INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA DE SINGULARIDADES COMPLEXAS

Mario Jorge Dias Carneiro e
Marcio Gomes Soares

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Estrada Dona Castorina 110
22.460 - Rio de Janeiro - RJ

Prefácio

O objetivo destas notas é expor alguns resultados fundamentais sobre a topologia de uma hipersuperfície complexa na vizinhança de um ponto singular isolado.

Uma hipersuperfície complexa V em $\mathbb{C}^{n+1}$ é um subconjunto $V = \{(z_1,\ldots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} / f(z_1,\ldots,z_{n+1}) = 0\}$ onde f é uma função holomorfa. Dizemos que um ponto $p \in V$ é um ponto singular isolado de V se p é um ponto crítico isolado de f isto é, se $f(p) = \frac{\partial f}{\partial z_1}(p) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}(p) = 0$ e existe uma vizinhança U de p em $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que $q \in V \cap U$ e $q \neq p$ então $\frac{\partial f}{\partial z_j}(q) \neq 0$ para algum $j \in \{1,\ldots,n+1\}$.

Este trabalho está dividido em 6 capítulos.

Iniciamos no primeiro capítulo com um histórico sobre a teoria clássica de curvas em $\mathbb{C}^2$ onde se obtem os invariantes topológicos locais da curva como os coeficientes da expansão de Puiseux.

O segundo capítulo trata do resultado básico para o caso geral que é o Teorema da Fibração de Milnor. Este resultado, que é válido para singularidades não isoladas também, permite-nos obter os primeiros invariantes topológicos locais de V. De fato por um teorema de King (que não trataremos aqui) caracteriza-se o tipo topológico local da hipersuperfície em termos desta fibração e da interseção K de V com uma pequena esfera em $\mathbb{C}^{n+1}$ centrada no ponto p (vide *[King]).

* As referências no texto aparecem com o nome do autor (ou autores) entre colchêtes.

No terceiro capítulo estuda-se a topologia da fibra da Fibração de Milnor e de K via teoria de Morse. Obtem-se assim para o caso de singularidade isolada a primeira definição de número de Milnor.

No capítulo IV define-se monodromia de uma singularidade isolada e prova-se que a monodromia (e portanto o número de Milnor) é um invariante associado ao tipo topológico local de V. Em vista disto descreve-se métodos para calcular o número de Milnor ou seja, as várias noções de multiplicidade.

O conceito de ciclo evanescente e a fórmula de Picard-Lefschetz são estudados no capítulo V bem como para o caso $n=1$ se estabelece a relação entre o polinomio característico da monodromia e o polinômio de Alexander de K.

Finalizamos com o capítulo VI onde é feita uma descrição da teoria de Brieskorn para o cálculo da monodromia.

Procuramos fazer com que esta exposição fosse acessível àqueles que possuem conhecimentos equivalentes a um curso básico de topologia algébrica, alguma álgebra comutativa e análise complexa elementar. Entretanto trata-se de uma teoria que toca vários campos da matemática tornando-se até difícil precisar os pré-requisitos necessários.

Vários tópicos importantes deixaram de ser tratados aqui, entre eles podemos apontar, a relação entre poliedro de Newton e monodromia, o estudo mais aprofundado de K (suas estruturas diferenciais por exemplo) e evidentemente a teoria de Brieskorn , suas consequências e generalizações. Optamos por oferecer no capítulo VI uma descrição dos resultados de Brieskorn principalmente por que os pré-requisitos que devem ser admitidos lá são bastante diferentes dos que aparecem nos demais capítulos destas notas.

Incluímos dois apêndices: o primeiro trata de generalidades sobre subconjuntos algébricos em especial do Teorema de Whitney que afirma que a diferença entre dois subconjuntos algébricos possui no máximo um número finito de componentes conexas. No apêndice II encontramos uma prova do Lema de Seleção da Curva que é bastante usado nesta teoria.

Os autores agradecem a Lê Dũng Tráng e aos participantes dos seminários sobre Singularidades Complexas, realizados na UFMG e no IMPA, que portanto colaboraram na elaboração destas notas:

D. Avritzer, E. Chíncaro, M.C. Ferreira, M.M. Pinto, P. Sad, A. Lins Neto, J.C. Martins, C. Camacho.

Agradecemos também a Rogério Dias Trindade pelo excelente trabalho datilográfico.

Marcio Gomes Soares

Mário Jorge Dias Carneiro

Í N D I C E

CAPÍTULO I

HISTÓRICO DE ALGUNS RESULTADOS SOBRE SINGULARIDADES DE CURVAS PLANAS

Vamos considerar uma aplicação polinomial não constante $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ que se anula na origem, que é analiticamente irredutível em $0 \in \mathbb{C}^2$, isto é, o ideal (f) gerado por f no anel das séries formais $\mathbb{C}[x,y]$ é primo; e que tem $0 \in \mathbb{C}^2$ como ponto crítico (necessàriamente isolado já que (f) é primo).

O problema de determinação de invariantes topológicos associados a uma tal singularidade, a partir de invariantes analíticos, foi considerado por [K. Brauner] e o método por êle utilizado consiste em estudar a interseção do conjunto de zeros de f com uma esfera de raio suficientemente pequeno. [Burau], [Kähler] e [Zariski] também consideraram êsse problema e o que pretendemos é descrever alguns dos resultados por êles obtidos.

Sejam $V = f^{-1}(0)$, B_ε a bola fechada de centro na origem e raio $\varepsilon > 0$, $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$. Em II.1 é demonstrado que para ε suficientemente pequeno a esfera S_ε intercepta V transversalmente e que o par $(B_\varepsilon, B_\varepsilon \cap V)$ é homeomorfo ao par $(B_\varepsilon, \text{Cone}(K_\varepsilon))$ onde $K_\varepsilon = S_\varepsilon \cap V$. Além disso, o tipo do entrelaçamento K_ε não depende de ε desde que esse seja suficientemente pequeno. A hipótese de ser f analìticamente irredutível em 0 implica que K_ε é conexo, ou seja, trata-se de um nó. Para estudarmos o tipo de K_ε precisaremos do teorema de Puiseux, que passamos a descrever (cf. [Walker]).

Seja $\mathbb{C}[\![t]\!]$ o anel das séries formais em t e $\mathbb{C}((t))$ o seu corpo de frações. Todo elemento $\bar{a} \in \mathbb{C}((t))$ pode ser escrito, de modo único, na forma

$$\bar{a} = t^k(a_0+a_1t+\ldots) \quad \text{com} \quad a_0 \neq 0 \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

O inteiro k é chamado de ordem de $\bar{a}$ e notado $\nu(\bar{a})$. Uma substituição é um $\mathbb{C}$-homomorfismo $\varphi\colon \mathbb{C}((t)) \to \mathbb{C}((t))$ definido pela substituição de t por um elemento $\varphi(t) \in \mathbb{C}((t))$ com $\nu(\varphi(t)) > 0$. A ordem de uma substituição φ é, por definição, o inteiro $\nu(\varphi(t))$.

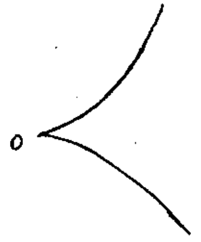
Uma parametrização de uma curva algébrica plana irredutível C é um elemento $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{C}[\![t]\!]^2\backslash\mathbb{C}^2$ tal que $g(\bar{x},\bar{y})=0$, onde g é o gerador de $I(C)$. O ponto $(\bar{x}(0),\bar{y}(0)) \in \mathbb{C}^2$ é chamado de centro da parametrização.

Se φ é uma substituição, podemos estendê-la uma parametrização colocando $\varphi(\bar{x},\bar{y}) = (\varphi(\bar{x}),\varphi(\bar{y}))$. Daí segue que se $(\bar{x},\bar{y})$ é uma parametrização de C, $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ também o é e com mesmo centro, uma vez que $\varphi(g(\bar{x},\bar{y})) = g(\varphi(\bar{x}),\varphi(\bar{y}))$.

Diremos que duas parametrizações são <u>equivalentes</u> caso uma possa ser obtida a partir da outra por uma substituição de ordem 1. Uma parametrização $(\bar{x},\bar{y})$ é dita <u>redutível</u> se pode ser obtida de uma outra parametrização através de uma substituição de ordem maior que 1. $(\bar{x},\bar{y})$ é dita <u>irredutível</u> caso contrário. Finalmente, um <u>ramo</u> de C é uma classe de equivalência de parametrizações irredutíveis. O centro do ramo é o centro de qualquer parametrização que o represente.

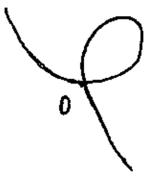
Exemplos:

(i) $C := \{x^3 - y^2 = 0\}$



C possui um único ramo de centro $(0,0)$, representado pela parametrização $\bar{x} = t^2$, $\bar{y} = t^3$.

(ii) $C := \{x^3 + y^3 - xy = 0\}$



C possui dois ramos de centro $(0,0)$ representados, respectivamente, pelas parametrizações irredutíveis

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= t(1+t^3)^{-1} \\ \bar{y}_1 &= t^2(1+t^3)^{-1} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \bar{x}_2 &= t^2(1+t^3)^{-1} \\ \bar{y}_2 &= t(1+t^3)^{-1} \end{aligned}$$

Para ver isso considere o feixe de retas $y = tx$. Substituindo na equação que define C temos $x^2(x+t^3x-t) = 0$. Resolvendo $x + t^3x - t = 0$ obtemos $x = \dfrac{t}{1+t^3}$ e daí $y = \dfrac{t^2}{1+t^3}$. Um processo sistemático para obtenção de parametrizações é dado por uma demonstração do teorema de Puiseux, baseada no chamado método do polígono de Newton (cf. [Simis]).

A caracterização de parametrizações irredutíveis é da da pela

Proposição I.1:

Seja C uma curva em $\mathbb{C}^2$ distinta da curva x=const.. Então toda parametrização de C com centro em (a,b) é equivalente a uma da forma

$$\bar{x} = a + t^r$$

$$\bar{y} = b + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots, \qquad r > 0$$

Além disso, duas tais parametrizações são equivalentes se e sòmente se elas diferem por uma substituição do tipo $t \to \xi t$ com $\xi^r = 1$. Mais ainda, uma parametrização dessa forma é redutível se e sòmente se

$$\text{m.d.c.}\{m: m = r \quad \text{ou} \quad b_m = 0\} > 1.$$

Vamos considerar agora o corpo das séries fracionárias. Seja $\mathbb{C}((x^{1/r}))$ o corpo de frações do anel das séries formais em $x^{1/r}$ onde $r \in \mathbb{N}$. Temos uma inclusão

$$\begin{aligned} \mathbb{C}((x^{1/r})) &\xrightarrow{\ i_{s,r}\ } \mathbb{C}((x^{1/s})) \\ x^{1/r} &\longmapsto (x^{1/s})^{s/r} \end{aligned}$$

sempre que $r \mid s$ e portanto um sistema indutivo $\{\mathbb{C}((x^{1/r}))\}_{r\in\mathbb{N}}$.

o limite indutivo desse sistema é notado $\mathbb{C}\{x\}$ e chamado de corpo das séries formais fracionárias. Note que todo elemento $\bar{y} \in \mathbb{C}\{x\}$ se escreve na forma

$$\bar{y} = a_1 x^{r_1} + a_2 x^{r_2} + \dots \quad \text{onde} \quad a_1 \neq 0,\ r_i \in \mathbb{Q},\ r_1 < r_2 < \dots$$

e se escrevermos r_i em forma irredutível $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $q_i \leq q$ para todo i. A ordem de $\bar{y}$ é definida por $\nu(\bar{y}) = r_1$.

<u>Teorema</u> (Puiseux)

$\mathbb{C}\{x\}$ é algèbricamente fechado.

No enunciado acima podemos trocar $\mathbb{C}$ por um corpo algèbricamente fechado de característica zero.

Seja $C := \{g = 0\}$ uma curva irredutível em $\mathbb{C}^2$ e considere g em $\mathbb{C}\{x\}[y]$ (estamos supondo que C é distinta de x=const.). Então,

<u>Proposição I.2</u>:

Existe uma correspondência entre o conjunto de ramos de C com centro $(0,0)$ e o conjunto de soluções $\bar{y}$ de $g(x,\bar{y}) = 0$ em $\mathbb{C}\{x\}$ tais que $\nu(\bar{y}) > 0$. Mais precisamente, a cada solução $\bar{y}$ com $\nu(\bar{y}) > 0$ corresponde um único ramo e a cada ramo de centro $(0,0)$ correspondem exatamente $\nu(\bar{x}_1)$ soluções de $g(x,\bar{y}) = 0$ onde $\nu(\bar{x}_1)$ é a ordem da primeira componente de uma parametrização $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)$ que represente o ramo.

Demonstração:

Seja $\bar{y}$ uma solução de $g(x,\bar{y}) = 0$ com $\nu(\bar{y}) > 0$ (essa condição é necessária para que o centro seja $(0,0)$). Tome o menor inteiro r tal que $\bar{y} \in \mathbb{C}((x^{1/r}))$. Então obtemos uma parametrização

$$\bar{x}_1 = t^r$$

$$\bar{y}_1 = \bar{y}(t^r)$$

que é irredutível pela proposição I.1 e que portanto determina um ramo de centro $(0,0)$.

Dada uma parametrização irredutível $\bar{x}_1 = t^r, \bar{y}_1 = = \sum_{i \geq 1} a_i t^i$ obtemos uma solução $\bar{y} = \sum_{i \geq 1} a_i x^{i/r}$. A substituição $t \to \xi t$, com $\xi^r = 1$ fornece a solução $\bar{y}$ com $x^{1/r}$ substituído por $\xi x^{1/r}$. Como existem r raízes da unidade e r é minimal, cada uma dessas substituições fornece soluções distintas. Além disso, $g(x,\bar{y}) = 0$ não possui soluções múltiplas, isto porque, sendo $g(x,y)$ irredutível em $\mathbb{C}[x,y]$ e involve y, não possui soluções múltiplas em $\mathbb{C}\{x\}[y]$, já que a condição para que isso ocorra é uma condição polinomial nos coeficientes que não se altera sob extensões de corpos.

O resultado acima se transporta ao caso formal $g \in \mathbb{C}[[x,y]]$ (e mesmo ao caso convergente) desde que g seja, digamos, regular em relação a y. Pois pelo teorema de preparação de Weierstrass podemos escrever $g = uP$ com u uma unidade e $P \in \mathbb{C}[[x]][y]$. Se $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ são as soluções de $P(x,\bar{y}) = 0$ em $\mathbb{C}\{x\}$ então $g = u \prod_{i=1}^{n} (y-\bar{y}_i)$.

Retornamos agora à situação do início do capítulo. Seja $\bar{y} = \sum_{i\geq 1} a_i x^{\frac{\alpha_i}{n}}$ o desenvolvimento de Puiseux de V com centro $(0,0)$. Suponha que $y = 0$ é tangente a V em $(0,0)$. Então $\frac{\alpha_1}{n} > 1$ e $n \nmid \alpha_1$. Seja $\bar{x}_1 = t^n$, $\bar{y}_1 = \sum_{i\geq 1} a_i t^{\alpha_i}$ a parametrização associada. Ponha $e_1 = (n,\alpha_1)$ (máximo divisor comum) e $m_1 = \frac{\alpha_1}{e_1}$, $n_1 = \frac{n}{e_1}$. Seja β_q o menor expoente de t cujo coeficiente em $\bar{y}_1$ é não nulo e tal que $e_{q-1} \nmid \beta_q$. Ponha $e_q = (e_{q-1},\beta_q)$ e $n_q = \frac{e_{q-1}}{e_q}$, $q \geq 2$. Seja g o maior inteiro tal que $n_g > 1$. Obtemos dessa maneira uma sequência finita $n_1,n_2,\dots,n_g$ satisfazendo $n_1.n_2\dots n_g = n$, $\beta_q = \frac{m_q}{n_1\dots n_q} n$ com $(m_q,n_q) = 1$, $1 \leq q \leq g$. A sequência $(m_1,n_1),\dots,(m_g,n_g)$ é chamada de <u>sequência de pares de Puiseux do ramo</u> V, g é chamado <u>gênero</u> do ramo e $n,\alpha_1 = \beta_1,\beta_2,\dots,\beta_g$ são chamados <u>expoentes característicos</u>. Todos esses são invariantes analíticos.

Passamos agora à definição de um nó tórico iterado. Seja $(m_1,n_1),\dots,(m_g,n_g)$ uma sequência de pares de inteiros positivos. Definimos indutivamente o nó K_g como segue: Considere o toro T^2 mergulhado em $\mathbb{R}^3$ através de

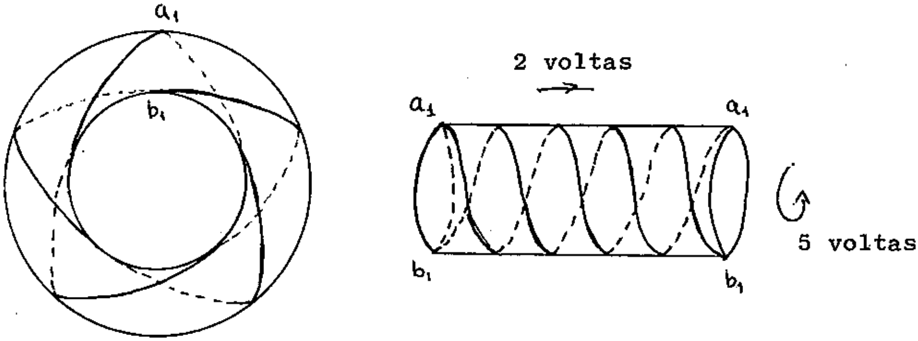
$$S^1\times S^1 \xrightarrow{h} S^3 \xrightarrow{k} T^2 \subset \mathbb{R}^3$$

onde $h(e^{i\theta},e^{i\tau}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\theta},e^{i\tau})$ e k é a projeção estereográfica. Chamaremos de paralelo à curva em T^2 imagem de $\{e^{i\theta}\}\times S^1$ e de meridiano à imagem de $S^1\times\{e^{i\tau}\}$. Se $g = 1$ seja K_1 a imagem em T^2 de $\lambda: e^{i\rho} \to (e^{im_1\rho},e^{in_1\rho})$. K_1 é dito um nó tórico de tipo (m_1,n_1) isto porque se $\pi_i: S^1\times S^1 \to S^1$, $i = 1,2$, denota a i-ésima projeção sobre S^1

então $\pi_1 \circ \lambda$ e $\pi_2 \circ \lambda$ têm graus m_1 e n_1 respectivamente.

<u>Exemplo</u>:

$(m_1, n_1) = (2,5)$



Se $g > 1$ suponha construido o nó K_{g-1} e que este está mergulhado em $\mathbb{R}^3$. Tome uma vizinhança tubular $W_g \subset \mathbb{R}^3$ de K_{g-1}. Existe um difeomorfismo $H: \partial W_g \to S^1 \times S^1$ tal que $H^{-1}(\{e^{i\theta}\} \times S^1)$ seja um paralelo de ∂W_g $(H^{-1}(S^1 \times \{e^{i\tau}\})$ seja um meridiano), isto é, $H^{-1}(\{e^{i\theta}\} \times S^1)$ tem número de entrelaçamento zero com K_{g-1} $(H^{-1}(S^1 \times \{e^{i\tau}\})$ tem número de entrelaçamento 1 com K_{g-1}). Considere o nó tórico K_g^* de tipo (ℓ_g, n_g) em $S^1 \times S^1$ onde $\ell_g = m_g - m_{g-1}n_g + \ell_{g-1}n_{g-1}n_g$ $(\ell_1 = m_1)$. Então $K_g = H^{-1}(K_g^*)$ é dito o nó iterado definido pela sequência $(m_1, n_1), \ldots, (m_g, n_g)$.

Estamos em condições de enunciar o seguinte

<u>Teorema</u> (Brauner)

Seja $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial satisfazendo $f(0) = 0$ e analìticamente irredutível em 0. Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o nó $K_\varepsilon = S_\varepsilon \cap V$ em S_ε tem o tipo do nó K_g determinado pela sequência de pares de Puiseux de V em 0.

O teorema de Brauner diz que o tipo topológico de f em $0 \in \mathbb{C}^2$ é o mesmo que o da curva algébrica determinada por $\bar{x} = t^n$, $\bar{y} = t^{\beta_1} + \ldots + t^{\beta_g}$. Kähler considerou esse problema no caso de vários ramos e a conclusão a que se chega é que dadas duas curvas $V_1 =: \{f_1 = 0\}$, $V_2 =: \{f_2 = 0\}$ não necessàriamente analìticamente irredutíveis em 0, porém reduzidas (isto é, a decomposição em componentes analíticos irredutíveis $f_i = f_{1_i} \ldots f_{j_i}$ $(i=1,2)$ não possui fator múltiplo), que determinam igual número de ramos de centro $(0,0)$, sendo que a cada ramo de V_1 corresponde exatamente um ramo de V_2 possuindo os mesmos expoentes característicos e tais que os números de interseção dos ramos de V_1 em 0, tomados dois a dois, são iguais aos números de interseção dos ramos de V_2 em 0, tomados dois a dois, então os entrelaçamentos $K_1 = S_\varepsilon \cap V_1$ e $K_2 = S_\varepsilon \cap V_2$ são isotópicos. Zariski e Burau, independentemente, mostraram que se f é analìticamente irredutível em 0, então os expoentes característicos (e portanto a sequência de pares de Puiseux) são invariantes topológicos.

Dado um nó $K \subset S^3$, o grupo fundamental $\pi_1(S^3-K,p)$

do complementar de K em S^3 é chamado <u>grupo do nó</u>. Òbviamente se dois nós K_1 e K_2 são do mesmo tipo os grupos associados são isomorfos. O recíproco desse fato é falso em geral porém, em se tratando de nós algébricos, isto é, $K_\varepsilon = S_\varepsilon \cap V$, $V = f^{-1}(0)$ com f um polinômio anal̀iticamente irredutível em $0 \in \mathbb{C}^2$, o grupo do nó caracteriza o seu tipo. Na realidade basta considerarmos um invariante mais fraco que $\pi_1(S^3-K,p)$ a saber, o chamado polinômio de Alexander, para caracterizarmos o tipo do nó. Mais precisamente temos

<u>Proposição I.3</u>:

Dois nós algébricos cujos polinômios de Alexander são iguais têm o mesmo tipo.

A demonstração será feita mais adiante, após algumas definições e resultados. A referência básica para o que se segue é [Crowell-Fox].

Primeiramente, note que dada uma sequência de pares de inteiros positivos e primos entre si $(m_1,n_1),\dots,(m_g,n_g)$ esta é uma sequência de pares de Puiseux se e sòmente se $m_{i-1}n_i < m_i$ para $i = 2,\dots,g$.

<u>Lema I.4</u> ([Zariski])

Seja K_g o nó iterado definido pela sequência de pares de Puiseux $(m_1,n_1),\dots,(m_g,n_g)$. Então o grupo $G = \pi_1(S^3-K_g,p)$ de K_g é definido pelos geradores $P_i (i=1,\dots,g+1)$

e $Q_j (j=1,\ldots,g)$ e pelas relações r_i e s_i dadas por

$$P_i^{\alpha_i} Q_{i-1}^{n_{i-1} n_i} Q_i^{-n_i} = r_i \qquad i = 1,\ldots,g$$

$$P_{i+1} P_i^{y_i} Q_{i-1}^{n_{i-1} x_i} Q_i^{-x_i} = s_i \qquad i = 1,\ldots,g$$

onde

$$Q_o = 1$$
$$\alpha_1 = m_1$$
$$\alpha_i = m_i - n_i m_{i-1}, \qquad i = 2,\ldots,g$$

e x_i e y_i são inteiros tais que $\alpha_i x_i = n_i y_i + 1$, $i=1,\ldots,g$.

<u>Exercício</u>: Demonstre o lema acima no caso $g = 1$.

Em [Crowell-Fox] é demonstrado que o abelianisado de G, isto é, G/G' onde G' é o subgrupo dos comutadores, é cíclico infinito (isto também pode ser visto notando que K_g é homeomorfo a S^1 e por dualidade de Alexander $G/G' \simeq H_1(S^3 \backslash K_g) \simeq \mathbb{Z}$).

Dado um grupo multiplicativo G considere o seu anel de grupo sobre os inteiros, $\mathbb{Z}[G]$. Se $\varphi\colon G \to G_1$ é um homomorfismo de grupos, então φ admite uma extensão única a um homomorfismo de aneis $\phi\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G_1]$. Uma <u>derivação</u> em $\mathbb{Z}[G]$ é um homomorfismo aditivo

$$D\colon \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \quad \text{satisfazendo}$$

$$D(xy) = D(x)\tau(y) + xD(y) \quad \text{onde} \quad \tau\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \quad \text{é o}$$

homomorfismo trivializador definido por $\tau(\sum_i n_i y_i) = \sum_i n_i$.

Suponha agora que F é um grupo livre gerado por $x_1, x_2, \ldots$. Temos que a cada gerador x_j está associada uma única derivação $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}: \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[F]$ satisfazendo $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$ (símbolo de Kronecker).

Se G é o grupo de um nó, definido pelos geradores $x_1, \ldots, x_k$ e pelas relações $r_1, \ldots, r_q$, sejam F o grupo livre de tipo finito gerado por $x_1, \ldots, x_k$ e $\gamma: F \to G$ o epimorfismo cujo núcleo é gerado por $r_1, \ldots, r_q$. Considere a sequência de anéis e homomorfismos de anéis

$$\mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_j}} \mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\Gamma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}[G/G']$$

onde Γ e Λ são as extensões de γ e de $G \xrightarrow{\lambda} G/G'$ (epimorfismo canônico) respectivamente.

A <u>matriz de Alexander</u> de G é a matriz definida por

$$a_{ij} = \Lambda\Gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right), \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, q \\ j = 1, \ldots, k \end{array}$$

Adjuntando relações redundantes, se necessário, podemos supor $q \geq k$. Seja E_ℓ o ideal de $\mathbb{Z}[G/G']$ gerado pelos menores de ordem $k - \ell$ de (a_{ij}). Obtemos uma sequência ascendente de ideais

$$E_o \subset E_1 \subset \ldots \subset E_k = \mathbb{Z}[G/G']$$

chamados ideais elementares de G. O seguinte resultado justifica essa terminologia.

Proposição I.5: (Invariância dos Ideais Elementares)

A sequência de ideais elementares de G não depende da escolha dos geradores e das relações que definem G.

Como $G/G' \simeq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[G/G']$ é isomorfo ao anel $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ onde t é uma indeterminada. Além disso, toda família de elementos de $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ possui um máximo divisor comum definido, evidentemente, a menos de multiplicação por uma unidade $(\pm t^n)$ de $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$.

O ℓ-ésimo polinômio do nó, Δ_ℓ, é o gerador do menor ideal principal que contém o ideal elementar E_ℓ. Δ_ℓ é um invariante do tipo do nó. Como Δ_ℓ é definido a menos de multiplicação por uma potência inteira de t, podemos escolhê-lo de tal modo que $\Delta_\ell(0) \neq 0$ para $\ell \geq 1$ uma vez que $E_o = (0)$.

Proposição I.6:

O ideal elementar E_1 é principal e o seu gerador Δ_1 é chamado polinômio de Alexander do nó.

Exercício: Mostre que o polinômio de Alexander de um nó tórico de tipo (m_1,n_1) é $\Delta(t) = \dfrac{(t^{m_1n_1}-1)(t-1)}{(t^{m_1}-1)(t^{n_1}-1)}$

Retornamos agora à situação do lema I.4. Em [Zassenhaus] é demonstrado que, se

$$\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}[G/G'] \simeq \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \quad \text{então}$$

$$\Lambda(P_{g+1}) = t, \quad \Lambda(P_i) = t^{\gamma_i}, \quad \Lambda(Q_i) = t^{\ell_i \gamma_{i+1}} \quad \text{onde}$$

$$\gamma_i = n_i \ldots n_g, \quad i = 1,\ldots,g \quad \text{e} \quad \ell_1 = \alpha_1$$

$$\gamma_{g+1} = 1 \qquad\qquad \ell_i = \alpha_i + \ell_{i-1} n_i n_{i-1}, \quad i = 2,\ldots,g$$

Seja $f_{\ell,n}(t) = \dfrac{(t^{\ell n}-1)(t-1)}{(t^{\ell}-1)(t^{n}-1)}$. Então,

<u>Lema I.7</u> (Lê, [1])

O polinômio $\Delta(t) = (-1)^g f_{\ell_1,n_1}(t^{\gamma_2}) f_{\ell_2,n_2}(t^{\gamma_3}) \ldots f_{\ell_g,n_g}(t)$ é o polinômio de Alexander do nó K_g.

Note que as raízes de $\Delta(t)$ são raízes da unidade. Portanto, podemos escrever $\Delta(t) = \prod_{s \in S} (g_s(t))^{k_s}$ onde g_s é o polinômio ciclotômico irredutível sobre $\mathbb{Q}$ cujas raízes são as s-ésimas raízes primitivas da unidade, S é o conjunto de tais raízes que são também raízes de $\Delta(t)$ e k_s é um inteiro positivo. Finalmente temos a

<u>Demonstração da Proposição I.3</u>:

Sejam K e K' dois nós algébricos definidos pelas sequências de pares de Puiseux $(m_1,n_1),\ldots,(m_g,n_g)$ e $(m'_1,n'_1),\ldots,(m'_{g'},n'_{g'})$ respectivamente, e sejam $\Delta(t)$ e $\Delta'(t)$ os correspondentes polinômios de Alexander. Como $\Delta(t) = \Delta'(t)$, se escrevermos

$$\Delta(t) = \prod_{s\in S}(g_s(t))^{k_s}, \quad \Delta'(t) = \prod_{s'\in S'}(g_{s'}(t))^{k_{s'}} \quad \text{então } S=S'.$$

Temos a seguinte desigualdade:

(*) $\ell_g > \ell_i n_i \ldots n_g$, $i = 1,\ldots,g-1$. De fato, pela observação que antecede o lema I.4, $m_i > n_i m_{i-1}$, $i = 2,\ldots,g$, daí, $\ell_i = m_i - n_i m_{i-1} + \ell_{i-1} n_i n_{i-1} > \ell_{i-1} n_i n_{i-1}$, $i = 2,\ldots,g$. Logo, $\ell_g > \ell_{g-1} n_{g-1} n_g > \ldots > \ell_{i-1} n_{i-1} \ldots n_g > \ldots > \ell_1 n_1 \ldots n_g$.

Considere agora o polinômio

$$f_{\ell_i,n_i}(t^{\gamma_{i+1}}) = \frac{(t^{\ell_i n_i \ldots n_{g-1}})(t^{n_{i+1}\ldots n_{g-1}})}{(t^{\ell_i n_{i+1}\ldots n_{g-1}})(t^{n_i\ldots n_{g-1}})}$$

e seja ξ uma s-ésima raiz primitiva da unidade. Então ξ é raiz de $f_{\ell_i,n_i}(t^{\gamma_{i+1}})$ se e sòmente se $s|\ell_i n_i \ldots n_g$, $s\nmid \ell_i n_{i+1} \ldots n_g$ e $s\nmid n_i \ldots n_g$. Portanto, as $\ell_i n_i \ldots n_g$-ésimas raízes primitivas da unidade são raízes de $f_{\ell_i,n_i}(t^{\gamma_{i+1}})$. Mas, por (*), temos que $\ell_g n_g > \ell_i n_i \ldots n_g$ para $i = 1,\ldots,g-1$ e daí concluímos que $\ell_g n_g = \max S$. Anàlogamente, $\ell'_{g'} n'_{g'} = \max S$, ou seja, $\ell_g n_g = \ell'_{g'} n'_{g'}$.

Se fôr $\ell'_{g'} > \ell_g$ então, usando (*) novamente, concluímos que as $\ell'_{g'}$-ésimas raízes primitivas da unidade são raízes de $f_{\ell_g,n_g}(t)$ e portanto de $\Delta(t) = \Delta'(t)$. Por outro lado, essas não são raízes de $f_{\ell_i',n_i'}(t^{\gamma_{i+1}'})$, $i = 1,\ldots,g'-1$ e tampouco de $f_{\ell_{g'}',n_{g'}'}(t)$, donde não são raízes de $\Delta(t) = \Delta'(t)$. Essa contradição mostra que $\ell_g = \ell_{g'}'$ e $n_g = n_{g'}'$. Fatorando $f_{\ell_g,n_g}(t)$ em ambos os lados de $\Delta(t) = \Delta'(t)$ ficamos com

$$(-1)^g f_{\ell_1,n_1}(t^{\gamma_2})\ldots f_{\ell_{g-1},n_{g-1}}(t^{n_{g-1}n_g}) =$$

$$= (-1)^{g'} f_{\ell_1',n_1'}(t^{\gamma_2'})\ldots f_{\ell_{g'-1}',n_{g'-1}'}(t^{n_{g'-1}'n_g})$$

Fazendo $T = t^{n_g}$ temos

$$(-1)^g f_{\ell_1,n_1}(T^{n_2\cdots n_{g-1}})\ldots f_{\ell_{g-1},n_{g-1}}(T^{n_{g-1}}) =$$

$$= (-1)^{g'} f_{\ell_1',n_1'}(T^{n_2'\cdots n_{g'-1}'})\ldots f_{\ell_{g'-1}',n_{g'-1}'}(T^{n_{g'-1}'})$$

Ora, o polinômio à esquerda (direita) dessa igualdade é, após o lema 7, o polinômio de Alexander do nó algébrico definido pela sequência $(m_1,n_1),\ldots,(m_{g-1},n_{g-1})$ $((m_1',n_1'),\ldots,$ $,\ldots,(m_{g'-1}',n_{g'-1}'))$. Daí, por indução em $\max\{g,g'\}$, concluímos que $g'-1 = g-1$ e $m_i = m_i'$, $n_i = n_i'$ para $i=1,\ldots,g-1$. Logo, $m_g = m_{g'}'$.

Temos então

<u>Teorema</u> (Burau-Zariski)

Se $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, é um polinômio analìticamente irredutível em $0 \in \mathbb{C}^2$ então a sequência de pares de Puiseux determina o tipo topológico de f em 0.

CAPÍTULO II

O TEOREMA DA FIBRAÇÃO

Seja $f: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ um polinômio tal que $f(0) = 0$ e $\overset{\circ}{0}$ é um ponto crítico isolado isto é, existe uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que $df(z) = 0$, $z \in U$ implica $z = 0$. Denotemos $V = f^{-1}(0)$ e $S_\epsilon = \{(z_1,\ldots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} / \sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2 = \epsilon^2\}$. Temos inicialmente a seguinte

<u>Proposição II.1</u>: Se $\epsilon > 0$ for suficientemente pequeno então $K_\epsilon = S_\epsilon \cap V$ é uma subvariedade C^∞.

<u>Demonstração</u>: Mostraremos que S_ϵ é transversal a V para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, ou seja, que se $S_\epsilon \cap V \neq \emptyset$ e $p \in S_\epsilon \cap V$ então $T_pS_\epsilon + T_pV = T_p\mathbb{C}^{n+1}$ o que implica pelo Teorema da Função Implicita que $K_\epsilon = S_\epsilon \cap V$ é uma subvariedade real de dimensão $2n - 1$.

Considere a função $r: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $r(z) = \sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2$ e a restrição $\tilde{r} = r|_{V-\{0\}\cap U}$. Provaremos que $\tilde{r}$ possui um número finito de valores críticos, de modo que basta tomar ϵ menor do que o mínimo entre estes valores.

Escrevendo $z = x+iy$, $x = (x_1,\ldots,x_{n+1})$ e $y = (y_1,\ldots,y_{n+1})$ coordenadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f(z) = f(x,y) = (u(x,y),v(x,y)) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ vemos que (x,y) é ponto crítico de $\tilde{r}$ se e sòmente se posto $\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \\ x & y \end{bmatrix} \leq 2$ e $u(x,y) = v(x,y) = 0$.

Portanto $H = \{$pontos críticos de $\tilde{r}\}$ é um subconjunto de $V - \{0\}$ definido por equações polinomiais e $\tilde{H} = H \cup \{0\}$ é um subconjunto algébrico de $\mathbb{R}^{2n+2}$. H é uma união finita de subvariedades C^∞ cada uma possuindo um número finito de componentes. [veja apêndice I]

Como $\tilde{r}$ restrita a cada uma destas componentes tem posto 0 (cada componente é formada por pontos críticos de $\tilde{r}$) então $\tilde{r}$ é constante em cada componente. Logo o conjunto de valores críticos de $\tilde{r} = r(H)$ é finito.

∎

<u>Exemplo II.1</u>: $f(z_1,z_2) = z_1^p + z_2^q$ p,q primos entre si

$K_\varepsilon = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon = \{(z_1,z_2) \,/\, z_1^p + z_2^q = 0,\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = \varepsilon^2\}$.

