1(p, Op) = (p_1, \alpha_1^{-1}(Op)), \beta_1(O, Op) = (O, \alpha_1^{-1}(Op)) \\ \beta_2(p, Op) = (\alpha_2^{-1}(Op), p_2), \beta_2(O, Op) = (\alpha_2^{-1}(Op), O). \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccc} \eta^{-1}(V_1) \cap \eta^{-1}(V_2) & & \\ \beta_1 \swarrow & & \searrow \beta_2 \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\beta_2 \circ \beta_1^{-1}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \end{array}$$

Tem-se que $\beta_2 \circ \beta_1^{-1}(x, t) = (\frac{1}{t}, tx)$, o que demonstra a afirmativa feita.

Portanto, temos coordenadas (x, t) em $\eta^{-1}(V_1)$ e (u, y) em $\eta^{-1}(V_2)$ tais que $u = 1/t$ e $y = tx$. Além disso, nestas coordenadas $\eta(x, t) = t$ e $\eta(u, y) = u$, o que torna η holomorfa. Outra projeção importante é $\pi_0: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, dada por $\pi_0(p, 0p) = p$ e $\pi_0(0, 0p) = 0$. Em coordenadas temos $\pi_0(x, t) = (x, tx)$ e $\pi_0(u, y) = (uy, y)$, o que implica em π_0 ser holomorfa. Observe-se que $\pi_0^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{C}P(1)$ e que π_0 é difeomorfismo entre $\mathbb{C}^2 \setminus \pi_0^{-1}(0)$ e $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Finalmente, a Definição (3.1) acima se adapta a qualquer espaço vetorial de dimensão 2.

Sejam agora M uma superfície complexa e $p \in M$. Desejamos definir a explosão de M no ponto $p \in M$. Denotemos por $T_p M$ o espaço tangente a M no ponto $p \in M$, e por $\varphi: U \rightarrow V$ um difeomorfismo holomorfo entre abertos $U \subset M$ e $V \subset T_p M$, com $0 \in U$ e $\varphi(p) = 0$. Se $\pi_0: (T_p M)_0 \rightarrow T_p M$ é a projeção definida anteriormente, temos que $\pi_0^{-1} \circ \varphi$ é difeomorfismo entre $U \setminus \{p\}$ e $\pi_0^{-1}(V \setminus \{0\})$.

(3.2) Definição - A explosão M_p de M no ponto $p \in M$ é a superfície complexa $(M \setminus \{p\}) \cup_{\pi_0^{-1} \circ \varphi} \pi_0^{-1}(V)$.

A saber, tomamos a união $(M \setminus U) \cup (U \setminus \{p\}) \cup \pi_0^{-1}(V \cup \{0\}) \cup \pi_0^{-1}(0)$, porém identificando, via $\pi_0^{-1} \circ \varphi$, os pontos de $U \setminus \{p\}$ com os correspondentes de $\pi_0^{-1}(V \setminus \{0\})$. Em outras palavras, substituímos o ponto $p \in U$ por uma linha projetiva que estará mergulhada em M do mesmo modo que $\mathbb{C}P(1)$ em \mathbb{C}^2 . Como antes, fica

bem definida a projeção holomorfa $\pi_p: M_p \rightarrow M$, tal que $\pi_p|_{M \setminus \{p\}} = \text{id}$ e $\pi_p|_{\pi_p^{-1}(V)} = \pi_o$; ela é um difeomorfismo entre $M \setminus \{p\}$ e $M_p \setminus \pi_p^{-1}(p)$; o leitor pode verificar facilmente que se trata de uma aplicação própria. Não há nenhum problema em se efetuar novas explosões em pontos de M_p (sempre o faremos, quando necessário, em pontos de $\pi_p^{-1}(\{p\})$); a palavra divisor de notará a união das linhas projetivas que forem surgindo neste processo.

Quando trabalhamos em coordenadas, nossa tarefa é facilitada pela proposição seguinte.

(3.3) Proposição - Existe um único difeomorfismo holomorfo Φ

que faz comutar o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\pi_p} & \pi_p^{-1}(U) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ V & \xleftarrow{\pi_o} & \pi_o^{-1}(V) \end{array} .$$

Em outras palavras, as nossas explosões serão realizadas efetivamente em pontos de \mathbb{C}^2 . Tomemos, por exemplo, a curva plana $C: y^2 - x^5 = 0$ numa vizinhança pequena de sua singularidade $0 \in \mathbb{C}^2$. Realizando uma explosão π_o em $0 \in \mathbb{C}^2$, obtemos em \mathbb{C}_o^2 um aberto de curva analítica $\pi_o^{-1}(C)$ que intersecta o divisor $\pi_o^{-1}(0)$ em um único ponto $a \in \pi_o^{-1}(0)$. De fato, escrevendo em coordenadas $\pi_o(x,t) = (x,tx)$, vemos que $\pi_o^{-1}(C)$ passa a ter equação $t^2 - x^3 = 0$, e $a \in \pi_o^{-1}(0)$ é a nova origem $(x,t) = (0,0)$. (atenção: rigorosamente $\pi_o^{-1}(C)$ inclui $\pi_o^{-1}(0)$; para não compli

car a notação, adotamos $\pi_0^{-1}(C) = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{0\})}$. Procedemos a uma nova explosão, agora de \mathbb{C}^2 em $a \in \pi_0^{-1}(0)$. Pela proposição anterior, basta realizar a explosão de \mathbb{C}^2 em $(0,0)$, e examinar o que ocorre a $t^2 - x^3 = 0$. Nas coordenadas onde $\pi_a(x, t) = (x, tx)$, obtemos a curva $\pi_a^{-1} \pi_0^{-1}(C)$ dada por $t^2 - x = 0$, a qual é não singular.

O exemplo sugere também que uma seqüência convenientemente escolhida de explosões permite desaparecer com as singularidades das curvas planas. Vamos agora discutir este fenômeno em geral. Dada a curva plana C com sua singularidade em $0 \in \mathbb{C}^2$, resolva-la significa obter:

- 1) uma aplicação holomorfa, própria, sobrejetiva $\pi: V \rightarrow U$, onde $U \subset \mathbb{C}^2$ é vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$, $C \cap U$ é irredutível e V uma superfície complexa. Além disso $\pi^{-1}(0)$ é uma união finita de curvas compactas que se cortam transversalmente, e π é difeomorfismo entre $U \setminus \{0\}$ e $V \setminus \pi^{-1}(0)$.
- 2) uma curva $C' \subset V$, não-singular, cortando o divisor $\pi^{-1}(0)$ em um único ponto.

Para nós, π será a composição sucessiva de explosões, e o divisor aparecerá como união de linhas projetivas cortando-se transversalmente em no máximo um ponto.

Para assegurar a existência da resolução, prosseguimos do modo seguinte. Digamos que C esteja parametrizada por $x(\xi) = \xi^k$, $y(\xi) = \sum_{i=i_0} b_i \xi^i$ com $k < i_0$. Escrevamos $i_0/k = n_1/m_1$, onde

m.d.c. $(m_1, n_1) = 1$, e seja $q \in \mathbb{N}$ o maior inteiro tal que $n_1 = qm_1 + s$, com $s > 0$ (logo $0 < s < m_1$). Realizemos explosões sucessivas π_j , $0 \leq j \leq q-1$, nos pontos $p_{j-1} = C^{(j-1)} \cap P_j(p_0 = 0)$, onde $C^{(j)} = \pi_{j-1}^{-1}(C^{(j-1)})$ e $P_j = \pi_{j-1}^{-1}(P_{j-1})$. Utilizemos coordenadas (x, t_j) onde $\pi_{j-1}(x, t_j) = (x, t_j x)$ e $p_j = (0, 0)$; encontramos para $C^{(j)}$ a parametrização $x(\xi) = \xi^k$, $t_j(\xi) = \sum_{i=i_0}^{\infty} b_i \xi^{i-(j+1)k}$. Quando $j = q-1$, temos $\frac{i_0 - qk}{k} = \frac{n_1}{m_1} - q = q + \frac{s}{m_1} - q = \frac{s}{m_1}$. Logo, o grau de $C^{(q)}$ em p_q é estritamente inferior ao grau de C em p_0 ; a continuação deste processo nos permite chegar a grau 1, ou seja, desaparecer a singularidade.

Com relação aos nós associados às singularidades, vemos que são simplificados por explosões. Por exemplo, tomemos a curva $C: y^2 - x^5 = 0$, cujo nó associado é do tipo $(2, 5)$. Após a explosão em $(0, 0)$, teremos nas coordenadas (x, t_1) onde $\pi_0(x, t_1) = (x, t_1 x)$ a nova curva $C^{(1)}$ de equação $t_1^2 - x^3 = 0$, ainda singular em $p_1 = (0, 0)$. Entretanto, o seu nó associado é do tipo $(2, 3)$, mais simples que o anterior. Uma nova explosão em p_1 , com $\pi_1(x, t_2) = (x, t_2 x)$, nos leva à curva $C^{(2)} = t_2 - x^2 = 0$, a qual já não possui singularidade. Geometricamente, o efeito da transformação $(x, t) \xrightarrow{\pi} (x, tx)$ no toro sólido T_1 consiste em "gírar" cada disco $D_x = \{(x, t); |t| \leq 1\}$, $|x| = 1$, de um ângulo $\theta \in \mathbb{R}$, onde $x = e^{i\theta}$. Portanto, a explosão π produz uma torsão em T_1 , de modo que π^{-1} permite uma simplificação em

seus nós.

Em geral, se iniciamos com pares de Puiseux $(m_1, n_1), \dots, \dots, (m_\ell, n_\ell)$ para C em $(0,0)$, obtemos para $C^{(j)}$, $0 \leq j \leq \leq q-2$ os pares $(m_1, n_1 - (j+1)m_1), (m_2, n_2 - (j+1)m_1 m_2), \dots, (m_\ell, n_\ell - (j+1)m_1 \dots m_\ell)$. Quando $j = q-1$, a parametrização de $C^{(q-1)}$ $x(\xi) = \xi^k$, $t_q(\xi) = \sum_{i=i_0}^{\infty} b_i \xi^{i-qq}$ não mais pode ser usada para o cálculo dos pares, pois $i_0 - qq < k$. Efetuando a mudança de parametrização $t_q(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi}^{i_0-qq}$, $x(\tilde{\xi}) = \sum_{i=k}^{\infty} \tilde{b}_i \tilde{\xi}^i$, vemos que o primeiro par torna-se (s, m_1) , com $s < m_1$. Este decréscimo leva finalmente à diminuição do número de pares de Puiseux, até seu desaparecimento.

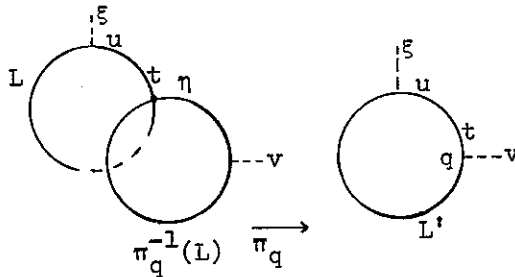
§4 - Vizinhanças Tubulares de Linhas Projetivas

Como vimos anteriormente, explosões sucessivas a partir de um ponto $p \in M$, onde M é superfície complexa, substituem este ponto por um divisor constituído por linhas projetivas com cruzamentos normais. Desejamos descrever as vizinhanças tubulares em M destas linhas projetivas.

Começemos por $L = \pi_p^{-1}(\{p\})$, que possui vizinhança em \hat{M}_p coberta por coordenadas $(x,t), (u,y)$ ligadas pelas relações $ut = 1$, $y = tx$. Elas permitem definir o fibrado vetorial sobre $\mathbb{C}P(1)$ de posto 1 $E(1) = (\mathbb{C}^2, (t,x)) \cup_{\phi_1} (\mathbb{C}^2, (u,y))$, onde $(u,y) = \phi_1(t,x) = (t^{-1}, tx)$; e segue-se de imediato que a vizinhança acima descrita de L em \hat{M}_p é analiticamente equivalente a uma

vizinhança da seção nula $S(1)$ de $E(1)$ (atenção: a equivalência resulta da construção de $E(1)$!).

Passemos à situação geral, em que L é linha projetiva do divisor. Afirmamos que L possui vizinhança coberta por coordenadas $(\eta, t), (u, \xi)$ ligadas pelas relações $ut = 1, \xi = t^k \eta$, $k \in \mathbb{N}$. Para ver isto, procedemos por indução. Observamos que a afirmativa vale se $L = \pi_p^{-1}(\{p\})$, como vimos antes. Supondo que $L' = \pi_q(L)$, onde π_q é o blowing-up em $q \in L'$, possui vizinhança coberta por coordenadas $(\eta, t), (u, \xi)$ relacionadas por $ut = 1, \xi = t^{k-1}v$, procuremos as relações numa vizinhança de L .



Admitamos que $v_q = t_q = 0$. Temos então que L tem vizinhança coberta por coordenadas $(\eta, t), (u, \xi)$; quanto a $\pi_q^{-1}(L)$, as coordenadas são $(v, \theta), (\eta, t)$, e as relações

$$\eta\theta = 1, \quad t = \theta v, \quad v = \eta t, \quad \xi = t^{k-1}v.$$

Portanto, $ut = 1$ e $\xi = t^k \eta$ relacionam (η, t) e (u, ξ) , o que termina a indução.

Definamos o fibrado vetorial sobre $\mathbb{C}P(1)$ de posto 1 $E(k) = (\mathbb{C}^2, (t, \eta)) \cup_{\phi_k} (\mathbb{C}^2, (u, \xi))$, onde $\phi_k(t, \eta) = (u, \xi) = (t^{-1}, t^k \eta)$.

Resulta por construção que a vizinhança de L coberta por (t, η) e (u, ξ) é analiticamente difeomorfa a uma vizinhança da seção nula S_k de E .

É natural agora comparar os vários fibrados $E(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Eles possuem um invariante por equivalência C^∞ , o número de Euler $\chi(E(k))$, o qual vem a ser o número de auto-interseção de S_k em $E(k)$. Ou ainda, é o número algébrico de pontos de interseção de S_k com uma superfície $S'_k \subset E(k)$ qualquer que esteja C^1 -próxima e seja transversal a S_k (em particular, S'_k é uma seção de $E(k)$).

(4.1) Proposição - $\chi(E(k)) = -k$.

Demonstração. Construímos S'_k do seguinte modo: começamos por $S_1 = \{(u, a) \in E(k); |u| \leq 1 \text{ e } a \neq 0\}$. Esta superfície com bordo torna-se $\{(t, \eta) \in E(k); |t| \geq 1 \text{ e } \eta = at^{-k}\}$. Se $|t| = 1$, temos $\eta = at^{-k}$ em S_1 . Consideramos então $S_2 = \{(t, \eta) \in E(k); |t| \leq 1 \text{ e } \eta = a\bar{t}^k\}$, e $S'_k = S_1 \cup S_2$. Podemos supor S'_k de classe C^∞ , após realizar uma deformação em torno de $S_1 \cap S_2$ que não acrescente pontos a $S_k \cap S'_k$. Ora, $t = \eta = 0$ é o único elemento de $S_k \cap S'_k$, mas ainda não há transversalidade neste ponto (a não ser que $k = 1$). Substituímos S_2 por $\{(t, \eta) \in E(k); |t| \leq 1, \eta(t) = a(\bar{t}-p_1)\dots(\bar{t}-p_k)\}$, onde $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$. Tem-se agora $S_k \cap S'_k = \{(p_j, 0), j = 1, \dots, k\}$ e calculamos facilmente o número de interseção em $(p_j, 0)$, que é -1 . Daí segue-se a Proposição. ■

Observe-se que o fibrado $E(k)$ pode ser construído, independentemente de explosões, ainda quando $k \in \mathbb{Z}$, e $\chi(E(k)) = -k$.

O leitor pode verificar que a linha projetiva L descrita anteriormente possui para fibrado normal exatamente $E(k)$. Em geral, se $S \subset M$ é uma superfície de Riemann compacta, não é verdade que uma vizinhança de S em M seja holomorficamente equivalente a uma vizinhança da seção nula de seu fibrado normal (ver [1], pg. 202).

CAPÍTULO II

SINGULARIDADES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ANALÍTICAS E RESOLUÇÃO

Neste capítulo demonstraremos o teorema de resolução de singularidades de equações diferenciais, ou, mais precisamente, de folheações analíticas. Trata-se essencialmente da substituição da análise local pelo estudo global de uma nova folheação com singularidades lineares. Aplicações deste método surgirão em capítulos seguintes.

§1 - Folheações Analíticas Singulares e sua Resolução

Sejam M uma superfície complexa e \mathfrak{F} folheação analítica singular em M . Tal objeto significará para nós o seguinte:

(a) Um conjunto discreto de pontos $S(\mathfrak{F}) \subset M$ - o conjunto singular de \mathfrak{F} .

(b) Uma cobertura aberta $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ de M e uma coleção de 1-formas analíticas $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ que definem \mathfrak{F} , isto é:

(b1) cada w_j está definida em U_j e se anula somente em $U_j \cap S(\mathfrak{F})$ (podemos assumir $\# U_j \cap S(\mathfrak{F}) = 1$).

(b2) as folhas de \mathfrak{F} em U_j são as curvas integrais de $w_j = 0$.

(b3) se $U_j \cap U_l \neq \emptyset$, existe $f_{jl}: U_j \cap U_l \rightarrow \mathbb{C}^*$ função analítica de modo que $\omega_j = f_{jl} \omega_l$.

Observe-se que a propriedade (b3) permite prolongar de um aberto a outro as folhas de \mathfrak{F} .

Apesar do nosso objeto principal de estudo ser a compreensão (ao menos parcial!) da folheação associada a uma equação diferencial analítica $\omega = Pdx + Qdy = 0$ definida em uma vizinhança de uma singularidade isolada, o método que empregaremos leva rapidamente à situação mais geral acima. De fato, inspirados no exemplo das curvas planas, propomo-nos a realizar explosões sucessivas nas singularidades e acompanhar seu efeito na folheação dada. Nosso objetivo imediato será a obtenção de singularidades com multiplicidade algébrica 1. Precisemos este conceito; sejam $p \in S(\mathfrak{F})$ singularidade isolada da folheação singular \mathfrak{F} e ω 1-forma analítica que define \mathfrak{F} no aberto coordenado $U \subset M$. Tomemos $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}^2$ carta coordenada de M , com $\varphi(p) = (0,0)$. Escrevamos

$$\varphi_* \omega(x,y) = \sum_{l=k}^{\infty} P_l(x,y)dx + Q_l(x,y)dy$$

para o desenvolvimento de Taylor de $\varphi_* \omega$ em $(0,0)$; os polinômios P_l, Q_l são homogêneos de grau $l \in \mathbb{N}$, e $(P_k, Q_k) \neq (0,0)$.

(1.1) Definição - O número natural $m_p(\mathfrak{F}) = k$ é a multiplicidade algébrica de \mathfrak{F} em $p \in M$.

* usaremos indiferentemente campos de vetores ou formas diferenciais.

Comecemos então pela equação $w = Pdx + Qdy = 0$ em $U \subset \mathbb{C}^2$ aberto, tendo $(0,0) \in U$ como única singularidade. P e Q são funções analíticas definidas em U , com $P(0,0) = Q(0,0) = 0$. Vamos associar-lhe a folheação analítica singular \mathfrak{F}_0 em U_0 , o blowing-up de U em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Sejam $w(x,y) = \sum_{j=k}^{\infty} P_j(x,y)dx + Q_j(x,y)dy$ o desenvolvimento de Taylor de w em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, k a multiplicidade algébrica e $C(x,y) = xP_k(x,y) + yQ_k(x,y)$.

Escrevamos nas coordenadas introduzidas no capítulo anterior as expressões para $\pi_0^* w$:

$$\begin{aligned} \pi_0^* w(x,y) &= \sum_{j=k}^{\infty} P_j(x,tx)dx + Q_j(x,tx)(xdt+tdx) \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} x^j (P_j(1,t) + tQ_j(1,t))dx + x^{j+1} Q_j(1,t)dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_0^* w(u,y) &= \sum_{j=k}^{\infty} P_j(uy,y)(ydu + udy) + Q_j(uy,y)dy \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} y^{j+1} P_j(u,1)du + y^j (Q_j(u,1) + uP_j(u,1))dy \end{aligned}$$

Dois casos distintos se apresentam:

(I) $C(x,y) \equiv 0$

Então $\pi_0^* w(x,t)$ e $\pi_0^* w(u,y)$ são divisíveis por x^{k+1} e y^{k+1} , respectivamente. Colocando

$$\hat{w}(x,t) = \frac{1}{x^{k+1}} \pi_0^* w(x,t) \quad \text{e} \quad \hat{w}(u,y) = \frac{1}{y^{k+1}} \pi_0^* w(u,y)$$

vemos que

$$\hat{\omega}(x, t) = [(P_{k+1}(1, t) + tQ_{k+1}(1, t))dx + Q_k(1, t)dt] + x\alpha(x, y)$$

$$\hat{\omega}(u, y) = [P_k(u, 1)du + (Q_{k+1}(u, 1) + uP_{k+1}(u, 1))dy] + y\beta(x, y)$$

onde α, β são 1-formas analíticas. Tem-se que

$$(*) \quad \hat{\omega}(u, y) = u^{k+1} \hat{\omega}(x, t).$$

As possíveis singularidades de $\hat{\omega}(x, t)$ estão contidas na linha projetiva $x = 0$ (pois ω é singular somente em $(0, 0)$, e são as soluções do sistema

$$Q_k(1, t) = 0, \quad P_{k+1}(1, t) + tQ_{k+1}(1, t) = 0$$

Seu número é finito, como se depreende do fato de ser $Q_k(1, t) \neq 0$ (caso contrário, com $C(1, t) \equiv 0$ obteríamos também $P_k(1, t) \equiv 0$). O raciocínio para $\hat{\omega}(u, y)$ é análogo, podendo talvez localizar mais uma singularidade em $u = 0$, $y = 0$.

De (*) podemos afirmar que temos em U_0 uma folheação analítica singular \mathfrak{F}_0 .

Observe-se que os pontos da linha projetiva $\pi_0^{-1}(0)$ onde $Q_k(1, t) \neq 0$ são regulares para \mathfrak{F}_0 , havendo transversalidade entre a folha e $\pi_0^{-1}(0)$. Entretanto, se $Q_k(1, t) = 0$ mas $P_{k+1}(1, t) + tQ_{k+1}(1, t) \neq 0$, ainda temos regularidade mas agora com tangência entre a folha e $\pi_0^{-1}(0)$.

(II) $C(x,y) \neq 0$

Agora, $\pi_0^* \omega(x,t)$ e $\pi_0^* \omega(u,y)$ são divisíveis por x^k e y^k , respectivamente. Se

$$\hat{\omega}(x,t) = \frac{1}{x^k} \pi_0^* \omega(x,t) \quad \text{e} \quad \hat{\omega}(u,y) = \frac{1}{y^k} \pi_0^* \omega(u,y),$$

vemos que

$$\hat{\omega}(x,t) = [(P_k(1,t) + tQ_k(1,t))dx + xQ_k(1,t)dt] + x\alpha(x,t)dx + x^2\beta(x,t)dt$$

$$\hat{\omega}(u,y) = [(Q_k(u,1) + uP_k(u,1))dy + yP_k(u,1)du] + y\gamma(x,t)dy + y^2\delta(x,t)du$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são 1-formas analíticas. Tem-se que

$$\hat{\omega}(u,y) = u^k \hat{\omega}(x,t)$$

Há neste caso uma diferença fundamental com relação ao caso anterior: a linha projetiva é invariante pela folheação $\hat{\omega}(x,t) = 0$ (e também por $\hat{\omega}(u,y) = 0$), sendo constituída pela união do conjunto singular (dado por $C(1,t) = 0$ e $C(u,1) = 0$) e uma folha que é o seu complemento em $\pi_0^{-1}(0)$. Temos novamente em U_0 uma folheação analítica singular \mathfrak{F}_0 .

(1.2) Definição - \mathfrak{F}_0 é a explosão de \mathfrak{F} no ponto $(0,0) \in \mathbb{C}^2$.

Esta definição se generaliza diretamente. Sejam \mathfrak{F} folheações analíticas singulares na superfície M , $p \in S(\mathfrak{F})$ e $U \ni p$

aberto coordenado onde \mathfrak{F} é definida por $w = 0$; w é 1-forma analítica que se anula somente em $p \in U$. Inicialmente definimos a folheação $(\mathfrak{F}|_U)_p$, explosão da restrição de \mathfrak{F} a U , no ponto $p \in U$ (trata-se de uma extensão simples da definição acima). Seja $\pi_p: U_p \rightarrow U$ a projeção usual associada.

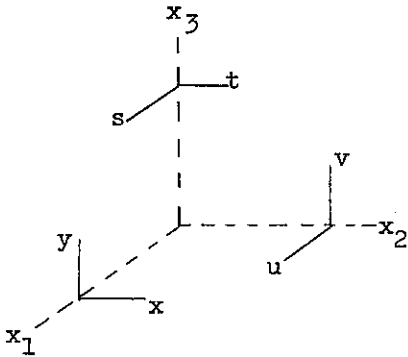
(1.3) Definição - A explosão \mathfrak{F}_p da folheação \mathfrak{F} no ponto $p \in M$ é obtida tomando \mathfrak{F} em $M \setminus \{p\}$ e $(\mathfrak{F}|_U)_p$ em U_p e identificando pela aplicação π_p (a qual é um difeomorfismo entre os abertos $U \setminus \{p\}$ e $U_p \setminus \pi_p^{-1}(p)$).

Observe-se que a superfície M_p resultante é a explosão de M no ponto $p \in M$, como definido no capítulo anterior. O leitor deve manter em mente a situação em que começamos num aberto de \mathbb{C}^2 com uma explosão e efetuamos novas explosões nas singularidades nascidas deste processo.

§2 - Exemplos

(2.1) Folheações em $\mathbb{C}P(2)$

O espaço projetivo complexo bidimensional é o conjunto das retas de \mathbb{C}^3 que passam por $(0,0,0)$. Trata-se de uma superfície complexa; cartas coordenadas se obtêm a partir dos traços das retas nos planos $L_j = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3; x_j = 1\}$, $j = 1, 2, 3$. Utilizando-se as variáveis indicadas na figura, vemos que as mudanças de coordenadas são:



$$\begin{cases} u = x^{-1}, v = x^{-1} y \\ t = v^{-1}, s = uv^{-1} \\ y = s^{-1}, x = ts^{-1} \end{cases}$$

Seja $T: \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{C}P(2)$ a projeção natural que associa ao ponto $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ a reta que o liga à origem. Esta reta corta L_1 , por exemplo, no ponto $(1, x_2/x_1, x_3/x_1)$, de modo que no correspondente sistema de coordenadas temos $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2/x_1, x_3/x_1)$ (o leitor pode escrever T nos outros dois sistemas de coordenadas!).

Consideremos agora a equação diferencial em \mathbb{C}^3 dada por $\dot{x}_i = A_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, onde os A_i 's são polinômios homogêneos de grau $k \in \mathbb{N}$. Vamos tentar projetar, via T , o campo de vetores correspondente $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (A_1(x_1, x_2, x_3), A_2(x_1, x_2, x_3), A_3(x_1, x_2, x_3))$. Trabalhem na carta (x, y) , onde $x = x_1^{-1} x_2$ e $y = x_1^{-1} x_3$.

Como $\dot{x} = x_1^{-2}(\dot{x}_2 x_1 - x_2 \dot{x}_1)$, $\dot{y} = x_1^{-2}(\dot{x}_3 x_1 - x_3 \dot{x}_1)$, vemos que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^{k-2} [A_2(1, x, y) - x A_1(1, x, y)], \dot{y} = \\ &= x_1^{k-2} [A_3(1, x, y) - y A_1(1, x, y)]. \end{aligned}$$

Para eliminar a dependência da variável x_1 , passamos à equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_3(1,x,y) - yA_1(1,x,y)}{A_2(1,x,y) - xA_1(1,x,y)} \quad \text{ou} \quad \eta_1 =$$

$$= (A_2(1,x,y) - xA_1(1,x,y))dy - (A_3(1,x,y) - yA_1(1,x,y))dx = 0.$$

Nos demais sistemas encontramos

$$\eta_2 = (A_1(u,1,v) - uA_2(u,1,v))dv - (A_3(u,1,v) - vA_2(u,1,v))du = 0$$

$$\eta_3 = (A_2(s,t,1) - tA_3(s,t,1))ds - (A_1(s,t,1) - sA_3(s,t,1))dt = 0$$

Pode-se ver facilmente que

$$\eta = x^{-k+1} \eta_1, \quad \eta_3 = y^{-k+1} \eta_1 \quad \text{e} \quad \eta_3 = v^{-k+1} \eta_2,$$

de modo que temos bem definida uma folheação analítica em $\mathbb{CP}(2)$. Uma escolha conveniente de A_1, A_2, A_3 leva a um conjunto de singularidades finito.

(2.2) Compactificação de Folheações em \mathbb{C}^2

Retornando ao exemplo anterior, observemos que a aplicação $(x,y) \xrightarrow{\psi} (\text{reta passando por } (0,0,0) \text{ e } (1,x,y))$ é um mergulho de \mathbb{C}^2 em $\mathbb{CP}(2)$, e que $\mathbb{CP}(2) \setminus \psi(\mathbb{C}^2)$ é simplesmente o espaço projetivo complexo unidimensional. Portanto, podemos encarar $\mathbb{CP}(2)$ como uma compactificação de \mathbb{C}^2 , a qual permite também estender, "compactificando-as", as folheações polinomiais singulares de \mathbb{C}^2 . De fato, seja $w = Px + Qy = 0$ 1-forma analítica definindo uma folheação em \mathbb{C}^2 ; suponhamos P e Q polinômios primos entre si,

de modo que as singularidades de $\omega = 0$ são isoladas.

