

**CLASSES CARACTERÍSTICAS  
EM GEOMETRIA ALGÉBRICA**

**Israel Vainsencher**

COPYRIGHT © - 1985 - by Israel Vainsencher

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,  
por qualquer processo, sem a permissão do autor.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Estrada Dona Castorina 110

22.460 - Rio de Janeiro - RJ

ã memōria de meu pai

## INDICE

INTRODUÇÃO.....	1
NOTAÇÃO, CONVENÇÕES E PRE-REQUISITOS.....	8
§1 CICLOS.....	9
§2 EQUIVALÊNCIA RACIONAL.....	13
§3 IMAGEM DIRETA.....	17
§4 IMAGEM INVERSA.....	28
§5 A SEQUÊNCIA DE EXCISÃO.....	38
§6 A 1ª CLASSE DE CHERN.....	42
§7 PROPRIEDADES DA 1ª CLASSE DE CHERN.....	55
§8 COMUTATIVIDADE.....	59
§9 AS CLASSES CARACTERÍSTICAS.....	68
§10 CÁLCULO DE ALGUNS GRUPOS DE CHOW.....	81
§11 OBSTRUÇÕES PARA IMERSÕES E MERGULHOS EM $\mathbb{P}^m$ .....	98
§12 INVARIANTES PROJETIVOS CLÁSSICOS.....	107
§13 O ANEL DE CHOW.....	121
§14 NÚMEROS CARACTERÍSTICOS.....	143
REFERÊNCIAS.....	163

## INTRODUÇÃO

Copiando uma bem difundida simplificação que põe como objetivo da geometria algébrica o estudo de sistemas de equações polinomiais, diríamos que a teoria de interseção se ocupa do cálculo do número de soluções, contadas com multiplicidades apropriadas. Um enunciado típico, é o teorema de Bézout: duas curvas planas projetivas de graus  $m, n$ , sem componentes em comum, intersectam-se em  $mn$  pontos, contados com multiplicidade. Intuitivamente, uma curva definida por uma equação polinomial de grau  $m$  pode ser deformada na união de  $m$  retas em posição geral por variação contínua dos coeficientes da equação. Teoria da interseção fornece tanto a formalização rigorosa desse processo de deformação, como a invariância do resultado desejado módulo tais deformações permissíveis, além de um respeitável aparato para o cálculo efetivo.

A geometria enumerativa clássica é hoje incorporada à teoria da interseção. De seus primórdios (círculos de Apolônio: quantos são tangentes a 3 outros, fixos?), passando por Bézout, Cayley, Chasles, Salmon..., culminou com a obra de Schubert e sua escola, fazendo-se objeto do 15º problema de Hilbert. Este demandava justificativa, em bases sólidas, para o chamado "cálculo simbólico", questionando também os limites de validade de suas aplicações à determinação de números tais como os 5.819.539.783.680 de curvas cúbicas reversas tangentes a 12 superfícies quádricas em posição geral.

Se, por um lado, as contribuições de Severi, Lefschetz, van der Waerden, Weil, Chevalley, Samuel, Serre, Grothendieck, Kleiman,

Fulton, MacPherson, Verdier (entre outros) nos permitem assegurar os fundamentos do cálculo de Schubert, já a verificação sistemática dos exemplos mais populares permanece um desafio e fértil campo de provas.

Dos trabalhos de Fulton, MacPherson e Verdier (no contexto de teoremas de Riemann-Roch para variedades singulares, não projetivas) resultou, como importante subproduto, uma notável simplificação dos fundamentos da teoria da interseção. Libertou-a dos pré-requisitos homológicos mais pesados (e.g. fórmula dos tor de Serre para multiplicidade de interseção), dispensando igualmente certos argumentos de posição geral ("moving lemma" de Chow); em particular, estendeu a teoria para variedades não projetivas.

O principal ingrediente para os cálculos "práticos" é o ferramental das classes características (de Chern e de Segre). Em contraste com a abordagem tradicional que constrói tais classes a partir de uma teoria de homologia-cohomologia pré-estabelecida ([Gr], [Hi]), o curso tomado por Fulton [F], e que adotamos aqui, consiste em definir as classes de Chern como operadores sobre o grupo de Chow (de ciclos módulo equivalência racional). A construção da classe de interseção e, por fim, do produto de ciclos em uma variedade não singular, resulta das propriedades obtidas para os referidos operadores. Em particular, prescinde-se de qualquer teoria de multiplicidades (à la Samuel-Serre) que ultrapasse a definição "ingênua", via longura (= comprimento) de um anel local artiniano. O lance está em remeter ao cone normal o cálculo do índice de interseção.

Nosso propósito é expor os resultados básicos da teoria de interseção à la Fulton-MacPherson, de forma utilitária, sem preocupação com generalidade excessiva, tampouco ambicionando à auto-suficiência mais completa. Afinal, muito da boa Matemática pode ser apreciado em casos-teste. Poderemos (de fato pretendemos) pecar ocasionalmente por escolhas pessoais e omissões graves certamente detectáveis em consulta às referências ([F], [K<sub>15</sub>], [Ks],...).

Passemos a descrever sumariamente o conteúdo por capítulos. Os 2 primeiros tratam das definições e propriedades elementares do grupo de ciclos e do grupo de Chow dos ciclos módulo equivalência racional.

O 3º capítulo concentra-se no primeiro teorema não trivial: equivalência racional é respeitada por imagem direta própria. Segue-se uma demonstração particularmente agradável do teorema de Bezout para curvas planas.

O capítulo 4 cuida da imagem inversa plana, estabelecendo-se a compatibilidade com imagem direta e com equivalência racional.

Relacionamos, no capítulo 5, o grupo de Chow de uma variedade com os grupos de Chow de um fechado e de seu aberto complementar, exibindo a sequência exata de excisão. Com isto, habilitamo-nos a calcular os grupos de Chow de um espaço afim ou projetivo bem como de outras variedades elementares incluídas nos exercícios.

Damos início, no capítulo 6, ao programa de construção do produto de ciclos, explorando o caso de codimensão 1. Fazemos uma digressão sobre divisores de Cartier e fibrados vetoriais. Introduzimos

então o operador 1ª classe de Chern de um fibrado em retas, o qual associa a cada ciclo uma classe no grupo de Chow. Listamos no capítulo 7 as propriedades fundamentais da 1ª classe de Chern: normalização, aditividade e bom comportamento com respeito a imagem direta própria (fórmula de projeção) e imagem inversa plana.

O capítulo 8 contém o 2º teorema não trivial: da comutatividade do produto por um divisor. Notável consequência é que a 1ª classe de Chern anula o subgrupo dos ciclos racionalmente equivalentes a zero, induzindo assim um operador no grupo de Chow (chamado ainda de operador 1ª classe de Chern). Estes operadores podem agora ser iterados; como 1ª aplicação, provamos a concordância do grau à la Hilbert-Samuel com o fornecido, no cap. 5, mediante o cálculo do grupo de Chow de um espaço projetivo.

No capítulo 9 construímos as classes de Segre e de Chern para fibrados vetoriais de posto arbitrário e demonstramos suas propriedades características. Destacamos o utilíssimo resultado que relaciona a  $r$ -ésima classe de Chern de um fibrado de posto  $r$  com o lugar dos zeros de uma seção regular.

Calculamos no capítulo 10 os grupos de Chow de fibrados vetoriais, de fibrados projetivos e, mais geralmente, de fibrados em grassmannianas. O fato de que o grupo de Chow de um fibrado vetorial é isomorfo ao da base, é a chave para a construção da classe de interseção em codimensão arbitrária, adiada para o cap. 13. Ilustramos o material já apresentado com uma incursão enumerativa pelas cordas de uma curva reversa.



O capítulo 11 trata do cálculo das classes de obstrução para imersão ou mergulho de variedades por projeção linear. Abrimos espaço para o surpreendente teorema de K. Johnson: grosso modo, se for possível imergir em dimensão inferior à esperada, será também possível mergulhar.

Prossegue o capítulo 12 com aplicações, descrevendo o cálculo de invariantes projetivos em termos de classes características. Iniciamos com um resultado geral sobre membros singulares de uma família de divisores (12.4), cuja demonstração infelizmente requer mais formalismo com feixes e suas imagens diretas do que seria desejável. No restante do capítulo tentamos convencer o leitor de que o esforço pode ter valido a pena. Apresentamos sucessivamente, o grau da variedade dual (12.6) (e em particular, a fórmula de Plücker para o  $n^{\circ}$  de retas tangentes a uma curva plana lisa que passam por um ponto); o  $n^{\circ}$  de pontos de Weierstrass generalizados (12.7) (de que se deduz a fórmula de Plücker para o  $n^{\circ}$  de pontos de inflexão de uma curva plana); e finalizamos com uma interpretação pessoal de alguns resultados sobre singularidades da aplicação normal de Gauss de uma superfície (12.8).

No capítulo 13 condensamos a construção de classe de interseção  $X.V$  de uma subvariedade  $V$  por um subsquema  $X$  regularmente imerso em um esquema  $Y$ . Dela resulta, em particular, a existência de um produto munindo o grupo de Chow de uma variedade não singular de uma estrutura natural de anel. Os principais pontos de destaque no procedimento de Fulton-MacPherson são estes: 1º) a classe  $X.V$  é suportada por um ciclo que vive na interseção física  $X \cap V$ ; 2º) a cons

trução já traz em si, de forma natural, a definição do índice de interseção ao longo de cada componente própria de  $X \cap V$ , tornando transparente quando e porque  $X.V$  difere do ciclo associado ao esquema interseção. O último teorema não trivial deste curso afirma que a classe de interseção respeita equivalência racional; a demonstração se baseia na importante técnica de deformação ao cone normal. Enunciamos em seguida, o teorema da construção do anel de Chow de uma variedade lisa  $Y$ . Por simplicidade, limitamos a demonstração ao caso em que  $Y$  satisfaz a 2 hipóteses adicionais: (1)  $Y$  completa e (2) a diagonal é o lugar dos zeros de uma seção regular de um fibrado vetorial sobre  $Y \times Y$ . Ambas as condições são satisfeitas pelas grassmannianas. Encerramos o capítulo com o teorema de Bézout para espaços projetivos.

No capítulo final discutimos o cálculo de alguns números característicos da família de curvas cúbicas reversas, aplicando boa parte dos resultados anteriores. Mostramos que um certo fibrado em grassmannianas é uma compactificação de um aberto do espaço de parâmetros da família de curvas cúbicas reversas. Calculamos em seguida as classes associadas às subvariedades definidas pelas condições de um cúbica reversa passar por um ponto, encontrar uma reta e tangenciar um plano. Com isto, habilitamo-nos a determinar o nº de cúbicas reversas que passam por  $a$  pontos, encontram  $b$  retas e tangenciam  $c$  planos, todos em posição geral, com  $2a+b+c=12$  e  $a=5$  ou  $6$ . Os demais casos escapam à nossa abordagem.

Por fim, gostaria de expressar meu reconhecimento à Comissão Organizadora do 15º Colóquio, tanto pela oportunidade como pela pa-

ciência com que viram os prazos se esgotarem sem sinal do manuscrito... Registro meus agradecimentos especiais aos colegas que contribuem para tornar o DM da UFPE um ambiente singularmente estimulante. E um voto de louvor ao time de datilógrafas, Delza, Ester e Neide, campeãs de eficiência!

Recife, 26/6/85

NOTAÇÃO, CONVENÇÕES E PRÉ-REQUISITOS

Pressupomos familiaridade com as definições e propriedades básicas das variedades algébricas e morfismos, ao nível das 90 primeiras páginas do Hartshorne [Ha], ou do Shafarevich [Sh]- capítulos I, II, III e V. Esquemas são de tipo finito sobre um corpo; devem ser encarados como a maneira natural de reter o sistema de equações que definem um conjunto algébrico. Variedade significa esquema integral, i.e., reduzido e irredutível. Subesquemas e subvariedades são fechados.

$A^n$  = espaço afim de dim. n sobre um corpo

$P^n$  = " projetivo

$A_X^n = A^n \times X$ ;  $P_X^n = P^n \times X$ .

$O_{X,Z}$  = anel local de um esquema X ao longo de uma subvariedade Z

$R(X)$  = corpo de funções racionais de uma variedade X

$Sp(A)$  = espectro de um anel A

$E \longrightarrow F \longrightarrow G$  = sequência exata curta

$C_*X$	(1.1)	$d^0 f$	(3.1)	$L(D)$	(6.4)	$c_*(E), c_1(E)$	(9.4)
$ c $	(1.2)	$p_*$	(3.1), (3.9)	$O(m)$	(6.5)	$G(r,n), G(r,E)$	(10.3)
$[X]$	(1.4)	$\int, \int_X$	(3.9.1)	$c_1(L)$	(6.12)	$N_X^Y$	(13.1)
$\ell(\cdot)$	(1.4)	$f^*$	(4.1)	$D.V$	(6.13)	$C_W^V$	(13.1)
$i(P,F,G)$	(1.5)	$x \times y$	(Exc. 4-4)	$TC$	(6.14(3))	$X.V$	(13.2)
$Ord_W^V(r)$	(2.1)	$d^0 X, d^0 Z$	(5.4)	$P(E)$	(9.1)	$i(Z, X.V; Y), i(Z)$	(13.6)
$[r]_W$	(2.3)	$f^*D$	(6.1.4)	$O_E(1)$	(9.1)	$i!$	(13.2), (13.10)
$R_*X$	(2.4)	$ D $	(6.1.2)	$s_1(E)$	(9.2)		
$A_*X$	(2.4)	$[D]$	(6.3)	$s_*(E)$	(9.4)		

§1 CICLOS

A noção de ciclo, de inspiração topológica, impõe-se como extensão natural da idéia de divisor de zeros e polos de funções racionais.

1.1 Definição. Seja  $X$  um esquema. O grupo dos ciclos de dimensão  $k$ , ou  $k$ -ciclos em  $X$  é o grupo abeliano livre gerado pelas subvariedades irreduzíveis fechadas de dimensão  $k$  de  $X$ , denotado  $C_k X$ . O grupo dos ciclos de  $X$  é o grupo graduado

$$C_* X = \bigoplus C_k X$$

Observemos que  $C_k X \neq 0$  somente para  $k$  entre 0 e  $\dim X$ . Como as subvariedades do subsquema reduzido associado  $X_{\text{red}}$  e as de  $X$  são as mesmas, temos

$$C_k X_{\text{red}} = C_k X, \forall k.$$

Por definição, cada  $k$ -ciclo  $c$  em  $C_k X$  se escreve de forma única como combinação linear a coeficientes inteiros,

$$c = \sum_V n_V V,$$

onde  $V$  percorre a coleção de subvariedades (fechadas e irreduzíveis!) de  $X$  de dim.  $k$ , mas  $n_V = 0$  exceto para um número finito de  $V$ 's. O suporte de  $c$  é definido por

$$(1.2) \quad |c| = \bigcup_{n_V \neq 0} V.$$

1.3 Exemplos. (1) Se  $X$  é uma variedade de dim.  $n$  então  $C_n X = \mathbb{Z} \cdot X$

(2) Suponha  $X = \mathbb{A}^1$ , a reta afim sobre um corpo  $K$ . As subvariedades de  $X$  de dim.0 correspondem aos ideais maximais  $(p(t)) \subset K[t]$ . Portanto,  $C_0 \mathbb{A}^1$  é naturalmente isomorfo a  $K(t)^\times / K^\times$ , o grupo multiplicativo das funções racionais não nulas módulo fator constante. Se  $f \in K(t)^\times$ , podemos escrever  $f = a \Pi p^{e(p)}$ , com  $p$  mônico irreduzível,  $a \in K^\times$  e o expoente  $e(p) \in \mathbb{Z}$ . Associamos à classe  $\bar{f} \in K(t)^\times / K^\times$  o ciclo  $\sum e(p) \cdot Z(p)$ , com  $Z(p)$  = subvariedade definida por  $p$ .

1.4 Definição. Sejam  $X_1, \dots, X_m$  as componentes irreduzíveis (reduzidas) de um esquema  $X$ . O ciclo fundamental de  $X$  é

$$[X] = \sum m_i X_i$$

onde

$$m_i = \ell(O_{X, X_i})$$

é a longura (=comprimento) do anel local de  $X$  no ponto genérico (i.e. ao longo) de  $X_i$ .

Lembremos que  $O_{X, X_i}$  é artiniano; assim sua longura  $m_i$  é um inteiro positivo, chamado a multiplicidade geométrica de  $X$  em  $X_i$ .

Definimos analogamente o ciclo fundamental associado a um subesquema fechado  $Z \subset X$ , seja como elemento de  $C_* Z$ , seja em  $C_* X$ .

1.5 Exemplos. (1) Sejam  $F, G$  curvas planas projetivas sem componentes em comum. Seja  $Z = F \wedge G$  (interseção esquemática). Para cada ponto  $P$  em  $Z$ , o anel local  $O_{Z, P}$  tem longura finita, denotada por  $i(P, F, G)$ , que chamamos de índice de interseção de  $F, G$  em  $P$

(cf. (13.6) para generalização). Temos neste caso

$$i(P, F.G) = \dim_K^0 Z_{P, G}$$

(dimensão como espaço vetorial sobre o corpo de base  $K$ ). O Teorema de Bezout afirma então que

$$\sum_P i(P, F.G) = d^0 F \cdot d^0 G$$

onde  $d^0 F =$  grau de curva  $F$ . Daremos uma demonstração mais adiante (3.10).

(2) Seja  $t$  uma constante e seja  $Z_t$  o subsquema de  $\mathbb{A}^4$  definido pelo ideal

$$I_t = (x, y) \cap (z, w) + (x-z-t, y-w).$$

Trata-se da interseção do plano  $x = z+t, y = w$  com a união de outros 2 planos passando pela origem. Temos

$$[Z_t] = (0, 0, -t, 0) + (t, 0, 0, 0) \text{ para } t \neq 0$$

e

$$[Z_0] = 3(0, 0, 0, 0).$$

Este exemplo ilustra bem a inconveniência de se estender a noção de multiplicidade de interseção como a longura do anel local do esquema de interseção para situações mais gerais que a de curvas consideradas acima.

Um dos pontos mais delicados da teoria de interseção está em atribuir "corretamente" multiplicidades, de sorte que certas pro-

priedades intuitivas sejam preservadas. Uma dessas é o "princípio de continuidade", claramente desrespeitado no exemplo (2) caso insistamos na multiplicidade geométrica ingênua. Veremos adiante que a multiplicidade de interseção correta é calculável pela multiplicidade geométrica do cone normal (cf. § 13; em especial (13.7)).

### Exercícios

1) Seja  $F \in K[X_0, \dots, X_n]$  um polinômio homogêneo e sejam  $Z_1, \dots, Z_m$  as componentes irredutíveis da hipersuperfície  $Z(F) \subset \mathbb{P}^n$ , de sorte que  $Z_i = Z(F_i)$  para algum polinômio irredutível  $F_i$ . Verifique a igualdade de ciclos

$$[Z(F)] = \sum e_i Z_i$$

onde  $F_1^{e_1} \dots F_m^{e_m} = F$  é a decomposição de  $F$  em fatores irredutíveis.

2) Seja  $X$  um esquema irredutível e seja  $X_0 = X_{\text{red}}$  a subvariedade suporte. Prove que se  $[X] = m[X_0]$  então  $[X \times \mathbb{A}^n] = m[X_0 \times \mathbb{A}^n]$ .

3) Justifique as afirmações do exemplo 1.5(2).

4) Seja  $Z_t$  o subsquema de  $\mathbb{A}^3$  definido pelo ideal  $(y, z) \cap (x, z-t)$  (união de 2 retas reversas). Seja  $P$  o plano  $y=x$ . Calcule o ciclo de  $P \cap Z_t$  para cada  $t \in \mathbb{A}^1$ .



§2 EQUIVALENCIA RACIONAL

O grupo de ciclos é demasiadamente grande para ser interessante. Introduzimos um subgrupo de relações adequadas; o quociente, grosso modo, identificará ciclos em  $X$  que provêm de fibras de um morfismo  $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ .

2.1 Definição. Seja  $V$  uma variedade e seja  $r \in R(V)$  uma função racional  $\neq 0$ . Definimos a ordem de  $r$  ao longo de uma subvariedade  $W \subset V$  de codim. 1 pela fórmula

$$\text{ord}_W^V(r) := \text{ord}_W(r) := \ell(A/(a)) - \ell(A/(b)),$$

onde  $A = \mathcal{O}_{V,W}$ ,  $r = a/b$  com  $a, b \in A$ .