Escrevendo $z_1 = r\,e^{i\theta}$, $z_2 = \rho e^{i\varphi}$ temos: $r^2+\rho^2 = \varepsilon^2$ $r^p e^{p\theta i} + \rho^q e^{q\varphi i} = 0$. Ou seja, $r_o^p = \rho_o^q$, $r_o^2 + \rho_o^2 = \varepsilon^2$ e K_ε está contido no toro $|z_1| = r_o$, $|z_2| = \rho_o$ e pode ser parametrizado por $\alpha \to (r_o e^{iq\alpha}, \rho_o^{\,i(p\alpha+\frac{\pi}{q})})$. Isto é uma curva de Kronecker (nó) no toro.

O que ocorrerá se p e q não forem primos entre sí?

Em geral para $n = 1$ K_ε é união disjunta de círculos.

<u>Exemplo 2</u>: $f(z_1,\dots,z_{n+1}) = z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2$ (função de Morse).

Escrevendo $z_j = x_j + iy_j$ obtemos

$$V = f^{-1}(0) = \{\sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 - \sum_{j=1}^{n+1} y_j^2 = 0,\ \sum_{j=1}^{n+1} x_j y_j = 0\} \text{ e}$$

$$K_\varepsilon = V \cap S_\varepsilon = \{\|x\|^2 = \|y\|^2,\ \langle x,y\rangle = 0,\ \|x\|^2 + \|y\|^2 = \varepsilon^2\}$$

(onde $\langle x,y\rangle = \Sigma x_j y_j$ e $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$).

Ou seja $K_\varepsilon = \{\|x\| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\ \|y\| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \langle x,y\rangle = 0\}$ é difeomorfo ao fibrado por esferas de raio $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ tangente a $S^n_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}$.

O próximo teorema estabelece a relação entre a topologia de K_ε e a de V e mostra que o conhecimento da topologia de K_ε e do mergulho de K_ε em S_ε nos dá a topologia de V.

<u>Teorema II.1</u>: Sejam $B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / \|z\| \le \varepsilon\}$, $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$ e $K_\varepsilon = V \cap S_\varepsilon$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno $V \cap B_\varepsilon$ é homeomorfo ao cone $C(K_\varepsilon) = \{tz,\ 0 \le t \le 1,\ z \in K_\varepsilon\}$. De fato o par $(B_\varepsilon, V \cap B_\varepsilon)$ é homeomorfo ao par $(C(S_\varepsilon), C(K_\varepsilon))$.

<u>Demonstração</u>: Iremos construir uma aplicação

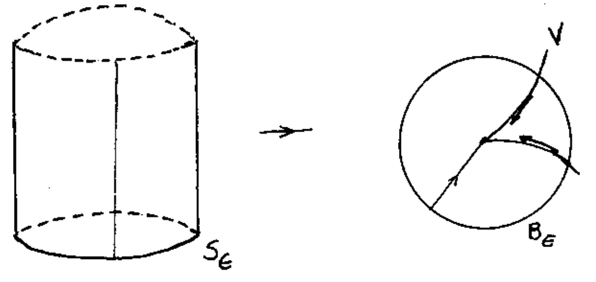
$$p: S_\varepsilon \times (0,\varepsilon^2] \longrightarrow B_\varepsilon - \{0\} \quad \text{com} \quad p(a,\varepsilon^2) = a$$

de modo que para $a \in S_\varepsilon$ fixo, a curva $p(a,t)$ satisfaz:

1) $\|p(a,t)\|^2 = t$

2) $a \in K_\varepsilon$ $f(p(a,t)) = 0$ (a curva está contida em V)

3) $p(a,t)$ é definida andando o tempo $-t$ ao longo da trajetória α de um campo v definido em $B_\varepsilon - \{0\}$ tal que $\alpha(\varepsilon^2) = a$.



Observe que se $r(z) = \|z\|^2$ então $\frac{d}{dt} r(\alpha(t))\Big|_{t=0} =$ $= 2\langle\alpha'(0),\alpha'(0)\rangle$, portanto construiremos inicialmente um campo w em $B_\varepsilon - \{0\}$ tal que $\langle w(z),z\rangle > 0$ e $v(z)$ é tangente a $V - \{0\}$ se $z \in V - \{0\}$. Temos duas situações:

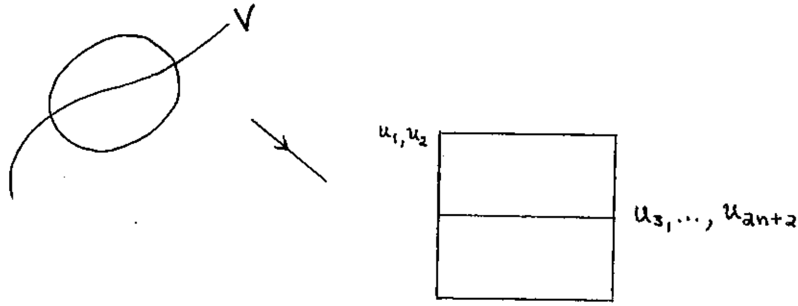
(i) $z \notin V$, definimos localmente $w(y) = y$ para $y \in U$ vizinhança de z disjunta de V (campo radial),

(ii) para $z \in V-\{0\}$ como z não é ponto crítico de $r\big|_{V-\{0\}}$ podemos escolher um sistema de coordenadas em uma vizinhança U de z em $\mathbb{C}^{n+1}$ de modo que $V \cap U = \{(u_1,\ldots,u_{2n+2}) \,/\, u_1 = u_2 = 0\}$ e $\frac{\partial r}{\partial u_k}(z) \neq 0$ para algum $k \in \{3,\ldots,2n+2\}$.

Suponhamos que $\frac{\partial r}{\partial u_{2n+2}}(z) \neq 0$.

Tomando uma vizinhança conexa U_z de z em $\mathbb{C}^{n+1}$ onde $\frac{\partial r}{\partial u_{2n+2}} \neq 0$ e observando que

$\frac{\partial r}{\partial u_{2n+2}}(x(u)) = \text{grad}\ r(x(u))\frac{\partial x}{\partial u_{2n+2}} = 2\langle x(u), \frac{\partial x}{\partial u_{2n+2}}(u)\rangle$ podemos definir $w(x) = \pm \frac{\partial x}{\partial u_{2n+2}}$ de acordo com o sinal de $\frac{\partial r}{\partial u_{2n+2}}(x(u))$.

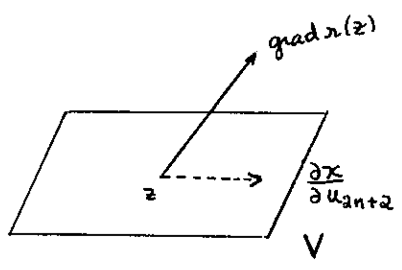


Tomando-se uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_z\}$ de $B_\varepsilon - \{0\}$ obtemos um campo w C^∞ que pode ser normalizado por $v(z) = \frac{w(z)}{2\langle z, w(z)\rangle}$ para que ao considerarmos uma curva integral $\alpha(t)$ de w temos

$$\frac{d}{dt}\|\alpha(t)\|^2 = 2\langle\alpha'(t), \alpha(t)\rangle = 2\langle w(\alpha(t)), \alpha(t)\rangle =$$

$$= \frac{2\langle w(\alpha(t)), \alpha(t)\rangle}{2\langle w(\alpha(t)), \alpha(t)\rangle} = 1 \qquad \text{ou seja}$$

$r(\alpha(t)) = t$.



Observe que o intervalo maximal de definição de uma curva integral $\alpha(t)$ do campo v é $(0,\varepsilon^2]$ [prove]. Definimos

$$P: S_\varepsilon \times (0,\varepsilon^2] \longrightarrow B_\varepsilon - \{0\}$$
$$(a,t) \longmapsto P(a,t) = \alpha(a,t)$$

onde $\alpha(a,t) =$ curva integral do campo v tal que $\alpha(a,\varepsilon^2) = a$.

É claro que P é um difeomorfismo que restrito a $K_\varepsilon \times (0,\varepsilon^2]$ possui imagem em $V \cap B_\varepsilon - \{0\}$. Finalmente definimos

$$\varphi: C(S_\varepsilon) \longrightarrow B_\varepsilon$$
$$tz \longrightarrow P(z,t\varepsilon^2)$$

homeomorfismo que leva $C(t_\varepsilon)$ em $V \cap B_\varepsilon$.

■

Desta forma provamos que o tipo homotópico de $B_\varepsilon - V$ é o mesmo de $S_\varepsilon - K$. Portanto para conhecermos a topologia de $V \cap B_\varepsilon$ precisamos estudar a topologia de K_ε e de seu complementar. O próximo teorema é o instrumento fundamental para este estudo.

Teorema II.2 (da Fibração de Milnor):

Seja $f: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ polinômio tal que $f(0) = 0$. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ a aplicação

$$\varphi_\varepsilon: S_\varepsilon - K_\varepsilon \longrightarrow S^1$$
$$z \longrightarrow \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

é a projeção de uma fibração C^{∞} localmente trivial.

Demonstração: [Milnor (1)]

A prova deste Teorema envolve duas etapas:

A primeira consiste em mostrar que φ_{ε} é uma submersão para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Em seguida mostra-se que podemos levantar o campo unitário tangente a S^1 a um campo w transversal às fibras $\varphi_{\varepsilon}^{-1}(e^{i\theta}) = F_{\theta}$ de modo que se $\alpha(t)$ é uma curva integral de w então $\varphi_{\varepsilon}(\alpha(t))=e^{it}$. A trivialização local será dada pelo fluxo gerado pelo campo w ou seja

$$\psi : F_{\theta} \times I \longrightarrow S_{\varepsilon} - K_{\varepsilon}$$

$$(a,t) \longrightarrow \psi_t(a)$$

com $\varphi_{\varepsilon} \circ \psi_t(a) = e^{i(t+\arg a)} = e^{i\theta}.e^{it}$.

1. Caracterização dos pontos críticos de φ_{ε}:

Se h é uma função holomorfa definimos gradiente de h por grad $h(z)$ é o vetor de $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\forall\, u \in \mathbb{C}^{n+1}$ $dh(z).u = \langle u, \operatorname{grad} h(z)\rangle$ onde $\langle u,v\rangle = \Sigma u_j \bar{v}_j$ (produto hermitiano usual). Portanto se $z_1,\ldots,z_{n+1}$ são coordenadas em $\mathbb{C}^{n+1}$ então $dh(z)\frac{\partial}{\partial z_j} = \langle \frac{\partial}{\partial z_j}, \operatorname{grad} h(z)\rangle = \frac{\partial h}{\partial z_j}$ isto é

$$\operatorname{grad} h(z) = \left(\overline{\frac{\partial h(z)}{\partial z_1}}, \ldots, \overline{\frac{\partial h(z)}{\partial z_{n+1}}} \right).$$

Se $f(z) \neq 0$ podemos escolher localmente uma determinação para $\operatorname{Log} f(z)$ de modo que $\varphi_{\varepsilon}(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i\theta(z)}$ com $\theta(z) = \operatorname{Re}[-i \operatorname{Log} f(z)]$.

Se $p(t)$ é uma curva em $\mathbb{C}^{n+1}$ passando por z então derivando a expressão $\theta(p(t)) = \mathrm{Re}(-i \operatorname{Log} f(p(t))$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\theta(p(t)) = \mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}(-i \operatorname{Log} f(p(t)))\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\langle \frac{dp(t)}{dt}, \operatorname{grad}(-i \operatorname{Log} f(p(t)))\rangle$$

ou seja $d\theta(z).v = \mathrm{Re}\langle v, i \operatorname{grad}(\operatorname{Log} f(z))\rangle$.

Observe agora que $v \in T_z S_\varepsilon$ se e sòmente se $\mathrm{Re}\langle v,z\rangle = 0$ (verifique) portanto $z \in S_\varepsilon$ é ponto crítico de φ_ε se e sòmente se o sistema

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\langle v, i \operatorname{grad}(\operatorname{Log} f(z))\rangle = 0 \\ \mathrm{Re}\langle v,z\rangle = 0 \end{cases}$$

admite $2n+1$ soluções linearmente independentes.

Mas isto ocorre se e sòmente se z e $i \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z)$ são linearmente dependentes sobre $\mathbb{R}$. Concluímos assim que o conjunto dos pontos críticos de φ_ε é igual a

$$\{z \in S_\varepsilon \ / \ i \operatorname{grad}(\operatorname{Log} f(z)) = cz, \ c \in \mathbb{R}\}.$$

2. <u>Existe</u> $\varepsilon_0 > 0$ <u>tal que se</u> $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ <u>então</u> φ_ε <u>é uma submersão</u>:

A prova desta afirmação segue imediatamente do

<u>Lema II.1</u>: Se f é um polinômio que se anula em 0 então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall\, z \in \mathbb{C}^{n+1} - f^{-1}(0)$, $\|z\| \leq \varepsilon_0$ temos:

z e grad Log $f(z)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$ ou grad Log $f(z) = \lambda z$, $\lambda \neq 0$ $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{4}$.

Antes de provarmos o lema verifiquemos que se $p: [0,\varepsilon) \to \mathbb{C}^{n+1}$ é uma curva real analítica com $p(0) = 0$, $f(p(t)) \neq 0$ para $t \neq 0$ e grad Log $f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$, $\lambda(t) \in \mathbb{C}$ então $\arg \lambda(t) \to 0$ quando $t \to 0$.

<u>Prova</u>: Escrevendo $p(t) = at^{\alpha}+a_1 t^{\alpha+1}+\ldots$ com $a_i \in \mathbb{C}^{n+1}$ $a \neq 0$

$f(p(t)) = bt^{\beta} +\ldots$ $b \in \mathbb{C}$

$\operatorname{grad} f(p(t)) = ct^{\gamma}+\ldots$ $c \neq 0$, $c \in \mathbb{C}^{n+1}$

séries convergentes em $|t| < \varepsilon'$, da hipótese grad Log $f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$ segue que $\operatorname{grad} f(p(t)) = \lambda(t)\,\overline{f(p(t))}\,p(t)$ ou $ct^{\gamma}+\ldots = \lambda(t)[a\bar{b}\, t^{\alpha+\beta}+\ldots]$.

Assim, podemos escrever $\lambda(t) = \lambda_o t^{\gamma-\alpha-\beta}[1+k_1 t+\ldots]$ com $c = \lambda_o \bar{b} a$ de modo que $\dfrac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} = \dfrac{\lambda_o(1+k_1 t+\ldots)}{|\lambda_o|\,|1+k_1 t+\ldots|}$ e

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} = \dfrac{\lambda_o}{|\lambda_o|}$. Por outro lado $\dfrac{d}{dt} f(p(t)) = b\beta t^{\beta-1}+\ldots =$
$= \langle p'(t), \operatorname{grad} f(p(t))\rangle = \langle a\alpha t^{\alpha-1}+\ldots, ct^{\gamma}+\ldots\rangle =$
$= \langle a\alpha t^{\alpha-1}+\ldots, \lambda_o \bar{b} a t^{\gamma}+\ldots\rangle$. Donde $b\beta t^{\beta-1}+\ldots = \bar{\lambda}_o b\,\alpha |a|^2 t^{\alpha+\gamma-1}+\ldots$
isto é $\beta = \alpha |a|^2 \bar{\lambda}_o$. Logo $\bar{\lambda}_o > 0$ isto é $\lambda_o > 0$.

Concluímos assim que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} = 1$.

Demonstração do Lema II.1:

Vamos supor, por absurdo, que arbitràriamente próximo de 0 exista $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$ tal que grad Log $f(z) = \lambda z$ com $\lambda = 0$ ou $|\arg \lambda| \geq \frac{\pi}{4}$. Iremos provar que existe uma curva analítica real $p(t)$ tal que $p(0) = 0$ e que ao longo dos pontos $p(t)$ as condições acima são satisfeitas, obteremos assim uma contradição com a observação anterior. A existência de tal curva segue do Lema de Seleção da Curva [veja o Apêndice II].

"Sejam $V \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto algébrico e $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto semi-algébrico, isto é $U = \{x \in \mathbb{R}^m / g_1(x) > 0, \ldots, \ldots, g_\ell(x) > 0\}$ com g_i polinômio $i = 1, 2, \ldots, \ell$.

Se $U \cap V$ contém pontos arbitràriamente próximos de 0 ($0 \in \overline{U \cap V}$) então existe uma curva $p: [0, \delta) \to \mathbb{R}^m$ analítica real tal que $p(0) = 0$ e $p(t) \in U \cap V$, $t > 0$".

Deste modo, para provarmos o Lema II.1 basta expressar as condições grad Log $f(z) = \lambda z$ com $\lambda = 0$ ou $|\arg \lambda| \geq \frac{\pi}{4}$ como interseção de conjuntos de acordo com o Lema da Seleção da Curva.

Seja $W = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / \text{grad } f(z) = \lambda z\}$, então $z \in W$ se e sòmente se $z_k \overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}}(z) = z_j \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}}(z)$. Obtemos assim W como um subconjunto algébrico real de $\mathbb{C}^{n+1}$ pois é definido por um número finito de equações polinomiais nas variáveis x_j, y_j quando escrevemos $z_j = x_j + iy_j$ e $z = (z_1, \ldots, z_{n+1})$. Além disso como grad Log $f(z) = \frac{\text{grad } f(z)}{\overline{f(z)}}$ então grad Log $f(z) = \lambda z$ se e sòmente se $\operatorname{grad} f(z) = \lambda.\overline{f(z)}z$ e $\arg \lambda = \arg\langle \operatorname{grad} f(z), \overline{f(z)}z\rangle$.

Portanto as condições $\operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z) = \lambda z$ e $|\arg\lambda| > \frac{\pi}{4}$ são equivalentes a $z \in W$ e $|\arg\langle \operatorname{grad} f(z), \overline{f(z)}z\rangle| > \frac{\pi}{4}$, o que é o mesmo que $z \in W \cap (U_+ \cup U_-)$ onde

$$U_+ = \{z \ / \ \operatorname{Re}[(1+i)\langle \operatorname{grad} f(z), \overline{f(z)}z\rangle < 0]\} \quad \text{e}$$

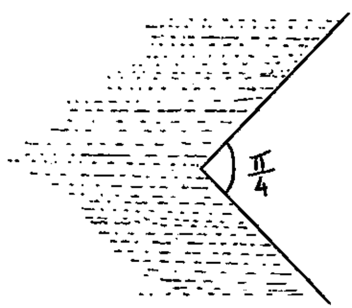
$$U_- = \{z \ / \ \operatorname{Re}[(1-i)\langle \operatorname{grad} f(z), \overline{f(z)}z\rangle < 0]\} \quad \text{são}$$

subconjuntos semi-algébricos reais.

Para as condições $\operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z) = \lambda z$, $\lambda = 0$ ou $|\arg \lambda| = \frac{\pi}{4}$ usamos

$W = \{z \ / \ \operatorname{Re}[(1+i)\langle \operatorname{grad} f(z), \overline{f(z)}z\rangle].\operatorname{Re}[(1-i)\langle \operatorname{grad} f(z), \overline{f(z)}z\rangle]=0\}$

e $U = |f(z)|^2 > 0$.



3. <u>Para</u> $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_o$ $(S_\varepsilon - K_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, S^1)$ <u>é uma fibração localmente trivial</u>.

Seja $F_\theta = \varphi_\varepsilon^{-1}(e^{i\theta})$ devemos mostrar que existe uma vizinhança $U_\theta \subset S^1$ e um difeomorfismo $\psi_\theta: U_\theta \times F_\theta \longrightarrow \varphi_\varepsilon^{-1}(U_\theta)$ tal que $\varphi_\varepsilon \circ \psi_\theta(e^{i\alpha},x) = e^{i\alpha}$.

Como dissemos no início da demonstração deste teorema esta trivialização é obtida pela construção para cada ponto $z \in F_\theta$ de uma curva transversal às fibras que projeta-se via φ_ε em um laço em S^1 com velocidade constante positiva. (Levantamento horizontal do laço e^{it} $0 \leq t \leq 2\pi$).

Suponhamos que $p(t)$ seja uma tal curva em $S_\varepsilon - K_\varepsilon$, então $\varphi_\varepsilon(p(t)) = \dfrac{f(p(t))}{|f(p(t))|} = e^{i\theta(p(t))}$ ou seja $\theta(p(t)) = \mathrm{Re}[-i \operatorname{Log} f(p(t))]$. Derivando teremos:

$$\frac{d}{dt}\theta(p(t)) = \mathrm{Re}\langle p'(t), i \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(p(t))\rangle = c > 0$$

Assim provamos inicialmente que <u>existe um campo de vetores</u> v <u>de classe</u> C^∞, <u>tangente à</u> $S_\varepsilon - K_\varepsilon$ <u>tal que</u>

$$0 < |\arg\langle v(z), i \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z)\rangle| < \frac{\pi}{4}, \quad \forall\, z \in S_\varepsilon - K_\varepsilon.$$

Construimos este campo localmente e em seguida usamos uma partição da unidade para obter v.

Se $z_0 \in S_\varepsilon - K_\varepsilon$ para a construção local temos 2 situações a considerar:

1) z_0 e $\operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z_0)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$. Neste caso o sistema $\begin{cases} \langle v,z\rangle = 0 \\ \langle v, i \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z)\rangle = 1 \end{cases}$

nos dá uma solução $v(z)$ em uma vizinhança de z_0. Observe que a primeira equação nos dá automáticamente que $v(z) \in T_z S_\varepsilon$.

2) $\operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z_o) = \lambda z_o$. De acordo com o Lema II.1 $0 < |\arg \lambda| < \frac{\pi}{4}$. Definimos $v(z) = iz$ em uma vizinhança de z_o de modo que $\operatorname{Re}\langle v(z), z\rangle = 0$ (iz é tangente a S_ε) e como $\langle v(z_o), i \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z_o)\rangle = \langle iz_o, i\lambda z_o\rangle = \bar{\lambda}|z_o|^2$ então $0 < |\arg\langle v(z), i \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z)\rangle| < \frac{\pi}{4}$ para z suficientemente próximo de z_o.

Seja $w(z) = \dfrac{v(z)}{\operatorname{Re}\langle v(z), i \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z)\rangle}$, então w é um campo tangente a $S_\varepsilon - K_\varepsilon$ que satisfaz $\operatorname{Re}\langle v(z), i \operatorname{gradLogf}(z)\rangle = 1$. Além disso $|\operatorname{Re}\langle w(z), \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z)\rangle| =$

$$= \frac{|\operatorname{Re}\langle v(z), \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z)\rangle|}{|\operatorname{Re}\langle v(z), i \operatorname{gradLogf}(z)\rangle|} = \frac{|\operatorname{Im}\langle v(z), i \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z)\rangle|}{|\operatorname{Re}\langle v(z), i \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z)\rangle|} < 1.$$

Esta inequação nos garante que o fluxo gerado pelo campo w está definido para todo $t \in \mathbb{R}$ pois do contrário, se alguma curva integral $p(t)$ tende a K_ε quando $t \to t_o < \infty$ então $\lim_{t \to t_o} f(p(t)) = 0$ ou seja $\lim_{t \to t_o} \operatorname{Re}(\operatorname{Log} f(p(t))) = -\infty$. Mas isto não ocorre pois $\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\operatorname{Log} f(p(t))) = \operatorname{Re}\langle w(p(t)), \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(p(t))\rangle$ ou seja $\operatorname{Re} \operatorname{Log} f(p(t))$ tem derivada limitada.

Desta forma, se h é o fluxo gerado por w então $h_t: S_\varepsilon - K_\varepsilon \to S_\varepsilon - K_\varepsilon$ é um difeomorfismo tal que $h_t(F_\theta) = F_{\theta+t}$. Portanto dado $e^{i\theta} \in S^1$ seja U_θ um intervalo aberto em S^1 em torno de $e^{i\theta}$.
$$\begin{aligned} \Psi_\theta : U_\theta \times F_\theta &\longrightarrow \varphi_\varepsilon^{-1}(U_\theta) \\ (e^{i\alpha}, z) &\longmapsto h_{\alpha-\theta}(z) \end{aligned}$$
é um difeomorfismo tal que $\varphi_\varepsilon \circ \Psi_\theta(z) = \varphi_\varepsilon \circ h_{\alpha-\theta}(z) = e^{(\alpha-\theta)i} . e^{i\theta} = e^{i\alpha}$ como queríamos. ■

Exercício II.1: Em alguns casos é possível encontrar explìcitamente um campo que satisfaz as propriedades do item 3) da prova do Teorema da Fibração.

Por exemplo, seja $f(z_1,z_2,\dots,z_{n+1}) = z_1^{a_1}+\dots+z_{n+1}^{a_{n+1}}$ $a_i \geq 2$, $a_i \in N$ para $i = 1,2,\dots,n+1$.

Então i grad Log $f(z) = \frac{i}{\sum_{j=1}^{n+1} \bar{z}_j^{a_j}}(a_1\bar{z}_1^{a_1-1},\dots,a_{n+1}\bar{z}_{n+1}^{a_{n+1}-1})$ e

$$\langle v, i \text{ grad Log } f(z)\rangle = -i\,\frac{\sum_{j=1}^{n+1} a_j v_j z_j^{a_j-1}}{\sum_{j=1}^{n+1} z_j^{a_j}}$$

Queremos $\begin{cases} \mathrm{Re}\langle v,z\rangle = 0 & (v \text{ tangente à esfera}) \\ \mathrm{Re}\langle v, i \text{ grad Log } f(z)\rangle > 0 \end{cases}$

Basta fazer por exemplo $v = (v_1,\dots,v_{n+1})$ com $v_j = i\,\frac{z_j}{a_j}$ de modo que $\mathrm{Re}\langle v,z\rangle = 0$ e $\langle v, i \text{ grad Log } f(z)\rangle = 1$. v é um campo linear em $\mathbb{C}^{n+1}$ e tangente à esfera S_ϵ. O fluxo gerado por v é $\psi_t(z_1^o,\dots,z_{n+1}^o) = (e^{\frac{it}{a_1}} z_1^o,\dots,e^{it/a_{n+1}} z_{n+1}^o)$

e satisfaz $\varphi_\epsilon \circ \psi_t(z^o) = \frac{f\circ\psi_t(z^o)}{|f\circ\psi_t(z^o)|} = e^{it}\,\varphi_\epsilon(z^o)$.

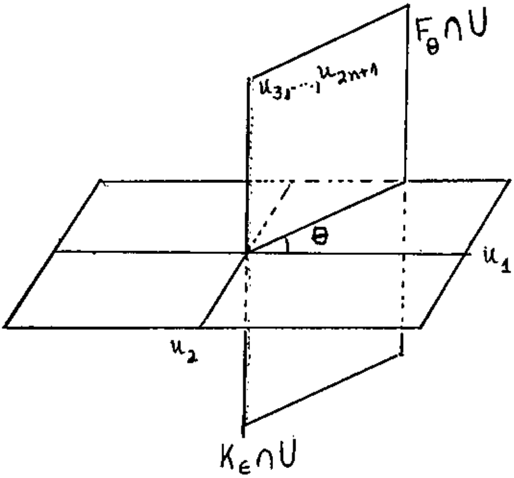
Exercício II.2: Prove que z é ponto singular de $f|_{S_\epsilon}$ se e sòmente se grad $f(z) = cz$ para algum $c \in \mathbb{C}$.

<u>Exercício II.3</u>: Se 0 é um ponto regular de f, $f(0) = 0$ então se $V = f^{-1}(0)$ e $F_o = \varphi_\varepsilon^{-1}(1)$ com $\varphi_\varepsilon : S_\varepsilon - K \to S^1$ como no Teorema da Fibração então F_o é diomorfa a $\mathbb{R}^{2n}$ $F_o = f^{-1}(\mathbb{R}_+) \cap S_\varepsilon$.

<u>Sugestão</u>:

Use o Lema de Morse e prove que existem coordenadas $u_1, \ldots, u_{2n+1}$ em uma vizinhança de 0 para a subvariedade $f^{-1}(\mathbb{R})$ tais que $f^{-1}(0) = \{u_1 = 0\}$ e se $r(z) = \|z\|^2$ então $r|_{f^{-1}(\mathbb{R})}$ se escreve $\sum_{j=1}^{2n+1} u_j^2$. Logo $f^{-1}(\mathbb{R}_+) \cap S_\varepsilon = \{u_1 > 0, \sum_{j=1}^{2n+1} u_j^2 = \varepsilon^2\}$ (hemisfério) portanto difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$.

Vimos pela Proposição II.1 que se 0 é um ponto crítico isolado de f, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno a esfera S_ε é transversal a $f^{-1}(0)$ com $K_\varepsilon = S_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$ uma subvariedade de dimensão $2n-1$. Isto implica que se $z^o \in K_\varepsilon$ então z^o não é ponto singular de $f|_{S_\varepsilon}$. Pelo Teorema da Função Implícita existem coordenadas $u_1, \ldots, u_{2n+1}$ em uma vizinhança U de z^o em S_ε tais que $f(u_1, \ldots, u_{2n+1}) = u_1 + iu_2$. Donde se $F_\theta = \varphi_\varepsilon^{-1}(e^{i\theta})$ então $z \in U \cap F_\theta$ se e sòmente se $u_1(z)^2 + u_2(z)^2 \neq 0$ e $\arg(u_1(z) + iu_2(z)) = \theta$ (por exemplo $F_o = \{u_2 = 0,\ u_1 > 0\}$). De modo que $\bar{F}_\theta \cap U = [F_\theta \cup \{u_1(z) = u_2(z) = 0\}] \cap U = [F_\theta \cup K_\varepsilon] \cap U$.



Provamos assim que se 0 é um ponto crítico isolado de f então $\bar{F}_\theta$ é uma variedade de dimensão $2n$ com fronteira $\partial\bar{F}_\theta = K_\varepsilon$.

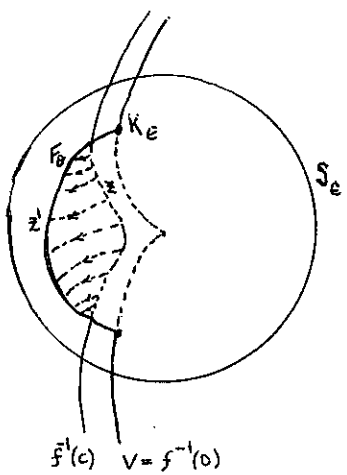
<u>Proposição II.2</u>: $\bar{F}_\theta$ está mergulhada em S_ε de modo que $\pi_i(\bar{F}_\theta) \cong \pi_i(S_\varepsilon - \bar{F}_\theta)$.

<u>Demonstração</u>: $\varphi_\varepsilon : S_\varepsilon - \bar{F}_\theta \to S^1 - e^{i\theta}$ é uma fibração localmente trivial. Como $S^1 - e^{i\theta}$ é contrátil então $S_\varepsilon - \bar{F}_\theta$ possui qualquer outra fibra $F_{\theta'}$ $(\theta' \neq \theta)$ como retrato por deformação. Portanto $\pi_i(F_{\theta'}) \cong \pi_i(S_\varepsilon - \bar{F}_\theta)$, mas $F_{\theta'}$ é difeomorfa a F_θ logo $\pi_i(S_\varepsilon - \bar{F}_\theta) \cong \pi_i(F_\theta) \cong \pi_i(\bar{F}_\theta)$. ■

Esta proposição será usada mais adiante no estudo da topologia da fibra F_θ. Antes porém provaremos uma proposição que nos dá uma descrição alternativa da fibra.

Proposição II.3: Se $c \in \mathbb{C}$ possui módulo suficientemente pequeno então $f^{-1}(c) \cap D_\epsilon$ é difeomorfo a $F_\theta \cap \{z \,/\, |f(z)| > |c|\}$ onde $e^{i\theta} = \dfrac{c}{|c|}$ e $D_\epsilon = \{z \in C^{n+1} \,/\, \|z\| < \epsilon\}$.

Demonstração: A idéia da prova desta proposição é ir puxando a fibra $f^{-1}(c) \cap D_\epsilon$ para a esfera preservando o argumento de f. (Veja a Figura)



Seja $z \in D_\epsilon - V$ tal que $f(z) = c$. Se $p(z,t)$ é uma curva em $D_\epsilon - V$ que satisfaz: $p(z,0) = z$, $\|p(z,t)\|$ é crescente e $\arg f(p(z,t))$ é constante então no instante em que $p(z,t)$ atingir a esfera S_ϵ teremos um ponto sobre a fibra F_θ. Desta maneira definimos uma correspondência que a cada ponto

z de $f^{-1}(c) \cap D_\varepsilon$ associa o único ponto da interseção $p(z,t) \cap \cap S_\varepsilon$.

Condições suficientes para definirmos tal curva são:

(i) $\frac{d}{dt}\|p(z,t)\|^2 > 0$ ou $\mathrm{Re}\langle \frac{d}{dt}p(z,t), p(z,t)\rangle > 0$

(ii) $\dfrac{f(p(z,t))}{|f(p(z,t))|} = e^{i\theta(p(z,t))} =$ constante ou

$$0 = \frac{d}{dt}\theta(p(z,t)) = \mathrm{Re}\langle \frac{d}{dt}p(z,t), i \text{ grad Log } f(p(z,t))\rangle$$

ou ainda $\langle \frac{d}{dt}p(z,t), \text{grad Log } f(p(z,t))\rangle \in \mathbb{R}$.

Definimos então um campo em D_ε de modo análogo ao Teorema II.2. Localmente temos:

a) se z_o e grad Log $f(z_o)$ são linearmente independentes então o sistema $\begin{cases} \langle v(z), \text{grad Log } f(z)\rangle = 1 \\ \langle v(z), z\rangle = 1 \end{cases}$ possui solução C^∞ em uma vizinhança de z_o.

b) se grad Log $f(z_o) = \lambda z_o$ definimos $v(z) = \text{gradLogf}(z)$. É claro que $\langle v(z), \text{grad Log } f(z)\rangle > 0$. Além disso pelo Lema II.1 $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ e $\mathrm{Re}\langle v(z_o), z_o\rangle = \mathrm{Re}\,\lambda\|z_o\|^2 > 0$ portanto $\mathrm{Re}\langle v(z), z\rangle$ é positivo em uma vizinhança de z_o. Usando uma partição da unidade obtemos $v(z)$.

Observe que com o campo assim definido se $p(z,t)$ é uma curva integral de v passando por z então $|f(p(z,t))|$ é também crescente de maneira que $p(z,t)$ está definida para todo $t > 0$ tal que $p(z,t)$ está em uma vizinhança de $D_\varepsilon - V$.

A equação $\|p(z,t)\|^2 = \varepsilon^2$ define implìcitamente t como função diferenciável de z, logo podemos definir a aplicação

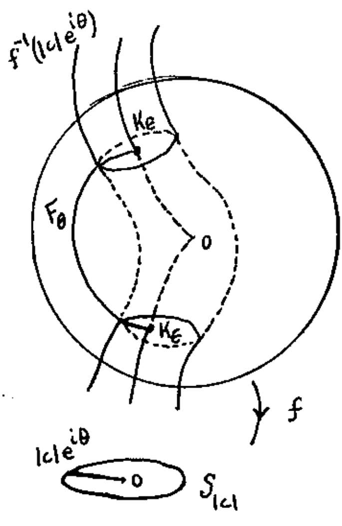
$$\begin{aligned} f^{-1}(c) \cap D_\varepsilon &\longrightarrow S_\varepsilon \\ z &\longmapsto p(z,t(z)) = p(z,t) \cap S_\varepsilon \end{aligned}$$

. Como vimos a imagem desta aplicação (difeomorfismo) é a parte de F_θ tal que $|f(z)| > c$ pois $|f|$ é crescente ao longo das trajetórias de v.

∎

Usando Teoria de Morse é possível provar que de fato $f^{-1}(c) \cap D_\varepsilon$ é difeomorfa a F_θ.

Segue da prova desta proposição que para θ fixo $f^{-1}(|c|e^{i\theta}) \cap D_\varepsilon$ é difeomorfa a $F_\theta \cap \{z \;/\; |f(z)| > |c|\}$. Variando θ no intervalo $[0,2\pi]$ teremos $f^{-1}(S_{|c|}) \cap D_\varepsilon$ é difeomorfo a $S_\varepsilon - V \cap \{z \mid |f(z)| > |c|\}$ onde $S_{|c|} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |c|\}$. Além disso $f^{-1}(S_{|c|}) \cap B_\varepsilon$ é homeomorfo a $S_\varepsilon - K_\varepsilon \cap \{z \mid |f(z)| \geq |c|\}$.



Isto sugere que ao variarmos c (suficientemente próximo de 0 de forma que $f^{-1}(c)$ seja transversal a S_ε) poderemos fibrar também o complementar de V em B_ε. Este é o conteúdo do próximo teorema.

<u>Teorema II.3</u>:

Seja $f: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa com um número finito de pontos críticos na bola $B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| \le \varepsilon\}$. Suponhamos que f não tenha pontos críticos em $\partial B_\varepsilon = S_\varepsilon$ e que os valores críticos $t_1,\ldots,t_r$ estejam contidos no interior de um disco $D_\eta = \{z \in C / |z| \le \eta\}$ $(\eta = \eta(\varepsilon))$ de modo que $f^{-1}(t)$ é transversal a S_ε para todo $t \in D_\eta - \{t_1,\ldots,t_r\}$.