Imaginemos que $\omega = 0$ esteja definida no plano L_1 . Vamos transformar esta equação para as coordenadas (u,v) e (s,t) . Temos que

$$x = u^{-1}, y = u^{-1}v \quad \text{e} \quad y = s^{-1}, x = s^{-1}t.$$

Daf:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \implies$$

$$P(u^{-1}, u^{-1}v)(-u^{-2}du) + Q(u^{-1}, u^{-1}v)(-u^{-2}vdu + u^{-1}dv) = 0 \implies$$

$$-u^{-2}(P(u^{-1}, u^{-1}v) + vQ(u^{-1}, u^{-1}v))du + u^{-1}Q(u^{-1}, u^{-1}v)dv = 0 \implies$$

$$(P(u^{-1}, u^{-1}v) + vQ(u^{-1}, u^{-1}v))du - uQ(u^{-1}, u^{-1}v)dv = 0 \quad (*)$$

Do mesmo modo, nas coordenadas (s,t) obtemos:

$$(Q(s^{-1}t, s^{-1}) + tP(s^{-1}t, s^{-1}))ds - sP(s^{-1}t, s^{-1})dt = 0 \quad (**)$$

Suponhamos grau $P \neq$ grau Q ; multiplicando $(*)$ por u^t (e $(**)$ por s^t), onde $t = \max\{\text{grau } P, \text{ grau } Q\}$, tornamos ambas as equações analíticas. Observe-se que $m.d.c. \{P, Q\} = 1$ implica em um número finito de singularidades. Finalmente, a "linha no infinito" $u = 0$ (ou $s = 0$) é invariante para a folheação em questão.

(2.3) Resolução da Singularidade $(0,0)$ de $\omega = Adx + Bdy = 0$, com A e B polinômios homogêneos de grau $k \in \mathbb{N}$, primos entre si, e $B(0,1) \neq 0$.

Colocando $y = tx$, vemos que

$$\hat{w}(x, t) = [A(1, t) + tB(1, t)]dx + xB(1, t)dt.$$

As singularidades de \mathfrak{F}_0 são dadas por $(t_1, 0), \dots, (t_{k+1}, 0)$, onde t_1, \dots, t_{k+1} são as raízes de $C(1, t) = A(1, t) + tB(1, t) = 0$.

Quando tomamos o desenvolvimento de Taylor de $\hat{w}(x, t)$ em torno de $(t_i, 0)$, encontramos o termo linear

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial A}{\partial t}(1, t_i) + B(1, t_i) + t_i \frac{\partial B}{\partial t}(1, t_i) \right) (t - t_i) dx + B(1, t_i) dt = \\ & = \frac{\partial C}{\partial t}(1, t_i) (t - t_i) dx + B(1, t_i) dt \end{aligned}$$

Temos necessariamente $B(1, t_i) \neq 0$, $i = 1, \dots, k+1$, pois $A(1, t) = 0$ e $B(1, t) = 0$ não possuem raízes em comum. Segue-se que todas as singularidades $(0, t_i)$, $i = 1, \dots, k+1$ possuem multiplicidade algébrica 1. É claro que se adicionarmos a A e B termos de ordem mais alta, não mais podemos garantir esta conclusão. Entretanto, caso $C(1, t) = 0$ não possua raízes múltiplas, tal adição não altera o fato das singularidades apresentarem multiplicidade 1 (exercício).

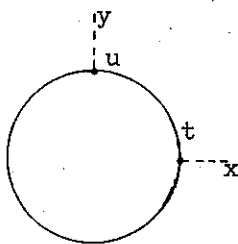
(2.4) Resolução da Singularidade (0,0) de

$$w = (y^k + 2yx^{2k-2})dx - x^{2k-1} dy = 0, \quad k \geq 2.$$

Fazendo $y = tx$, vemos que $\hat{w}(x, t) = (t^k + tx^{k-1})dx - x^k dt$, de modo que $x = 0$, $t = 0$ é singularidade ainda com multiplicidade algébrica $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, nas coordenadas (u, y) encontramos:

$$\hat{w}(u, y) = (u + u^{2k-1} y^{k-1})dy + (y^k + 2y^k u^{2k-2})du. \text{ Segue-se que a}$$

multiplicidade algébrica de $u = 0, y = 0$ é 1.

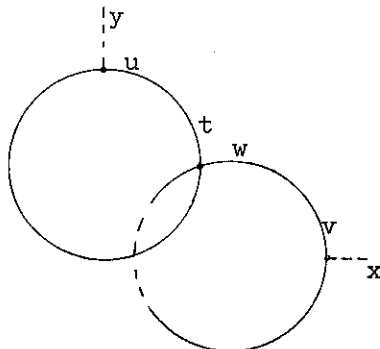


Realizemos nova explosão em $x = 0, t = 0$; para simplificar a notação, escrevamos

$$\eta(x, t) = (t^k + tx^{k-1})dx - x^k dt.$$

Fazendo $t = vx$, encontramos $\hat{\eta}(x, v) = v^k dx - x dv$, de modo que agora $x = 0, v = 0$ possui multiplicidade algébrica 1.

Finalmente, quando $x = wt$, vemos que $\hat{\eta}(w, t) = w dt + w^{k-1} t dw$; novamente encontramos multiplicidade algébrica 1 para $w = 0, t = 0$.



Observe-se que (2.3) e (2.4) são exemplos do caso II discutido anteriormente. Vejamos uma situação em que o caso I se apresenta.

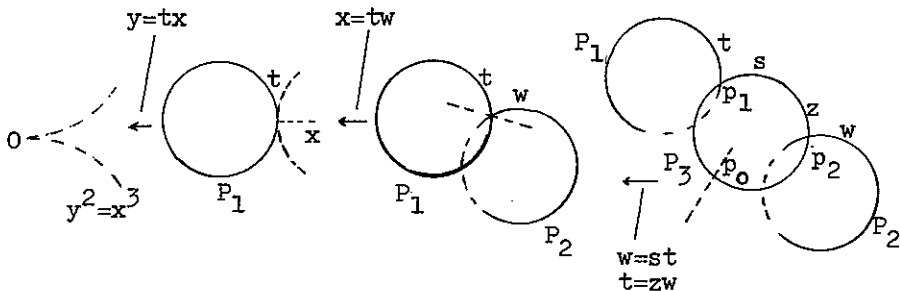
(2.5) Resolução da Singularidade (0,0) de $w=(x^5+4y^2)dx-2xy dy = 0$.

Tem-se que $\hat{w}(x,t) = (x^3+2t^2)dx - 2txdt$, $\hat{w}(u,y) = (u^5y^4+4y)du + (u^6y^5+2u)dy$.

A multiplicidade algébrica de $u = 0, y = 0$ é 1. Devemos então realizar nova explosão no ponto $x = 0, t = 0$. Escrevendo $\eta(x,t) = (x^3+2t^2)dx - 2txdt$, vemos que $\hat{\eta}(x,v) = dx - 2v dv$ (fizemos $t = vx$) e $\hat{\eta}(w,t) = (w^3t+2)dw + w^4 dt$. Trata-se de uma singularidade do caso II, e após sua explosão não encontramos mais singularidades. A folheação obtida é transversal ao projetivo resultante desta última explosão, à excessão do ponto $x = 0, v = 0$, onde temos uma tangência; a folha por este ponto é simplesmente $x = v^2$.

(2.6) Determinação da folha típica de $w = d(x^3-y^2) = 0$

Trata-se de determinar a topologia de uma folha genérica desta 1-forma utilizando a sua resolução. A esta altura é fácil verificar que a resolução de w é obtida por uma sequência de três explosões definidas na figura abaixo:



A folheação induzida na vizinhança de P_3 está dada nas cartas (s,t) e (z,w) pelas formas

$$\hat{\eta}(s,t) = (-2t + 3st)ds + (-6s + 6s^2)dt$$

$$\hat{\eta}(z,w) = (6z - 6z^2)dw + (3w - 4zw)dz.$$

Os pontos singulares da folheação são, na carta (s,t) , $p_0 = (1,0)$, $p_1 = (0,0)$ e na carta (z,w) , $p_0 = (1,0)$, $p_2 = (0,0)$. Vejamos mais de perto qual é o comportamento das folhas de $\hat{\eta}$ perto de um destes pontos singulares, digamos p_1 , na carta (s,t) . Para este fim, consideremos uma curva $\gamma: s = \rho e^{i\theta}$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$, na folha P_3 em torno do ponto p_1 , com $\rho < 1$. Fixemos a reta $\Sigma_\rho = \{\rho\} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2$ que é em todo ponto transversal às folhas de $\hat{\eta}$. Procedamos a definir uma aplicação $f_\gamma: \Sigma_\rho \rightarrow \Sigma_\rho$ de primeiro retorno sobre γ e ao longo das folhas de $\hat{\eta}$. Esta aplicação, chamada de holonomia da folha P_3 em torno do ponto p_1 , é obtida para cada $t_0 \in \Sigma_\rho$ como $f_\gamma(t_0) = t(2\pi)$ onde $t = t(\theta)$ é a solução da equação diferencial

$$\frac{dt}{d\theta} = i\rho e^{i\theta} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{i}{6} \frac{(3\rho e^{i\theta} - 2)}{1 - \rho e^{i\theta}} \cdot t$$

com valor inicial $t(0) = t_0$.

Neste caso a solução é $f_\gamma(t_0) = e^{-\frac{2\pi i}{3}} t_0$ i.e. f_γ é uma rotação de ângulo $-\frac{2\pi}{3}$ o que significa que a holonomia é periódica de período 3 ou ainda que a folha por $t_0 \neq 0$

de $\hat{\eta}$ recobre o disco pontuado $D_p \setminus \{p_1\}$ três vezes.

Similarmente, mostra-se que as holonomias de P_3 em torno de p_0 e p_2 são periódicas de períodos 6 e 2 respectivamente.

É claro agora que uma folha genérica $y^2 - x^3 = c \neq 0$ é obtida da maneira seguinte. Na vizinhança de p_0 a folha possui um bordo que é uma curva fechada que recobre seis vezes um pequeno caminho simples em torno de p_0 em P_3 . Colando um disco neste bordo obtemos uma superfície compacta que se projeta sobre $P_3 = \bar{\mathbb{C}}$ como um recobrimento de seis folhas com pontos de ramificação sobre p_0, p_1 e p_2 . Como a holonomia de P_3 em torno de p_1 é periódica de período três temos que existem dois pontos de ramificação sobre p_1 com índice de ramificação dois, i.e. localmente, em torno de um destes pontos a aplicação é três a um. Similarmente sobre p_2 há três pontos de ramificação de índice 1 e sobre p_0 somente um ponto com índice de ramificação cinco.

Pela fórmula de Riemann-Hurwitz nós temos

$$\chi(F) = g \cdot \chi(\bar{\mathbb{C}}) - R.$$

onde $\chi(F)$ denota a característica de Euler de F , g o grau do recobrimento e R a soma dos índices de ramificação. Daí segue-se

$$\chi(F) = 6 \times 2 - (2 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 5) = 0.$$

Isto significa que a folha genérica de w é um toro do qual retirou-se um disco, i.e. tem o mesmo tipo de homotopia da figura oito.

Deixamos ao leitor analisar o caso $d(y^2 - x^{2k+1}) = 0$, onde $k > 1$. É interessante comparar esta descrição com aquela feita no livro *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, de J. Milnor (*Annals of Mathematics Studies*).

Este exemplo, ilustra bem o ponto de vista que adotaremos aqui. Faremos um estudo inicial das singularidades com multiplicidade algébrica igual a 1; a seguir analisaremos propriedades de singularidades mais degeneradas a partir de sua desingularização.

§3 - Resolução de Singularidades*

Vamos estudar agora um teorema análogo àquele discutido para as curvas planas: aplicando uma seqüência conveniente de explosões às singularidades de uma folheação analítica singular, obtemos uma folheação cujas singularidades possuem todas multiplicidade algébrica 1.

Definamos inicialmente nossa principal ferramenta. Sejam \mathfrak{F} folheação analítica singular da superfície complexa M , $p \in S(\mathfrak{F})$ e $S \ni p$ curva diferenciável lisa mergulhada em M de modo que $S \setminus \{p\}$ esteja contida em uma folha de \mathfrak{F} . Consideremos uma carta coordenada $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2): U \rightarrow \mathbb{C}^2$, onde $U \ni p$ é aberto de M , tal que $\varphi(p) = (0,0)$ e $\varphi_2(S) \equiv 0$. Definindo \mathfrak{F} em U pela 1-forma w , temos que $(\varphi_* w)(x,y) = \gamma(x,y)dx + \beta(x,y)dy$, com

* Trataremos sempre com singularidades do tipo II anterior.

$\beta(0,0) = 0$. Vê-se que $\varphi_{*w}(x,0) = \beta(x,0)dy$ onde $\beta(x,0) = \sum_{j \geq m} b_j x^j$, $a_m \neq 0$.

(3.1) Definição - O número $m \in \mathbb{N}$ é a multiplicidade de \mathcal{F} ao longo de S no ponto $p \in S$; será denotado a seguir por $m_p(\mathcal{F}, S)$. O leitor pode verificar que as escolhas feitas não influenciam nesta multiplicidade.

(3.2) Lema - $m_p(\mathcal{F}) \leq m_p(\mathcal{F}, S)$

Uma curva como S será chamada por nós uma separatriz de $p \in M$; por enquanto estaremos nos restringindo às separatrizes lisas, mais particularmente nos interessarão as linhas projetivas surgidas nas explosões vistas como separatrizes lisas de suas singularidades.

Importante será conhecer como o número $m_p(\mathcal{F}, S)$ é afetado por explosões. Seja $\pi_p: U_p \rightarrow U$ a projeção canônica associada à explosão de U no ponto $p \in U$, e S' o transformado de S , isto é: $S' = \pi_p^{-1}(S \setminus \{p\})$. Temos que S' corta transversalmente $\pi_p^{-1}(\{p\})$; seja $q = S' \cap \pi_p^{-1}(\{p\})$.

(3.3) Lema - $m_q(\mathcal{F}_p, S') = m_p(\mathcal{F}, S) - (m_p(\mathcal{F}) - 1)$

Demonstração

1 - Como se trata de uma propriedade local, podemos supor $U \subset \mathbb{C}^2$, $p = (0,0)$ e S contida no eixo horizontal; \mathcal{F} vem dada por

$w = \gamma\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy = 0$, com $\beta(x,0) = x^m(1+\dots)$. Fazendo $y = tx$, obtemos $\hat{w}(x,t) = \frac{1}{x^k} [tx\alpha(x,tx)dx + \beta(x,tx)(tdx+xdt)] = \frac{1}{x^k} [(tx\alpha(x,tx) + t\beta(x,tx))dx + x\beta(x,tx)dt]$, onde $k = m_p(\mathfrak{F})$.

Desta fórmula deduzimos imediatamente o resultado desejado. ■

Apliquemos então uma seqüência qualquer de explosões começando pela singularidade $p \in S(\mathfrak{F})$. A superfície complexa obtida contém um divisor privilegiado, que é união de linhas projetivas que se cortam duas a duas transversalmente em um ponto no máximo. Denotemos por $D^{(m)} = \bigcup_{j=1}^m P_j^{(m)}$ o divisor após explosões nas singularidades $p_0 = p, p_1, \dots, p_{m-1}$, com $P_m^{(m)} = \pi_{p_{m-1}}^{-1}(p_{m-1})^*$, e por \mathfrak{F}_m a folheação resultante. Desejamos relacionar a multiplicidade original de $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}$ em $p \in M$ com as multiplicidades tangentes de \mathfrak{F}_m ao longo das componentes de $D^{(m)}$.

(3.4) Definição - O peso $\rho(P_j^{(m)})$ é definido por $\rho(P_1^{(m)}) = 1$, $\rho(P_j^{(m)}) = \rho(P_j^{(j)})$ e $\rho(P_j^{(j)}) = \sum_{\substack{i < j \\ P_i^{(j)} \cap P_j^{(j)} \neq \emptyset}} \rho(P_i^{(j)})$.

Em outras palavras, cada introdução de linha projetiva $P_m^{(m)}$ vem com um peso atribuído. Seu valor é a soma dos pesos das linhas projetivas que contêm p_{m-1} , e daí em diante ele não mais

* $\pi_{p_{m-1}}^{-1}(P_j^{(m)}) = P_j^{(m-1)}$ se $j < m$

se altera.

(3.5) Definição - Seja $q \in P_j^{(m)} \cap S(\mathfrak{X})$. Então $m_q^*(\mathfrak{X}_m, P_j^{(m)}) = m_q(\mathfrak{X}_m, P_j^{(m)})$ se $q \in D^{(m)}$ é ponto regular de $D^{(m)}$, e $m_q^*(\mathfrak{X}_m, P_j^{(m)}) = m_q(\mathfrak{X}_m, P_j^{(m)}) - 1$ caso contrário.

(3.6) Proposição - $m_p(\mathfrak{X})+1 = \sum_{\substack{q \in S(\mathfrak{X}_m) \\ j=1, \dots, m}} \rho(P_j^{(m)}) m_q^*(\mathfrak{X}_m, P_j^{(m)})$

Demonstração

1 - Verifiquemos a fórmula para \mathfrak{X}_1 . Neste caso, basta mostrar que $m_p(\mathfrak{X})+1 = \sum_{q \in S(\mathfrak{X})} m_q(\mathfrak{X}, P_1^{(1)})$. Suponhamos $M = \mathbb{C}^2$ e

$p = (0,0)$. Sabemos que $\hat{w}(x,t) = [(P_k(1,t) + tQ_k(1,t))dx + Q_k(1,t)dt] + x\alpha(x,tx)dx + x^2\beta(x,tx)dt$.

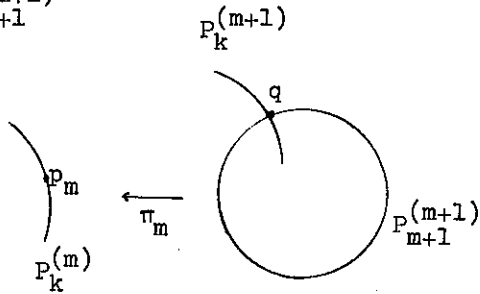
Podemos supor $Q_k(0,1) \neq 0$; assim, todas as singularidades de \mathfrak{X} são localizadas nas coordenadas (x,t) . Da expressão acima vemos que $\sum_{q \in S(\mathfrak{X})} m_q(\mathfrak{X}, P_1^{(1)}) = \text{grau}(P_k(1,t) + Q_k(1,t)) = m_p(\mathfrak{X}) + 1$, pois $m_q(\mathfrak{X}, P_1^{(1)})$ é simplesmente a multiplicidade de $q = (0, t(q))$ como raiz de $P_k(1,t) + tQ_k(1,t) = 0$.

2 - Suponhamos agora a fórmula válida para m explosões. Dois casos se apresentam:

(a) $p_m \in D^{(m)}$ é um ponto regular. A única parcela afetada pela explosão em p_m é $\rho(P_k^{(m)}) m_{p_m}^*(\mathfrak{X}_m, P_k^{(m)}) =$

$$= \rho(P_k^{(m)}) m_{p_m}(\mathfrak{F}_m, P_k^{(m)}), \text{ onde } p_m \in P_k^{(m)}. \text{ Seja } \{q\} =$$

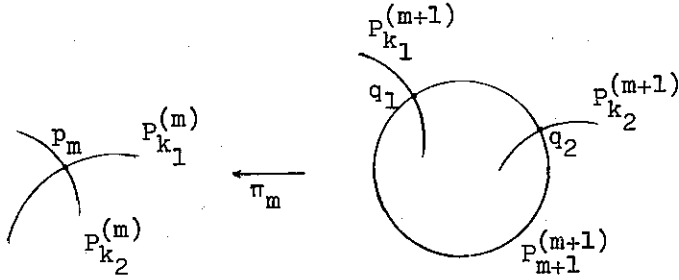
$$= P_k^{(m+1)} \cap P_{m+1}^{(m+1)}$$



$$\begin{aligned} \text{Temos } \rho(P_k^{(m)}) m_{p_m}(\mathfrak{F}_m, P_k^{(m)}) &= \rho(P_k^{(m+1)}) [m_q(\mathfrak{F}_{m+1}, P_k^{(m+1)}) + \\ &+ m_{p_m}(\mathfrak{F}_m) - 1] = \rho(R_k^{(m+1)}) (m_q(\mathfrak{F}_{m+1}, R_k^{(m+1)}) - 1) + \\ &+ \rho(P_{m+1}^{(m+1)}) \left(\sum_{\substack{r \in P_{m+1}^{(m+1)} \\ r \in S(\mathfrak{F}_{m+1})}} m_r(\mathfrak{F}_{m+1}, P_{m+1}^{(m+1)}) - 1 \right) = \\ &= \rho(P_k^{(m+1)}) m_q^*(\mathfrak{F}_{m+1}, P_k^{(m+1)}) + \rho(P_{m+1}^{(m+1)}) (m_q(\mathfrak{F}_{m+1}, P_{m+1}^{(m+1)}) - 1) + \\ &+ \rho(P_{m+1}^{(m+1)}) \sum_{\substack{r \in P_{m+1}^{(m+1)} \\ r \in S(\mathfrak{F}_{m+1}) \setminus \{q\}}} m_r(\mathfrak{F}_{m+1}, P_{m+1}^{(m+1)}) \end{aligned}$$

(b) $p_m \in P_{k_1}^{(m)} \cap P_{k_2}^{(m)}$. Desta vez duas parcelas serão envolvidas:

$$\rho(P_{k_1}^{(m)}) m_{p_m}^*(\mathfrak{F}_m, P_{k_1}^{(m)}) + \rho(P_{k_2}^{(m)}) m_{p_m}^*(\mathfrak{F}_m, P_{k_2}^{(m)})$$



$$\begin{aligned}
 \text{Temos que } & \rho(P_{k_1}^{(m)}) m_{P_m}^*(\mathfrak{F}_m, P_{k_1}^{(m)}) + \rho(P_{k_2}^{(m)}) m_{P_m}^*(\mathfrak{F}_m, P_{k_2}^{(m)}) = \\
 & = \rho(P_{k_1}^{(m+1)}) (m_{q_1}^*(\mathfrak{F}_{m+1}, P_{k_1}^{(m+1)})) + m_{P_m}(\mathfrak{F}_m) - 1 + \\
 & + \rho(P_{k_2}^{(m+1)}) (m_{q_2}^*(\mathfrak{F}_{m+1}, P_{k_2}^{(m+1)})) + m_{P_m}(\mathfrak{F}_m) - 1 = \\
 & = \rho(P_{k_1}^{(m+1)}) m_{q_1}^*(\mathfrak{F}_{m+1}, P_{k_1}^{(m+1)}) + \rho(P_{k_1}^{(m+1)}) m_{q_2}^*(\mathfrak{F}_{m+1}, P_{k_2}^{(m+1)}) + \\
 & + \rho(P_{m+1}^{(m+1)}) (m_{P_m}(\mathfrak{F}_m) - 1).
 \end{aligned}$$

Resta-nos identificar esta última parcela. Ora:

$$\begin{aligned}
 m_{P_m}(\mathfrak{F}_m) - 1 & = \sum_{\substack{r \in S(\mathfrak{F}_{m+1}) \\ r \in P_{m+1}^{(m+1)}}} m_r(\mathfrak{F}_{m+1}, P_{m+1}^{(m+1)}) - 2 = \\
 & = \sum_{\substack{r \in (\mathfrak{F}_{m+1}) \\ r \in P_{m+1}^{(m+1)} \\ r \neq q_1, q_2}} m_r(\mathfrak{F}_{m+1}, P_{m+1}^{(m+1)}) + m_{q_1}(\mathfrak{F}_{m+1}, P_{m+1}^{(m+1)}) + \\
 & + m_{q_2}(\mathfrak{F}_{m+1}, P_{m+1}^{(m+1)}) - 2 = \sum_{\substack{r \in S(\mathfrak{F}_{m+1}) \\ r \in P_{m+1}^{(m+1)}}} m_r^*(\mathfrak{F}_{m+1}, P_{m+1}^{(m+1)}).
 \end{aligned}$$

Portanto, segue-se a fórmula para $(m+1)$ explosões. ■

O leitor deve observar que todas estas considerações se aplicam a equações diferenciais formais, onde não exigimos convergência das séries de potências envolvidas.

(3.7) Teorema ([13] - Existe uma seqüência finita de explosões de modo que a folheação resultante possui todas as suas singularidades com multiplicidade algébrica igual a 1.

Demonstração

1 - Podemos considerar o caso em que a folheação $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ possui uma única singularidade, com multiplicidade algébrica $\nu > 1$. Demonstramos que após uma seqüência apropriada de explosões, todas as singularidades apresentam multiplicidade algébrica $\leq \nu-1$. Para isso, realizemos as explosões de modo que qualquer singularidade no cruzamento de duas linhas projetivas associa a uma destas linhas um peso alto, digamos $\geq \nu+2$. Mais precisamente, se $q \in P_{k_1}^{(m)} \cap P_{k_2}^{(m)}$, exigimos por exemplo $\rho(P_{k_1}^{(m)}) \geq \nu+2$. Ora, como $\rho(P_{k_1}^{(m)}) m_q^*(\mathfrak{F}_m, P_{k_1}^{(m)}) \leq \nu+1$, vemos

$$\text{que } m_q^*(\mathfrak{F}_m, P_{k_1}^{(m)}) = 0 \implies m_q(\mathfrak{F}_m, P_{k_1}^{(m)}) = 1 \implies m_q(\mathfrak{F}_m) = 1.$$

Examinemos as demais singularidades. Se $q \in P_k^{(m)}$ e $\rho(P_k^{(m)}) \geq 2$, concluímos que $2m_q^*(\mathfrak{F}_m, P_k^{(m)}) \leq \nu+1 \implies$
 $\implies m_q(\mathfrak{F}_m, P_k^{(m)}) \leq \frac{\nu+1}{2} < \nu$ e daí $m_q(\mathfrak{F}_m) < \nu$. Resta, por-

tanto, estudar a situação daquelas singularidades que pertencem a linhas projetivas de peso 1.

2 - Inicialmente, observemos que a propriedade seguinte é verificada por no máximo uma singularidade:

" $q \in S(\mathfrak{X}_m)$, q é ponto regular de $D^{(m)}$, $q \in P_k^{(m)}$ é tal que $m_q(\mathfrak{X}_m) \geq v$ e $\rho(P_k^{(m)}) = 1$ ".

De fato, se q_1, q_2 satisfazem esta propriedade, então $m_{q_i}^*(\mathfrak{X}_m, P_{k_i}^{(m)}) \geq v$, $i = 1, 2 \implies 2v \leq \rho(P_{k_1}^{(m)}) m_{q_1}^*(\mathfrak{X}_m, P_{k_1}^{(m)}) + \rho(P_{k_2}^{(m)}) m_{q_2}^*(\mathfrak{X}_m, P_{k_2}^{(m)}) \leq v+1$, contradição.

Vamos interromper por um instante a seqüência da demonstração para motivar o próximo passo. Consideremos a curva formal de \mathbb{C}^2 dada pela série $y = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$. Examinemos como os sucessivos transformados desta curva por explosões se comportam com relação aos divisores.

Na primeira explosão, em $p = (0,0)$, obtemos em coordenadas (x, t_1) a expressão $t_1' = a_1 + \sum_{j=2}^{\infty} a_j x^{j-1}$, de modo que $C^{(1)}$ corta o divisor no ponto $x = 0$, $t_1' = a_1$. Seja p_1 este ponto, e procedamos a uma nova explosão. Adotemos as coordenadas (x, t_1) em torno de p_1 de modo que $t_1 = t_1' - a_1$; para a explosão, escolhemos $t_1 = t_1' x$. Resulta a expressão $t_2' = a_2 + \sum_{j=3}^{\infty} a_j x^{j-2}$, de modo que $C^{(2)}$ corta o divisor em $p_2: (x = 0, t_2' = a_2)$. Em geral, o transformado $C^{(k)}$ corta o divisor em $p_k: (x = 0, t_k' = a_k)$;

a explosão π_{k-1} tem por expressão $t_{k-1} = t_k' x$, onde $t_{k-1}' = t_{k-1} + a_{k-1}$. Inicialmente encontramos coordenadas mais convenientes para escrever as sucessivas explosões, e depois consideramos o caso em que a curva é separatriz formal.