Impõe-se a verificação do seguinte

2.2 Lema. Seja  $A$  um anel de dimensão de Krull 1. Para cada  $a, b \in A$  não divisores de zero vale

$$\ell(A(ab)) = \ell(A(a)) + \ell(A/(b)).$$

Demonstração. Sabendo-se que a longura é aditiva, o resultado segue da sequência exata natural

$$A/(b) \xrightarrow{\sim} (a)/(ab) \hookrightarrow A/(ab) \twoheadrightarrow A/(a) \quad //$$

Daí concluímos o fato de que  $\text{ord}_W$  está bem definida (i.e., independe da particular representação  $r = a/b$ ) e que

$$(2.2) \quad \text{ord}_W(rr') = \text{ord}_W(r) + \text{ord}_W(r') \quad \forall r, r' \in R(V)^*.$$

2.2.1 Exemplo. Se  $A$  é um anel de valorização discreta com uniformizante  $t$  então  $\ell(A/(a)) = e$  onde  $a \in A$  se escreve na forma  $ut^e$  com  $u$  invertível em  $A$ .

2.3 Definição. O ciclo associado à função racional  $r \in R(V)$  é definido por

$$[r] := [r]_W := \sum_W \text{ord}_W(r) \cdot W,$$

a soma se estendendo sobre a coleção de subvariedades de codim.1 de  $V$ .

Naturalmente temos a obrigação de verificar que  $\text{ord}_W(r) = 0$  exceto para um nº finito de  $W$ 's. Seja  $U \subset V$  um aberto afim. Escreva  $r = a/b$  com  $a, b$  regulares em  $U$ . Segue-se então que o conjunto

$$\{W | W \cap U \neq \emptyset \text{ e } \text{ord}_W(r) \neq 0\}$$

está contido em

$$\{W | W \cap U \text{ é componente do esquema de zeros de } a \cdot b\}.$$

Como o nº de componentes é finito e, por fim, lembrando que  $V$  admite cobertura afim finita, a verificação está completa.

2.4 Definição. Seja  $X$  um esquema. O grupo dos  $k$ -ciclos racionalmente equivalentes a zero é o subgrupo  $R_k X$  de  $C_k X$  gerado pelos ciclos associados a funções racionais de subvariedades de  $X$  de dimensão  $k+1$ .

O grupo quociente graduado,

$$A_*X = \bigoplus A_k X = \bigoplus C_k X / R_k X$$

é chamado o grupo de Chow de  $X$ .

Dois ciclos são ditos racionalmente equivalentes entre si quando representam a mesma classe módulo  $R_*X$ .

2.5 Observação importante. Se  $X$  é de dimensão pura  $n$  então  $R_*X=0$  (não há subvariedades de dim.  $n+1\dots$ ) e portanto,  $A_n = C_n$ .

Evidentemente,  $A_i X = 0$  para  $i \notin [0, n]$ .

2.6 Exemplos. (1)  $A_{n-1} \mathbb{A}^n = 0$ .

(2)  $A_{n-1} \mathbb{P}^n = \mathbb{Z} \cdot h$ , onde  $h$  = classe de um hiperplano. Com efeito, Seja  $F_d$  um polinômio homogêneo de grau  $d$  e seja  $Z(F_d) \subset \mathbb{P}^n$  a hipersuperfície associada. Temos então  $r := F_d / F_1^d \in R(\mathbb{P}^n)$  e

$$[r] = [Z(F_d)] - d[Z(F_1)].$$

Como  $h$  claramente não é de torção, segue-se que  $A_{n-1} \mathbb{P}^n$  é livre, gerado pela classe hiperplana. Veremos que os demais  $A_i \mathbb{P}^n$  também são isomorfos a  $\mathbb{Z}$  para  $i$  entre 0 e  $n$  (5.3), gerado pela classe de um subespaço de dim.  $i$ .

(3) Seja  $X$  uma curva não singular. Cada função racional não constante  $r \in R(X)$  induz um morfismo  $\bar{r}: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ . As fibras de  $\bar{r}$  não vazias formam 0-ciclos racionalmente equivalentes entre si. Com efeito, para cada  $P \in X$  temos  $\text{ord}_P(r) > 0$  se  $r$  é regular em  $P$  e  $r(P) = 0$ . Daí vem que

$$[\tilde{r}^{-1}(0)] - [\tilde{r}^{-1}(\infty)] = [r].$$

Este exemplo será oportunamente generalizado para  $X$  arbitrário: equivalência racional identifica fibras de morfismos a valores em  $\mathbb{P}^1$  (cf. 4.2 (3)).

### Exercícios

- 1) Prove que  $A_0 A^n = 0$  para  $n > 0$ .
- 2) (Propriedades da longura  $\ell_A(M)$ ). Seja  $M$  um  $A$ -módulo de tipo finito  $\neq 0$ . Seja  $P$  um elemento maximal na coleção dos anuladores  $\{ \text{an}(m) \mid m \in M - \{0\} \}$ . Prove que  $P$  é um ideal primo. Conclua por indução noetheriana que  $M$  possui uma série de composição,  $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \dots \supsetneq M_\ell = 0$  de submódulos com quocientes  $M_i/M_{i+1} \cong A/P_i$ ,  $P_i =$  ideal primo. Prove que  $M$  tem longura finita sse cada  $P_i$  que ocorre é máximo.
- 3) Sejam  $F, G$  curvas planas sem componente comum. (a) Mostre que (1.5)
 
$$i(P, F.G) = \ell_{0_{F,P}}(0_{F \cap G, P}).$$
 (b) Prove que  $i(P, F.GH) = i(P, F.G) + i(P, F.H)$ .
- (4) Seja  $Z$  uma componente irredutível de um esquema  $W$ . Sejam  $Z_1, \dots, Z_n$  subvariedades de  $W$  distintas de  $Z$ . Mostre que toda relação  $mZ + \sum m_i Z_i = 0$  em  $A_* W$  implica  $m=0$ .

§3 IMAGEM DIRETA

Se  $X$  é um subesquema fechado de um esquema  $Y$ , temos uma inclusão natural  $C_*X \subset C_*Y$  que preserva equivalência racional. Mais geralmente, dado um morfismo  $f: X \rightarrow Y$ , definiremos um homomorfismo  $f_*: C_*X \rightarrow C_*Y$ ; se  $f$  for um morfismo próprio, veremos que  $f_*(R_*X) \subset R_*Y$ , resultando um homomorfismo induzido  $A_*X \rightarrow A_*Y$

3.1 Definição. Seja  $f: V \rightarrow W$  um morfismo dominante de variedades irredutíveis. Definimos o grau de  $f$  como o inteiro

$$d^0 f = \begin{cases} 0 & \text{se } \dim V > \dim W \\ [R(V): R(W)] & \text{se } \dim V = \dim W. \end{cases}$$

Neste último caso,  $R(V)$  e  $R(W)$  são extensões finitamente geradas com o mesmo grau de transcendência sobre o corpo de base e portanto  $d^0 f$  é finito. O significado geométrico é o seguinte: existe um aberto denso  $U \subset W$  tal que a fibra  $f^{-1}(Q)$  consiste de  $d^0 f/i$  pontos distintos para cada  $Q \in U$ , onde  $i$  é o grau de inseparabilidade da extensão.

Seja agora  $p: X \rightarrow Y$  um morfismo próprio de esquemas; em particular, lembremos que  $p(V)$  é fechado em  $Y$  para cada  $V$  fechado em  $X$ . Seja  $V \subset X$  uma subvariedade (fechada, irredutível) e sejam  $W := p(V)$ ,  $f: V \rightarrow W$  induzido por  $p$ . Definimos

$$p_* V = d^0(f)W \text{ em } C_*Y$$

e estendemos por linearidade ao homomorfismo,

$$p_*: C_*X \longrightarrow C_*Y$$

chamado imagem direta.

3.1.1 Observações. (1)  $p_*$  preserva a graduação por dimensão:

$$p_*C_kX \subseteq C_kY \quad \forall k.$$

(2) Functorialidade: se  $q: Y \longrightarrow Z$  é outro morfismo próprio, temos  $(qp)_* = q_*p_*$  em virtude da multiplicatividade do grau de uma extensão finita de corpos.

3.2 Exemplos. (1) Se  $Y = \text{Sp}(K)$ , ( $K =$  corpo não necessariamente algebricamente fechado), então  $C_*Y = C_0Y \approx \mathbb{Z}$ . Se  $X$  é um esquema completo (i.e., próprio)/ $K$ , para cada ponto fechado  $P$  em  $X$  temos  $p_*(P) = [R(P):K]$ , grau da extensão do corpo residual de  $P$  sobre  $K$ . Evidentemente  $p_*C_kX = 0$  para  $k > 0$ .

(2) Seja  $p: X = \mathbb{P}_K^1 \longrightarrow Y = \text{Sp}(K)$  o morfismo estrutural. Seja  $r \in R(X)$  função racional. Então  $p_*[r] = 0$  em  $C_0Y$ . Com efeito, escreva  $X = \mathbb{A}_K^1 \cup \{\infty\}$  com  $\mathbb{A}_K^1 = \text{Sp}(K[t])$ . Temos assim  $r = f/g$ , com  $f, g$  polinômios primos relativos. Por aditividade, basta verificar que  $p_*[f] = 0$ . Pelo mesmo motivo, podemos supor  $f$  irredutível em  $K[t]$ . O esquema de zeros  $Z(f)$  é portanto uma subvariedade irredutível de  $\mathbb{A}_K^1$ , reduzida a um único ponto  $P$ , possivelmente não racional/ $K$ : temos  $R(P) = K[t]/(f)$ , extensão de  $K$  de grau  $d =$  grau do polinômio  $f$ . Calculamos

$$\text{ord}_Q(f) = \begin{cases} d & \text{para } Q=P \\ 0 & \text{para } Q \in \mathbb{A}_K^1 - \{P\}. \end{cases}$$

Por fim, no ponto  $\infty$ ,  $1/t$  é uniformizante local, seguindo-se

$$\text{ord}_{\infty}(f) = \text{ord}_{\infty}(t^d f'(1/t)) = -d,$$

onde  $f'(1/t) := t^{-d} f'(t)$  é um polinômio em  $1/t$  com termo constante  $\neq 0$ . Podemos concluir que

$$[r] = P - d\infty$$

donde

$$p_*[r] = p_* P - dp_*\infty = dY - dY = 0.$$

Nosso próximo objetivo é demonstrar que equivalência racional é preservada por imagens diretas de morfismos próprios quaisquer. Iniciamos por uma "redução ao caso normal".

**3.3 Lema.** Seja  $W$  uma variedade e seja  $n: V \rightarrow W$  a normalização de  $W$ . Então  $(R(V) = R(W) \text{ e})$  para cada  $r \in R(V)^*$ ,

$$(3.3.1) \quad n_*([r]_V) = [r]_W \text{ em } C_*W.$$

**Demonstração.** Lembremos que  $n$  é finita; em particular é própria. Seja  $T \subset W$  subvariedade de codim.1. Devemos mostrar que o coeficiente de  $T$  é o mesmo em ambos os membros de (3.3.1). Por um lado, dá  $\text{ord}_T^W(r)$ . Por outro, dá a soma das contribuições das subvariedades componentes  $T'$  de  $n^{-1}(T)$ . Assim devemos mostrar que,

$$(3.3.2) \quad \sum \text{ord}_{T'}(r) [R(T'): R(T)] = \text{ord}_T(r).$$

Seja  $A = \theta_{W,T}$  e seja  $B$  sua normalização em  $R(W)$ . Como  $B$  é finito sobre  $A$ , temos uma bijeção natural entre o conjunto das com-

ponentes  $T'$  de  $n^{-1}(T)$  e o conjunto dos ideais máximos de  $B$ . A igualdade requerida é consequência dos dois resultados seguintes. (Sem perda de generalidade, podemos supor  $r \in A$ ; tomar  $M = B/(r)$ ).

3.4 Lema. (1) Seja  $B$  um anel e seja  $M$  um  $B$ -módulo de longura finita. Então

$$\ell_B(M) = \sum_P \ell_{B_P}(M_P); \quad (P \in \text{Sp}(B))$$

(2) Se  $A \rightarrow B$  é um homomorfismo local então

$$\ell_A(M) = \ell_B(M) [R(B): R(A)] \quad (R(A) = \text{corpo residual}).$$

Demonstração. Como a longura é aditiva sobre sequências exatas, e sabendo-se que  $M$  admite uma série de composição,

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_\ell = 0$$

com quocientes  $M_i/M_{i+1} \cong B/P_i$  com  $P_i$  ideal maximal de  $B$ , podemos supor  $M = B/P$  com  $P$  maximal. Neste caso, ambas as fórmulas são triviais. (Para (2), observar que  $\ell_A(M) = \ell_{A/Q}(M)$  para todo ideal  $Q$  de  $A$  tal que  $QM=0$ ; tomar  $Q =$  ideal maximal de  $A$ ). //

3.5 Proposição. Seja  $p: V \rightarrow W$  morfismo próprio, sobrejetivo, de variedades da mesma dimensão. Seja  $r \in R(V)$ . Então temos

$$(3.5.1) \quad p_*[r] = [N(r)] \quad \text{em } C_*W,$$

onde  $N(r)$  denota a norma, i.e., o determinante do operador  $R(W)$ -linear de  $R(V)$  em  $R(V)$  definido por multiplicação por  $r$ .



Demonstração. Seja  $T \subset W$  subvariedade de codim.1. O cálculo da contribuição de  $T$  em ambos os membros da fórmula (3.5.1) é local, pois depende apenas dos graus  $[R(T'): R(T)]$  para  $T'$  componente de  $p^{-1}T$ . Podemos assim substituir  $W$  por qualquer aberto  $W_0$  não disjunto de  $T$ . Seja

$$F = \{w \in W \mid \dim p^{-1}(w) \geq 1\}.$$

Sabemos que  $F$  é fechado e é claro que  $T \not\subset F$  (e.g. pelo teorema da dimensão das fibras [Sh] p. 60). Seja  $W_0 = W - F$ . Segue-se que  $p^{-1}W_0 \rightarrow W_0$  tem fibras finitas e portanto é finito, pois  $p$  é próprio ([EGA<sub>3</sub>]4.4.2). Doravante, suporemos  $p$  finito. Sejam  $n_V: V' \rightarrow V$ ,  $n_W: W' \rightarrow W$  as normalizações de  $V, W$ . Existe um morfismo (e um sô) induzido por  $p$ , i.e., tornando comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{p'} & W' \\ n_V \downarrow & & \downarrow n_W \\ V & \xrightarrow{p} & W \end{array}$$

Em vista de (3.5) e de que  $p_* n_{V*} = n_{W*} p'_*$ , podemos supor também  $V, W$  normais.

Sejam  $A = \mathcal{O}_{W, T}$ ,  $B =$  normalização de  $A$  em  $R(V)$ . Sendo  $W$  normal,  $A$  é um anel de valorização discreta. Seja  $W^0$  aberto afim de  $W$  que encontra  $R$  e seja  $V^0 = p^{-1}(W^0)$ . Como  $p$  é finito,  $V^0$  é afim. Seja  $C$  o anel de coordenadas de  $V^0$ . Cada componente de  $p^{-1}(T)$  corresponde a um ideal primo de altura 1 de  $C$  de sorte que a interseção dos localizados de  $C$  nesses primos é igual à normalização  $B$  de  $A$  em  $R(V)$ . Podemos, por fim, supor  $r \in B$ . Agora

o coeficiente de  $T$  em  $p_*[r]$  vale

$$m = \sum_P \ell_{B_P} (B_P/rB_P) [R(P): R(T)],$$

soma sobre os ideais máximos de  $B$  (cada qual correspondendo a uma componente de  $p^{-1}(T)$ ). Aplicando o lema 3.4 (2) a  $M = B_P/rB_P$  obtemos

$$\begin{aligned} m &= \sum_P \ell_A (B_P/rB_P) \\ &= \ell_A (B/rB) \end{aligned}$$

a última igualdade decorrente da decomposição  $B/rB = \prod B_P/rB_P$  de um anel de Artin como produto de seus localizados. Resta provar o

**3.6 Lema.** Seja  $A$  um anel de valorização discreta. Seja  $B$  um  $A$ -módulo livre de tipo finito e seja  $r: B \rightarrow B$  um endomorfismo injetivo. Então  $B/rB$  tem longura finita  $/A$  e

$$\ell_A (B/rB) = \ell_A (A/\det(r)A).$$

Demonstração. Pelo teorema dos divisores elementares para módulos sobre DIP, existe uma base  $b_1, \dots, b_n$  de  $B$  sobre  $A$  e existem  $a_1, \dots, a_n \in A$  tais que  $a_1 b_1, \dots, a_n b_n$  é base de  $rB$ . Seja  $b'_i = r^{-1}(a_i b_i)$ . Segue-se que a matriz de  $r$  com respeito às bases  $\{b'_i\}, \{b_i\}$  é diag.  $(a_1, \dots, a_n)$ . Daí vem

$$B/rB \simeq \Pi A/a_i A$$

e portanto

$$\ell_A (B/rB) = \sum \ell_A (A/a_i A) = \ell_A (A/\Pi a_i A). \quad (2.2)$$

Finalmente,  $\det(r) = c \prod_i \lambda_i$  onde  $c$  é o determinante de uma matriz invertível sobre  $A$ , donde  $\det(r)A = \prod_i \lambda_i A$ . //

3.7 Proposição. Seja  $p: V \rightarrow W$  um morfismo próprio sobrejetivo de variedades. Suponha  $\dim V > \dim W$ . Então para cada  $r \in R(V)$  temos

$$p_*[r] = 0.$$

Demonstração. O resultado é trivial se  $\dim V > \dim W + 1$ . Suporemos então  $\dim V = \dim W + 1$ . Escrevamos  $L = R(W)$  e tomemos a fibra genérica  $V_L$  de  $p$ ,

$$\begin{array}{ccc} V \times_{\substack{W \\ \text{Sp}(L)}} & : & V_L \longrightarrow V \\ & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ & & \text{Sp}(L) \longrightarrow W. \end{array}$$

Observemos que  $V_L$  é uma curva completa / $L$  e que  $R(V_L) = R(V)$ . Além disso, existe uma bijeção  $T \leftrightarrow T_L$  entre as subvariedades de  $V$  de codim.1 tais que  $p(T) = W$  e os pontos fechados da curva  $V_L$ . Nesta bijeção, os anéis locais  $\mathcal{O}_{V,T}$  e  $\mathcal{O}_{V_L, T_L}$  são canonicamente isomorfos, idem para os corpos  $R(T)$  e  $R(T_L)$ . Para entender esta afirmação, reportemo-nos à construção do produto fibrado. Tomamos abertos afins  $\text{Sp}(B) \subset V$ ,  $\text{Sp}(A) \subset W$  que se correspondem por  $p$ . Segue-se que  $\text{Sp}(B \otimes_A L)$  é aberto afim de  $V_L$ . Eis o diagrama induzido entre os anéis:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \longrightarrow & \text{B}\mathcal{O}_A \subset R(W) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 A & \hookrightarrow & L.
 \end{array}$$

Aqui,  $\text{B}\mathcal{O}_A$  é simplesmente o anel de frações de  $B$  com respeito ao sistema multiplicativo  $S = A - \{0\}$ . Logo, o corpo de frações de  $\text{B}\mathcal{O}_A$  é  $R(W) = R(V_L)$ , cujo grau de transcendência sobre  $L$  é 1 ( $= \dim V - \dim W$ ). Note ainda que os ideais primos de  $\text{B}\mathcal{O}_A$  são todos da forma  $S^{-1}P$  onde  $P \subset B$  é primo tal que  $P \cap A = \{0\}$ . Não é difícil ver que  $B_P$  é canonicamente isomorfo a  $(S^{-1}B)_{S^{-1}P}$ , seguindo-se as identificações  $\mathcal{O}_{V,T} \simeq \mathcal{O}_{V_L, T_L}$ ,  $R(T) \simeq R(T_L)$ .

Ora, para o cálculo de  $p_*[r]$  intervêm apenas as subvariedades  $T$  de codim.1 em  $V$  tais que  $p(T) = W$ . Pelo exposto acima, podemos substituir  $V \rightarrow W$  por  $V_L \rightarrow \text{Sp}(L)$  e portanto, supor  $V$  uma curva completa sobre  $W = \text{Sp}(L)$ . Passando à normalização de  $V$ , podemos mesmo supor  $V$  normal. Neste caso, tomamos um morfismo finito  $f: V \rightarrow \mathbb{P}_L^1$  (escolhendo uma função racional não constante em  $V$ ). Temos um diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}_L^1 \\
 P \searrow & & \swarrow g \\
 & W &
 \end{array}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
 p_*[r] &= g_* f_*[r] \\
 &= g_*[N(r)] \quad (\text{por 3.5}) \\
 &= 0 \quad (\text{por 3.2(2)}).
 \end{aligned}$$

//

3.7.1 Observação. O recurso de passagem à normalização da curva  $V$  no final da demonstração acima pode ser substituído tomando  $f$  como o morfismo induzido por uma projeção. Naturalmente há que se usar o fato de que  $V$  é projetiva.