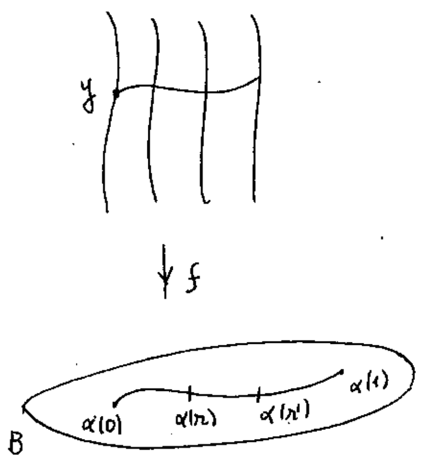
Então $f_\varepsilon: B_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta-\{t_1,\ldots,t_r\}) \to D_\eta-\{t_1,\ldots,t_r\}$ é a projeção de uma fibração localmente trivial com bordo.

<u>Demonstração</u>: Observe que f_ε e $f_\varepsilon|_{S_\varepsilon}$ têm posto máximo $(=2)$ e que as fibras $f_\varepsilon^{-1}(t)$ são subvariedades (compactas) com bordo. O fato de que as fibras $f_\varepsilon^{-1}(t)$ são difeomorfas segue do Teorema de Ehresmann ([veja Ehresmann] e [Wolf]) que pode ser enunciado assim:

"Sejam $f: E \to B$ uma aplicação própria sobrejetiva com E, B variedades diferenciáveis conexas tais que posto de $f = \dim B$ e posto $f|_{\partial E} = \dim B$. Então para cada ponto $b \in B$ existem uma vizinhança U de b e um difeomorfismo $\Phi: [f^{-1}(b)\times U,(f^{-1}(b)\cap\partial E)\times U] \longrightarrow [f^{-1}(U),f^{-1}(U)\times\partial E]$ (isto é (E,B,f) é uma fibração localmente trivial)".

Seguindo [Wolf] vamos dar a idéia da prova deste teorema:

Suponhamos inicialmente que $\partial E = \emptyset$ e B seja uma variedade Riemanniana. Seja $\alpha: [0,1] \to B$ uma curva em B. Se $\alpha^{r,s} = \alpha|_{[r,s]}$ com $0 \leq r \leq s \leq 1$ então para cada $y \in f^{-1}(\alpha(r))$ existe um número $s(y)$, $r < s(y) \leq 1$ tal que a curva $\alpha^{r,s(y)}$ possui um <u>levantamento horizontal ao ponto</u> y, isto é, existe uma curva α_y tal que $f \circ \alpha_y(t) = \alpha(t)$ para $r \leq t \leq s(y)$ e $\alpha_y(r) = y$.



Mas $s(y)$ é contínua e como a fibra $f^{-1}(\alpha(r))$ é compacta existe $r' = \min_{y \in f^{-1}(\alpha(r))} s(y)$ $r < r'$ e $\alpha^{r,r'}$ possui um levantamento horizontal a partir de qualquer ponto de $f^{-1}(\alpha(r))$.

Desta forma, como r é arbitrário, obtemos um levantamento horizontal para $0 \leq r < 1$.

Usando a curva $\beta(t) = \alpha(1-t)$ obtemos que β possui levantamento horizontal o que significa que $\alpha = \alpha^{0,1}$, possui levantamento horizontal.

Vimos assim que toda curva em B possui levantamento horizontal.

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "f"] \\
{[0,1]} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "?"] & B
\end{tikzcd}
$$

Sejam $b \in B$ e U uma vizinhança normal de b em B. Se $v \in U$ denotamos por $v(t)$ $0 \leq t \leq 1$ o raio grodésico em U de b a v.

Definimos $h\colon f^{-1}(b) \times U \longrightarrow f^{-1}(U)$ onde $v_x(t)$ é

$$(x,v) \longrightarrow v_x(1)$$

um levantamento horizontal de $v(t)$ ao ponto x. h é injetiva (por construção) e sobrejetiva pois U é vizinhança normal de b. [$v(1-t)$ possui levantamento horizontal]. É fácil ver que h é um difeomorfismo.

No caso em que $\partial E \neq \emptyset$ basta obter o levantamento horizontal de modo que se $x \in \partial E \cap f^{-1}(U)$ então $v_x(t) \in$ $\in f^{-1}(U) \cap \partial E$ (levantamento a partir de pontos que estão na fronteira ficam totalmente contidos na fronteira).

■

Seguindo a notação de Ehresmann, se $\phi\colon E \to B$ é uma submersão sobrejetiva e $x \in E$ chamamos de subespaço vertical de

T_xE ao subespaço $V_x = \{v \in T_xE \; / \; d\phi(x)\, v = 0\}$ e ao seu complementar H_x tal que $T_xE = V_x \oplus H_x$ o subespaço horizontal em x. ($d\phi(x)$: $H_x \to T_{\phi(x)}B$ é um isomorfismo).

A <u>distribuição vertical</u> é o conjunto $\mathcal{V} = \{V_x\}_{x\in E}$ e uma <u>conexão de Ehresmann para</u> ϕ é uma distribuição $\mathcal{H} = \{H_x\}_{x\in E}$ complementar a $\mathcal{V}$.

Em coordenadas locais podemos ver uma conexão de Ehresmann como um sistema de equações diferenciais cujos coeficientes depende diferenciavelmente (C^∞) do ponto x.

<u>Exercício</u>: Dê um exemplo de submersão sobrejetiva ϕ: $E \to B$ que não é uma fibração.

CAPÍTULO III

TOPOLOGIA DA FIBRA E DE K

Neste capítulo descreveremos alguns resultados sobre a topologia da fibra e de $K = S_\varepsilon \cap V$, onde $f: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$, $f(0)=0$, é uma função polinomial. Tal estudo é baseado em métodos da teoria de Morse. As principais referencias para este capítulo são [Milnor (1)] e [Milnor (3)]. Começamos com:

<u>Teorema III.1</u>:

A variedade F_θ tem o tipo de homotopia de um CW-complexo finito de dimensão n. Além disso, F_θ é paralelizável.

<u>Demonstração</u>:

Estudamos inicialmente a função $g_\theta: F_\theta \to \mathbb{R}$ definida por $g_\theta(z) = \log|f(z)|$. Em seguida aproximamos g_θ por uma função de Morse satisfazendo certas propriedades que permitirão obter o resultado.

<u>Lema III.2</u>:

Os pontos críticos de g_θ são os pontos $z \in F_\theta$ tais que $\operatorname{grad} \log f(z)$ é um múltiplo complexo de z.

Demonstração de III.2:

Seja $\rho: \mathbb{R} \to F_\theta$ um caminho diferenciável passando por $z = \rho(0)$. Como $\log|f(z)| = \operatorname{Re} \operatorname{Log} f(z)$ temos

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re} \operatorname{Log} f(\rho(t))\Big|_{t=0} = \operatorname{Re}\langle \frac{d\rho}{dt}\Big|_{t=0}, \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(\rho(0))\rangle .$$

Portanto, afim de que z seja ponto crítico de g_θ devemos ter $\operatorname{Re}\langle \frac{d\rho}{dt}\Big|_{t=0}, \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z)\rangle = 0$, ou seja, $\operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z)$ é normal a F_θ em z. Agora, por II.2, z e $i \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z)$ geram o espaço normal (real) a F_θ em z e daí segue que

$$\operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z) = \lambda_1 z + \lambda_2 i \operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

ou seja, $\operatorname{grad} \operatorname{Log} f(z) = \dfrac{\lambda_1}{1-i\lambda_2} z$.

Continuando o estudo de g_θ obteremos agora uma descrição da Hessiana de g_θ num ponto crítico $z \in F_\theta$ que nos permitirá calcular o índice de Morse num tal ponto.

Dado $v \in T_z F_\theta$ seja $\rho: \mathbb{R} \to F_\theta$ um caminho diferenciável tal que $z = \rho(0)$ e $v = \frac{d\rho}{dt}\Big|_{t=0}$.

Lema III.3:

$$\frac{d^2}{dt^2}(g_\theta \circ \rho)\Big|_{t=0} = \Sigma \operatorname{Re}(b_{jk} v_j v_k) - c|v|^2 \quad \text{onde} \quad (b_{jk})$$

é uma matriz complexa e c é um número real positivo.

Demonstração de III.3:

Como F_θ é definida por $\frac{f}{|f|} = e^{i\theta}$ e $p(t) \in F_\theta$

temos que $(g_\theta \circ p)(t) = \log|f(p(t))| = \mathrm{Log}\, f(p(t)) - i\theta$. Daí segue que $\frac{d}{dt}(g_\theta \circ p) = \sum_j (\frac{\partial}{\partial z_j} \mathrm{Log}\, f(p(t))) \frac{dp_j}{dt}$. Derivando novamente obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2}(g_\theta \circ p) = \sum_j (\frac{\partial}{\partial z_j} \mathrm{Log}\, f(p(t))) \frac{d^2 p_j}{dt^2} + \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_k} \mathrm{Log} f(p(t)) \frac{dp_j}{dt} \frac{dp_k}{dt}.$$

Fazendo $t = 0$ e lembrando que $\mathrm{grad}\, \log f(z) = \lambda z$ por III.2 ficamos com

$$\frac{d^2}{dt^2}(g_\theta \circ p)\Big|_{t=0} = \langle \frac{d^2 p}{dt^2}\Big|_{t=0}, \lambda z\rangle + \sum_{j,k} B_{jk} v_j v_k \quad \text{onde}$$

$B_{j_k} = \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_k} \mathrm{Log}\, f(z)$. Como $\frac{d^2}{dt^2}(g_\theta \circ p)\Big|_{t=0}$ é real, multiplicando ambos os membros por λ e tomando a parte real obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2}(g_\theta \circ p)\Big|_{t=0} \mathrm{Re}(\lambda) = |\lambda|^2 \,\mathrm{Re}\langle \frac{d^2 p}{dt^2}\Big|_{t=0}, z\rangle + \sum_{j,k} \mathrm{Re}(\lambda B_{jk} v_j v_k).$$

Por outro lado, derivando duas vezes a identidade $\langle p(t), p(t)\rangle =$ $=$ constante se tem que $\mathrm{Re}\langle \frac{d^2 p}{dt^2}\Big|_{t=0}, z\rangle = -|v|^2$. Agora, sabemos por II que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Substituindo na expressão acima ficamos com

$$\frac{d^2}{dt^2}(g_\theta \circ p)\Big|_{t=0} = \sum_{j,k} \mathrm{Re}(\frac{\lambda B_{jk}}{\mathrm{Re}(\lambda)} v_j v_k) - \frac{|\lambda|^2}{\mathrm{Re}(\lambda)} |v|^2.$$

Colocando $b_{jk} = \frac{\lambda B_{jk}}{\mathrm{Re}(\lambda)}$ e $c = \frac{|\lambda|^2}{\mathrm{Re}(\lambda)}$ concluimos a demonstração de III.3.

Antes de prosseguirmos, observamos que T_zF_θ onde z é ponto crítico de g_θ é um $\mathbb{C}$-<u>espaço vetorial</u> caracterizado por $\langle v,z\rangle = 0$ (produto hermitiano). De fato, se $i \text{ grad Log } f(z) = \lambda z$ com $\lambda \in \mathbb{C}$, então dizer que $\mathrm{Re}\langle v, i \text{ grad Log } f(z)\rangle = 0$ é o mesmo que dizer que $\mathrm{Re}\langle v,-i\lambda z\rangle = 0$. Daí segue que $\mathrm{Im}\langle v,z\rangle = 0$ e que $\mathrm{Re}\langle v,z\rangle = 0$, portanto, $\langle v,z\rangle = 0$.

Recordamos também que o <u>índice de Morse</u> de um funcional bilinear H sobre um espaço vetorial V é a máxima dentre as dimensões dos subespaços de V nos quais H é definido negativo.

Com isto em mãos temos

<u>Lema III.4</u>:

O índice de Morse i de $g_\theta : F_\theta \to \mathbb{R}$ num ponto crítico satisfaz $i \geq n$.

<u>Demonstração de III.4</u>:

Por III.3 sabemos que a Hessiana de g_θ no ponto z é dada por $H(v) = \sum\limits_{j,k} \mathrm{Re}(b_{jk}v_jv_k) - c|v|^2$ e pela observação acima temos que se $v \in T_zF_\theta$ o mesmo ocorre com iv. Daí concluimos que se $H(v) \geq 0$ então $H(iv) < 0$ isto porque o primeiro termo troca de sinal e o segundo é negativo.

Decomponha $T_zF_\theta = T_- \oplus T$, soma direta real, onde H é definida negativa em T_- e definida semi-positiva em T. Por definição $i = \dim_{\mathbb{R}} T_-$ é o índice de Morse de H. Mas como H

também é definida negativa em iT devemos ter $i \geq \dim_{\mathbb{R}}(iT) = \dim_{\mathbb{R}} T = 2n-i$ ou seja, $i \geq n$.

Para podermos aproximar g_θ por uma função de Morse precisaremos do

Lema III.5:

Existe uma constante $\eta_\theta > 0$ tal que todos os pontos críticos de g_θ estão contidos no subconjunto compacto de F_θ dado por $|f(z)| \geq \eta_\theta$.

Demonstração de III.5:

Suponha que exista uma sequência (z_n) de pontos críticos de g_θ satisfazendo $|f(z_n)| \to 0$ para $n \to \infty$. Tome uma subsequência de (z_n) que converge a $z_o \in S_\varepsilon$ com $|f(z_o)| = 0$. Pelo Lema de Seleção da Curva, existe um caminho $p: (0,\delta) \to F_\theta$ cuja imagem consiste de pontos críticos de g_θ e satisfaz $p(t) \to z_o$ para $t \to 0$. Ora, como g_θ é constante ao longo de p, $|f|$ também o é e não podemos ter $|f(p(t))| \to |f(z_o)| = 0$ para $t \to 0$. Essa contradição nos dá III.5.

Necessitamos mais um argumento antes de podermos demonstrar que F_θ tem o tipo de homotopia de um CW-complexo finito.

Lema III.6:

Existe uma função $G_\theta: F_\theta \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+$ tal que todos os pontos críticos de G_θ são não-degenerados, têm índice $i \geq n$ e $G_\theta(z) = |f(z)|$ para $|f(z)|$ suficientemente pequeno.

Demonstração de III.6:

Primeiramente note que como todos os pontos críticos de $g_\theta = \log|f|$ estão num compacto e têm índice $i \geq n$, o mesmo ocorre em relação aos pontos críticos de $|f|$. Por outro lado, as funções de Morse formam um aberto denso em $C^\infty(F_\theta, \mathbb{R})$ e portanto podemos escolher $G_\theta \colon F_\theta \to \mathbb{R}_+$, de Morse, que coincide com $|f|$ fora de uma vizinhança compacta que contém os pontos críticos de $|f|$. Nesse compacto G_θ aproxima $|f|$ uniformemente em classe C^∞ e como os pontos críticos de $|f|$ têm índice $i \geq n$, o mesmo é verificado pelos pontos críticos de G_θ (cf.[Milnor (3)],22.4; na realidade isso é verdadeiro para aproximações em classe C^2). Observe que G_θ tem apenas um número finito de pontos críticos uma vez que esses, por serem não-degenerados são isolados e além disso estão todos contidos num compacto.

Finalmente, para vermos que F_θ tem o tipo de homotopia de um CW-complexo finito de dimensão n, consideramos a função $\varphi_\theta \colon F_\theta \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ definida por $\varphi_\theta(z) = -\log G_\theta(z)$. Como $\varphi_\theta^{-1}(-\infty, c] \subset F_\theta$ é compacto, podemos aplicar o seguinte:

Teorema ([Milnor (3)], 3.5)

Se M é uma variedade diferenciável, $f \colon M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável cujos pontos críticos são não-degenerados e se $f^{-1}(-\infty, a]$ é compacto, então M tem o tipo de homotopia de um CW-complexo obtido pela adjunção de uma célula de dimensão i para cada ponto crítico de índice i.

Para demonstrarmos que F_θ é paralelizável necessitaremos de alguns fatos novos, que passamos a descrever.

Primeiramente, a Proposição II.3 mostra que se $c \in C$ tem módulo suficientemente pequeno, então $f^{-1}(c) \cap \mathring{B}_\varepsilon$ é difeomorfo à porção da fibra F_θ determinada por $F_\theta \cap \{z : |f(z)| > |c|\}$, onde $e^{i\theta} = \frac{c}{|c|}$. Por outro lado, o Lema III.5 nos diz que os pontos críticos da função $|f| = F_\theta \to \mathbb{R}$ estão todos contidos no compacto $K_{\eta_\theta} = \{z \in F_\theta : |f(z)| \geq \eta_\theta\}$. Com isso em mente temos o seguinte

<u>Lema III.7</u>:

F_θ é difeomorfa a $f^{-1}(c) \cap \mathring{B}_\varepsilon$.

<u>Demonstração de III.7</u>:

Escolha $c \neq 0$ tal que $|c| = \frac{1}{3}\eta_\theta$ e sejam $A = \{z \in F_\theta : |f(z)| < |c|\}$, $B = \{z \in F_\theta : |f(z)| \leq \frac{2}{3}\eta_\theta\}$ e $K_{\eta_\theta} = \{z \in F_\theta : |f(z)| \geq \eta_\theta\}$.

Sejam $\rho: F_\theta \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ satisfazendo

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{1}{\langle \operatorname{grad}|f|, \operatorname{grad}|f| \rangle} & \text{em } B \\ 0 & \text{em } K_{\eta_\theta} \end{cases}$$

e X o campo em F_θ definido por $X = \rho\ \mathrm{grad}|f|$. Dado $z \in A$, seja $\varphi_t(z)$ o fluxo local gerado por X em torno de z.

Se $\varphi_t(z) \in B$ então $\frac{d}{dt}|f(\varphi_t(z))| =$

$$= \langle \frac{d}{dt}(\varphi_t(z)), \mathrm{grad}|f(\varphi_t(z))|\rangle = \langle X(\varphi_t(z)), \mathrm{grad}|f(\varphi_t(z))|\rangle = 1$$

ou seja, $t \to |f(\varphi_t(z))|$ é linear e estritamente crescente. Daí concluímos que as soluções por $z \in A$ estão definidas para, pelo menos, $0 \leq t < \frac{1}{3}\eta_\theta$.

Como $F_\theta - A$ é compacto, cubra-o com um número finito de abertos U_i tais que $\varphi_t(z)$ esteja definido para $|t| < \varepsilon_i$ sempre que $z \in U_i$. Ponha $\varepsilon_o = \min\{\frac{1}{3}\eta_\theta, \varepsilon_i\}$ e escreva $|c| = \frac{1}{3}\eta_\theta = m(\frac{\varepsilon_o}{2}) + r$ com $r < \frac{\varepsilon_o}{2}$. Dado $z \in F_\theta$ seja $\varphi_{|c|}(z) = \varphi_{\frac{\varepsilon_o}{2}} \circ \cdots \circ \varphi_{\frac{\varepsilon_o}{2}} \circ \varphi_r(z)$ onde compomos $\varphi_{\frac{\varepsilon_o}{2}}$ m vezes.
Então $\varphi_{|c|}: F_\theta \to \widehat{F_\theta - A}$ é o difeomorfismo procurado.

Uma consequência imediata desse fato é que F_θ é <u>orientável</u> uma vez que é difeomorfa a uma variedade analítica complexa. Por outro lado já sabemos que F_θ tem o tipo de homotopia de um CW-complexo finito de dimensão n e portanto $H_{2n}(F_\theta;\mathbb{Z}_2) = 0$ e isto implica que F_θ <u>não possui componente compacta</u>. De fato, se A fosse uma componente compacta de F_θ teríamos $H_{2n}(A;\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ e daí

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_{2n}(A;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H_{2n}(F_\theta;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\ & \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "\text{injetiva}"] & 0 & \end{tikzcd}$$

o que é absurdo.

No que segue utilizaremos o resultado descrito abaixo, devido a Milnor e Kervaire (veja [Kervaire e Milnor]). Antes porém, uma definição, que é encontrada na mesma referência.

<u>Definição</u>:

Uma variedade M, de classe C^∞, é dita s-paralelizável se a soma de Whitney $TM \oplus \varepsilon^1$ é trivial, onde TM é o fibrado tangente a M e ε^1 é um fibrado trivial de posto 1 sobre M.

<u>Teorema</u>:

Seja M uma variedade de classe C^∞, compacta, conexa, orientável, com bordo. Então M é s-paralelizável se e sòmente se M é paralelizável.

Estamos em condições de iniciar a demonstração de que F_θ é paralelizável.

Sejam $\nu_{S_\varepsilon}(F_\theta)$ o fibrado normal de F_θ em S_ε^{2n+1} e U uma vizinhança tubular de F_θ em $S_\varepsilon - K_\varepsilon$. Como F_θ separa U podemos utilizar o seguinte

<u>Lema</u> ([Hirsch]):

Sejam N uma variedade conexa e $M \hookrightarrow N$ uma subvariedade conexa, fechada, de codimensão 1 sendo $\partial M=\partial N=\emptyset$. Se M separa N então $\nu_N(M)$ é trivial.

Aplicando o lema acima a cada componente conexa de F_θ concluímos que $\nu_{S_\varepsilon}(F_\theta)$ é trivial. (Na realidade F_θ é conexa, como veremos mais adiante).

Retornamos agora à função $\varphi_\theta(z) = -\log G_\theta(z)$ (cf. Lema III.6). Sejam c um valor regular de φ_θ e V uma componente conexa de $\varphi_\theta^{-1}(-\infty, c]$. Então, se c é suficientemente grande, $\overset{\circ}{V}$ é difeomorfo a uma componente de F_θ, donde orientável. Daí concluímos que $\nu_{S_\varepsilon}(V)$ é trivial. Se denotarmos $\nu_{\mathbb{C}^{n+1}}(S_\varepsilon)\big|_V$ à restrição do fibrado normal de S_ε em $\mathbb{C}^{n+1}$ a V, que é trivial, temos que $TV \oplus \nu_{S_\varepsilon}(v) \oplus \nu_{\mathbb{C}^{n+1}}(S_\varepsilon)\big|_V \simeq T\mathbb{C}^{n+1}\big|_V$ e portanto é trivial. Concluiremos que $TV \oplus \nu_{S_\varepsilon}(V)$ é trivial através do seguinte

<u>Lema</u>: ([Milnor-Kervaire]; 3.5)

Seja ξ um fibrado vetorial de posto k sobre uma variedade compacta, conexa, orientável, de dimensão n com $k > n$. Se a soma de Whitney $\xi \oplus \varepsilon^r$ é trivial, onde ε^r é um fibrado vetorial trivial de posto r, então ξ é trivial.

Uma vez que $TV \oplus \nu_{S_\varepsilon}(V)$ é trivial, o teorema de Milnor e Kervaire nos diz que TV é trivial e portanto $V - \partial V$ é paralelizável. Agora, a união $\cup(V-\partial V)$ sobre as componentes conexas de $\varphi_\theta^{-1}(-\infty, c]$ é difeomorfa a F_θ o que mostra que esta é paralelizável, concluindo a demonstração de III.1.

Passamos agora ao estudo da topologia de $K = S_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$. Como em III.1 não estamos supondo que $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ é ponto crítico isolado de f. Nessas circunstâncias, o melhor que temos à mão é

<u>Teorema III.8</u>:

$K = S_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$ é $(n-2)$ - conexo.

<u>Demonstração</u>:

Seja N_η a vizinhança compacta de K definida por $N_\eta = \{z \in S_\varepsilon : |f(z)| \leq \eta\}$. Usando o fato de que K, sendo um conjunto algébrico real é triangulável (veja [Lojasiewicz]), concluímos que é um retrato absoluto de vizinhança (veja [Spanier]) é daí segue que K é um retrato de N_η desde que η seja suficientemente pequeno. Logo, $\pi_i(K) \approx \pi_i(N_\eta)$.

Considere agora a vizinhança N_η e o espaço $S_\varepsilon - \overset{\circ}{N}_\eta$. Seja $g\colon S_\varepsilon - K \to \mathbb{R}$ definida por $g(z) = \log|f(z)|$.

Os Lemas III.2, III.3, III.4, III.5 e III.6 continuam válidos se trocarmos g_θ por g, tomando-se o cuidado de reescrever os enunciados de III.4, III.5 e III.6 como segue:

<u>Lema III.4</u> (revisitado)

O índice de Morse de $g\colon S_\varepsilon - K \to \mathbb{R}$ em um ponto crítico é maior que ou igual a n.

<u>Observação</u>: Isto segue do fato que todo ponto crítico z de g, por estar em alguma fibra F_θ, também é ponto crítico de g_θ e portanto o índice de g em z é maior que ou igual ao índice de g_θ em z.

<u>Lema III.5</u> (revisitado)

Existe $\eta > 0$ tal que todos os pontos críticos de g estão no compacto determinado por $|f(z)| \geq \eta$.

<u>Lema III.6</u> (revisitado)

Existe uma função $G: S_\varepsilon - K \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+$, cujos pontos críticos são não-degenerados, possuem índice de Morse maior que ou igual a n e tal que G coincide com a função $z \to |f(z)|$ desde que $|f(z)|$ seja suficientemente pequeno.

Com isto em mãos podemos concluir que:

(i) $S_\varepsilon - K$ tem o tipo de homotopia de um CW-complexo finito de dimensão $n + 1$.

De fato, considerando a função $\varphi(z) = -\log G(z)$ temos que $\varphi^{-1}(-\infty, c]$ é compacto qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$ e que o índice i de φ em um ponto crítico é menor que ou igual a $n + 1$, isto porque, sendo o índice de $\log G$ em um tal ponto maior que ou igual a n, o índice i de $-\log G$ satisfaz $i \leq n+1$.

(ii) N_η é uma variedade C^∞ com bordo, para η suficientemente pequeno.

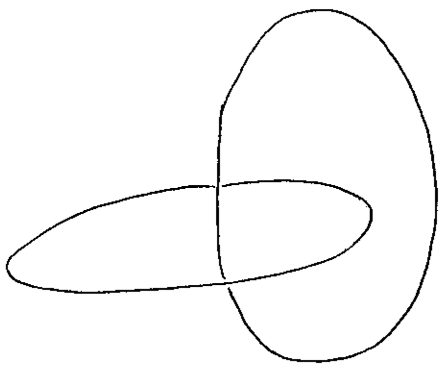
Isto segue imediatamente de III.5.

(iii) S_ε é obtido de N_η pela adjunção de um número finito de células de dimensão maior que ou igual a n.

Isto segue do teorema 3.5 de [Milnor(3) em se considerando a função $G|_{S_\varepsilon - \overset{\circ}{N}_\eta} : S_\varepsilon - \overset{\circ}{N}_\eta \to \mathbb{R}_+$.

Ora, como a adjunção de uma célula n-dimensional não altera os grupos de homotopia em dimensão menor que ou igual a $n-2$ temos $\pi_i(N_\eta) \simeq \pi_i(S_\varepsilon)$ para $i \leq n-2$, o que conclui a demonstração de III.8.

O teorema acima nos diz que K é conexo se $n = 2$ e simplesmente conexo se $n \geq 3$. Se $n = 1$ podemos assegurar apenas que K é não-vazio e em se considerando $f(x,y) = xy$ vemos que $K = S^3_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$ é um entrelace formado por dois nós triviais (veja figura abaixo).



Faremos agora a hipótese de que $f:(\mathbb{C}^{n+1},0)\to(\mathbb{C},0)$ tem uma <u>singularidade isolada</u> em $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ ou é não-singular. Nesse caso, como foi visto em II.2 o fêcho $\bar{F}_\theta$ da fibra típica F_θ é uma variedade C^∞ com bordo $\partial\bar{F}_\theta = K$ e que $\bar{F}_\theta$ está mergulhado em S_ε de tal modo que $\pi_i(S_\varepsilon - \bar{F}_\theta) \simeq \pi_i(\bar{F}_\theta)$. Informação sobre a homologia de F_θ é dada pela

Proposição III.9:

A homologia de F_θ está concentrada nas dimensões 0 e n e $H_o(F_\theta) \simeq \mathbb{Z}$.

Demonstração:

Note que, por III.1, $H_q(F_\theta) = 0$ para $q > n$. Como $H_q(F_\theta) \simeq H_q(S_\varepsilon - \bar{F}_\theta)$ uma vez que F_θ é difeomorfa a um retrato de deformação de $S_\varepsilon - \bar{F}_\theta$, basta considerar $H_q(S_\varepsilon - \bar{F}_\theta)$. A dualidade de Alexander fornece um isomorfismo $\bar{H}^{2n+1-q}(\bar{F}_\theta) \simeq H_q(S_\varepsilon, S_\varepsilon - \bar{F}_\theta)$. Olhe para a sequência exata de homologia

$$\ldots \to H_q(S_\varepsilon) \to H_q(S_\varepsilon, S_\varepsilon - \bar{F}_\theta) \to H_{q-1}(S_\varepsilon - \bar{F}_\theta) \to H_{q-1}(S_\varepsilon) \to \ldots$$

Portanto, para $2 \le q \le n$ temos um isomorfismo

$$H_{q-1}(S_\varepsilon - \bar{F}_\theta) \simeq H_q(S_\varepsilon, S_\varepsilon - \bar{F}_\theta) \simeq \bar{H}^{2n+1-q}(\bar{F}_\theta).$$

Mas, por III.1 sabemos que $\bar{H}^{2n+1-q}(\bar{F}_\theta) = 0$ quando $2n+1-q > n$, ou seja, $0 < q-1 < n$. Por outro lado também temos

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to & H_{2n+1}(S_\varepsilon - \bar{F}_\theta) & \to & H_{2n+1}(S_\varepsilon) & \to & H_{2n+1}(S_\varepsilon, S_\varepsilon - \bar{F}_\theta) & \to & H_{2n}(S_\varepsilon - \bar{F}_\theta) & \to \ldots \\
& \| & & \wr & & & & \| & \\
& 0 & & \mathbb{Z} & & & & 0 &
\end{array}$$

e daí $\bar{H}^o(\bar{F}_\theta) \simeq H_{2n+1}(S_\varepsilon, S_\varepsilon - \bar{F}_\theta) \simeq \mathbb{Z}$, ou seja, F_θ é conexa.

Podemos ir mais longe e dizer que

Teorema III.10:

F_θ é (n-1)-conexa e tem o tipo de homotopia de um bouquet $S^n \vee \ldots \vee S^n$ de esferas.

Demonstração:

Aqui faremos uso do teorema de Hurewicz, na seguinte versão ([Spanier], 7.5.5).

Teorema (Hurewicz)

Se X é simplesmente conexo e existe $q \geq 2$ tal que $H_i(X,x) = 0$ para $i < q$, então $\pi_i(X,x) = 0$ para $i < q$ e existe um isomorfismo $\pi_q(X,x) \simeq H_q(X,x)$.

Vamos mostrar inicialmente que F_θ é $(n-1)$-conexa. Para fazê-lo note que, após III.9 e Hurewicz, é suficiente mostrar que F_θ é simplesmente conexa para $n \geq 2$.

Considere a função $-G_\theta\colon \bar{F}_\theta \to \mathbb{R}$, onde G_θ é a função obtida no Lema III.6 $-G_\theta$ é uma função de Morse em $\bar{F}_\theta$ e o índice i em qualquer um de seus pontos críticos satisfaz $i \leq n$. Notando que o índice de $-G_\theta$ no ponto crítico associado ao menor valor crítico é zero concluímos que $\bar{F}_\theta$ é obtida de um disco $D^{2n}_{z_o}$ pela adjunção de células de dimensão menor que ou igual a n. Agora, $S_\varepsilon - D^{2n}_{z_o}$ é simplesmente conexo e se adjuntamos uma célula e_λ de dimensão $\lambda \leq n$ a $D^{2n}_{z_o}$, o grupo fundamental de $S_\varepsilon - (D^{2n}_{z_o} \cup e_\lambda)$ não se altera desde que $\lambda \leq \dim S_\varepsilon - 3$. Portanto, desde que $\lambda \leq n \leq \dim S_\varepsilon - 3 = 2n-2$ ou seja, para $n \geq 2$ temos $\pi_1(S_\varepsilon - (D^{2n}_{z_o} \cup e_\lambda)) \simeq \pi_1(S_\varepsilon - D^{2n}_{z_o})$. Ora, após a adjunção de um número finito de células obtemos $\bar{F}_\theta$ e portanto $\pi_1(S_\varepsilon - D^{2n}_{z_o}) \simeq \pi_1(\bar{F}_\theta)$ e este último grupo é isomorfo a $\pi_1(S_\varepsilon - \bar{F}_\theta) \simeq \pi_1(F_\theta)$ por II.2.

Para vermos que F_θ tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas começamos observando que $H_n(F_\theta)$ é abeliano livre. De fato, se êle possuisse parte de torsão teríamos cohomologia não trivial em dimensão $n+1$, o que é impossível por III.1. Suponha $n \geq 2$. Por Hurewicz existe um isomorfismo $H_n(F_\theta) \simeq \pi_n(F_\theta)$.

Seja $(S^n v \dots v S^n, p_o) \to (F_\theta, p_1)$ uma aplicação contínua que leva o ponto base p_o no ponto base p_1 e que leva as esferas (S^n, p_o) do bouquet nos geradores de $\pi_n(F_\theta, p_1)$. Uma tal aplicação induz um isomorfismo entre as homologias $H_n(S^n v \dots v . S^n) \simeq H_n(F_\theta)$. O teorema de Whitehead ([Panier],7.5.9) garante então que a aplicação acima é uma equivalência homotópica já que F_θ e $S^n v \dots v S^n$ são simplesmente conexos.

O caso $n = 1$ segue de que, sendo $\bar{F}_\theta$ uma superfície conexa, compacta, orientável e com bordo, esta tem o tipo de homotopia de um bouquet de círculos.

<u>Definição III.11</u>:

O número de esferas S^n do bouquet, ou o número de geradores da homologia média da fibra F_θ é chamado número de Milnor de f em 0 e notado μ.

O objeto da próxima seção é expor diferentes caracterizações de μ. Antes porém, um exemplo dos mais importantes.

<u>Exemplo III.12</u>:

Seja $f:(\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0)$ definida por $f(z_o,\dots,z_n) = z_o^2 + \dots + z_n^2$.

Escreva $z_j = x_j + iy_j$ e sejam D_η o disco em $\mathbb{C}$ dado por $|t| \leq \eta$, $D_\eta^* = D_\eta - \{0\}$, B_ε a bola fechada de raio $\varepsilon > 0$ e centro em $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\tilde{Y} = B_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta)$, $Y = B_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta^*)$. Pelo Teorema II.3 , sabemos que $Y \xrightarrow{f} D_\eta^*$ é uma fibração C^∞ localmente trivial, cuja fibra típica Y_t, $t \in D_\eta^*$ é difeomorfa à fibra de Milnor $\bar{F}_\theta$ associada a f. $\tilde{Y}$ e Y_η são descritos por

$$\tilde{Y} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_o|^2+\ldots+|z_n|^2 \leq \varepsilon^2 \quad e \quad |z_o^2+\ldots+z_n^2| \leq \eta\}$$

$$Y_\eta = \{z \in Y : z_o^2+\ldots+z_n^2 = \eta\}.$$

Antes de mais nada note que $\tilde{Y}$ é <u>contrátil</u> (linearmente). Em coordenadas reais, Y_η é dada por

$$\Sigma\, x_j^2 + \Sigma\, y_j^2 \leq \varepsilon^2, \quad \Sigma\, x_j^2 - \Sigma\, y_j^2 = \eta \quad e \quad \Sigma\, x_j y_j = 0.$$

Daí segue que $\Sigma\, y_j^2 \leq \frac{\varepsilon^2-\eta}{2}$. Ponha $u_j = \frac{x_j}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2-\eta}{2}}}$ e $v_j = \frac{y_j}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2-\eta}{2}}}$.

Obtemos então um difeomorfismo entre Y_η e o conjunto definido por $\Sigma u_j^2 = 1$, $\Sigma v_j^2 \leq 1$ e $\Sigma u_j v_j = 0$. Ora, geomètricamente isto significa considerar a esfera $S^n = \{\Sigma u_j^2 = 1\}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ e tomar os vetores $(v_o,\ldots,v_n)$ tangentes a S^n no ponto $(u_o,\ldots,u_n)$ que têm comprimento menor que ou igual a 1.

Em outras palavras, Y_η é difeomorfo ao fibrado por bolas unitárias tangente a S^n e o bordo $\partial Y_\eta \simeq K$ é difeomorfo ao fibrado esférico unitário tangente a S^n. Estes são notados $TS^n|_{|\leq 1}$ e $TS^n|_{|=1}$ respectivamente. Vemos também que Y_η pode ser visto como uma vizinhança tubular da base $S^n \hookrightarrow TS^n|_{|\leq 1}$ e que esta está mergulhada em Y_η como a seção nula de $TS^n|_{|\leq 1}$.

Como $TS^n_{||\leq 1}$ se retrai a S^n temos $H_o(Y_\eta) \simeq \mathbb{Z}$, $H_n(Y_\eta) \simeq \mathbb{Z}$ e um gerador de $H_n(Y_\eta)$ é representado pela esfera S^n. Por outro lado, a homologia de $K \simeq TS^n_{||\leq 1}$ é dada por ([Spanier], 5.7)

$H_{n-1}(K) \simeq \mathbb{Z}$ se n é ímpar.