(3.8) Lema - Suponhamos $p_m \in P_m^{(m)}$ com $\rho(P_m^{(m)}) = 1$, e que existam coordenadas (x, t_m) em uma vizinhança de p_m com $p_m = (0, 0)$ e $\pi_{m-1}(x, t_m) = (x, (t_m + a_m)a)$, $a_m \in \mathbb{C}$ e $m = 1, 2, \dots$. Então, se

$$\text{colocamos } \begin{cases} \hat{t}_m = t_m - \sum_{j>m}^{\infty} a_j x^{j-m}, \\ \hat{y} = y - \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j. \end{cases} \text{ segue-se que } \pi_{m-1}(x, \hat{t}_m) = (x, \hat{t}_m x) \text{ e } p_m = (0, 0), \forall m \in \mathbb{N}$$

Demonstração: imediata

Voltemos ao Teorema (3.7). Suponhamos que exista uma seqüência infinita $q^{(m)} \in P_{k_m}^{(m)}$ de singularidades de tal modo que $\rho(P_{k_m}^{(m)}) = 1$ e $m_{q^{(m)}}(\mathfrak{F}_m) \geq \nu$. Para simplificar o argumento, admitamos que $q^{(m)} = p_m \in P_m^{(m)}$. Afirmação: $\hat{y} = 0$ é separatriz formal de \mathfrak{F}_0 (estamos trabalhando nas coordenadas dadas pelo Lema). Para provar isto, definamos \mathfrak{F}_0 pela equação $P(x, \hat{y})dx + Q(x, \hat{y})d\hat{y} = 0$. (Atenção: esta equação é apenas formal). Devemos verificar se $P(x, 0) \equiv 0$. Caso contrário, na série de Taylor de $P(x, \hat{y})$ em $(0, 0)$ encontramos alguma potência x^a isolada, $a \in \mathbb{N}$. Transformando a equação para coordenadas (x, \hat{t}_m) , $m \in \mathbb{N}$, encontramos $[P(x, \hat{t}_m x^m) + m x^{m-1} \hat{t}_m Q(x, \hat{t}_m x^m)]dx + Q(x, \hat{t}_m x^m) x^m d\hat{t}_m = 0$. Se $a \in \mathbb{N}$ é a menor potência de x isolada, esta equação é divisí-

vel por x^a quando $m \in \mathbb{N}$ for suficientemente elevado; mas então $(0,0)$ não é singularidade, contradição

A demonstração do Teorema (3.7) agora segue-se facilmente. Seja $S = \{\hat{y} = 0\}$ a separatriz formal, e $S^{(m)}$ seus transformados sucessivos. Ora, $m_{\mathcal{P}_m}(S^{(m)}, \mathcal{X}_m) > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$, o que é contraditório com $m_{\mathcal{P}_m}(\mathcal{X}_m) \geq v$ e $m_{\mathcal{P}_{m+1}}(\mathcal{X}_{m+1}, S^{(m+1)}) = m_{\mathcal{P}_m}(\mathcal{X}_m, S^{(m)}) - m_{\mathcal{P}_m}(\mathcal{X}_m)$. ■

Em verdade, podemos afirmar algo mais com relação às singularidades obtidas. As possibilidades são as seguintes para a situação em que a multiplicidade é 1 e a singularidade pertence ao divisor (as coordenadas são escolhidas de modo que a singularidade é $(0,0)$, $\{y = 0\}$ é o divisor quando $(0,0)$ for ponto regular e $\{x = 0\} \cup \{y = 0\}$ é o divisor num ponto de cruzamento)

- (A) $\omega = ydy + \omega_2$, $(0,0)$ ponto regular.
- (B) $\omega = (x+y)dy - ydx + \omega_2$, $(0,0)$ ponto regular.
- (C) $\omega = \lambda xdy - \mu ydx + \omega_2$, $(0,0)$ ponto regular ou cruzamento.

Aqui, ω_2 é 1-forma que se anula em $(0,0)$ com multiplicidade superior a 1. As expressões lineares em A, B e C resultam da forma canônica de Jordan, e em (C) exigimos $|\lambda| + |\mu| \neq 0$,

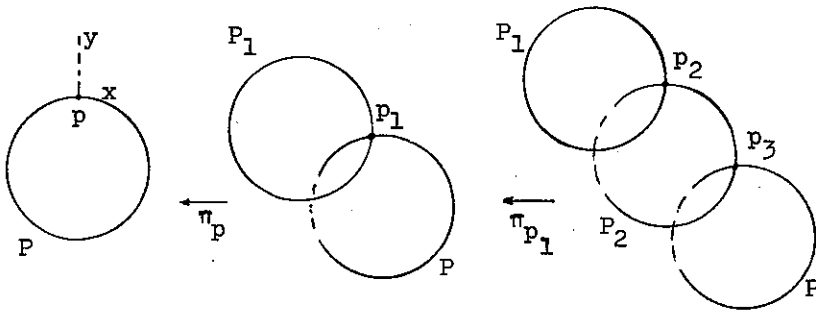
(3.9) Definição - A singularidade é irredutível quando é do tipo (C) acima e, se $\lambda \cdot \mu \neq 0$, então $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}^+$ (se $\lambda \cdot \mu = 0$, fare-

mos referência ao tipo (C')).

(3.10) Teorema - Existe uma seqüência finita de explosões de modo que a folheação resultante possua somente singularidades irredutíveis.

Demonstração

1 - Vamos tratar inicialmente do tipo (A), pois sua explosão pode subir a multiplicidade. Seja $p = (0,0) \in P$ ponto regular do divisor.



Após a explosão em $p \in P$, a nova linha projetiva P_1 possui uma única singularidade $p_1 \in P \cap P_1$, e $m_{p_1}(P_1) = 2$, $m_{p_1}(P) = m_p(P) = k$. Efetuemos nova explosão em p_1 ; aparece a linha projetiva P_2 , e singularidades $p_2 \in P_1 \cap P_2$, $p_3 \in P \cap P_2$, e no máximo mais uma $p_4 \in P_3$. Tem-se $m_{p_2}(P_1) = 1$, de modo que p_2 é do tipo (C). Quanto a p_3 , ou $m_{p_3}(P_2) = 1$, e portanto $m_{p_4}(P_2) = 1$ necessariamente, ou

$m_{p_3}(P_2) = 2$. No primeiro caso, p_3 é do tipo (C) e p_4 não é do tipo (A). No outro, temos $m_{p_3}(P) = k-1$ e $m_{p_3}(P_2) = 2$, o que nos permite prosseguir indutivamente. Assim, eliminamos as singularidades do tipo (A).

2 - O caso (B) é bastante simples. Seja $p = (0,0) \in P$ ponto regular. Realizando uma explosão neste ponto, temos que $P \cap \pi_p^{-1}(\{p\})$ é a única singularidade de $\pi_p^{-1}(\{p\})$, e além disso é do tipo (C').

3 - Finalmente, suponhamos $\omega = \lambda xdy - \mu ydx + \omega_2$ em $p = (0,0)$, com $\lambda = m, \mu = n, m, n \in \mathbb{N}$ e $m > n$ ($m = n$ está excluído por se tratar do tipo I). Seja $k \in \mathbb{N}$ o menor inteiro tal que $m - kn \leq 0$. Ora, uma explosão em $p = (0,0)$ produzirá singularidades $p_1, p_2 \in P_1 = \pi_p^{-1}(\{p\})$. A folheação resultante terá parte linear, nestas singularidades, com autovalores $(m, n-m)$ (portanto do tipo (C)) e $(m-n, n)$. Ainda temos para a segunda destas singularidades o quociente de autovalores em \mathbb{Q}^+ ; após k explosões, chegaremos aos pares $(m-(k-1)n, kn-m)$ e $(m-kn, n)$. O segundo está associado a singularidade do tipo (C) (ou (C')). Quanto ao primeiro, se $m-kn = 0$, temos o tipo (C'); caso $m-kn < 0$, voltamos novamente a ter um par de autovalores com quociente em \mathbb{Q}^+ . Entretanto, $m-(k-1)n < m$ e $kn-m < n$, de modo que não podemos ter sempre esta situação por explosões sucessivas. ■

Em resumo, uma singularidade irredutível tem associada a

ela uma parte linear $\lambda xdy - \mu ydx$ tal que

— se $\lambda \cdot \mu \neq 0$, então $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}^+$

— se $\lambda \cdot \mu = 0$, um dos autovalores é não-nulo (trata-se de uma sela-nó).

O leitor pode verificar que explosões realizadas em singularidades irredutíveis levam novamente a singularidades irredutíveis, o que é um tipo de persistência. Por isto, a seqüência de explosões pode ser encerrada assim que encontramos somente este tipo de singularidades.

Observação. As singularidades do tipo I podem também ser reduzidas por uma seqüência finita de explosões obtendo-se modelos locais irredutíveis que são os mesmos do tipo II. Além disto existirão um número finito de componentes dicríticas i.e., linhas projetivas no divisor que encontram as folhas da folheação transversalmente. Veja o exemplo(2.5) e verifique que mais duas explosões, sendo a primeira no ponto de tangência, acabam criando duas componentes dicríticas.

CAPÍTULO III

TOPOLOGIA DAS SINGULARIDADES IRREDUTÍVEIS

Apresentaremos agora uma breve descrição das folheações existentes em vizinhanças de singularidades irredutíveis (e mesmo não-simples, quando o trabalho extra requerido for reduzido), sem preocupações com demonstrações. Em capítulo posterior consideraremos um dos casos não estudados aqui, o da sela-nó.

§1 - Singularidades no Domínio de Poincaré

Esta denominação refere-se à situação em que a parte linear $\omega_0 = \lambda x dy - \mu y dx$ é tal que $\lambda \cdot \mu \neq 0$ e $\lambda/\mu \notin \mathbb{R}^{-*}$. Consideremos então a folheação definida por $\omega_0 = 0$; a folha passando por $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ pode ser parametrizada por $\varphi(T, x_0, y_0) = (e^{\lambda T} x_0, e^{\mu T} y_0)$, $T \in \mathbb{C}$. Definamos $\varphi_\alpha(t, x_0, y_0) = (e^{\lambda \alpha t} x_0, e^{\mu \alpha t} y_0)$ para $\alpha \in \mathbb{C}^*$ e $t \in \mathbb{R}$; vemos que φ e φ_α são fluxos complexo e real, respectivamente. Escolhamos $\alpha_0 \in \mathbb{C}^*$ de modo que $\Re e \lambda \alpha_0 < -c$ e $\Re e \mu \alpha_0 < -c$, onde $c > 0$. Neste caso, temos que:

$$|\varphi_{\alpha_0}(t, x_0, y_0)|^2 = e^{2\Re e \lambda \alpha_0 t} |x_0|^2 + e^{2\Re e \mu \alpha_0 t} |y_0|^2 \leq e^{-2ct} (|x_0|^2 + |y_0|^2)$$

Segue-se a

* $D_p = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2; \lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \text{ e } \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}^{-*}\}$ é o domínio de Poincaré de \mathbb{C}^2 .

(1.1) Proposição

1) As folhas de $w_0 = 0$ são transversais às esferas

$$S_R: |x|^2 + |y|^2 = R^2.$$

2) Existe um fluxo real linear cujas trajetórias estão contidas nas folhas de $w_0 = 0$ e para o qual $(0,0)$ é um atrator.

Portanto, cada folha é topologicamente um cone com vértice em $(0,0)$ e cuja diretriz é sua interseção com a esfera $S_1: |x|^2 + |y|^2 = 1$. Para descrever esta diretriz, observemos que o fluxo φ_{α_0} permite definir um difeomorfismo entre $S_1 \setminus (S_1 \cap 0y)$ e o toro sólido $T_1: |x| = 1$, do modo seguinte: dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$, $|x_0| = 1$, associamos o único ponto onde $\varphi_{\alpha_0}(t, x_0, y_0)$ corta a esfera S_1 . Descreveremos então a interseção das folhas de $w_0 = 0$ com T_1 . Escolhamos $\alpha_1 = i/\lambda$ e estudemos o fluxo real

$$\varphi_{\alpha_1}(t, x_0, y_0) = (e^{it} \cdot x_0, e^{\frac{\mu i}{\lambda} t} \cdot y_0), \quad t \in \mathbb{R}, \text{ que deixa } T_1 \text{ invariante.}$$

O eixo de T_1 (i.e., $|x| = 1, y = 0$) é uma trajetória.

1º caso: $\mu/\lambda \notin \mathbb{R}$

Temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\frac{\mu i}{\lambda} t}| = 0$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} |e^{\frac{\mu i}{\lambda} t}| = \infty$ se $\text{Im } \mu/\lambda > 0$

(ou $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\frac{\mu i}{\lambda} t}| = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} |e^{\frac{\mu i}{\lambda} t}| = 0$ se $\text{Im } \mu/\lambda < 0$). Temos

trajetórias abertas que espiralam em torno do eixo de T_1 num

sentido e se afastam indefinidamente no outro. Voltando à esfera S_1 , obtemos que:

— os círculos $|x| = 1, y = 0$ e $x = 0, |y| = 1$ são diretrizes.

— as demais diretrizes são trajetórias abertas cujos extremos espiralam tendendo a estes círculos.

2º caso: $\mu/\lambda = m/n \in \mathbb{Q}^+$ (singularidade não simples)

As trajetórias de φ_{α_1} se fecham para $t = n$. Portanto, em S_1 obtemos todas as diretrizes como curvas fechadas.

3º caso: $\mu/\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+$

Temos que $|e^{\frac{\mu i}{\lambda}} y| = |y|$; se $t \in \mathbb{Z}$, vemos que a sucessão correspondente de pontos $(e^{\frac{\mu i}{\lambda} k} \cdot y)_{k \in \mathbb{Z}}$ no círculo $x = 1, |y| = R$ é densa. Segue-se que o fecho de cada diretriz é um toro real bi dimensional; quando retornamos à esfera S_1 , apenas os círculos $|x| = 1, y = 0$ e $x = 0, |y| = 1$ são trajetórias fechadas; as demais são abertas, e densas em toros bidimensionais.

Esta descrição não se altera substancialmente quando a folheação é não-linear, graças ao resultado seguinte:

(1.2) Teorema (Poincaré) - Sejam Z campo de vetores analítico definido em um aberto de \mathbb{C}^2 contendo $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, sendo este ponto sua única singularidade, e $Z_0 = \lambda_1 u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \lambda_2 u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}$ sua

parte linear. Se

a) Z_0 pertence ao domínio de Poincaré (isto é, $\lambda/\mu \notin \mathbb{R}^-$ e $\lambda \cdot \mu \neq 0$).

b) Não existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tal que $\lambda_1 = n\lambda_2$ ou $\lambda_2 = n\lambda_1$.

Então podemos encontrar um único difeomorfismo analítico local ξ de \mathbb{C}^2 em $(0,0)$ de modo que $\xi'(0,0) = \text{Id}$ e $\xi^*Z = Z_0$.

Demonstração.

1 - Escrevamos $Z = \sum_{j=1}^2 (\lambda_j u_j + \varphi_j(u_1, u_2)) \frac{\partial}{\partial u_j}$, onde φ_j , $j = 1, 2$, são séries de potências convergentes em uma vizinhança de $(0,0)$.

Vamos procurar inicialmente a série de potências correspondente a ξ , e depois examinar a sua convergência. Coloquemos

$$(u_1, u_2) = \xi(x_1, x_2) = (x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2)), \text{ com}$$
$$\xi_j(x_1, x_2) = \sum_{|Q| \geq 2} \xi_{jQ} x^Q, \text{ onde } x^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \text{ e } |Q| = q_1 + q_2.$$

Temos que

$$\begin{cases} \dot{u}_j = \lambda_j u_j + \varphi_j(u_1, u_2), & j = 1, 2 \\ u_j = x_j + \xi_j(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \lambda_j u_j + \varphi_j(u_1, u_2) = \dot{x}_j + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_2} \dot{x}_2$$

$$\longrightarrow \lambda_j (x_j + \xi_j(x_1, x_2)) + \varphi_j(x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2)) =$$
$$= \lambda_j x_j + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_1} \cdot \lambda_1 x_1 + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_2} \cdot \lambda_2 x_2.$$

Como $\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \cdot \lambda_i x_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sum_Q \xi_{jQ} x^Q) \cdot \lambda_i x_i = \sum_Q q_i \lambda_i \xi_{jQ} x^Q$,

temos a igualdade $\sum_Q [\lambda_j - (q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2)] \xi_{jQ} x^Q = -\varphi_j(x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2))$. A hipótese (b) do enunciado garante que $\lambda_j - (q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2) \neq 0 \quad \forall j = 1, 2, \quad \forall Q = (q_1, q_2)$; além disso, cada coeficiente ξ_{jQ_0} só aparece no 2º membro em termos envolvendo monômios do tipo x^Q com $|Q| > |Q_0|$. Segue-se que formalmente podemos encontrar ξ_1 e ξ_2 satisfazendo a igualdade acima.

2 - Examinemos agora a convergência destas séries de potências.

Dadas as séries $A(x_1, x_2)$ e $B(x_1, x_2)$ com coeficientes positivos, escrevamos $A < B$ se $A_Q \leq B_Q \quad \forall |Q| \geq 1$; indiquemos por $\hat{C}(x_1, x_2)$ a série obtida de $C(x_1, x_2)$ substituindo seus coeficientes por seus módulos, e por $\hat{C}(x)$ a série $\hat{C}(x, x)$. Temos que \hat{C} converge para $|x_1| \leq R, |x_2| \leq R$ se \hat{C} converge para $|x| \leq R$.

Provemos então que $\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2$ é convergente em $|x| \leq R$ para algum $R > 0$. Ora, $\exists \delta > 0$ t.q. $|\lambda_j - (q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2)| \geq \delta \quad \forall |Q| \geq 2$. Como $\sum_Q [\lambda_j - (\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2)] \xi_{jQ} x^Q = \varphi_j(x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2))$, $j = 1, 2$, obtemos

$$\delta \hat{\xi}_j < \hat{\varphi}_j(x_1 + \hat{\xi}_1(x_1, x_2), x_2 + \hat{\xi}_2(x_1, x_2)), \quad j = 1, 2$$

$$\implies \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2 < \delta^{-1} [\hat{\varphi}_1(x + \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2, x + \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2) + \hat{\varphi}_2(x + \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2, x + \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2)].$$

Portanto, temos uma desigualdade do tipo $S < F(x+S)$, onde F é uma função analítica e S série de potências. Ora, se-

ja $S_0 = F(x+S_0)$ equação que define a função analítica S_0 (cuja existência é garantida pelo Teorema das Funções Implícitas); temos que $S < S_0$, de onde vemos que $S = \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2$ é convergente.

Observação - Consideremos o caso em que $\lambda_1 = n\lambda_2$, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

(1.3) Teorema (Dulac) - Existe um único difeomorfismo local analítico ξ em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, $\xi'(0,0) = \text{Id}$, de modo que $\xi^* Z = (\lambda_1 x_1 + ax_2^n) \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$.

A demonstração é uma variante da anterior; preferimos descrever brevemente a folheação associada a $\xi^* Z$ quando $a \neq 0$ (podemos supor $a = 1$). Para isso, observemos que as folhas de $\xi^* Z$ são transversais às esferas $S_R: |x_1|^2 + |x_2|^2 = R^2$, para $R > 0$ suficientemente pequeno. De fato, se $(x_1, x_2) \in S_R$, o espaço tangente $T_{(x_1, x_2)} S_R$ a S_R em (x_1, x_2) é dado por $\eta(x_1, x_2) = 0$, onde $\eta(x_1, x_2) = 2\Re(\bar{x}_1 dx_1 + \bar{x}_2 dx_2)$. Daí, $\eta(x_1, x_2)(\lambda_1 x_1 + ax_2^n, \lambda_2 x_2) = 2\Re(\lambda_1 |x_1|^2 + a\bar{x}_1 x_2^n + \lambda_2 |x_2|^2) > 0$ se $|(x_1, x_2)| > 0$ for suficientemente pequeno. Quanto ao traço das folhas em S_R , afirmamos que apenas uma é fechada (correspondendo a $x_2 = 0$), e as demais são abertas espiralando em ambos os sentidos à anterior. Realmente, seja $|T_m| \rightarrow \infty$. As folhas de $\xi^* Z$ podem ser parametrizadas por $x_1(T) = (ax_2^n T + x_1) e^{nT}$ e $x_2(T) = x_2 e^T$ (onde, para simplificar, fizemos $\lambda_1 = n$ e $\lambda_2 = 1$). Daí, se $x_2 \neq 0$:

$$\frac{|x_1(T)|}{|x_2(T)|^n} = \frac{|ax_2^n T + x_1|}{|x_2^n|}. \quad \text{Em particular, } \left| \frac{x_1(T_m)}{x_2(T_m)^n} \right| \rightarrow 0 \text{ quando}$$

$$|T_m| \rightarrow 0, \text{ de modo que } \lim_{|T_m| \rightarrow \infty} |x_1(T_m)| = 1 \text{ e } \lim_{|T_m| \rightarrow \infty} |x_2(T_m)| = 0.$$

Isto mostra que a curva $x_2 = 0$ em S_R é o conjunto limite dos traços da folheação associada a ξ^*Z em S_R , para $R > 0$ suficientemente pequeno.

Quando $\lambda_1 = \lambda_2$, e a parte linear do campo Z em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ é $Z_0 = (\lambda_1 x_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, ainda assim existe o difeomorfismo local ξ de \mathbb{C}^2 em $(0,0)$ de modo que $\xi^*Z = Z_0$. A descrição da folheação associada a Z_0 se faz de modo análogo ao acima. Deixamos os detalhes ao leitor.

§2 - Singularidades no Domínio de Siegel

(2.1) Definição - $D_S = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2; \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0 \text{ e } \lambda_1/\lambda_2 \in \bar{\mathbb{R}}\}$ é o domínio de Siegel de \mathbb{C}^2 .

Consideremos $\omega_0 = \lambda_1 x_1 dx_2 - \lambda_2 x_2 dx_1 = 0$, com $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_S$. Escolhamos $\alpha \in \mathbb{C}^*$ de modo que $\alpha \lambda_1 < 0$ e $\alpha \lambda_2 > 0$, e o fluxo real linear $\varphi_\alpha(t, x_1, x_2) = (e^{t\alpha\lambda_1} x_1, e^{t\alpha\lambda_2} x_2)$ mergulhado nas folhas de $\omega_0 = 0$. Ele é transversal aos toros $T_R: |x_1| = R$, com $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\alpha\lambda_1} x_1 = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{t\alpha\lambda_2} x_2| = \infty$ (se $x_2 \neq 0$). Portanto, as folhas são descritas fazendo "fluir" suas interseções com T_1 segundo φ_α . Assim sendo, tomamos $\varphi_i/\lambda_1(t, x_1, x_2) =$

$= (e^{it} x_1, e^{i \frac{\lambda_2}{\lambda_1} t} x_2)$. As trajetórias de φ_t/λ_1 permanecem nos toros bidimensionais $|x_1| = 1$, $|x_2| = R$, sendo curvas fechadas se $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{Q}^-$ ou densas se $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q}^-$.

Examinemos a situação não-linear, com vistas a um teorema análogo ao de Poincaré, enunciado na seção anterior.

(2.2) Proposição - D_S é variedade real tridimensional. Mais precisamente, é um cone regrado com vértice em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$.

Demonstração

Seja $A = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2; \text{Im } \lambda_1 \bar{\lambda}_2 = 0\}$; Temos que $D_S \subset A$.

Como A é dada pela equação $\lambda_1^{(2)} \lambda_2^{(1)} - \lambda_1^{(1)} \lambda_2^{(2)} = 0$ (onde $\lambda_j = \lambda_j^{(1)} + i \lambda_j^{(2)}$, $j = 1, 2$), vemos que A é variedade real

tridimensional. Temos que D_S é aberto em A , pois exigimos $\lambda_1/\lambda_2 < 0$. Além disso, se $(\alpha_1, \alpha_2) \in D_S$, claramente $t(\alpha_1, \alpha_2) \in D_S$ para $t \in \mathbb{R}$, o que completa a prova. ■

Observe-se que $D_S \cap S_1$ é fibrada pelos círculos $\{\lambda_2 = r\lambda_1\} \cap S_1$, com $r < 0$.

O par $(\alpha_1, \alpha_2) \in D_S$ é ressonante se $\exists m, n \in \mathbb{N}^+$ t.q. $m\alpha_1 + n\alpha_2 = 0$. Isto implica as relações $\alpha_1 = (km+1)\alpha_1 + kn\alpha_2$ e $\alpha_2 = km\alpha_1 + (kn+1)\alpha_2 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$, de modo que não podemos garantir linearização formal. Pode-se ver facilmente que o conjunto

de pares ressonantes é denso em D_S ; conseqüentemente, os denominadores $[\alpha_j - (q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2)]^{-1}$ que aparecem no processo de linearização, mesmo na ausência de ressonância, podem se tornar pequenos.

(2.3) Definição - $(\alpha_1, \alpha_2) \in D_S$ é do tipo (C, ν) ($C > 0, \nu > 0$) se para $j = 1, 2$ tem-se $|\alpha_j - (q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2)| \geq \frac{C}{(q_1 + q_2)^\nu} \forall (q_1, q_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ com $q_1 + q_2 \geq 2$.

De certa forma, controlamos a velocidade com que os pequenos denominadores tendem a 0.

(2.4) Teorema (Siegel) [14] - Se $(\alpha_1, \alpha_2) \in D_S$ é do tipo (C, ν) para algum $C > 0, \nu > 0$, e $(0, 0) \in C^2$ é singularidade isolada para o campo de vetores analítico Z cuja parte linear é $Z_0 = \alpha_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, então existe um único difeomorfismo local ξ de C^2 em $(0, 0)$ de modo que $\xi^* Z = Z_0$.

Demonstração

1 - Basta mostrar a proposição no cone contido na bola unitária de vértice $(0, 0) \in C^2$ e cuja diretriz é uma δ -vizinhança compacta em $D_S \cap S_1$ de um dos círculos que fibram esta interseção. O diâmetro 2δ (em D_S) desta vizinhança deve ser suficientemente pequeno para que o seu volume (em D_S) seja cotado por $C_1 \delta$, onde $C_1 > 0$ é uma constante apropriada.

2 - Neste cone C_δ , definamos L_n como o conjunto de pares do tipo $(1/n, \nu)$; claramente $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_{n+1} \subset \dots$. Vamos

provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(C_\delta \setminus L_n) = 0$. Escrevamos $C_\delta \setminus L_n = \bigcup_{(q_1, q_2)} S_{(q_1, q_2)}$, onde $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ e $S_{(q_1, q_2)}$ é constituído pelos pares (λ_1, λ_2) de $C_\delta \setminus L_n$ tais que

$$|\lambda_1 - (q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2)| < \frac{1/n}{(q_1 + q_2)^v} \quad \text{ou} \quad |\lambda_2 - (q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2)| < \frac{1/n}{(q_1 + q_2)^v}.$$

(Vamos considerar, por simplicidade, só a primeira destas desigualdades). Assim, $S_{(q_1, q_2)}$ é vizinhança da reta $\lambda_1 - (q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2) = 0$ de volume $\leq \frac{C_1 \cdot 1/n}{(q_1 + q_2)^v}$. Segue-se que

$$\text{vol}(C_\delta \setminus L_n) \leq \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{q_1 + q_2 = k} \frac{C_1 \cdot 1/n}{(q_1 + q_2)^v} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_1 \cdot 1/n}{k^{v-1}} = \frac{C_1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{v-1}}$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(C_\delta \setminus L_n) = 0. \quad \blacksquare$$

Mais abrangente que o Teorema (2.4) é o resultado seguinte.

(2.6) Teorema [2] - Seja $w_k = \min\{|\lambda_i - \sum_j m_j \lambda_j| \neq 0, 2 \leq \sum_j m_j \leq 2^{k+1}\}$. Então, se o campo Z é formalmente linearizável e se a série $\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \log w_k^{-1}$ converge, existe a mudança de coordenadas ξ , local em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, analítica, tal que $\xi^* Z = Z_0$.

Este resultado, devido a A.D. Brjuno, aplica-se inclusive em presença de ressonâncias. Por outro lado, se não se impõem condições como nos Teoremas (2.4) e (2.6), a presença de pequenos

denominadores pode impedir a linearização mesmo que não haja ressonâncias; exemplos foram dados por A.S. Pjartly onde a singularidade é aproximada por folhas cilíndricas cujos números de enlace com os eixos coordenados tendem a ∞ .

Nosso objetivo agora é o estudo do caso em que não podemos linearizar Z e se $Z_0 = \alpha_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ é sua parte linear, temos uma ressonância $m\alpha_1 + n\alpha_2 = 0$ para $m \in \mathbb{N}^+$, $n \in \mathbb{N}^+$. Precisamos de dois resultados preliminares, que são de caráter geral para singularidades no domínio de Siegel.

(2.7) Proposição - Existe uma mudança de coordenadas ξ local em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ de modo que $\xi^* Z = (\alpha_1 x_1 + x_1 x_2 a_1(x_1, x_2)) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\alpha_2 x_2 + x_1 x_2 a_2(x_1, x_2)) \frac{\partial}{\partial x_2}$, onde as funções a_1, a_2 são analíticas e $a_1(0,0) = a_2(0,0) = 0$.

Demonstração

1 - Vamos repetir o esquema seguido na demonstração do Teorema

(1.2). Escrevamos então o campo Z como

$$\dot{u}_j = \alpha_j u_j + \varphi_j(u_1, u_2), \quad j = 1, 2$$

e a mudança de coordenadas ξ como

$$u_j = x_j + \xi_j(x_1, x_2), \quad j = 1, 2.$$

Necessitamos encontrar ξ de modo que $\xi^* Z$ se escreva

$$\dot{x}_j = \alpha_j x_j + \psi_j(x_1, x_2), \quad j = 1, 2, \quad \text{com } \psi_j \in (x_1 \cdot x_2) \quad ((x_1 \cdot x_2)$$

designa o ideal de funções analíticas gerado por $x_1 \cdot x_2$).

Efetuando as substituições sugeridas, chegamos a

$$\sum_{|Q| \geq 2} (q_1 \alpha_1 + q_2 \alpha_2 - \alpha_j) \xi_{jQ} x^Q + \sum_{|Q| \geq 2} \psi_{jQ} x^Q = \varphi_j(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2) - \frac{\partial \xi_j}{\partial x_1} \psi_1 - \frac{\partial \xi_j}{\partial x_2} \psi_2.$$

O cálculo de ξ_j e ψ_j seguirá a regra seguinte:

— se $x^Q \notin (x_1 \cdot x_2)$, tomamos $\psi_{jQ} = 0$

— se $x^Q \in (x_1 \cdot x_2)$, " $\xi_{jQ} = 0$.

Observe-se que se $x^Q \notin (x_1 \cdot x_2)$ necessariamente $q_1 \alpha_1 + q_2 \alpha_2 - \alpha_j \neq 0$ para $j = 1, 2$. Além disso, o coeficiente de x^Q no segundo membro da igualdade acima só envolve ξ_{jQ} e ψ_{jQ} para $|Q| < |Q_0|$. Segue-se que podemos calcular ξ_j e ψ_j , $j = 1, 2$.