3.8 Teorema. Seja  $p: X \rightarrow Y$  um morfismo próprio. Então o homomorfismo imagem direta  $p_*: C_*X \rightarrow C_*Y$  preserva equivalência racional, i.e., temos

$$p_*R_*X \subset R_*Y.$$

Demonstração. Como  $R_*X$  é gerado pelos ciclos associados a funções racionais de subvariedades de  $X$ , o resultado segue de (3.5) e (3.7). //

3.9 Definição. Seja  $p: X \rightarrow Y$  um morfismo próprio. O homomorfismo imagem direta induz um homomorfismo de grupos quocientes, denotado pelo mesmo símbolo,

$$p_*: A_kX \rightarrow A_kY, \quad k=0,1,\dots$$

Se  $Y = \text{Sp}(K)$ , identificamos  $A_*Y = \mathbb{Z}$ . Neste caso, o homomorfismo  $p_*: A_*X \rightarrow \mathbb{Z}$  é também denotado por  $\int$  ou  $\int_X$ . Explicitamente, para cada ciclo  $z$  em  $A_*X$  temos

$$3.9.1 \quad \int z = \sum_i [R(P_i):K]$$

onde  $\sum_i P_i$  é a componente homogênea de dim. zero em  $z$ , i.e., os  $P_i$  denotam pontos (fechados) de  $X$ . O inteiro  $\int z$  é chamado o grau do ciclo  $z$ . Por definição, o grau de um ciclo é o mesmo que

o de sua parte homogênea de dimensão zero.

3.9.2 Observação importante. Se  $p: X \rightarrow Y$  é um morfismo de esquemas completos (i.e. próprios) sobre  $K$ , temos então

$$\int_X z = \int_Y p_* z$$

para cada  $z \in A_* X$ . Trata-se de um caso particular de (3.1.1).

3.10 Proposição. (Teorema de Bézout para curvas planas projetivas).

Sejam  $F, G$  curvas planas projetivas sem componentes em comum. Então (cf. (1.5)),

$$\sum_P i(P, F.G) = d^0 F \cdot d^0 G.$$

Demonstração. Seja  $m=d^0 F$  o grau de  $F$ . Seja  $L$  uma forma linear que não divide  $G$ . Podemos supor  $G$  irredutível. Seja  $r = F/L^m \in R(G)$ . Temos

$$(*) \quad 0 = \int_G [r] = \sum_P (i(P, F.G) - m i(P, L.G)).$$

A 1ª igualdade é imediata (e.g.,  $[r]=0$  em  $A_* G \dots$ ). A 2ª segue do cálculo explícito do ciclo

$$[r] = \sum \text{ord}_P^G(r) P.$$

Para isto, tomemos uma forma linear  $H$  não nula em  $P$  e escrevemos

$$r = (F/H^m) / (L/H)^m.$$

Por aditividade, vem

$$\text{ord}_P^G(r) = \text{ord}_P^G(F/H^m) - m \text{ord}_P^G(L/H).$$

Agora é imediato que

$$\text{ord}_P^G(F/H^m) = i(P, F.G).$$

Pelo mesmo argumento, obtemos

$$\Sigma i(P, L.G) = n \Sigma i(P, L.L') = n$$

onde  $n=d^0_G$  e  $L'$  é uma forma linear prima com  $L$ . Substituindo em (\*), a demonstração está completa. //

3.10.1 Observação. O argumento dado acima captura o espírito da demonstração clássica que consiste em deformar cada curva numa união de retas em posição geral.

### Exercícios

- 1) Seja  $X$  um esquema completo de  $\dim.>0$ . Prove que  $A_*X$  contém um somando direto isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .
- 2) Seja  $X$  uma curva racional completa. Verifique se  $A_0X = \mathbb{Z}$ . Generalize.

§4 IMAGEM INVERSA

Seja  $f: X \rightarrow Y$  um morfismo. Com condições convenientes sobre  $f$ , construiremos um homomorfismo  $C_*Y \rightarrow C_*X$  induzido pela imagem inversa de subvariedades, compatível com equivalência racional. Examinamos também a relação com as imagens diretas próprias.

4.1 Definição. Seja  $V \subset Y$  subvariedade. Definimos o ciclo imagem inversa de  $V$  por  $f$  pela fórmula

$$f^*V = [f^{-1}V],$$

o 2º membro denotando o ciclo associado ao subesquema fechado  $f^{-1}V \subset X$ . Estendemos por linearidade a um homomorfismo

$$f^*: C_*Y \rightarrow C_*X.$$

4.2 Exemplos. (1) Seja  $i: U \hookrightarrow X$  a inclusão de um aberto de um esquema  $X$ . Para cada subvariedade  $V$  de  $X$ , temos  $i^*V = U \cap V$ . Note mos também que se  $r \in R(V)^*$ , então  $i^*[r] = [r]_{U \cap V}$  uma vez que  $R(V) = R(U \cap V)$  para  $U \cap V \neq \emptyset$ . Logo,  $i^*(R_*X)$  está contido em  $R_*U$ . Obtemos assim um homomorfismo induzido  $A_*X \rightarrow A_*U$  que é homogêneo de grau zero. (cf. (4.7) para generalização).

(2) Sejam  $X, Y$  variedades sobre um corpo algebricamente fechado. Então  $X \times Y$  é uma variedade. Seja  $p: X \times Y \rightarrow Y$  a projeção. Para cada subvariedade  $V \subset Y$  temos  $p^*V = X \times V$ . Se  $r \in R(Y)^*$  e  $p^*r$  denota sua imagem em  $R(X \times Y)$ , é fácil ver que os ciclos  $p^*[r]$  e  $[p^*r]$  são iguais. Segue-se que  $p^*$  induz um homomorfismo  $A_k Y \rightarrow A_{k+n}(X \times Y)$ , onde  $n = \dim X$ .



(3) Seja  $X$  uma variedade e seja  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  um morfismo dominante. Podemos também considerar  $f$  como elemento do corpo  $R(X)$  e calcular o ciclo associado. Temos então:

$$[f] = [f^{-1}(0)] - [f^{-1}(\infty)],$$

onde  $0 = (0:1)$  e  $\infty = (1:0)$ . Para verificar a fórmula, seja  $V$  subvariedade de  $X$  de codim.1 e seja  $A = \mathcal{O}_{X,V}$ . Observemos que  $f^{-1}(0)$  e  $f^{-1}(\infty)$  são disjuntos e que  $f$  (resp.  $1/f$ ) é regular em  $X_0 := X - f^{-1}(\infty)$  (resp.  $X - f^{-1}(0)$ ). Logo, se  $V \not\subset f^{-1}(\infty)$  então  $f \in A$ . Seja  $B = A/fA$ . Então  $B = \mathcal{O}_{f^{-1}(0),V}$  e evidentemente temos

$$\ell_B(B) = \ell_A(B) = \text{ord}_V(f).$$

Procedendo de maneira análoga quando  $V \not\subset f^{-1}(0)$ , concluímos que o coeficiente de  $V$  no ciclo  $[f]$  é o mesmo que em  $[f^{-1}(0)] - [f^{-1}(\infty)]$ .

(4) Seja  $Y$  a curva  $y^2 = x^3$  e seja  $f: \mathbb{A}^1 \rightarrow Y$  a parametrização  $f(t) = (t^2, t^3)$ . Sejam  $\bar{x}, \bar{y}$  as restrições das funções coordenadas a  $Y$ . Temos  $f^*\bar{x} = t^2$ ,  $f^*\bar{y} = t^3$ . Note que o ciclo da função  $\bar{y}$  é  $3Q$ ,  $Q = (0,0)$ . Mas  $f^*Q = 2P$ ,  $P = 0 \in \mathbb{A}^1$ . Logo, neste caso, temos

$$f^*[\bar{y}] = 3f^*Q = 6P \neq 3P = [t^3] = [f^*\bar{y}].$$

Este mesmo exemplo também mostra que  $(gf)^*$  e  $f^*g^*$  não coincidem para morfismos arbitrários  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ . Veremos que uma condição adequada para garantir propriedades agradáveis é a de platitude. Recordemos a seguinte

4.3 Definição. Um morfismo  $f: X \rightarrow Y$  é plano se para todo par de

abertos afins  $X_0 \subset X$ ,  $Y_0 \subset Y$  tais que  $f(X_0) \subset Y_0$  o homomorfismo de anéis de coordenadas

$$f^*: \mathcal{O}(Y_0) \longrightarrow \mathcal{O}(X_0)$$

é plano, i.e.,  $\mathcal{O}(X_0)$  é um  $\mathcal{O}(Y_0)$ -módulo plano. Equivalentemente, para toda subvariedade  $V$  de  $Y$ , se  $W = \overline{f(V)}$  então  $\mathcal{O}_{X,V}$  é plano sobre  $\mathcal{O}_{Y,W}$ .

Dizemos que  $f: X \longrightarrow Y$  é de dimensão relativa  $n$  se para toda subvariedade  $W$  de  $Y$ , toda componente  $V$  de  $f^{-1}(W)$  satisfaz a seguinte condição:

$$\dim V = n + \dim W.$$

**4.4 Proposição.** Seja  $f: X \longrightarrow Y$  um morfismo plano de dim. rel.  $n$ . Então, para cada subesquema fechado  $Z \subset Y$  de dim. pura  $k$ , temos

$$f^*[Z] = [f^{-1}Z] \text{ em } C_{k+n}X.$$

Demonstração. Substituindo  $X$  por  $X \times_Y Z$  (que é um subesquema fechado de  $X$ ) podemos supor  $Z=Y$ . Seja  $V$  uma componente de  $X$  e seja  $W = \overline{f(V)}$ . Ponha  $A = \mathcal{O}_{Y,W}$ ,  $B = \mathcal{O}_{X,V}$ . Temos que  $B$  é artiniano e é plano/A. Afirmamos que  $A$  também é artiniano e (consequentemente)  $W$  é componente de  $Y$ . Com efeito, sendo  $A$  local,  $B$  é de fato fielmente plano sobre  $A$ . Portanto, dada uma cadeia de ideais,

$$(*) \quad A = A_0 \supsetneq \dots \supsetneq A_\ell,$$

segue-se que a cadeia

$$(**) \quad B = A_0 \otimes_A B \supsetneq \dots \supsetneq A_\ell \otimes_A B$$

tem comprimento  $\ell$ , donde  $\ell$  é limitada por  $\ell_B(B)$ . Supondo em (\*) que  $\ell = \ell_A(A)$ , temos  $A_i/A_{i+1} \simeq R(A)$ , corpo residual de  $A$ . Segue de (\*\*) que

$$\ell_B(B) = \sum_0^{\ell-1} \ell_B((A_i/A_{i+1}) \otimes_B B) = \ell_A(A) \ell_B(R(A) \otimes_B B).$$

Esta última fórmula mostra que o coeficiente  $\ell_B(B)$  de  $V$  no ciclo  $[X]$  é igual a  $\ell_A(A)$  vezes o coeficiente  $\ell_B(R(A) \otimes_B B)$  de  $V$  em  $[f^{-1}W]$ , como queríamos. //

**4.5 Corolário.** Sejam  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  morfismos planos de dim. relativas  $m, n$ . Então temos

$$(gf)^* = f^*g^*: C_k Z \rightarrow C_k X, \quad k' = k+m+n, \quad \forall k.$$

Demonstração. Seja  $V$  subvariedade de  $Z$ . Temos

$$\begin{aligned} (gf)^*V &= [(gf)^{-1}(V)] \quad (\text{por def.}) \\ &= [f^{-1}(g^{-1}(V))] \\ &= f^*[g^{-1}(V)] \quad (4.4) \\ &= f^*g^*V. \end{aligned}$$

**4.6 Proposição.** (Compatibilidade com imagens diretas próprias). Considere o diagrama cartesiano,

$$(4.6.1) \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

com  $f$  plano de dim. rel.  $n$  e  $g$  próprio. Então  $f'$  (resp.  $g'$ ) é

plano (resp. próprio) e

$$g_* f'^* = f_* g_*: C_k Y' \longrightarrow C_{k+n} X.$$

Demonstração. Bastando verificar a fórmula para subvariedades de  $Y'$ , podemos supor  $Y'$  uma variedade, e  $Y = g(Y')$  com a mesma dimensão. Reduzimo-nos a mostrar:

$$(*) \quad g_*[X'] = d[X]$$

onde  $d = d^0 g$  (3.1). Seja  $V$  uma componente de  $X$  e sejam  $V'_1, \dots, V'_m$  as componentes de  $X'$  que dominam  $V$ . Escrevamos  $B = \mathcal{O}_{X,V}$ ,  $B'_i = \mathcal{O}_{X',V'_i}$ . Devemos provar que

$$\sum \ell_{B'_i} (B'_i) [R(B'_i): R(B)] = d \ell_B(B)$$

já que o 1º membro é o coeficiente  $V$  no 1º membro em (\*), idem para os 2ºs. Para este cálculo, podemos substituir  $X$  por qualquer aberto não disjunto de  $V$ ; em particular, podemos supor  $X$  irredutível (não nec. reduzido). Pelo argumento inicial da prova de (4.4), segue-se que  $\overline{f(X)} = Y$ . Assim, nenhuma informação é perdida se substituirmos  $Y$  por um aberto, e.g., sobre o qual  $g$  (que é genericamente finito) é finito e plano. Podemos então supor  $Y = \text{Sp}(A)$ ,  $Y' = \text{Sp}(A')$ , com  $A'$  um  $A$ -módulo livre de posto  $d$ . O diagrama (4.6.1) traduz-se agora no diagrama de anéis,

$$\begin{array}{ccc}
 B' := B \otimes A' & \longleftarrow & A' \\
 \uparrow A & & \uparrow \\
 B & \longleftarrow & A.
 \end{array}$$

Por construção,  $B'$  é um  $B$ -módulo livre de posto  $d$  e seus ideais primos  $P_1, \dots, P_m$  correspondem às componentes  $V_1, \dots, V_m$ , com  $B'_i = B_{P_i}$ . Agora podemos calcular,

$$\begin{aligned} \ell_B(B') &= d\ell_B(B) && \text{(pois } B' \simeq B^d) \\ &= \sum \ell_B(B'_i) && (B' = \Pi B'_i) \\ &= \sum \ell_{B'_i}(B'_i)[R(B'_i): R(B)] && (3.4(2)), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. //

4.7 Proposição. (Compatibilidade com equivalência racional). Seja  $f: X \rightarrow Y$  um morfismo plano de dim. rel.  $n$ . Então

$$f^*R_*Y \subset R_*X,$$

resultando homomorfismos induzidos

$$f^* A_k Y \rightarrow A_{k+n} X, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Sejam  $V$  subvariedade de  $Y$  e  $r \in R(V)$  não constante. Devemos mostrar que  $f^*[r] \in R_*X$ . Por (4.6) (com  $g =$  inclusão  $V \hookrightarrow Y$ ), podemos supor  $Y=V$ . Seja  $Y' \subset Y \times \mathbb{P}^1$  o fecho do gráfico da função racional  $r: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Construímos o diagrama de produto fibrado,

$$\begin{array}{ccccc} X \times_Y Y' & = & Z & \xrightarrow{f'} & Y' & \subset & Y \times \mathbb{P}^1 \\ & & g' \downarrow & & \downarrow g & \searrow p & \\ & & X & \xrightarrow{f} & Y & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

onde  $p, g$  são induzidas pelas projeções. Observemos que  $g$  é próprio e birracional e que  $p$  é plano. Calculamos

$$\begin{aligned}
 f^*[r] &= f^* g_*[r] && \text{(por 3.5)} \\
 &= f^* g_*(p^*0 - p^*\infty) && (4.2(3)) \\
 &= g'_* f'^*(p^*0 - p^*\infty) && (4.6) \\
 &= g'_*(pf')^*(0 - \infty).
 \end{aligned}$$

Agora, se  $Z$  fosse uma variedade, uma segunda aplicação de 4.2(3) completaria o argumento, pois sabemos que a imagem direta própria  $g'_*$  preserva equivalência racional (3.8). Como em geral pode não ser este o caso, embora certamente  $Z$  seja de dimensão pura (por conta das hipóteses sobre  $f$  e  $Y'$ ) recorreremos à seguinte

4.7.1 Afirmção. Se  $[Z] = \sum m_i Z_i$ , onde os  $Z_i$  denotam as componentes irredutíveis de  $Z$ , e se  $h := pf'$ ,  $h_i := h|_{Z_i}$ , então

$$[h^{-1}(P)] = \sum m_i [h_i^{-1}(P)] \quad \forall P \in \mathbb{P}^1.$$

Aplicando esta última fórmula a  $P=0$  e  $P=\infty$ , concluímos facilmente que  $g'_*h^*(0-\infty)$  pertence a  $R_*X$  completando a demonstração de (4.7).

Para demonstrar (4.7.1), calculemos o coeficiente com que uma subvariedade  $V$  de  $Z$  de codim.1 ocorre em cada membro da fórmula. Ponhamos  $A=O_{Z,V}$ . Cada componente  $Z_i$  corresponde a um ideal primo mínimo  $P_i \subset A$ . Se  $t$  é uniformizante local de  $P$  em  $\mathbb{P}^1$ , temos que  $a := h^*t$  é uma equação local para  $h^{-1}(P)$ . Evidentemente podemos supor  $V \subset h^{-1}(P)$ . O coeficiente de  $V$  no 1º membro é  $\ell_A(A/(a))$ ; no 2º é  $\sum m_i \ell_{A/P_i}(A/P_i + (a))$ . A igualdade requerida é o conteúdo do resultado seguinte (fazendo  $M=A$  em (3) e notando

que, aqui,  ${}_aM=0$ ):

4.8 Lema. Seja  $A$  um anel de dim.1. Sejam  $P_1, \dots, P_s$  os ideais primos m\u00ednimos de  $A$ . Seja  $a \in A$  n\u00e3o divisor de zero. Para cada  $A$ -m\u00f3dulo  $M$  de tipo finito, sejam

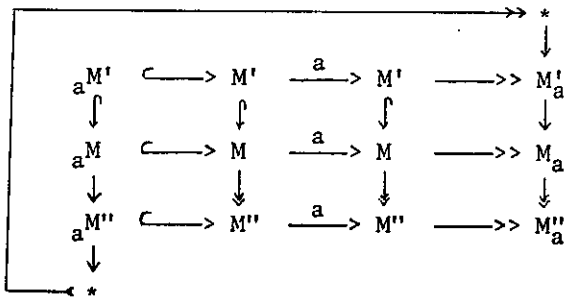
$${}_aM = \{x \in M \mid ax=0\}, M_a = M/aM.$$

Ent\u00e3o temos:

- (1)  ${}_aM$  e  $M_a$  s\u00e3o de longura finita;
- (2)  $e(a, M) := \ell_A(M_a) - \ell_A({}_aM)$  \u00e9 aditiva sobre sequ\u00eancias exatas;
- (3)  $e(a, M) = \sum \ell_{A/P_i}(M_{P_i}) - \ell_{A/P_i}(A/P_i + (a))$ .

Demonstra\u00e7\u00e3o. (1) Ambos os m\u00f3dulos s\u00e3o anulados por  $a$ , logo s\u00e3o de fato m\u00f3dulos sobre o anel artiniano  $A/(a)$ , verificando a afirma\u00e7\u00e3o.

(2) A aditividade de  $e(a, M)$  segue do diagrama da serpente,



(3) Como ambos os membros s\u00e3o aditivos, podemos recorrer a uma s\u00e9rie de composi\u00e7\u00e3o  $M = M_0 \supset \dots \supset M_n = 0$  e substituir  $M$  por  $A/P$ ,

onde  $P=P_i$  ou  $P$  é maximal. No 1º caso ( $P=P_i$  mínimo),  $M=A/P_i$ , temos  $M_a=0$  e  $M_a=A/P_+(a)$ . No 2º caso,  $M=A/P$  com  $P$  máximo, temos  $M_{P_i}=0$  e  $e(a,M)=0$ . //

### Exercícios

1) Dê exemplo de morfismos  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  com

$$(gf)^* \neq f^* g^*: A_*Z \rightarrow A_*X.$$

2) Estude (4.7.1) para  $Z = \text{Sp}(k[x,y,z]/(zx,zy))$  e  $h=x-z$ ,  $P=0 \in A^1$ .

3) Explícite como a hipótese de dimensão pura intervem em (4.7.1).

4) Sejam  $X, Y$  esquemas completos (= próprios /  $\text{Sp}(K)$ ) de dimensões puras. Sejam  $p, q$  as projeções de  $X \times Y$  sobre  $X, Y$  resp. Seja  $x \in A_0 X$  zero ciclo. Mostre que  $q_* p^* x = m[Y]$  onde  $m = \int x$ .