$H_{n-1}(K) \simeq \mathbb{Z}_2$ se n é par.

CAPÍTULO IV

A MONODROMIA LOCAL

Na demonstração do Teorema da Fibração (II.2) obtivemos um fluxo $h: \mathbb{R}\times S_\varepsilon-K_\varepsilon \to S_\varepsilon-K_\varepsilon$ $h(t,z) = h_t(z)$ tal que para cada $z \in S_\varepsilon-K_\varepsilon$, $\varphi_\varepsilon(h_t(z)) = e^{i[t+\arg z]}$ isto é h_t é o levantamento do laço e^{it}, $0 \leq t \leq 2\pi$ com ponto inicial z. Portanto se $\theta = \arg(z)$ e $F_\theta = \varphi_\varepsilon^{-1}(e^{i\theta})$ então $h_{2\pi}: F_\theta \to F_\theta$ é um difeomorfismo chamado <u>difeomorfismo característico</u>.

Em geral se $\phi: E \to S^1$ é uma fibração então levantando o laço $e^{i\theta}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ podemos escolher uma família contínua de homeomorfismos $h_t: F_\theta \to F_{\theta+t}$ tal que h_o = identidade e $h_{2\pi}$ é o homeomorfismo característico. Como o levantamento depende de apenas da classe de homotopia de laço obtemos assim uma ação de $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ sobre a fibra F_o.

<u>Definição IV.1</u>: Chama-se <u>monodromia</u> de f em 0 a esta ação de $\pi_1(S^1)$ em $H_*(F_\theta)$.

No caso em que f possui um ponto crítico isolado em 0 a monodromia pode ser vista como induzida pelo gerador do grupo de automorfismos do <u>recobrimento cíclico infinito de</u> $S_\varepsilon-K_\varepsilon$.

Sejam $z_o \in S_\varepsilon-K_\varepsilon$, $x = \varphi_\varepsilon(z_o)$ e $H = \operatorname{Ker} \varphi_{\varepsilon*}$ com $\varphi_{\varepsilon*}: \pi_1(S_\varepsilon-K,z_o) \to \pi_1(S^1,x)= \mathbb{Z}$. Associado a H existe um espaço de recobrimento $p_\varepsilon: X \to S_\varepsilon-K$ e une ponto $\tilde{z}_o \in p_\varepsilon^{-1}(z_o)$ tal que

$p_{\varepsilon *}(\pi_1(X,\tilde{z}_o)) = H$ [Massey]. Além disso como H é um subgrupo normal temos $Aut(X) \simeq \pi_1(S_\varepsilon - K_\varepsilon, z_o)/H \cong \mathbb{Z}$ ou seja X é recobrimento cíclico infinito de $S_\varepsilon - K_\varepsilon$. Entretanto como C=comutador de $\pi_1(S_\varepsilon - K_\varepsilon, z_o)$ está contido em H o homomorfismo induzido $H_1(S_\varepsilon - K_\varepsilon) \simeq \pi_1(S_\varepsilon - K_\varepsilon, z_o)/C \to \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} = H^1(S^1)$ tem núcleo igual a H/C. Mas se $n \geq 2$ ou K_ε é conexo para $n = 1$ então $H_1(S_\varepsilon - K_\varepsilon) \simeq \mathbb{Z}$ e o homorfismo acima é sobrejetivo (logo é um isomorfismo). Donde $H = C$ e X é único (a menos de isomorfismo).

Observe também que X é isomorfo ao fibrado X_1 induzido pela aplicação $\exp\colon \mathbb{R} \to S^1$ $\exp(t) = e^{it}$ construido de forma que diagrama

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & S_\varepsilon - K_\varepsilon \arrow[d, "\varphi_\varepsilon"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\exp"] & S^1 \end{tikzcd} \quad \text{comuta.}$$

Como X_1 tem base contrátil vemos que X_1 é difeomorfo ao produto $F_\theta \times \mathbb{R}$ com o gerador de $Aut(X_1)$ induzindo a monodromia $h_*\colon H_*(F_\theta) \to H_*(F_\theta)$. De acordo com III.9 o que interessa é $h_*\colon H_n(F_\theta) \to H_n(F_\theta)$.

Provamos agora que a monodromia é um <u>invariante topológico</u>.

<u>Definição IV.2</u>: Duas funções holomorfas f e $g\colon(\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0)$ com 0 ponto crítico isolado de f e g possuem o <u>mesmo tipo topológico local</u> em 0 se existem vizinhanças U e V de 0 em $\mathbb{C}^{n+1}$ e um homeomorfismo $\psi\colon (U,0) \to (V,0)$ tais que $\psi(f^{-1}(0) \cap U) = g^{-1}(0) \cap V$.

Teorema IV.1: [Lê Dũng Tráng (2)] se f e g possuem o mesmo tipo topológico local então $\mu(f) = \mu(g)$ e as respectivas monodromias são conjugadas ($\mu(f)$ = número de Milnor de f).

Demonstração:

Suponhamos que $\psi: (U,0) \to (V,0)$ seja um homeomorfismo tal que $\psi(^{-1}(0) \cap U) = g^{-1}(0) \cap V$.

De acordo com o Teorema II.1 se ε é suficientemente pequeno $B_\varepsilon - f^{-1}(0)$ possui o mesmo tipo homotópico que S_ε-K. Podemos então construir $p_1: Y \to B_\varepsilon - f^{-1}(0)$ recobrimento cíclico infinito de modo que a restrição do gerador de Aut(Y) a $p_1^{-1}(S_\varepsilon - K_\varepsilon)$ induz a monodromia de f em 0. Anàlogamente construimos $p_2: Y^1 \to B_\varepsilon - g^{-1}(0)$.

Vejamos como o homeomorfismo ψ induz uma equivalência entre os monodromias.

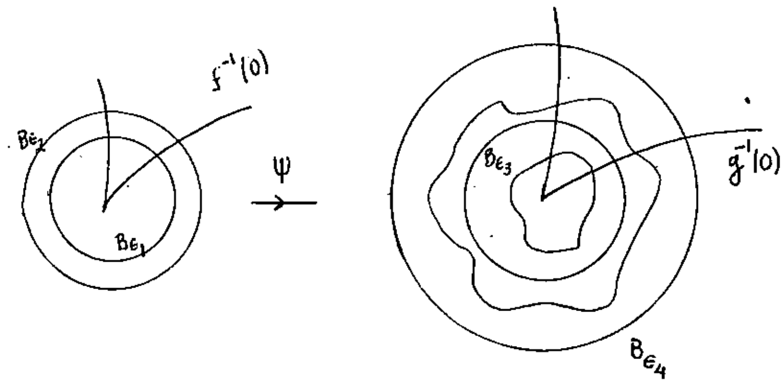
Seja $\varepsilon_o > 0$ tal que as propriedades do Teorema II.1 são satisfeitas tanto para f como para g, isto é: se $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$ então $(B_\varepsilon, f^{-1}(0) \cap B_\varepsilon) \simeq (C(S_\varepsilon), C(K_\varepsilon))$ e se $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon_o$ então $S_{\varepsilon'} - K_{\varepsilon'}$ é difeomorfo a $S_\varepsilon - K_\varepsilon$. (Anàlogamente para g).

Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_o$ e $\varepsilon_3, \varepsilon_4$, $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < \varepsilon_o$ tais que $\psi(B_{\varepsilon_1}) \subset B_{\varepsilon_3} \subset \psi(B_{\varepsilon_2}) \subset B_{\varepsilon_4}$.

Obtemos a sequência

$$\pi_i(\psi(B_{\varepsilon_1}) - g^{-1}(0), x) \to \pi_i(B_{\varepsilon_3} - g^{-1}(0), x) \to \pi_i(\psi(B_{\varepsilon_2}) - g^{-1}(0), x) \to$$
$$\to \pi_i(B_{\varepsilon_4} - g^{-1}(0), x)$$

com $x \in \psi(B_{\varepsilon_1})-g^{-1}(0)$.



Mas $\psi_*: \pi_i(B_\varepsilon-f^{-1}(0),y) \simeq \pi_i(\psi(B_\varepsilon)-g^{-1}(0),\psi(y))$

$$\pi_i(B_{\varepsilon_1}-f^{-1}(0),y) \simeq \pi_i(B_{\varepsilon_2}-f^{-1}(0),y) \qquad \text{e}$$

$$\pi_i(B_{\varepsilon_3}-g^{-1}(0),x) \simeq \pi_i(B_{\varepsilon_4}-g^{-1}(0),x).$$

Concluímos que $\pi_i(B_\varepsilon-f^{-1}(0),y) \simeq \pi_i(B_{\varepsilon'}-g^{-1}(0),x)$ para todos ε, ε' tais que $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon_o$. Como $B_\varepsilon-f^{-1}(0)$ e $B_{\varepsilon'}-g^{-1}(0)$ possuem tipo homotópico de um complexo CW finito obtemos uma equivalência homotópica entre $B_\varepsilon-f^{-1}(0)$ e $B_{\varepsilon'}-g^{-1}(0)$ (ver [Spanier]).

Considere ε' tal que $\psi(B_{\varepsilon'}) \subset B_\varepsilon$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "p_1"'] & p_2^{-1}(\psi(B_{\varepsilon'})-g^{-1}(0)) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\bar{p}_2"] & Y^1 \arrow[d, "p_2"] \\
B_{\varepsilon'}-f^{-1}(0) \arrow[r] & \psi(B_{\varepsilon'})-g^{-1}(0) \arrow[r, hook] & B_\varepsilon-g^{-1}(0).
\end{tikzcd}$$

Como a inclusão $\psi(B_{\varepsilon'})-g^{-1}(0) \hookrightarrow B_\varepsilon - g^{-1}(0)$ é uma equivalência homotópica, $p_2^{-1}(\psi(B_{\varepsilon'})-g^{-1}(0)) \hookrightarrow Y^1$ é uma equivalência homotópica. Além disso Y é isomorfo a $p_2^{-1}(\psi(B_{\varepsilon'}) - g^{-1}(0))$ de modo que o gerador de $\mathrm{Aut}(Y^1)$ induz na homologia de $p_2^{-1}(\psi(B_{\varepsilon'}) - g^{-1}(0))$ (= homologia da fibra de Milnor) a monodromia de g, que é portanto conjugada (via o isomorfismo $Y \simeq p_2^{-1}(\psi(B_{\varepsilon'}) - g^{-1}(0)))$ à monodromia de f e obviamente $\mu(f) = \mu(g)$. ∎

Passaremos agora ao estudo de um exemplo onde podemos calcular explicitamente a monodromia (vide [Brieskorn] ou [Sebastiani (1)]).

<u>Exemplo</u>: Seja $f: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ $f(z_1,\ldots,z_{n+1}) = z_1^{a_1} + \ldots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$ com $a_j \geq 2$ para $j = 1,\ldots,n+1$ e $n \geq 1$. É claro que 0 é um ponto crítico isolado. Seja $v(z) = (\frac{1}{a_1} z_1, \ldots, \frac{1}{a_{n+1}} z_{n+1})$ campo em $\mathbb{C}^{n+1}$ [veja exercício no Capítulo II). Este campo satisfaz às condições do Lema II.1, isto é $\langle v(z), \mathrm{grad}\, \mathrm{Log} f(z)\rangle = 1$ e $\mathrm{Re}\langle v(z), z\rangle > 0$ de modo que para o fluxo linear $(e^{r/a_1} z_1, \ldots, e^{r/a_{n+1}} z_{n+1})$ gerado por v temos:

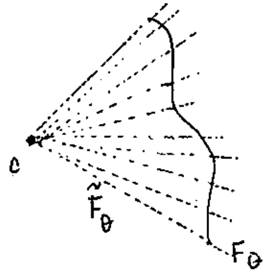
$$\begin{cases} \|(e^{r/a_1} z_1, \ldots, e^{r/a_{n+1}} z_{n+1})\|^2 & \text{é crescente} \\ f(e^{r/a_1} z_1, \ldots, e^{r/a_{n+1}} z_{n+1}) = e^r \quad f(z_1, \ldots, z_{n+1}) \end{cases}$$

Portanto $\mathbb{C}^{m-1} - V$ fica fibrado pelas subvariedades $F_\theta = \psi^{-1}(e^{i\theta})$ onde $\psi: \mathbb{C}^{m-1} - V \to S^1$ é definida por

$\psi(z) = \dfrac{f(z)}{|f(z)|}$ (arg de $f(z)$ é constante ao longo das órbitas de v).

Além disso $\tilde{F}_\theta$ é difeomorfo a $F_\theta \times \mathbb{R}$ pela aplicação

$$((z_1,\ldots,z_{n+1}),t) \longmapsto (e^{t/a_1} z_1,\ldots,e^{t/a_{n+1}} z_{n+1}).$$



Em particular F_θ e $\tilde{F}_\theta$ possuem o mesmo tipo homotópico.

Observe também que o fluxo

$h_t(z) = (e^{2\pi it/a_1} z_1,\ldots,e^{2\pi it/a_{n+1}} z_{n+1})$ satisfaz $f \circ h_t(z) = e^{2\pi it} f(z)$ ou seja, h_t é um levantamento do laço $e^{2\pi it}$ $0 \leq t \leq 1$ e portanto induz a monodromia $h_{1*}: H_n(F_\theta) \to H_n(F_\theta)$. Vamos usar a homologia com coeficientes complexos.

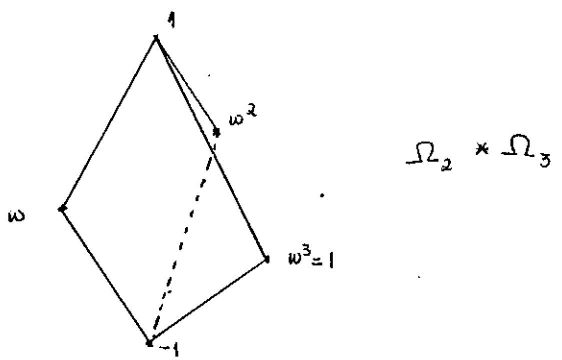
Fixando a fibra F_o vamos estudar o isomorfismo $h_{1*}: H_n(F_\theta) \to H_n(F_\theta)$ que é o mesmo que $h_{1*}: H_n(\tilde{F}_o) \to H_n(\tilde{F}_o)$ e observe que

$$\tilde{F}_o = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}-V \;/\; \frac{f(z)}{|f(z)|} = 1\} = \{z \in C^{n+1} \;/\; f(z) \text{ é real e positivo}\}.$$

Sejam $\Omega_{a_j} = \{w \in \mathbb{C} \;/\; w$ é a_j-ésima raiz da unidade$\}$

e a junção $J = \Omega a_1 * \Omega a_2 * \ldots * \Omega a_{n+1} = \{(t_1 w_1, \ldots, t_{n+1} w_{n+1}) / \Sigma t_j = 1, t_j \geq 0,$ $w_j \in \Omega a_j\}$ então $J \subset \tilde{F}_o$ e $h_1(J) \subseteq J$.

<u>Lema</u>: J é retrato por deformação de $\tilde{F}_o$.



<u>Demonstração</u>:

Consideremos a aplicação $H(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (z_1^{a_1}, \ldots, z_{n+1}^{a_{n+1}})$.

Como a função $z \longmapsto z^n$ fora de 0 é um recobrimento de ordem n, para cada $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in C^{n+1}$ é possível levan- $t \to [(1-t)z_1^{a_1} + t\mathrm{Re}(z_1^{a_1}), \ldots, (1-t)z_{n+1}^{a_{n+1}} + t\mathrm{Re}(z_{n+1}^{a_{n+1}})]$ a um único caminho $\alpha(t, z_1, \ldots, z_{n+1}) = (\alpha_1(t, z_1), \ldots, \alpha_{n+1}(t, z_{n+1}))$ (isto é tal que $\alpha_j(t, z_j)^{a_j} = (1-t)z_j^{a_j} + t\mathrm{Re}(z_j^{a_j})$.

Observe que $f \circ \alpha(t, z_1, \ldots, z_{n+1}) = (1-t)f(z_1, \ldots, z_{n+1}) +$ $+ t\mathrm{Re}\, f(z_1, \ldots, z_{n+1})$ de modo que $\alpha(t, z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \tilde{F}_o$ para todo $t \in [0,1]$ e $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \tilde{F}_o$. Além disso $\alpha(t, \cdot)$ deixa fixo o conjunto $Y = \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) / z_j^{a_j} \in \mathbb{R}\}$, em particular $\alpha(t,\cdot)$ fixa J. Portanto Y é um retrato para deformação de $\tilde{F}_o$.

Se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $z^n \in \mathbb{R}$ definimos

$s(t,z) = [1 - \frac{t}{2}(1 - \frac{z^n}{|z^n|})]z$ uma função contínua que satisfaz:

$$z^n \geq 0 \quad s(t,z) = z$$
$$z^n < 0 \quad s(t,z) = (1-t)z.$$

Usando a aplicação

$\Gamma: [0,1] \times Y \to Y$, $\Gamma(t,z_1,\ldots,z_{n+1}) = (s(t,z_1),\ldots, s(t,z_{n+1}))$ e escrevendo $X = \{(z_1,\ldots,z_{n+1}) / z_j^{a_j} \geq 0 \quad j = 1,\ldots,n+1\}$ obtemos que X é um retrato por deformação de Y. Basta agora "normalizar" X para obtermos J. $z_j^{a_j} \geq 0$ implica que $z_j = t_j w_j$ com $t_j \geq 0$ e $w_j \in \Omega a_j$. Logo, usando a aplicação $(1-t)(z_1,\ldots,z_{n+1}) + \frac{t}{\sum_{j=1}^{n+1} t_j}(z_1,\ldots,z_{n+1})$ obtemos J é um retrato por deformação de X. ∎

$h_1: J \to J$ induz uma aplicação $\Omega a_j \to \Omega a_j$ para $j = 1,\ldots,n+1$ dada pela multiplicação por $e^{2\pi i/a_j}$. Além disso $H_n(\Omega_{a_1} * \ldots * \Omega_{a_{n+1}}) = \tilde{H}_o(\Omega_{a_1}) \otimes \ldots \otimes \tilde{H}_o(\Omega_{a_{n+1}})$ (ver exercício abaixo). Logo basta estudar a aplicação induzida em cada $\tilde{H}_o(\Omega_{a_j})$.

$H_o(\Omega_{a_j})$ é o C espaço vetorial gerado pelas raizes $e_k = e^{2\pi i(k-1)/a_j}$ $k = 1,\ldots,a_j$ e a transformação T_j induzida pelo produto nos dá $T_j(e_1) = e_2$, $T_j(e_2) = e_3, \ldots, T_j(e_j) = e_1$.

Portanto $(T_j)^j$ = Identidade e $X^{a_j} - 1$ é o polinomio característico de T_j.

$\tilde{H}_o(\Omega_{a_j})$ é o núcleo da aplicação $e_j \to e = H_o$ (ponto) ou seja $\tilde{H}_o(\Omega_{a_j}) = \{v = \sum_{k=1}^{a_j} \lambda_k e_k \,/\, \sum_{k=1}^{a_j} \lambda_k = 0\}$ $\tilde{H}_o(\Omega_{a_j})$ é T_j-invariante e $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{H}_o(\Omega_{a_j}) = a_j - 1$.

Além disso o subespaço correspondente ao autovalor 1 é gerado por : $\sum_{k=1}^{a_j} e_k$ portanto $H_o(\Omega_{a_j}) = \tilde{H}_o(\Omega_{a_j}) \oplus \mathbb{C}(\sum_{k=1}^{a_j} e_j)$ donde os autovalores de T_j restrito a $\tilde{H}_o(\Omega_{a_j})$ são as raízes a_j-ésimas da unidade diferentes de 1.

Concluímos assim, usando propriedades do produto tensorial que o polinomio característico da monodromia é igual a $\prod_{1 \neq w_j \in \Omega_{a_j}} (x - w_1 \ldots w_{n+1})$. Obtivemos também que

$$\dim_{\mathbb{C}} H_n(F_\theta) = \prod_{j=1}^{n+1} (a_j - 1).$$

<u>Por exemplo</u>: $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^3$ então o polinômio característico da monodromia é igual a $(x+w)(x+w^2) = x^2 + (w+w^2)x + 1$ onde $w = e^{2\pi i/3}$. Isto é $x^2 - x + 1$.

<u>Exercício</u>: Vejamos como se pode calcular $H_n(\Omega_{a_1}*\dots*\Omega_{a_{n+1}})$. (Consulte J. Milnor, Construction of Universal Bundles II, Lemma 2.1, Annals of Math. vol. 63 # 3 (1956) pg. 430-436)

Sejam $A = \Omega_{a_1}$ e $B = \Omega_{a_2}*\dots*\Omega_{a_{n+1}}$ queremos calcular $\tilde{H}_n(A*B)$.

Se $\bar{A} = (ta,(1-t)b)$ $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ e $\bar{B} = (ta,(1-t)b)$ $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ então a tripla $(A*B,\bar{A},\bar{B})$ é exata. A sequência de Mayer-Vietoris fica:

$$\dots\to \tilde{H}_n(A*B) \to \tilde{H}_{n-1}(\bar{A}\cap\bar{B}) \to \tilde{H}_{n-1}(\bar{A})\oplus\tilde{H}_{n-1}(\bar{B}) \to \tilde{H}_{n-1}(A*B) \to\dots.$$

Mas $\bar{A} \cap \bar{B} = A \times B$, A é retrato por deformação de $\bar{A}$, B é retrato por deformação de $\bar{B}$ e as inclusões $A \hookrightarrow A*B$ e $B \subset A*B$ são homotópicas à constante. Portanto o homomorfismo $H_{n-1}(\bar{A}) \oplus H_{n-1}(\bar{B}) \to H_{n-1}(A*B)$ é trivial, de modo que a sequência se escreve:

$$0 \to \tilde{H}_n(A*B) \to \tilde{H}_{n-1}(A\times B) \xrightarrow{\psi^1} \tilde{H}_{n-1}(A) \oplus \tilde{H}_{n-1}(B) \to 0 \dots.$$

Pela Fórmula de Künneth

$$H_{n-1}(A\times B) \simeq \bigoplus_{p=0}^{n-1} H_p(A) \otimes H_{n-1-p}(B) \quad \text{(não há torção)},$$

e como $A = \Omega_{a_1}$ então $H_{n-1}(A\times B) = H_o(A) \otimes H_{n-1}(B)$.

Calculando explìcitamente o homomorfismo ψ obtemos

$$\tilde{H}_n(A*B) = \operatorname{Ker} \psi^1 \simeq \tilde{H}_o(A) \otimes \tilde{H}_{n-1}(B)$$

Por indução concluímos que $\tilde{H}_n(\Omega_{a_1}*\ldots*\Omega_{a_{n+1}}) \simeq \tilde{H}_o(\Omega_{a_1})\otimes\ldots\otimes\tilde{H}_o(\Omega_{a_{n+1}})$.

VI.i) O número de Milnor

Tendo em vista o Teorema IV.1 iremos descrever métodos para calcular o número de Milnor e a monodromia.

Veremos que o número de Milnor pode ser calculado de várias maneiras e que este invariante topológico está associado à ideia de multiplicidade. Iremos estabelecer a relação entre a multiplicidade topológica e multiplicidade algébrica.

[Milnor(1)] e [Orlik] são as principais referências para esta parte.

Multiplicidade Gradiente:

A noção mais natural de multiplicidade de uma aplicação holomorfa $g: U \subset \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$, U aberto em $\mathbb{C}^m$, consiste em contar o número de elementos de uma fibra $f^{-1}(a)$. Obviamente este número depende do ponto a, entretanto veremos a seguir que a cardinalidade de $g^{-1}(a)$ é constante se tomarmos a em um subconjunto aberto e denso. É interessante observar como um [Milnor (2)] ou [Hirsch] que a noção de multiplicidade está relacionada com o conceito de grau de uma aplicação. E é por aí que começamos.

Seja $f: (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0)$ um polinômio com ponto crítico isolado em 0. Se S_ε é uma esfera centrada em 0 de modo que 0 é o único ponto crítico na bola B_ε podemos definir a aplicação $\frac{\partial f}{|\partial f|}: S_\varepsilon^{2n+1} \to S_1^{2n+1}$ por $\frac{\partial f}{|\partial f|}(z) = \frac{\partial f(z)}{\|\partial f(z)\|}$ onde

$\partial f = (\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}})$ e $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ são coordenadas usuais de $\mathbb{C}^{n+1}$ que deste modo possui uma orientação natural. Se S_ϵ está orientada como bordo de B_ϵ de modo que $TS_\epsilon + u$ nos dá uma referencial positivo em $\mathbb{C}^{n+1}$ definimos a <u>multiplicidade gradiente</u> de f em 0 por

$$\mu_g(f) = \text{grau } \frac{\partial f}{|\partial f|}.$$

Lembremos que se $g\colon M \to N$ é uma aplicação contínua entre variedades fechadas orientadas de mesma dimensão e $[M]$ e $[N]$ são as respectivas classes fundamentais então grau g é obtido pela equação $g_*([M]) = \text{grau } g\ [M]$. Observe que no nosso caso grau $\frac{\partial f}{|\partial f|}$ pode ser calculado como em [Milnor (2)]. A propriedade básica do grau que necessitaremos é dada pela seguinte:

<u>Proposição IV.1</u> [Milnor (2)]

Seja M^{n+1} uma variedade orientada com bordo de modo que ∂M está orientada como bordo de M.

Se $g\colon \partial M \to N^m$ se estende a uma aplicação $G\colon M \to N^m$ então grau $g = 0$.

Segue então que se g e h são aplicações homotópicas então grau g = grau h.

Esta proposição é usada na demonstração do próximo lema que em [Milnor (1)] recebe o nome de Princípio de Rouché.

<u>Lema IV.1</u>: Sejam $r, L: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ duas aplicações holomorfas em uma vizinhança de z_o tais que $\|r(z)\| < \|L(z)\|$ para todo $z \in S_\varepsilon$ esfera de centro z_o e raio ε.

Então $\text{grau}\left(\frac{L+r}{\|L+r\|}\right) = \text{grau}\left(\frac{L}{\|L\|}\right)$ (ambas restritas à S_ε).

<u>Demonstração</u>: Basta obter uma homotopia entre estas aplicações. Para isto, é suficiente notar que $\|r(z)\| < \|L(z)\|$ implica que $\lambda r(z) + L(z) \neq 0$ para todo $z \in S_\varepsilon$ e $0 \leq \lambda \leq 1$. Portanto $H_\lambda(z) = \frac{L(z)+\lambda r(z)}{\|L(z)+\lambda r(z)\|}$ é uma homotopia entre $\frac{L}{\|L\|}$ e $\frac{L+r}{\|L+r\|}$, como queríamos. ∎

Como consequência deste lema temos

<u>Proposição IV.2</u>: Se 0 é um ponto crítico não degenerado de f (i.é. a matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\right)(0)$ é não singular) então $\mu_g(f) = 1$.

<u>Demonstração</u>: Escrevendo $\partial f(z) = L.z + r(z)$ onde $L = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(0)$ é não singular e $\lim\limits_{|z|\to 0} \frac{r(z)}{|z|} = 0$ temos então que se ε for suficientemente pequeno então $|r(z)| < |L(z)|$ para todo $z \in S_\varepsilon$.

Pelo "Princípio de Rouché" acima obtemos

$$\text{grau} \left.\frac{\partial f}{\|\partial f\|}\right|_{S_\varepsilon} = \text{grau} \left.\frac{L+r}{\|L+r\|}\right|_{S_\varepsilon} = \text{grau} \left.\frac{L}{\|L\|}\right|_{S_\varepsilon}.$$

Como $G\ell(n+1,C)$ é conexo por caminhos fazemos uma homotopia L_t entre L e a identidade de modo que $\text{grau} \frac{L}{\|L\|} = \text{grau} \frac{Id}{\mathbb{C}} = 1.$ ∎

Evidentemente tudo o que foi feito até agora vale para um ponto crítico isolado qualquer.

A seguir estabelecemos a relação entre μ_g e a multiplicidade.

<u>Lema IV.2</u>: Seja D uma região compacta em C^{n+1} com bordo suave. Se $\partial f^{-1}(0) \cap D$ e $\partial f^{-1}(0) \cap \partial D = \emptyset$ então o número de zeros de ∂f em D (contados com multiplicidade) é igual a μ_g. Isto é se $\partial f^{-1}(0) \cap D = \{p_1,\ldots,p_r\}$ e $\mu_g^i(f)$ é o grau de $\frac{\partial f}{\|\partial f\|}$ restrita a uma pequena esfera em torno de p_i então

$$\mu_g(f) = \sum_{i=1}^{r} \mu_g^i(f).$$

<u>Demonstração</u>: A demonstração deste lema segue argumentos conhecidos na teoria do grau e baseia-se na Proposição IV.2 (veja [Guillemin-Pollack]. Para $i=1,\ldots,r$ seja D_i um disco fechado centrado em p_i contido em D de modo que $D_i \cap D_j = \emptyset$, para $i \neq j$.

Se $\tilde{D} = D - \bigcup_{i=1}^{r} \overset{\circ}{D}_i$ então $\partial\tilde{D} = \partial D \cup (\bigcup_{i=1}^{r} \partial D_i)$.

Certamente $\frac{\partial f}{\|\partial f\|}$ é contínua em $\tilde{D}$, portanto pela Proposição IV.1 grau $\left.\frac{\partial f}{\|\partial f\|}\right|_{\partial\tilde{D}} = 0$. Mas $\partial\tilde{D} = \partial D \cup \bigcup_{i=1}^{r} (-\partial D_i)$, $-\partial D_i$ com orientação invertida. Logo grau $\left.\frac{\partial f}{\|\partial f\|}\right|_{\partial D} = \sum_{i=1}^{r}$ grau $\left.\frac{\partial f}{|\partial f|}\right|_{\partial D_i}$

■

<u>Proposição IV.3</u>: Se $B_\varepsilon \subset \mathbb{C}^{n+1}$ é uma bola fechada centrada em 0 que não contém outros zeros de ∂f então para quase todo ponto $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ em uma vizinhança de 0 a equação $\partial f(z)-a = 0$ possui exatamente μ_g soluções em B_ε.

<u>Demonstração</u>: Pelo Teorema de Sard o complementar de $\{a \in \mathbb{C}^m \ / \ a$ é valor regular de $\partial f\}$ possui medida de Lebesgue nula. Mas se a é valor regular de ∂f então as soluções de $\partial f(z)-a = 0$ são pontos isolados e portanto formam um subconjunto finito de B_ε. Além disso pela Proposição IV.1 cada solução tem multiplicidade 1.

Tomando-se os valores regulares a de ∂f que satisfazem $\|a\| < \|\partial f(z)\|$ para todo $z \in S_\varepsilon$ então o número de soluções de $\partial f(z) - a$ em B_ε é igual ao grau de $\frac{\partial f-a}{\|\partial f-a\|}$ restrita a $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$.

Pelo "Princípio de Rouché" obtemos grau $\left.\frac{\partial f-a}{\|\partial f-a\|}\right|_{S_\varepsilon} =$

$= \text{grau} \left.\frac{\partial f}{\|\partial f\|}\right|_{S_\varepsilon} = \mu_g.$

Estabelecemos assim que

$$\mu_g = \# \{\partial f^{-1}(a) \cap D_\varepsilon \ / \ a \text{ é valor regular de } \partial f \text{ próximo de } 0\}.$$

■

Esta proposição nos diz que com <u>uma pequena perturbação linear</u> $f + \sum_{j=1}^{n+1} a_j z_j$ <u>de</u> f <u>obtemos</u> μ_g <u>pontos críticos não degenerados em uma vizinhança de</u> 0.

Este fato e o próximo Teorema nos ajudarão a descrever mais adiante uma base para $H_n(F_\theta, \mathbb{Z})$.

<u>Teorema IV.1</u> [Milnor (1)] μ_g = posto $H_n(F_\theta,\mathbb{Z})$.

Antes de demonstrarmos este Teorema precisamos de uma fórmula que relacione o grau de uma aplicação $v: S^k \to S^k$ com a topologia de uma subvariedade de S^k.

O número de Lefschetz [Spanier] de uma aplicação $g: N \to N$ é definido por $\Lambda(g) = \Sigma(-1)^j$ traço $(g_*: H_j(N) \to H_j(N))$. De acordo com [Hopf] (ver também [Griffiths-Harris] pg. 421) no caso em que N é uma subvariedade C^∞ orientada $\Lambda(g)$ é igual ao índice de interseção entre $\Delta(N)$ e graf(g) onde graf$(g) = \{(x,y) \in N\times N \,/\, y = g(x)\}$ e $\Delta(N) = \{(x,y) \in N\times N \,/\, y = x\}$. Observe que graf$(g) \cap \Delta(N) = \mathrm{Fix}(g) = \{x \in N \,/\, g(x) = x\}$ e que podemos supor (fazendo uma homotopia) que graf(g) é transversal a $\Delta(N)$. Isto significa que $dg(x): T_xN \to T_x(N)$ é não singular, de maneira que nestas circunstâncias podemos definir o índice $i_g(x)$ de g em x como

$$i_g(x) = \begin{cases} +1 & dg(x) \text{ preserva orientação de } T_xN \\ -1 & dg(x) \text{ inverte orientação de } T_xN. \end{cases}$$

Isto é $i_g(x)$ é o número de interseção de $\Delta(N)$ e graf(g) no ponto (x,x). Portanto temos

$$\sum_{x\in \mathrm{Fix}(g)} i_g(x) = \Delta(N).\mathrm{graf}(g) = \Lambda(g) = \sum_j (-1)^j \text{ traço } (g_*: H_j(N) \to H_j(N)).$$

A relação que buscamos está expressa no

<u>Lema IV.3</u>: Sejam $v: S^k \to S^k$ uma aplicação C^∞ e $M \subset S^k$ uma

região compacta de S^k com bordo suave. Suponhamos que

1) $Fix(v) \subset M$

2) $v(x) \neq -x \quad \forall\, x \in M$

3) $\langle v(x), n(x)\rangle > 0$ para todo $x \in \partial M$ onde $n(x) \in T_x S^k$ é um vetor normal a ∂M que aponta para o interior de M ($\langle , \rangle$ produto euclidiano de $\mathbb{R}^{k+1}$).

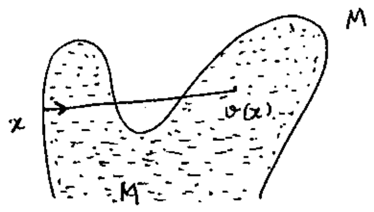
Então $\chi(M) = 1 + (-1)^k \operatorname{grau}(v)$.

<u>Demonstração</u>: Para $v: S^k \to S^k$ temos:

$$\Lambda(v) = \sum_j (-1)^j \text{ traço } (v_*: H_j(S^k) \to H_j(S^k)) = 1+(-1)^k \operatorname{grau}(v).$$

Podemos supor que v tem pontos fixos isolados.

Como $v(x) \neq -x$ para todo $x \in M$, podemos definir $v_t: M \to S^k$ por $v_t(x) = \dfrac{(1-t)x+tv(x)}{\|(1-t)x+tv(x)\|}$. A hipótese 3) nos garante que para t suficientemente pequeno $v_t(M) \subset M$ (verifique). Logo, pela invariância do número de Lefschetz temos para $0 \leq t \leq \delta$ $\Lambda(v_t) = \Lambda(v_0) = \Lambda(I_M) = \chi(M)$.



Novamente usando $v(x) \neq -x$ em M vemos que $Fix(v_t) = Fix(v)$ para todo t. Além disso $i_x(v_t) = i_x(v)$ se

$x \in Fix(v)$, portanto pela Fórmula de Lefschetz

$$1 + (-1)^k \operatorname{grau}(v) = \Lambda(v) = \sum_{x \in Fix(v)} i_x(v) = \sum_{x \in Fix(v_t)} i_x(v_t) =$$
$$= \Lambda(v_t) = \chi(M).$$

■

Passemos à <u>demonstração do Teorema IV.1</u>:

Por definição $\mu_g = \operatorname{grau} \frac{\partial f}{|\partial f|}$ onde $\frac{\partial f}{|\partial f|}: S_\varepsilon \to S^{2n-1}$

e $$\frac{\partial f}{|\partial f|}(z) = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}}{\|\operatorname{grad} f(z)\|}\right).$$

Se $\Phi(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{n+1})$ então

$\frac{\partial f}{|\partial f|} = \Phi \circ \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}$ e

$$\mu_g = (\operatorname{grau} \Phi)\left(\operatorname{grau} \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}\right) = (-1)^{n+1} \operatorname{grau}\left(\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}\right).$$

Seja $v: S_\varepsilon \to S_\varepsilon$ a aplicação C^∞ definida por

$v(z) = \varepsilon \frac{\operatorname{grad} f(z)}{\|\operatorname{grad} f(z)\|}$. Verifiquemos que $M = \{z \in S_\varepsilon \ / \ \operatorname{Re} f(z) \geq 0\}$

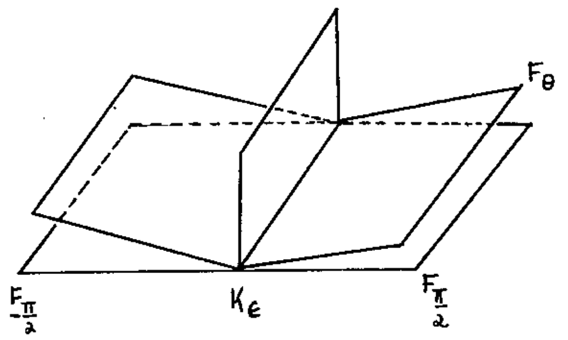
satisfaz às hipóteses do Lema IV.3. Podemos escrever

$M = \bigcup_{-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2} F_\theta \cup K_\varepsilon$ de maneira que $\partial M = F_{-\pi/2} \cup K_\varepsilon \cup F_{\pi/2}$ é

C^∞, (veja observação na página 32). Além disso $\varphi_\varepsilon: Int(M) \to C$

onde C é o semi-círculo $C = \{e^{i\theta} / -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ é uma fibração cuja fibra típica é F_θ, portanto $\chi(M) = \chi(F_\theta) =$

$= \sum_j (-1)^j \operatorname{posto} H_j(F_\theta) = 1 + (-1)^n \operatorname{posto} H_n(F_\theta)$.