2 - Quanto à convergência de ξ_j , $j = 1, 2$, procedemos como se segue. Inicialmente, existe $\delta > 0$ tal que $|q_1 \alpha_1 + q_2 \alpha_2 - \alpha_j| \geq \delta$ sempre que $x^Q \notin (x_1 \cdot x_2)$. Além disto o cálculo de ξ_{jQ} , quando $x^Q \notin (x_1 \cdot x_2)$, só envolve a identificação

$$\sum_{|Q| \geq 2} (q_1 \alpha_1 + q_2 \alpha_2 - \alpha_j) \xi_{jQ} x^Q = \varphi_j(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2) \quad (\text{módulo } (x_1 x_2)),$$

de modo que $\delta \hat{\xi}_j < \hat{\varphi}_j(x_1 + \hat{\xi}_1, x_2 + \hat{\xi}_2)$ e

$$\delta(\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2) < \hat{\varphi}_1(x_1 + \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2, x_2 + \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2) + \hat{\varphi}_2(x_1 + \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2, x_2 + \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2).$$

O argumento prossegue então como no Teorema (1.2). ■

Como corolário, podemos admitir sempre que os eixos coordenados $x_2 = 0$ e $x_1 = 0$ são folhas de nossa folheação singular. Consideremos o fluxo associado ao campo real $\dot{x}_j = \alpha(\alpha_j x_j + x_1 x_2 a_j(x_1, x_2))$, $|(x_1, x_2)| < R_0$, com $\alpha \in \mathbb{C}^*$ escolhido de modo a termos $\Re \alpha \alpha_1 < 0$, $\Re \alpha \alpha_2 > 0$. Suas trajetórias estão contidas nas folhas da folheação singular, e gozam da propriedade seguinte (cuja demonstração deixamos ao leitor):

- $\exists c > 0$ de modo que, se a trajetória por $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{C}^2$ está definida para $t_0^-(x_1^0, x_2^0) < t < t_0^+(x_1^0, x_2^0)$, então $|x_1(t)| \leq e^{-ct} |x_1^0|$ e $|x_2(t)| \geq e^{ct} |x_2^0|$

- $t_0^+(x_1^0, 0) = +\infty$ e $t_0^-(0, x_2^0) = -\infty$ para $|x_1^0| < R_0$, $|x_2^0| < R_0$ (temos respectivamente que $x_2(t) \equiv 0$ e $x_1(t) \equiv 0$ para condições iniciais $(x_1^0, 0)$ e $(0, x_2^0)$).

Esta situação é praticamente a mesma que observamos no caso linear. Vemos de novo que as folhas são transversais aos toros $T_R: |x_1| = R < R_0$, de modo que devemos analisar o campo de linhas induzido em T_R . Como $|x_1| = R$, $x_2 = 0$ é curva integral deste campo, fica bem definida sua aplicação primeiro retorno h , no disco $\{|x_1| = R, |x_2| < \gamma\}$ para $\gamma > 0$ suficientemente pequeno.

(2.8) Definição - A aplicação h é denominada holonomia da solução $x_2 = 0$ no ponto $(R, 0)$.

Deixamos ao leitor imaginar a dependência da holonomia com

relação ao ponto escolhido em $x_2 = 0$. A importância deste conceito deve-se ao resultado seguinte:

(2.9) Proposição [10] - Sejam $Z_j = (\alpha_1^j x_1 + x_1 x_2 a_1^j) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\alpha_2^j x_2 + x_1 x_2 a_2^j) \frac{\partial}{\partial x_2}$ campos de vetores analíticos definidos numa vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, com $(\alpha_1^j, \alpha_2^j) \in D_S$ e $\alpha_1^1 / \alpha_2^1 = \alpha_1^2 \setminus \alpha_2^2 = \emptyset$ ($j = 1, 2$). Indiquemos por h_j as holonomias respectivas de $x_2=0$ no ponto $(R,0)$. Se existe um difeomorfismo $\hat{\xi}$ local de \mathbb{C} em $0 \in \mathbb{C}$ de modo que $h_2 \circ \hat{\xi} = \hat{\xi} \circ h_1$ então existe um difeomorfismo ξ local de \mathbb{C}^2 em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ que transforma a folheação associada a Z_1 naquela associada a Z_2 .

Diremos que ξ é uma equivalência analítica entre as folheações, ao passo que $\hat{\xi}$ é uma conjugação analítica entre as holonomias. Assim, a classe de equivalência da holonomia módulo conjugação analítica determina completamente a classe módulo equivalência analítica da equação diferencial.

Demonstração

1 - Podemos substituir os campos de vetores Z_1 e Z_2 por

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Theta x_2 (1 + \varphi_1(x_1, x_2)) \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Theta x_2 (1 + \varphi_2(x_1, x_2)) \frac{\partial}{\partial x_2},$$

respectivamente, onde φ_1, φ_2 são analíticas e $\varphi_1(0,0) =$

$= \varphi_2(0,0) = 0$. Assim, torna-se fácil primeiro estender $\hat{\xi}$ a uma vizinhança tubular do eixo de $T_{\mathbb{R}}$. De fato, basta colocar $\xi(\text{Re}^{it}, x_2^{(1)}(t, (R, x_2))) = (\text{Re}^{it}, x_2^{(2)}(t, (R, \hat{\xi}(R, x_2))))$, onde $(\text{Re}^{it}, x^{(j)}(t, (R, x_2)))$, $t \in \mathbb{R}$, designa a trajetória,

em T_R , de Z_j , com condição inicial (R, x_2) . O fato de existir uma conjugação entre h_1 e h_2 implica em estar ξ bem definido quando $t \rightarrow 2\pi$.

Para completar a definição de ξ a uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, movemos os fluxos radialmente. Isto é, a partir do ponto (x_1, x_2) com $|x_1| = R$ e $|x_2| < \gamma_1$ seguimos as soluções de Z_1 e Z_2 de maneira que $x_1^{(j)}(t) = e^{-t} x_1$, $0 \leq t < \infty$. Colocamos então:

$$\xi(x_1, x_2) = (x_1, x_2^{(2)}(t, \xi(e^{-t} x_1, x_2^{(1)}(-t, (x_1, x_2))))), \quad \text{para}$$

$|e^{-t} x_1| = R$, $|x_2| < \gamma_1$ e $0 \leq t < \infty$. Devemos examinar se esta fórmula faz sentido; basta encontrar $\gamma_2 > 0$ de modo que $\gamma_2 \rightarrow 0$ se $\gamma_1 \rightarrow 0$ e

$$|x^{(2)}(t, \xi(e^{-t} x_1, x_2^{(1)}(-t, (x_1, x_2))))| < \gamma_2 \quad \forall 0 \leq t < \infty.$$

Consideremos o campo Z_2 ; para simplificar a notação, indiquemos por $(y_1 e^{-t}, y_2(t))$ sua trajetória radial a partir de (y_1, y_2) . Temos que

$$\dot{y}_2 = \Theta \frac{y_2}{y_1} (1 + \varphi_2(y_1, y_2)) \dot{y}_1 \implies \Re e \dot{y}_2 \bar{y}_2 \leq |\Theta| (1+c), \quad \text{onde}$$

$$0 < c \ll |\Theta|.$$

$$\text{Ora: } \log |y_2(t)|^2 = \log |y_2(0)|^2 + \int_0^t \frac{d}{ds} \log |y_2(s)|^2 ds \implies$$

$$2 \log \frac{|y_2(t)|}{|y_2(0)|} = \int_0^t \frac{2 \Re e \dot{y}_2(s) \bar{y}_2(s)}{|y_2(s)|^2} ds \implies$$

$$|y_2(t)| \leq |y_2| e^{|\Theta| (1+c)t}.$$

Analogamente, para o campo Z_1 indiquemos por $(x_1 e^t, x_2(t))$ a trajetória radial a partir de (x_1, x_2) ; teremos então ($t \geq 0$):

$$|x_2(t)| \leq e^{\Theta(1+c)t} |x_2|.$$

Consideremos $\bar{t} \in \mathbb{R}$ de modo que $|x_1 e^{\bar{t}}| = R$. Segue-se que $|y_2(\bar{t})| \leq |y_2| e^{|\Theta|(1+c)|\bar{t}} \leq k |x_2(\bar{t})| e^{|\Theta|(1+c)\bar{t}} \leq k |x_2|$, onde $(y_1, y_2) = \xi(x_1 e^{\bar{t}}, x_2(\bar{t}))$ está definido como acima; portanto, $\exists k > 0$ de modo que $|y_2| \leq k |x_2(\bar{t})|$. Basta agora tomar $\gamma_2 = k\gamma_1$.

Finalmente, o Teorema de Extensão de Riemann garante que ξ se estende a $x_1 = 0$, $|x_2| \leq \gamma_1$. ■

Concentremo-nos agora no estudo da holonomia da variedade invariante horizontal.

(2.10) Proposição - $h^1(0) = e^{2\pi i \Theta}$

Demonstração

O fluxo real induzido em T_R é dado por

$$\dot{x}_1 = ix_1, \quad \dot{x}_2 = \Theta \frac{x_2}{x_1} (1 + \phi_1(x_1, x_2)) \dot{x}_1. \quad \text{Ou seja,}$$

$$x_1(t) = \text{Re}^{it}, \quad \dot{x}_2 = i\Theta x_2 (1 + \phi_1(\text{Re}^{it}, x_2)). \quad \text{Escrevamos}$$

$$x_2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) x_2^j. \quad \text{Segue-se que:}$$

$\sum_{j=1}^{\infty} a_j'(t) x_2^j = i\theta \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) x_2^j (1 + \varphi_1(\operatorname{Re}^{i\theta t}, x_2))$, de modo que

$$a_1'(t) = i\theta a_1(t) \implies a_1(t) = e^{i\theta t} \quad (\text{pois } a_1(0) = 1).$$

Quando $t = 2\pi$, obtemos $h'(0) = a_1(2\pi) = e^{2\pi i\theta}$. ■

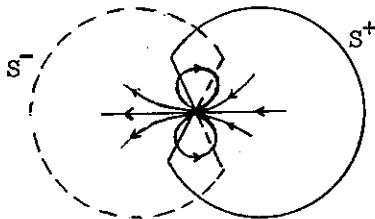
Façamos agora $\theta = -m/n$, onde $m \in \mathbb{N}^+$, $n \in \mathbb{N}^+$. Temos então $h(x_2) = \lambda x_2 + \sum_{j=2}^{\infty} a_j x_2^j$, com $\lambda^n = 1$ (se m.d.c. $(m,n)=1$), temos que $n \in \mathbb{N}^+$ é o menor inteiro para o qual a correspondente potência de λ é 1).

(2.11) Teorema - Seja $h: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um difeomorfismo analítico local do tipo $h(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$, $a_2 \neq 0$. Existem então setores S^+ e S^- , de vértices em $0 \in \mathbb{C}$, semi-aberturas $\pi - \theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi/2$ e bissetrizes opostas de modo que:

$$1 - h(S^+) \subset S^+ \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h^n(z) = 0 \quad \text{para } z \in S^+$$

$$2 - h^{-1}(S^-) \subset S^- \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h^{-n}(z) = 0 \quad \text{para } z \in S^-.$$

Observe-se que $S^+ \cap S^-$ possui duas componentes que são setores de abertura $\pi - 2\theta_0$.



Demonstração

Após submeter h a uma mudança de coordenadas lineares, podemos supor $a_2 = -1$. Seja $g(z)$ função analítica definida para $|z|$ pequeno, $g(0) = 1$, de modo que $h(z) = \frac{z}{1+zg(z)}$.

Torna-se mais simples estudar h após a mudança de coordenadas $P: \xi = 1/z$. Obtemos o difeomorfismo $\hat{h}(\xi) = z + g(1/\xi)$, $\hat{h}(\infty) = \infty$, definido numa vizinhança de $\xi = \infty$.

Como $g(1/\xi) = 1 + \frac{1}{\xi} \hat{g}(\xi)$, com \hat{g} limitada quando $|\xi| \rightarrow \infty$, vemos que $\hat{h}(\xi) = \xi + 1 + \frac{1}{\xi} \hat{g}(\xi)$ está próximo da translação $T_1(\xi) = \xi + 1$ para $|\xi|$ suficientemente grande.

Segue-se que podemos encontrar um setor \hat{S}^+ de bissetriz horizontal e semi-abertura $\pi - \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \pi/2$) e um disco $D^+ = (\xi_1 - R)^2 + \xi_2^2 \leq (2R)^2$ de modo que se $S^+ = \hat{S}^+ \cap (CD^+)$ então $\hat{h}(S^+) \subset S^+$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{h}^n(\xi) = \infty$.

Procedendo de forma análoga encontramos S^- satisfazendo $\hat{h}^{-1}(S^-) \subset S^-$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{h}^{-n}(\xi) = \infty$.

Os setores $P(S^+)$, $P(S^-)$ (ainda denotados por S^+ , S^-) satisfazem as propriedades requeridos. ■

Consideremos agora o caso em que $h(z) = z + \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j z^j$, $a_{k+1} \neq 0$. Teremos setores S_1^+, \dots, S_k^+ que se alternam com outros S_1^-, \dots, S_k^- , com semi-aberturas $\leq \pi/k$, de modo que $S_i^+ \cap S_i^- \neq \emptyset$ e $h(S_i^+) \subset S_i^+$, $h^{-1}(S_i^-) \subset S_i^-$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} h^n(z) = 0$ se

$$z \in \bigcup_{i=1}^k S_i^+, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h^{-n}(z) = 0 \quad \text{se} \quad z \in \bigcup_{i=1}^k S_i^-.$$

Para justificar esta afirmativa, utilizamos o Teorema (2.11) de modo conveniente. Consideremos, por simplicidade, $k=2$. Após uma mudança de coordenadas linear, fazemos $a = -1$. Sejam $g(z), \hat{g}(z)$ holomorfas para $|z|$ suficientemente pequeno, $g(0) = 1$, tais que $h(z) = \frac{z}{1+z^2 g(z)}$, e $\hat{g}(z) = 2g(z) + z^2 g(z)$. Consideremos $u \in \mathbb{C}$, $-(\pi-\epsilon) \leq \text{Arg } u \leq \pi-\epsilon$ para $\epsilon \ll 0$, de modo que $z = \sqrt{u}$ está bem definida fixando $\sqrt{1} = 1$, e definamos $H(u) = \frac{u}{1+u\hat{g}(\sqrt{u})}$. Utilizando o mesmo raciocínio anterior, vemos que existe um setor \hat{S}_1^+ , de semi-abertura $\pi-\theta_0 < \pi-\epsilon$, onde $H(S^+) \subset S^+$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} H^n(u) = 0$; daí, a composição $z \rightarrow \sqrt{H(z^2)}$ = $= h(z)$ está bem definida em $S_1^+ = \sqrt{\hat{S}_1^+}$, $h(S_1^+) \subset S_1^+$ $\lim_{n \rightarrow \infty} h^n(z) = 0$. Observe-se que a semi abertura de S_1^+ está compreendida entre $\pi/4$ e $\pi/2$. Aplicando sucessivamente este argumento, encontramos a descrição proposta acima.

Finalmente, seja $h(z) = \lambda z + \sum_{k \geq 2} a_k z^k$ com $\lambda^n = 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. De modo análogo ao que se fez no caso de campos de vetores, podemos procurar uma mudança de coordenadas $\tilde{\xi}: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de modo que $h(z)$ tenha uma expressão mais simples. Procuremos $\tilde{\xi}(x) = x + \xi(x) = x + \sum_{k \geq 2} \xi_j x^j$ para que $\tilde{\xi}^{-1} \circ h \circ \tilde{\xi}(x) = \tilde{h}(x) = \lambda x + \psi(x) = \lambda x + \sum_{j \geq 2} \psi_j x^j$. Tem-se:

$$\lambda(x+\xi) + \varphi(x+\xi) = (\lambda x + \psi) + \xi(\lambda x + \psi) \implies$$

$$\lambda\xi - \xi(\lambda x + \psi) - \psi = -\varphi(x+\xi) \implies$$

$$\lambda \sum_{j=2}^{\infty} \xi_j x^j - \sum_{j=2}^{\infty} \xi_j (\lambda x + \psi)^j - \sum_{j=2}^{\infty} \psi_j x^j = -\varphi(x+\xi) \implies$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} [(\lambda - \lambda^j)\xi_j - \psi_j]x^j &= -\varphi(x+\xi) + \sum_{j=2}^{\infty} \xi_j [(\lambda x + \psi)^j - (\lambda x)^j] = \\ &= -\varphi(x+\xi) + \sum_{j=2}^{\infty} \xi_j \left(\psi \sum_{\ell=1}^{j-1} (\lambda x)^{\ell} \psi^{j-\ell} \right) \end{aligned}$$

Vê-se que o coeficiente de cada x^k no segundo membro envolve ξ_j e ψ_j com $j < k$, de modo que indutivamente podemos determinar ξ_k e ψ_k desde que conheçamos ξ_j, ψ_j para $j < k$. Usamos o seguinte critério:

$$\begin{cases} \text{se } \lambda - \lambda^k \neq 0, & \text{colocamos } \psi_k = 0 \\ \text{se } \lambda - \lambda^k = 0, & \text{" } \xi_k = 0 \end{cases}$$

No caso presente, $\lambda - \lambda^{n\ell+1} = 0 \quad \forall \ell \geq 1$; daí, obtemos (formalmente) $\tilde{h}(x) = \lambda x + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} x^{n\ell+1}$. Portanto, ou $a_{\ell} = 0 \quad \forall \ell \geq 1$, e neste caso $h(z)$ é formalmente e também analiticamente equivalente à sua parte linear, ou $a_L \neq 0$ para algum $L > 1$ (considere ramos o menor inteiro com esta propriedade). Segue-se que formalmente $\tilde{h}(x) = \lambda x + a_L x^{nL+1} + \sum_{\ell > L} a_{\ell} x^{n\ell+1}$. Se não nos importamos com os termos de ordem superior a $nL+1$, podemos então afirmar que $h(z)$ é analiticamente equivalente a um difeomorfismo

$$\tilde{h}(x) = \lambda x + a_L x^{nL+1} + \sum_{j > L} a_j x^j. \text{ Agora, o estudo da dinâmica local de } \tilde{h} \text{ em } 0 \in \mathbb{C} \text{ é feito estudando a dinâmica de } \tilde{h}^n(x) =$$

$\tilde{h}^n(x) = x + na_L x^{nL+1} + \dots$, o que fizemos anteriormente. Deixamos os detalhes ao leitor.

A classificação analítica dos difeomorfismos locais da forma $h(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$ foi estabelecida por J. Ecalle [6] e está intimamente ligada a classificação analítica da sela-nó, que é o assunto do próximo capítulo.

Observação - A respeito da classificação analítica dos campos de vetores cuja parte linear possui dois autovalores não nulos e diferentes λ_1, λ_2 podemos resumir os resultados conhecidos da maneira seguinte:

- (i) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}_-$ e $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}_+$. Pelo Teorema (1.2) o campo é analiticamente linearizável.
- (ii) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}_+$. Nesta situação o campo é analiticamente equivalente a sua parte linear ou à sua forma de Dulac (Teorema (1.3)).
- (iii) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}_-$ e por (2.9) a classificação analítica destes campos está reduzida à classificação dos difeomorfismos locais da forma

$$(*) \quad h(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots, \quad \text{com} \quad \lambda = \exp(2\pi i \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) \in S^1;$$

onde a linearização não é sempre possível. Em particular existe o problema de caracterizar dinamicamente os difeomorfismos que não são linearizáveis.

CAPÍTULO IV

A SELA-NÓ COMPLEXA

Como vimos no Teorema de Resolução, o uso de explosões sucessivas conduz ao aparecimento de singularidades irreduzíveis; um dos tipos possíveis é a sela-nó, cuja parte linear possui um autovalor nulo. Pretendemos agora discutir a classificação analítica destas singularidades, que exibem um conjunto bastante rico de invariantes. Este estudo é particularmente iluminador no que se refere à influência sobre a equação diferencial de sua estrutura C^∞ subjacente.

§1 - Formas Normais

Iniciamos apresentando formas normais que serão muito convenientes na seqüência. O resultado principal deste parágrafo é o seguinte

(1.1) Teorema (Dulac) - Seja $w = 0$ um germe de sela-nó definido em vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Existem $p > 1$ inteiro, $\lambda \in \mathbb{C}$ e um sistema de coordenadas onde a equação anterior se escreve

$$(*) \quad [x_1(1+\lambda x_2^p) + x_2 R(x_1, x_2)] dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0,$$

onde R é de multiplicidade pelo menos $p+1$ em $(0,0)$.

A equação (*) é a forma normal de Dulac da sela-nó.

Esta forma normal envolve o par de invariantes (p, λ) . Veremos depois serem eles os únicos invariantes formais, no sentido que a equação pode ser transformada, por uma mudança formal de coordenadas, em

$$(**) \quad x_1(1 + \lambda x_2^p) dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0.$$

Passemos à demonstração do Teorema (1.1).

1ª etapa: consideremos uma sela-nó $Z = \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots$. Existe uma mudança de coordenadas analítica $\xi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $((x_1, x_2) = \xi(u_1, u_2)) \quad \xi^* Z = (\lambda_1 u_1 + u_2 g(u_1, u_2)) \frac{\partial}{\partial u_1} + u_2 h(u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial u_2}$, g e h sendo germes de funções analíticas em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$.

De fato, analisemos formalmente o problema. Escrevamos

$$Z = (\lambda_1 x_1 + \varphi_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \xi(u_1, u_2) = (u_1 + \xi_1, u_2 + \xi_2) \quad e$$

$$\xi^* Z = (\lambda_1 u_1 + \psi_1) \frac{\partial}{\partial u_1} + \psi_2 \frac{\partial}{\partial u_2}, \quad \text{onde } \xi_j = \sum_{|Q| \geq 2} \xi_{jQ} u^Q,$$

$$\psi_j = \sum_{|Q| \geq 2} \psi_{jQ} u^Q \quad \text{são séries de potências formais, para } j=1,2.$$

Recordemos que

$$\sum_{|Q| \geq 2} [(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 - \lambda_j) \xi_{jQ} + \psi_{jQ}] u^Q = \varphi_j(u_1 + \xi_1, u_2 + \xi_2) - \frac{\partial \xi_j}{\partial u_1} \psi_1 -$$

$$- \frac{\partial \xi_j}{\partial u_2} \psi_2, \quad \text{onde para clareza da exposição colocamos } \lambda_2 = 0.$$

Estabeleçamos a regra:

$$\begin{cases} u^Q \notin (u_2) \implies \psi_{jQ} = 0 \\ u^Q \in (u_2) \implies \xi_{jQ} = 0 \end{cases} .$$

Observe-se que $u^Q \notin (u_2) \implies \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 - \lambda_1 = \lambda_1 (q_1 - 1) \neq 0$ (se $q_1 \geq 2$) e $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 - \lambda_2 = \lambda_1 q_1 \neq 0$, de modo que formalmente podemos realizar a mudança de coordenadas pretendida. Quanto à sua convergência, observemos que $|\lambda_1 (q_1 - 1)| \geq \delta > 0$ e $|\lambda_1 q_1| \geq \delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, e $\xi \in \mathcal{C}[[u_1]]$, de modo que $\delta \hat{\xi}_j < \hat{\varphi}_j(u_1 + \hat{\xi}_1, u_2 + \hat{\xi}_2)$, $j = 1, 2$. A convergência segue-se como em casos anteriores analisados.

Conseqüentemente, a sela-nó possui curva integral tangente ao auto-espaço associado ao autovalor não nulo, passando por $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Às vezes nos referimos a ela como a variedade forte da sela-nó.

2ª etapa: Existem uma mudança de coordenadas analítica em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, $p \in \mathbb{N}$ e funções analíticas A e f definidas numa vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, $f(0,0) \neq 0$, tais que a sela-nó se escreve

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) (\lambda_1 x_1 + x_2 A(x_1, x_2)) \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) x_2^{p+1} \end{cases}$$

Para demonstrá-lo, consideremos a sela-nó

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 + u_2 g(u_1, u_2) = C(u_1, u_2) \\ \dot{u}_2 = u_2 h(u_1, u_2) = D(u_1, u_2) \end{cases}$$

Procuramos uma mudança do tipo $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2 \tilde{\eta}(u_1, u_2) =$

$$= \eta(u_1, u_2), \text{ com } \tilde{\eta}(0,0) = 1. \text{ Temos que } \dot{x}_2 = \frac{\partial \eta}{\partial u_1} \dot{u}_1 + \frac{\partial \eta}{\partial u_2} \dot{u}_2 =$$

$$= \frac{\partial \eta}{\partial u_1} C + \frac{\partial \eta}{\partial u_2} D, \text{ e pretendemos } x_2 = f(u_1, \eta(u_1, u_2)) u_2^{p+1} \tilde{\eta}(u_1, u_2)^{p+1}.$$

Portanto, precisamos garantir que $u_2^{p+1} \in (C, D)$ para algum $p \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema de Preparação de Weierstrass, podemos escrever $C(u_1, u_2) = c(u_1, u_2)(u_1 + a(u_2))$, onde $c(u_1, u_2)$ e $a(u_2)$ são germes de funções analíticas em zero, com $c(0,0) \neq 0$. Aplicando agora o Teorema de Divisão, escrevemos $D(u_1, u_2) = q(u_1, u_2)(u_1 + a(u_2)) + b(u_2)$, onde $q(u_1, u_2)$ e $b(u_2)$ são também germes de funções analíticas em zero. Segue-se que $D = QC + b$, para $Q = q/c$. Se $b \equiv 0$, $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ não seria singularidade isolada para a sela-nó; segue-se que existem $p+1 \in \mathbb{N}$ e $U = U(u_2)$ analítica em $0 \in \mathbb{C}$, $U(0) \neq 0$, tais que $D = QC + u_2^{p+1} U$, donde $u_2^{p+1} = -\frac{Q}{U} C + \frac{1}{U} D$ e portanto $u_2^{p+1} \in (C, D)$.

Fica natural agora procurar η de sorte que

$$\frac{\partial \eta / \partial u_1}{-Q/U} = \frac{\partial \eta / \partial u_2}{1/U}, \text{ ou } \frac{1}{U} \frac{\partial \eta}{\partial u_1} + \frac{Q}{U} \frac{\partial \eta}{\partial u_2} = 0.$$

Assim, procuramos η como integral primeira do campo $\frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial u_1} +$
 $+ \frac{Q}{U} \frac{\partial}{\partial u_2}.$

Ora, $U(0) \neq 0$, de modo que encontramos imediatamente uma integral primeira exigindo, por exemplo, $\eta(0, u_2) = u_2$. Deixamos ao leitor completar a demonstração.

Daqui em diante consideramos a sela-nó na forma

$(\lambda_1 x_1 + x_2 A(x_1, x_2)) \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^{p+1} \frac{\partial}{\partial x_2}$. O inteiro $p+1 \in \mathbb{N}$ é de fato invariante por equivalência analítica. Para ver isto, consideremos o toro sólido $|x_1| = 1$, e a holonomia da variedade forte na seção $x_1 = R$. Colocando $x_1(\theta) = \text{Re}^{i\theta}$, obtemos o traço da folheação no toro sólido como $\frac{dx_2}{d\theta} = ix_2^{p+1} \left(\lambda_1 + \frac{x_2 A(\text{Re}^{i\theta}, x_2)}{\text{Re}^{i\theta}} \right)^{-1}$.

Escrevendo $x_2(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\theta) x_2^j$, com $a_1(0) = 1$ e $a_j(0) = 0$ para $j \geq 2$, a equação anterior conduz imediatamente a $a_1'(\theta) = \dots = a_p'(\theta) = 0$, de modo que a holonomia da variedade forte se escreve $x_2(2\pi) = x_2 + a_{p+1} x_2^{p+1} + \dots$, com $a_{p+1} \neq 0$. Este tipo de difeomorfismo local foi descrito na seção anterior, de onde resulta ser $p+1 \in \mathbb{N}$ invariante por conjugação analítica (é o número de setores atraídos pelo ponto fixo). Finalmente, observemos que equivalências analíticas entre selas-nó conduzem a conjugações analíticas entre as holonomias de suas variedades fortes.

3ª etapa: Partindo agora de $(x_1 + x_2 A(x_1, x_2)) dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$, vamos simplificar o jato de ordem $p+1$. Ora, a primeira destas equações exibe as ressonâncias $l \cdot 1 + q \cdot 0 = 1$, $q \in \mathbb{N}$, de modo que por uma seqüência de mudanças de coordenadas podemos levar

a equação diferencial à forma $[x_1(1+B(x_2))+x_2R(x_1,x_2)]dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$, onde B é polinômio de grau $p \in \mathbb{N}$, $B(0) = 0$ e R é de multiplicidade pelo menos $p+1 \in \mathbb{N}$ em $(0,0)$.

Escrevamos $B(x_2) = \alpha_\ell x_2^\ell + \dots + \alpha_p x_2^p$, onde $\alpha_\ell \neq 0$ e $1 \leq \ell \leq p$.

Desejamos transformar a equação em $[X_1(1+\tilde{\alpha}_{\ell+1} X_2^{\ell+1} + \dots + \tilde{\alpha}_p X_2^p) + X_2 \tilde{R}(X_1, X_2)]dX_2 - X_2^{p+1} dX_1 = 0$. Em princípio, podemos repetir sucessivamente o processo até a forma final desejada. Consideremos então $H(X_1, X_2) = (X_1, h(X_2)) = (x_1, x_2)$ com $h(X_2) = X_2 + aX_2^{\ell+1}$, $a \in \mathbb{C}$ a ser determinado, como mudança de coordenadas. Obtemos

$$[X_1(1+B(h(X_2))) + h(X_2)R(X_1, h(X_2))]h'(X_2)dX_2 - h(X_2)^{p+1} dX_1 = 0$$

ou

$$\frac{X_2^{p+1} h'(X_2)}{h(X_2)^{p+1}} [X_1(1+B(h(X_2))) + X_2 R(X_1, h(X_2))]dX_2 - X_2^{p+1} dX_1 = 0$$

Dai, obtemos

$$[X_1(1 + [\alpha_\ell + a(\ell-p)] X_2^\ell + \dots) + X_2 \tilde{R}(X_1, X_2)]dX_2 - X_2^{p+1} dX_1 = 0.$$

Portanto, devemos escolher $a = \frac{\alpha_\ell}{p-\ell}$. Este raciocínio pode ser empregado enquanto $\ell < p$; segue-se que o $(p+1)$ -jato da equação assume a forma $x_1(1+\lambda x_2^p)dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$ após aplicação sucessiva deste tipo de mudança de coordenadas. Isto termina a prova do Teorema (1.1). ■

(1.2) Definição

- (a) O número inteiro $p+1 \in \mathbb{N}$ será denominado número de Milnor da sela-nó; D_p designará o conjunto das selas-nó com número de Milnor $p+1$.
- (b) G^0 será o grupo de difeomorfismos analíticos locais de $(\mathbb{C}^2, (0,0))$ do tipo $(x_1, x_2) \mapsto (\varphi(x_1, x_2), x_2)$ com $\varphi(x_1, 0) = x_1$.
- (c) \hat{G}^0 será o grupo de difeomorfismos formais de \mathbb{C}^2 em $(0,0)$ do tipo $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1) x_2^n, x_2)$, onde as funções φ_n são convergentes em algum disco $|x_1| < R, R > 0$, independente de $n \in \mathbb{N}$.