5) Sejam  $X, Y$  esquemas,  $V \subset X$ ,  $W \subset Y$  subvariedades. Defina o produto exterior,

$$\begin{aligned} C_r X \otimes C_s Y &\longrightarrow C_{r+s} X \times Y \\ x \otimes y &\longmapsto x \times y \end{aligned}$$

enviando geradores  $[V] \otimes [W]$  em  $[V \times W]$ .

(i) Prove que se  $x \in R_r X$  então  $x \times y \in R_{r+s} X \times Y \quad \forall y \in C_s Y$

(ii) Sejam  $f: X \rightarrow X'$ ,  $g: Y \rightarrow Y'$  morfismos e seja

$$f \times g: X \times Y \longrightarrow X' \times Y'$$



o morfismo induzido. Se  $f, g$  são próprios (resp. planos de dim. relativos  $m, n$ ) então  $f \times g$  é próprio (resp. plano de dim. rel.  $m+n$ ) e vale

$$(f \times g)_*(x \times y) = f_*(x) \times g_*(y) \quad \text{para ciclos } x, y \text{ em } X, Y$$

$$(\text{resp. } (f \times g)^*(x' \times y') = f^*x' \times g^*y' \quad \text{para ciclos } x', y' \text{ em } X', Y').$$

(iii) Mostre que o produto exterior induz homomorfismo (com a mesma denominação),

$$A_*X \otimes A_*Y \longrightarrow A_*(X \times Y)$$

satisfazendo fórmulas como em (ii).

(iv) Demonstre a associatividade do produto exterior,

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z.$$

6) Sejam  $X, Y$  esquemas e seja  $p: X \times Y \longrightarrow X$  a projeção. Se  $Y$  é completo, mostre que

$$p_*(x \times y) = (fy)x \quad \text{para } x \in A_*X \quad y \in A_*Y.$$

§5 A SEQUÊNCIA DE EXCISÃO

5.1 Proposição. Sejam  $i: Z \hookrightarrow X$ ,  $j: U := X-Z \hookrightarrow X$  as inclusões de um subesquema fechado  $Z$  e de seu complemento. Temos então o seguinte diagrama comutativo de seqüências exatas,

$$\begin{array}{ccccc} C_*Z & \xrightarrow{i_*} & C_*X & \xrightarrow{j_*} & C_*U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_*Z & \xrightarrow{i_*} & A_*X & \xrightarrow{j_*} & A_*U \end{array}$$

Demonstração. É imediato que a seqüência superior é exata. Seja agora  $c \in C_*X$  um ciclo tal que  $j_*c \in R_*U$ , digamos

$$j_*c = \sum m_i [r_i]$$

onde  $r_i \in R(V_i)$  para alguma subvariedade  $V_i$  de  $U$ . Seja  $W_i$  o fecho de  $V_i$  em  $X$ . Lembrando que  $R(V_i) = R(W_i)$ , é fácil ver que

$$c = \sum m_i [r_i]_{W_i} + i_*z$$

para algum  $z \in C_*Z$ . Concluimos assim que  $c = i_*z$  em  $A_*X$ . //

Já estamos em condições de calcular alguns grupos de Chow.

5.2 Lema. Seja  $X$  um esquema e seja  $p: X \times \mathbb{A}^n \rightarrow X$  a projeção. Então

$$p^*: A_*X \longrightarrow A_*X \times \mathbb{A}^n$$

é sobrejetivo. (Veremos adiante que é de fato um isomorfismo (10.2))

Demonstração. Podemos evidentemente supor  $n=1$ . Seja  $V \subset X \times \mathbb{A}^1$  sub-variedade. Queremos exibir  $c \in A_* X$  tal que  $p^*c = [V]$ . Substituindo  $X$  pelo fecho de  $p(V)$  podemos supor  $X$  irredutível e  $p|_V$  dominante. Nesta situação, seja  $U$  um aberto afim de  $X$  com anel de coordenadas  $A$ . Afirmamos que, passando a um sub-aberto se necessário, o ideal  $P$  de  $V$  em  $A[T]$  é principal. Com efeito, seja  $K$  o corpo de frações de  $A$  e sejam  $f, f_1, \dots, f_m \in P$  tais que  $P = (f_1, \dots, f_m)$  e  $P \cap K[T] = (f)$ . Escreva  $f_i = g_i f$  e seja  $a \in A$  um denominador comum para os coeficientes dos  $g_i$ 's. É claro então que, trocando  $A$  por  $A[1/a]$ , construímos o aberto afim requerido. Sejam  $i: Z := X - U \hookrightarrow X$  e  $i': Z \times \mathbb{A}^1 \hookrightarrow X \times \mathbb{A}^1$  as imersões fechadas. Por construção temos  $[V \cap U \times \mathbb{A}^1] = [f] = 0$  em  $A_* U \times \mathbb{A}^1$ . Por (5.1) vem que  $V = i'_* z$  para algum  $z \in A_* Z \times \mathbb{A}^1$ . Por indução sobre  $\dim X$ , temos  $z = q_* x$  para algum  $x \in A_* Z$  onde  $q := p|_Z: Z \times \mathbb{A}^1 \rightarrow Z$ . Por fim, temos

$$V = i'_* q_* x = p_* i_* x \quad (\text{por 4.6})$$

como queríamos. //

5.3 Proposição. (1)  $A_i \mathbb{A}^n = 0$  para  $i \neq n$  e  $A_n \mathbb{A}^n = \mathbb{Z}$ .

(2)  $A_i \mathbb{P}^n = \mathbb{Z} \cdot [\mathbb{P}^i]$ , o grupo livre gerado pela classe de um sub-espaço  $\mathbb{P}^i \subset \mathbb{P}^n$  para  $0 \leq i \leq n$ .

Demonstração. (1) Já sabemos que  $A_n \mathbb{A}^n = \mathbb{Z} \cdot [\mathbb{A}^n]$  e que  $A_{n-1} \mathbb{A}^n = 0$ . Pelo lema,  $p^*: A_{i-n+1} \mathbb{A}^1 \rightarrow A_i \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{n-1}$  é sobrejetor, seguindo-se o enunciado.

(2) Escrevamos a sequência exata,

$$A_i \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow A_i \mathbb{P}^n \longrightarrow A_i \mathbb{A}^n.$$

Por indução e por (1), segue-se  $A_i \mathbb{P}^n = \mathbb{Z} \cdot [\mathbb{P}^i]$ . Resta ver que este grupo é livre, fato já obtido para  $i=n, n-1$  (2.6). Suponha  $m[\mathbb{P}^i]=0$ ; sejam  $V_1, \dots, V_s$  subvariedades de  $\mathbb{P}^n$  de dimensão  $i+1$  e sejam  $r_j \in R(V_j)$  tais que

$$m[\mathbb{P}^i] = \sum [r_j] \text{ em } C_i Z$$

onde  $Z := \bigcup V_j$ . Existe uma aplicação finita  $p: Z \rightarrow \mathbb{P}^{i+1}$  (e.g. induzido por projeção linear). Obtemos

$$mp_*[\mathbb{P}^i] = 0 \text{ em } A_i \mathbb{P}^{i+1},$$

que é livre de torção. Logo  $m=0$ , como queríamos. //

5.4 Definição. Seja  $z = \sum_0^k m_i [\mathbb{P}^i]$  um ciclo em  $\mathbb{P}^n$ . Se  $m_k \neq 0$  definimos o grau de  $z$  pela fórmula

$$d^0 z = m_k.$$

Se  $X$  é um subsquema de  $\mathbb{P}^n$  de  $\dim.k$  e  $[X]=z$  em  $A_* \mathbb{P}^n$ , definimos o grau de  $X$  como

$$d^0 X = d^0 z = m_k.$$

5.4.1 Observação. Veremos em (8.7) que  $d^0 X$  é o grau do zero ciclo da interseção de  $X$  com um subespaço genérico de  $\text{codim}.k$ .

Exercícios

- 1) Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  a hipersuperfície definida por um polinômio homogêneo de grau  $d$ . Prove que  $d^0X = d$ .
- 2) Calcule  $A_*\mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^n$  e  $A_*\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ .
- 3) Calcule  $A_*U$ ,  $U =$  complementar de um ponto em  $\mathbb{P}^2$ .
- 4) Seja  $p: X \rightarrow \mathbb{P}^2$  a explosão de  $\mathbb{P}^2$  em um ponto  $0$ . Prove que  $p_*: A_*X \rightarrow A_*\mathbb{P}^2$  é sobrejetor, com núcleo o subgrupo de  $A_1X$  gerado pela classe do divisor excepcional  $p^{-1}0$ .
- 5) Seja  $X$  a grassmanniana de retas em  $\mathbb{P}^3$ . podemos identificar  $X$  a uma hipersuperfície quádrlica  $X \subset \mathbb{P}^5$  dada pela relação de Plücker,

$$P_{12} P_{34} + P_{13} P_{24} + P_{14} P_{23} = 0.$$

(cf. Shafarevich [Sh] p. 62). Fixe  $\ell_0 \in X$  e seja

$$Z = \{\ell \in X \mid \ell \cap \ell_0 \neq \emptyset\}$$

- (i) Mostre que  $X - Z \simeq \mathbb{A}^4$ . Conclua que  $A_3X$  é livre, gerado por  $[Z]$ .
- (ii) Mostre que  $Z - \{\ell_0\} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$  e deduza que  $A_2X$  é livre de posto 2, gerado pelas classes de  $\{\ell \in X \mid \ell$  está contido num plano dado $\}$  e de  $\{\ell \in X \mid \ell$  contém um ponto dado $\}$ .
- (iii) Mostre que  $A_1X$  é cíclico infinito gerado pela classe de um ponto para  $i=0$  e pela classe de  $\{\ell \mid \ell$  está contido num plano dado e passa por um ponto dado nesse plano $\}$  para  $i=1$ .

§6 A 1ª CLASSE DE CHERN

Vamos iniciar o programa de construir um produto de ciclos. Nesta 1ª etapa, um dos ciclos será tomado em codim.1. Definiremos a 1ª classe de Chern de um fibrado em retas como um operador que associa a cada ciclo uma classe no grupo de Chow. O significado geométrico é o de se tomar interseção de um ciclo por uma hipersuperfície, ou melhor, por um divisor de Cartier. Recordemos os conceitos pertinentes. O leitor já familiarizado com as noções de fibrado vetorial e divisor de Cartier pode passar diretamente a (6.12).

6.1 Definições. Seja  $X$  um esquema. Um divisor de Cartier  $D$  em  $X$  é dado por uma cobertura aberta afim  $\{U_i\}$  de  $X$  juntamente com um elemento invertível  $f_i$  no anel total de frações  $R(U_i)$  do anel de coordenadas  $\mathcal{O}_X(U_i)$  tal que  $f_i f_j^{-1}$  é invertível em  $\mathcal{O}_X(U_{ij})$ , com  $U_{ij} = U_i \cap U_j \forall i, j$ . Cada  $f_i$  é dito uma equação local de  $D$  em  $U_i$ .

Os dados  $(\{U_i\}, f_i)$ ,  $(\{U'_\alpha\}, g_\alpha)$  determinam o mesmo divisor de Cartier se existir um refinamento comum  $\{U''_\lambda\}$  tal que

$$6.1.1 \quad (f_i|_{U''_\lambda}) (g_\alpha|_{U''_\lambda})^{-1} \text{ seja invertível em } \mathcal{O}_X(U''_\lambda)$$

para todo  $i = i(\lambda)$ ,  $\alpha = \alpha(\lambda)$ .

6.1.2 O suporte  $|D|$  de  $D$  é o subconjunto de  $X$  formado pelos pontos  $x$  tais que, se  $x \in U_i$  e  $f_i = a_i/b_i$  com  $a_i, b_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ , então  $a_i(x) \cdot b_i(x) = 0$ . (Cf. Ex. 6-1).

6.1.3 Defina-se a soma de dois divisores de Cartier (dados numa mesma cobertura) multiplicando-se as equações locais. Assim resulta uma estrutura de grupo abeliano no conjunto  $\text{Div } X$  dos divisores de Cartier em  $X$ , como é fácil de verificar.

Um divisor de Cartier é dito efetivo se admitir uma representação com equações locais regulares (i.e.,  $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ ). É o mesmo que um subesquema localmente definido por um não divisor de zero.

$D = (\{U_i\}, f_i)$  é dito principal se  $f_i = f_j$  em  $U_{ij} \forall i, j$ . Em outras palavras, as equações locais são compatíveis e fornecem uma seção global  $f$  do feixe  $R_X^*$  dos elementos invertíveis do anel total de frações de  $\mathcal{O}_X$ , de sorte que  $D = (\{X\}, f)$ .

6.1.4 A imagem inversa  $f^*D$  de um divisor de Cartier  $D$  em  $X$  por um morfismo  $f: X' \rightarrow X$  se define de forma natural se  $X, X'$  são variedades e  $f$  é dominante: aplicar  $f^*: R(X) \rightarrow R(X')$  às equações locais. Outras duas situações em que  $f^*D$  é bem definido são as seguintes: quando  $f$  é plano ou quando  $f$  é a inclusão de uma subvariedade não contida no suporte de  $D$ . (Cf. Ex. 6-2).

6.2 Exemplos. (1) Seja  $X = \mathbb{P}^n$  e seja  $F(x_0, \dots, x_n)$  um polinômio homogêneo de grau  $m$ . Seja  $U_i$  o aberto canônico complementar do hiperplano  $x_i = 0$ . O anel de coordenadas de  $U_i$  é o anel de polinômios nas indeterminadas  $x_0/x_i, \dots, x_n/x_i$ . Seja

$$f_i = x_i^{-m} F = F(x_0/x_i, \dots, x_n/x_i) \in \mathcal{O}_X(U_i).$$

Então  $(U_i, f_i) (i=0, \dots, n)$  é um divisor de Cartier efetivo, que coincide com a hipersuperfície dada por  $F=0$ .

(2) Seja  $X$  uma curva e sejam  $P_1, \dots, P_n$  pontos não singulares de  $X$ . Seja  $t_i$  uniformizante local em  $P_i$  e seja  $U_i$  aberto em  $X$  onde  $t_i$  é regular e se anula apenas em  $P_i$  e tal que  $P_j \notin U_i$  para  $i \neq j$ . Então  $(U_i, t_i^{m_i})$  define um divisor de Cartier em  $X$ , naturalmente associado ao ciclo  $\sum m_i P_i$ . Mais geralmente, temos a seguinte,

6.3 Definição. Seja  $D = (\{U_i\}, f_i)$  um divisor de Cartier em  $X$ . O ciclo associado a  $D$  é definido por

$$[D] = \sum \text{ord}_V(D)V,$$

soma sobre as subvariedades de codim.1, onde o coeficiente é dado por

$$\text{ord}_V(D) = \text{ord}_{V_i}(f_i),$$

com  $V_i := U_i \cap V$ .

O leitor pode objetar que o 2º membro acima só foi definido quando  $X$  (e portanto cada  $U_i$ ) é uma variedade. Mas é fácil verificar que a mesma fórmula (2.1) se aplica e que  $\text{ord}_V(D)$  está bem definida e é aditiva. Além disso,  $\text{ord}_V(D) \neq 0$  só para um número finito de  $V$ 's.

6.3.1 Observação. É imediato que  $D \mapsto [D]$  define um homomorfismo de  $\text{Div}X$  em  $C_*X$ .

6.4 Definição. Seja  $D = (\{U_i\}, f_i)$  um divisor de Cartier em  $X$ . O fibrado em retas associado a  $D$ , denotado  $L(D)$ , é o definido pelas funções de transição  $f_{ij} := f_i f_j^{-1}$  em  $U_{ij}$  (cf. [Sh] p. 270).



Mais explicitamente,  $L(D)$  é o esquema  $/X$  obtido por colagem a partir da união disjunta  $\coprod U_i \times \mathbb{A}^1$ , módulo a relação de equivalência

$$U_i \times \mathbb{A}^1 \ni (x, v)_i \sim (x', v')_j \in U_j \times \mathbb{A}^1$$

$\iff$

$$x = x' \in U_{ij} \quad \text{e} \quad v = f_{ij}(x) \cdot v'.$$

Em outras palavras, colamos os abertos afins  $U_i \times \mathbb{A}^1$ ,  $U_j \times \mathbb{A}^1$  identificando os subesquemas abertos  $U_{ij} \times \mathbb{A}^1 \subset U_i \times \mathbb{A}^1$ ,  $U_{ij} \times \mathbb{A}^1 \subset U_j \times \mathbb{A}^1$  pelo isomorfismo  $A[T] \rightarrow A[T]$  definido por  $T \rightarrow f_{ij}T$ , onde  $A$  denota o anel de coordenadas de  $U_{ij}$ .

6.5 Exemplo. Sejam  $X = \mathbb{P}^n$  e  $U_i$  como em 6.2(1). Seja  $L \subset X \times \mathbb{A}^{n+1}$  o fibrado tautol\u00f3gico de  $\mathbb{P}^n$ , i.e., a fibra de  $L$  sobre um ponto  $x \in \mathbb{P}^n$  é a reta  $x$ . Assim,

$$L = \{ (x, v) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^{n+1} \mid v \in x \}.$$

Consideremos as trivializa\u00e7\u00f5es locais

$$\begin{array}{ccc} \phi_i: L|_{U_i} & \longrightarrow & U_i \times \mathbb{A}^1 \\ (x, v) & \longmapsto & (x, v_i) \end{array}$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{((x_0 : \dots : 1 : \dots : x_n), (x_0 v_i, \dots, x_n v_i))}.$$

Calculamos

$$\begin{array}{ccc} \phi_i \phi_j^{-1}: U_{ij} \times \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & U_{ij} \times \mathbb{A}^1 \\ (x, c) & \longmapsto & (x, (x_i/x_j)c) \end{array}$$

Portanto, as funções de transição do fibrado  $L$  são  $x_i/x_j$  em  $U_{ij}$ . As potências tensoriais  $L^{\otimes m}$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) são dadas por  $(U_i, (x_i/x_j)^m)$ . Comparando com 6.2(1), vemos que, se  $F$  é uma hipersuperfície de grau  $m$ , o fibrado em retas associado  $L(F)$  tem funções de transição  $(x_i^{-m}F)/(x_j^{-m}F) = (x_i/x_j)^{-m}$ .

Como usual, escreveremos

$$\mathcal{O}(1) := L^{-1}$$

e mais geralmente,

$$\mathcal{O}(m) = L^{\otimes(-m)}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Sabemos que todo fibrado em retas sobre  $\mathbb{P}^n$  é isomorfo a  $\mathcal{O}(m)$  para algum  $m$ . O cálculo acima mostra que  $L(F) = \mathcal{O}(m)$  onde  $F$  denota uma hipersuperfície de grau  $m$  em  $\mathbb{P}^n$ .

6.6 Proposição. Seja  $L \rightarrow X$  um fibrado em retas sobre uma variedade. Então existe um divisor de Cartier  $D$  em  $X$  tal que  $L(D)$  seja isomorfo a  $L$ .

Demonstração. Seja  $\{U_i\}$  cobertura aberta afim de  $X$  e sejam  $F_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_{ij})$  funções de transição de  $L$ . Fixemos um índice  $i_0=0$ . Como  $X$  é uma variedade, cada anel de coordenadas  $\mathcal{O}_X(U_{ij})$  está contido em  $R(X) = R(U)$  para qualquer aberto  $U \neq \emptyset$ . Definimos  $f_i = F_{i_0 i}$ . É imediato que  $(\{U_i\}, f_i)$  define um divisor de Cartier  $D$ . Além disso, o fibrado  $L(D)$  é dado pelas funções de transição  $f_i f_j^{-1} = f_{i_0} f_{j_0}^{-1} = f_{ij}$ , donde  $L(D)$  é isomorfo a  $L$ . //

6.6.1 Observação. O resultado acima não se generaliza para  $X =$  esquema arbitrário, cf. Hartshorne, "Ample subvarieties of algebraic varieties", L.N.M. 156 Springer-Verlag (1970).