Hipótese 1: $z \in Fix(v) \Leftrightarrow v(z) = z \Leftrightarrow \text{grad } f(z) = \lambda z$ com $\lambda > 0$.

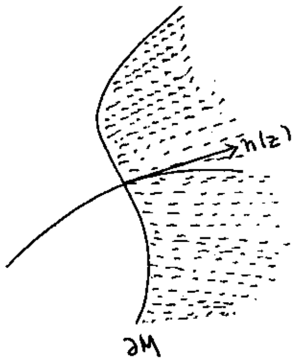
Como vimos anteriormente (Proposição II.1) $f^{-1}(0)$ é transversal a S_ϵ, portanto se $z \in K_\epsilon$ então z e grad $f(z)$ são linearmente independentes, isto é grad $f(z) = \lambda z$ implica $f(z) \neq 0$. Logo, grad Log $f(z) = \dfrac{\lambda z}{\overline{f(z)}}$ e pela demonstração do Teorema da Fibração isto implica que $\text{Re } \dfrac{\lambda}{\overline{f(z)}} > 0$. (Veja Lema II.1). E como $\lambda > 0$ temos Re $f(z) > 0$ ou seja $z \in Int(M)$.

Hipótese 2: É verificada analogamente.

Se $v(z) = -z$ então grad $f(z) = cz$ com $c < 0$. Isto significa que grad Log $f(z) = \dfrac{c}{\overline{f(z)}}\, z$ com $\text{Re } \dfrac{c}{\overline{f(z)}} > 0$ ou seja Re $f(z) < 0$ e $z \notin M$.

Hipótese 3: Seja $p(t)$ uma curva em S_ϵ passando pelo ponto $z \in \partial M$ e transversal a ∂M de modo que $p(0) = z$ e

$p'(0) = n(z)$. Então $\frac{d}{dt}$ Re $f(p(t))\Big|_{t=0} > 0$.



Derivando obtemos

$$\frac{d}{dt}\ f\circ\, p(t)\Big|_{t=0} = \langle p'(t),\ \text{grad}\ f(p(t))\rangle\Big|_{t=0} = \langle n(z), \text{grad} f(z)\rangle$$

portanto $\text{Re}\langle n(z),\ \text{grad}\ f(z)\rangle > 0$. Concluímos assim pelo Lema IV.3 que

$$\chi(M) = \chi(F_\theta) = 1+(-1)^n \text{ posto } (F_\theta) = 1+(-1)^{2n+1}\text{grau}(v) = 1+(-1)^{3n+2}\mu_g$$

donde $\text{posto}(F_\theta) = \mu_g$.

■

<u>Multiplicidade Algébrica</u>:

A Proposição IV.3 mostra que μ_g é a multiplicidade da equação $\partial f(z)-a = 0$ para a genérico próximo de 0 em um pequeno disco em torno de 0. Descreveremos agora um método algébrico para calcular este número.

<u>Definição IV.3</u>: Germes

Seja U e V vizinhanças abertas de um ponto z_o em

$\mathbb{C}^{n+1}$. Dizemos que duas funções holomorfas $f: U \to \mathbb{C}$ e $g: V \to \mathbb{C}$ são <u>equivalentes em</u> z_o se existe uma vizinhança $W \subset U \cap V$ de z_o tal que $f|_W = g|_W$. Um <u>germe</u> em z_o é a classe de equivalência de uma função. Denotamos por $\mathcal{O}_{z_o}$ o conjunto de germes em z_o de funções holomorfas. Para simplificar a notação usaremos $\mathcal{O}_n$ ao invés de $\mathcal{O}_o$.

$\mathcal{O}_{z_o}$ é um anel local cujo único ideal maximal $\mathfrak{m}_{z_o}$ é formado pelos germos de funções que se anulam em z_o (prove). É fácil ver também que $\mathcal{O}_{z_o}$ é isomorfo a $\mathbb{C}\{z-z_o\}$ = anel das séries de potencias convergentes em z_o. $\mathcal{O}_{z_o}$ é Noetheriano e um domínio de fatorização única (veja exercício IV.4).

Se $f: U \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa definida em uma vizinhança aberta U de 0 em $\mathbb{C}^{n+1}$ denotamos por Jf o ideal de $\mathcal{O}_{n+1}$ gerado pelos germes em 0 das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ para $j = 1,\dots,n+1$.

<u>Proposição IV.4</u>: Se 0 é ponto crítico isolado de $f: U \to \mathbb{C}$, $0 \in U \subset \mathbb{C}^{n+1}$ então $\mu_a = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/Jf < \infty$.

<u>Demonstração</u>: Consideremos a <u>subvariedade analítica</u> V(Jf) em $\mathbb{C}^{n+1}$ definida por $\{z \in U \;/\; \frac{\partial f}{\partial z_1}(z) = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}(z) = 0\}$. Por hipótese existe uma vizinhança (que podemos supor a própria U) tal que $V(Jf) = \{0\}$. Portanto se $I(V(Jf)) = \{h \in \mathcal{O}_{n+1} /$ algum representante de h se anula em $V(Jf)\}$ então $I(V(Jf)) = \mathfrak{m}$.

Mas pelo Teorema de zeros de Hilbert (Nullstellensatz) (veja [Gunning e Rossi] página 90) $I(V(Jf)) = \text{Rad } Jf = \{h \in \mathcal{O}_{n+1} / h^k \in Jf$ para algum $k \in N\}$ de maneira que se $\mathfrak{m}^r = \underbrace{\mathfrak{m}.\mathfrak{m},\ldots,\mathfrak{m}}_{r\text{-vezes}}$ então $Jf \supseteq \mathfrak{m}^r$ para algum r inteiro positivo (isto é Jf é $\mathfrak{m}$-primário).

Donde $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/Jf \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/\mathfrak{m}^r < \infty$

∎

<u>Exercícios</u>: IV.1) Prove a recíproca da Proposição IV.3: Se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/Jf < \infty$ então 0 é ponto crítico isolado de f ou ponto regular (= não crítico).

IV.2) Verifique que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/\mathfrak{m}^r < \infty$ mostrando inicialmente que $\mathfrak{m}^r = \{g \in \mathcal{O}_{n+1} / g(0) = 0$ e $\dfrac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_{n+1}^{\alpha_{n+1}}}(0)=0$ para $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1} \leq r-1\}$.

IV.3) Dê exemplo de um polinômio $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e 0 seja ponto crítico isolado de f mas $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{n+1}/Jf = \infty$ onde $\mathcal{E}_{n+1} = \{$germes em 0 de função C^∞ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}\}$.

IV.4) Prove que $\mathcal{O}_n$ é Noetheriano, isto é, todo ideal de $\mathcal{O}_n$ é finitamente gerado.

Solução: Provamos por indução em n: para $n=1$ é fácil.

Sejam $I \neq \{0\}$ um ideal de $\mathcal{O}_n$ e $f \in I$. Usando o Teorema de divisão de Weierstrass podemos supor que $f \in \mathcal{O}_n[z_{n+1}]$

é um polinômio de Weierstrass. Se $I' = I \cap \mathcal{O}_n[z_{n+1}]$ então pela hipótese de indução $\mathcal{O}_n$ é Noetheriano e pelo Teorema de base de Hilbert I' é finitamente gerado. Se $\{f_1,\dots,f_k\}$ é um conjunto de geradores de I' e $g \in I$ então dividindo g por f (via Weierstrass) obtemos $g = gf+r$ com $r \in \mathcal{O}_n[z_{n+1}]$. Logo $r \in I'$ e I é gerado por $\{f, f_1,\dots,f_k\}$.

<u>Definição IV.4</u>: $\mu_a = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/Jf$ é a <u>multiplicidade algébrica</u> de f em 0.

Se $\mu_a < \infty$ dizemos que o germe $\partial f\colon (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C}^{n+1},0)$ associado é uma aplicação analítica finita (vide [Gunning]).

A importância de finitude de μ_a está expressa pela seguinte proposição. Ela nos diz que em se tratando de funções holomorfas com pontos críticos isolados não há perda de generalidade em considerar localmente a função dada por um polinômio.

<u>Proposição IV.4</u>: Se $f\colon U \to \mathbb{C}$, U vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^{n+1}$ é uma função holomorfa tal que $\mu_a < \infty$ então existe um germe de difeomorfismo biholomorfo h tal que $f\circ h$ pode ser representado por um polinômio.

<u>Demonstração</u>: A prova desta proposição segue um argumento que já se tornou clássico na teoria de singularidades de aplicações. [ver Sotomayor pg. 230]. Provamos que existe um inteiro positivo k e uma mudança de coordenadas biholomorfa em uma vizinhança de 0 tal que $f\circ h$ é igual ao polinômio de Taylor de f em

0 de grau k (k-jato de f em 0). Dizemos que dois germes f e g pertencentes a $\mathcal{O}_{n+1}$ definem o mesmo k-jato em 0 (notação $j^k(f(0) = j^k g(0))$ se $f-g \in \mathfrak{m}^{k+1}$ isto é se a diferença $f - g$ é um germe que se anula em 0 juntamente com todas as suas derivadas parciais até ordem $k + 1$.

Vimos pela Proposição IV.3 que $\mu_a < \infty$ é equivalente a $Jf \supseteq \mathfrak{m}^r$ para algum r. Seja $g = T_o^{r+1}f$ = polinômio de Taylor de f em 0, provaremos que $f \circ h = g$ para h germe em 0 de difeomorfismo biholomorfo. Observe que $g-f \in \mathfrak{m}^{r+2}$.

Se $f_t = (1-t)f + tg$ é uma homotopia entre f e g então para cada $t_o \in [0,1]$ iremos construir uma família h_t de germes de difeomorfismos biholomorfos para $|t-t_o|$ pequeno tal que

$$f_t \circ h_t = f_{t_o}$$

Seja $F_s = f_{t_o+s}$, estamos buscando resolver a equação $F_s \circ h_s = F_o$ para $|s| < \varepsilon$.

Derivando em relação ao parametro s obtemos a equação:

$$g(h_s(z)) - f(h_s(z)) + dF_s(h_s(z)). \frac{\partial h_s}{\partial_s}(z) = 0.$$

A existência de $h_s(z)$ estará garantida (via integração de campos holomorfos) se existir um campo holomorfo $\xi(s,z)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_s}{\partial_s}(z) + dF_s(z).\xi(s,z) = 0 \\ \xi(s,0) = 0 \end{cases}$$

pois desta forma se $h(s,z)$ é solução da equação diferencial $\frac{dz}{ds} = \xi(s,z)$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ com condição inicial $h(0,z) = z$ então $F_s(h_s(z)) = f_{t_o+s}(h_s(z)) = f_{t_o}(z)$ [ver Coddington-Levinson].

Para $|s|$ pequeno h_s será um germe de difeomorfismo biholomorfo. A equação acima pode ser escrita na forma $\frac{\partial F_s}{\partial s}(z) \in \langle \frac{\partial F_s}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial F_s}{\partial z_{n+1}} \rangle N\mathcal{O}_{n+2}$ onde $\mathcal{O}_{n+2}$ é o anel dos germes em 0 de funções holomorfas de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}$ em $\mathbb{C}$ e N é o ideal dos germes que se anulam em $\mathbb{C} \times \{0\}$ e $\langle \frac{\partial F_s}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial F_s}{\partial z_{n+1}} \rangle N\mathcal{O}_{n+1}$ é o ideal gerado pelas derivadas $\{\frac{\partial F_s}{\partial z_j}\}$ com coeficientes em N.

Por hipótese $g-f \in \mathfrak{m}_{n+1}^{r+2} \subset \mathfrak{m}_{n+1}^{2} Jf$ e $\frac{\partial F_s}{\partial z_j} - \frac{\partial f}{\partial z_j} =$

$= (t_o+s)(\frac{\partial g}{\partial z_j} - \frac{\partial f}{\partial z_j}) \in \mathfrak{m}_{n+1}^{r+1}$ portanto $\frac{\partial F_s}{\partial s} = g-f \in \mathfrak{m}^{r+2} \subset$

$$\subset \mathfrak{m}^2 Jf \subset \langle \frac{\partial F_s}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial F_s}{\partial z_{n+1}} \rangle \mathfrak{m}_{n+1}^2 + \mathfrak{m}_{n+1}^{r+3} \mathcal{O}_{n+2}$$

$$\mathfrak{m}_{n+1}^{r+2} \mathcal{O}_{n+2} \subset \langle \frac{\partial F_s}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial F_s}{\partial z_{n+1}} \rangle \mathfrak{m}_{n+1}^2 \mathcal{O}_{n+2} + \mathfrak{m}_{n+1} (\mathfrak{m}_{n+1}^{r+2} \mathcal{O}_{n+2}).$$

Usamos então o <u>Lema de Nakayama</u>: "Sejam R um anel comutativo com unidade, I um ideal de R, A e B R-módulos tais que

1) $x \in I \Rightarrow$ existe $(1+x)^{-1}$

2) A é finitamente gerado

Então $A \subseteq B+IA$ implica $A \subseteq B$". (Veja por exemplo Atyah-Macdonald: Int. to Commutative Algebra).

Fazendo $A = \mathfrak{m}_{n+1}^{r+2}\, \mathcal{O}_{n+2}$ $B = \langle \frac{\partial F_s}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial F_s}{\partial z_{n+1}} \rangle \mathfrak{m}_{n+1}^2\, \mathcal{O}_{n+2}$ e

$I = \mathfrak{m}$ pelo Lema de Nakagama temos $\mathfrak{m}_{n+1}^{r+2}\, \mathcal{O}_{n+2} \subset \langle \frac{\partial F_s}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial F_s}{\partial z_{n+1}} \rangle \mathfrak{m}_{z_{n+1}}^2\, \mathcal{O}_{n+2}$

■

A multiplicidade algébrica está relacionada com a multiplicidade gradiente pelo seguinte

<u>Teorema IV.2</u> (Palamodov) $\mu_a = \mu_g$.

Há varias maneiras de se provar este resultado. Daremos uma idéia da prova seguindo [Orlik]. Para outras provas (mais diretas) o leitor pode consultar [Sebastiani (1)] ou [Gunning (1)].

Denotemos por $\mathcal{O}_z$ = anel dos germes em 0 das funções holomorfas (onde $z = (z_1, \ldots, z_{n+1})$ indicam as coordenadas em $\mathbb{C}^{n+1}$) e $\mathcal{O}_y$ o mesmo anel com coordenadas $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ no contradomínio. Seja, como antes $\partial f = (\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}): (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$

observe que o homomorfismo $(\partial f)^*: \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_z$ definido por $(\partial f)^*(\varphi) = \varphi \circ (\partial f)$ torna $\mathcal{O}_z$ um $\mathcal{O}_y$-módulo.

<u>Lema IV.1</u>: $\mathcal{O}_z$ é um $\mathcal{O}_y$-módulo gerado por μ_a elementos.

<u>Demonstração</u>: Isto segue imediatamente do Teorema de Preparação de Malgrange [ver Sotomayor] e do Lema de Nakayama.

Daremos uma prova de acordo com [Gunning (1)]:

Considere

$V_1 = \{(y_1,\ldots,y_{n+1},z_1,\ldots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}^{n+1} \ / \ y_j = \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_1,\ldots,z_{n+1})\} =$ $=$ gráfico de ∂f. Então V_1 é uma subvariedade analítica difeomorfa (via o mergulho $z \to (\partial f(z),z)$) a $\mathbb{C}^{n+1}$ e $V_1 \cap \{y_1 = \ldots y_{n+1} = 0\} = \{0\}$.

Desta forma ∂f pode ser visto como a restrição da projeção $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ $\pi(y,z) = y$ a V_1.

Se $\mathfrak{a} = id(V_1) =$ ideal de $\mathcal{O}_{(y,z)}$ gerado por $\{y_j - \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_1,\ldots,z_{n+1})\}$ $j = 1,\ldots,n+1$. (Verifique que $\mathfrak{a}$ é um ideal primo) então

$\mathcal{O}_{y,z}/\mathfrak{a} \simeq \mathcal{O}_z$ via o homomorfismo $h(g,z) \xrightarrow{\Phi^*} h(\partial f(z),z)$ "restrição a V_1".

Seja g_{n+1} um polinomio de Weierstrass em z_{n+1} tal que $g_{n+1} \in \mathfrak{a}$ então $g_{n+1} = z_{n+1}^r + a_1 z_{n+1}^{r-1} + \ldots + a_r$ onde a_j são funções holomorfas em $(y_1,\ldots,y_{n+1},z_1,\ldots,z_n)$. Como $g_{n+1} \in \mathfrak{a}$ concluímos que $\tilde{z}_{n+1} =$ classe de z_j em $\mathcal{O}_{y,z}/\mathfrak{a}$ satisfaz uma equação algébrica com coeficientes em $\mathcal{O}_{y,\tilde{z}}/\mathfrak{a}$ onde $\tilde{z} = (z_1,\ldots,z_n)$. Além disso pelo Teorema de Divisão de Weierstrass se $g \in \mathcal{O}_{y,z}$ então $g = q.g_n + r$ onde $r \in \mathcal{O}_{y,\tilde{z}}[z_{n+1}]$, logo $g \equiv r \bmod \mathfrak{a}$ ou seja $\mathcal{O}_{y,z}/\mathfrak{a} \cong \mathcal{O}_{y,\tilde{z}}/\mathfrak{a}\cap\mathcal{O}_{y,\tilde{z}}[\tilde{z}_{n+1}]$. Procedendo analogamente com os ideais $\mathfrak{a} \cap \mathcal{O}_{y,z}$ sucessivamente e usando o fato de que ∂f é finita obtemos

$$\mathcal{O}_{y,z}/\mathfrak{a} \simeq \mathcal{O}_y/\mathfrak{a}\cap\mathcal{O}_y[\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{n+1}] = \mathcal{O}_y[\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{n+1}].$$

Finalmente usando o isomorfismo $\mathcal{O}_{y,z}/\mathfrak{a} \xrightarrow{\Phi^*} \mathcal{O}_z$ acima obtemos $\mathcal{O}_z \simeq \Phi^*(\mathcal{O}_y)[\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{n+1}] = (\delta f)^*(\mathcal{O}_y)[\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{n+1}]$. Isto é $\mathcal{O}_z$ é uma extensão algébrica finita do subanel $(\delta f)^*(\mathcal{O}_y)$.

Portanto $\mathcal{O}_z$ é um $(\delta f)^*(\mathcal{O}_y)$-módulo finitamente gerado. Entretanto se $g_1,\ldots,g_{\mu_a}$ são elementos de $\mathcal{O}_z$ cuja imagem em $\mathcal{O}_z/Jf$ formam uma base deste espaço vetorial e se $\mathcal{B}$ é o $(\delta f)^*(\mathcal{O}_y)$-módulo gerado por $g_1,\ldots,g_{\mu_a}$ então $\mathcal{O}_z = \mathcal{B} + Jf.\mathcal{O}_z$ e pelo Lema de Nakayama (observe que $Jf = (\delta f)^*(\mathfrak{m}_y)$) obtemos $\mathcal{O}_z = \mathcal{B}$.

■

Usando o fato de que $\{\frac{\partial f}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}\}$ é um sistema de parametros é possível obter-se que $\mathcal{O}_z$ é um $\mathcal{O}_y$-módulo <u>livre</u> de posto μ_a. (Veja [Nagata])

Como $\mathfrak{a}$ é um ideal primo podemos formar o corpo quociente $\tilde{K}$ de $\mathcal{O}_{y,z}/\mathfrak{a}$ e do fato de que cada $\tilde{z}_j$ é algébrico sobre $\mathcal{O}_y$ obtemos que $\tilde{K} \cong K_y[\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{n+1}]$ onde K_y corpo dos germes em 0 de funções heromorfas. [verifique] Assim podemos escrever $K_z \cong (\delta f)^*(K_y)[\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{n+1}]$ e pelo Teorema do Elemento Primitivo existe uma combinação linear

$\xi = c_1\tilde{z}_1 + \ldots + c_{n+1}\tilde{z}_{n+1}$ tal que $K_z \cong (\delta f)^*(K_y)[\xi]$. Fazendo uma mudança de coordenadas podemos supor $\xi = z_1$ de modo que

$K_z \cong (\partial f)^*(K_y)[z_1]$.

Seja p polinômio irredutível com coeficientes em $(\partial f)^*(K_y)$ tal que $p(z_1) = 0$. Sabemos que z_1 satisfaz uma equação polinomial com coeficientes em $(\partial f)^*(\mathcal{O}_y)$ logo cada coeficiente de p também satisfaz uma tal equação.

Mas como $(\partial f)^*(\mathcal{O}_y)$ é integralmente fechado (por ser domínio de fatorização única) isto implica que cada coeficiente de p pertence a $(\partial f)^*(\mathcal{O}_y)$. Do fato de que $\mathcal{O}_z$ é um $\mathcal{O}_y$-módulo livre segue que $[K_z:K_y] = \mu_a$ = grau p portanto existem funções $A_o,\ldots,A_{d-1}$ pertencentes a $\mathcal{O}_y$ tais que

$$z_1^{\mu_a} + \sum_{j=0}^{\mu_a-1} A_j\left(\frac{\partial f}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}\right)z_1^j = 0, \qquad (*)$$

Observe que se y é um ponto próximo de 0 então z_1 separa os pontos de $\partial f^{-1}(y)$ pois se a e b são pontos distintos tais que $\partial f(a) = \partial f(b) = y$, como $a_j(a) = \Sigma \Gamma_{jk}(y)z_1(a)^k$ para $j = 2,\ldots,n+1$ temos $z_1(a) \neq z_1(b)$.

Pela Proposição IV.3 para y suficientemente próximo de 0, valor regular de ∂f a equação $\partial f(z)-y = 0$ possui <u>exatamente</u> μ_g soluções cada uma delas dando origem a uma solução distinta da equação polinomial $z_1^{\mu_a} + \sum_{j=0}^{\mu_a-1} A_j(y)\, z_1^j = 0$. Donde $\mu_g \leq \mu_a$.

Por outro lado olhando para a subvariedade analítica de C^{n+2} definida por $\{(y_1,\ldots,y_{n+1},z_1) \,/\, z_1^{\mu_a} + \sum_{j=0}^{\mu_a-1} A_j(y)z_1^j = 0\}$.

Vemos que se y é tal que existem μ_a-soluções distintas para a equação (i.e., y fora do conjunto de ramificação) então existem μ_a pontos distintos na pré-imagem de y por ∂f, isto porque fixados z_1 e y existe um único ponto $(z_1, z_2(z_1,y),\ldots,z_{n+1}(z_1,y))$ tal que $\partial f(z_1 z_2(z_1,y),\ldots,z_{n+1}(z_1,y)) = y$. Logo $\mu_a = \mu_g$

∎

Observe que nestas coordenadas pelo fato de que cada função z_j, $j = 2,\ldots,n+1$ se escreve $z_j = \sum_{k=0}^{\ell_j} (\Gamma_{jk} \circ \partial f) z_1^k$ obtemos que a matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_k \partial z_j}(0)\right)_{\substack{2 \le j \le n+1 \\ 2 \le k \le n+1}}$ é não singular.

Uma descrição mais completa da relação da multiplicidade algébrica com o grau de ∂f é dada pelo seguinte

<u>Teorema IV.3</u>: Existem vizinhanças U e V de 0 em $\mathbb{C}^{n+1}$ tais que $\partial f(U) = V$ e $\partial f\colon U \to V$ <u>é um recobrimento analítico ramificado de</u> μ_a <u>folhas</u>.

Isto quer dizer que existe uma subvariedade analítica $D \subset V$ tal que

(1) $U - (\partial f)^{-1}(D)$ é denso em U

(2) $\partial f\colon U-(\partial f)^{-1}(D) \to V-D$ é um <u>recobrimento analítico</u> ou seja para cada ponto $y \in V-D$ existe uma vizinhança $U_y \in V-D$ tal que $\partial f^{-1}(U_y)$ consiste de μ_a componentes e a restrição de ∂f a cada uma destas componentes é um difeomorfismo biholomorfo.

(3) $\partial f^{-1}(y)$ é discreto e ∂f é própria.

Em geral a multiplicidade algébrica é a mais utilizada nos cálculos do número de Milnor (que de agora em diante passaremos a denotar por μ). Usando esta definição, em [Arnold] temos o cálculo de μ para tipos especiais de funções (semi-quasihomogeneas).

Também com esta definição se estabelece a relação entre μ e o poliedro de Newton associado a f.

CAPÍTULO V

A FÓRMULA DE PICARD-LEFSCHETZ

Neste Capítulo estudaremos um pouco da chamada teoria de Picard-Lefschetz que consiste, falando-se vagamente, numa construção análoga à da teoria de Morse para tratar o caso complexo. Uma diferença fundamental entre os casos real e complexo está em que a estrutura topológica dos níveis de uma função real varia ao passarmos por um valor crítico, ao passo que isso não ocorre para uma função holomorfa $f\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ pois pelo teorema de fibração, excetuando-se a fibra singular, todas as demais fibras tem o mesmo tipo numa vizinhança do valor crítico. Nossas referências aqui serão [Lamotke (1)], [Lamotke (2)] e [Husein-Zade]. Considere a seguinte situação:

$f\colon(\mathbb{C}^{n+1},0)\to(\mathbb{C},0)$ holomorfa, $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ é ponto crítico isolado de f. A fibra F_c, para $c \neq 0$ e num pequeno disco em torno de $0 \in \mathbb{C}$, tem o tipo de homotopia de um bouquet de μ esferas de dimensão n, cada uma dessas esferas representando um gerador de $H_n(F_c)$. Estas foram chamadas "ciclos evanescente" por Lefschetz e uma explicação grosseira dessa terminologia está em que quando $c \to 0$, $F_c \to F_o$, que é contrátil.

Uma pequena deformação de f nos fornece uma função com μ pontos críticos não-degenerados e μ valores críticos distintos. As monodromias associadas a esses pontos críticos geram um grupo, chamado o Grupo de Monodromia de f. A fórmula de

Picard-Lefschetz mede a variação de um ciclo evanescente de f sob a ação desse grupo.

Retornamos agora à situação do Teorema II.3 e utilizaremos os resultados de III e IV.

Seja $f\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ holomorfa, tal que todos os seus pontos críticos são não-degenerados, estão contidos no interior de uma bola fechada B_ε, cujo bordo é a esfera S_ε e tal que os valores críticos correspondentes são distintos e estão todos contidos no interior de um disco D_η, $\eta < \varepsilon$. Fixe $p \in \partial D_\eta$ como ponto base. Sejam $\Sigma = \{t_1,\dots,t_\mu\}$ o conjunto de valores críticos de f e $D^* = D_\eta - \Sigma$. Ponha $Y = B_\varepsilon - f^{-1}(\Sigma)$. Sabemos que $f\colon Y \to D^*$ é a projeção de uma fibração C^∞. Denotamos por Y_z, $z \in D^*$ à fibra típica. Começamos fazendo algumas reduções que serão úteis mais tarde.

<u>Lema V.1</u>: Seja $\tilde{Y} = B_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta)$. Então $H_q(\tilde{Y},Y_p) = 0$ para $q \neq n+1$ e $H_{n+1}(\tilde{Y},Y_p) \simeq \mathbb{Z}^\mu$.

<u>Demonstração</u>:

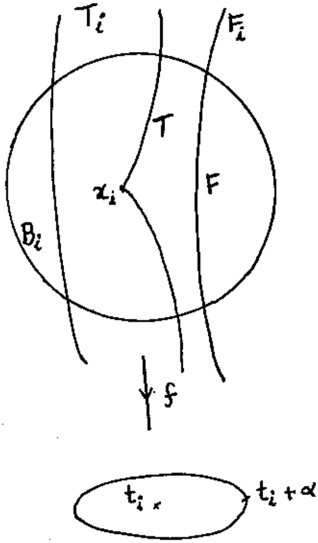
Sejam:

(i) x_i o ponto crítico correspondente a t_i.

(ii) D_i um disco de centro x_i e raio α tal que $D_i \subset \mathring{D}_\eta$ e $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

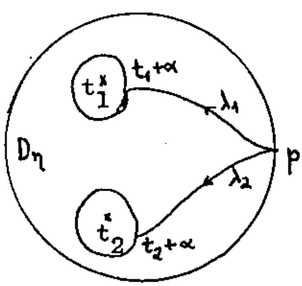
(iii) B_i uma bola fechada de centro x_i e raio suficientemente pequeno de tal modo que em B_i existe um sistema de coordenadas no qual f se exprime como $t_i + z_o^2 + \dots + z_n^2$. (Morse)

(iv) $T_i = f^{-1}(D_i)$, $F_i = f^{-1}(t_i+\alpha)$, $T = T_i \cap B_i$, $F = F_i \cap B_i$



Note que, escolhendo-se os B_i convenientemente, a topologia de T e de F não depende de i.

(v) escolha caminhos diferenciáveis λ_i, ligando p a $t_i + \alpha$, de tal modo que $\lambda = \bigcup_1^{\mu} \lambda_i$ é contrátil a $\{p\}$ e D_η é contrátil a $\gamma = \lambda \cup (\bigcup_1^{\mu} D_i)$.



Com isto em mãos temos:

Etapa A:

Y_p é um retrato forte de deformação de $\Lambda = f^{-1}(\lambda)$ e $\Gamma = f^{-1}(\gamma)$ é um retrato forte de deformação de $\tilde{Y}$. Em particular, as inclusões $(\tilde{Y},Y_p) \to (\tilde{Y},\Lambda)$ e $(\Gamma,\Lambda) \to (\tilde{Y},\Lambda)$ induzem isomorfismos em homologia e em homotopia.

Demonstração de A:

Como $\lambda \subset D^*$, $f|_\Lambda\colon \Lambda \to \lambda$ é um subfibrado de $f\colon Y \to D^*$. Pelo teorema do recobrimento homotópico [Massey], podemos levantar a contração de λ a $\{p\}$ a uma de Λ a Y_p. Anàlogamente para a outra afirmação.

Etapa B:

As inclusões $(T_i,F_i) \to (\tilde{Y},\Lambda)$ induzem um isomorfismo

$$\bigoplus_{i=1}^{\mu} H_*(T_i,F_i) \xrightarrow{\simeq} H_*(\tilde{Y},\Lambda).$$

Demonstração de B:

Como $\Gamma - (\Lambda - \bigcup_{i=1}^{\mu} F_i) = \bigcup_{i=1}^{\mu} T_i$ e, por A, Y_p é um retrato forte de deformação de $\Lambda - \bigcup_{i=1}^{\mu} F_i$, a inclusão $(\bigcup_{i=1}^{\mu} T_i, \bigcup_{i=1}^{\mu} F_i) \to (\tilde{Y},\Lambda)$ é excisiva. Sendo as uniões $\bigcup_{i=1}^{\mu} T_i$ e $\bigcup_{i=1}^{\mu} F_i$ disjuntas, o resultado segue.

Etapa C:

A inclusão $(T,F) \to (T_i,F_i)$ induz um isomorfismo a nível de homologia.

Demonstração de C:

Considere $\partial T = T \cap \partial B_i$, $\partial F = F \cap \partial B_i$ e a inclusão $(T, \partial T \cup F) \to (T_i, \overline{T_i - B_i} \cup F_i)$. Como $T = T_i - (T_i - B_i)$ e $\partial T \cup F = \overline{T_i - B_i} \cup F_i - (T_i - B_i)$ esta é uma excisão e portanto induz um isomorfismo $H_*(T, \partial T \cup F) \xrightarrow{\sim} H_*(T_i, \overline{T_i - B_i} \cup F_i)$.

Por outro lado temos que $F_i - \mathring{B}_i$ e ∂F são retratos fortes de deformação de $T_i - \mathring{B}_i$ e de ∂T, respectivamente. Isso segue do teorema de Ehresmann pois f tem posto real constante $(=2)$ sobre $T_i - \mathring{B}_i$ e ∂T. Logo, $T_i - \mathring{B}_i \xrightarrow{f} D_i$ e $\partial T \xrightarrow{f} D_i$ são fibrações localmente triviais sobre a base contrátil D_i. Com isso em mãos temos que as inclusões

$$(T,F) \to (T, \partial T \cup F) \quad \text{e} \quad (T_i,F_i) \to (T_i, \overline{T_i - B_i} \cup F_i)$$

induzem isomorfismos a nível de homologia já que $\partial T \cup F$ se retrai sobre F e $\overline{T_i - B_i} \cup F_i$ se retrai sobre F_i. Finalmente, o diagrama de inclusões

$$\begin{tikzcd}
(T,F) \arrow[r] \arrow[d] & (T_i,F_i) \arrow[d] \\
(T, \partial T \cup F) \arrow[r] & (T_i, \overline{T_i - B_i} \cup F_i)
\end{tikzcd}$$

nos dá

$$
\begin{array}{ccc}
H_*(T,F) & \longrightarrow & H_*(T_i,F_i) \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
H_*(T,\partial T\cup F) & \xrightarrow{\sim} & H_*(T_i,\overline{T_i-B_i}\cup F_i)
\end{array}
$$

e C fica demonstrada.

As etapas A,B e C reduziram o estudo de $(\tilde{Y},Y_p)$ ao de (T,F). Mas, por III.12, sabemos que F é a fibra de Milnor associada a um ponto crítico não-degenerado e que T é contrátil.

Logo, $0 \to H_q(T,F) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(F) \to 0$, $q \neq 0$ e portanto
$H_q(T,F) \simeq H_{q-1}(F)$, $q \neq 0$
$H_o(T,F) = 0$.

Como $H_o(F) \simeq \mathbb{Z}$, $H_n(F) \simeq \mathbb{Z}$ e $H_{q-1}(F) = 0$, $q \neq 1$ e $q \neq n+1$ obtemos finalmente $H_{n+1}(\tilde{Y},Y_p) \simeq \mathbb{Z}^{\mu}$ e $H_q(\tilde{Y},Y_p) = 0$ para $q \neq n+1$, concluindo a demonstração de V.1.

Em III.12 vimos que um gerador de $H_n(F)$ é representado por uma esfera $\sum\limits_{0}^{n}(\mathrm{Re}z_j)^2 = \varepsilon^2$ munida de uma orientação, e usando o isomorfismo $H_{n+1}(T,F) \xrightarrow[\sim]{\partial} H_n(F)$ vemos que um gerador $[\Delta]$ de $H_{n+1}(T,F)$ é representado por uma bola fechada real Δ de dimensão $n + 1$, cujo bordo S^n representa o gerador de $H_n(F)$. Uma orientação de S^n determina um gerador de $H_{n+1}(T,F)$.

Considere a sequência

$$H_{n+1}(T,F) \xrightarrow{\sim} H_{n+1}(T_i,F_i) \to H_{n+1}(\tilde{Y},\Lambda) \xrightarrow{\sim} H_{n+1}(\tilde{Y},Y_p)$$

onde a flecha média é injetiva por V.1-B. Seja $[\tilde{\Delta}_i]$ uma base $H_{n+1}(T,F) \xrightarrow{\sim} H_{n+1}(T_i,F_i)$, $i = 1,\ldots,\mu$. Estas são levadas [illegible]e $\Delta_1,\ldots,\Delta_\mu$ de $H_{n+1}(\tilde{Y},Y_p)$ pela sequência de homomor- [illegible]

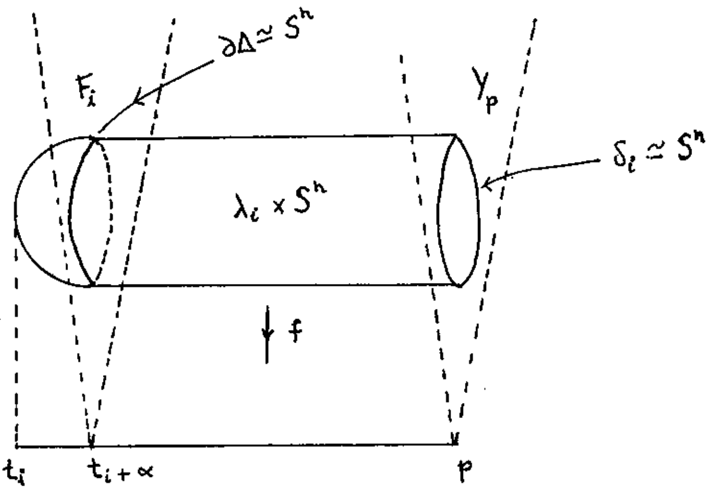
Definição V.2:

O homomorfismo de bordo $\partial: H_{n+1}(\tilde{Y},Y_p) \to H_n(Y_p)$ envia cada gerador Δ_i de $H_{n+1}(\tilde{Y},Y_p)$ num elemento $\delta_i = \partial\Delta_i \in H_n(Y_p)$ chamado ciclo evanescente. Δ_i é chamado o dedal de δ_i (terminologia de Lefschetz).