(1.3) Teorema - Consideremos a sela-nó em D_p

(*) $[x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_2 R(x_1, x_2)] dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$, onde $\text{mult}(R, 0) \geq p+1$. Ela é equivalente, via um único elemento de \hat{G}^0 , à sua forma normal final

$$x_1(1 + \lambda x_2^p) dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0.$$

Demonstração

1 - Retornando ao início da 3ª etapa da demonstração do Teorema (1.1), vemos que a sela-nó é formalmente equivalente a $X_1(1+f(X_2))dX_2 - X_2^{p+1} dX_1 = 0$, onde $f \in \mathbb{C}[[X_2]]$. Segue-se que, nas coordenadas (X_1, X_2) , $X_1 = 0$ é curva integral for-

mal, tangente ao auto espaço associado ao autovalor $0 \in \mathbb{C}$.
 Portanto, se a sela-nó está na forma (*), temos como curva integral formal $x_1 = u(x_2)$, com $u \in \mathbb{C}[[x_2]]$, $u(0) = u'(0) = 0$.
 De fato, por ser $u(x_2)(1 + \lambda x_2^p) + x_2 R(u(x_2), x_2) - x_2^{p+1} u'(x_2) = 0$,
 necessariamente $u(x_2) = ax_2^{p+2} + \dots$. Consideremos $H(x_1, x_2) = (x_1 + u(x_2), x_2) \in \hat{G}^0$. Utilizando H como mudança de coordenadas (ainda empregando (x_1, x_2) como variáveis), vemos que (*) transforma-se em $[x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_1 x_2 B(x_1, x_2)] dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$, com $\text{mult}(B, 0) \geq p$.

2 - Vamos agora transformar esta última equação, via um elemento de \hat{G}^0 , em $[x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_1 x_2 B(0, x_2)] dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$. Observe-se que atingiríamos esta forma simplesmente eliminando formalmente os monômios que não são associados a ressonâncias; entretanto, queremos obter a mudança de variáveis em \hat{G}^0 .

Para maior clareza, escrevamos a sela-nó como $x_1 \tilde{C}(x_1, x_2) dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$, e empreguemos como mudança de coordenadas $H(x_1, x_2) = (x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1) x_2^n, x_2)$, φ_n a determinar (conservamos (x_1, x_2) como variáveis).

Realizando as substituições necessárias, obtemos a identidade

$$\begin{aligned} & \tilde{C}(x_1, x_2) \left(x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_1 \varphi_n'(x_1) x_2^n \right) = \\ & = \left(x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1) x_2^n \right) \tilde{C}(0, x_2) - \sum_{n=1}^{\infty} n \varphi_n(x_1) x_2^{p+n}. \end{aligned}$$

Escrevamos $\tilde{C}(x_1, x_2) = \tilde{C}(0, x_2) - x_1 x_2 C_0(x_1, x_2)$, $C_0 \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]]$.

Tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{C}(0, x_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_1 \varphi'_n(x_1) - \varphi_n(x_1)) x_2^n = \\ &= x_1 x_2 C_0(x_1, x_2) (x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_1 \varphi'_n(x_1) x_2^n) - \sum_{n=1}^{\infty} n \varphi_n(x_1) x_2^{p+n}; \text{ logo,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_1 \varphi'_n(x_1) - \varphi_n(x_1)) x_2^n = \\ &= \tilde{C}(0, x_2)^{-1} [x_1 x_2 C_0(x_1, x_2) (x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_1 \varphi'_n(x_1) x_2^n) - \sum_{n=1}^{\infty} n \varphi_n(x_1) x_2^{p+n}]. \end{aligned}$$

Quando $n=1$: $x_1 \varphi'_1(x_1) - \varphi_1(x_1) = x_1^2 C_0(x_1, 0)$, que possui so-

lução $\varphi_1(x_1) = x_1 \int_0^{x_1} C_0(s, 0) ds$ (observe-se que $\varphi_1(0) = \varphi'_1(0) = 0$).

Procedamos agora por indução; supondo determinados $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, todos satisfazendo $\varphi'_j(0) = \varphi_j(0) = 0$, $1 \leq j \leq n-1$, temos da identidade acima que (igualando coeficientes em x_2^n):

$x_1 \varphi'_n(x_1) - \varphi_n(x_1) = x_1^2 C_{n-1}(x_1, 0)$, onde $C_{n-1}(x_1, 0)$ depende de $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, mas não de φ_j para $j \geq n$.

Novamente encontramos $\varphi_n(x_1) = x_1 \int_0^{x_1} C_{n-1}(s, 0) ds$; como todos $C_j(x_1, 0)$, $0 \leq j < \infty$, são convergentes no mesmo disco centrado em $0 \in \mathbb{C}$, vemos que $H \in \hat{G}^0$.

No caso particular da equação

$$[x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_1 x_2 B(x_1, x_2)] dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0, \text{ com } \text{mult}(B, (0, 0)) \geq p,$$

temos que $\tilde{C}(x_1, x_2) = 1 + \lambda x_2^p + x_2 B(x_1, x_2)$; segue-se que $\tilde{C}(x_1, x_2) - \tilde{C}(0, x_2) = x_2(B(x_1, x_2) - B(0, x_2))$. Portanto, $C_0(x_1, x_2)$ tem multiplicidade no mínimo $p-1 \in \mathbb{N}$ em $(0, 0)$, e daí $\text{mult}(\varphi_j, 0) \geq p+1$, $0 \leq j < \infty$. Concluimos que o $(p+1)$ -jato

da equação obtida após a mudança de coordenadas $H \in \hat{G}^0$ é $x_1(1+\lambda x_2^p)dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$.

3 - Finalmente podemos considerar (*) na forma

$[x_1(1+\lambda x_2^p) + x_1 x_2 B(0, x_2)]dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$, após atuar por \hat{G}^0 ; aqui, $\text{mult}(B(0, x_2), 0) \geq p$. Escrevamos

$[x_1(1+\lambda x_2^p + x_2^{p+1} S(x_2))]dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$, e utilizemos $H(y_1, y_2) = (y_1 \xi(y_2), y_2) \in \hat{G}^0$ como mudança de coordenadas.

Resulta a equação

$$y_1(1+\lambda y_2^p)dy_2 - y_2^{p+1}dy_1 + y_1 y_2^{p+1} \left(S(y_2) - \frac{\xi'(y_2)}{\xi(y_2)} \right) dy_2, \text{ de modo}$$

que escolhemos $\xi(y_2) = \exp \int_0^{y_2} S(t)dt$.

Quanto à unicidade, basta provar que se $H(x_1, x_2) = (x_1 + \psi(x_1, x_2), x_2) \in \hat{G}^0$ transforma $x_1(1+\lambda x_2^p)dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$ em si mesma, então $\psi(x_1, x_2) \equiv 0$, o que deixamos para o leitor verificar. ■

Finalmente demonstremos que a forma normal final de uma equação em D_p é única; devido ao Teorema (1.3), basta demonstrar o seguinte

(1.4) Teorema - Se $x_1(1+\lambda x_2^p)dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$ e $x_1(1+\lambda' x_2^p)dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$ são equivalentes via uma mudança formal de coordenadas, então $\lambda = \lambda'$.

Demonstração

1 - A mudança formal de coordenadas deve ser do tipo

$H(x_1, x_2) = (x_1 a(x_1, x_2), x_2 b(x_1, x_2))$, pois $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ são curvas integrais. Após aplicação de H , e pondo $x_1 = 0$, chegamos à identidade $(1 + \lambda' x_2^p b^p)(b + x_2 \frac{\partial b}{\partial x_2}) - \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x_2} x_2^{p+1} = b^{p+1}(1 + \lambda x_2^p)$, com $a = a(0, x_2)$ e $b = b(0, x_2)$. Escrevamos

$b = b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_2^j$; vê-se de imediato que $b_0 = b_0^{p+1}$, ou

$b_0^p = 1$. Para $k+1 \leq p$, a identidade torna-se

$$(1 + \lambda' x_2^p b^p)(b + x_2 \frac{\partial b}{\partial x_2}) = b^{p+1}(1 + \lambda x_2^p) \pmod{x_2^{k+1}}.$$

Se $b = b_0 + \sum_{j=k}^{\infty} b_j x_2^j$, temos que para $k+1 \leq p$:

$$b_0 + (k+1)b_k x_2^k = b_0^{p+1} + (p+1)b_0^p b_k x_2^k, \text{ ou seja } b_k = 0.$$

Quando igualamos os coeficientes de x_2^p , obtemos

$$\lambda b_0 + (p+1)b_0^p b_p = \lambda' b_0 b_0^p + (p+1)b_p \implies \lambda = \lambda'.$$

(1.5) Definição - $D_{p, \lambda}$ designará o subconjunto das selas-nó de D_p cuja forma normal final é $w_{p, \lambda} = x_1(1 + \lambda x_2^p) dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$.

§2 - O Problema de Classificação Simplificado

Como vimos na seção anterior, devemos classificar as selas-nó em cada $D_{p, \lambda} \subset D_p$, com $p \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Atuando aí com o grupo $\text{Dif}(\mathbb{C}^2, 0)$, obtemos equações cujo $(p+1)$ -jato é $w_{p, \lambda} = 0$. Devemos decidir agora quando é que são equivalentes as

equações $w_1 = w_{p,\lambda+x_2} R_1(x_1+x_2) dx_2 = 0$ e $w_2 = w_{p,\lambda+x_2} R_2(x_1,x_2) dx_2 = 0$, onde $\text{mult}(R_j, 0) \geq p+1$ para $j = 1, 2$. Isto pode ser feito utilizando um subgrupo de $\text{Dif}(\mathbb{C}^2, 0)$ mais apropriado.

(2.1) Definição - $G \subset \text{Dif}(\mathbb{C}^2, 0)$ é o subgrupo $[G^0, L]$, onde $L = \{\phi \in \text{Aut}(\mathbb{C}^2), \phi(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \beta x_2) \text{ com } \alpha \neq 0 \text{ e } \beta^p = 1\}$.

(2.2) Teorema - $w_1 = 0$ e $w_2 = 0$ são $\text{Dif}(\mathbb{C}^2, 0)$ -equivalentes se e somente se são G -equivalentes.

Portanto, o problema de classificação reduz-se essencialmente a estudar a ação de G^0 no subconjunto $D_{p,\lambda}^N \subset D_{p,\lambda}$ das selas-nó que vêm dadas em sua forma normal de Dulac (a atuação de L é bastante fácil de ser analisada). Observe-se que todas estas selas-nó são \hat{G}^0 -equivalentes.

Para a demonstração deste teorema, necessitamos alguns resultados preliminares.

(2.3) Lema - Sejam $w = [x_1(1+\lambda x_2^p) + x_2 R(x_1, x_2)] dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = A(x_1, x_2) dx_2 - x_2^{p+1} dx_1 = 0$ germe de sela-nó em $D_{p,\lambda}$ e $f(x_1, x_2) = P(x_2) + x_2^{p+1} r(x_1, x_2)$ germe de função holomorfa em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$; aqui, $\text{mult}(R, 0) \geq p+1$, $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$ e grau $P \leq p$. Existe então $\phi \in \text{Dif}(\mathbb{C}^2, 0)$ que deixa $w = 0$ invariante, isto é, $\phi^* w \wedge w = 0$, de modo que $f \circ \phi = P$.

Demonstração

1 - Escrevamos $f(t, x_1, x_2) = P(x_2) + t x_2^{p+1} r(x_1, x_2)$ para $t \in \mathbb{R}$

e $f_t(x_1, x_2) = f(t, x_1, x_2)$ quando desejarmos fixar $t \in \mathbb{R}$.

Procuremos uma família $\phi_t \in \text{Dif}(\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $f_t \circ \phi_t = P$ $\forall t \in [0, 1]$, com $\phi_0 = \text{Id}$, obtida por integração de um campo

po $X(t, x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta(t, x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$. Mais precisamente, ϕ_t será o fluxo local de X em $(0, 0)$ do instante $0 \in \mathbb{R}$ ao instante $t \in \mathbb{R}$. Escolheremos X de tal modo que $w(X) = 0$, onde $w(t, x_1, x_2) = w(x_1, x_2) \forall t \in \mathbb{R}$. Portanto, ϕ_t deixa invariante cada folha de $w = 0$.

2 - Portanto, devemos ter:

$$- w(X) = 0, \text{ ou } A(x_1, x_2)\eta(t, x_1, x_2) - x_2^{p+1}\xi(t, x_1, x_2) = 0$$

$$- f_t \circ \phi_t = P, \text{ ou } \frac{\partial}{\partial t} f(t, \phi_t(x_1, x_2)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \text{ Equiva-}$$

$$\text{lentemente, } \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \xi + \frac{\partial f}{\partial x_2} \eta = 0 \text{ (no ponto } (t, x_1, x_2)),$$

$$\text{ou ainda } \frac{\partial f}{\partial x_1} \xi + \frac{\partial f}{\partial x_2} \eta = -x_2^{p+1} r.$$

Ora, experimentemos $\xi = g \cdot A$, $\eta = g x_2^{p+1}$, onde $g(t, x_1, x_2)$ é uma função holomorfa a ser determinada. Devemos ter

$$g \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} A + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2^{p+1} \right] = -x_2^{p+1} r. \text{ Como } \frac{\partial f}{\partial x_1}(t_1, x_1, x_2) = t x_2^{p+1} \frac{\partial r}{\partial x_1},$$

$$\text{vemos que } g(x_1, x_2) = \frac{-r}{\frac{\partial f}{\partial x_2} + t A \frac{\partial r}{\partial x_1}}. \text{ Observe-se que}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(t, 0, 0) + t A(0, 0) \frac{\partial r}{\partial x_1}(0, 0) = P'(0) \neq 0, \text{ de modo que}$$

$g(t, x_1, x_2)$ está bem definida para $t \in [0, 1]$ e $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ próximo de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. ■

(2.4) Corolário - Se $\xi^* \omega_2 \wedge \omega_1 = 0$ para $\xi \in \text{Dif}(\mathbb{C}^2, 0)$, existe um difeomorfismo $\phi(x_1, x_2) = (\varphi(x_1, x_2), P(x_2))$ em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, onde $\text{grau } P \leq p$, tal que $\phi^* \omega_2 \wedge \omega_1 = 0$.

Prova

1 - Observemos inicialmente que $\pi_2(x_1, x_2) = x_2$ define uma fibração de $(\mathbb{C}^2, 0)$ sobre $(\mathbb{C}, 0)$ com as propriedades seguintes:

— $\pi_2^{-1}(0)$ é a variedade forte de $\omega_2 = 0$

— $d\pi_2(0, 0) = dx_2$

— as fibras de π_2 , exceto $\pi_2^{-1}(0)$, são transversais a $\omega_2 = 0$.

Ora, a submersão local $\pi_2 \circ \xi = \xi_2$ possui exatamente as mesmas propriedades (com $d\xi_2(0, 0) = a_0 dx_2$, $a_0 \neq 0$). Segue-se

que devemos ter $\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} [x_1(1 + \lambda x_2^p) + x_2 R_1(x_1, x_2)] + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} x_2^{p+1} = 0$

somente para $x_2 = 0$, o que implica (já que $\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(0, 0) \neq 0$)

que $\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2^{p+1} V(x_1, x_2)$, onde v é holomorfa numa

vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Portanto $\xi_2(x_1, x_2) =$

$= x_2 + x_2^{p+1} u(x_1, x_2)$, u função holomorfa numa vizinhança de

$(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Pelo Lema (2.3), encontramos $\psi \in \text{Dif}(\mathbb{C}^2, 0)$ de

tal modo que $\xi_2 \circ \psi = \pi_2$ e $\psi^* \omega_1 \wedge \omega_1 = 0$. Segue-se que

$\phi' = \xi \circ \psi$ preserva a fibração associada a π_2 e

$(\phi')^*(\omega_2) \wedge \omega_1 = 0$, de modo que $\phi'(x_1, x_2) = (\varphi'(x_1, x_2), h(x_2))$,

h holomorfa em $(\mathbb{C}, 0)$ com $h'(0) \neq 0$. Finalmente, aplican-

do novamente o Lema (2.3) para $f(x_1, x_2) = h(x_2)$, chegamos ao difeomorfismo desejado. ■

Podemos agora concluir a Prova do Teorema (2.2). Podemos supor que $\phi^* \omega_2 \wedge \omega_1 = 0$ para $\phi(x_1, x_2) = (\psi(x_1, x_2), P(x_2))$, com grau $P \leq p$ (observe-se que $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(0,0) \neq 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(0,0) = 0$, $P'(0) \neq 0$). Sabemos que existem $\alpha_i \in \hat{G}^0$ tais que $\alpha_i^* \omega_{p,\lambda} = \omega_i$, $i = 1, 2$. Segue-se que $\theta = \alpha_2 \circ \phi \circ \alpha_1^{-1}$ deixa $\omega_{p,\lambda} = 0$ invariante, e $\theta(x_1, x_2) = (\theta(x_1, x_2), P(x_2))$. Provemos que de fato $\theta(x_1, x_2) = \alpha x_1$ e $P(x_2) = \beta x_2$, com $\alpha \neq 0$, $\beta^p = 1$. Isto é, $\theta \in L$, o que implica $\phi \in [\hat{G}^0, L]$ pois $\alpha_1, \alpha_2 \in \hat{G}^0$; mas ϕ é convergente, de onde se seguirá $\phi \in [G^0, L] = G$.

De $\theta^* \omega_{p,\lambda} \wedge \omega_{p,\lambda} = 0$ concluímos que

$$(*) \quad x_1 (1 + \lambda x_2^p) P(x_2)^{p+1} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = x_2^{p+1} [(1 + \lambda P(x_2)^p) \theta P'(x_2) - P(x_2)^{p+1} \frac{\partial \theta}{\partial x_2}].$$

Portanto:

$$x_1 (1 + \lambda x_2^p) \left[\frac{P(x_2)}{x_2} \right]^{p+1} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = (1 + \lambda P(x_2)^p) \theta P'(x_2) \text{ mod}(x_2^{p+1}).$$

Escrevamos $\theta(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(x_2) x_1^n$ e $P(x_2) = \beta x_2 + \beta_2 x_2^2 + \dots + \dots + \beta_p x_2^p$. Consideremos a igualdade acima mod(x_1, x_2^{p+1}):

$$\alpha (1 + \lambda x_2^p) \left[\frac{P(x_2)}{x_2} \right]^{p+1} = \alpha (1 + \lambda P(x_2)^p) P'(x_2) \text{ mod}(x_2^{p+1}).$$

Se $x_2 = 0$, vemos que $\beta^{p+1} = \beta$, ou $\beta^p = 1$.

Quando igualamos os coeficientes de x_2 , obtemos $(p+1)\beta_2 = 2\beta_2 \implies \beta_2 = 0$. Supondo $\beta_2 = \dots = \beta_{p-1} = 0$, mostremos que $\beta_k = 0$, $k \leq p$. De fato, comparando coeficientes de x_2^{k-1} , encontramos $(p+1)\beta_k = k\beta_k \implies \beta_k = 0$.

Retornemos à identidade (*), agora com $P(x_2) = \beta x_2$. Obte

$$(**) \quad \theta \cdot (1 + \lambda x_2^p) = x_1 (1 + \lambda x_2^p) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + x_2^{p+1} \frac{\partial \theta}{\partial x_2}.$$

Escrevamos $\theta(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_1) x_2^n$. Provemos que

$\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_p(x_1)$ são todos nulos; a mesma idéia aplica-se sucessivamente para $\varphi_{\ell p+1}(x_1), \dots, \varphi_{(\ell+1)p}(x_1)$, $\ell \in \mathbb{N}$, o que deixaremos ao leitor verificar. Igualemos em (**) os coeficientes de x_2^n , $n \leq p$:

$$\varphi_n(x_1) = x_1 \varphi_n'(x_1) \implies \varphi_n(x_1) = c_n x_1, \quad n \leq p.$$

Agora, novamente em (**), igualemos os coeficientes de x_2^{p+n} , $n \leq p$:

$$\varphi_{p+n}(x_1) = x_1 \varphi_{p+n}'(x_1) + n c_n x_1 \implies c_n = 0, \quad n \leq p. \quad \blacksquare$$

§3 - Atuação de G^0 em $D_{p,\lambda}^N$

Seja \mathcal{H} o espaço de germes de funções holomorfas em $(\mathbb{C}, 0)$ que deixam $0 \in \mathbb{C}$ fixo e são tangentes à identidade. O teorema principal do capítulo é

(3.1) Teorema [9] - O espaço de órbitas de G^0 atuando em $D_{p,\lambda}^N$

está em bijeção canônica com $\mathbb{C}^p \times \mathbb{H}^p$.

Para demonstrá-lo, construíremos uma aplicação canônica bijetiva T entre $D_{p,\lambda}^N$ e $\mathbb{C}^p \times \mathbb{H}^p$. Nosso ponto de partida será um resultado de Hukuara, Kimura e Matuda. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um setor de vértice em $0 \in \mathbb{C}$, isto é, $U = \{x \in \mathbb{C}; x \neq 0, |x| < R \text{ e } x/|x| \in C\} \cup \{0\}$, onde $C \subset S$ é um arco aberto e $R > 0$. Se $C = (a, b)$, diremos que $b-a \in \mathbb{R}$ é a abertura de U . Permitiremos, sem mencionar, que $R > 0$ seja escolhido convenientemente pequeno, e indicaremos por \bar{U} o conjunto $\{x \in \mathbb{C}; 0 < |x| < R \text{ e } x/|x| \in \bar{C}\} \cup \{0\}$.

Consideremos a sela-nó $\omega = 0$ em $D_{p,\lambda}$. Sabemos que existe $\tilde{\varphi} \in \hat{G}^0$ de modo que $\tilde{\varphi}^* \omega_{p,\lambda} \wedge \omega = 0$, $\tilde{\varphi}(x_1, x_2) = (\varphi(x_1, x_2), x_2)$

(3.2) Teorema (Hukuara, Kimura, Matuda) - Se U possui abertura no máximo $2\pi/p$, existe uma transformação holomorfa limitada $\tilde{\varphi}_U: \Omega \times (U \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C} \times (U \setminus \{0\})$, onde $\Omega \subset \mathbb{C}$ é vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$, tal que

$$(i) \quad \tilde{\varphi}_U(x_1, x_2) = (\varphi_U(x_1, x_2), x_2)$$

$$(ii) \quad \tilde{\varphi}_U^* \omega_{p,\lambda} \wedge \omega = 0$$

(iii) φ_U é assintótica* a φ em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, isto é, dados um setor $\bar{V} \subset U$ e um disco compacto $\bar{D} \subset \Omega$ quaisquer, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $C_{\bar{V}, \bar{D}, k} > 0$ de modo que

$$|\varphi_U(x_1, x_2) - \varphi_k(x_1, x_2)| < C_{\bar{V}, \bar{D}, k} |(x_1, x_2)|^{k+1},$$

*Este conceito aplica-se mais geralmente a funções definidas em produtos $U_1 \times U_2$ de setores de \mathbb{C} ; consulte-se a respeito [16].

onde φ_k é o k-jato de φ em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$.

Para uma demonstração, o leitor deve consultar [7]. Observe-se que decorre facilmente que φ_U se estende a $\Omega \times \{0\}$ como $\varphi_U(x_1, 0) = x_1$, $\forall x_1 \in \Omega$. O Teorema (3.2), portanto, afirma que, mesmo não sendo $\varphi \in \hat{G}^0$ convergente, ele possui "realizações" quando restringimo-nos a setores convenientes. Diremos que φ_U é uma normalização setorial de $w = 0$ em $\Omega \times U$. A estratégia da prova do Teorema (3.1) consiste em explorar o fato de que uma normalização setorial não se estende necessariamente a um elemento de G^0 .

(3.3) Lema - Se φ_U e ψ_U são normalizações setoriais de $w = 0$ em $D_{p,\lambda}$ dadas pelo Teorema (3.2), então $\varphi_U^{-1} \circ \psi_U$ é assintótica a $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$.

Deixamos a demonstração como exercício. O Lema (3.3) levanta imediatamente a pergunta: como é uma função do tipo $\varphi_U^{-1} \circ \psi_U$?

(3.4) Definição - Seja $g: \Omega \times U \rightarrow \mathbb{C} \times U$, $g(x_1, x_2) = (g_U(x_1, x_2), x_2)$ assintótica a $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ e tal que $g^* \omega_{p,\lambda} = \omega_{p,\lambda}$. Diremos que g é uma isotropia setorial para $\omega_{p,\lambda} = 0$.

(3.5) Teorema - Conservando a notação acima, temos que:

- (i) Se $U \subset \{x \in \mathbb{C}; \Re x_2^p > 0\}$, então $g_U(x_1, x_2) =$
 $= x_1 + a_0 x_2^\lambda \exp(-1/px_2^p)$, $a_0 \in \mathbb{C}$

(ii) Se $U \subset \{x \in \mathbb{C}; \Re x_2^p < 0\}$, então $g_U(x_1, x_2) =$

$$= x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n [x_2^\lambda \exp(-1/px_2^p)]^{1-n} x_1^n, \quad \text{onde}$$

$$x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n \in H.$$

(iii) Se U contém um raio onde $\Re x_2^p = 0$, então $g_U(x_1, x_2) = x_1$.

Demonstração

1 - Escrevamos $g_U(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x_2) x_1^n$, onde g_n é holomorfa

$\forall n \in \mathbb{N}$. Como $g^* w_{p,\lambda} = w_{p,\lambda}$, temos que $g_U \cdot (1 + \lambda x_2^p) =$

$$= x_1 (1 + \lambda x_2^p) \frac{\partial g_U}{\partial x_1} + x_2^{p+1} \frac{\partial g_U}{\partial x_2}. \quad \text{Resulta } g_n(x_2) =$$

$= a_n [x_2^\lambda \exp(-1/px_2^p)]^{1-n}$. Usando o fato que g se estende a $\Omega \times \{0\}$ como $(x_1, x_2) \mapsto x_1$, obtemos as fórmulas do enunciado. ■

Podemos agora definir a aplicação $T: D_{p,\lambda}^N/G^0 \longrightarrow \mathbb{C}^p \times H^p$.

Consideremos o recobrimento de S^1 por setores U_i , $i=0, \dots, 2p-1$, de abertura $2\pi/p$ e cujas bissetrizes são os raios $\Re x_2^p = 0$, isto é, as direções $\exp \frac{2i+1}{2p} \pi \sqrt{-1}$, $i = 0, \dots, 2p-1$ (assim,

$U_0 \cap U_1, U_1 \cap U_2, \dots, U_{2p-1} \cap U_0$ são setores onde alternadamente encontramos $\Re x_2^p > 0$ e $\Re x_2^p < 0$. Em cada U_i temos uma única normalização setorial (pois o setor contém um raio $\Re x_2^p = 0$) φ_i dada pelo Teorema (3.2). Temos assim as isotropias setoriais $\varphi_i \circ \varphi_{i+1}^{-1}$

dadas por $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + a_0^{(i)} x_2^\lambda \exp(-1/px_2^p), x_2)$ se $i \in \mathbb{N}$ for par ou $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(i)} [x_2^\lambda \exp(-1/px_2^p)]^{1-n} x_1^n, x_2)$, caso $i \in \mathbb{N}$ seja ímpar. Definamos $\tilde{T}: D_{p,\lambda}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{H}^p$ como $\tilde{T}(w) = (a_0^{(0)}, a_0^{(2)}, \dots, a_0^{(2p-2)}, x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(1)} x_1^n, \dots, x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(2p-1)} x_1^n) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{H}^p$.

(3.6) Lema - \tilde{T} passa ao quociente $D_{p,\lambda}^{\mathbb{N}}/G^0$ a uma aplicação T injetiva.

Demonstração

1 - Sejam $w_1, w_2 \in D_{p,\lambda}^{\mathbb{N}}$ e $\xi \in G^0$ tais

que $\xi^* w_2 \wedge w_1 = 0$. Sabemos pelo

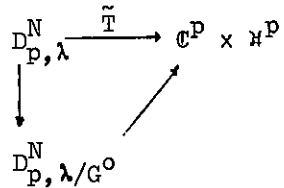
Teorema 4.1.2 que existem

$\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \in \hat{G}^0$, únicos, satisfazendo

$\tilde{\varphi}_j^* w_{p,\lambda} \wedge w_j = 0, j = 1, 2$. Temos

que $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2 \circ \xi$, pois $\tilde{\varphi}_2 \circ \xi \in \hat{G}^0$ e $(\tilde{\varphi}_2 \circ \xi)^* w_{p,\lambda} \wedge w_1 = 0$

e aí se aplica a unicidade.