6.7 Recordemos brevemente as expressões locais de uma seção de um fibrado. Seja  $f: E \rightarrow X$  um fibrado vetorial de posto  $n$ . Seja  $\{U_i\}$  cobertura afim munida de trivializações  $\phi_i: E_{U_i} := f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{A}^n$ . Temos então

$$\begin{aligned} \phi_i \phi_j^{-1}: U_{ij} \times \mathbb{A}^n &\longrightarrow U_{ij} \times \mathbb{A}^n \\ (x, v) &\longrightarrow (x, f_{ij}(x) \cdot v) \end{aligned}$$

onde  $f_{ij}$  é um morfismo de  $U_{ij}$  no grupo linear  $GL_n$ . Vale a relação de cociclo

$$f_{ij} f_{jk} = f_{ik}.$$

Seja  $s: X \rightarrow E$  uma seção. A restrição  $s_{U_j}$  composta com  $\phi_j$  se escreve na forma

$$\phi_j s_{U_j}(x) = (x, s_j(x)), \text{ para } x \in U_j$$

onde o vetor linha  $s_j \in \mathcal{O}_X(U_j)^n$  é a expressão local de  $s$  (com respeito à trivialização  $\phi_j$ ). Consequentemente, podemos escrever para  $x \in U_{ij}$ ,

$$\begin{aligned} \phi_i \phi_j^{-1}(x, s_j(x)) &= \phi_i(s_{U_j}(x)) \\ &= \phi_i(s_{U_i}(x)). \end{aligned}$$

Portanto,

6.7.1  $f_{ij} s_j = s_i$  em  $\mathcal{O}_X(U_{ij})^n \quad \forall i, j$ .

Reciprocamente, dada uma coleção  $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)^n$  satisfazendo a esta última relação de compatibilidade, existe uma única seção  $s: X \rightarrow E$  associada às expressões locais  $(s_i)$ .

6.8 Definição. Seja  $s$  uma seção de um fibrado  $E \rightarrow X$  de posto  $n$ . O esquema dos zeros de  $s$  é o subesquema  $Z(s) \subset X$  com ideal localmente gerado pelas expressões locais de  $s$ . Dizemos que  $s$  é regular se em torno de cada  $x \in X$ ,  $s$  admite uma expressão local cujas  $n$  coordenadas definem uma sequência regular  $\mathcal{O}_{X,x}$ .

6.8.1 Observação. Se  $X$  é localmente Cohen-Macaulay então a regularidade de  $s$  é equivalente a que cada componente de  $Z(s)$  seja de codim.  $n$  em  $X$ .

6.9 Proposição. Seja  $L \rightarrow X$  um fibrado em retas e seja  $s: X \rightarrow L$  uma seção regular. Então o esquema de zeros  $Z(s)$  é um divisor de Cartier efetivo cujo fibrado em retas associado é isomorfo a  $L$ . Reciprocamente, se  $D$  é um divisor de Cartier efetivo tal que  $L(D)$  é isomorfo a  $L$ , então existe uma seção regular cujo esquema de zeros é  $D$ .

Demonstração. Seja  $\{U_i\}$  cobertura afim que trivializa  $L$  e seja  $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$  expressão local de  $s$ . Por hipótese,  $s_i$  é não divisor de zero e portanto define um divisor de Cartier efetivo  $D := (\{U_i\}, s_i)$ . As funções de transição para  $L(D)$  são as  $s_i s_j^{-1}$ . Ora, se  $(f_{ij})$  são as funções de transição para  $L$ , temos (6.7.1)

$$s_i = f_{ij} s_j \quad \text{em } \mathcal{O}_X(U_{ij})$$

e portanto

$$f_{ij} = s_i s_j^{-1} \quad \text{em } R(U_{ij}).$$

Deixamos a recíproca a cargo do leitor. //

**6.10 Proposição.** Seja  $D$  um divisor de Cartier em  $X$ . Então  $L(D)$  é isomorfo ao fibrado trivial  $\mathbb{A}_X^1$  sse  $D$  é principal.

**Demonstração.** Suponhamos  $L(D) \simeq \mathbb{A}_X^1$ . Seja  $D = (\{U_i\}, f_i)$ , de sorte que as funções de transição para  $L(D)$  são as  $f_i f_j^{-1}$ . A seção constante  $=1$  fornece uma seção de  $L(D)$  com expressões locais  $(s_i)$  com cada  $s_i$  invertível em  $\mathcal{O}_X(U_i)$ . Por (6.7.1) concluímos que

$$f_i f_j^{-1} s_j = s_i \quad \text{em } R(U_{ij})$$

donde

$$f_i s_i^{-1} = f_j s_j^{-1}.$$

Está última relação significa que existe  $f \in R(X)$  tal que

$$f_i f^{-1} = s_i \quad \text{em } \mathcal{O}_X(U_i) \subset R(U_i), \quad \forall i.$$

Por (6.1.1), temos  $(\{U_i\}, f_i) = (X, f)$ . A recíproca é imediata. //

**6.11 Corolário.** Sejam  $D, D'$  divisores de Cartier. Se  $L(D)$  e  $L(D')$  são isomorfos então os ciclos associados  $[D]$  e  $[D']$  são racionalmente equivalentes.

Demonstração.  $L(D)$  isomorfo a  $L(D')$  implica que  $L(D-D')$  é isomorfo ao fibrado trivial e portanto

$$[D] - [D'] = [D-D'] = [r]$$

para algum  $r \in R(X)$ . //

6.11.1 Observação. Lembremos que dois divisores de Cartier são ditos linearmente equivalentes se sua diferença é um div. de Cartier principal. O resultado acima pode ser re-enunciado assim: equivalência linear de divisores implica equivalência racional dos ciclos associados.

6.11.2 Exemplo. Seja  $X$  a curva plana projetiva  $zy^2 = x^3$ . Para todo ponto  $P \in X$  existe  $r \in R(X)$  tal que  $[r] = P - 0$ , com  $0 := (0:0:1)$ . Seja  $D$  o divisor de Cartier com equação local  $f_1 = x/x-y$  em  $U_1 := X - \{0\}$  e  $f_2 = 1$ , em  $U_2 = X - \{(1:1:1), (0:1:0)\}$ .  $D$  não é principal, mas  $[D] = (0:1:0) - (1:1:1) \in R_0 X$  (cf. Hartshorne p. 142).

Seja  $P(X)$  o subgrupo de  $\text{Div}(X)$  formado pelos divisores de Cartier principais. Temos um homomorfismo natural,

$$\text{Div}(X)/P(X) \longrightarrow A_{n-1}(X) \quad (n = \dim X).$$

Demonstra-se que êle é injetivo (resp. sobrejetivo) se  $X$  é uma variedade normal (resp. localmente fatorial).

6.12 Definição. Seja  $L \longrightarrow X$  um fibrado em retas e seja  $V$  uma subvariedade de  $X$ . Seja  $C$  um divisor de Cartier em  $V$  tal que  $L(C)$  seja isomorfo à restrição  $L|_V$  (6.6). Definimos

$$c_1(L) \cap V := [C] \text{ em } A_*V.$$

A ambiguidade na escolha de  $C$  desaparece módulo  $R_*V$  (6.11). Mediante composição com o homomorfismo natural  $A_*V \rightarrow A_*X$  definiremos o operador 1ª classe de Chern,

$$\begin{aligned} c_1(L): C_*X &\longrightarrow A_*X \\ z = \sum_i V_i &\longrightarrow c_1(L) \cap z := \sum_i c_1(L) \cap V_i. \end{aligned}$$

( $c_1(L) \cap z$  lê-se " $c_1L$  interseção  $z$ " ou " $c_1(L)$  capa  $z$ ", do inglês cap product).

Segue de (6.11) que se  $L, L'$  são fibrados em retas isomorfos então  $c_1(L) = c_1(L')$ .

6.13 Definição. Seja  $D$  um divisor de Cartier em  $X$  e seja  $V$  uma subvariedade de dim.  $k$ . Definimos a classe de interseção de  $V$  com  $D$  pela fórmula

$$6.13.1 \quad D \cdot V = c_1(L(D)) \cap V \text{ em } A_{k-1}(V \cap |D|).$$

6.13.2 Observação. Se  $V \not\subset |D|$  então as equações locais de  $D$  se restringem a equações locais do divisor de Cartier  $i^*D$ , onde  $i: V \hookrightarrow X$ . Neste caso, a classe  $D \cdot V$  é representada por um ciclo bem definido, com suporte contido em  $|D| \cap V$ .

Se  $z = \sum n_i V_i$  é um  $k$ -ciclo, estendemos (6.13.1) por linearidade pondo

$$6.13.3 \quad D \cdot z = \sum n_i D \cdot V_i \text{ em } A_{k-1}(|D| \cap |z|),$$

o que nos fornece um homomorfismo, dito de interseção com D,

$$6.13.4 \quad \begin{aligned} D: C_k X &\longrightarrow A_{k-1} |D| \\ z &\longmapsto D \cdot z \end{aligned}$$

Podemos interpretar a ocorrência do fibrado  $L(D)$  na definição de  $D \cdot V$  como um jeito de colocar  $D$  em posição geral com respeito a  $V$ . Este é efetivamente o caso quando o espaço de seções de  $L(D)$  é suficientemente amplo, i.e., se, dado um número finito de subvariedades  $V_1, \dots, V_t$ , existir uma seção  $s$  tal que o divisor  $Z(s)$  não contém nenhum  $V_i$ .

6.14 Exemplos. (1) Seja  $H \subset \mathbb{P}^n$  um hiperplano em  $\mathbb{P}^n$ . Seja  $V \subset \mathbb{P}^n$  uma subvariedade. Temos então

$$H \cdot V = [H' \cap V] \text{ em } A_{k-1} V \cap H \quad (k = \dim V),$$

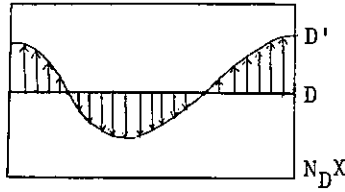
onde  $H'$  denota um hiperplano que não contém  $V$ .

(2) Seja  $D$  um divisor de Cartier efetivo em  $X$ ,  $i: D \hookrightarrow X$  a inclusão. Então  $i^*L(D)$  é o fibrado normal de  $D$  em  $X$ . Se  $D$  é uma variedade (cf. 13.3.1 para generalização), temos a fórmula de auto-interseção,

$$D \cdot D = c_1(i^*L(D)) \cap [D] \text{ em } A_* D.$$

Se o fibrado normal admitir uma seção regular (i.e., um campo normal), podemos imaginar um deslocamento infinitesimal de  $D$  ao longo da seção para a posição  $D'$ . A fórmula acima se interpreta como uma relação entre  $D \cap D'$  e os zeros da seção.





(3) Sejam  $C$  uma curva não singular,  $X = C \times C$ ,  $i: C \hookrightarrow X$  a diagonal. O fibrado normal de  $C$  em  $X$  se identifica ao fibrado tangente  $TC$ . Para  $C$  projetiva, podemos calcular

$$\int c_1(TC) \cap [C] = 2 - 2g,$$

onde  $g =$  gênero de  $C$ . Com efeito, se  $D$  é um divisor canônico em  $C$ , o fibrado associado  $L(D)$  é o cotangente  $(TC)^*$ , e sabemos que o grau da classe canônica é  $2g - 2$ . Em particular, com  $C = \mathbb{P}^1$ , temos  $\tau_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ . A fórmula  $\int c_1(\tau_{\mathbb{P}^1}) \cap [\mathbb{P}^1] = 2$  significa que todo campo tangente ( $\neq 0$ ) se anula em 2 pontos (em concordância com o fato análogo para a esfera  $S^2 =: \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ).

### Exercícios

- 1) Mostre que o suporte de um divisor de Cartier é fechado. Verifique se coincide com o suporte do ciclo associado.
- 2) Seja  $A \rightarrow A'$  um homomorfismo plano de anéis. (i) Mostre que se  $a \in A$  é não divisor de zero (ndz) sua imagem em  $A'$  também é ndz. Conclua que existe um homomorfismo natural induzido entre os anéis totais de frações  $R \rightarrow R'$ . (ii) Mostre que se  $f: X' \rightarrow X$

é um morfismo plano de esquemas e  $D$  é um divisor de Cartier em  $X$  então existe um divisor de Cartier  $D'$  em  $X'$  bem definido mediante a seguinte exigência. Se  $U = \text{Sp}(A)$ ,  $U' = \text{Sp}(A')$  são abertos afins tais que  $f(U') \subset U$  e se  $r \in R = R(A)$  é uma equação local de  $D$  em  $U$  então  $f^*r \in R'$  é equação local de  $D'$  em  $U'$ , onde  $f^*: R \rightarrow R'$  é dada em (i). (iii) Mostre que  $f^*L(D)$  é isomorfo a  $L(D')$ . O divisor  $D'$  é a imagem recíproca de  $D$ , denotado por  $f^*D$ .

3) Sejam  $D, D'$  divisor de Cartier em  $X$ . Mostre que  $L(D) \otimes L(D')$  é isomorfo a  $L(D+D')$ . Conclua que  $D \mapsto L(D)$  induz um homomorfismo de  $\text{Div}(X)/P(X)$  em  $\text{Pic}(X)$ , grupo de Picard de  $X$  (das classes de isomorfismo de fibrados em retas  $/X$ ).

§7 PROPRIEDADES DA 1ª CLASSE DE CHERN

7.1 Proposição. (1) (Normalização) Seja  $X$  um esquema de dimensão pura  $n$  e seja  $D$  um divisor de Cartier em  $X$ . Temos então

$$(7.1.1) \quad c_1(L(D)) \cap [X] = [D] \quad \text{em } A_{n-1}X.$$

(2) (Aditividade) Sejam  $L, M$  fibrados em retas sobre  $X$ . Então,

$$c_1(L \otimes M) = c_1(L) + c_1(M).$$

(3) (Naturalidade) Seja  $f: X' \rightarrow X$  um morfismo plano. Então, para cada ciclo  $z \in C_*X$  vale,

$$f^*(c_1(L) \cap z) = c_1(f^*L) \cap f^*z \quad \text{em } A_*X'.$$

(4) (Fórmula de projeção) Seja  $p: X' \rightarrow X$  um morfismo próprio. Então, para cada ciclo  $z' \in C_*X'$  temos,

$$p_*(c_1(p^*L) \cap z') = c_1(L) \cap p_*z' \quad \text{em } A_*X.$$

Demonstração. (1) Observemos que se  $X$  é uma variedade, a fórmula é apenas a definição (!) 6.12. Para o caso geral, sejam  $X_1, \dots, X_t$  as componentes irredutíveis de  $X$  e escrevamos  $[X] = \sum m_i X_i$  ( $m_i = \text{múltiplicidade de } X_i \text{ em } X$  (1.4)). Seja  $D_i$  a restrição de  $D$  a  $X_i$ . Seja  $V \subset X$  subvariedade de codim. 1 e ponha  $A = \mathcal{O}_{X,V}$ . Sejam  $a, b \in A$  não divisores de zero tais que  $f = a/b$  é uma equação local de  $D$  em  $A$ . O coeficiente de  $V$  em  $[D]$  é  $\ell_A(A/aA) - \ell_A(A/bA)$ . Seja  $P_i \subset A$  o ideal primo mínimo correspondente à componente  $X_i$ . Escreva  $A_i = A/P_i$ ,  $a_i := a + P_i$  (classe resíduo). Assim,  $a_i/b_i$  é uma equação local de  $D_i$  em  $A_i$ . Segue-se que o coeficiente de  $V$  em  $[D_i]$  vale  $\ell_{A_i}(A_i/a_i A_i) - \ell_{A_i}(A_i/b_i A_i)$ .

Lembrando que o 1º membro de (7.1.1) é, por definição,

$$\sum m_i [D_i],$$

a igualdade proposta segue do lema 4.8.

(2) O resultado é imediato da definição e de 6.1.3.

(3) Podemos supor  $z=V$  uma variedade e mesmo  $X=V$ . Neste caso, temos  $L=L(D)$  para um divisor de Cartier  $D$ . Logo,  $f^*L \cong L(f^*D)$  e a fórmula proposta decorre da seguinte igualdade de ciclos em  $X'$ ,

$$(*) \quad f^*[D] = [f^*D].$$

Já a verificamos para  $D$  efetivo (4.4). Para o caso geral, seja  $W' \subset X'$  subvariedade de codim. 1 que figure em qualquer dos membros de (\*). Por construção,  $W'$  é componente de  $f^{-1}(W)$  para alguma subvariedade  $W$  de codim. 1 em  $X$ . Ao substituirmos  $X$  por um aberto afim não disjunto de  $W$ , não há perda dos dados que fornecem os coeficientes em questão. Assim podemos supor que  $D$  é principal e portanto, escrevê-lo como diferença de 2 divisores de Cartier efetivos, quando então (\*) é evidente.

(4) Observemos inicialmente que a fórmula é consequência imediata das definições no caso em que  $p$  é a inclusão de uma subvariedade  $X' \subset X$ . No caso geral, podemos supor  $z=X'$  uma variedade e substituir  $X$  por  $p(X')$ , também uma variedade. Agora temos  $L=L(D)$  para algum divisor de Cartier  $D$  em  $X$ . A fórmula de projeção segue da seguinte versão, a nível de ciclos,

$$(7.1.2) \quad p_* [p^*D] = (d^0_p) [D] \text{ em } C_*X.$$

Como na demonstração de (3), a verificação é local em  $X$ , de sorte que podemos supor  $D$  principal, com equação  $r \in R(X)$ . Seja  $d = d^0 p$  (3.1). Supondo  $d > 0$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} p_* [p^* r] &= [r^d] && \text{(por 3.5)} \\ &= d[r], \end{aligned}$$

como desejávamos. //

7.2 Observação. A hipótese de dim. pura é essencial em (7.1.1), cf. Exc. 7-6.

### EXERCÍCIOS

1) Sejam  $D, E$  divisores de Cartier em  $X$ . Mostre que, dado  $z \in C_k X$ , temos

$$(D+E).z = D.z + E.z \quad \text{em } A_{k-1}((|D| \cup |E|) \cap |z|).$$

2) Seja  $f: X' \rightarrow X$  um morfismo plano de dim. rel.  $n$  e seja  $D \in \text{Div}(X)$ . Dado  $z \in C_k X$ , sejam  $Z = |D| \cap |z|$ ,  $Z' = f^{-1}Z$ ,  $g: Z' \rightarrow Z$  o morfismo induzido. Prove que

$$g^*(D.z) = f^*D.f^*z \quad \text{em } A_{k+n-1}(Z').$$

3) Seja  $p: X' \rightarrow X$  um morfismo próprio e seja  $D$  um divisor de Cartier em  $X$  tal que  $p^*D$  esteja definido (cf. 6.1.4). Sejam  $z' \in C_k X'$ ,  $Z' = p^{-1}|D| \cap |z'|$ ,  $Z = |D| \cap |p_*z'|$  e  $p': Z' \rightarrow Z$  o morfismo induzido. Mostre que

$$p'_*(p^*D.z') = D.p'_*z' \quad \text{em } A_{k-1}Z.$$

4) Seja  $D$  um divisor de Cartier em  $X$ . Suponha que existe um aberto  $U$  de  $X$  tal que  $|D| \subset U$  e que a restrição  $D|_U$  seja principal. Seja  $V$  uma subvariedade de dim.  $k$ . Defina o ciclo em  $C_{k-1}|D|$

$$D.V = \begin{cases} 0 & \text{se } V \subset |D| \\ [i^*D] & \text{se } V \not\subset |D|, i: V \hookrightarrow X. \end{cases}$$

Mostre que a classe de  $D.V$  em  $A_{k-1}|D|$  é igual à classe de interseção construída em (6.13.1).

5) Seja  $X \subset \mathbb{A}^3$  a superfície  $y=xz$  e sejam  $D=Z(y)$ ,  $D'=Z(y-x)$ . Calcule  $D.[D']$  e  $D'.[D]$  em  $C_0|D| \wedge |D'|$  pela receita do exc. anterior.

6) Seja  $X = \text{Sp}(K[x,y,z]/I)$ ,  $I=(zx,zy)$ . Seja  $D$  definido por  $x=z$  em  $X$ . Mostre que  $D$  é um divisor de Cartier em  $X$ . Calcule  $[D]$ . Compare com 7.1.1. Idem para  $I=(z^2, zx, zy, xy)$ ,  $D:y=x$ .

§8 COMUTATIVIDADE

Um aspecto incômodo da construção (6.13) da classe de interseção  $D.V$  é a assimetria dos papéis de  $D$  e  $V$ , cf. Exc. 7-5. A pedra de toque para o caso de codimensão  $\geq 1$  e, de resto, para a construção do anel de Chow é o seguinte resultado.

8.1 Teorema. Seja  $X$  uma variedade e sejam  $D, D'$  divisores de Cartier em  $X$ . Temos então

$$D.[D'] = D'.[D] \text{ em } A_{n-2}(|D| \cap |D'|), \quad n = \dim. X.$$

Demonstração. Dividiremos em várias etapas, enfraquecendo sucessivamente hipóteses adicionais.

(1<sup>ª</sup>) Suponhamos  $X$  normal e  $D, D'$  efetivos com interseção própria (i.e., sem componentes de codim. 1 em comum).