Observação V.3:

δ_i é representado por uma esfera S^n mergulhada em Y_p.

De fato, como $f\big|_{f^{-}(\lambda_i)}: f^{-1}(\lambda_i) \to \lambda_i$ é uma fibração trivial (λ_i contrátil), $f^{-1}(\lambda_i)$ é difeomorfa a $\lambda_i \times F_i$. O "dedal" $\Delta \cup (\lambda_i \times S^n)$ onde Δ representa um gerador de $H_{n+1}(T,F)$, representa o gerador Δ_i, e o bordo geométrico $\partial(\Delta \cup (\lambda_i \times S^n))$ é uma esfera mergulhada em Y_p.



Ao percorrermos λ_i, de p até $t_i + \alpha$ e em seguida nos movermos de $t_i + \alpha$ até t_i, δ_i evanesce, daí a origem do nome.

Retornando a III.12, sabemos que F é uma vizinhança tubular de S^n em F_i e que esta está mergulhada em F como a seção nula S^n está mergulhada no fibrado tangente TS^n. O número de auto-interseção de S^n em TS^n (ou a característica de Euler-Poincaré de S^n) é 0 ou 2 caso n seja ímpar ou par, respectivamente. O cálculo desse número é feito munindo-se TS^n da orientação induzida pela orientação canônica $(u_o,u_1,\ldots,u_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, primeiro orienta-se S^n e depois a fibra

T_uS^n. Como F possui uma orientação natural devido à sua estrutura holomorfa, que é dada por $(x_o,y_o,\dots,x_n,y_n)$, esta induz uma orientação de TS^n dada por $(u_1,v_1,\dots,u_n,v_n)$, a qual difere da orientação canônica $(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n)$ de TS^n pelo fator $(-1)^{n(n+1)/2}$. Logo, o número de auto-interseção de S^n em F_i é $(-1)^{n(n+1)/2}(1-(-1)^{n+1})$. Agora, F_i é difeomorfo a Y_p, com o difeomorfismo preservando a orientação induzida pela estrutura analítica e portanto S^n, que munida dessa orientação determina um dos geradores $[S^n]$ de $H_n(F_i)$, é levada por esse difeomorfismo num ciclo $S^n \hookrightarrow Y_p$ que munido da orientação induzida de Y_p determina um ciclo evanescente $\delta_i \in H_n(Y_p)$. Portanto, o número de auto-interseção é dado por

$$\langle\delta_i,\delta_i\rangle = (-1)^{n(n+1)/2}(1-(-1)^{n+1})$$

Para descrevermos a ação da monodromia em $H_n(Y_p)$ precisaremos da seguinte notação.

Seja $w_i = t_i + \alpha e^{2\pi is}$, $0 \leq s \leq 1$, o laço que descreve a bordo do disco D_i e ponha $\beta_i = \lambda_i^{-1}.w_i.\lambda_i$. Este é um laço em torno de t_i com extremo em p, chamado <u>laço elementar</u> uma vez que as classes de homotopia $[\beta_i]$, $i = 1,\dots,\mu$ geram livremente o grupo $\pi_1(D^*,p)$. Daí segue que, escolhendo-se convenientemente uma ordem de indexação dos $t_i's$, existe uma única relação $[\beta_1]\dots[\beta_\mu] = 1$.

No que segue todos os espaços envolvidos têm orientação fixada, que será explicitada quando necessário.

Foi visto em IV que $\pi_1(D^*,p)$ age na homologia da fibra, ação que só significa algo em dimensão n, já que essa é a única dimensão em que temos homologia não trivial. Seja $h_{[\beta_i]_*}: H_n(Y_p) \to H_n(Y_p)$ o operador de monodromia induzido por $[\beta_i]$ na homologia de Y_p. Chegamos ao resultado central desse capítulo.

<u>Teorema V.4</u>: Fórmula de Picard-Lefschetz.

$$h_{[\beta_i]_*}(x) = x + (-1)^{(n+2)(n+1)/2} \langle x,\delta_i\rangle\delta_i \quad \text{para} \quad x \in H_n(Y_p)$$

<u>Demonstração</u>:

<u>Etapa A</u>: Caso de um ponto crítico não degenerado.

Aqui consideramos $f: T \to D_\alpha$ (mesma notação que em V.1-C), $D^* = D_\alpha - \{0\}$, F a fibra típica, $w: I = [0,1] \to D^*$, $w(t) = \alpha\, e^{2\pi it}$, $h_{[w]_*}: H_n(F) \xrightarrow{\sim} H_n(F)$ o operador de monodromia induzido pelo gerador $[w]$ de $\pi_1(D^*,\alpha)$.

Definimos inicialmente o operador de <u>extensão</u> ao longo de w (a terminologia ficará clara mais adiante). Seja $H_{[w]}: (F,\partial F)\times(I,\partial I) \to (T,F)$ o levantamento induzido por w no par $(F,\partial F)\times(I,\partial I) = (F\times I,\partial(F\times I)) = (F\times I, F\times\partial I \cup \partial F\times I)$. $H_{[w]}$ é obtido da seguinte maneira:

O fibrado induzido $w^*(T-f^{-1}(0))$ sobre I é trivial e portanto existe uma aplicação contínua

$$\tilde{H}_{[w]}: (F\times I,\partial(F\times I)) \to (T-f^{-1}(0),\partial(T-f^{-1}(0)) \cup F) \hookrightarrow (T,\partial T \cup F)$$

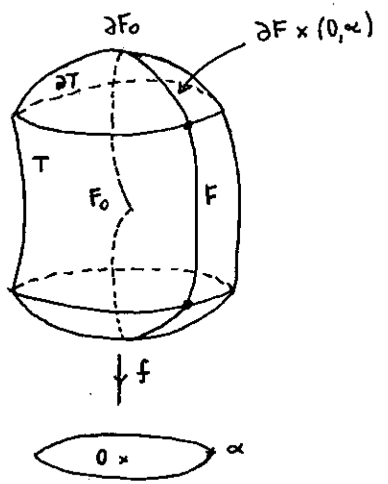
satisfazendo:

$\tilde{H}_{[w]}(x,t,y,t)$ se projeta por f no ponto $w(t) \in D^*$, para $x \in F$ e $y \in \partial F$.

$\tilde{H}_{[w]}(x,0,y,0) = (x,y)$.

Para t fixo, $\tilde{H}_{[w]}$ é um homeomorfismo (podemos tomá-lo um difeomorfismo) $(F\times\{t\}, \partial F\times\{t\}) \simeq (F_t, \partial F_t)$.

Por outro lado, F é um retrato forte de deformação de $\partial T \cup F$ (cf. V.1-C) e daí temos uma aplicação $H_{[w]}: (F\times I, \partial(F\times I)) \to (T,F)$. Note que $H_{[w]}$ só depende da classe $[w]$ e que, para $t = 1$, se reduz à <u>monodromia relativa</u> $(F,\partial F) \xrightarrow{h^r_{[w]}} (F,\partial F)$. Além disso, podemos tomar $H_{[w]}$ de tal modo que esta induza a identidade no bordo ∂F (isto porque $f|_{\partial T}: \partial T \to D$ é uma fibração trivial e pelo teorema do recobrimento homotópico). A figura abaixo pode ajudar na visualização do que foi dito acima.



Estamos prontos para definir o <u>operador de extensão</u> $\tau_{[w]}$. Seja $[\xi] \in H_1(I,\partial I)$ a classe canônica. Considere o seguinte diagrama:

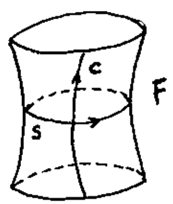
$$H_n(F,\partial F) \xrightarrow{\times} H_{n+1}((F,\partial F) \times (I,\partial I)) \xrightarrow{H_{[w]_*}} H_{n+1}(T,F)$$

onde $\times : [c] \to [c]\times[\xi]$ é o "produto homológico".

$\tau_{[w]} : H_n(F,\partial F) \to H_{n+1}(T,F)$ é a composta $H_{[w]_*} \circ \times$.

A propriedade mais interessante de $\tau_{[w]}$ é a seguinte: se c é um ciclo relativo em $(F,\partial F)$, então $c \otimes \xi$ é um ciclo relativo em $(F,\partial F) \times (I,\partial I)$ cujo bordo é $\partial c \otimes \xi + (-1)^n c \otimes \partial\xi$. Como $H_{[w]}$ induz a identidade em ∂F, esta envia $c \otimes \xi$ num ciclo em (T,F) cujo bordo é $(-1)^n(h^r_{[w]}(c)-c)$. Portanto a composta $H_n(F,\partial F) \xrightarrow{\tau_{[w]}} H_{n+1}(T,F) \xrightarrow{\partial} H_n(F)$ satisfaz $(-1)^n\, \partial\tau_{[w]}(x) = h^r_{[w]_*}(x) - x$. Clàssicamente, $(-1)^n\, \partial\tau_{[w]}$ é chamado <u>operador de variação</u>.

Sejam $[\Delta]$ o gerador de $H_{n+1}(T,F)$ e $s = \partial[\Delta] = [S^n]$ o gerador de $H_n(F)$. Escolha $c \in H_n(F,\partial F)$ que possua número de interseção 1 com s, ou seja $\langle c,s\rangle = 1$. Note que $H_n(F,\partial F) \simeq \mathbb{Z}$ e que é gerado por c, pois por dualidade de Lefschetz, $H^n(F) \simeq H_n(F,\partial F)$. Claramente $\tau_{[w]}(c) = m[\Delta]$, $m \in \mathbb{Z}$. No que segue vamos calcular o inteiro m.



Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(F\times I,\partial(F\times I)) \arrow[rr, "\tilde{H}[w]_*"] \arrow[d, "\partial"] & & H_{n+1}(T,\partial T\cup F) \arrow[r, "R_*", "\sim"'] \arrow[dl, "\sim"', "\partial"] & H_{n+1}(T,f) \arrow[dl, "\partial"', "\sim"] \\
H_n(\partial(F\times I)) \arrow[r, "\tilde{H}[w]_*"] \arrow[d, "\sim"'] & H_n(\partial T\cup F) \arrow[r, "R_*", "\sim"'] & H_n(F) \arrow[r, "(Re)_*", "\sim"'] & H_n(S^n) \arrow[d, "\sim"] \\
H_n(\partial(TS^n_{||\leq 1}\times I)) \arrow[rrr, "g_*"] & & & H_n(S^n) \arrow[d, equal] \\
H_n(\partial(E\times I)) \arrow[u] \arrow[rrr, "g_*"] & & & H_n(S^n)
\end{tikzcd}$$

<u>Explicação do diagrama</u>:

- a linha superior é $H[w]_* = R_* \circ \tilde{H}[w]_*$ onde R_* é a induzida pela retração $\partial T \cup F \longrightarrow F$.

- por III.12 e pelo que sucede a V.3, F é uma vizinhança tubular de S^n em F_i e S^n está mergulhada em F como a seção nula S^n está mergulhada em TS^n. Isto explica

$$\begin{array}{ccc} H_n(F) & \xrightarrow[\sim]{(Re)_*} & H_n(S^n) \\ & & \Big\downarrow \wr \\ & & H_n(S^n) \end{array}$$

onde $(Re)_*$ é a induzida de Re que significa tomar a parte real e S^n é vista como a seção de TS^n.

- a identificação de $TS^n_{||\leq 1}$ com F foi feita em III.12. E é o espaço determinado pelos elementos da forma e_1+iv, com $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|v| \leq 1$ e v ortogonal a $e_1 = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Note que $\partial(E\times I) \sim S^n$ e que $E \times I$ está mergulhado em $TS^n_{||\leq 1} \times I$. (E é a fibra sobre e_1 de $TS^n_{||\leq 1} \longrightarrow S^n$).

- $g: \partial(TS^n_{||\leq 1} \times I) = \partial TS^n_{||\leq 1} \times I \cup TS^n_{||\leq 1} \times \partial I \longrightarrow S^n$ é definida por $g(u+iv,t) = Re(e^{i\pi t}(u+iv))$.

- o diagrama é comutativo, sendo que isto não é imediato sòmente para o diagrama parcial

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(\partial(F\times I)) & \xrightarrow{\tilde{H}[w]_*} & H_n(\partial T\cup F) & \xrightarrow[\sim]{R_*} & H_n(F) & \xrightarrow{(Re)_*} & H_n(S^n) \\ \wr\Big\downarrow & & & & & & \Big\downarrow\wr \\ H_n(\partial(TS^n_{||\leq 1} \times I)) & & & \xrightarrow{g_*} & & & H_n(S^n) \end{array}$$

Mas, lembrando da definição de g e do difeomorfismo entre $TS^n_{||\leq 1}$ e F é um exercício obter a comutatividade do diagrama acima.

Estamos prontos para calcular o inteiro m tal que $\tau_{[w]}(c) = m[\Delta]$ e para fazê-lo precisamos calcular o grau da aplicação $g: \partial(E\times I) \to S^n$. Antes porém, a orientação que c determina em $(F,\partial F)$ deve ser comparada com a orientação que $c \times [\xi]$ determina em $\partial(E\times I)$.

A orientação de E é determinada por $(v_1,\ldots,v_n)$. Ora, $(u_1,\ldots,u_n, v_1,\ldots,v_n)$ formam então um sistema de coordenadas em F (aqui todas as orientações são induzidas pela orientação canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$). Como $\langle c,s\rangle = 1$ a orientação de F provém de sua estrutura analítica, ou seja, é determinada por $(u_1,v_1,\ldots,u_n,v_n)$ as duas diferem pelo fator multiplicativo $(-1)^{n(n+1)/2}$.

Por outro lado, como o único ponto de $\partial(E\times I)$ que é pré-imagem do ponto $-e_2 = (0,-1,0,\ldots,0) \in S^n$ é o ponto $(e_1 + ie_2, \frac{1}{2})$ e $(v_2,\ldots,v_n,t)$ formam um sistema de coordenadas locais em tôrno de $(e_1 + ie_2, \frac{1}{2})$, orientado positivamente e $(u_o,u_2,\ldots,u_n)$ são coordenadas locais de S^n em tôrno de $-e_2$, g se expressa

$$g(v_2,\ldots,v_n,t) = (\cos \pi t, -\operatorname{sen} \pi t\, v_2,\ldots,-\operatorname{sen} \pi t\, v_n) \quad \text{e}$$

$$D_g(e_1+ie_2, \tfrac{1}{2}) = \left(\begin{array}{cccccc}
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\pi \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -1 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0
\end{array}\right)$$

cujo determinante é $\pi(-1)^{2n+1}$, ou seja, g tem grau -1. Portanto $m = (-1)(-1)^{n(n+1)/2}$ e $\tau_{[w]}(c) = -(-1)^{n(n+1)/2}[\Delta]$

<u>Etapa B</u>: caso (T_i,F_i)

Sabemos que $H_{n+1}(T_i,F_i) \simeq H_{n+1}(T,F)$ e que $[\Delta]$ gera $H_{n+1}(T_i,F_i)$. Ponha $s = \partial[\Delta] \in H_n(F_i)$ e considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H_n(F_i) \arrow[r, "\text{inclusão}"] \arrow[dr, "\tau_{[w]}"] & H_n(F_i, F_i - \overset{\circ}{B}_i) \arrow[d, "\tau_{[w]}"] & H_n(F,\partial F) \arrow[l, "\text{excisão}"'] \arrow[d, "\tau_{[w]}"] \\
 & H_{n+1}(T_i,F_i) & H_{n+1}(T,F) \arrow[l, "\sim"]
\end{tikzcd}$$

onde $\tau_{[w]}$ denota o operador de extensão. Nesse caso, $\tau_{[w]}\colon H_n(F_i) \to H_n(T_i,F_i)$ é uma versão absoluta do operador relativo definido na <u>etapa A</u>. Deixamos os detalhes de sua definição

ao leitor (ignore o bordo). Seja $x \in H_n(F_i)$. Queremos calcular $\tau_{[w]}(x) = m[\Delta] \in H_{n+1}(T_i,F_i)$. Os homomorfismos da linha superior levam x em $kc \in H_n(F,\partial F)$. Como $\langle c,s\rangle = 1$ temos que $k=\langle x,s\rangle$ (lembre-se que c é dual a s). Agora, $\tau_{[w]}(\langle x,s\rangle c) =$
$= -(-1)^{n(n+1)/2}\langle x,s\rangle[\Delta]$ pela <u>etapa A</u>. Por outro lado o diagrama comuta (exercício). Logo, $\tau_{[w]}(x) = -(-1)^{n(n+1)/2}\langle x,s\rangle[\Delta]$.

<u>Etapa C</u>: caso $(\tilde{Y},Y_p)$

Calcularemos agora o efeito da extensão $\tau_{[\beta_i]}$ numa classe $x \in H_n(Y_p)$ onde os $[\beta_i]$, $i = 1,\dots,\mu$ geram $\pi_1(D^*,p)$.

$$\beta_i = \lambda_i^{-1}.w_i.\lambda_i$$

Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_n(Y_p) \arrow[rr, "(\lambda_i)_*", "\sim"'] \arrow[d, "\tau_{[\beta_i]}"'] & & H_n(F_i) \arrow[d, "\tau_{[w_i]}"] \\
H_{n+1}(\tilde{Y},Y_p) \arrow[r, "\sim"] & H_{n+1}(\tilde{Y},\Lambda) & H_{n+1}(T_i,F_i) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Aqui, $\tau_{[\beta_i]} = \tau_{[\lambda_i^{-1}.w_i.\lambda_i]} = \tau_{[\lambda_i^{-1}]}.(w_i)_* \circ (\lambda_i)_* + + \tau_{[w_i]} \circ (\lambda_i)_* + \tau_{[\lambda_i]}$ (exercício). Por outro lado, como $f^{-1}(\lambda_i) \subset \Lambda$ temos que $\tau_{[\lambda_i]}$ e $\tau_{[\lambda_i^{-1}]}$ são nulos. Para ver isso lembre-se que

$$\begin{aligned} \tau_{[\lambda_i]}: H_n(Y_p) &\longrightarrow H_{n+1}(Y_p \times (I,\partial I)) \xrightarrow{\tilde{H}_{[\lambda_i]*}} H_{n+1}(\tilde{Y},\Lambda) \\ x &\longmapsto x \times [\xi] \end{aligned}$$

e $\tilde{H}_{[\lambda_i]}: Y_p \times (I,\partial I) \longrightarrow (\tilde{Y},f^{-1}(\lambda_i)) \hookrightarrow (\tilde{Y},\Lambda)$ é obtido pela trivialidade do fibrado induzido $\lambda_i^*(\tilde{Y})$ sobre I.

Mas a imagem de $\tilde{H}_{[\lambda_i]}$ está inteiramente contida em $f^{-1}(\lambda_i) \hookrightarrow \Lambda$. Logo, $\tilde{H}_{[\lambda_i]*}$ é nula, donde $\tau_{[\lambda_i]}$ é nula.

Ficamos então com $\tau_{[\beta_i]} = \tau_{[w_i]} \circ (\lambda_i)_*$ ou seja, o diagrama comuta. Logo,

$$\begin{aligned} \tau_{[\beta_i]}(x) &= \tau_{[w_i]} \circ (\lambda_i)_*(x) \\ &= \tau_{[w_i]}((\lambda_i)_*(x)) \\ &= -(-1)^{n(n+1)/2}\langle(\lambda_i)_*(x),s\rangle[\Delta] \quad \text{pela } \underline{\text{etapa B}} \\ &= -(-1)^{n(n+1)/2}\langle x,\delta_i\rangle\Delta_i \quad \text{por V.2 e V.3.} \end{aligned}$$

Por outro lado $(-1)^n\, \partial\tau_{[\beta_i]}(x) = h_{[\beta_i]*}(x)-x$, ou seja,

$$h_{[\beta_i]_*}(x) = x + (-1)^{n+1+\frac{n(n+1)}{2}} \langle x,\delta_i\rangle \delta_i$$

$$= x + (-1)^{(n+1)(n+2)/2} \langle x,\delta_i\rangle \delta_i$$

■

Retornamos agora à situação descrita no início desse capítulo e consideramos $f:(\mathbb{C}^{n+1},0)\to(\mathbb{C},0)$ holomorfa com $0 \in C^{n+1}$ ponto crítico isolado.

Ponha $B_\varepsilon = \{z \in C^{n+1} : |z| \leq \varepsilon\}$ e $D_\eta=\{t \in C : |t| \leq \eta\}$. Sabemos por II.3 que $X \xrightarrow{f} D_\eta^*$ é uma fibração C^∞ onde $D_\eta^* = D_\eta-\{0\}$, $X = f^{-1}(D_\eta^*) \cap B_\varepsilon$ e $0 < \eta < \varepsilon$ suficientemente pequeno. Além disso, $f^{-1}(t)$ é transversal a $\partial B_\varepsilon = S_\varepsilon$ para $t \in D_\eta$. Por outro lado, IV nos diz que uma pequena deformação de f da forma $g_a(z) = f(z) + \sum_{i=0}^{n} a_i z_i$, $a = (a_o,\dots,a_n)$, é uma função com μ pontos críticos não-degenerados e μ valores críticos distintos, todos contidos no interior de um disco $D_\delta \subset D_\eta$, onde μ é o número de Milnor de f em 0. Agora, é fácil ver que dado $\eta' > 0$ com $\delta < \eta' < \eta$ podemos obter uma vizinhança conexa U de 0 em $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que para cada $a \in U$ se tenha:

(i) $g_a^{-1}(t) \pitchfork \partial B_\varepsilon$ para $|t| \leq \eta'$.

(ii) todo $z \in B_\varepsilon$ tal que $|g_a(z)| \geq \delta$ é ponto regular de g_a. Sejam $g: B_\varepsilon \times U \to C$ definida por $g(z,a) = g_a(z)$ e $W = \{(z,a) \in B_\varepsilon \times U : |g(z,a)| < \eta'\}$.

Defina $G: W \to \mathring{D}_{\eta'} \times U$ por $G(z,a) = (g(z,a),a)$.

Certamente, o conjunto de valores críticos de G está contido em $\mathring{D}_\delta \times U$. Considere o caminho $\nu\colon [0,1] \to \mathring{D}_{\eta'} \times U$ dado por $\nu(s) = (\delta, as)$.

A fibração $G^{-1}(\nu(I)) \xrightarrow{G} \nu(I)$ é trivial uma vez que $\nu(I)$ é contrátil e que $G_{|\partial W}$ tem posto máximo pois $g_a^{-1}(t)$ é transversal a ∂B_ε. Portanto, temos um difeomorfismo $\varphi\colon G^{-1}(\nu(0)) \xrightarrow{\sim} G^{-1}(\nu(1))$, ou seja, $f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon \xrightarrow{\varphi} g_a^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon$.

Com isto em mãos e lembrando que a fibra $g_a^{-1}(\delta) \cap \mathring{B}_\varepsilon$ é precisamente a fibra Y_p de V.1, que $\widehat{f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon}$ é difeomorfa à fibra de Milnor F_θ associada a f e que $\tilde{Y}$ de V.1 é contrátil temos:

<u>Proposição V.5</u>:

Os ciclos evanescentes $\varphi_*(\delta_i) \in H_n(F_\theta)$, $\delta_i \in H_n(Y_p)$, $i = 1,\ldots,\mu$, formam uma base da homologia de $H_n(F_\theta)$.

Passamos agora à definição do Grupo de Monodromia de $f\colon (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0)$.

Seja $\Delta \subset \mathring{D}_\delta \times U$ o conjunto de valores críticos de G. Em $\mathring{D}_{\eta'} \times U$ consideramos os caminhos $\sigma(s) = (\delta\, e^{2\pi i s}, 0)$ e $\sigma_a(s) = (\delta\, e^{2\pi i s}, a)$, $s \in [0,1]$. Note que σ é homotópico a $\nu^{-1}.\sigma_a.\nu$ em $\mathring{D}_{\eta'} \times U - \Delta$.

Como a fibração $\partial W \xrightarrow{G|\partial W} \mathring{D}_{\eta'} \times U$ é trivial podemos obter uma monodromia $h_{[\sigma]}: G^{-1}(\delta,0) \to G^{-1}(\delta,0)$ associada a σ, tal que $h_{[\sigma]}$ seja a identidade no bordo $\partial G^{-1}(\delta,0)$. Esta induz uma monodromia $h_{[\sigma']}: f^{-1}(\delta) \cap B_\epsilon \to f^{-1}(\delta) \cap B_\epsilon$ que é a identidade ao longo do bordo $\partial(f^{-1}(\delta) \cap B_\epsilon)$ onde $\sigma'(s) = \delta\ e^{2\pi i s}$. Claramente a mesma construção pode ser feita em se considerando o caminho σ_a. Além disso, podemos obter o difeomorfismo $\varphi = h_{[\nu]}$ de tal modo que $h_{[\sigma']}$ e $\varphi^{-1} h_{[\sigma_a']}\varphi$ sejam homotópicos, com a homotopia estacionária ao longo do bordo $\partial(f^{-1}(\delta) \cap B_\epsilon)$. (veja [Massey]).

Definição V.6:

O Grupo de Monodromia de g_a é a imagem do homomorfismo

$$\pi_1(D_\eta - \Sigma, p) \longrightarrow \text{Aut } H_n(Y_p)$$

onde $\Sigma = \{t_1, \ldots, t_\mu\}$ é o conjunto de valores críticos de g_a, que a cada $[\gamma] \in \pi_1(D_\eta - \Sigma, p)$ associa o isomorfismo $h_{[\gamma]_*}: H_n(Y_p) \to H_n(Y_p)$.

Suponha agora que $\tilde{g}_\lambda$ é uma outra deformação de f, possuindo μ pontos críticos não-degenerados cujos valores críticos correspondentes são distintos e estão todos contidos num disco $D_{\tilde{\delta}} \subset D_\eta$. Ponha $g_{\lambda,a} = \tilde{g}_\lambda + g_a - f$. Una $\tilde{g}_\lambda$ a g_a por uma família contínua de funções com as mesmas propriedades $g_{\lambda(s),a(s)}, s \in [0,1]$.

A construção que precede a definição V.6 se traduz imediatamente à situação de $\tilde{g}_\lambda$ e g_a, ou seja, o Grupo de Monodromia não depende da deformação de f desde que esta satisfaça às mesmas propriedades que g_a. Isto justifica a seguinte

Definição V.7:

O Grupo de Monodromia de f é o grupo de Monodromia de g_a.

Definição V.8:

O operador de monodromia de f é o produto

$$h_* = h_{[\beta_1]_*} \circ \ldots \circ h_{[\beta_\mu]_*} : H_n(F_\theta) \longrightarrow H_n(F_\theta)$$

Muito já foi estudado sobre esse operador (vide [Brieskorn] e [Husein-Zade])e como não pretendemos nos alongar muito nessa direção provaremos apenas o seguinte resultado:

Proposição V.9:

Seja $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ um polinômio, $f(0) = 0$; f analìticamente irredutível em $0 \in \mathbb{C}^2$ sendo este um ponto crítico. Então o polinômio característico do operador de monodromia de f em 0 coincide com o polinômio de Alexander do nó $K = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon$.

Demonstração:

Como a fibra de Milnor F_θ tem o tipo de homotopia de um bouquet de círculos obtemos a sequência exata curta (notação multiplicativa)

$$1 \to \pi_1(F_\theta,p) \to \pi_1(S_\varepsilon-K,p) \xrightarrow{\varphi_{\varepsilon_*}} \pi_1(S_1,\varphi_\varepsilon(p)) \to 1$$

proveniente da sequência exata de homotopia associada à fibração φ_ε: $S_\varepsilon-K \to S^1$ (veja [Steenrod], 7.2). Como os grupos fundamentais de F_θ e de S^1 são livres, a sequência acima fornece uma apresentação de $\pi_1(S_\varepsilon-K,p)$ por geradores e relações como segue:

Sejam $\delta_1,\ldots,\delta_\mu$ os geradores de $\pi_1(F_\theta,p)$, onde μ é o número de Milnor de f em 0, $\alpha \in \pi_1(S_\varepsilon-K,p)$ tal que a imagem de α por φ_{ε_*} é um gerador de $\pi_1(S^1,\varphi_\varepsilon(p))$. Então o automorfismo de $\pi_1(S_\varepsilon-K,p)$ definido por multiplicação por α induz um automorfismo h^1: $\pi_1(F_\theta,p) \to \pi_1(F_\theta,p)$. A imagem de δ_i por h^1 deve ser conjugada a δ_i e obtemos a apresentação de $\pi_1(S_\varepsilon-K,p)$ por geradores: $\alpha,\delta_1,\ldots,\delta_\mu$

Relações: $\alpha^{-1}\delta_i\alpha = h^1(\delta_i)$, $i = 1,\ldots,\mu$ (veja [Crowell-Fox]).

Por outro lado temos a sequência exata curta associada ao recobrimento cíclico infinito $X \xrightarrow{p_\varepsilon} S_\varepsilon-K$ (cf. capítulo IV)

$$1 \to \pi_1(X,\bar{p}) \to \pi_1(S_\varepsilon-K,p) \to \mathbb{Z} \to 1$$

Agora, X é homeomorfo a $F_\theta \times \mathbb{R}$ e podemos tomar como gerador do grupo de transformações de recobrimento $\mathrm{Aut}(X)$ o homeomorfismo $(z,t) \to (h(z),t-2\pi)$ onde h é o homeomorfismo característico da fibração $\varphi_\varepsilon\colon S_\varepsilon - K \to S^1$. Como X tem o mesmo tipo de homotopia de F_θ obtemos um isomorfismo

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \pi_1(F_\theta,p) & \longrightarrow & \pi_1(S_\varepsilon - K,p) & \xrightarrow{\varphi_{\varepsilon *}} & \pi_1(S^1,\varphi_\varepsilon(p)) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \Big\| \wr & & \Big\| \wr & & \Big\| \wr & & \\
1 & \longrightarrow & \pi_1(X,\bar{p}) & \longrightarrow & \pi_1(S_\varepsilon - K,p) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

e portanto concluímos que o automorfismo $h^1\colon \pi_1(F_\theta,p) \to \pi_1(F_\theta,p)$ induz a monodromia $h_*\colon H_1(F_\theta) \to H_1(F_\theta)$. Com isto em mãos, adjuntando a relação trivial 1 às que definem $\pi_1(S_\varepsilon - K,p)$ temos que a matriz de Alexander deste se escreve (veja I)

$$\left(\begin{array}{c|c}
h_* - tI_* & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \\
\hline
0 \cdots\cdots\cdots & 0
\end{array}\right)$$

e portanto o polinômio de Alexander de K é dado por

$\Delta(t) = \det(h_* - tI_*)$

■

CAPÍTULO VI

A CONEXÃO DE GAUSS-MANIN

O objetivo deste capítulo é descrever o método de Brieskorn para calcular a monodromia de uma singularidade isolada. Este método associa a cada f com ponto crítico isolado em 0 uma equação diferencial complexa do tipo $Y' = A(z)Y$ onde $Y \in \mathbb{C}^{\mu}$ (μ = número de Milnor da singularidade) e $A(z)$ é uma matriz $\mu \times \mu$ com coeficientes funções holomorfas em $D_{\eta}^{*} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 < |z| < \eta\}$ que possuem um polo na origem. A monodromia desta equação, definida como a ação de $\pi_1(D_{\eta}^{*}, z_o)$ no espaço dos germes em z_o de soluções do sistema é igual à monodromia de f em 0. Utilizaremos aqui a fibração $f_{\varepsilon}: X^{*} = (B_{\varepsilon}-V) \cap f^{-1}(D^{*}) \to D^{*}$ obtida no Teorema II.3 e estudamos a ação de $\pi_1(D^{*}, z_o)$ em $H^n(f^{-1}(z_o), \mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^{\mu}$. Esta exposição baseada em [Sebastioni], [Alonso-Torres-Lê Dũng Tráng] e [Brasselet].

1) Construção do fibrado $H^n(f)$:

Seja $H^n(f) = \{(z,\alpha) \ / \ z \in D^{*}, \ \alpha \in H^n(f^{-1}(z), \mathbb{C})\}$ e consideremos a projeção $\pi: H^n(f) \to D^{*}$, $\pi(z,\alpha) = z$.

Então $(H^n(f), D^{*}, \pi)$ possui estrutura de fibrado vetorial complexo (holomorfo).

<u>Prova</u>: Dado $z \in D^*$ se $z \in U_j$ uma vizinhança trivializadora de f_ε então existe um difeomorfismo φ_j que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \varphi_j\colon U_j \times f_\varepsilon^{-1}(z) \arrow[rr] \arrow[drr, "\pi_1"'] \arrow[r, phantom, bend left, "\circlearrowright"] & & f_\varepsilon^{-1}(U_j) \arrow[d] \\ & & U_j \end{tikzcd}$$

Se $z' \in U_j$ então existe um difeomorfismo $h^j_{z'}\colon f_\varepsilon^{-1}(z) \to f_\varepsilon^{-1}(z')$ definido por $h^j_{z'}(x) = \varphi_j(z',x)$ com $h^j_z = id$ que induz um isomorfismo de espaços vetoriais complexos $(h^j_{z'})_*\colon H^n(f_\varepsilon^{-1}(z),\mathbb{C}) \to H^n(f^{-1}(z'),\mathbb{C})$. Temos assim definida uma bijeção

$$\bar{h}_j\colon U_j \times H^n(f_\varepsilon^{-1}(z),\mathbb{C}) \longrightarrow \pi^{-1}(U_j) \quad \text{que}$$
$$(z',\alpha) \longmapsto (z',(h^j_{z'})_*(\alpha))$$

tomamos por carta local de $H^n(f)$ em torno de (z',α). Observe que $\bar{h}_j$ assim definida depende da escolha de uma fibra $f_\varepsilon^{-1}(z)$ sobre um ponto em U_j. Suponhamos então que U_j seja conexo e que $\tilde{z}$ seja um outro ponto de U_j tal que $\psi_j\colon U_j \times f_\varepsilon^{-1}(\tilde{z}) \to f_\varepsilon^{-1}(U_j)$ é uma outra trivialização. Então $g^j_{z'}\colon f_\varepsilon^{-1}(\tilde{z}) \to f_\varepsilon^{-1}(z')$ definida por $g^j_{z'}(y) = \psi_j(z',y)$ induz

$(g^j_{z'})_*$ e $\bar{g}_j\colon U_j \times H^n(f_\varepsilon^{-1}(\tilde{z}),\mathbb{C}) \to \pi^{-1}(U_j)$ de modo que

$$\bar{g}_j^{-1}\circ\bar{h}_j\colon U_j \times H^n(f_\varepsilon^{-1}(z),\mathbb{C}) \longrightarrow U_j \times H^n(f_\varepsilon^{-1}(\tilde{z}),\mathbb{C})$$

é uma bijeção dada por $\bar{g}_j^{-1}\circ\bar{h}_j(z',\alpha) = (z',(g^j_{z'})_*^{-1}(h^j_{z'})_*(\alpha))$.

Afirmamos que $(g^j_{z'})_*^{-1} \circ (h^j_{z'})_* = (h^j_{\tilde{z}})_*$.

Para provarmos isto basta ver que $(g^j_{z'})^{-1} \circ h^j_{z'}$ é homotópica a $h^j_{\tilde{z}}$. Seja $\gamma(s)$ um caminho em U_j ligando z' a $\tilde{z}$, definimos

$F(s,\xi) = (g^j_{\gamma(s)})^{-1}\circ h^j_{\gamma(s)}(\xi)$ então $F(0,\xi) = (g^j_{z'})^{-1}\circ h^j_{z'}(\xi)$ e

$F(1,\xi) = (g^j_{\tilde{z}})^{-1} \circ h^j_{\tilde{z}}(\xi) = h^j_{\tilde{z}}(\xi)$

Desta maneira podemos identificar todas as fibras $H^n(f_\varepsilon^{-1}(z),\mathbb{C})$ sobre um aberto conexo contido em uma vizinhança trivializadora de modo que $\bar{g}_j^{-1}\circ\bar{h}_j = id_{U_j} \times (h^j_{\tilde{z}})_*$ é analítica complexa. Observe também que as funções de transição $\bar{h}_{j,k}\colon U_j \cap U_k \to Aut(H^n(f^{-1}(z),\mathbb{C})) \approx G\ell(\mu,\mathbb{C})$ são <u>localmente constantes</u>.

2) <u>Conexão de Gauss Manin e Monodromia de</u> $H^n(f)$.