2 - Consideremos normalizações setoriais $\tilde{\varphi}_i^{(j)}$ de $w_j = 0, j = 1, 2$, e $i = 0, \dots, 2p-1$. Temos que $\tilde{\varphi}_i^{(2)} \circ \xi$ é assintótica a $\tilde{\varphi}_2 \circ \xi = \tilde{\varphi}_1$ e $(\tilde{\varphi}_i^{(2)} \circ \xi)^* w_{p,\lambda} \wedge w_1 = 0$, de modo que por unicidade das normalizações setoriais $\tilde{\varphi}_i^{(1)} = \tilde{\varphi}_i^{(2)} \circ \xi$. Resulta que $\tilde{\varphi}_i^{(1)} \circ (\tilde{\varphi}_{i+1}^{(1)})^{-1} = \tilde{\varphi}_i^{(2)} \circ (\tilde{\varphi}_{i+1}^{(2)})^{-1}$, e daí T fi

ca bem definida.

3 - Passemos à injetividade. Suponhamos (mesma notação anterior) que $\phi_i^{(1)} \circ (\phi_{i+1}^{(1)})^{-1} = \phi_i^{(2)} \circ (\phi_{i+1}^{(2)})^{-1} \quad \forall i = 0, \dots, 2p-1$. Introduzamos $\xi_i = (\phi_i^{(2)})^{-1} \circ \phi_i^{(1)}$; como $\xi_i = \xi_{i+1}$ em $U_i \cap U_{i+1}$, temos bem definida $\xi: \Omega_X(V \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C} \times (V \setminus \{0\})$, V viz. de $0 \in \mathbb{C}$; ela se estende continuamente a $\xi(x_1, 0) = (x_1, 0)$ para $x_1 \in \Omega$. Pelo Teorema de Hartogs, ξ é holomorfa em $\Omega \times V$. Finalmente, observamos que $\xi \in G^0$ e $\xi^* \omega_2 \wedge \omega_1 = 0$, de modo que T é injetiva. ■

Antes de examinarmos a sobrejetividade, faremos uma pequena digressão, motivação pelo aspecto peculiar das isotropias setoriais, a respeito das funções de classe C^∞ no sentido de Whitney.

Consideremos $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto e $(f^k)_{k \in \mathbb{N}^m}$ coleção de funções contínuas em $C^0(K, \mathbb{R}^m)$. Diremos que a cada função $F^{(t)}(x) = f^t(x)$, para $t \in \mathbb{N}^m$, está associada o jato infinito $(f^{k+t})_{k \in \mathbb{N}^m}$; a mudança de notação de f^t para $F^{(t)}$ é justamente para salientar que a função se faz acompanhar de seu jato. Escreveremos $|k| = k_1 + \dots + k_m$ e $k! = k_1! \dots k_m!$ para $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m$; se $z \in \mathbb{R}^m$, denotaremos por $z^k = z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m}$.

(3.7) Definição - $F^{(0)}: K \rightarrow \mathbb{C}$ é C^∞ no sentido de Whitney — $F^{(0)} \in C_w^\infty(K, \mathbb{C})$ — se para cada $t \in \mathbb{N}^m$, $n \in \mathbb{N}$ existir $C_n^{(t)} > 0$ tal que

$$\left| F^{(t)}(y) - \sum_{|k|=0}^n \frac{f^{k+t}(x)}{k!} (y-x)^k \right| \leq C_n^{(t)} |y-x|^{n+1}, \quad \forall x, y \in K.$$

É claro que se $B \subset \mathbb{R}^m$ é uma bola aberta contendo K e $g \in C_0^\infty(B, \mathbb{C})$, a coleção associada a g pela Definição (3.7) é simplesmente seu jato de ordem infinita usual (obs.: os elementos de $C_0^\infty(B, \mathbb{C})$ possuem suporte em B).

(3.8) Teorema (Whitney), [8] - Existe uma transformação linear $L: C_W^\infty(K, \mathbb{C}) \rightarrow C_0^\infty(B, \mathbb{C})$ de modo que $L(g)|_K = g \quad \forall g \in C_W^\infty(K, \mathbb{C})$; esta igualdade inclui os jatos associados.

Necessitaremos também o critério de Whitney para que duas funções $F_i \in C_W^\infty(K_i, \mathbb{C})$, $i = 1, 2$, onde K_i é compacto, definam uma $F \in C_W^\infty(K_1 \cup K_2, \mathbb{C})$. É claro que necessariamente $F_1^{(t)}|_{K_1 \cap K_2} = F_2^{(t)}|_{K_1 \cap K_2}$, $\forall t \in \mathbb{N}^m$, mas há também uma exigência em termos de K_1 e K_2 . Tem-se que K_1 e K_2 são regularmente separados se existem constantes $C > 0$, $\alpha > 0$ tais que $d(x, K_2) \geq Cd(x, K_1 \cap K_2)^\alpha \quad \forall x \in K_1$.

(3.9) Teorema (Whitney) [8] - Sejam K_1, K_2 compactos regularmente separados e $F_i \in C_W^\infty(K_i, \mathbb{C})$, $i = 1, 2$, tais que $F_1^{(t)} = F_2^{(t)}$ em $K_1 \cap K_2$, $\forall t \in \mathbb{N}^m$ ($F_1 = F_2$ em $K_1 \cap K_2$, a nível de jatos). Então $F^{(t)}$ definida por $F^{(t)}(x) = F_1^{(t)}(x)$, se $x \in K_1$ e $F^{(t)}(x) = F_2^{(t)}(x)$, se $x \in K_2$, pertence a $C_W^\infty(K_1 \cup K_2, \mathbb{C})$.

Nosso interesse reside no caso em que $K = \bar{D} \times \bar{V} \subset \mathbb{C}^2$, onde $\bar{D} \subset \mathbb{C}$ é um disco fechado e $\bar{V} \subset \mathbb{C}$ setor fechado com vértice em $0 \in \mathbb{C}$, e temos uma função $f \in C_W^\infty(\bar{D} \times \bar{V}, \mathbb{C})$ holomorfa em $\bar{D} \times (\bar{V} \setminus \{0\})$. É fácil ver que $f|_{\bar{D} \times \{0\}}$ é holomorfa.

Fixemos por um instante $x_1 \in \bar{D}$, e examinemos f como elemento de $C_W^\infty(\{x_1\} \times \bar{V}, \mathbb{C})$. Em $\{x_1\} \times (\bar{V} \setminus \{0\})$ ela é holomorfa, de modo que

$$\frac{\partial^k f}{\partial \bar{x}_2^k}(x_1, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in \bar{V} \setminus \{0\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como o jato associado a f tem por componentes funções contínuas, vemos que

$$\frac{\partial^k f}{\partial \bar{x}_2^k}(x_1, 0) = 0. \quad \text{Segue-se que existem funções } f_k(x_1) \text{ tais que}$$

$$\forall (x_1, x_2) \in \bar{D} \times \bar{V},$$

$$\left| f(x_1, x_2) - \sum_{k=0}^n \frac{f_k(x_1)}{k!} x_2^k \right| \leq C_n |x_2|^{n+1}, \quad C_n > 0$$

$$\left| \frac{\partial^t f}{\partial \bar{x}_2^t}(x_1, x_2) - \sum_{k=0}^n \frac{f_{k+t}(x_1)}{k!} x_2^k \right| \leq C_n^{(t)} |x_2|^{n+1}, \quad C_n^{(t)} > 0$$

Todas as funções f_k são holomorfas em \bar{D} , pois $f_k(x_1) =$

$$= \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{\partial^k f(x_1, x_2)}{\partial \bar{x}_2^k}.$$

Diremos que $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_1) x_2^k$ é o desenvolvimento assintótico de f ao longo de $\bar{D} \times \{0\}$.

Este conceito se aplica ao que vínhamos estudando anteriormente do seguinte modo (conservamos as notações de antes).

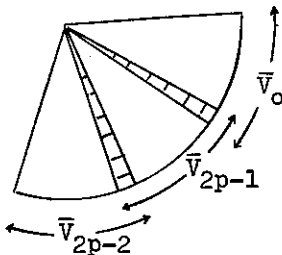
(3.10) Proposição - As isotropias setoriais $\varphi_i \circ \varphi_{i+1}^{-1}(x_1, x_2) = (\varphi_i(x_1, x_2), x_2)$, para $i = 0, \dots, 2p-1$, são tais que $\varphi_i \in C_W^\infty(\bar{D} \times \bar{V})$, $\bar{V} \subset U_i$; seu desenvolvimento assintótico ao longo de $\bar{D} \times \{0\}$ é $(x_1, x_2) \mapsto x_1$.

Demonstração

1 - Basta observar a presença de $\exp(-1/px_2^p)$ se $\bar{V} \subset \Re e x_2^p > 0$, ou de $\exp(1/px_2^p)$ se $\bar{V} \subset \Re e x_2^p < 0$. ■

Voltemos agora a analisar a sobrejetividade da aplicação T. Dado um elemento em $\mathbb{C}^p \times \mathbb{H}^p$, a ele associamos isotropias setoriais $g_{i,i+1} \in C_W^\infty(\bar{D} \times U_i)$, $i = 0, \dots, 2p-1$, do tipo explicitado no Teorema (3.5). Gostaríamos que $(g_{i,i+1})_{i=0}^{2p-1}$ fosse um "cobordo", isto é, que existissem aplicações $\varphi_i \in C_W^\infty(\bar{D} \times U_i)$, holomorfas em $\bar{D} \times (U_i \setminus \{0\})$, tais que $\varphi_i \circ \varphi_{i+1}^{-1} = g_{i,i+1}$, $i = 0, \dots, 2p-1$. Para isso, comecemos considerando a variedade topológica $M_g = \bigcup_{i=0}^{2p-1} \bar{D} \times U_i / \sim$, onde $(x_1, x_2) \sim (g_{i,i+1}(x_1, x_2), x_2)$. Designemos por $\lambda_i: \bar{D} \times U_i \rightarrow M_g$ as inclusões naturais $\lambda_i(x_1, x_2) = [(x_1, x_2)]$, $i = 0, \dots, 2p-1$, e por $\pi_2: M_g \rightarrow \bar{D}$ a projeção $\pi_2([(x_1, x_2)]) = x_2$. Vê-se facilmente que $M_g \setminus \pi_2^{-1}(0)$ é uma superfície complexa, coberta pelas cartas coordenadas $\lambda_i^{-1}: \lambda_i(\bar{D} \times (U_i \setminus \{0\})) \rightarrow \bar{D} \times (U_i \setminus \{0\})$, e que π_2 restrita a $M_g \setminus \pi_2^{-1}(0)$ é também holomorfa.

Vamos agora prolongar esta estrutura em $M_g \setminus \pi_2^{-1}(0)$ de forma C^∞ a M_g . Consideremos inicialmente a coleção de setores $\{\bar{V}_j\}$, $j = 0, \dots, 2p-1$, $\bar{V}_j \subset U_j$, V_j fechado e $\bar{V}_j \cap \bar{V}_{j+1} \neq \emptyset$. Como antes, temos as inclusões $\lambda_j: \bar{D} \times \bar{V}_j \rightarrow M_g$. Uma função definida em um aberto de M_g será de classe C^∞ (por definição!) se $\xi_j = \xi \circ \lambda_j \in C_w^\infty(\bar{D} \times \bar{V}_j, \mathbb{C})$, $\forall j = 0, \dots, 2p-1$. (Observe-se que já conhecemos as funções de classe C^∞ em $M_g \setminus \pi_2^{-1}(0)$, e a nova definição é consistente com esta). Para ver que de fato existem $\xi: M_g \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ , basta exibir funções $\xi_j \in C_w^\infty(\bar{D} \times \bar{V}_j, \mathbb{C})$ satisfazendo $\xi_j = \xi_{j+1} \circ g_{j,j+1}$, $j=0, \dots, 2p-1$. Tomemos $\xi_0(x_1, x_2) = x_1$ em $\bar{D} \times \bar{V}_0$, e ξ_1 em $\bar{D} \times (\bar{V}_0 \cap \bar{V}_1)$ satisfazendo $\xi_0 = \xi_1 \circ g_{0,1}$. Pelo Teorema (3.8), prolongamos ξ_1 até $\xi_1 \in C_w^\infty(\bar{D} \times \bar{V}_1, \mathbb{C})$, e assim por diante, até obtermos $\xi_{2p-2} \in C_w^\infty(\bar{D} \times \bar{V}_{2p-2}, \mathbb{C})$. Há um pequeno problema para obter ξ_{2p-1} , pois já a temos definida em $\bar{V}_{2p-2} \cap \bar{V}_{2p-1}$ e $\bar{V}_{2p-1} \cap \bar{V}_0$; isto nos obriga a lançar mão do Teorema (3.9), pois estamos tratando de compactos regularmente separados. Assim, $\xi_{2p-1} \in C_w^\infty(\bar{D} \times [(\bar{V}_{2p-2} \cap \bar{V}_{2p-1}) \cup (\bar{V}_{2p-1} \cap \bar{V}_0)], \mathbb{C})$, de modo que aplicando o Teorema 3.8 novamente obtemos $\xi_{2p-1} \in C_w^\infty(\bar{D} \times \bar{V}_{2p-1}, \mathbb{C})$.



Afirmamos agora que M_g possui uma estrutura quase complexa J , de classe C^∞ , que coincide em $M_g \setminus \pi_2^{-1}(0)$ com sua estrutura complexa. (Ver Apêndice). Além disso, J é integrável

vel em $M_g \setminus \pi_2^{-1}(0)$.

De fato, basta tomar em cada $\bar{D} \times \bar{V}_j$ o operador J_j canônico de \mathbb{C}^2 , isto é, $J_j \left(\frac{\partial}{\partial z_k} \right) = i \frac{\partial}{\partial z_k}$, $J_j \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$, $k = 1, 2$. Claramente J_j é de classe C^∞ em $\bar{D} \times \bar{V}_j$ e $J_j = J_{j+1} \circ dg_{j,j+1}$, o que mostra que a coleção $\{J_j\}$, $j=0, \dots, 2p-1$ define um operador em TM_g . A integrabilidade de J em $M_g \setminus \pi_2^{-1}(0)$ é imediata, e novamente pelo Apêndice concluímos que J é integrável em M_g . Segue-se que podemos selecionar uma carta F' local em M_g , em torno de $(0,0)$, de classe C^∞ , de modo que o sistema de cartas locais $\{\lambda_0, \dots, \lambda_{2p-1}, F'\}$ torne M_g uma superfície complexa. Pelo Teorema de Hartogs, $\pi_2: (M_g, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ passa a ser uma submersão analítica. Assim, F' pode ser escolhido de modo que $F' \Big|_{\pi_2^{-1}(0)} = \text{Id}$ e sua segunda componente seja π_2 . As aplicações $\phi_j = (F' \circ \lambda_j)^{-1}$, $i = 0, \dots, 2p-1$ são aquelas que procuramos; observe-se que todas elas possuem o mesmo desenvolvimento assintótico ao longo de $\bar{D} \times \{0\}$, o qual será um elemento $\hat{\phi}' \in \hat{G}^0$.

Temos que $(\phi'_j)^* \omega_{p,\lambda} \wedge (\phi'_{j+1})^* \omega_{p,\lambda} = 0$ fora do eixo x_1 , de modo que aí temos bem definida uma folheação. Deixamos ao leitor verificar que ela se estende como sela-nó $\omega = 0$ de D_p , tendo o eixo x_1 como variedade forte. Ela é formalmente equivalente a $\omega_{p,\lambda} = 0$ via $\hat{\phi} \in \hat{G}^0$. É fácil ver também, a partir do Teorema 1.1, que existe $h \in G^0$ tal que $h^* \omega \wedge \omega^N = 0$, onde $\omega^N \in D_{p,\lambda}^N$. Segue-se que as aplicações $\hat{\phi}_j = \hat{\phi}'_j \circ h$ são normaliza

ções setoriais de $\omega^N = 0$, com desenvolvimento assintótico $\hat{\varphi}' \circ h \circ \hat{G}^0$ ao longo de $\bar{D} \times \{0\}$, e $\hat{\varphi}_j \circ \hat{\varphi}_{j+1} = g_{j,j+1}$.

Apêndice: Estruturas Quase-Complexas

Sejam M uma variedade complexa n -dimensional ($\dim_{\mathbb{R}} M = 2n$) e $p \in M$. Designemos por $T_p M$ seu espaço tangente real no ponto $p \in M$; considerando em torno de $p \in M$ uma carta do atlas analítico de M , com coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, tem-se que $T_p M$ é gerado pelos vetores (ou derivações \mathbb{R} -lineares sobre $C^\infty(M, \mathbb{R})$) $\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n} \}$. Se $(T_p M)^{\mathbb{C}}$ é o complexificado de $T_p M$, isto é, o espaço das derivações \mathbb{C} -lineares sobre $C^\infty(M, \mathbb{C})$, temos que $\dim_{\mathbb{C}}(T_p M)^{\mathbb{C}} = 2n$ e $\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \}$ é uma base, onde, como usualmente, $\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right)$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right)$, $1 \leq k \leq n$. Pelo fato de ser M complexa ficam bem definidos os subespaços $T_p' M$ gerado por $\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \}$ e $T_p'' M$, gerado por $\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \}$ (isto é, independentem da escolha da carta local do atlas analítico em torno de $p \in M$). É claro que $(T_p M)^{\mathbb{C}} = T_p' M \oplus T_p'' M$, e ambos são subespaços vetoriais sobre \mathbb{C} .

Consideremos agora a transformação \mathbb{R} -linear $L: T_p M \rightarrow T_p M$; podemos torná-la \mathbb{C} -linear pondo $L^{\mathbb{C}}: (T_p M)^{\mathbb{C}} \rightarrow (T_p M)^{\mathbb{C}}$, $L^{\mathbb{C}}(u+iv) = L(u) + iL(v)$. Pode-se verificar rapidamente que $L\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right) = \overline{L\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)}$ (obs.: $\overline{u+iv} = u-iv$ para $u+iv \in (T_p M)^{\mathbb{C}}$). Como exemplo importante desta situação, tomaremos $J_p: T_p M \rightarrow T_p M$ \mathbb{R} -linear satisfazendo $J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}$ e $J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}$, $1 \leq k \leq n$. Para verificar que $J_p^{\mathbb{C}}$ está bem definida (isto é, independente da carta coordenada escolhida em torno de $p \in M$), basta notar que $J_p^{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right) = i \frac{\partial}{\partial z_k}$ e $J_p^{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right) = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$, $1 \leq k \leq n$. (Obviamente J_p está também bem definida).

Proposição 1

- (i) $J_p^2 = -\text{Id} \quad \forall p \in M$
- (ii) A aplicação $p \xrightarrow{J} J_p \in \mathcal{L}(T_p M, T_p M)$ é de classe C^∞ .

Demonstração: imediata.

Motivados por esta situação, introduzimos a

Definição 1 - Seja M uma variedade real de classe C^∞ onde está definida uma aplicação $p \xrightarrow{J} J_p \in \mathcal{L}(T_p M, T_p M)$ de classe C^∞ tal que $J_p^2 = -\text{Id} \quad \forall p \in M$. Dizemos que J é uma estrutura quase complexa sobre M .

Portanto, uma variedade complexa possui uma estrutura quase complexa natural, subjacente à sua própria estrutura complexa. O problema que se põe é saber se a existência de uma estrutura quase complexa sobre a variedade M garante que M é complexa. O Teorema de Newlander-Nirenberg responde afirmativamente a esta questão, quando se satisfaz uma condição de integrabilidade. Vamos enunciá-la daqui a pouco.

Proposição 2 - Seja V um espaço vetorial real, e $J \in \mathcal{L}(V, V)$ tal que $J^2 = -\text{Id}$. Então

- 1) $\dim_{\mathbb{R}} V$ é par*.
- 2) Existe uma decomposição $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ de subespaços J -invariantes, tais que $\dim_{\mathbb{R}} V_k = 2$, $1 \leq k \leq n$.
- 3) Em cada subespaço V_k podemos escolher base $\{v_k, v_k'\}$ de modo que $J(v_k) = v_k'$ e $J(v_k') = -v_k$.

Prova

1 - Observemos inicialmente que $\{v, Jv\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes $\forall v \in V$. De fato, se $Jv = av$, temos $J^2v = v = aJv \implies Jv = -a^2Jv \implies a = 0$, contradição. A decomposição do enunciado é obtida assim: 1) escolhemos $v_1 \neq 0$ qualquer, e V_1 será gerado por $\{v_1, Jv_1\}$; 2) Suponhamos já encontrados V_1, \dots, V_k , e escolhamos $v_{k+1} \neq 0$

* Como consequência, se M admite uma estrutura quase complexa, sua dimensão é par.

fora de $V_1 \oplus \dots \oplus V_k$. Afirmamos que V_{k+1} , gerado por $\{v_{k+1}, Jv_{k+1}\}$ é independente de $V_1 \oplus \dots \oplus V_k$. Realmente, se $Jv_{k+1} \in V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, vemos imediatamente que $-v_{k+1} = J^2 v_{k+1} \in V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ (estes são J -invariantes), contradição. Prosseguimos até completarmos V . Uma base que satisfaz (3) é $\{v_1, v_1^i = Jv_1, \dots, v_n, v_n^i = Jv_n\}$. ■

Definição 2 - Seja M variedade de classe C^∞ admitindo uma estrutura quase complexa J . Diremos que J é integrável se existe cobertura $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de M por cartas coordenadas tal que se $p = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in U_i$ então $J_p \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial y_k}$ e $J_p \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_k}$, $1 \leq k \leq n$.

Proposição 3 - Se J é integrável, podemos escolher um atlas analítico que torna M variedade complexa

Prova

1 - Consideremos o atlas associado à cobertura da Definição 2, e $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n), (x_1^i, y_1^i, \dots, x_n^i, y_n^i)$ dois sistemas de coordenadas para o mesmo aberto em M . Existem funções de classe C^∞ , $\varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_n, \psi_n$ de modo que

$$\begin{cases} x_k = \varphi_k(x_1^i, y_1^i, \dots, x_n^i, y_n^i) \\ y_k = \psi_k(x_1^i, y_1^i, \dots, x_n^i, y_n^i). \end{cases}$$

$$\text{Ora, } \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_j \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j^i} \frac{\partial}{\partial x_j^i} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j^i} \frac{\partial}{\partial y_j^i} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_j \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j^i} \frac{\partial}{\partial x_j^i} + \frac{\partial \psi_k}{\partial y_j^i} \frac{\partial}{\partial y_j^i} \right),$$

$1 \leq k \leq n$. Aplicando o operador J vemos que

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_j \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j^i} \frac{\partial}{\partial y_j^i} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j^i} \frac{\partial}{\partial x_j^i} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_j \left(- \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j^i} \frac{\partial}{\partial y_j^i} + \frac{\partial \psi_k}{\partial y_j^i} \frac{\partial}{\partial x_j^i} \right),$$

$1 \leq k \leq n$.

Concluimos que $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j^i} = \frac{\partial \psi_k}{\partial y_j^i}$ e $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j^i} = - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j^i}$, $1 \leq k \leq n$, que são

exatamente as condições de Cauchy-Riemann. Segue-se que para

$z_k = x_k + iy_k$, $z_k^i = x_k^i + iy_k^i$ como variáveis as funções

$\varphi_k + i\psi_k$ tornam-se holomorfas. ■

Como mencionamos acima, o Teorema de Newlander-Niremberg dá uma condição para que a estrutura quase complexa seja integrável. Para enunciá-lo, precisamos de algumas definições. Seja $J \in \mathcal{L}(V, V)$ tal que $J^2 = -\text{Id}$, onde V é um espaço vetorial real. Como o polinômio mínimo de J é $p(t) = t^2 + 1$, vemos que existem subespaços V^+ , V^- de $V^{\mathbb{C}}$ de modo que $V^{\mathbb{C}} = V^+ \oplus V^-$, $J^{\mathbb{C}}(v) = iv \quad \forall v \in V^+$ e $J^{\mathbb{C}}(v) = -iv \quad \forall v \in V^-$; além disso, esta decomposição é única. Se agora J é estrutura quase-complexa em M , temos que $(TM)^{\mathbb{C}} = TM^+ \oplus TM^-$ (decomposição em subfibrados vetoriais $J^{\mathbb{C}}$ -invariantes).

Definição 3 - Um campo de vetores em M é de tipo holomorfo quando for uma seção de TM^+ . Indicaremos por $\mathfrak{X}^+(M)$ o espaço de tais campos.

Teorema 1 (Newlander-Nirenberg), [1] - J é integrável se e só se $\forall X, Y \in \mathfrak{X}^+(M)$ tivermos $[X, Y] \in \mathfrak{X}^+(M)$, ou seja, se $\mathfrak{X}^+(M)$ for fechado para o colchete de Lie.

Observe-se que a condição é satisfeita necessariamente quando M é complexa e J é sua estrutura quase complexa natural.

Definição 4 - $S: \mathfrak{X}^\infty(M) \times \mathfrak{X}^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\infty(M)$ é o operador definido por $S(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY]$, onde $\mathfrak{X}^\infty(M)$ é o conjunto de seção de classe C^∞ de $(TM)^\mathbb{C}$.

Proposição 4 - $\mathfrak{X}^+(M)$ é fechado para o colchete de Lie $\iff S=0$.

Prova

1 - Escrevamos $\mathfrak{X}^\infty(M) = \mathfrak{X}^+(M) \oplus \mathfrak{X}^-(M)$ para a decomposição induzida por $(TM)^\mathbb{C} = TM^+ \oplus TM^-$. Segue-se que dado $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, podemos decompô-lo em $X = X^+ + X^-$, com $X^\pm \in \mathfrak{X}^\pm(M)$. Tem-se então $S(X^+, Y^+) = 2([X^+, Y^+] + iJ[X^+, Y^+])$, $S(X^+, Y^-) = S(X^-, Y^+) = 0$ e $S(X^-, Y^-) = 2([X^-, Y^-] - iJ[X^-, Y^-])$, de modo que $S(X, Y) = [X^+, Y^+]^- + [X^-, Y^-]^+$. Observemos ainda que existe em $(TM)^\mathbb{C}$ uma conjugação natural $\overline{u+iv} = u-iv$, e que $\overline{TM^+} = TM^-$. Em relação ao colchete de Lie, $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X, Y]$.

2 - Suponhamos $\mathfrak{X}^+(M)$ fechado para o colchete, o que é equivalente a $\mathfrak{X}^-(M)$ também ser fechado. Daí, $[X^+, Y^+]^- = [X^-, Y^-]^+ = 0$. Reciprocamente, $S(X, Y) = 0 \implies [X^+, Y^+]^- + [X^-, Y^-]^+ = 0 \implies [X^+, Y^+]^- = [X^-, Y^-]^+ = 0 \implies [X^+, Y^+] \in \mathfrak{X}^+(M)$. ■

Corolário 1 - Seja J uma estrutura quase complexa em M , integrável em um aberto e denso $\tilde{M} \subset M$. Então J é integrável em M .

Prova

1 - Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$. Então $S[X|_{\tilde{M}}, Y|_{\tilde{M}}] = 0$ pelo Teorema 1 e Proposição 4. Como \tilde{M} é densa em M , vemos que $S(X, Y) = 0 \forall X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, e daí concluímos que J é integrável. ■

CAPÍTULO V

EXISTÊNCIA DE INTEGRAIS PRIMEIRAS

§1 - Introdução

As folheações singulares mais simples são aquelas cujas folhas são as curvas de nível de uma função não constante $f: (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$. É natural portanto estudar os campos de vetores holomorfos Z , com uma singularidade em $0 \in \mathbb{C}^2$, cuja folheação induzida \mathfrak{F}_Z é deste tipo. Nosso objetivo será o de obter uma caracterização topológica destes campos de vetores.

É claro que para um tal campo de vetores Z temos

$$df(Z) = 0$$

Diremos então que f é uma integral primeira de Z . Não é difícil demonstrar as seguintes propriedades topológicas de Z .

- i) Para vizinhanças suficientemente pequenas U de $0 \in \mathbb{C}^2$, as folhas de \mathfrak{F}_Z são fechadas em $U \setminus \{0\}$.
- ii) Somente um número finito de folhas de \mathfrak{F}_Z acumulam em $0 \in \mathbb{C}^2$.
- iii) A holonomia de qualquer folha é finita.

Com efeito, dada uma folha L de \mathfrak{F}_Z , $f(L) = c$ é uma constan-

te. Chamemos $L = L_c$. Assim se $c \neq 0$, L_c é uma componente conexa de $f^{-1}(c)$; conseqüentemente L_c é fechada. Por outro lado se $c = 0$, L é uma componente conexa de $f^{-1}(0) \setminus \{0\}$ e $\bar{L} = L \cup \{0\}$. Isto prova i). Seja L uma componente conexa de $f^{-1}(0) \setminus \{0\}$. Para qualquer $p \in L$ seja Σ_p uma pequena linha complexa transversal a L passando por p . Então $f|_{\Sigma_p}$ é uma função holomorfa e $p \in \Sigma_p$ é um zero isolado de $f|_{\Sigma_p}$. Isto prova que L não é acumulada por outras componentes de $f^{-1}(0) \setminus \{0\}$, o que mostra ii). A fim de demonstrar iii) consideremos uma folha L de \mathfrak{F}_Z , $p \in L$, e Σ_p um pequeno disco transversal a L em $p \in L$. Suponhamos que $f(L) = c_0$. Então para $\epsilon > 0$ pequeno, $T_\epsilon(L) = \{z \in \mathbb{C}^2; |f(z) - c_0| < \epsilon\}$ é uma vizinhança de L , invariante por \mathfrak{F}_Z , e $D_p = T_\epsilon(L) \cap \Sigma_p$ é uma vizinhança de $p \in \Sigma_p$ homeomorfa a um disco. A cada caminho fechado γ em L com $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ está associada uma aplicação de holonomia $f_\gamma: D_p \rightarrow D_p$ com $f_\gamma(D_p) = D_p$. Pelo Lema de Schwartz f_γ é conjugado a uma rotação, i.e., existe $n > 0$ tal que $f_\gamma^n = \text{identidade}$. Isto prova iii).