Seja  $W$  subvariedade de codim. 2 em  $X$  e seja  $B = 0_{X,W}$ . Portanto,  $B$  é um domínio normal de dim. 2, logo Cohen-Macaulay. Sejam  $a, b \in B$  as equações locais de  $D, D'$  respectivamente. Sabemos que  $a$  é não divisor de zero mod.  $b$ . As subvariedades  $V$  de codim. 1 em  $X$  contendo  $W$  correspondem a primos  $P$  de altura 1 em  $B$ . O coeficiente de uma tal  $V$  em  $[D']$  é  $\ell_{B_P}(B_P/bB_P)$ . O coeficiente de  $W$  em  $D.V$  é  $\ell_{B/P}(B/P+aA)$ . Por fim, o coef. de  $W$  em  $D.[D']$  dá

$$(*) \quad \sum_P \ell_{B_P}(B_P/bB_P) \ell_{B/P}(B/P+aB).$$

Aplicando (4.8) com

$$M = B/bB =: A,$$

reconhecemos a expressão (\*) como  $e(a, A) = \ell_A(A/aA)$  (pois  ${}_aM = 0$  visto

que  $a$  é não divisor de zero mod.  $b$ ). Ora,

$$\ell_A(A/aA) = \ell_B(B/(a,b))$$

donde se conclui facilmente ser também igual ao coeficiente de  $W$  em  $D' \cdot [D]$ .

(2ª)  $D, D'$  supostos efetivos e com interseção própria.

Seja  $f: X' \rightarrow X$  a normalização de  $X$ . Pela 1ª etapa, vale

$$f_* D \cdot [f_* D'] = f_* D' \cdot [f_* D].$$

Pela fórmula de projeção, vem, aplicando  $f_*$ ,

$$\begin{array}{ccc} D \cdot f_* [f_* D'] & = & D' \cdot f_* [f_* D] \\ \parallel & & \parallel \\ D \cdot [D'] & & D' \cdot [D]. \end{array} \quad (7.1.2)$$

(3ª)  $D, D'$  supostos efetivos.

O plano agora é explodir a parte excedentária e reduzir ao caso anterior. Definimos o excesso da interseção de  $D, D'$  como o inteiro

$$e(D, D') := \max\{\text{ord}_V(D) \cdot \text{ord}_V(D') \mid V \text{ é subvariedade de } \\ \text{codim. } 1 \text{ em } X\}$$

Evidentemente  $e(D, D') \geq 0$ , com igualdade apenas no caso da interseção de  $D, D'$  ser própria. Procederemos por indução sobre o excesso; para reduzi-lo, usaremos o seguinte resultado.

8.2 Lema. Seja  $X$  uma variedade e sejam  $D, D'$  divisores de Cartier efetivos. Seja  $Z = D \wedge D'$  (interseção esquemática, i.e., se  $a, b$  são equações locais de  $D, D'$  resp. então o ideal de  $Z$  é o gerado por  $a, b$ ). Seja  $p: X' \rightarrow X$  a explosão ao longo de  $Z$  com divisor excepcional



$E := p^{-1}Z$ . Temos então:

(i)  $p^*D = E + C$ ,  $p^*D' = E + C'$ , com  $C, C'$  divisores de Cartier efetivos disjuntos e tais que a restrição de  $p$  a  $C$  (resp. a  $C'$ ) é um isomorfismo sobre um subesquema fechado de  $D$  (resp.  $D'$ ).

(ii) Se  $e(D, D') = \epsilon > 0$  então  $e(C, E), e(C', E)$  são estritamente menores que  $\epsilon$ .

Demonstração. (i) Recordemos inicialmente como se constrói a exploração. Seja  $U = \text{Sp}(A)$  aberto afim de  $X$  e sejam  $a, b \in A$  equações locais de  $D, D'$  resp. Seja  $I = (a, b)$ , ideal de  $Z \cap U$ . Para cada  $c \in I$ , seja

$$I_c = \{d/c^n \mid d \in I^n, n \geq 0\},$$

sub-anel do anel de frações  $(\otimes_{\mathbb{Z}} I^n)_c$ . Então os esquemas afins  $U'_c := \text{Sp}(I_c)$  com  $c$  percorrendo um conjunto de geradores de  $I$  formam uma cobertura aberta de  $U' := p^{-1}(U)$ . Podemos escrever

$$\frac{a}{1} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{1} \quad \text{em } I_c.$$

Nesta expressão,  $a/1$  (resp.  $c/1$ ) é a equação local de  $p^*D$  (resp.  $E$ ) em  $I_c$ . É imediato que  $a/c$  (resp.  $b/c$ ) fornece equação local para um divisor de Cartier efetivo  $C$  (resp.  $C'$ ) tal que  $p^*D = E + C$  (resp.  $p^*D' = E + C'$ ). Ademais, uma relação  $c = ax + by$  em  $A$  implica

$$1 = \frac{a}{c} \cdot \frac{x}{1} + \frac{b}{c} \cdot \frac{y}{1} \quad \text{em } I_c,$$

mostrando que  $C$  e  $C'$  são disjuntos. Tomando  $c = a$ , vemos que  $C \cap U'_a$  é vazia e portanto  $C \cap U' = C \cap U'_b$ . Temos o diagrama de homomorfismos de anéis induzidos por  $p$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 A' & \longrightarrow & I_b \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A/aA & \xrightarrow{\pi} & I_b / \left(\frac{a}{b}\right) I_b.
 \end{array}$$

A aplicação  $\pi$  entre os anéis quocientes corresponde à restrição de  $p$  a  $C \cap U'_b$ . Verifica-se facilmente que  $\pi$  é sobrejetiva, o que demonstra a última asserção do item (i).

(ii) Suponha  $\epsilon' := e(C, E) \geq e(D, D') = \epsilon > 0$ . Seja  $V'$  subvariedade de codim. 1 de  $X'$  tal que

$$\epsilon' = \text{ord}_{V'}(C) \text{ord}_{V'}(E).$$

Dado que  $V' \subset C$ , sua imagem  $V := p(V')$  é uma subvariedade de  $D$  de codim. 1 em  $X$  (pois  $p: C \rightarrow p(C)$ ). Por outro lado, temos (7.1.2)

$$D = p_*[p^*D] = p_*[C+E],$$

donde se segue que

$$\text{ord}_{V'}(D) \geq \text{ord}_{V'}(C+E)$$

valendo uma relação análoga para  $D'$ . Agora calculamos,

$$\begin{aligned}
 \epsilon &\geq \text{ord}_{V'}(D) \text{ord}_{V'}(D') \geq \text{ord}_{V'}(C+E) \text{ord}_{V'}(C'+E) \\
 &\geq e(C, E) + (\text{ord}_{V'}(E))^2 > \epsilon',
 \end{aligned}$$

sendo a última desigualdade estrita porque  $\text{ord}_{V'}(E) > 0$ . Como havíamos suposto  $\epsilon' > \epsilon$ , obtemos uma contradição. //

Prossigamos com a demonstração de (8.1). Dados  $D, D'$  efetivos e com excesso de interseção positivo, recorremos ao lema acima para escrever, com  $p': p^{-1}(|D| \wedge |D'|) \rightarrow |D| \wedge |D'|$  induzido por  $p$ ,

(cf. Exc. 7-3),

$$\begin{aligned} D \cdot [D'] &= p_*^!(p^*D \cdot [p^*D']) \quad \text{em} \quad A(|D| \cap |D'|)_{n-2} \\ &= p_*^!((C+E) \cdot [C'+E]) \\ &= p_*^!(C \cdot [E] + E \cdot [C'] + E \cdot [E]) \end{aligned}$$

(por indução sobre o excesso)

$$= p_*^!(E \cdot [C] + C' \cdot [E] + E \cdot [E])$$

(revertendo o cálculo anterior)

$$= D' \cdot [D].$$

#### (4<sup>a</sup>) Caso geral

Seja  $U = \text{Sp}(A)$  aberto afim de  $X$  onde  $D, D'$  tem equações locais  $a, b \in R(X)$ . Seja

$$I(U) := \{d \in A \mid da, db \in A\}.$$

É imediato que isto define um feixe de ideais em  $X$ , associado a um subesquema fechado  $Z$ . Seja  $p: X' \rightarrow X$  a explosão ao longo de  $Z$ . Um argumento local semelhante ao do início da prova de (8.2) mostra que os divisores de Cartier,

$$C := p^*D + E \quad \text{e} \quad C' := p^*D' + E$$

são ambos efetivos. O argumento se completa por redução ao caso anterior e procedendo com um cálculo análogo ao feito lá. //

**8.3 Corolário.** Sejam  $X$  um esquema e seja  $L \rightarrow X$  um fibrado em retas. Se  $z$  é um ciclo racionalmente equivalente a zero em  $X$  então

$$c_1(L) \cap z = 0.$$

Portanto, a 1ª classe de Chern induz um operador denotado ainda por  $c_1(L): A_*X \longrightarrow A_*X$  que leva (classes de)  $k$ -ciclos em  $(k-1)$ -ciclos.

Demonstração. Podemos supor  $z = [r]$  com  $r \in R(V)$  para alguma subvariedade  $V \subset X$ . Seja  $D$  divisor de Cartier associado a  $L|_V$  e seja  $D'$  o divisor de Cartier principal definido por  $r$ . Temos então

$$\begin{aligned} c_1(L) \cap z &= D \cdot [D'] \quad \text{em} \quad A_*[D] \cap [D'] \\ &= D' \cdot [D] \quad \text{(por 8.1)} \\ &= c_1(A_V^1) \cap [D] = 0 \quad \text{em} \quad A_*[D] \end{aligned}$$

pois  $L(D') = A_V^1$ , fibrado trivial. //

O mesmo argumento fornece ainda o seguinte

**8.4 Corolário.** Seja  $D$  um divisor de Cartier em  $X$ . O homomorfismo de interseção com  $D$  (6.13.4) passa ao quociente por equivalência racional, induzindo

$$D : A_k X \longrightarrow A_{k-1} [D] . //$$

**8.4.1 Atenção!** Nas condições acima, se  $D$  é principal, muito embora tenhamos  $D \cdot z = 0$  em  $A_*X$ , em geral em  $A_*[D]$ ,  $D \cdot z$  é não nulo. Veja por exemplo  $z = X = \mathbb{A}^1$ ,  $D = \{0\}$ .

**8.5 Corolário.** Seja  $i: D \hookrightarrow X$  a inclusão de um divisor de Cartier efetivo. Então, para cada  $z \in A_*D$  temos

$$D \cdot z = c_1(i^*L(D)) \cap z \quad \text{em} \quad A_*D . //$$

Uma vez que  $c_1$  define operadores em  $A_*X$ , podemos compô-los.

Segue-se facilmente o seguinte.

**8.6 Corolário.** Sejam  $L, M$  fibrados em retas sobre um esquema  $X$ . Para cada  $z \in A_k X$  temos

$$c_1(L) \wedge (c_1(M) \wedge z) = c_1(M) \wedge (c_1(L) \wedge z) \quad \text{em } A_{k-2} X. //$$

Este último resultado nos permite definir operadores formando polinômios nas classes de Chern de fibrados em retas  $L_1, \dots, L_t$ . Precisamente, se  $P(T_1, \dots, T_n) \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$ , podemos calcular  $P(c_1(L_1), \dots, c_1(L_t))$  como operador em  $A_* X$ .

**8.7 Corolário.** Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  um subesquema de dim. pura  $k$  e de grau  $d$  (5.4). Seja  $h = c_1 \mathcal{O}(1)$ . Temos então

$$d = h^k \wedge [X].$$

Demonstração. O resultado é consequência das fórmulas

$$[X] = d h^{n-k} \wedge [\mathbb{P}^n] \quad \text{em } A_k \mathbb{P}^n$$

$$h \wedge [\mathbb{P}^i] = [\mathbb{P}^{i-1}] \quad \text{em } A_{i-1} \mathbb{P}^n. //$$

Finalizamos esta seção demonstrando a concordância do grau à la Hilbert-Samuel com o definido por (5.4).

**8.8 Proposição.** Seja  $X$  um subesquema de  $\mathbb{P}_K^n$  de dim. pura  $k > 0$ , com anel de coordenadas homogêneas  $S(X) = \bigoplus_{t \geq 0} S(X)_t$ . Seja

$$\dim_K S(X)_t = d \frac{t^k}{k!} + \dots, \quad t \gg 0,$$

a função de Hilbert-Samuel de  $S(X)$ . Seja  $h = c_1 \mathcal{O}(1)$ . Então a classe de  $[X]$  em  $A_k \mathbb{P}^n$  é igual a  $d h^{n-k} \wedge [\mathbb{P}^n]$  (i.e.,  $d$  vezes a classe de

um subespaço de dim.  $k$ ).

Demonstração. Procederemos por indução sobre  $k$ . Lembremos inicialmente que o coeficiente  $d = d_k(X)$ , que é o grau à la Hilbert-Samuel, satisfaz às seguintes propriedades (cf. [H] p. 52, 53):

(1) Se  $X_1, \dots, X_u$  são as componentes irredutíveis de  $X$  com multiplicidades respectivas  $m_1, \dots, m_u$ , então

$$d_k(X) = \sum_1^u m_i d_k(X_i).$$

Com efeito, existe filtração  $S(X) = M^r \supset \dots \supset M^1 \supset M^0 = 0$  por  $S$ -submódulos graduados, com  $S = K[T_0, \dots, T_n]$ , tais que  $M^i/M^{i-1} = (S/P_i)(n_i)$  para certos ideais primos homogêneos  $P_i \subset S$  e inteiros  $n_i$ . Os elementos mínimos dentre os  $P_i$ 's são os ideais dos  $X_j$ 's. E mais, o número de vezes que cada  $P$  minimal ocorre é igual ao comprimento de  $S(X)_P$  como  $S_P$  módulo. Basta notar que  $(S/P_i)_P = 0$  sse  $P \not\subset P_i$ . Ora, o mesmo vale para a localização em grau zero  $(S/P_i)_{(P)}$  (formada por frações com numerador e denominador homogêneos do mesmo grau). Daí, o referido comprimento é mesmo igual ao comprimento  $m_j$  de  $S(X)_{(P)}$ , pois este último é o anel local de  $X$  ao longo do  $X_j$  correspondente a  $P$ . Por fim, como  $\dim_K((S/P_i)(n_i))_t$  é, para  $t \gg 0$ , um polinômio em  $t$  de grau igual à dimensão da variedade projetiva associada a  $P_i$ , o coeficiente líder  $d_k(X)/k!$  é a soma dos  $d_k(X_i)/k!$ , cada um desses ocorrendo  $m_i$  vezes.

(2) Se  $k > 0$  e  $H$  denota um hiperplano que não contém nenhuma componente irredutível de  $X$ , então

$$d_k(X) = d_{k-1}(X \cap H).$$

(Examine a sequência exata  $S(X)(-1) \xrightarrow{H^*} S(X) \longrightarrow S(X \cap H)$ .)

Suponhamos  $k=0$  e, por simplicidade,  $K$  algebricamente fechado. Agora cada componente  $X_j$  é um ponto e  $d_0(X_j)=1$ . Segue de (1) que  $d_0(X) = [X]$  como desejado. Para  $k>1$ , escolhemos  $H$  como em (2) e calculamos

$$\begin{aligned} d_k(X) &= d_{k-1}(X \cap H) = \int h^{k-1} \cap [X \cap H] && \text{(por indução)} \\ &= \int h^k \cap [X] && (6.1.4(1)). // \end{aligned}$$

### Exercícios

1) Seja  $L \longrightarrow X$  fibrado em retas. Mostre que

$$c_1(L): A_*X \longrightarrow A_*X$$

é nilpotente.

2) Seja  $p: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  um morfismo. Mostre que  $p$  é constante.

(Sugestão:  $p$  é dado pela escolha de  $n$  seções globais de  $p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ , i.e.,  $n$  formas homogêneas de grau  $d$ . Calcule  $p_*((dh)^n \cap [\mathbb{P}^n])$ , com  $h = c_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ ).

§9 AS CLASSES CARACTERÍSTICAS

Seja  $f: E \rightarrow X$  um fibrado vetorial de posto  $e+1$ . Construímos classes de Segre  $s_i(E)$  e de Chern  $c_i(E)$  ( $i=0,1,\dots$ ) como operadores em  $A_*X$  homogêneos de grau  $-i$  (i.e., a imagem de  $A_kX$  está contida em  $A_{k-i}X$ .)

A construção refletirá a estrutura do grupo de Chow do fibrado projetivo  $p: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$  associado a  $f$ .

9.1 Recordemos brevemente algumas propriedades básicas do fibrado projetivo. Se  $U$  é um aberto de  $X$  tal que

$$E_U := f^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{A}^{e+1},$$

temos

$$\mathbb{P}(E)_U := p^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{P}^e.$$

Em particular,  $p$  é próprio e plano (de dim. rel.  $e$ ). O fibrado  $p^*E$  admite um subfibrado que denotaremos por  $\mathcal{O}_E(-1)$  (ou  $\mathcal{O}(-1)$  se não houver confusão), chamado de fibrado tautológico. Se  $t \in \mathbb{P}(E)$ ,  $x=p(t)$  então  $t \in \mathbb{P}(E_x) \simeq \mathbb{P}^e$ ; a fibra de  $\mathcal{O}_E(-1)$  em  $t$  é justamente o subespaço de dim.1 de  $E_x$  que  $t$  representa. O fibrado dual  $\mathcal{O}_E(-1)^*$  é denotado  $\mathcal{O}_E(1)$ . Dado um morfismo  $g: X' \rightarrow X$ , podemos formar o diagrama de produto fibrado.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{g'} & \mathbb{P}(E) & (E' := g^*E) \\
 p' \downarrow & & \downarrow p & \\
 X' & \xrightarrow{g} & X &
 \end{array}$$

9.1.1



Temos então

$$9.1.2 \quad g^* \circ 0_E(1) = 0_{E'}(1).$$

9.2 Definição. Seja  $z \in A_k X$ ; temos então  $p^* z \in A_{k+e} \mathbb{P}(E)$ . Definimos

$$s_i(E) \cap z := p_*(c_1(0_E(1))^{e+i} \cap p^* z) \in A_{k-i} X.$$

O operador  $s_i(E): A_* X \rightarrow A_* X$  é a  $i$ -ésima classe de Segre de  $E$ .

9.2.1 Observação. Para  $X$  variedade não singular,  $A_* X$  é munido de produto (cf. 13.14). Neste caso, o operador  $s_i(E)$  coincide com a multiplicação por  $s_i(E) \cap [X]$  (cf. 13.15(3)).

9.3 Proposição. (1)  $s_0(E) = 1$  (= operador identidade).

(2)  $s_i(E) = 0$  para  $i < 0$  e para  $i > \dim X$ .

(3) (naturalidade) Se  $g: X' \rightarrow X$  é um morfismo plano e  $z \in A_* X$  então

$$s_i(g^* E) \cap g^* z = g^*(s_i(E) \cap z).$$

(4) (fórmula de projecção) Se  $g: X' \rightarrow X$  é próprio e  $z' \in A_* X'$ , então

$$g_*(s_i(g^* E) \cap z') = s_i(E) \cap g_* z'.$$

(5) (comutatividade) Se  $E, F$  são fibrados vetoriais /  $X$  e  $z \in A_* X$ , então

$$s_i(E) \cap s_j(F) \cap z = s_j(F) \cap s_i(E) \cap z.$$

(6) (normalização) Se  $E$  é fibrado em retas (cf. 9.4.1) para generalização, então

$$s_1(E) = -c_1(E).$$

Demonstração. (1) Seja  $V \subset X$  subvariedade de dim.k. Por (4), temos que  $s_i(E) \cap V$  provem de fato de  $A_{k-i}V$  que é zero para  $i < 0$  e igual a  $ZV$  para  $i=0$ . Logo,  $s_0(E) \cap V = mV$ . Para calcular  $m$ , aplicaremos (3) à inclusão  $U \hookrightarrow V$  de um aberto que trivializa  $E_V$ . Logo, podemos supor  $E$  trivial. Neste caso, temos

$$c_1(\mathcal{O}_E(1)) \cap [\mathbb{P}^e \times V] = [H \times V]$$

onde  $H = \mathbb{P}^{e-1}$ , um hiperplano em  $\mathbb{P}^e$ . Daí vem

$$s_0(E) \cap V = p_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^e \cap [\mathbb{P}^e \times V]) = V,$$

e portanto  $m=1$ .