<u>Definição VI.1</u>: Seja (E,π,M) é um fibrado vetorial. Uma <u>seção</u> do fibrado sobre um aberto $U \subset M$ é uma aplicação $\sigma\colon U \to \pi^{-1}(U)$ tal que $\pi\circ\sigma$ = identidade.

Dizemos que uma seção $\sigma: U \to \pi^{-1}(U)$ do $H^n(f)$ é <u>localmente constante</u> se para todo $z \in U$ existe uma vizinhança $U' \subset U$ de z que trivializa $H^n(f)/\pi^{-1}(U')$ tal que se $z' \in U'$ então $s(z') = (h^j_{z'})_*(s(z))$ isto é nas coordenadas em U' $s(z')$ é constante.

Lembrando que definimos monodromia de f como sendo a ação de $\pi_1(S^1, z_o)$ em $H^n(f^{-1}(z_o))$ devemos buscar pois um processo de levantamento de laços em D^* a caminhos em $H^n(f)$. Para isto usamos uma <u>conexão</u> em $H^n(f)$.

Em geral (veja [Spivak]) uma conexão em um fibrado é uma distribuição C^∞ de subespaços H (subespaços horizontais) que satisfaz

(i) $T_eE = H(e) \oplus V(e)$ onde $V(e)$ = subespaço vertical = $= \text{Ker } d\pi(e)$.

(ii) $H(\alpha e) = d\alpha(e), H(e)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha(e) = \alpha.e.$

Juntamente com a noção de conexão temos o conceito de derivada covariante ∇ que associa a cada campo X tangente a M e a cada seção s a seção $\nabla_x(s)$ definida por $\nabla_x(s)(p) = v[ds(p).X_p] \in V(s(p))$ (componente vertical).

Entretanto como estamos trabalhando com um fibrado sobre D^* podemos adotar a seguinte

<u>Definição VI.2:</u> Uma conexão $\nabla_{\frac{d}{dz}}$ em um fibrado vetorial sobre D^* é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear

$\nabla_{\frac{d}{dz}}: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ $\mathfrak{X}$ = seções do fibrado que satisfaz

$$\nabla_{\frac{d}{dz}}(\lambda.s) = \frac{d\lambda}{dz}.s + \lambda.\nabla_{\frac{d}{dz}}(s)$$

para toda função λ holomorfa em um aberto $U \subset D^*$ e toda seção s definida em U.

Em geral não existe uma maneira "natural" de se obter conexões em um fibrado, entretanto o fato de que as funções de transição de $H^n(f)$ são localmente constantes permite-nos obter uma conexão ∇ em $H^n(f)$ (que é localmente plana). Esta conexão recebe o nome de <u>conexão de Gauss-Manin</u>. Vejamos como se pode obter ∇:

Observe que ∇ é determinada localmente por uma base de seções locais em um aberto U, $s_1,\dots,s_\mu$ pois se $\nabla s_j = \Sigma a_{ij}\, s_i$ com a_{ij} funções holomorfas em U então para $s/U = \Sigma\, \lambda_i s_i$ temos

$$\nabla s\Big|_U = \sum_j \lambda'_j . s_j + \lambda_j \nabla s_j = \sum_j \lambda'_j . s_j + \lambda_j \sum_i a_{ij}\, s_i =$$

$$= \sum_j [\lambda'_j + \sum_{i=1}^{u} \lambda_i\, a_{ji}] s_j \qquad (*)$$

A matriz $A = (a_{ji})$ é chamada matriz da conexão.

Seja U uma vizinhança trivializadora de $H^n(f)$. Existe uma base de seções localmente constantes dada por $s_j^U(z') = (h_{z'}^U)_*(\alpha_j)$, $\{\alpha_j\}$ base de $H^n(f^{-1}(z)$. Se s é uma seção de $H^n(f)$ então $s|_U = \Sigma\, \lambda_j\, s_j^U$, com $\lambda_i \in \mathcal{O}_U$, definimos $\nabla s|_U = \Sigma\, \lambda_j'\, s_j^U$ (ou seja $\nabla s_j^U = 0$).

Se V é uma outra vizinhança trivializadora tal que $U \cap V \neq \phi$ então $s|_{U\cap V} = \Sigma\, \lambda_j\, s_j^U|_{U\cap V} = \Sigma\, \delta_j\, s_j^V|_{U\cap V}$ com

$$\lambda(z') = T^{UV}(z')\delta(z'), \quad \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_\mu), \quad \delta = (\delta_1,\dots,\delta_\mu),$$

T^{UV}: $U\cap V \to GL(u,\mathbb{C})$ função de transição.

Derivando em $U \cap V$ obtemos $\lambda'(z') = (T^{uv})'(z')\delta(z') + T^{UV}(z').\delta'(z')$. Mas T^{UV} é localmente constante logo $(T^{UV})' = 0$ ou seja $\lambda'(z') = T^{UV}(z')\, \delta'(z')$ o que implica que ∇s <u>é uma seção</u>.

<u>Definição VI.3</u>: Uma seção $s\colon U \to \pi^{-1}(U)$ é dita <u>horizontal</u> se $\nabla s = 0$.

Neste ponto cabe observar que $H^n(f)$ por ser um fibrado holomorfo sobre uma superfície de Riemann não compacta é analíticamente trivial $(H^n(f) \simeq D^* \times H^n(f^{-1}(z),\mathbb{C}))$ (veja [Foster, 30.4]), portanto existe uma base $\{\sigma_1,\dots,\sigma_\mu\}$ de seções globais. Em geral estas seções <u>não</u> são horizontais e é justamente o problema da extensão de seções locais horizontais que nos leva a considerar a monodromia de $H^n(f)$.

Se $\gamma\colon [0,1] \to D^*$ é um laço simples com $\gamma(0)=\gamma(1)=z_o$ então levantamentos horizontais de γ a partir de pontos em $H^n(f^{-1}(z_o),\mathbb{C}))$ determinam um automorfismo de $H^n(f^{-1}(z_o),\mathbb{C})$ de finido do seguinte modo: seja $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_\ell = 1$ uma partição de $[0,1]$ tal que $\gamma[t_j,t_{j+1}]$ esteja contido em uma vizinhança trivializadora de $H^n(f)$. Para $\alpha \in H^n(f^{-1}(z_o),\mathbb{C})$ e $j = 1,\ldots,\ell-1$ definimos seções horizontais locais σ_j pelas seguintes condições:

$$\sigma_1(z_o) = \alpha, \qquad \sigma_j(\gamma(t_j)) = \sigma_{j-1}(\gamma(t_j))$$

Definimos $T_\gamma(\alpha) = \sigma_\ell(\gamma(1))$. [$T_\gamma(\alpha)$ nada mais é do que o transporte paralelo do vetor α ao longo de um levantamento de γ]. É fácil ver que se $\gamma \sim 1$ então $T_\gamma(\alpha) = \alpha$ de modo que T_γ depende apenas da classe de homotopia de γ, temos portanto a monodromia de $H^n(f)$ definida pela ação de $\pi^1(D^*,z_o)$ em $H^n(f^{-1}(z_o),\mathbb{C})$ ou seja a holonomia do fibrado $H^n(f)$. Utilizando as seções localmente constantes (que òbviamente são horizontais) vemos que a monodromia de f coincide com a monodromia do fibrado $H^n(f)$.

Até agora pouco progresso alcançamos pois ainda estamos utilizando as trivializações da fibração de Milnor para obter seções horizontais, entretanto observe que pela fórmula (*) localmente

$$\nabla s\big|_U = \sum_j (\lambda'_j + \sum_i a_{ji}\,\lambda_i)s_j$$

logo $\nabla s\big|_U = 0$ se e sòmente se $\lambda'_j + \sum_i a_{ji}\lambda_i = 0$.

Portanto seções horizontais locais correspondem a soluções do sistema diferencial $\lambda' + A.\lambda = 0^{(**)}$ onde A é a matriz de conexão e $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_\mu)$ e cada λ_j uma função holomorfa em U.

Sabemos que dada uma condição inicial $\lambda(z_o) = \lambda^o$ o espaço das soluções do sistema (**) tem dimensão μ (ver [Coddington-Levinson], pg. 68), portanto obtendo-se sistemas do tipo (**) ao longo de um laço γ tal que $[\gamma]$ gera $\pi^1(D^*,z_o)=\mathbb{Z}$, ao final encontraremos uma outra base de soluções em uma vizinhança de z_o que se relaciona com a primeira pela equação $\lambda = P\xi$ $P \in GL(\mu,\mathbb{C})$. P é a matriz que representa a monodromia de $H^n(f)$ (portanto representa a monodromia de f).

Nosso próximo objetivo será obter A a partir de f (sem passar por trivializações).

3) <u>Seções holomorfas de</u> $H^n(f)$

Para cada aberto $U \subset D^*$ associamos o conjunto $\mathfrak{X}(U) = \Gamma(U,\pi^{-1}(U)) = \{$seções holomorfas de $H^n(f)$ definidas em $U\}$. Se $V \subset U$ é um aberto então existe uma aplicação

$$\rho_V^U\colon \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(V) \qquad \text{(restrição).}$$
$$\sigma \to \sigma|_V$$

É fácil verificar as seguintes propriedades:

(i) $\rho_U^U = id$

(ii) se $W \subset V \subset U$ são abertos então $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$

(iii) se $U = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ coleção de abertos e $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{X}(U)$ são tais que $\sigma_1\big|_{U_\alpha} = \sigma_2\big|_{U_\alpha}$ $\forall\, \alpha \in J$ então $\sigma_1 = \sigma_2$.

(iv) se $\sigma_\alpha \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ com $\alpha \in J$ e se $\sigma_\alpha\big|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \sigma_\beta\big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ então podemos definir $\sigma \in \mathfrak{X}(U)$ por $\sigma\big|_{U_\alpha} = \sigma_\alpha$.

Estas propriedades dão ao conjunto das seções holomorfas de $H^n(f)$ a estrutura de um <u>feixe</u> sobre D^*, que denotaremos aqui por $\mathfrak{X}(f)$. Observe que $\mathfrak{X}(f)$ é um $\mathcal{O}_{D^*}$-módulo e que $\mathfrak{X}(f) = \bigcup_{z \in D^*} \mathfrak{X}_z$ onde $\mathfrak{X}_z$ = germes de funções holomorfas (vide [Foster]).

O primeiro resultado de Brieskorn é sôbre o feixe $\mathfrak{X}(f)$. Antes de enunciá-lo vamos definir o complexo de de Rham relativo a f.

Na definição de $H^n(f)$ está subentendido que $H^n(f^{-1}(z), \mathbb{C})$ é a cohomologia singular com coeficientes complexos $(H^n(f^{-1}(z), \mathbb{C}) = H^n(f^{-1}(z), \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C})$. Entretanto para calcular a conexão de Gauss-Mann é conveniente utilizar o Teorema de Rham que nos diz que $H^n(f^{-1}(z), \mathbb{R}) \simeq H^n_{DR}(f^{-1}(z))$ (usando o complexo das formas diferenciais e o operador d de derivação exterior usual de modo que $H^n_{DR}(f^{-1}(z), \mathbb{R})$ = n-formas diferenciais fechadas/n-formas exatas).

Fazendo uso da estrutura analítica complexa de $f^{-1}(z)$ podemos descrever $H^n(f^{-1}(z), \mathbb{C})$ usando formas diferenciais holomorfas.

Usando coordenadas $(z_1,\dots,z_{n+1}, \bar{z}_1,\dots,\bar{z}_{n+1})$ em $\mathbb{C}^{n+1} \approx \mathbb{R}^{2n+2}$ vemos que uma m-forma diferencial w em $\mathbb{C}^{n+1}$ se escreve como $w(a) = \sum_{|I|+|J|=m} w_{IJ}(a)dz_I \wedge d\bar{z}_J$ onde para cada multiíndice

$I = \{i_1,\dots,i_q\}$, $J = \{j_1,\dots,j_p\}$, $p+q = m$, $dz_I = dz_{i_1}\wedge\dots\wedge dz_{i_q}$

e $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge\dots\wedge d\bar{z}_{j_p}$.

Dizemos que w é uma <u>m-forma holomorfa</u> se $w(a) = \sum_{|I|=m} w_{Io}(a)dz_I$ com cada w_{Io} uma função holomorfa.

Tomando-se abertos de $U \subset X$ e formas holomorfas definidas em U (com os respectivos morfismos de restrição) construímos Ω_X^p = feixe das p-formas holomorfas sobre X.

Seja w uma n-forma holomorfa em X e considere $w|_{f^{-1}(z)}$. Como $w|_{f^{-1}(z)}$ tem grau máximo $(= \dim f^{-1}(z))$ então $w|_{f^{-1}(z)}$ representa um cociclo de $H^n(f^{-1}(z),\mathbb{C})$. Entretanto observe que se $\tilde{w} = w + df \wedge \eta + d\rho$ então $\tilde{w}|_{f^{-1}(z)}$ é cohomologo a $w|_{f^{-1}(z)}$, logo para termos uma boa definição da correspondência $w \rightsquigarrow [w|_{f^{-1}(z)}]$ (onde $[\quad]$ indica a classe de cohomologia) devemos identificar expressões acima.

Construímos assim o <u>feixe das</u> p-<u>formas relativas</u> a f definido por $\Omega_{X/D}^p = \Omega_X^p/df\wedge\Omega_X^{p-1} + d\,\Omega_X^{p-1}$ e formamos o <u>complexo de Rham relativo a</u> f onde tomamos o operador $\bar{d}^p\colon \Omega_{X/D}^p \to \Omega_{X/D}^{p+1}$ (bem definido pois $d(df\wedge\eta) = df\wedge d\eta \in df\wedge\Omega_X^p$) de modo que podemos falar da cohomologia de de Rham relativa:

$$H^n(\Omega_{X/D}) = \operatorname{Ker} \bar{d}^n/\operatorname{Im} \bar{d}^{n-1}.$$

Denotamos por $\mathcal{H}$ o feixe sobre D^* obtido pela correspondência que a cada aberto $U \subset D^*$ associa $H^n(\Omega_{X/D}(f^{-1}(U))$ e por morfismos ρ_V^U: $H^n(\Omega^{\bullet}_{X/D}(f^{-1}(U)) \to H^n(\Omega^{\bullet}_{X/D}(f^{-1}(V))$ restrição.

$$[w] \rightsquigarrow [w|_{f^{-1}(V)}]$$

Observe que $\mathcal{H}$ teve estrutura de $\mathcal{O}_D$-módulo via composição com f.

<u>Teorema VI.1</u> (Brieskorn):

(i) $\mathcal{H}|_{D^*}$ é isomorfo a $\mathfrak{X}(f)$ (como $\mathcal{O}_{D^*}$-módulos).

(ii) $\mathcal{H}$ é um feixe livre de posto μ sobre $\mathcal{O}_D$.

<u>Comentários</u>: (i) A correspondência entre $\mathcal{H}|_{D^*}$ e $\mathfrak{X}(f)$ é obtida associando a cada n-forma que representa um cociclo sobre um aberto $f^{-1}(U)$ uma seção s_w: $U \to \pi^{-1}(U)$ definida por $s_w(z) = [w|_{f^{-1}(z)}] \in H^n(f^{-1}(z),\mathbb{C})$.

Que s_w é uma seção holomorfa segue da teoria de resíduos de Leray e Norguet [ver Brasselet pg. 9-15].

<u>Proposição VI.1</u>: Seja w uma n-forma holomorfa tal que $dw = df \wedge \alpha$. Então $\nabla s_w = s_\alpha$.

<u>Demonstração</u>:

Seja w tal que $dw = df\wedge\alpha$, vamos calcular ∇s_w.
Se U é uma vizinhança trivializadora de f_ε então como vimos anteriormente podemos escrever $s_w|_U = \Sigma\, g_j s_j$ onde s_j são seções locais horizontais e $g_j \in \mathcal{O}_U$. Além disso $\nabla s_w|_U = \Sigma\, g_j' s_j$.

Para cada $z \in U$ fixo seja $\mathcal{U}_z$ uma seção horizontal local tal que $\mathcal{U}_z(z) = s_w(z)$ (isto é $\mathcal{U}_z(z') = (h_{z'})_*(s_w(z))$). Logo $\mathcal{U}_z(z') = \Sigma\, g_j(z)s_j(z')$ (verifique!) e

$$\nabla s_w\Big|_U(z_o) = \Sigma\, g_j'(z_o)s_j(z_o) = \Sigma \lim_{z\to z_o} \frac{g_j(z)-g_j(z_o)}{z-z_o}\, s_j(z_o) =$$

$$= \lim_{z\to z_o} \sum_j \frac{g_j(z)-g_j(z_o)}{z-z_o}\, s_j(z_o) = \lim_{z\to z_o} \frac{\mathcal{U}_z(z_o)-\mathcal{U}_{z_o}(z_o)}{z-z_o}.$$

Usando a dualidade entre cohomologia e homologia (via integração) vamos calcular $\int_{\xi_{z_o}} \nabla s_w\Big|_U(z_o)$ onde ξ_{z_o} é um gerador de $H_n(f_\varepsilon^{-1}(z_o),\mathbb{Z})$ ($\approx \mathbb{Z}^\mu$). Entretanto procedendo de modo análogo ao que foi feito anteriormente podemos obter ξ_z gerador de $H_n(f_\varepsilon^{-1}(z),\mathbb{Z})$ para $z \in U$ através da aplicação $(h_z)_*\colon H_n(f_\varepsilon^{-1}(z),\mathbb{Z}) \to H_n(f_\varepsilon^{-1}(z_o),\mathbb{Z})$. Assim temos:

$$\int_{\xi_z} \mathcal{U}_z(z) = \int_{\xi_{z_o}} \mathcal{U}_z(z_o) \quad \text{e}$$

$$\int_{\xi_{z_o}} \mathcal{U}_z(z_o) - \int_{\xi_{z_o}} \mathcal{U}_{z_o}(z_o) = \int_{\xi_z} \mathcal{U}_z(z) - \int_{\xi_{z_o}} \mathcal{U}_{z_o}(z_o) = \int_{\xi_z} s_w(z) -$$

$$- \int_{\xi_{z_o}} s_w(z_o) = \int_{\xi_z} w - \int_{\xi_{z_o}} w.$$

Observe agora que existe uma aplicação $\Gamma\colon U\times S^n \to X^*$ tal que $\Gamma\big|_{S^n\times z}\colon S^n \to f_\varepsilon^{-1}(z)$ representa ξ_z para $z \in U$, donde pelo Teorema de Stokes $\int_{\xi_z} w - \int_{\xi_{z_o}} w = \int_{\Gamma|S^n\times[z_o,z]} dw$

com $[z_o,z]$ segmento em U que liga z_o a z. Como por hipótese $dw = df\wedge\alpha$ então $\int_{\xi_{z_o}} u_z(z_o) - \int_{\xi_{z_o}} u_z(z_o) = \int_{\xi_z} w|f_\varepsilon^{-1}(z) -$

$$- \int_{\xi_{z_o}} w|f_\varepsilon^{-1}(z) = \int_{\Gamma|S^n\times[z_o,z]} dw = \int_{\Gamma|S^n\times[z_o,z]} df\wedge\alpha =$$

$$\int_{[z_o,z]}\left(\int_{\Gamma|S^n\times\{z'\}}\alpha\right) dz'.$$

Portanto

$$\int_{\xi_{z_o}} \nabla s_w(z_o) = \lim_{z\to z_o}\frac{1}{z-z_o}\int_{\xi_{z_o}} u_z(z_o) - u_z(z_o) =$$

$$\lim_{z\to z_o}\frac{1}{z-z_o}\int_{[z_o,z]}\left(\int_{\Gamma|S^n\times\{z'\}}\alpha\right) dz' = \int_{\xi_{z_o}}\alpha|f^{-1}(z_o) =$$

$$= \int_{\xi_{z_o}} s_\alpha(z_o).$$ (Para cada gerador de $H_n(f_\varepsilon^{-1}(z_o),\mathbb{Z})$).

Conclui-se assim que $\nabla s_w = s_\alpha$.

■

4) <u>Construção do operador</u> ∇_f

Seja Ω_o^q = {germes em 0 de q-formas} = $\{w = \sum_{\substack{\alpha \\ |\alpha|=q}} a_\alpha\, dz_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_{\alpha_q},\ a_\alpha \in \mathcal{O}_o\}$ e denotemos por $\Omega_o^{\bullet}$ o complexo dos germes em 0 das formas holomorfas com o operador $d: \Omega_o^q \to \Omega_o^{q+1}$ usual.

O complexo (local) relativo a f é definido tomando-se os módulos $\Omega_{f,o}^q = \Omega_o^q/df \wedge \Omega_o^{q-1}$ com derivação $\bar{d}(\bar{w}) = \overline{dw}$ (bem definida pois $d(df\wedge\Omega_o^{q-1}) \subset df \wedge \Omega_o^q$) e os módulos de cohomologia relativa (local) $H^q(\Omega_{f,o}^{\bullet})$ = Ker $\bar{d}$/Im$\bar{d}$. Malgrange em [Malgrange] prova que $H^q(\Omega_{f,o}^{\bullet}) = 0$ para $1 \leq q \leq n-1$ mas isto não será usado aqui.

$$\text{Sejam}\quad E = H^n(\Omega_{f,o}^{\bullet}) = \frac{\{w\in\Omega_o^n \ /\ \exists\eta\in\Omega_o^n,\ dw = df\wedge\eta\}}{df\wedge\Omega_o^{n-1} + d\Omega_o^{n-1}}$$

e $F = \Omega_o^n/df\wedge\Omega_o^{n-1} + d\Omega_o^{n-1}$, $E \subset F$ possuem estrutura de $\mathcal{O}_o$-módulo via composição por f.

Observe que a existência de $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^k \subset (\partial f)$ (veja IV.4) implica que $f^k \in (\partial f)$. Portanto para toda $w \in \Omega_o^{n+1}$ existe $\xi \in \Omega_o^n$ tal que $f^k w = df\wedge\xi$ (verifique!). Desta forma $f^k.F \subset E$ (F/E é de torção).

<u>Teorema VI.2</u>:

(i) $\mathcal{H}_o$ é isomorfo (como $\mathcal{O}_o$-módulo) a E [Brieskorn]

(ii) E e F são $\mathcal{O}_o$-módulos livres de posto μ ([Brieskorn] e [Sebastiani (3)].

Se $\bar{w} \in E$ é representada por uma n-forma holomorfa w definida em uma vizinhança de 0 então existe uma n-forma η holomorfa em uma vizinhança de 0 tal que $dw = df \wedge \eta$. Definimos $\nabla_f : E \to F$ por $\nabla_f(\bar{w}) = \bar{\eta}$.

a) ∇_f é $\mathbb{C}$-linear.

b) $\nabla_f(\lambda \bar{w}) = \lambda' \bar{w} + \lambda \nabla_f(\bar{w})$.

<u>Prova</u>: Se w representa $\bar{w}$ então $\lambda\bar{w}$ é representada por $(\lambda \circ f)w$ e $d((\lambda \circ f)w) = \lambda' \circ f . df \wedge w + (\lambda \circ f) dw =$

$$= \lambda' \circ f \; df \wedge w + (\lambda \circ f) df \wedge \eta = df \wedge [(\lambda' \circ f)w + (\lambda \circ f)\eta] \quad \text{donde}$$

$$\nabla_f(\lambda \bar{w}) = \overline{(\lambda' \circ f)w + (\lambda \circ f)\eta} = \lambda' . w + \lambda \bar{\eta} = \lambda' . w + \nabla_f(w).$$

Desta forma escolhida uma base $\{w_1, \ldots, w_\mu\}$ para E e escrevendo $f^k \nabla_f(w_j) = \sum_{e=1}^{\mu} a_{ej}(f) w_e$ com $a_{ej} \in \mathcal{O}_o$ encontramos uma matriz $(A_{ej}(z)) = \left(\frac{a_{ej}(z)}{z^k}\right)$ de coeficientes funções meromorfas que representa o operador ∇_f.

Denotando $A(z) = (A_{ej}(z))_{\substack{1 \le e \le \mu \\ 1 \le j \le \mu}}$ o sistema diferencial

$$Y'(z) = -A(z) Y(z) \quad \text{com} \quad Y(z) = \begin{pmatrix} y_1(z) \\ \vdots \\ y_\mu(z) \end{pmatrix}$$ é chamado o

<u>sistema de Gauss-Manin</u> da singularidade $f^{-1}(0)$ em 0.

5) <u>Relação entre</u> ∇_f <u>e</u> ∇

Sejam $w_1,\dots,w_\mu$ n-formas holomorfas definidas em $f^{-1}(U)$, U aberto contendo 0, tais que $dw_j = df\wedge\alpha_j$ e que os germes de w_j em 0 representam uma base de E. Então $\{w_1,\dots,w_\mu\}$ é uma base de $\mathcal{H}|_U$ como $\mathcal{O}_D$-módulo.

Então $\nabla_f w_j = \alpha_j = \sum_{e=1}^{\mu} \frac{a_{ej}(f)}{f^k}.w_e = \sum_{e=1}^{\mu} A_{ej}(f).w_e.$

Se $V\subset U$ é um aberto em D^* o Teorema VI.1 nos garante que $\{s_{w_1},\dots,s_{w_\mu}\}$ é uma base de seções holomorfas de $H^n(f)|_V$.

Além disso $\nabla s_{w_j} = s_{\alpha_j} = \sum_{e=1}^{\mu} A_{ej}(f).s_{w_e}$.

Seja $\{\varphi_1,\dots,\varphi_\mu\}$ base de soluções do sistema de Gauss-Manin $Y' = -AY$ e definamos a seção $S = \sum_{j=1}^{\mu} \varphi_j s_{w_j}$ em V.

$$\text{Então} \quad \nabla(s) = \nabla\Big(\sum_{j=1}^{\mu} \varphi_j s_{w_j}\Big) = \sum_{j=1}^{\mu} \varphi'_j s_{w_j} + \varphi_j \nabla s_{w_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\mu} \varphi'_j s_{w_j} + \sum_{j=1}^{\mu} \varphi_j \sum_{e=1}^{\mu} A_{ej}(f) s_{w_e} =$$

$$= \sum_j \Big[\varphi'_j + \sum_e A_{je}\varphi_e\Big] s_{w_j} = 0.$$

Portanto s é uma seção horizontal de $H^n(f)|_V$. Escolhida uma base de E as soluções do sistema de Gauss-Manin nos dão seções horizontais para $H^n(f)$ portanto a monodromia de f em 0 é igual à monodromia do sistema de Gaus-Manin.

6) O Sistema de Gauss-Manin:

Vimos que para se conhecer a monodromia de f é preciso estudar uma equação diferencial linear do tipo

$$\text{(VI.6.1)} \qquad Y'(z) = A(z)Y(z) \quad \text{onde} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_\mu \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A(z) \quad \text{é}$$

uma matriz $\mu \times \mu$ com entradas funções holomorfas em D^*_η com η suficientemente pequeno.

É bem conhecido (vide [Foster] ou [Coddington-Levinson]) que para cada ponto $z \in D^*$ o conjunto de soluções de (VI.6) em uma vizinhança U de z simplesmente conexa, forma um espaço vetorial de dimensão μ (sobre $\mathbb{C}$) e que uma base $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mu$ de soluções define uma matriz $\Phi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_\mu) \in G\ell(\mu,\mathcal{O}(U))$, Φ é uma matriz fundamental do sistema (VI.6.1).

Seja $p\colon \tilde{X} \to D^*$ o recobrimento universal de D^*, $\tilde{X} = \{(r,\theta) \mid 0 < r < \eta, -\infty < \theta < \infty\}$, $p(r,\theta) = re^{i\theta}$. Podemos considerar o sistema (IV.6.1) definido em $\tilde{X}$

$$\text{(VI.6.2)} \qquad \tilde{Y}'(\tilde{z}) = A\circ p(\tilde{z})\tilde{Y}(\tilde{z}), \qquad \tilde{z} = (r,\theta)$$

Como $\tilde{X}$ é simplesmente conexo obtemos um espaço μ-dimensional de soluções globalmente definidas. Se $\tilde{\Phi}(\tilde{z})$ é uma matriz fundamental para o sistema (VI.6.2) e se $\sigma\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ é um elemento de $\mathrm{Aut}(\tilde{X}) \simeq \mathbb{Z}$ então $\sigma.\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi} \circ \sigma^{-1}$ também é uma matriz fundamental para (VI.6.2). Logo existe uma matriz $T_\sigma \in G\ell(\mu,\mathbb{C})$ tal que $\sigma.\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}.T_\sigma$.

Em particular tomando $\sigma_o(r,\theta) = (r,\theta+2\pi)$ gerador de $\mathrm{Aut}(\tilde{X})$ teremos uma matriz $C = T_{\sigma_o}$.

Sejam $P \in G\ell(\mu,\mathbb{C})$ tal que $C = \exp(2\pi iP)$ e $S(\tilde{z}) = \tilde{\Phi}(\tilde{z}).\exp(-P \operatorname{Log}\tilde{z})$ (matriz de funções holomorfas em $\tilde{X}$ portanto de funções plurívocas em D^*).

Então

$$\sigma_o S(\tilde{z}) = \sigma_o^{*}\tilde{\Phi}(\tilde{z}) \exp[-P(\operatorname{Log} \tilde{z} + 2\pi i)] =$$

$$= \tilde{\Phi}(\tilde{z}).C \quad \exp[-P(\operatorname{Log} \tilde{z} + 2\pi i)] =$$

$$= \tilde{\Phi}(\tilde{z}).\ \exp(2\pi iP).\ \exp(-P2\pi i)\ \exp(-P\operatorname{Log} \tilde{z})$$

isto é $\sigma_o S(\tilde{z}) = S(\tilde{z})$. Isto significa que S é de fato uma matriz de funções unívocas, isto é, uma matriz de funções holomorfas em D^*. Concluímos assim que existe uma matriz fundamental para o sistema (VI.6.2) da forma $\tilde{\Phi}(\tilde{z}) = S(z).\exp(P \operatorname{Log} \tilde{z})$. Soluções locais para (VI.6.1) serão obtidas escolhendo determinações para $\operatorname{Log} \tilde{z}$ (seções de $p\colon \tilde{X} \to D^*$) de modo que em cada aberto conexo teremos uma matriz fundamental $\Phi(z) = S(z)\exp(P \operatorname{Log} z)$.

Vemos também que $C = \exp(2\pi iP)$ é uma matriz de monodromia para o sistema (VI.6.1).

<u>Definição VI.4</u>: Dizemos que 0 é uma <u>singularidade regular</u> do sistema (VI.6.1) se a matriz fundamental se escreve $\tilde{\Phi}(\tilde{z}) = S(z) \exp(P \operatorname{Log} \tilde{z})$ com $S(z)$ possuindo no máximo um pólo na origem.

<u>Definição VI.5</u>: Dois sistemas $Y' = A(z)Y$ e $W' = B(z)W$ são <u>semelhantes</u> se existe uma matriz $P \in G\ell(\mu,K)$ cujas entradas são funções meromorfas tal que $B(z) = -P'(z).P(z)^{-1} + P(z)A(z)P(z)^{-1}$.

<u>Observações</u>: Se um sistema $Y' = A(z)Y$ é semelhante a um sistema $W' = B(z)W$ que possui uma singularidade regular em 0 então $Y' = A(z)Y$ também possui uma singularidade regular em 0.

<u>Prova</u>: Seja $P(z)$ matriz de funções meromorfas tal que

$$B(z) = -P'(z)P(z)^{-1} + P(z)A(z)P(z)^{-1}.$$

Então se $\Phi(z) = S(z)\exp(P \operatorname{Log} \tilde{z})$ é matriz fundamental para o sistema $W' = B(z)W$ então $P(z)\Phi(z)$ é matriz fundamental para o sistema $Y' = A(z)Y$.

Como $P(z)$ é constituída de funções no máximo meromorfas então $P(z)S(z)$ possui no máximo um pólo na origem.

Exemplos de equações diferenciais com singularidades regulares são bastante conhecidos na teoria clássica, sugerimos que o leitor consulte [Coddington-Levinson] ou [Whittaker Watson]; muitos deles provém de equações lineares de ordem n.

Em [Coddington e Levinson], capítulo 4 seção 5 encontra-se a seguinte caracterização:

<u>Teorema VI.3</u>: Uma equação diferencial

$$y^{(m)} + a_1(z)y^{(m-1)} + \dots + a_m(z)y = 0$$

com $a_k(z)$ holomorfa em $\{z \ / \ 0 < |z| < \delta\}$ para $k = 0,\ldots,m$, possui singularidade regular em 0 se e sòmente se $a_k(z) = z^{-k} b_k(z)$ $(k = 1,\ldots,m)$ onde b_k é holomorfa em z.

Observe que o sistema associado à equação acima obtem-se fazendo,

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y^{(2)}, \ldots, y_m = y^{(m-1)}$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_m(z) & -a_{m-1}(z) & \cdots & -a_1(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

que denotaremos por $Y' = B(z)Y$. Este distema é semelhante através da mudança $W = M(z)Y$ onde

$$M(z) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & z & & 0 & \\ & & z^2 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & z^{m-1} \end{pmatrix} \qquad \text{ao sistema}$$

$$W' = A(z)W \quad \text{onde} \quad zA(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ -b_m(z) & -b_{m-1}(z) & -b_{m-2}(z) & \cdots & (m-1)-b_1(z) \end{pmatrix}$$

isto é $A(z)$ possui um pólo simples em 0. Para este sistema prova-se como em [Coddington-Levinson] pg. 112 que uma matriz fundamental $\Phi(z) = S(z) \exp(P \operatorname{Log} z)$ é tal que $z^e S(z)$ é cotada de modo que $S(z)$ é constituida de funções no máximo meromorfas.

A importância desta caracterização para os sistemas que estamos tratando está expressa pelo seguinte teorema de Deligne

<u>Teorema VI.4</u>: Todo sistema diferencial $Y' = A(z)Y$, $Y \in (\mathcal{O}_U)^m$, $U \subset D^*$ é semelhante a um sistema associado a uma equação diferencial de ordem m.

<u>Demonstração</u>: Reproduzimos aqui a prova que é dada em [Ramis] pg. 57-59. O Teorema de Deligne é válido em contexto bem mais geral (vide [Deligne]). Se $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{C}[z]^m$ é uma m-upla de polinomios complexos na variável z definimos $\Lambda_o = \Lambda$,

$\Lambda_{j+1}(z) = \frac{d}{dz} \Lambda_j(z) + \Lambda_j(z).A(z) \qquad j = 0, \ldots, m-1.$

Sejam $B_m = \begin{pmatrix} \Lambda_o \\ \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_{m-1} \end{pmatrix}$ e $B_o = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_m \end{pmatrix}$

matrizes $m \times m$, com coeficientes em $\mathbb{C}[z]$, então $B_o = \frac{d}{dz} B_m + B_m A$. Provaremos que para uma escolha conveniente de Λ existe uma matriz

$$C(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_o(z) & -a_1(z) & \cdots & \cdots & -a_{m-1}(z) \end{pmatrix}$$

tal que $a_j(z)$ é holomorfa para $0 < |z| < \delta$ e $B_o = CB_m$ de modo que se $M(z) = B_m(z)^{-1}$ então

$$C(z) = B_o(z)B_m(z)^{-1} = \frac{d}{dz} B_m(z)B_m(z)^{-1} + B_m(z)A(z)B_m(z)$$

ou

$$C(z) = -\frac{d}{dz} M(z)M(z)^{-1} + M(z)A(z)M(z)^{-1},$$

como queríamos.

Escrevendo $B_o = CB_m$

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_o & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_o \\ \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_{m-1} \end{pmatrix}$$

obtemos a seguinte equação nas incógnitas $-(a_o,a_1,\ldots,a_{m-1})$:

$$\Lambda_m^t = \begin{pmatrix} \Lambda_{m_1} \\ \vdots \\ \Lambda_{mm} \end{pmatrix} = -B_m^t \cdot \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix}$$

De modo que se $b_m = (-1)^m \det B_m$ não é identicamente nulo então

$$a_o = \frac{\det[\Lambda_m \Lambda_1 \ldots \Lambda_{m-1}]}{b_m}$$

$$a_1 = \frac{\det(\Lambda_o \Lambda_m \Lambda_2,\ldots,\Lambda_{m-1})}{b_m} ,\ldots, \quad a_{m-1} = \frac{\det(\Lambda_o,\ldots,\Lambda_{m-2}\Lambda_m)}{b_m}$$

são funções holomomorfas para $0 < |z| < \delta$, δ suficientemente pequeno e a matriz $M(z) = B_m(z)^{-1}$ possui entradas funções meromorfas.

Vamos ver agora como podemos escolher Λ.

Escrevendo

$$B_m = \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda'+\Lambda.A \\ \Lambda''+\Lambda'.A+\Lambda'.A'+\Lambda'.A+\Lambda.A^2 \\ \cdots \\ \Lambda^{(m)}+\Lambda^{(m-1)}A+\ldots+\Lambda.A^{m-1} \end{pmatrix}$$

vemos que as linhas de B_m dependem algébricamente de A e de suas derivadas até ordem $m-1$.