Na outra direção temos o seguinte

(1.1) Teorema [10] - Seja Z um campo de vetores holomorfo, $Z(0) = 0$, $0 \in \mathbb{C}^2$, tal que:

- i) Numa vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^2$ todas as folhas de \mathfrak{F}_Z são fechadas em $U \setminus \{0\}$.
- ii) Somente um número finito de folhas se acumulam em $0 \in \mathbb{C}^2$.

Então Z admite uma integral primeira holomorfa definida perto de $0 \in \mathbb{C}^2$.

A demonstração deste teorema será dividida em três partes. Na primeira parte o teorema é demonstrado para campos de vetores com uma singularidade irredutível. Na segunda parte o teorema é demonstrado para campos de vetores desingularizados com uma explosão. Finalmente o caso geral é resolvido por indução no número de explosões requeridas para desingularizar Z .

Antes demonstraremos a seguinte

(1.2) Proposição Fundamental - Um germe \bar{h} de difeomorfismo holomorfo $h: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é periódico, i.e., existe $n > 0$ tal que $h^n = \text{identidade}$, se e somente se todas as órbitas de h são finitas numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$.

A demonstração será consequência dos seguintes lemas.

(1.3) Lema - Seja K uma vizinhança compacta conexa de $0 \in \mathbb{R}^n$ e h um difeomorfismo de K sobre $h(K) \subset \mathbb{R}^n$, $h(0) = 0$. Existe um ponto $x \in \partial K$ tal que o número de iterações de x por h contidas em K é infinito. Este número $\mu_K(x)$ é definido por $\mu_K(x) = \#\{n; h^n(x) \in K\}$.

Demonstração - Suponhamos por contradição que $\mu_K | \partial K < N < \infty$.

Os seguintes são subconjuntos abertos de K :

$$A = \{x \in K; \mu_K(x) < N\} \ni \partial K$$

$$B = \{x \in K; \mu_K(x) \geq N\} \ni 0.$$

Além disso, como $\mu_K \leq \mu_K$ A e B são disjuntos. Logo existe um ponto $x_0 \in K$ tal que $x_0 \notin A \cup B$; i.e. $\mu_K(x_0) \geq N > \mu_K(x_0)$. Logo existe n_0 tal que $y_0 = h^{n_0}(x_0) \in \partial K$. Temos então $\mu_K(y_0) = \mu_K(x_0) \geq N$ o que é uma contradição.

Para demonstrar a proposição será suficiente mostrar que se h é não periódico, então existe um sistema fundamental de vizinhanças h de $O \in \mathbb{C}$ tais que para qualquer elemento $U \in h$ o conjunto de pontos $x \in U$ onde a U -órbita é infinita é não enumerável e contém $O \in \mathbb{C}$ no seu fecho.

Seja D um disco compacto tal que $h|D$ é um difeomorfismo sobre $h(D)$. Denotemos por $P \subset D$ o conjunto de pontos periódicos de $h|D$, $F \subset D$ o dos pontos não periódicos de D -órbita finita e $I \subset D$ o conjunto dos pontos com D -órbita infinita.

Consideremos agora os compactos

$$A_0 = D, \quad A_1 = D \cap h^{-1}(D), \dots, \quad A_n = D \cap h^{-1}(D) \cap \dots \cap h^{-n}(D).$$

Seja C_n a componente conexa de A_n que contém $O \in \mathbb{C}$ e

$$C = \bigcap_{n \geq 0} C_n.$$

É claro que $C \subset I \cup P$.

(1.4) Lema - Suponhamos que C é enumerável. Então I é não enumerável.

Demonstração - Como C é enumerável, existe disco $D_r \subset D$ tal

que $C \cap \partial D_r = \emptyset$, i.e., existe $m > 0$ tal que $C_m \cap \partial D_r = \emptyset$.

Seja K uma vizinhança compacta, conexa, de C_m que não encontra as outras componentes conexas de A_m . Em particular $\partial K \cap A_m = \partial K \cap D \cap \dots \cap h^{-m}(D) = \emptyset$. Logo existe $x \in \partial K$ e $p < m$ tal que $h^p(x) \notin D$. Temos então $P \cap \partial K = \emptyset$.

Denotemos por P' , F' , I' , respectivamente o conjunto de pontos h -periódicos em K , não periódicos mas de K -órbita finita e aqueles de K -órbita infinita. Seja $P' = \bigcup_{n \geq 0} P'_n$ onde P'_n é o conjunto de pontos periódicos de período n . A fronteira $\partial P'_n$ é finita. Com efeito, se $x_0 \in \partial P'_n$ é um ponto de acumulação de pontos de $\partial P'_n$ existe uma vizinhança V de x_0 tal que $h^n(x) = x$ para todo $x \in V$, já que $V \cap P'_n \neq \emptyset$. Como a órbita de x_0 não intersecta ∂K temos que para V suficientemente pequeno $h^j(V) \subset \overset{\circ}{K}$ para $j = 0, 1, \dots, n-1$. Logo $V \subset \overset{\circ}{P}'_n$, i.e. $x_0 \in \overset{\circ}{P}'_n$, o que significa que os pontos de $\partial P'_n$ são isolados.

Daí decorre que a fronteira de P' é enumerável.

O compacto K pode ser decomposto da maneira seguinte

$$K = \overset{\circ}{P}' \cup F' \cup (I' \cup \partial P')$$

$\overset{\circ}{P}'$ é um aberto de \mathbb{C} já que por hipótese $P' \cap \partial K = \emptyset$. O conjunto F' é aberto em K e pode eventualmente intersectar ∂K . Se $F' = \emptyset$ então $\partial K \subset I' \cup \partial P'$ e como $\partial P'$ é enumerável e ∂K é não enumerável temos que I' é não enumerável. Se $F' \neq \emptyset$ e $\overset{\circ}{P}' = \emptyset$ segue-se do Lema 1 que para todo $r > 0$ suficientemente pequeno $I' \cup \partial P'$ corta o bordo ∂D_r , logo I' é não

enumerável. Finalmente se $\overset{\circ}{P}'$ e F' são não vazios, como eles são abertos disjuntos $K - \overset{\circ}{P}' \cup F'$ é não enumerável. Como $\partial P'$ é enumerável temos que I' é não enumerável.

(1.5) Lema - Suponhamos que C é não enumerável. Então I é não enumerável.

Demonstração - Pelo Lema (1.3) temos que para todos disco compacto $D_r \subset D$ de raio r ,

$$(P \cup I) \cap \partial D_r \neq \emptyset.$$

Logo $P \cup I$ é não enumerável.

Suponhamos por absurdo que I é enumerável. Necessariamente P será não enumerável e como C se escreve $C = (C \cap I) \cup (C \cap P)$ teremos $P \cap C$ não enumerável. Escrevamos

$$P \cap C = \bigcup_{n \geq 0} P_n$$

onde P_n é o conjunto de pontos periódicos de período n em $P \cap C$. Existe então n_0 tal que P_{n_0} é infinito com ponto de acumulação em C_{n_0} . Como h^{n_0} é holomorfa numa vizinhança aberta U_0 de C_{n_0} temos $h^{n_0}(z) = z$ para $z \in U_0$ o que contradiz a não periodicidade de h .

§2 - Integrais Primeiras de Singularidades Irredutíveis

Consideremos o primeiro caso irredutível

$$\dot{x} = \lambda_1 x + \dots$$

$$\dot{y} = \lambda_2 y + \dots$$

onde $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$ e $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}_+$.

Nós vimos no Capítulo III que esta equação diferencial pode ser escrita, por meio de uma mudança de coordenadas, como:

$$\dot{x} = x(\lambda_1 + \dots)$$

$$\dot{y} = y(\lambda_2 + \dots)$$

i.e. os eixos coordenados $S_1 = (y = 0)$, $S_2 = (x = 0)$ são invariantes.

Consideremos a variedade $\Gamma_1(\epsilon, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |x| = \epsilon, |y| < \delta\}$. Para $\epsilon, \delta > 0$ suficientemente pequenos $\Gamma_1(\epsilon, \delta)$ está contida no domínio de Z e é transversal às folhas de \mathfrak{F}_Z . A interseção das folhas de \mathfrak{F}_Z com $\Gamma_1(\epsilon, \delta)$ define uma folheação real de dimensão um \mathfrak{F}_Z^1 de $\Gamma_1(\epsilon, \delta)$. O círculo $\{(x, y) \in \Gamma_1(\epsilon, \delta); y = 0\}$ é uma folha desta folheação. A holonomia desta folha de \mathfrak{F}_Z^1 está representada para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, por um difeomorfismo $h_1: \Sigma_1(\delta) \rightarrow \Sigma_1(1)$ onde $\Sigma_1(r) = \{(x, y); |y| < r\}$. Como as folhas de \mathfrak{F}_Z são fechadas em $U \setminus \{0\}$, as folhas de \mathfrak{F}_Z^1 são curvas fechadas em $\Gamma_1(\epsilon, \delta)$, i.e. para qualquer $\bar{y} \in \Sigma_1(\delta)$ a h-órbita de \bar{y} é finita. Pela Proposição Fundamental existe $n > 0$ tal que $h^n = \text{identidade}$; i.e. h é analiticamente conju-

gado a uma rotação em \mathbb{C} . Pela Proposição 2.9 do Capítulo III a folheação \mathfrak{F}_Z também é linearizável, i.e., existe uma mudança analítica de coordenadas tal que em novas coordenadas (x,y) \mathfrak{F}_Z é definida pela equação diferencial

$$\dot{x} = \lambda_1 x$$

$$\dot{y} = \lambda_2 y$$

Como a folheação \mathfrak{F}_Z só possui um número finito de folhas se acumulando em $0 \in \mathbb{C}^2$ temos que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_-$.

O outro caso irredutível é a singularidade tipo sela-nó que pode ser escrita na forma normal

$$\dot{x} = x^{p+1}$$

$$\dot{y} = y + xA(x,y)$$

módulo multiplicação por uma função holomorfa não nula em $0 \in \mathbb{C}^2$. A subvariedade $x = 0$ é invariante por esta equação diferencial. Sua holonomia tem a forma

$$h(x) = x + 2\pi x^{p+1}$$

Da estrutura local deste difeomorfismo (veja Capítulo III) segue-se que qualquer folha fora do eixo $(x = 0)$ e próxima ao mesmo se acumula em $(x = 0)$. Isto significa que Z não admite integral primeira.

§3 - Continuação Analítica de Integrais Primeiras

Consideremos um campo de vetores Z definido no polidisco $U = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2; |x| < 1, |y| < 1\}$ com um ponto singular isolado $0 \in \mathbb{C}^2$. Seja $(\tilde{U}, \pi, \rho, \tilde{\mathfrak{F}})$ a primeira explosão de Z em $0 \in \mathbb{C}^2$. Suponhamos que todas as singularidades de $\tilde{\mathfrak{F}}$ estão contidas na carta local (x,t) onde $t = \frac{y}{x}$ e finalmente suponhamos que $0 \in \mathbb{C}^2$ não é uma singularidade dicrítica.

Existe uma projeção natural $\tilde{\pi}: \tilde{U} \rightarrow \rho$ que nesta carta local se lê $\tilde{\pi}(x,t) = t$. Para qualquer $q \in \rho$ denotemos por \mathbb{C}_q a fibra $\tilde{\pi}^{-1}(q) \simeq \mathbb{C}$.

Dado um subconjunto aberto $W \subset \rho - \text{Sing}(\tilde{\mathfrak{F}})$ e $q \in W$ denotamos por $H_W(\tilde{\mathfrak{F}}, q)$ o grupo de holonomia de W em q da folheação $\tilde{\mathfrak{F}}$ restrita a $\tilde{\pi}^{-1}(W)$. Este grupo é definido da maneira seguinte: Dado um caminho $\gamma: [0,1] \rightarrow W$ com $\gamma(0) = q = (0, t_0)$, o seu levantamento com origem em $(x, t_0) \in \tilde{\pi}^{-1}(q)$ é um caminho $\tilde{\gamma}_x: [0,1] \rightarrow \tilde{U}$ com $\tilde{\gamma}_x(0) = (x, t_0)$, contido na folha de $\tilde{\mathfrak{F}}$ que passa por (x, t_0) e tal que $\tilde{\pi}(\tilde{\gamma}(s)) = \gamma(s)$ para todo $s \in [0,1]$. Isto nos permite definir uma aplicação de holonomia de γ , $f_\gamma: \mathbb{C}_q \rightarrow \mathbb{C}_{q'}$, $q' = \gamma(1)$, pondo $f_\gamma(x, t_0) = \tilde{\gamma}_x(1)$ para x suficientemente pequeno. Deixamos para o leitor a verificação de que o germe de f_γ em $q \in \mathbb{C}_q$ é invariante por homotopias de γ com extremidades fixadas.

Supondo agora que $q' = q$ induzimos uma aplicação natural

$$\pi_1(W, q) \longrightarrow \text{Dif}(\mathbb{C}, 0)$$

entre o grupo fundamental de W em q e o grupo de germes de difeomorfismos de \mathbb{C} em $0 \in \mathbb{C}$, da maneira seguinte

$$[\gamma] \mapsto \text{germe de } f_\gamma \text{ em } q \in \mathbb{C}_q$$

onde identificamos (\mathbb{C}_q, q) com $(\mathbb{C}, 0)$.

É evidente que esta aplicação é um homomorfismo de grupo. A imagem de $\pi_1(W, q)$ por esta aplicação é chamada o grupo de homonomia de W em q da folheação $\tilde{\pi}^{-1}(W)$ e denotado por $H_W(\tilde{\pi}, q)$.

Um germe de função $g: (\mathbb{C}_q, q) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é chamado invariante por $H_W(\tilde{\pi}, q)$ se para cada $h \in \text{Dif}(\mathbb{C}_q, q)$ germe de algum f_γ em q temos $g \circ h = g$.

(3.1) Proposição - Seja $W \subset P$ um aberto de $P\text{-sing}(\tilde{\pi})$, $q \in W$ e $\bar{g}: (\mathbb{C}_q, q) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ o germe de uma função holomorfa g invariante por $H_W(\tilde{\pi}, q)$. Então g se estende unicamente a uma integral primeira de $\tilde{\pi}$ numa vizinhança de W .

Demonstração - A extensão procede por prolongamento analítico de g às outras fibras de $\tilde{\pi}$ ao longo das folhas de $\tilde{\pi}$.

Dado qualquer $q' \in W$ consideremos um caminho $\tau: [0, 1] \rightarrow W$ com $\tau(0) = q$, $\tau(1) = q'$; definimos $g_\tau: \mathbb{C}_{q'} \rightarrow \mathbb{C}$ próximo de q' por $g_\tau = g \circ f_{\tau^{-1}}$. Esta extensão independe do caminho escolhido entre q e q' . Com efeito, se $\delta: [0, 1] \rightarrow W$ é um outro caminho com $\delta(0) = q$, $\delta(1) = q'$ temos

$$g_\tau \circ g_\delta^{-1} = g \circ (f_{\tau-1} \circ f_\delta) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{identidade}$$

pela invariância de g por $H_W(\tilde{X}, q)$.

Logo podemos escrever $g_{q_1} = g_\tau: \mathbb{C}_{q_1} \rightarrow \mathbb{C}$. Como sempre podemos supor que W está contido na carta local (x, t) de \mathcal{P} a aplicação $G(x, t) = g_{(0, t)}(x)$ está bem definida numa vizinhança de W , é holomorfa por definição, e é constante ao longo das folhas de $\tilde{X}/\pi^{-1}(W)$ i.e. ela é uma integral primeira de \tilde{X} . A unicidade é evidente.

Suponhamos agora que $\text{Sing}(\tilde{X}) = \{q_1, \dots, q_r\} \subset \mathcal{P}$ e que para qualquer $j = 1, \dots, r$ existe uma integral primeira g_j de \tilde{X} definida numa vizinhança de q_j . Fixado $q_0 \in \mathcal{P} - \text{Sing}(\tilde{X})$ e para qualquer $j = 1, \dots, r$ seja W_j um subconjunto aberto de \mathcal{P} , simplesmente conexo, tal que entre todos os elementos de $\{q_0, q_1, \dots, q_r\}$ somente q_0 e q_j pertencem a W_j . Pela proposição anterior podemos supor que g_j é uma integral primeira holomorfa de \tilde{X} definida numa vizinhança de W_j . Seja g_j^0 a restrição de g_j a \mathbb{C}_{q_0} . É claro que g_j^0 é invariante pela ação do grupo $H_{W_j}(\tilde{X}, q_0)$ onde $W_j' = W_j - \{q_j\}$. Além disso, a holonomia de $\mathcal{P} - \text{Sing}(\tilde{X})$ é gerada pela união dos grupos $H_{W_j}(\tilde{X}, q_0)$, $j=1, \dots, r$. Para encontrar uma integral primeira de Z será suficiente encontrar uma integral primeira de \tilde{X} i.e. uma função holomorfa definida em \mathbb{C}_{q_0} invariante pelos grupos $H_{W_j}(\tilde{X}, q_0)$.

Definamos antes o grupo de invariância de g_j^0 , $H(g_j^0)$,

como o conjunto de difeomorfismos $h \in \text{Dif}(\mathbb{C}, q_0)$ tais que $g_j^0 \circ h = g_j^0$. É evidente que $H_{W^1}(\tilde{\mathcal{X}}, q_0) \subset H(g_j^0)$. É fácil ver que o grupo $H(g_j^0)$ é finito. Definimos $H(g_1, \dots, g_r; q_0) \subset \text{Dif}(\mathbb{C}, q_0)$ como o grupo gerado por todos os $H(g_j)$ $j = 1, \dots, r$.

(3.2) Proposição - Se $H(g_1, \dots, g_r; q_0)$ é finito, então Z admite uma integral primeira holomorfa.

Demonstração - Pelo Lema fundamental $H(g_1, \dots, g_r; q_0)$ é periódico i.e. podemos escolher uma coordenada x tal que este grupo é gerado pela rotação

$$\rho_\nu(x) = e^{2\pi i/\nu} \cdot x$$

onde ν é a ordem de $H(g_1, \dots, g_r; q_0)$.

Os subgrupos $H(g_j^0)$ são gerados pelas rotações ρ_{ν_j} $j = 1, \dots, r$ e $\nu = \text{mmc}(\nu_1, \dots, \nu_r)$. É claro que temos

$$g_j^0 \circ \rho_{\nu_j} = g_j^0.$$

Dai segue-se que

$$g_j^0(x) = \sum_{k \geq 1} b_k x^{k\nu_j} \quad b_1 \neq 0.$$

Então $g_j^0 = \iota_j(x^{\nu_j})$ onde $\iota_j \in \text{Dif}(\mathbb{C}, 0)$, $\iota_j'(0) = b_1$.

A função x^ν é invariante por $H(g_1, \dots, g_r; q_0)$ e assim invariante pelo grupo de holonomia $H_{W''}(\tilde{\mathcal{X}}, q_0)$ onde $W'' = \mathbb{P} - \{q_1, \dots, q_r\}$. Logo ela se estende a uma vizinhança de W'' como uma integral

primeira \tilde{F} de $\tilde{\mathfrak{F}}$. Por outro lado,

$$x^\nu = (\iota_j^{-1} \circ g_j^0)^{m_j} \quad \text{onde} \quad m_j \nu_j = \nu.$$

Logo \tilde{F} coincide com $(\iota_j^{-1} \circ g_j^0)^{m_j}$ perto de q_j , $j = 1, \dots, r$.

e assim \tilde{F} se estende a uma integral primeira F de $\tilde{\mathfrak{F}}$ numa vizinhança de \mathcal{P} . Finalmente, $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ definida por $f(\pi(z)) = F(z)$ é uma integral primeira de Z .

Observação - Definimos $H(f; q_0) = H(F|_{\mathbb{C}_{q_0}})$. É claro que por construção nós temos $H(f; q_0) = H(g_1, \dots, g_r; q_0)$. Além disso, se $g: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ é outra integral primeira tal que $H(g; q_0) = H(g_1, \dots, g_r; q_0)$ temos, na carta (x, t) , $g(\pi(x, t_0)) = \iota(x^\nu)$ onde $q_0 = (0, t_0)$ e $\iota \in \text{Dif}(\mathbb{C}, 0)$. Logo $G = \iota^{-1} \circ g \circ \pi$ coincide com F em \mathbb{C}_{q_0} e conseqüentemente $F = G$ numa vizinhança de \mathcal{P} . Daí decorre que $f = \iota^{-1} \circ g$. Isto significa que a integral primeira f é única a menos de composição por um difeomorfismo toda vez que se tenha $H(f; q_0) = H(g_1, \dots, g_r; q_0)$. Isto acontece por exemplo quando a integral primeira f não é uma potência.

§4 - Demonstração do Teorema Principal

A demonstração é por indução no número de explosões $N(Z)$ necessárias para desingularizar Z . Vimos no §2 que se $N(Z) = 0$ e \mathfrak{F}_Z satisfaz as hipóteses do teorema, então Z admite uma integral primeira.

Suponhamos agora que $N(Z) > 0$ e consideremos a explosão $(\tilde{U}, \pi, \rho, \tilde{\mathfrak{F}})$ de Z em $0 \in \mathbb{C}^2$. Seja $\{q_1, \dots, q_p\} \subset \rho$ o conjunto de pontos singulares de $\tilde{\mathfrak{F}}$. Numa vizinhança de cada ponto q_j a folheação $\tilde{\mathfrak{F}}$ satisfaz as hipóteses (i) e (ii) do teorema, i.e. numa vizinhança U_j de q_j temos que todas as folhas de $\tilde{\mathfrak{F}}/U_j$ são fechadas em $U_j \setminus \{q_j\}$ e somente um número finito delas se acumula em q_j . Pela hipótese de indução $\tilde{\mathfrak{F}}/U_j$ admite uma integral primeira g_j definida numa vizinhança $\tilde{U}_j \subset U_j$ de q_j . É suficiente agora demonstrar que o grupo

$$H = H(g_1, \dots, g_p; q_0) \subset \text{Dif}(\mathbb{C}, q_0)$$

é finito.

Como os grupos $H(g_j^0)$, onde $g_j^0 = g_j / \mathbb{C}_{q_0}$, são finitos, basta mostrar que qualquer elemento de H é periódico, já que se isto acontece então H é comutativo e logo finito. Com efeito, para elementos $g, h \in H$ quaisquer, nós temos que

$$C(x) = h \circ g \circ h^{-1} \circ g^{-1}(x) = x + a_\nu x^\nu + \dots$$

e como $C^n(x) = x$ para algum $n > 0$, temos $a_\nu = 0$. Para qualquer $j = 1, \dots, p$ seja h_j o gerador de $H(g_j^0)$. Então existe uma vizinhança aberta $V_j(q_0)$ de q_0 em $\tilde{\pi}^{-1}(q_0) \cap \tilde{U}$ invariante por h_j , tal que se $x \in V_j(q_0)$ então $h_j(x)$ e x pertencem à mesma folha de $\tilde{\mathfrak{F}}$. Seja $h \in H$.

$$h = h_{j_1} \circ \dots \circ h_{j_k} \quad 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq p.$$

h está bem definida em $V(q_0) = \bigcap_{r=1}^k V_{j_r}(q_0)$. Se $x \in V(q_0)$ então x e $h(x)$ pertencem à mesma folha \tilde{L}_x de $\tilde{\mathfrak{F}}$. Logo a $V(q_0)$ -órbita de x por H , $\mathcal{O}_H(x)$, está contida em \tilde{L}_x . Pelo lema fundamental é suficiente demonstrar que o conjunto

$$A = \{x \in V(q_0); \text{cardinalidade de } \mathcal{O}_H(x) = \infty\}$$

é enumerável.

Como as folhas de \mathfrak{F}_Z são fechadas em $U \setminus \{0\}$ as folhas $L'_x = \pi^{-1}(L_{\pi(x)})$ são fechadas em $\tilde{U} \setminus \mathcal{P}$. Seja $x \in V(q_0)$, então a folha L'_x é um subconjunto analítico de $\tilde{U} \setminus \mathcal{P}$ e assim sua interseção com $\tilde{\pi}^{-1}(q_0)$ é finita e no máximo enumerável se L'_x se acumula em q_0 . Logo A é enumerável.

CAPÍTULO VI

O TEOREMA DA SEPARATRIZ

§1 - Introdução

É natural se perguntar se existem soluções da equação diferencial

$$\frac{dz}{dT} = Z(z), \quad Z(0) = 0$$

que tendem a $0 \in \mathbb{C}^2$. Este problema foi proposto e estudado pela primeira vez por C.A. Briot e J.C. Bouquet em J.Ec.Polyt.Cah. 36 (1856) p. 133 (ver também, Ince Ord.Diff.Eq. p. 297). Eles mostraram em diversos casos particulares que existem soluções tendendo assintoticamente a $0 \in \mathbb{C}^2$ em alguma direção. Este problema foi também considerado por H. Dulac de um outro ponto de vista. Dada a equação diferencial com parte linear não nula ele se propôs determinar o conjunto de soluções que tendem assintoticamente a $0 \in \mathbb{C}^2$; [5]. Neste capítulo demonstraremos o seguinte

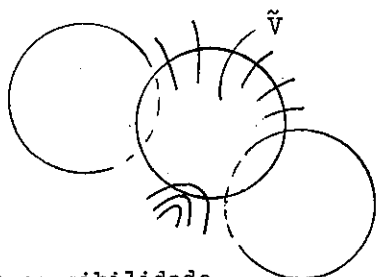
(1.1) Teorema [3] - Consideremos a equação diferencial

$$\frac{dz}{dT} = Z(z), \quad z \in \mathbb{C}^2$$

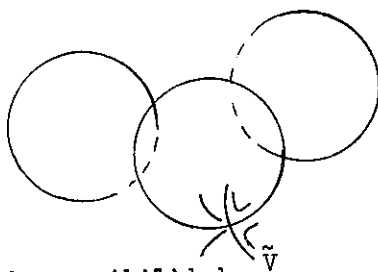
com uma singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^2$. Existe uma subvariedade analítica complexa de dimensão um, passando por $0 \in \mathbb{C}^2$, invariante por Z numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$.

Isto significa que existe uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^2$ e uma curva complexa $V \subset U$, integral da equação diferencial em U tal que $\bar{V} = V \cup \{0\}$ e \bar{V} é um conjunto analítico complexo.

Quando V existe ela pode ser detectada na resolução da folheação. Esta resolução contém em particular a resolução \tilde{V} de V e duas possibilidades se apresentam. A primeira é que \tilde{V} pertence a uma componente dicrítica. Neste caso V possuirá uma vizinhança que é formada de curvas analíticas integrais. A segunda possibilidade é que \tilde{V} seja uma curva lisa integral passando por um ponto singular.



1ª possibilidade



2ª possibilidade

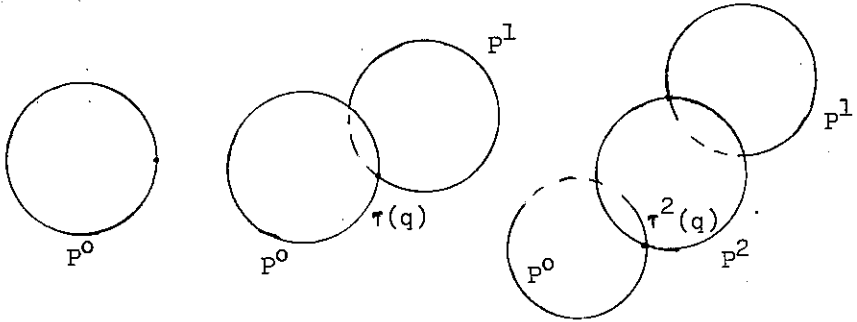
Reciprocamente, para mostrar a existência de uma tal curva integral utilizaremos a resolução de \mathbb{F}_Z . Se esta resolução apresenta uma componente dicrítica então qualquer integral desta componente, transversal ao divisor, se projetará numa curva analítica, passando por $0 \in \mathbb{C}^2$, invariante por Z . O problema então fica reduzido a mostrar que caso não existam componentes dicríticas na resolução de \mathbb{F}_Z , existe um ponto singular que possui uma variedade lisa transversal ao divisor. A projeção da resolução levará esta variedade sobre uma curva analítica, invariante por Z , even

tualmente singular em $0 \in \mathbb{C}^2$. A existência deste ponto singular na resolução será demonstrada utilizando-se uma teoria de resíduos associada a estas folheações. Isto será o objeto de estudo da próxima seção.

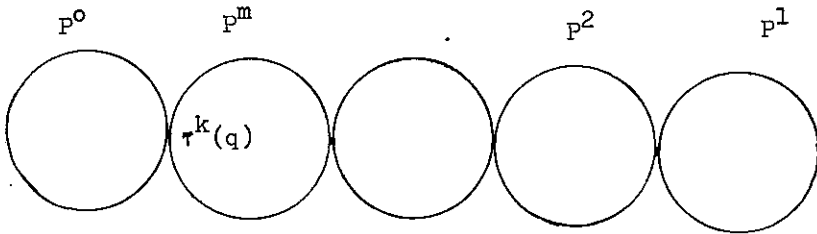
§2 - Ordenando a Resolução de \mathfrak{F}_Z

Suponhamos que Z está definido numa vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^2$ e seja $(U^{(1)}, \pi^{(1)}, \rho^{(1)}, \mathfrak{F}^{(1)})$ a primeira explosão de Z . Lembremos que $\pi^{(1)}: U^{(1)} \rightarrow U$ envia $\rho^{(1)}$ a $0 \in U$ e é um difeomorfismo de $U^{(1)} \setminus \rho^{(1)}$ sobre $U \setminus \{0\}$. Além disso a folheação $\mathfrak{F}^{(1)}$ tem singularidades isoladas e é difeomorfa via $\pi^{(1)}|_{U^{(1)} \setminus \rho^{(1)}}$ à folheação \mathfrak{F}_Z de $U \setminus \{0\}$.