(3) Calculemos, com a notação de (9.1.1),

$$s_i(g^*E) \cap g^*z = p'_*(c_1(\mathcal{O}_{E'}(1))^{e+i} \cap p'^*g^*z) \tag{9.1.2}$$

$$= p'_*(c_1(g'^*\mathcal{O}_E(1))^{e+i} \cap g'^*p^*z) \tag{7.1(3)}$$

$$= p'_*g'^*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{e+i} \cap p^*z) \tag{4.6}$$

$$= g^*(s_i(E) \cap z).$$

A demonstração de (4) é análoga, recorrendo a 7.1(4). Para verificar (5), construímos o diagrama cartesiano,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F) & \xrightarrow{p'} & \mathbb{P}(F) \\ \downarrow q' & & \downarrow q \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{p} & X, \end{array}$$

e calculamos, usando arsenal semelhante ao de (3) e (4),

$$\begin{aligned} s_i(E) \wedge s_j(F) \wedge z &= p_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{e+i} \wedge p^*q_*(c_1(\mathcal{O}_F(1))^{f+j} \wedge q^*z)) \\ &= p_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{e+i} \wedge q'_*p'^*(c_1(\mathcal{O}_1(1))^{f+j} \wedge q^*z)) \\ &= p_*q'_*(c_1(q'^*\mathcal{O}_E(1))^{e+i} \wedge c_1(p'^*\mathcal{O}_F(1))^{f+j} \wedge p'^*q^*z) \end{aligned}$$

(por 8.4)

$$\begin{aligned} &= q_*p'_*(c_1(p'^*\mathcal{O}_F(1))^{f+j} \wedge c_1(q'^*\mathcal{O}_E(1))^{e+i} \wedge p'^*q^*z) \\ &= q_*(c_1(\mathcal{O}_F(1))^{f+j} \wedge p'_*q'^*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{e+i} \wedge p^*z)) \\ &= s_j(F) \wedge s_i(E) \wedge z. \end{aligned}$$

(6) A fórmula resulta de que  $p: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$  e  $p^*E^* \rightarrow \mathcal{O}_E(1)$  são isomorfismos, onde  $E^* =$  dual de  $E$ . Com efeito, para cada  $z \in A_*X$ , temos

$$\begin{aligned} s_1(E) \wedge z &= p_*(c_1(\mathcal{O}_E(1)) \wedge p^*z) \\ &= p_*(c_1(p^*E^*) \wedge p^*z) \\ &= p_*p^*(c_1(E^*) \wedge z) \\ &= -c_1(E) \wedge z. \end{aligned}$$

9.4 Definição. Seja  $E \rightarrow X$  um fibrado vetorial. Definimos a classe de Segre total de  $E$  pela fórmula,

$$s_*(E) := s_0(E) + s_1(E) + \dots = \Sigma s_i(E).$$

Sabendo que  $s_0(E)=1$  e que os operadores  $s_i(E)$ ,  $s_j(E)$  com  $i, j > 1$ , são nilpotentes e comutam, segue-se que  $s(E)$  é invertível no anel  $\text{End}(A_*X)$ . Definimos a classe de Chern total de  $E$ ,

$$c_i(E) = s_i(E)^{-1}.$$

Podemos escrever

$$c_i(E) = c_0(E) + c_1(E) + \dots,$$

decomposição em componentes homogêneas, com

$$c_i(E) \cap A_k X \subseteq A_{k-i} X.$$

Temos, da definição,

$$(9.4.1) \quad \sum_k s_{i-k} c_k = 0 \quad \text{para } i > 1.$$

Evidentemente, resulta

$$(9.4.2) \quad \begin{aligned} c_0(E) &= 1 \\ c_1(E) &= -s_1(E), \end{aligned}$$

e podemos calcular, para  $i > 2$  o determinante

$$(4.4.3) \quad c_i = (-1)^i \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{i-1} & s_i \\ 1 & s_1 & s_2 & \dots & s_{i-2} & s_{i-1} \\ 0 & 1 & s_1 & \dots & s_{i-3} & s_{i-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & s_1 \end{vmatrix}$$

9.4.4 Observação. É imediato que as classes de Chern satisfazem a propriedades análogas às formuladas em (9.3) para as de Segre; mais surpreendentes e fundamentais são as 2 seguintes.

9.5 Proposição. (1) Seja  $E \rightarrow X$  um fibrado de posto  $r$ . Então  $c_i(E) = 0$  para  $i > r$ .

(2) Seja  $E' \rightarrow E \rightarrow E''$  sequência exata de fibrados vetoriais. Então temos (aditividade)

$$c_m(E) = c_m(E') \cdot c_m(E'')$$

i.e., para cada  $m$ ,

$$c_m(E) = \sum_{i+j=m} c_i(E') c_j(E'').$$

A demonstração de ambas as asserções procedem por redução a fibrados de posto 1. A técnica empregada é conhecida pelo nome de

9.6 Princípio da cisão (splitting). Seja  $(E_i)$  família finita de fibrados vetoriais sobre  $X$ . Então existe um morfismo plano  $f: X' \rightarrow X$  tal que

(1) Cada  $f^*E_i$  admite filtração por subfibrados com quocientes sucessivos de posto 1.

(2) O homomorfismo  $f^*: A_*X \rightarrow A_*X'$  é injetivo.

Por este resultado, podemos transferir a verificação de fórmulas envolvendo classes de Segre ou de Chern em  $A_*X$  para  $A_*X'$  com a vantagem de que, sobre  $X'$ , os fibrados em questão são extensões sucessivas de fibrados em retas.

Demonstração de 9.6. Dado um fibrado  $E$ , consideremos  $p: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$  o projetivo associado. Temos uma sequência exata,

$$0_E(-1) \rightarrow p^*E \rightarrow F.$$

Além disso, a aplicação

$$p^*: A_*X \rightarrow A_*\mathbb{P}(E)$$

é injetiva, uma vez que, para cada  $z \in A_*X$  temos

$$z = s_0(E) \wedge z = p_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^e \wedge p^*z).$$

Por indução sobre o posto de  $E$ , existe morfismo plano  $q: X' \rightarrow \mathbb{P}(E)$  tal que  $q^*F$  admite filtração por subfibrados do tipo desejado e com  $q^*$  injetivo. Composto com  $p^*$ , demonstramos (9.6) para 1 fibrado. O caso geral segue sem dificuldade. //

9.7 Lema. Seja  $E$  um fibrado/ $X$  munido de filtração  $E = E^1 \supset \dots \supset E^{r+1} = 0$  por subfibrados com quocientes  $L_i = E^i/E^{i+1}$  de posto 1. Sejam

$$\sigma_1 := \sum c_1(L_i), \sigma_2 := \sum_{i < j} c_1(L_i) c_1(L_j), \dots, \sigma_r = c_1(L_1) \dots c_1(L_r)$$

as funções simétricas elementares. Então

(1)  $\prod_{i=1}^r (1 + c_1(L_i)) = c_*(E)$ , i.e.,  $c_i(E) = \sigma_i$  (resp. = 0) para  $i=1, \dots, r$  (resp.  $i > r$ );

(2) se  $E$  admite uma seção  $s$  com esquema de zeros  $Z(s)$  vazio, temos

$$\sum c_1(L_i) = 0.$$

Demonstração. Começemos por (2). Seja  $V \subset X$  subvariedade. Devemos provar  $\Pi c_1(L_1) \cap V = 0$ . Aplicando a fórmula de projeção à inclusão de  $V$  em  $X$ , podemos supor  $V=X$ . Consideremos o diagrama de homomorfismos de fibrados

$$(9.7.1) \quad \begin{array}{ccc} & \mathbb{A}_X^1 & \\ & \swarrow \text{---} & \searrow s' \\ & E^2 & \downarrow s \\ F := E^2 & \xrightarrow{\quad} & E \longrightarrow L_1 \end{array}$$

Seja  $Z' = Z(s')$ . Se  $Z'$  for vazio então  $L_1 \simeq \mathbb{A}_X^1$  e já  $c_1(L_1) = 0$ . Como  $X$  é uma variedade, se  $Z' \neq \emptyset$  então  $Z'$  é um divisor de Cartier efetivo e  $c_1(L_1) \cap V = [Z']$  em  $A_*V(6.12)$ . Seja  $i: Z' \hookrightarrow X$  a inclusão. Restringindo (9.7.1) a  $Z'$ , temos que  $i^*s' = 0$  e portanto  $i^*s$  induz uma seção de  $F$ , indicada em pontilhado, que não se anula nunca. Por indução, temos

$$\prod_2^r c_1(i^*L_i) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \prod_1^r c_1(L_i) \cap V &= \left( \prod_2^r c_1(L_i) \right) \cap c_1(L_1) \cap V \\ &= \prod_2^r c_1(L_i) \cap i_*[Z'] \\ &= i_* \prod_2^r c_1(i^*L_i) \cap [Z'] = 0. \end{aligned}$$

Passemos à verificação de (1). Seja  $p: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ . A inclusão canônica  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1) \hookrightarrow p^*E$  fornece uma seção de  $p^*E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$  que não tem zeros. Escrevamos

$$h = c_1(\mathcal{O}_E(1)).$$

Por (2), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \prod_1^r (c_1(L_i \otimes \mathcal{O}_E(1))) \\ (9.7.2) \quad &= \prod_1^r (h + c_1(p^*L_i)) \\ &= \sum_0^r h^{r-k} \sigma'_k, \end{aligned}$$

onde  $\sigma'_k$  denota a  $k$ -ésima função simétrica elementar nos  $c_1(p^*L_j)$ . Multiplicando por  $h^{i-1}$  e aplicando  $p_*$ , obtemos (com  $i \geq 1$ ,  $r = e+1$ ),

$$0 = \sum p_* (h^{e+i-k} \sigma'_k) = \sum s_{i-k}(E) \sigma_k,$$

donde resulta (1) por comparação com (9.4.1). //

podemos agora juntar as peças e voltar para a

Demonstração de (9.5). Pelo princípio da cisão, para provar a afirmativa (1) de (9.5) podemos supor que  $E$  admite filtração como em (9.7), e portanto  $c_i(E) = 0$  para  $i > r$ . Por fim, para obtermos 9.5(2), podemos construir filtração de  $E$  acoplando filtrações de  $E', E''$ . A fórmula proposta resulta do cálculo  $c(E')$ ,  $c(E'')$  e  $c(E)$  empregando 9.7(1).

A chave para as aplicações geométricas do ferramental de classes características é a seguinte generalização de (7.1.1).

9.8 Proposição. Seja  $E$  um fibrado de posto  $r$  sobre um esquema  $X$  de dim. pura  $n$ . Seja  $s$  uma seção regular. Então



$$c_r(E) \cap [X] = [Z(s)] \text{ em } A_{n-r}X.$$

Demonstração. Para  $r=1$ , a fórmula é um caso especial de (7.1.1), (6.9). Suponhamos  $r \geq 2$  e seja  $f: X' \rightarrow X$  morfismo plano de dim. rel.  $m$  tal que  $f^*: A_*X \rightarrow A_*X'$  seja injetivo e que  $f^*E$  se encaixe numa sequência exata de fibrados.

$$F \rightarrow f^*E \rightarrow L$$

com posto de  $L=1$  (9.6). A seção  $f^*s$  induz uma seção  $s'$  de  $L$  e ambas são regulares. Seja  $i: Z(s') \hookrightarrow X'$  a inclusão. A restrição  $i^*f^*s$  a  $Z(s')$  se fatora por uma seção  $s''$  de  $i^*F$  igualmente regular. por indução, temos

$$c_{r-1}(i^*F) \cap [Z(s')] = [Z(s'')] \text{ em } A_{n-r}Z(s').$$

Observemos que

$$Z(s'') = Z(f^*s) = f^{-1}Z(s).$$

Escrevamos

$$g: Z(s'') \rightarrow Z(s)$$

induzido por  $f$ , e sejam  $j: Z(s'') \hookrightarrow Z(s')$  e  $k: Z(s) \hookrightarrow X$  as inclusões. Temos então,

$$\begin{aligned} f_*k_*[Z(s)] &= i_*j_*g_*[Z(s)] && (4.6) \\ &= i_*j_*[Z(s'')] && \text{(indução)} \\ &= i_*c_{r-1}(i^*F) \cap [Z(s')] && \text{(fórmula de projeção)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= c_{r-1}(F) \wedge c_1(L) \wedge [X'] \quad (9.5(2)) \\
 &= c_r(f^*E) \wedge f^*[X] \quad (\text{naturalidade}) \\
 &= f^*(c_r(F) \wedge [X]),
 \end{aligned}$$

o que completa a demonstração, pois  $f^*$  é injetivo. //

9.9 Exemplo. Seja  $E \rightarrow F \rightarrow Q$  uma sequência exata de fibrados sobre um esquema puro dimensional  $X$ . Seja  $p: \mathbb{P}(F) \rightarrow X$  o morfismo estrutural. O diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{O}_F(1) & \\
 & \downarrow & \searrow \\
 p^*E & \rightarrow & p^*F \rightarrow \rightarrow p^*Q
 \end{array}$$

fornece uma seção  $s$  de  $p^*Q \otimes \mathcal{O}_F(1)$  com esquema de zeros igual a  $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F)$ . Portanto, temos

$$[\mathbb{P}(E)] = c_r(p^*Q \otimes \mathcal{O}_F(1)) \wedge [\mathbb{P}(F)] \quad \text{em } A_*\mathbb{P}(F),$$

com  $r = \text{posto}(Q)$ .

9.10 Proposição. (Unicidade) As classes de Chern são univocamente determinadas pelas seguintes condições:

(1) Normalização) Se  $L$  é um fibrado em retas sobre uma variedade  $X$  e se  $D$  é um divisor de Cartier em  $X$  com  $L(D) \simeq L$ , então

$$c_1(L) \wedge [X] = [D];$$

(2) Fórmula de projeção) Se  $f: X' \rightarrow X$  é um morfismo próprio e se  $E$  é um fibrado vetorial/ $X$ , então, para cada  $i$ ,

$$f_*(c_i(f^*E) \wedge z') = c_i(E) \wedge f_*(z') \quad \forall z' \text{ em } A_*X'.$$

(3) (Imagem recíproca) Se  $f: X' \rightarrow X$  é plano e se  $E$  é um fibrado vetorial/ $X$ , então, para cada  $i$ ,

$$f^*(c_i(E) \wedge z) = c_i(f^*E) \wedge f^*z \quad \forall z \text{ em } A_*X.$$

Demonstração. O princípio de cisão (9.6), juntamente com a propriedade (3) acima, além da aditividade (9.5), reduzem a comparação ao caso de fibrados em retas, que é coberto por (1). Visto que (9.5) depende apenas de (1), (2) e (3), segue-se a unicidade. //

### Exercícios

1) Calcule  $s_*(0_{\mathbb{P}^n}(1))$ .

2) Com a notação de 9.7, mostre que todo polinômio simétrico nas classe de Chern de  $L_1, \dots, L_r$  se expressa como um polinômio nas classe de Chern de  $E$ . Em particular, calcule  $\sum c_1(L_i)^2$  em termos das  $c_i(E)$ .

3) Sejam  $L, L_1, \dots, L_r$  fibrados em retas  $E = L_1 \otimes \dots \otimes L_r$ . (i) Calcule  $c_*(E \otimes L)$  em termos de  $c_1(L)$  e  $c_*(E)$ . (ii) Mostre que a 2ª potência simétrica  $S_2 E$  é isomorfa a  $\bigoplus_{i < j} L_i \otimes L_j$ ; calcule  $c_*(S_2 E)$  em função de  $c_i(E)$ .

(iii) Mostre que  $\bigwedge^r E$  é isomorfo a  $L_1 \otimes \dots \otimes L_r$ ; conclua  $c_1(\bigwedge^r E) = c_1(E)$  para todo fibrado de posto  $r$ . (iv) Mostre que  $c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$  ( $E^*$  = dual de  $E$ ).

4) Sejam  $E, F$  fibrados de posto 2. Calcule  $c_*(E \otimes F)$  em função de  $c_*(E), c_*(F)$ .

5) Seja  $E$  fibrado de posto  $r$  munido de seção nunca nula. Então  $c_r(E) = 0$ .

6) Seja  $X$  um esquema completo. Seja  $c$  um operador em  $A_*X$  e seja  $z \in A_*X$ . Escrevamos  $\int c := \int cz$ , grau do zero ciclo de  $cz$  (3.9.1). Sejam agora  $E, F$  fibrados vetoriais sobre variedades completas  $V, W$  resp. Prove que

$$\int_{V \times W} c_*(p^*E) c_*(q^*F) = \left( \int_V c_*(E) \right) \left( \int_W c_*(F) \right),$$

onde  $p, q$  denotam as projeções de  $V \times W$  em  $V, W$ .

Generalize, mostrando que se  $V, W$  são esquemas e  $v, w$  são ciclos então

$$\int_{V \times W} c_*(p^*E) c_*(q^*F) = \left( \int_V c_*(E) \right) \left( \int_W c_*(F) \right).$$

7) Seja  $E$  fibrado de posto  $r = e + 1$  e seja  $L$  um fibrado em retas sobre um esquema  $X$ . Sejam  $p: \mathbb{P}(E) \rightarrow X, q: \mathbb{P}(E \otimes L) \rightarrow X$  os morfismos naturais. Mostre que existe isomorfismo  $i: \mathbb{P}(E \otimes L) \rightarrow \mathbb{P}(E)$  tal que  $p_i = q_i$  e  $i^* \theta_E(1) = \theta_{E \otimes L}(1) \otimes L^{-1}$ . Conclua que

$$s_j(E \otimes L) = \sum (-1)^{j-k} \binom{e+j}{e+k} s_k(E) c_1(L)^{j-k}.$$

§10. CÁLCULO DE ALGUNS GRUPOS DE CHOW

Descreveremos os grupos de Chow dos fibrado projetivos e de fibrados vetoriais. Examinaremos também as grassmannianas.

10.1 Proposição. Seja  $f: E \rightarrow X$  fibrado vetorial de posto  $n=e+1$  e seja  $p: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$  o fibrado projetivo associado. Seja  $h=c_1(\mathcal{O}_E(1))$ . Então temos o isomorfismo

$$(10.1.1) \quad \alpha_E : \begin{matrix} \oplus \\ 0 \end{matrix} A_{k-e+i} X \longrightarrow A_k \mathbb{P}(E)$$

$$(a_i) \longmapsto \sum h^i \cap p^* a_i$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente  $E = \mathbb{A}_X^n$ . Sejam  $i: \mathbb{P}_X^{n-1} \subset \mathbb{P}_X^n$ ,  $j: \mathbb{A}_X^n \subset \mathbb{P}_X^n$  as inclusões naturais, com  $\mathbb{A}_X^n = \mathbb{P}_X^n - \mathbb{P}_X^{n-1}$ . Consideremos a seqüência exata (5.1),

$$\begin{array}{ccccc} A_k \mathbb{P}_X^{n-1} & \xrightarrow{i^*} & A_k \mathbb{P}_X^n & \xrightarrow{j^*} & A_k \mathbb{A}_X^n \\ & & \uparrow p^* & \nearrow f^* & \\ & & A_{k-e} X & & \end{array}$$

Vamos provar que  $\alpha_E$  é sobrejetor. Dado  $z \in A_k \mathbb{P}_X^n$ , temos  $j^* z = f^* a$  para algum  $a \in A_{k-e} X$  (5.2). Logo,  $z - p^* a = i_* b$  para algum  $b \in A_k \mathbb{P}_X^{n-1}$ . Por indução, podemos escrever

$$b = \sum_0^{e-1} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(1))^i \cap q^* a_i,$$

com  $a_i \in A_j X$ ,  $j=k-e+i+1$ ,  $q=\pi: \mathbb{P}_X^{n-1} \rightarrow X$  o morfismo estrutural. Daí vem

$$z = p^* a + i_* \sum_0^{e-1} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X^r}(1))^i \cap q^* a_i$$

(fórmula de projeção)

$$\begin{aligned}
 &= p^*a + \sum_0^{e-1} h^i \cap i_*q^*a_i \\
 &= p^*a + \sum_1^e h^i \cap p^*a_i,
 \end{aligned}$$

a última igualdade se justificando pela seguinte

(10.1.3) Afirmção :  $i_*q^*a = h \cap p^*a$   $\quad \forall a \in A_*X.$

Com efeito, basta verificar a fórmula para  $a=[V]$ , com  $V=$  subvariedade de  $X$ . Neste caso,  $q^*[V] = [q^{-1}V] = [\mathbb{P}_V^{n-1}]$ . A fórmula desejada ,

$$i_*[\mathbb{P}_V^{n-1}] = h \cap [\mathbb{P}_V^n],$$

é imediata (7.1.1).