A existência de Λ é obtida no seguinte

Lema VI.1: Seja

$$B(z)_{m\times m} = \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda'+\Lambda\Phi_{20} \\ \Lambda''+\Lambda'\Phi_{31}+\Phi_{30} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Lambda^{(m)}+\Lambda^{(m-1)}\Phi_{m+1,m-1}+\ldots+\Lambda\Phi_{m+1,o} \end{pmatrix}$$

onde $\Lambda \in \mathbb{C}[x]^m$ e Φ_{ij} são matrizes $m \times m$ com coeficientes funções algébricas de A, $\frac{dA}{dz},\ldots,\frac{d^{m-1}A}{dz^{m-1}}$. Suponhamos que as entradas de A sejam funções holomorfas em $D^*=\{0 < |z| < \delta\}$. Então, dados $z_o \in D^*$ e L uma matriz $m \times m$ existe um único $\Lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{C}[x]^m$ com cada λ_j polinômio de grau $\leq m$ tal que $B_m(z_o) = L$.

Demonstração: Escreva $L = (\ell_{ij})$ e $\ell_i = (\ell_{i1}, \ldots, \ell_{im})$

$B(z_o) = L$ equivale a $\Lambda(z_o) = \ell_1$

$$\Lambda'(z_o) = \ell_2 - \Lambda(z_o)\Phi_{20}(z_o)$$

$$\Lambda''(z_o) = \ell_3 - \Lambda'(z_o)\Phi_{31}(z_o) - \Lambda(z_o)\Phi_{30}(z_o)$$

etc.... Portanto consideradas como equações em $\Lambda(z_o)$, $\Lambda'(z_o)$,... obtemos uma solução única de modo que os polinômios λ_i vistos como polinômios de Taylor desenvolvidos no ponto z_o são determinados por estas condições.

∎

Finalizamos enunciando a propriedade fundamental dos sistemas de Gauss-Manin:

Teorema VI.5: [Brieskorn] O sistema de Gauss-Manin possui uma singularidade regular em 0.

Para um detalhamento da prova deste Teorema dada por Malgrange e de suas consequencias sugerimos a leitura de [Brasselet] e [Malgrange].

APÊNDICE I

ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS SOBRE CONJUNTOS ALGÉBRICOS

No que segue K denota o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

<u>Definição 1</u>:

Um subconjunto $V \subset K^m$ é dito algébrico se V é o lugar dos zeros comuns a alguma coleção de polinômios em $K[x_1,\dots,x_m]$.

A definição acima não é a mais geral, porém vamos nos ater a ela.

Sabemos, pelo teorema da base de Hilbert, que qualquer ideal em $K[x_1,\dots,x_m]$ é finitamente gerado desde que visto como $K[x_1,\dots,x_m]$-módulo. Denotaremos por $I(V)$ ao ideal de $K[x_1,\dots,x_m]$ formado pelos polinômios que se anulam em V. É consequência do teorema da base que uma cadeia descendente de conjuntos algébricos $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ é estacionária, ou seja, existe i tal que $V_i = V_{i+1} = \dots$ (exercício).

Um conjunto algébrico V é dito <u>irredutível</u> se não puder ser expresso como a união de dois subconjuntos algébricos próprios (note que a união $V \cup V'$ de dois conjuntos algébricos é um conjunto algébrico). A irredutibilidade de V fica caracterizada pelo fato de que $I(V)$ seja <u>primo</u>.

Sejam $V \subset K^m$ um conjunto algébrico e $f_1,\ldots,f_k$ geradores do ideal de V.

<u>Definição 2</u>:

Um ponto $x \in V$ é dito <u>regular</u> se

$$\text{posto}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) = \max_{p\in V} \text{posto}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right) \quad \text{e } \underline{\text{singular}} \text{ caso}$$

$$\text{posto}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) < \max_{p\in V} \text{posto}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)$$

$i = 1,\ldots,k; \quad j = 1,\ldots,m.$

Note que a definição acima não depende da escolha dos geradores de $I(V)$, uma vez que introduzir $g \in I(V)$ não altera o posto já que $g = g_1f_1 + \ldots + g_kf_k$.

Ponha $n = \max_{p\in V} \text{posto}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)$ e seja $\Sigma(V)$ o conjunto dos pontos singulares de V. Então $\Sigma(V)$ é um subconjunto algébrico próprio de V. De fato, se $x \in \Sigma(V)$ então os determinantes de todos os menores $n \times n$ da matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)$ se anulam em x, ou seja, $\Sigma(V)$ é determinado por equações polinomiais. Note que $\Sigma(V)$ pode ser vazio.

Suponha agora que V é irredutível e seja $V^* = V-\Sigma(V)$ o conjunto de pontos regulares de V. Dado $x \in V^*$ esta é, numa vizinhança de x, uma variedade analítica (real ou complexa) de dimensão $m - n$ (exercício).

Definição 3:

A dimensão de V é a dimensão da variedade V^*, isto é, $\dim V = m-n$.

Proposição 4:

Seja $V \subset K^m$ um conjunto algébrico irredutível e $W \subset V$ um subconjunto algébrico próprio. Então $\dim W < \dim V$.

Demonstração:

Note que de $W \underset{\neq}{\subset} V$ temos $I(W) \underset{\neq}{\supset} I(V)$. Suponha que $\dim W = \dim V$. Então, se $x \in W^*$ forçosamente $x \in V^*$. Logo, dado $g \in I(W)$ este se anula numa vizinhança de x em V^* e portanto se anula em V (g analítica!) e daí $I(W) \subset I(V)$.

Lema 5:

Se $V \subset K^m$ é um conjunto algébrico então V se expressa como uma união finita disjunta

$$V = M_1 \cup \ldots \cup M_k$$

onde M_i é uma variedade analítica.

Demonstração:

A cadeia descendente $V \supset \Sigma(V) \supset \Sigma(\Sigma(V)) \supset \ldots$ é estacionária. Logo, fazendo $M_1 = V^* = V-\Sigma(V)$, $M_2 = \Sigma(V)-\Sigma(\Sigma(V))$ e assim sucessivamente, obtemos o resultado.

O resultado central desse apêndice é o seguinte

Teorema 6: (Whitney, (2))

Sejam $W \subset V \subset K^m$ conjuntos algébricos. A diferença $V - W$ tem no máximo um número finito de componentes topológicas.

Demonstração:

De acordo com o lema 5, V se expressa como

$$V = M_1 \cup \ldots \cup M_k \quad \text{onde} \quad M = V - \Sigma(V),$$

$M_2 = \Sigma(V) - \Sigma(\Sigma(V))$ assim sucessivamente. Notando $V_2 = \Sigma(V)$, $V_3 = \Sigma(\Sigma(V))$ e assim por diante, temos que $V-W = (M_1-W)\cup\ldots(M_k-W)$ onde $M_i-W = V_i-(\Sigma(V_i) \cup W)$. Basta mostrar então que

Proposição 7:

Se V é um conjunto algébrico real e se $W \subset V$ é um subconjunto algébrico que contém $\Sigma(V)$, então $Y - W$ tem o tipo de homotopia de um CW-complexo finito. (Basta considerar o caso real pois um conjunto algébrico $V \subset \mathbb{C}^m$ pode ser visto como um conjunto algébrico em $\mathbb{R}^{2m}$).

Demonstração de 7:

Necessitaremos alguns resultados auxiliares.

Sejam $V \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto algébrico e $f_1,\ldots,f_m$ elementos de $I(V)$.

Lema 8:

Se a amatriz $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ é não-singular no ponto $x_o \in V$ então $V - \{x_o\}$ é um conjunto algébrico (ou seja, x_o é um ponto isolado de V).

Demonstração de 8:

Suponha $x_o = 0$. Como os f_j se anulam em 0, existem polinômios g_{jk} tais que $f_j = x_1 g_{j1} + \ldots + x_m g_{jm}$. Seja W o conjunto algébrico formado pelos pontos $x \in V$ tais que $\det(g_{jk}(x)) = 0$. Se $x \in V-\{0\}$ então a relação

$$\begin{pmatrix} g_{11}(x) \\ \vdots \\ g_{m1}(x) \end{pmatrix} x_1 + \ldots + \begin{pmatrix} g_{1m}(x) \\ \vdots \\ g_{mm}(x) \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

mostra que $x \in W$. Por outro lado, $0 \notin W$ pois $\det(g_{jk}(0)) = \det(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(0)) \neq 0$. Logo, $W = V-\{0\}$ é algébrico.

Lema 9:

Se um conjunto algébrico $V \subset \mathbb{R}^m$ tem dimensão topológica 0, então V é um conjunto finito.

Demonstração de 9:

Sejam $f_1, \ldots, f_k$ os geradores de $I(V)$. Mostraremos que se V é algébrico e $\dim V = 0$ então existe pelo menos um ponto $x_o \in V$ no qual a matriz $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o))$ tem posto m. Isto feito, o lema 8 garante que $V_1 = V-\{x_o\}$ é algébrico. Repetindo o argumento para V_1 obtemos $V_2 = V_1-\{x_1\}$ e assim sucessivamente, o que fornece uma cadeia descendente $V \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ que é estacionária, mostrando que V é finito.

Suponha então que $\max_{p\in V} \text{posto}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)) = n \leq m-1$. Então, V^* é uma variedade de dimensão $m-n \geq 1$, contradizendo o fato de que a dimensão topológica de V é zero.

<u>Lema 10</u>:

Sejam $V \subset K^m$ um conjunto algébrico, V^* o conjunto de pontos regulares de V, $f_1,\ldots,f_k$ geradores de $I(V)$, $n = \dim_K V^*$ e $g \in K[x_1,\ldots,x_m]$. O conjunto de pontos críticos de $g|_{V^*}: V^* \to K$ é dado pela interseção $V^* \cap W$ onde W é o conjunto algébrico formado pelos pontos $x \in V$ nos quais a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial g}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

tem posto menor que ou igual a n.

Demonstração de 10:

Dado $p \in V^*$, escolha um sistema de coordenadas locais $u_1,\dots,u_m$ em torno de p de tal modo que V^* seja dada por $u_1 = \dots = u_n = 0$. Nesse sistema de coordenadas $\frac{\partial f_i}{\partial u_j} = 0$ para $j \geq n+1$ e como a matriz $(\frac{\partial f_i}{\partial u_j})$ é coluna-equivalente à matriz $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ e esta tem posto n em p concluímos que as n primeiras colunas de $(\frac{\partial f_i}{\partial u_j})$ são linearmente independentes. Daí segue que a matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial g}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_k}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

tem posto n se e só se $\frac{\partial g}{\partial u_{n+1}} = \dots = \frac{\partial g}{\partial u_m} = 0$, ou seja, se p é ponto crítico de $g|_{V_*}$. Como essa matriz é coluna-equivalente à matriz do enunciado, o resultado segue.

A conclusão da demonstração de 7 será obtida pela

Proposição 11:

Um conjunto algébrico não-singular $V \subset \mathbb{R}^m$ tem o tipo de homotopia de um CW-complexo finito.

Demonstração de 11:

Aqui usaremos um resultado de Andreotti e Frankel (veja [Andreotti e Frankel]).

Dado $a \in \mathbb{R}^m$ defina a função distância ao quadrado $r_a: V \to \mathbb{R}$, $r_a(x) = |x-a|^2$. Andreotti e Frankel mostraram que, para quase todo $a \in \mathbb{R}^m$, a função r_a possui apenas pontos críticos não-degenerados. Seja $\Sigma(r_a)$ o conjunto dos pontos críticos de r_a. Como V é não-singular, $\Sigma(r_a)$ é um subconjunto algébrico (por 10) e como um ponto crítico não-degenerado é isolado, $\Sigma(r_a)$ é finito (por 9). Agora, o teorema fundamental da teoria de Morse [Milnor (3)], 3.5) diz que a variedade V tem o tipo de homotopia de um CW-complexo obtido pela adjunção de uma célula para cada ponto crítico da função r_a, uma vez que esta é própria e não-negativa. Como $\Sigma(r_a)$ é finito, o resultado segue.

Finalmente estamos em condições de demonstrar 7.

Suponha W definido por $f_1 = \ldots = f_k = 0$ e considere a função $q(x) = f_1(x)^2 + \ldots + f_k(x)^2$. Esta também define W (note que esse argumento só é válido sobre $\mathbb{R}$).

Considere o conjunto algébrico $U \subset V \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ definido por $U = \{(x,y) \in V \times \mathbb{R}: q(x).y = 1\}$. U é certamente não singular uma vez que $W \supset \Sigma(V)$ e q define W. Além disso, U é homeomorfo a $V - W$ através de $\pi: U \to V-W$, $\pi(x,y) = x$. A proposição 11 nos garante então que $V - W$ tem o tipo de homotopia de um CW-complexo finito, concluindo a demonstração do teorema de Whitney.

Após 6, podemos melhorar o enunciado de 5 como segue:

Corolário 12:

Um conjunto algébrico $V \subset K^m$ se expressa como uma união finita disjunta $V = M_1 \cup \ldots \cup M_k$ onde M_i é uma variedade analítica que possui no máximo um número finito de componentes topológicas. Anàlogamente, o mesmo ocorre com uma diferença $V - W$ de conjuntos algébricos.

Encerramos com um resultado que se mostrou útil na demonstração de II.1.

Proposição 13:

Seja $V \subset K^m$ um conjunto algébrico. Uma função polinomial $g|_{V^*}: V^* \to K$ tem no máximo um número finito de valores críticos.

Demonstração:

O conjunto de pontos críticos de $g|_{V^*}$ pode ser expresso, pelo lema 10, como uma diferença de conjuntos algébricos $W-\Sigma(V)$ e portanto, pelo corolário 12, como uma união finita disjunta $W-\Sigma(V) = M_1 \cup \ldots \cup M_k$ de variedades analíticas possuindo um número finito de componentes topológicas. Dado $x \in M_i$, este é ponto crítico de $g|_{V^*}$ e portanto é também ponto crítico de $g|_{M_i}$. Como os pontos de M_i são todos pontos críticos de $g|_{V^*}$, g é constante ao longo de cada componente conexa de M_i e portanto $g(M_i)$ é um conjunto finito. Agora, a união $g(M_1) \cup \ldots \cup g(M_k)$ é o conjunto de valores críticos de $g|_{V^*}$.

APÊNDICE II

LEMA DE SELEÇÃO DA CURVA

<u>Teorema</u> (Bruhat e Cartan)

Sejam $V \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto algébrico e $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto semi-algébrico ou seja $U = \{x \in \mathbb{R}^m \mid g_1(x) > 0, \dots, g_\ell(x) > 0$ para $g_j(x)$ polinomios real $j = 1, \dots, \ell\}$.

Se $0 \in \overline{U \cap V}$ então existe uma curva $p: [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$ analítica tal que $p(0) = 0$ e $p(t) \in U \cap V$ para $0 < t < \varepsilon$.

<u>Demonstração</u> [Milnor]

1) <u>Redução ao caso</u> $\dim V = 1$

Suponhamos que $\dim V \geq 2$, provaremos primeiramente que existe $V_1 \subset V$ subconjunto algébrico próprio tal que $0 \in \overline{U \cap V_1}$.

Podemos supor que:

a) V é irredutível (caso contrário tomaríamos $V_1 = A$ uma das componentes irredutíveis de V para a qual $0 \in \overline{U \cap A}$).

b) Existe vizinhança D de 0 em $\mathbb{R}^m$ tal que $D \cap U \cap \Sigma(V) = \phi$ (caso contrário, tomamos $V_1 = \Sigma(V)$).

c) V não está contido em um hiperplano próprio de $\mathbb{R}^m$.

Seja $\{f_1,\ldots,f_k\}$ conjunto gerador do ideal de V, $I(V)$. Então $\dim V = m-\rho$ onde ρ é o posto máximo possível da matriz

$$[df_1(x),\ldots,df_k(x)] \quad \text{com} \quad x \in V \qquad \text{e}$$

$$\Sigma(V) = \{x \in V \mid \text{posto } [df_1(x),\ldots,df_k(x)] < \rho\}$$

Por hipótese existe esferas S_ε centradas em 0 e de raio ε arbitràriamente pequeno que contém pontos de $U \cap V$.

Pela Proposição II.1 e b) segue que se ε for suficientemente pequeno S_ε é transversal a V de modo que $S_\varepsilon \cap V \cap U \neq \phi$ é uma subvariedade de dimensão $m - \rho - 1$ e posto $[df_1(x)\ldots df_k(x)dr(x)] = \rho+1$ para todo $x \in S_\varepsilon \cap U \cap V$ onde $r(x) = \|x\|^2$.

Seja $g = g_1 \ldots g_\ell$ e considere $g|_{V\cap S_\varepsilon}$. Para todo $x \in S_\varepsilon \cap U \cap V$ temos $g(x) > 0$. De modo que se $x' \in V \cap S_\varepsilon$ é um ponto de máximo de $g|_{S_\varepsilon \cap V}$ (compacto) então $g(x') \geq g(x) > 0$ isto é $x' \in S_\varepsilon \cap U \cap V$.

Mas como x' é ponto crítico de $g|_{V\cap S_\varepsilon}$ então

$$\text{posto}[df_1(x'),\ldots,df_k(x')\ dr(x')\ dg(x')] \leq \rho+1.$$

Concluímos então que arbitràriamente próximo de 0 existem pontos da interseção $V' \cap U$ onde V' é subconjunto algébrico definido por
$V' = \{x \in V \ / \ \text{posto}[df_1(x),\ldots,df_k(x)dr(x)dg(x)] \leq \rho + 1\}$. De

maneira que se V' for um subconjunto próprio de V então podemos tomar $V_1 = V'$. Suponhamos que $V' = V$, iremos aplicar o mesmo raciocínio para uma outra função conveniente.

Observe que se arbitràriamente próximo de 0 existem pontos de $U \cap V \cap \{x_i = 0\}$ onde $\{x_1,\ldots,x_m\}$ são coordenadas de $\mathbb{R}^m$ então $A_i = V \cap \{x_i = 0\}$ é um subconjunto algébrico próprio de V (pela hipótese c) de modo que podemos tomar $V_1 = A_i$.

Podemos assim supor que existe uma vizinhança D' de 0 tal que $D' \cap U \cap V \cap \{x_i = 0\} = \phi$ para $i = 1,\ldots,m$.

Considere a função $x_i^2\, g|_{V\cap S_\varepsilon}$ com ε escolhido adequadamente. Se x' é ponto de máximo de $x_i^2\, g|_{V\cap S_\varepsilon}$ então

$$x_i'^2\, g(x') \geq x_i^2\, g(x) > 0 \quad \text{donde} \quad x' \in V \cap S_\varepsilon \cap U.$$

Novamente, como x' é ponto crítico de $x_i^2 g$ então

$$\text{posto}[df_1(x'),\ldots,df_k(x')\ dr(x')\ d(x_i^2 g)\ (x')] \leq \rho+1$$

Portanto

$$\tilde{V}_i = \{x \in V \;/\; \text{posto}[df_1(x),\ldots,df_k(x)dr(x)d(x_i^2 g)(x)] \leq \rho+1\}$$

é um subconjunto algébrico que contém pontos de U arbitràriamente próximos de 0. Se $\tilde{V}_i \neq V$ podemos tomar $V_1 = \tilde{V}_i$.

Caso contrário temos:

$V = V' = \tilde{V}_1 = \ldots = \tilde{V}_m$ e para $x \in U \cap V$ suficientemente próximo de zero tal que

$$\text{posto}[df_1(x),\dots,df_k(x)dr(x)] = \rho+1 \qquad \text{temos:}$$

$dg(x)$ pertence ao espaço gerado por $[df_1(x),\dots,df_k(x)dr(x)]$ $(V^{-1}=V)$ e $d(x_i^2g)(x)$ também pertence a este espaço (pois $\tilde{V}_i = V$). Mas $d(x_i^2g)(x) = 2x_ig(x)dx_i(x) + x_i^2dg(x)$ e como $x_i \neq 0$ $g(x) > 0$ obtemos que $\{df_1(x),\dots,df_k(x),dr(x)\}$ gera todo o espaço das diferenciais em x $(= \text{Hom}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}))$. Logo $m = \text{posto}[df_1(x),\dots,df_k(x)dr(x)] = \rho + 1$ ou seja $\dim V = 1$.

2) <u>Descrição local de subconjuntos algébricos de dimensão</u> 1

Seja x_o um ponto não isolado de um subconjunto algébrico $V \subset \mathbb{R}^m$ de dimensão 1. Então existe uma vizinhança U de x_o em $\mathbb{R}^m$ tal que

$$V \cap U = \bigcup_{i=1}^{r} R_i \quad \text{onde} \quad \bigcap_{j=1}^{r} R_1 = x_o$$

cada R_i (ramo) é homeomorfo a um intervalo real e pode ser parametrizado por uma série $p(t) = x_o + (\sum_{j=1}^{\infty} a_{j_1}t^j,\dots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{mj}t^j)$ convergente para $|t| < \varepsilon$.

<u>Demonstração</u>:

Para o caso complexo esta é a descrição dos ramos de uma curva complexa em $\mathbb{C}^m$ [veja Kendig] onde de fato obtem-se uma parametrização de cada ramo da forma $p(z) = x^o + (z^n, \Sigma a_{j1}z^j,\dots,\Sigma a_{jm} z^j)$. (Se V não está contida em algum hiperplano $z_k = 0$).

No caso real, seja $V_{\mathbb{C}}$ fecho complexo de V em $\mathbb{C}^m$ isto é o menor subconjunto algébrico de $\mathbb{C}^m$ que contém V. Então $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V = 1$ e $V_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^m = V$.

Para cada ramo R_j de $V_{\mathbb{C}}$ seja $p(z) = x^o + (z^n, \Sigma a_{j1} z^j, \ldots, \Sigma a_{jm} z^j)$ uma parametrização, com $z \in \mathbb{C}$.

Mas $p(z) \in \mathbb{R}^m$ se e sòmente se $z^n \in \mathbb{R}$ e $\Sigma a_{jk} z^j \in \mathbb{R}$ para $k = 1, \ldots, m$.

Escrevendo $z = r\, e^{i\theta}$ obtemos $z^n \in \mathbb{R}$ se e sòmente se $n\theta = k\pi$ isto é $z = r\xi$ onde ξ é uma raiz 2n-ésima da unidade. Escolhendo uma raiz ξ e substituindo na série $\Sigma a_{jk} z^j$ obtemos $\Sigma(a_{jk}\xi^j) r^j \in \mathbb{R}$ para $k = 1, \ldots, m$.

<u>Afirmação</u>: Se $p(\xi r)$ contém pontos de $\mathbb{R}^m$ arbitràriamente próximos de x^o então $a_{jk}\xi^j \in \mathbb{R}$ para todo $j \geq 1$ e $k = 1, \ldots, m$.

<u>Prova</u>: Fixando k provamos por indução em j.

Para $j = 1$ seja r_i uma sequência de números reais tal que $\sum_{j=1}^{\infty} (a_{jk}\xi^j) r_i^j \in \mathbb{R}$ então $\frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{jk}\xi^j) r_i^j \in \mathbb{R}$ o que implica que

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{jk}\xi^j) r_i^j = a_{1k}\xi \in \mathbb{R}$$

Por indução suponhamos que $a_{1k}\xi, \ldots, a_{nk}\xi^n$ sejam reais então $\frac{1}{r_i^{n+1}} [\Sigma(a_{jk}\xi^j) r_i^j - \sum_{j=1}^{n} (a_{\ell k}\xi^{\ell}) r^{\ell}] \in \mathbb{R}$ então

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{r_i^{n+1}} \Big[\sum_{j=n+1}^{\infty} (a_{jk}\xi^j) r_i^j \Big] = a_{n+1k}\xi^{n+1} \in \mathbb{R}.$$

Como é claro que se todos $a_{jk}\xi^j$ são reais então $p(\xi r) \in \mathbb{R}^m$ provamos que a restrição de $p(z)$ à reta ξr parametriza uma parte do conjunto $R_j \cap \mathbb{R}^m$. De fato usando a afirmação acima pode-se provar (leitor) que $R_j \cap \mathbb{R}^m$ possui no máximo um ramo.

Concluindo assim a prova de 2).

3) <u>Conclusão da demonstração do Lema de Seleção da Curva</u>:

Suponhamos que $\dim V = 1$ e que $0 \in \overline{U \cap V}$.

Seja $p(t)$, $|t| < \varepsilon$ ramo passando por 0 que contém pontos de $U = \{x \mid g_i(x) > 0, \ldots, g_\ell(x) > 0\}$ arbitràriamente próximos de 0. Para cada j a função analítica real $g_j(p(t))$ ou é positiva em algum intervalo $0 < t < \varepsilon'$ ou é menor ou igual a 0 neste intervalo. Por hipótese existe sequência $t_k \to 0$ tal que $g_j(p(t_k)) > 0$ $j = 1, \ldots, \ell$ e para todo k. Tomando uma subsequência se necessário podemos supor que $0 < t_k < \varepsilon'$ (ou $-\varepsilon' < t_k < 0$) e que o sinal de $g_j(p(t))$ não varia em $(0, \varepsilon')$, logo $g_j(p(t)) > 0$ $j = 1, \ldots, k$ isto é o semi-ramo $x = p(t)$, $0 \le t < \varepsilon'$ é tal que $p(0) = 0$ e $p(t) \in U$ para $t > 0$ como queríamos.

∎

Exercício: Seja $f \geq 0$ e $g \geq 0$ polinomios reais em $\mathbb{R}^m$, não negativos que se anulam em um ponto x^o. Então existe uma vizinhança D de x^o tal que para todo $x \in D$ se $dg(x)$ e $df(x)$ apontam as direções opostas então $df(x) = 0$.

Prova: Aplicar o Lema de Seleção da curva ao aberto

$U = \{x \,/\, \langle dg(x), df(x)\rangle < 0\}$ e ao conjunto algébrico

$$V = \left\{\text{posto}\begin{bmatrix} df(x) \\ dg(x) \end{bmatrix} \leq 1\right\}$$

$x \in U \cap V \Leftrightarrow dg(x) = \lambda(x)df(x)$ e $\lambda(x) < 0$.

Se $x^o \in \overline{U \cap V}$ pelo Lema de Seleção da Curva existe $p(t)$ tal que $\text{posto}\begin{bmatrix} df(p(t)) \\ dg(p(t)) \end{bmatrix} \leq 1$ e

$$dg(p(t)) = \lambda(p(t))df(p(t)) \quad \text{com} \quad \lambda(p(t)) < 0.$$

Mas $f\big|_U$ e $g\big|_U$ são positivas.

Logo $f \circ p(t) > 0$ $t > 0$ logo $\dfrac{df(p(t))}{dt} > 0$ e $\dfrac{dg}{df}(p(t)) > 0$ absurdo pois

$$\frac{df(p(t))}{dt} = df(p(t)).p'(t) > 0$$

$$\frac{dg}{dt}(p(t)) = dg(p(t)).p'(t) > 0$$

■

REFERENCIAS

[1] A. Andreotti, T. Frankel, The Lefschetz Theorem on Hyperplane Sections, Annals of Math., 69, (1959), 713-717.

[2] V.I. Arnold, Singularity Theory, Cambridge University Press (1981).

[3] Jose A. Hermida Alonso, Felipe Cano Torres, Lê Dũng Tráng, Int. A la Geometria de Los Sist. Diferenciales, Col. de Monografias y Memorias de Matematicas XXX, CSIC Publ. Del Inst. "Jorge Juan" de Matematicas Madrid (1983).

[4] W. Burau, Kennzeichnung der Schlauchknoten, Abh. Math. Seminar. Hamburg, 9 (1932), 125-133.

[5] J.P. Brasselet, Publications Université de Lille.

[6] K. Brauner, Zur Geometrie der Funktionen Zweier Komplexen Veränderlichen, Abh. Math. Sem. Hamburg, 6 (1928), 1-54.

[7] E. Brieskorn, Die Monodromie der Isolierten Singularitäten von Hyperflächen, Manuscripta Math., vol. 2 (1970), 103-160.

[8] E. Coddington e N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hilf, New York (1955).

[9] R. Crowell, R. Fox, Introduction to Knot Theory, Springer-Verlag, GTM 57.

[10] P. Deligne, Equations Differentielles à points Singulier Réguliers, Lec. Notes in Math. 163, Springer-Verlag, (1970).

[11] P. Griffiths e J. Harris, Principles of Algebraic Geometry John Wiley & Sons Inc. (1978).

[12] R. Gunning (1), Finite Analytic Mappings, Princeton University Press, Princeton (1974).

[13] R. Gunning (2), Lect. one Complex Anal. Varities - The Local Parametrization Thm. - Princeton U. Press.

[14] R. Gunning e H. Rossi, Analytic Functions of Several Complex Variables - Prentice Hall (1965).

[15] M.W. Hirsh, Differential Topology, Springer-Verlag, GTM 33 (1976).

[16] S.M. Husein-Zade, The Monodromy Groups of Isolated Singularities of Hypersurfaces, Russian Math. Surveys 32:2 (1977), 23-65.

[17] K. Kähler, Uber die Verzweigung einer Algebraishen Funktion Zweier Veränderlichen in der Umgebung einen singulären Stelle, Math. Zeit. 30 (1929), 188-204.

[18] M. Kervaire e J. Milnor, Groups of Homotopy Spheres, Ann. of Math. 77 No. 3 (1963) 399-405.

[19] H. King, Topological Type of Isolated Critical Points, Ann. of Math., 107, (1978), 385-397.

[20] Kendig, K., Elementary Algebraic Geometry Springer Verlag, N.Y., (1977).

[21] K. Lamotke (1), The Topology of Complex Projective Varieties After S. Lefschetz, Topology, 20, (1981), 15-51.

[22] K. Lamotke (2), Die Homologie Isolierter Singularitäten, Math. Zeit. 143, (1975), 27-44.

[23] Lê Dũng Tráng (1), Sur les Noeuds Algébriques, Comp. Math., 25, fasc. 3, (1972), 281-321.

[24] Lê Dũng Tráng (2), Topologie des Singularites des Hypersurfaces Complexes, Asterisque 7 e 8, (1973), 171-182.

[25] S. Lojasiewincz, Ensembles Semianalytiques, IHES (1965).

[26] J. Milnor (1), Singular Points of Complex Hypersurfaces, Annals of Math. Studies, Princeton University Press., Princeton (1968).

[27] J. Milnor (2), Topology from the Differentiable Viewpoint, University of Virginia Press (1965).

[28] J. Milnor (3), Morse Theory, Annals of Math., Studies, Princeton University Press, Princeton (1963).

[29] B. Malgrange, Intégrales Asymptotiques et Monodromie, Ann. Scient. ENS 7, (1974), 405-430.

[30] W. Massey, Algebraic Topology: An Introduction, N.Y. Harcourt, Brace & World, (1967).

[31] P. Orlik, The Multiplicity of a Holomorphic Map at an Isolated Critical Point. Nordic Summer School Oslo (1976), 405-474.

[32] J.P. Ramis, Théoréms D'indices Gevrey pour les équations Différentielles Ordinaires, Mem. of AMS - vol. 48 # 296 (1984).

[33] M. Sebastiani (1), Topologie des Singularites et Monodromie, Publ. de Math. Pures et Appliqueres, Un. de Lille nº 96 - (1976).

[34] M. Sebastiani (2), Monodromie et Polynome de Berstein, D'Apres Malgrange, Seminaire François Norguet, Lec. Notes in Math. 670, Springer-Verlg (1978), 370-381.

[35] M. Sebastiani (3), Preuve d'une Conjecture de Brieskorn, Manuscripta Math., 2, (1970), 301-308.

[36] M. Sebastiani (4), Un Exposé de la Formule de Leray-Norguet Bol. da Soc. Bras. de Mat., 1, (1971), 47-57.

[37] A. Simis, Int. às Funções Algébricas e Funções Abelianas, 10º Col. Bras. de Matemática, IMPA-RJ, (1975).

[38] J. Sotomayor, Singularidades de Aplicações Diferenciáveis, III - ELAM - IMPA - (1976).

[39] E. Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill, (1966).

[40] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. II, Publish or Perish, 2nd edition, Berkeley, (1979).

[41] N. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press, (1951).

[42] Van der Waerden, Modern Algebra - Frederick Ungar, vol. I, II, (1950).

[43] R. Walker, Algebraic Curves, Springer-Verlag.

[44] J. Wolf, Differentiable Fibre Spaces and Mappings Compatible With Riemannian Metrics. Mich. Math. Journal, (1964), 65-70.

[45] H. Whitney, Elementary Structure of Real Algebraic Varieties.

[46] E.T. Whittaker e G.N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge U. Press, (1927).

[47] O. Zariski, On the Topology of Algebroid Singularities, Amer. J. of Math., 54, (1932), 453-465.

[48] H. Zassenhaus, The Theory of Groups, Chelsea, (1958).

E R R A T A

Mario Jorge D. Carneiro e Marcio Gomes Soares

Introdução à Topologia de Singularidades Complexas

PÁGINA	LINHA	LÊ-SE	LEIA-SE
Prefácio 1ª pg	14	coeficientes	expoentes
4	15	m.d.c.$\{m: m=r$ ou $b_m=0\} > 1$	m.d.c.$\{m: m=r$ ou $b_m\neq 0\} > 1$
11	2	$P^{\alpha_i} Q_{i-1}^{n_{i-1}n_i} Q_i^{-n_i}$	$P_i^{\alpha_i} Q_{i-1}^{n_{i-1}n_i} Q_i^{-n_i}$
14	1	[Zassenhaus]	[Zariski]
16	6	$(-1)^g f_{\ell_1,n_1}(t^{\gamma_2})\dots f_{\ell_{g-1},n_{g-1}}(t^{n_{g-1}n_g})=$	$(-1)^g f_{\ell_1,n_1}(t^{\gamma_2})\dots f_{\ell_{g-1},n_{g-1}}(t^{n_g})=$
		$(-1)^{g'} f_{\ell'_1,n'_1}(t^{\gamma'_2})\dots f_{\ell'_{g'-1},n'_{g'-1}}(t^{n'_{g'-1}n_g})$	$(-1)^{g'} f_{\ell'_1,n'_1}(t^{\gamma'_2})\dots f_{\ell'_{g'-1},n'_{g'-1}}(t^{n_g})$
16	8	$(-1)^g f_{\ell_1,n_1}(T^{n_2\cdots n_{g-1}})\dots f_{\ell_{g-1},n_{g-1}}(T^{n_{g-1}}) =$	$(-1)^g f_{\ell_1,n_1}(T^{n_2\cdots n_{g-1}})\dots f_{\ell_{g-1},n_{g-1}}(T) =$
		$(-1)^{g'} f_{\ell'_1,n'_1}(T^{n'_2\cdots n'_{g'-1}})\dots f_{\ell'_{g'-1},n'_{g'-1}}(T^{n'_{g'-1}})$	$(-1)^{g'} f_{\ell'_1,n'_1}(T^{n'_2\cdots n'_{g'-1}})\dots f_{\ell'_{g'-1},n'_{g'-1}}(T)$
32	3	diomorfa a $\mathbb{R}^{2n}$ $F_o=f^{-1}(\mathbb{R}_+)\cap S_\varepsilon$	difeomorfa a $\mathbb{R}^{2n}$ $(F_o=f^{-1}(\mathbb{R}_+)\cap S_\varepsilon)$
52	24	$G\|_{S_\varepsilon-\overset{\circ}{N}_\eta}: S_\varepsilon=N_\eta \to \mathbb{R}_+$	$G\|_{S_\varepsilon-\overset{\circ}{N}_\eta}: S_\varepsilon-N_\eta \to \mathbb{R}_+$

/...

PÁGINA	LINHA	LÊ-SE	LEIA-SE
58	5	$H_{n-1}(K) \simeq \mathbb{Z}_{\partial}$	$H_{n-1}(K) \simeq \mathbb{Z}_2$
61	6	$\psi(^{-1}(0) \cap U) = g^{-1}(0) \cap V$	$\psi(f^{-1}(0) \cap U) = g^{-1}(0) \cap V$
68	12	$B \subset A*B$	$B \hookrightarrow A*B$
72	6	$\partial f^{-1}(0) \cap D$ e $\partial f^{-1}(0) \cap \partial D = \phi$	$\partial f^{-1}(0) \cap \partial D = \phi$
74	13	$dg(x)\colon T_xN \to T_x(N)$	$dg(x)\colon T_xN \to T_xN$
82	5	$k + 1$	k
83	18	$A \subseteq B''$	$A \subseteq B$
86	15	$0_{y,z/G}$	$\mathcal{O}_{y,z/G}$
86	17	heromorfas	meromorfas
88	5	$\partial f(z_1 z_2(z_1,y),\ldots,) = y$	$\partial f(z_1,z_2(z_1,y),\ldots,) = y$
96	13	$f\|_{f^{-}(\lambda_i)}\colon f^{-1}(\lambda_i) \to \lambda_i$	$f\|_{f^{-1}(\lambda_i)}\colon f^{-1}(\lambda_i) \to \lambda_i$
103	2	seção de TS^n	seção nula de TS^n
110	10	[Massey]	[Steenrod]
112	17	[Crowell-Fox]	[Zassenhauss]
142	7	$M = V - \Sigma(V)$	$M_1 = V - \Sigma(V)$
142	13	$Y - W$	$V - W$

Impresso na Gráfica do

impa