A próxima etapa no processo de resolução será definir $(U^{(2)}, \pi^{(2)}, \rho^{(2)}, \mathfrak{F}^{(2)})$ da maneira seguinte: Para cada singularidade redutível q de $\mathfrak{F}^{(1)}$ na linha projetiva $P = \rho^{(1)}$ definimos uma cadeia linear $C(q)$ com origem em $q \in P$ i.e. uma sequência de linhas projetivas $(P^{(j)})_{j=0}^m$ onde $P^{(0)} = P$ obtidas assim: O elemento $P^{(1)}$ é o divisor criado por explosão do ponto q . Se $\pi_q: U_q^{(1)} \rightarrow U^{(1)}$ é a projeção da explosão em $q \in P$ então $\pi_q^{-1}(q) = P^{(1)}$. A restrição de π_q a $\pi_q^{-1}(P \setminus \{q\})$ é um isomorfismo sobre $P \setminus \{q\}$. A fim de evitar uma notação carregada nós denotaremos por P , ainda, o conjunto $\pi_q^{-1}(P \setminus \{q\})$. É claro que $P^{(0)}$ e $P^{(1)}$ se intersectam transversalmente num único ponto que é uma singularidade $\tau(q)$.



Suponhamos já definidos P^1, \dots, P^k , $k \geq 1$. Se alguma esquina $P \cap P^j$ ou $P^i \cap P^j$ é redutível, introduzimos P^{k+1} fazendo uma explosão nessa esquina. O teorema de resolução nos garante que existe um m , menor entre todos com a seguinte propriedade: todas as esquinas $P^i \cap P^j \neq \emptyset$ $0 \leq i, j \leq m$ são irredutíveis. Após reordenação de índices podemos supor que a cadeia $C(q) = (P^j)_{j=0}^m$ tem a seguinte propriedade $P^j \cap P^{j+1} \neq \emptyset$ para $j = 1, \dots, m-1$ e $P^m \cap P^0 \neq \emptyset$. Nesta cadeia introduzimos a ordem $P^0 > P^m > P^{m-1} > \dots > P^1$.



As singularidades $q, \tau(q), \tau(\tau(q)), \dots$ em P serão denotadas por $q = \tau^0(q), \tau(q), \tau^2(q), \dots$. Se $\tau^k(q)$ é irredutível mas $\tau^{k-1}(q)$ é redutível nós diremos que k é a ordem de $C(q)$. A ordem de $C(q)$ é assim o número de vezes que o ponto $q \in P$ foi

explodido até obter a cadeia $C(q)$. Se q é irreduzível a sua ordem é zero.

Aplicamos a mesma construção para todas as singularidades redutíveis de $\mathbb{F}^{(1)}$ em $\rho^{(1)}$. Usando a definição da explosão em cada etapa obtemos facilmente $U^{(2)}, \pi_1^{(2)}: U^{(2)} \rightarrow U^{(1)}$ sobre $U^{(1)}$. A composição $\pi^{(2)} = \pi_1^{(2)} \circ \pi^{(1)}: U^{(2)} \rightarrow U$ é a projeção e o divisor $\rho^{(2)}$ é a união de $(\pi_1^{(2)})^{-1}(\rho^{(1)})$.

Mais geralmente, tendo já definido $(U^{(t)}, \pi^{(t)}, \rho^{(t)}, \mathbb{F}^{(t)})$, $t \geq 1$, tal que:

- i) $U^{(t)}$ é uma variedade complexa com um subconjunto $\rho^{(t)}$, o t -divisor de Z , que é uma união finita de variedades complexas, todas elas isomorfas à linha projetiva. Além disso duas destas variedades intersectam-se no máximo num ponto de esquina e esta interseção é transversal.
- ii) Uma projeção $\pi^{(t)}: U^{(t)} \rightarrow U$ tal que $\pi^{(t)}(\rho^{(t)}) = 0$ e tal que é um isomorfismo entre $U^{(t)} \setminus \rho^{(t)}$ e $U \setminus \{0\}$.
- iii) Uma folheação $\mathbb{F}^{(t)}$ em $U^{(t)}$ que coincide fora de $\rho^{(t)}$ com $(\pi^{(t)})^* \mathbb{F}_Z$ e tem um número finito de singularidades em $\rho^{(t)}$; além disso todas as esquinas são singularidades irreduzíveis de $\mathbb{F}^{(t)}$.

Neste ponto definimos $U^{(t+1)}, \rho^{(t+1)}, \pi^{(t+1)}$ e $\mathbb{F}^{(t+1)}$ acrescentando como antes cadeias lineares a todos os pontos redutíveis de $\mathbb{F}^{(t)}$ em $\rho^{(t)}$. Esta seqüência de explosões nos dá uma variedade complexa $U^{(t+1)}$ e projeção $\pi^{(t+1)}: U^{(t+1)} \rightarrow U^{(t)}$

que é sobrejetiva. A composição $\pi^{(t+1)} = \pi_t^{(t+1)} \circ \pi^{(t)}: U^{(t+1)} \rightarrow U$ é a projeção e o $(t+1)$ -divisor $\rho^{(t+1)}$ é a união de $(\pi_t^{(t+1)})^{-1}(\rho^{(t)})$ com todas as linhas projetivas nas cadeias lineares enxertadas em $\rho^{(t)}$. Finalmente $\mathfrak{F}^{(t+1)}$ provém de $\mathfrak{F}^{(t)}$ pela sequência de explosões associadas ao enxerto de todas as cadeias lineares. As propriedades (i)-(iii) para os objetos definidos é imediata.

§3 - Índices de Subvariedades Integrais

Consideremos a seguinte situação: Uma variedade complexa de dimensão dois M , uma folheação holomorfa \mathfrak{F} com singularidades isoladas e uma curva lisa S , integral de \mathfrak{F} , contendo singularidades. Por exemplo na explosão de um ponto singular $0 \in U \subset \mathbb{C}^2$ de uma folheação \mathcal{G} , $\mathfrak{F} = \tilde{\mathcal{G}}$, $M = \tilde{U}$ e $S = \rho$ é o divisor.

Seja $q \in S$ um ponto singular de \mathfrak{F} e (x,y) um sistema de coordenadas em torno de q , tais que $x(q) = y(q) = 0$ e $S = (y = 0)$ localmente. Neste sistema de coordenadas \mathfrak{F} é dada pelas integrais de um campo de vetores

$$A(x,y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x,y) \frac{\partial}{\partial y}$$

com $A(0,0) = B(0,0) = 0$ e $B(x,0) \neq 0$.

(3.1) Definição - O índice de \mathfrak{F} relativo a S em q é

$$i_q(\mathfrak{F}, S) = \text{Res}_{x=0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{A} \right) (x,0) dx.$$

É fácil ver que este número não depende do sistema de coord

denadas utilizado.

(3.2) Exemplos

1) Suponhamos que q é um ponto singular de uma equação irredutível:

$$\dot{x} = \lambda_1 x + \dots$$

$$\dot{y} = \lambda_2 y + \dots \quad \lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$$

na vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$.

Pela Proposição 2.7, Capítulo III, existem curvas invariantes S_1, S_2 passando por $0 \in \mathbb{C}^2$ tangentes aos auto-espacos de λ_1 e λ_2 respectivamente. Então $i_q(\mathfrak{F}, S_1) = \lambda_2/\lambda_1$ e $i_q(\mathfrak{F}, S_2) = \lambda_1/\lambda_2$.

2) No outro caso irredutível com forma normal

$$\dot{x} = \lambda_1 x + A(x, y), \quad A \text{ de multiplicidade em } (0,0) \geq 2$$

$$\dot{y} = y^{p+1}, \quad p \geq 1$$

existe uma variedade invariante $S_1 = (y = 0)$ tangente ao auto-espaco correspondente a λ_1 . Verifica-se sem dificuldade que $i_q(\mathfrak{F}, S_1) = 0$.

Vejamos como este índice se comporta por explosões. Suponhamos que $(U^{(1)}, \pi^{(1)}, \rho^{(1)}, \mathfrak{F}^{(1)})$ é a explosão de \mathfrak{F} em p .

Denotemos $\overline{\pi^{(1)^{-1}}(S \setminus \{p\})}$ de novo por S e seja $q \in S \cap U^{(1)}$.

(3.3) Proposição - $i_q(\mathfrak{F}^{(1)}, S) = i_p(\mathfrak{F}, S) - 1$.

Demonstração - Suponhamos que a folheação \mathfrak{F} é induzida por uma 1-forma holomorfa η . Seja $\phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (U, p)$ uma carta local em torno de p tal que $\phi(0) = p$ e $\{\phi(x, 0); x \in \mathbb{C}\} \subset S$. Temos em tão

$$\{\phi^* \eta\}(x, y) = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

$$A(0, 0) = B(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad B(x, 0) = 0.$$

Existe uma carta local $\tilde{\phi}: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (U^{(1)}, q)$ tal que $\pi^{(1)} \circ \tilde{\phi} = \phi \circ T$. A forma $\pi^* \eta$ se escreve na vizinhança de $q \in U^{(1)}$ da maneira seguinte

$$(T^* \phi^* \eta)(x, t) = (A(x, xt) + tB(x, xt)) dx + xB(x, xt) dt.$$

Após eliminação do divisor comum dos coeficientes obtemos a forma

$$\frac{1}{x} (A(x, xt) + tB(x, xt)) dx + B(x, xt) dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned} i_q(\mathfrak{F}^{(1)}, S) &= -\operatorname{Res}_{x=0} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{x} (A(x, xt) + tB(x, xt)) \Big|_{t=0}}{B(x, 0)} \\ &= -\operatorname{Res}_{x=0} \frac{\frac{\partial A}{\partial y}(x, 0) + \frac{B(x, 0)}{x}}{B(x, 0)} = -\operatorname{Res}_{x=0} \frac{\frac{\partial A}{\partial y}(x, 0)}{B(x, 0)} - 1 \\ &= i_p(\mathfrak{F}, S) - 1. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que η é uma 1-forma em M induzindo uma folheação com singularidade isolada $p \in M$. Ao fazer uma explosão em $p \in M$ obtemos como divisor uma linha projetiva P_p e uma folheação $\mathfrak{F}^{(1)}$ definida perto de P_p com singularidades q_1, q_2, \dots, q_r .

$$(3.4) \text{ Proposição - } \sum_{j=1}^r i_{q_j}(\mathfrak{F}^{(1)}, P_p) = -1.$$

Demonstração - Seja $\eta_v = A_v(x, y)dx + B_v(x, y)dy$ o primeiro jato não nulo de η em p . Consideremos em $U^{(1)}$ a carta local (x, t) com $y = tx$. Suponhamos que esta carta local contém todos os pontos singulares de $\mathfrak{F}^{(1)}$ e sejam t_1, \dots, t_r as t -coordenadas dos pontos q_1, \dots, q_r .

A folheação $\mathfrak{F}^{(1)}$ nesta carta é dada por

$$\tilde{\eta} = (P(1, t) + xQ(x, t))dx + x(B_v(1, t) + xR(x, t))dt$$

onde $P(1, t) = A_v(1, t) + tB_v(1, t)$.

As raízes de $P(1, t)$ são t_1, \dots, t_r e pelo teorema dos resíduos

$$\sum_{j=1}^r \operatorname{Res}_{t=t_j} \frac{B_v(1, t)}{P(1, t)} = 1$$

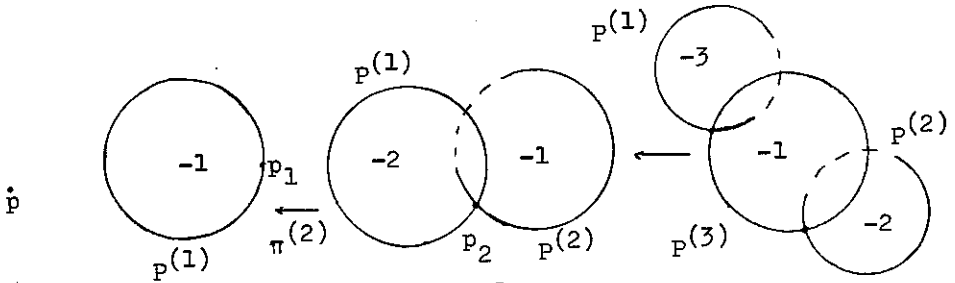
Por outro lado

$$i_{q_j}(\mathfrak{F}^{(1)}, P_p) = - \operatorname{Res}_{t=t_j} \frac{B_v(1, t)}{P(1, t)}$$

logo,

$$\sum_{j=1}^r i_{q_j}(\mathfrak{F}^{(1)}, P_p) = -1.$$

Consideremos agora um ponto arbitrário $p_1 \in P_p$. Uma nova explosão $\pi^{(2)}$ no ponto p_1 terá como divisor a linha projetiva $P^{(2)}$. Como no complementar de $P^{(2)}$, a aplicação $\pi^{(2)}$ é um di-



feomorfismo podemos denotar $\pi^{(2)^{-1}}(P^{(1)})$ novamente por $P^{(1)}$.

Esta será agora um mergulho diferente da linha projetiva. Seja $\mathfrak{F}^{(2)}$ a folheação induzida por $\pi^{(2)*}\mathfrak{F}^{(1)}$. Então a soma

$\sum_{q \in \text{Sing}(\mathfrak{F}^{(2)})} i_q(\mathfrak{F}^{(2)}, P^{(1)})$ onde q varia no conjunto de pontos singulares de $\mathfrak{F}^{(2)}$ em $P^{(1)}$ é agora -2 (Proposição (3.3)).

Mais geralmente pode ser demonstrado que se P é uma linha proje-tiva mergulhada numa variedade complexa de dimensão dois M e \mathfrak{F} é uma folheação por curvas complexas de uma vizinhança de P tal que (i) $\text{Sing}(\mathfrak{F}) = \{q_1, \dots, q_r\} \subset P$ e (ii) $P \setminus \{q_1, \dots, q_r\}$ é uma folha de \mathfrak{F} , então a soma $c(P) = \sum_{j=1}^r i_{q_j}(\mathfrak{F}; P)$ é um inteiro que só depende do mergulho de P , e coincide com o número de Euler do fibrado normal a P em M .

Consideremos agora uma cadeia linear $C(q) = (P_j)_{j=0}^m$ com origem num ponto singular $q \in P_0$ da folheação $\mathfrak{F}^{(t)}$. Suponhamos que $P_0 > P_m > \dots > P_1$. Pelas Proposições (3.3) e (3.4) para cada $j = 1, \dots, m$ a soma

$$C(P_j) = \sum_{p \in \text{Sing } \mathfrak{X}(t)} i_p(\mathfrak{X}(t), P_j)$$

é um inteiro negativo definido como a classe de P_j . Escrevamos $C(P_j) = -k_j$ e suponhamos que a ordem de $C(q)$ é k . Lembremos que a ordem k é o número de vezes que o ponto q foi explodido no processo de criação da cadeia linear. Temos então que a seqüência $k \cdot k_m \dots k_1$ é obtida da maneira seguinte. Começemos com a seqüência de dois elementos $1 \cdot 1$ que correspondem a explodir q uma vez e ao fato que a classe da linha projetiva criada na explosão é -1 . Suponhamos agora que temos a cadeia $(Q_j)_{j=0}^s$ onde $Q_0 > Q_s > \dots > Q_1$ e a seqüência $a_0 \cdot a_s \dots a_1$ onde a_0 é o número de vezes que $q = Q_0 \cap Q_s$ foi explodido e $-a_j =$ classe de Q_j $j = 1, \dots, s$. Temos duas possibilidades. Na primeira o ponto q é explodido mais uma vez e a seqüência se transforma em $a_0 + 1 \cdot 1 \cdot a_s + 1 \cdot a_{s-1} \dots a_1$, na segunda outra esquina digamos $Q_j \cap Q_{j+1}$, $j < s$ é explodida e a nova seqüência será $a_0 \cdot a_s \dots a_{j+1} + 1 \cdot 1 \cdot a_j + 1 \dots a_1$. Este processo termina quando pela primeira vez todas as esquinas aparecem como singularidades irreduzíveis. Neste caso a seqüência será $k \cdot k_m \dots k_1$.

(3.5) Proposição - $k = [k_m, \dots, k_1]$ onde

$$[k_m, \dots, k_1] = \frac{1}{k_m - \frac{1}{k_{m-1} - \frac{1}{\dots - \frac{1}{k_2 - \frac{1}{k_1}}}}}$$

Demonstração - Primeiro mostraremos que a fração acima está bem definida. De fato mostraremos mais, isto é, que

$$[k_j, \dots, k_h] > 0 \quad \text{se} \quad 1 \leq h < j \leq m \quad \text{e} \quad m \geq 2.$$

Isto é claro para $m=2$ já que $k_0 \cdot k_2 \cdot k_1 = 2 \cdot 1 \cdot 2$. Suponhamos agora que é verdade também para a seqüência $a_0 \cdot a_s \cdot a_{s-1} \dots a_1$ e procedamos a mostrar para aquelas que se originam desta.

1º caso. A seqüência é $(a_0+1) \cdot 1 \cdot (a_s+1) \cdot a_{s+1} \dots a_1$. Nós temos $[a_s, \dots, a_h] > 0$. Daí $a_{s+1} - [a_{s-1}, \dots, a_h] > 1$, logo $[a_{s+1}, a_{s-1}, \dots, a_h] > 0$ e $1 - (a_{s+1} - [a_{s-1}, \dots, a_h])^{-1} > 0$. Assim $[1, a_{s+1}, a_{s-1}, \dots, a_1] > 0$.

2º caso. A seqüência é $a_0 \cdot a_s \dots (a_{i+1}+1) \cdot 1 \cdot (a_i+1) \dots a_1$. Como antes $[a_{i+1}, a_{i-1}, \dots, a_h] > 0$ e $[1, a_{i+1}, a_{i-1}, \dots, a_h] > 0$. Temos

$$\begin{aligned} a_{i+1} - \frac{1}{a_i - [a_{i-1}, \dots, a_h]} &= a_{i+1} + 1 - \left(1 + \frac{1}{a_i - [a_{i-1}, \dots, a_h]}\right) \\ &= a_{i+1} + 1 - [1, a_i + 1, a_{i-1}, \dots, a_h]. \end{aligned}$$

Logo, $[a_{i+1}, a_i, \dots, a_h] = [a_{i+1} + 1, 1, a_i + 1, \dots, a_h]$ e

$[a_j, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_h] = [a_j, \dots, a_{i+1} + 1, 1, a_i + 1, \dots, a_h]$ para $i+1 < j \leq m$.

Mostremos agora que $k = [k_m, \dots, k_1]$. Isto é claro para a seqüência 1.1. Suponhamos que seja verdade para $a_0 \cdot a_s \cdot a_{s-1} \dots a_1$.

Consideremos primeiro $(a_0+1) \cdot 1 \cdot (a_s+1) \cdot a_{s-1} \dots a_1$. Como

$$a_0 = [a_s, \dots, a_1] = \frac{1}{a_s - [a_{s-1}, \dots, a_1]}$$

nós temos

$$\begin{aligned} [1, a_s + 1, a_{s-1}, \dots, a_1] &= \frac{1}{1 - \frac{1}{a_s + 1 - [a_{s-1}, \dots, a_1]}} = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a_0}}} = a_0 + 1. \end{aligned}$$

Agora, se tomarmos $a_0 \cdot a_s \dots (a_{j+1}+1) \cdot 1 \cdot (a_j+1) \dots a_1$, teremos

$$a_0 = [a_s, \dots, a_{j+1}, a_j, \dots, a_1] = [a_s, \dots, a_{j+1} + 1, 1, a_j + 1, \dots, a_1].$$

(3.6) Proposição - $0 < [a_m, \dots, a_{m-j}] < [a_m, \dots, a_1]$ para $0 \leq j \leq m-2$.

Demonstração - A cargo do leitor.

§4 - Demonstração do Teorema

Quando $O \in \mathbb{C}^2$ é uma singularidade irredutível de Z , existe uma subvariedade lisa passando pela singularidade e invariante por Z (veja Capítulos III e IV). Logo nós podemos supor daqui por diante que $O \in \mathbb{C}^2$ é uma singularidade redutível. A

idéia é considerar a resolução $(U^{(n)}, \pi^{(n)}, \rho^{(n)}, \mathfrak{F}^{(n)})$ de Z em $O \in \mathbb{C}^2$ e encontrar em $\rho^{(n)}$ uma linha projetiva P contendo uma singularidade ρ de $\mathfrak{F}^{(n)}$, que não seja uma esquina, tal que $i_p(\mathfrak{F}^{(n)}, P) \neq 0$. Se este é o caso existe então uma variedade lisa S_n transversal a $\rho^{(n)}$ em p e invariante por $\mathfrak{F}^{(n)}$. Como $\pi^{(n)}$ é uma aplicação própria, pelo Teorema da Aplicação Própria a imagem $V = \pi^{(n)}(S_n)$ do conjunto analítico S_n é uma curva analítica, eventualmente singular em $O \in \mathbb{C}^2$, invariante por Z .

No que segue escreveremos $i_q(P)$ no lugar de $i_q(\mathfrak{F}, P)$ a fim de simplificar a notação.

Suponhamos por absurdo que $i_p(\rho^{(n)}) = 0$ para todas as singularidades de $\mathfrak{F}^{(n)}$ que não são esquinas de $\rho^{(n)}$.

(4.1) Proposição - Seja $1 \leq t \leq n$ e $q \in P \subset \rho^{(t)}$ um ponto singular de $\mathfrak{F}^{(t)}$ na linha projetiva P . Consideremos uma cadeia linear $C(q)$ de ordem k com origem em q (i.e. q se expressa por $\tau^k(q)$ como elemento de $\rho^{(n)}$). Então

$$-k \leq i_{\tau^k(q)}(P).$$

Demonstração - Procedemos por indução finita no conjunto de cadeias lineares necessárias para a resolução $(U^{(n)}, \pi^{(n)}, \rho^{(n)}, \mathfrak{F}^{(n)})$ de Z .

(i) A proposição é verdadeira para todas as cadeias lineares com origem em singularidades de $\mathfrak{F}^{(n-1)}$. Com efeito, seja $C(q)$

uma destas cadeias, $C(q) = (P_i)_{i=0}^m$, $P_0 = P$, $P_0 > P_m > \dots > P_1$.
 Seja $-k_i = c(P_i)$ a classe de P_i . Pela proposição (3.5) temos

$$k = [k_m, k_{m-1}, \dots, k_1]$$

Sejam $q_i = P_i \cap P_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$. Por hipótese as singularidades de $\mathfrak{F}^{(n)}$ em $\bigcup_{i=0}^m P_i$ diferentes de q_1, \dots, q_{m-1} e $\tau^k(q)$ possuem índice relativo a $\rho^{(n)}$ nulo. Logo

$$i_{q_1}(P_1) = c(P_1) = -k_1.$$

Como q_1 é irredutível, temos

$$i_{q_1}(P_2) = -\frac{1}{k_1} \text{ ou } 0$$

e como $i_{q_1}(P_2) + i_{q_2}(P_2) = c(P_2)$, obtemos

$$i_{q_2}(P_2) = -k_2 + \frac{1}{k_1} \text{ ou } -k_2$$

Isto implica que

$$i_{q_2}(P_3) = -\frac{1}{k_2 - \frac{1}{k_1}} \text{ ou } -\frac{1}{k_2} \text{ ou } 0.$$

continuando este processo obtemos que $i_{\tau^k(q)}(P)$ deve ser 0 ou algum número da forma $-[k_m, k_{m-1}, \dots, k_{m-j}]$ para $j \leq m-1$. Pelas proposições (3.5) e (3.6) segue-se que

$$-k \leq i_{\tau^k(q)}(P)$$

(ii) Suponhamos que a proposição é verdadeira para todas as cadeias lineares com origem em singularidades de $\mathfrak{X}^{(t)}$, $1 < t \leq m$; que não são esquinas de $\mathfrak{P}^{(t)}$. Mostraremos então que ela é verdadeira ainda para as cadeias lineares com origem em singularidades de $\mathfrak{X}^{(t-1)}$. Seja $C(q) = (P_i)_{i=0}^m$ uma cadeia destas com $P_0 > P_m > \dots > P_1$. Como antes escremos $q_i = P_i \cap P_{i+1}$ $1 \leq i \leq m-1$. Sejam $q_1^1, \dots, q_{r_1}^1 \in P_1$ singularidades de $\mathfrak{X}^{(t-1)}$ onde se originam cadeias lineares associadas a $\mathfrak{X}^{(n)}$. Temos

$$i_{q_1^1}(P_1) + \sum_{j=1}^{r_1} i_{\tau u_j(q_j^1)}(P_1) = c(P_1)$$

onde u_j é a ordem de $C(q_j^1)$. Pela hipótese de indução

$$- \sum_{j=1}^{r_1} \text{ordem } C(q_j^1) \leq \sum_{j=1}^{r_1} i_{\tau u_j(q_j^1)}(P_1).$$

Assim

$$i_{q_1^1}(P_1) \leq c(P_1) + \sum_{j=1}^{r_1} \text{ordem } C(q_j^1) = \bar{c}(P_1).$$

Aqui $\bar{c}(P_1)$ representa a classe de P_1 antes das explosões nos pontos q_j^1 , $j = 1, \dots, r_1$.

Como q_1 é irredutível temos $i_{q_1}(P_2) \geq \frac{1}{\bar{c}(P_1)}$ ou 0.

Similarmente em P_2 obtemos

$$i_{q_2}(P_2) + i_{q_1}(P_2) + \sum_{j=1}^{r_2} i_{\tau v_j(q_j^2)}(P_2) = c(P_2)$$

onde q_j^2 , $1 \leq j \leq r_2$, são as singularidades de $\mathfrak{F}^{(l-1)}$ onde se originam cadeias lineares de $\mathfrak{F}^{(l)}$ e v_j denota a ordem de $C(q_j^2)$. Pela hipótese de indução

$$- \sum_{j=1}^{r_2} \text{ordem } C(q_j^2) \leq \sum_{j=1}^{r_2} i_{\tau^j(q_j^2)} (P_2)$$

logo $i_{q_2}(P_2) + i_{q_1}(P_2) \leq c(P_2) + \sum_{j=1}^{r_2} \text{ordem } C(q_j^2) = \bar{c}(P_2)$.

Aqui, de novo, $\bar{c}(P_2)$ é a classe de P_2 antes das explosões nos pontos q_j^2 , $1 \leq j \leq r_2$. Como q_2 é irredutível

$$i_{q_2}(P_3) \geq \frac{1}{\bar{c}(P_2) - \frac{1}{\bar{c}(P_1)}} \text{ ou } i_{q_2}(P_3) \geq \frac{1}{\bar{c}(P_2)} \text{ ou } i_{q_2}(P_3) = 0.$$

O leitor verificará que estas frações estão bem definidas. Finalmente, temos

$$i_{\tau^k(q)}(P) \geq [\bar{c}(P_m), \dots, \bar{c}(P_{m-j})] \text{ ou } i_{\tau^k(q)}(P) = 0$$

para algum $j \leq m-1$.

Pelas proposições (3.5) e (3.6) temos $i_{\tau^k(q)}(P) \geq -k$.

Para finalizar a demonstração do teorema consideramos $\mathfrak{F}^{(1)}$ e $\mathfrak{P}^{(1)}$. Sejam $C(q_1^1), \dots, C(q_{m'}^1)$ todas as cadeias lineares com origem nas singularidades redutíveis em $\mathfrak{P}^{(1)}$. Seja t_i a ordem de $C(q_i^1)$. Pelas proposições (3.3), (3.4) e (4.1) temos

$$- \sum_{i=1}^{m'} t_i \leq \sum_{i=1}^{m'} i_{\tau^i(q_i^1)} (\mathfrak{P}^{(1)}) = -1 - \sum_{i=1}^{m'} t_i$$

o que é um absurdo. O teorema está demonstrado.

REFERÊNCIAS

- [1] Arnold, V. - Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires, Mir 1980.
- [2] Brujno, A.D. - Analytic Forms of Differential Equations, Trans. Moscow Math.Soc. 25 (1971).
- [3] Camacho, C. e Sad, P. - Invariant Varieties through Singularities of Holomorphic Vector Fields, Ann. of Math., 115 (1982).
- [4] Cerveau, D. Mattei, J-F. - Formes Intégrables Holomorphes Singulières, Astérisque 97 (1982).
- [5] Dulac, H. - Solutions d'un Système d'Équations Différentielles dans le Voisinage des Valeurs Singulières - Bull.Soc.Math. France 40 (1912).
- [6] Écalle, J.-Thèse, Orsay 1974.
- [7] Hukuara, H., Kimura, T., Matuda, T., Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe. Publ.Math.Soc. of Japan 1961.
- [8] Malgrange, B. - Ideals of Differentiable Functions, Oxford University Press, 1966.

- [9] Martinet, J. e Ramis, J.P. - Problèmes des modules pour des équations différentielles non linéaires du premier order Publ.Math. IHES 55 (1982).
- [10] Mattei, J.F. e Moussu, R. - Holonomie et Intégrales Premières Ann.Sc.Ec.Norm.Sup. 13 (1980).
- [11] A. Newlander, L. Nirenberg, Complex coordinates in almost complex manifolds Ann. of Math. 65 (1957) 391-428.
- [12] Reeve, J.E. - A summary of results in the topological classification of plane algebroid singularities, Rend. Sem.Mat.Univ.Politec. Torino 14 (1954-55).
- [13] Seidenberg, A. - Reduction of Singularities of the Differential Equation $Ady = Bdx$, Amer.Journ. of Math. (1968).
- [14] Siegel, C.L.C. - Iteration of Analytic Functions, Annals of Math. 43 (1942).
- [15] Zariski, O. - On the Topology of Algebroid Singularities, Amer. J.Math. 54 (1932).
- [16] Gerard, R. e Sibuya, Y. - Etude de Certains Systemes de Pfaff avec Singularités. Lecture Notes in Mathematics 712.

Impresso na Gráfica do