Para provarmos que  $\alpha_E$  é sobrejetiva no caso geral, argumentamos por indução sobre  $m=\dim X$ . Se  $m=0$  então  $X=\text{Sp}(A)$  para algum anel artíniano  $A$ . Sabendo-se que todo  $A$ -módulo localmente livre (de posto constante!) é livre, segue-se que  $E$  é trivial (cf. Hartshorne, p.128). Para a etapa indutiva, observemos que existe um aberto denso  $U \subset X$  tal que  $E_U \cong \mathcal{A}_U^n$ . Com efeito, seja  $U'$  um aberto ( $\neq \emptyset$ ) que trivializa  $E$ , e seja  $X'$  componente irredutível de  $X$  disjunta de  $U'$ . Tomemos aberto  $U'' \subset X'$  que trivialize  $E$ . É claro que  $U' \cup U''$  trivializa  $E$ . Com esse processo, construímos  $U$ . Seja  $Y = X-U$ , de sorte que  $\dim Y < m$ . Consideremos o diagrama,

$$\begin{array}{ccccc}
 A_k \mathbb{P}(E_Y) & \longrightarrow & A_k \mathbb{P}(E) & \twoheadrightarrow & A_k \mathbb{P}_U^n \\
 \uparrow \alpha_{E_Y} & & \uparrow \alpha_E & & \uparrow \alpha_{E_U} \\
 \bigoplus_{i=0}^e A_{k-e+i} Y & \longrightarrow & \bigoplus_{i=0}^e A_{k-e+i} X & \twoheadrightarrow & \bigoplus_{i=0}^e A_{k-e+i} U
 \end{array}$$

claramente comutativo em virtude de (9.4.4). Agora  $\alpha_{E_Y}$  (resp.  $\alpha_{E_U}$ ) é sobrejetor por indução (resp. pelo caso visto inicialmente), seguindo-se facilmente que  $\alpha_E$  também é sobre.

Para a injetividade, suponhamos

$$\sum_0^e h^i \wedge p^* a_i = 0.$$

Aplicando  $p_*$  e lembrando 9.3 (1,2) obtemos  $a_e = 0$ . Multiplicando por  $h$  e repetindo o argumento, vem sucessivamente  $a_{e-1} = \dots = a_0 = 0$ , provando que  $\alpha_E$  é injetivo. //

O resultado seguinte é fundamental para a construção da classe de interseção em codim.  $> 1$ .

**10.2 Corolário.** Seja  $f: E \rightarrow X$  um fibrado vetorial de posto  $n$ . Então  $f^*: A_k X \rightarrow A_{k+n} E$  é um isomorfismo  $\forall k$ .

Demonstração. Consideremos o diagrama

$$(10.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}(F) & \xleftarrow{i} & \mathbb{P}(E) \\ & \searrow f & \downarrow g & \swarrow p & \\ & & X & & \end{array}$$

onde  $F := E \times \mathbb{A}^1$  e  $j$  (resp.  $i$ ) denota a imersão aberta (resp. fechada) natural.

Seja  $z \in A_{k+n} E$ . Existe  $y \in A_{k+n} \mathbb{P}(F)$  tal que  $z = j^* y$ . Seja  $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1))$ . Escrevamos  $y$  de acordo com (10.1.1),

$$y = g^* x_k + h \wedge (g^* x_{k+1} + \dots + h^{n-1} \wedge g^* x_{k+n}), \quad x_i \in A_i X.$$

lembrando (10.1.3), vemos que o termo  $h \wedge (\dots)$  na expressão acima se escreve  $i_*c$ , com  $c \in A_*\mathbb{P}(E)$  logo,

$$j^*y = y^*g^*x_k = f^*x_k,$$

mostrando que  $f^*$  é sobrejetiva. Se  $f^*x_k = 0$  então  $g^*x_k = i_*c$  como acima; daí  $x_k = 0$  por (10.1) (aplicado a  $F$ ). //

Vejamos algumas fórmulas para a inversa de  $f^*$ .

10.2.2 Corolário. Seja  $V \subset X$  subesquema de dim. pura  $k$  e seja  $s: V \rightarrow E$  uma seção. Temos então

$$(f^*)^{-1}s_*[V] = c_n(E) \cap [V] \text{ em } A_{k-n}V.$$

Demonstração. Podemos supor  $V=X$ . Devemos mostrar que

$$\begin{aligned} s_*[X] &= f^*(c_n(E) \cap [X]) \text{ em } A_k E \\ &= c_n(f^*E) \cap [E]. \end{aligned}$$

Ora,  $s$  induz seção de  $f^*E = E \times_X E$  definida por

$$e \rightarrow (e, e - s(f(e))),$$

que é regular e se anula exatamente em  $s(X)$ . O resultado segue de (9.8). //

10.2.3 Corolário. Com a notação de (10.2.1), seja  $Q$  o quociente universal de posto  $n$  de  $g^*F$ . Temos então

$$g_*(c_n(Q) \cap y) = (f^*)^{-1}j^*y, \quad y \text{ em } A_*\mathbb{P}(F).$$



Demonstração. Como na demonstração de (10.2), escrevemos

$$y = g_*x + i_*c.$$

Por outro lado, da definição de  $Q$  e da aditividade das classes de Chern temos

$$c_n(Q) = \sum_0^n h^i c_{n-i}(g^*E),$$

e portanto,

$$g_*(c_n(Q) \wedge g^*x) = g_*(h^n \wedge g^*x) = x \quad (9.3(1)).$$

Observemos agora que a restrição a  $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F)$  da sequência tautológica de  $\mathbb{P}(F)$  fornece o diagrama de fibrados vetoriais,

$$\begin{array}{ccccc} 0_E(-1) & \xrightarrow{\quad} & p^*E & \longrightarrow & T \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ i^*Q_F(-1) & \xrightarrow{\quad} & p^*F & \longrightarrow & i^*Q \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{A}^1 & = & \mathbb{A}^1 \\ & & \mathbb{P}(E) & & \mathbb{P}(E) \end{array}$$

do qual se infere que  $c_n(i^*Q) = 0$  e portanto,  $c_n(Q) \wedge i_*c = 0$ . Juntando as peças, vem finalmente

$$\begin{aligned} g_*(c_n(Q) \wedge y) &= x \\ &= (f^*)^{-1} j_* y. \quad // \end{aligned}$$

Descreveremos em seguida o grupo de Chow de uma grassmanniana. Recordemos que a variedade de Grassmann, denotada

$$G = G(r, n),$$

parametriza os subespaços de dim.  $r$  de  $\mathbb{A}^n$ . Equivalentemente, os pontos de  $G$  podem ser identificados a subespaços projetivos de dim.  $r-1$  de  $\mathbb{P}^{n-1}$ .

Por construção,  $G$  é munida de um fibrado tautológico  $R$ ,

$$R := \{(W, v) \in G \times \mathbb{A}^n \mid v \in W\},$$

subfibrado de  $G \times \mathbb{A}^n$ .

A fibra  $R_W$  de  $R$  sobre um ponto  $W$  em  $G$  se identifica ao subespaço de  $\mathbb{A}^n$  que  $W$  representa; em símbolos,

$$R_W = W.$$

(Estritamente, deveríamos escrever  $R_W = \{W\} \times W \subseteq \{W\} \times \mathbb{A}^n \dots$ ).

Mais geralmente, dado um fibrado vetorial de posto  $n$ ,

$$f: E \longrightarrow X$$

constrói-se o fibrado em grassmannianas,

$$(10.3) \quad p: G(r, E) \longrightarrow X,$$

de maneira que se  $U \subset X$  é um aberto que trivializa  $E$ , então

$$p^*(U) = G(r, n) \times U.$$

Temos igualmente definido o fibrado tautológico  $R$ , subfibrado de  $p^*E$ , fornecendo uma sequência exata de fibrados sobre  $G(r, E)$ ,

$$(10.3.1) \quad R \longrightarrow p^*E \longrightarrow Q, \quad \text{posto } R=r.$$

A fibra de  $R$  sobre um ponto  $y \in G(r, E)$  é o subespaço de  $f^{-1}_p(y)$  que  $Y$  representa.

Lembremos ainda que  $G(r, E)$  é caracterizado pela propriedade universal seguinte. Seja  $g: Y \rightarrow X$  um morfismo; cada morfismo  $h: y \rightarrow G(r)$  tal que  $ph = g$  fornece um subfibrado de posto  $r$  de  $g^*E$ , a saber,  $h^*R$ . A correspondência  $h \mapsto h^*R$  é uma bijeção sobre o conjunto dos subfibrados de posto  $r$  de  $g^*E$ .

10.4 Proposição.  $A_*G(r, E)$  é isomorfo ao quociente de

$$(A_*X)[\underline{a}, \underline{b}] := (A_*X) \otimes \mathbb{Z}[\underline{a}, \underline{b}]$$

pela relação

$$(10.4.1) \quad ab = c$$

onde  $\underline{a} := (a_1, \dots, a_r)$ ,  $\underline{b} := (b_1, \dots, b_s)$  ( $s = n - r$ ) são vetores de indeterminadas e  $a := 1 + a_1 + \dots + a_r$ ,  $b := 1 + b_1 + \dots + b_s$ ,  $c := c(E)$  são operadores descritos a seguir.

Demonstração. Explicitemos melhor o enunciado. Os elementos do grupo  $(A_*X)[\underline{a}, \underline{b}]$  são polinômios em  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ , com coeficientes em  $A_*X$ . Consideramos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  como operadores em  $(A_*X)[\underline{a}, \underline{b}]$  de forma natural: os  $a_i$ ,  $b_j$  agem multiplicando as indeterminadas, enquanto que  $c_i := c_i(E)$  opera sobre os coeficientes. O quociente de  $(A_*X)[\underline{a}, \underline{b}]$  "módulo a relação  $ab=c$ " significa "módulo o subgrupo gerado pelas imagens dos operadores  $c_k - \sum a_i b_{k-i}$ ". Consideremos o homomorfismo

$$(10.4.2) \quad \theta: (A_*X)[\underline{a}, \underline{b}] \longrightarrow A_*G(r, E)$$

$$z a_1^{i_1} \dots a_r^{i_r} b_1^{j_1} \dots \longmapsto c_1(R)^{i_1} \wedge \dots \wedge c_s(Q)^{j_s} \wedge p^*z.$$

Devemos provar que  $\theta$  é sobrejetivo, com núcleo igual ao subgrupo gerado pelas imagens de  $c_k - \sum a_i b_{k-i}$ . Observemos logo que  $\theta(ab-c)=0$  tendo em vista a relação

$$c.(p^*E) = c.(R)c.(Q).$$

(por 10.3). A demonstração procede por indução sobre  $r$ .

O caso  $r=1$  consiste em comparar (10.1) com a nova receita. Ora, o isomorfismo (10.1.1) re-escreve-se como

$$\alpha: (A_*X)[T] / (T^n + c_1 T^{n-1} + \dots + c_n) \longrightarrow A_*\mathbb{P}(E)$$

$$\sum z_i T^i \longmapsto \sum h^i \cap p^*z.$$

Com efeito,  $h^n + c_1 h^{n-1} + \dots + c_n = 0$  por conta de (9.7.2) (+ princípio da cisão!). O algoritmo de Euclides permite escrever todo elemento de  $(A_*X)[T]$  como um polinômio de grau  $\leq n-1$  módulo  $T^n + \dots + c_n$ . Por outro lado, a relação (10.4.1) lê-se agora  $c_k = b_k + b_{k-1}a_1$  ( $k=0,1,\dots$ ). Temos então,

$$(A_*X)[a_1, b_1, \dots, b_s] / (a_1 + b_1 - c_1, a_1 b_1 + b_2 - c_2, \dots, a_1 b_s - c_n)$$

$$= (A_*X)[a_1, b_2, \dots, b_s] / (a_1(c_1 - a_1) + b_2 - c_2, \dots)$$

$$= (A_*X)[a_1] / (a_1^n - c_1 a_1^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n),$$

isomorfismos que se obtêm por substituição sucessiva,

$$b_1 \longmapsto c_1 - a_1$$

$$b_2 \longmapsto c_2 - a_1 b_1, \text{ etc...}$$

Indiquemos brevemente a etapa indutiva, deixando a verificação detalhada a cargo do leitor. Para  $r \geq 2$ , construímos o fibrado

$$q: \mathbb{P}(R) \longrightarrow G(r, E).$$

Seja

$$L \twoheadrightarrow q^*R \twoheadrightarrow S$$

a seqüência tautológica de  $\mathbb{P}(R)$ , onde  $L := \mathcal{O}_R(-1)$ . Vamos acoplá-la com (10.3), obtendo o diagrama fundamental,

$$(10.4.3) \quad \begin{array}{ccccc} L \twoheadrightarrow & q^*R & \twoheadrightarrow & S & \\ \parallel & \downarrow & & \downarrow & \\ L \twoheadrightarrow & q^*p^*E & \twoheadrightarrow & g^*T & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & q^*Q & = & q^*Q. & \end{array}$$

Aqui a 2ª seqüência horizontal é imagem recíproca da seqüência natural de  $\mathbb{P}(E)$  mediante o morfismo composto  $g$ , indicado no diagrama,

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{P}(R) \subset & G(r, E) \times & \mathbb{P}(E) & \\ & & X & & \\ q \swarrow & & & \searrow g & \\ G(r, E) & & & & \mathbb{P}(E). \\ p \searrow & & & \swarrow h & \\ & X & & & \end{array}$$

Assim,  $L$  se identifica a  $g^*\mathcal{O}_E(-1)$ . O fibrado  $T$  é o quociente  $h^*E/\mathcal{O}_E(-1)$ . Agora o ponto crucial é perceber que a seqüência exata

$$S \twoheadrightarrow g^*T \twoheadrightarrow q^*Q$$

define um morfismo

$$(10.4.4) \quad \mathbb{P}(R) \xrightarrow{\sim} G(r-1, T)$$

que é de fato um isomorfismo graças à propriedade universal dos fibrados em grassmannianas. Identificaremos pois  $\mathbb{P}(R)$  e  $G(r-1, T)$ , de sorte que (10.4.3) exhibe as relações entre os respectivos fibrados tauológicos. Por indução, a estrutura de  $A_*G(r-1, T)$  é conhecida em termos de  $A_*\mathbb{P}(E)$  e das classes de Chern de  $T$ . A obtenção de  $A_*G(r, E)$  se dá via os homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} A_*G(r, E) & \xleftarrow{q^*} & A_*\mathbb{P}(R) = A_*G(r-1, T) \\ p^* \uparrow & & \uparrow g^* \\ A_*X & \xrightarrow[h^*]{} & A_*\mathbb{P}(E). \end{array}$$

Para mostrar que  $\theta$  (10.4.1) é sobrejetivo, tomamos um ciclo  $y \in A_*G(r, E)$  e escrevemos  $q^*y$  na forma

$$P(c_1(L), c_1(g^*T), c_2(g^*T), \dots, c_1(S), \dots, c_s(q^*Q)) \cap q^*p^*z,$$

onde  $P$  denota um polinômio a coeficientes inteiros em  $1+(n-1)+(r-1)+s=2n-1$  variáveis. Calculamos em seguida, com  $h:=c_1(L^*)$ ,

$$y = q_*(h^{r-1} \cap q^*y) \quad (9.3(1))$$

e verificamos que o 2º membro pertence efetivamente à imagem de  $\theta$ .

A demonstração de que o núcleo de  $\theta$  está contido no subgrupo gerado pelas imagens dos  $c_k - \sum a_i b_{k-i}$  para o caso geral requer mais argúcias de ordem combinatória do que permitem os objetivos destas notas. (cf. [F], [G]). //

**10.5 Exemplo.** Calculemos o grupo de Chow da grassmanniana  $G:=G(2,4)$ . Lembramos que os subespaços de dim 2 de  $\mathbb{A}^4$  correspondem a retas projetivas em  $\mathbb{P}^3$ . Pela proposição, temos

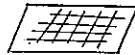
$$(10.5.1) A_*G = \mathbb{Z}[a_1, a_2, b_1, b_2] / (a_1 + b_1, a_1 b_1 + a_2 + b_2, a_1 b_2 + a_1 b_1, a_2 b_2)$$

Explicitemos o isomorfismo, descrevendo geradores naturais para  $A_*G$ . Fixemos um ponto, uma reta e um plano em  $\mathbb{P}^3$ , denotados por  $P, r_0, \pi$ . Seja  $Q$  um ponto de  $\pi$ . Definimos subvariedades,

$Z_1 := \{r \in G \mid r \text{ é uma reta de } \mathbb{P}^3 \text{ contida em } \pi \text{ e passando por } Q\}$ :



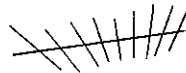
$Z_2 := \{r \in G \mid r \subset \pi\}$ :



$Z_2' := \{r \in G \mid P \in r\}$ :



$Z_3 := \{r \in G \mid r \cap r_0 \neq \emptyset\}$ :

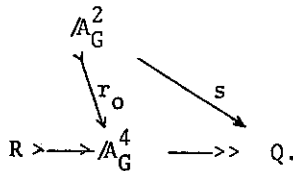


Sejam ainda  $Z_0 := \{r_0\}$  e  $Z_4 := G$ . Mostraremos que  $A_*G$  é o grupo livre abeliano gerado pelas classes de  $Z_0, Z_1, Z_2, Z_2', Z_3, Z_4$ . Vejamos inicialmente que (na notação de 10.3 com  $E = \mathbb{A}^4$ ),

$$(10.5.2) \quad [Z_3] = c_1(Q) \cap [G]$$

Com efeito, representemos a reta  $r_0$  por uma imersão linear, denotada ainda por  $r_0: \mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{A}^4$ . Para cada  $r \in G$ , a condição de  $r$  ser incidente a  $r_0$ , i.e.,  $r \cap r_0 \neq \emptyset$ , equivale, vetorialmente, a que os subespaços correspondentes,  $R_r, R_{r_0}$  (fibras de  $R$  sobre  $r, r_0$ ), admitam um subespaço comum de  $\dim. > 0$ . Consideremos o diagrama de homomorfismos de fibrados sobre  $G$

(10.5.3)



O homomorfismo  $s$  definido no diagrama acima tem posto  $\leq 1$  na fibra sobre  $r \in G$  sse existir um vetor não nulo comum a  $R_r$  e a  $r_0(\mathbb{A}^2)$ . Segue-se que  $Z_3 = Z(\mathbb{A}^2_s)$  ao menos como conjunto. Mas é de fácil verificação o fato de que o esquema de zeros  $Z(\mathbb{A}^2_s)$  é uma variedade. Por (9.8) (aliás, por construção de  $c_1!$ ), temos

$$[Z_3] = c_1(\mathbb{A}^2_Q) \wedge [G].$$

Como  $c_1(\mathbb{A}^2_Q) = c_1(Q)$  (exc. 9-3), temos verificado (10.5.1). Observemos também que  $Z(s) = Z_0 = \{r_0\}$ . Sendo  $s: \mathbb{A}^2_G \rightarrow Q$  uma seção do fibrado

$$\text{Hom}_G(\mathbb{A}^2_G, Q) = (\mathbb{A}^2_G)^* \otimes Q = Q \otimes Q,$$

temos

$$[Z_0] = c_4(Q \otimes Q) \wedge [G] \quad (9.8)$$

$$= c_2(Q)^2 \wedge [G] \quad (9.5(2)).$$

Seja agora  $\pi \subset \mathbb{P}^3$  um plano, representado por uma imersão linear  $\pi: \mathbb{A}^3 \hookrightarrow \mathbb{A}^4$ . É claro então que para cada  $r \in G$ , temos

$$r \subset \pi \text{ sse } R_r \subset \pi(\mathbb{A}^3).$$

Estudando o diagrama,

$$(10.5.4) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbb{A}^3_G & & \\ & \nearrow & \downarrow \pi & & \\ R & \longrightarrow & \mathbb{A}^4_G & \longrightarrow & Q \\ & \searrow s & \downarrow & & \\ & & \mathbb{A}^1_G & & \end{array}$$



um momento de reflexão deverá nos convencer de que  $Z_2 = Z(s^*)$ , onde  $s^*$  é dual de  $s$ , i.e., corresponde a  $s$  mediante a identificação,

$$\text{Hom}_G(R, A_G^1) = R^*.$$

Por conseguinte, temos,

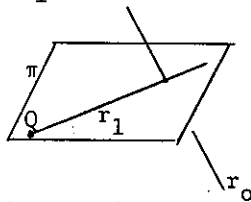
$$[Z_2] = c_2(R^*) \cap [G] = c_2(R) \cap [G] \quad (\text{Exc. 9-3}).$$

De maneira análoga, obtemos

$$[Z_2'] = c_2(Q) \cap [G],$$

$$[Z_1] = c_1(R)c_2(Q) \cap [G].$$

Sabemos por (10.4) que  $A_i G = \mathbb{Z} \cdot [Z_i]$  para  $i=0,1,3,4$ , e que  $A_2 G = \mathbb{Z} \cdot [Z_1] + \mathbb{Z} \cdot [Z_2']$ . Mostremos agora que  $A_i G$  é livre. Para  $i=0$ , isso resulta do epimorfismo grau :  $A_0 G \longrightarrow \mathbb{Z}$ . Para  $i=1$ , recorreremos ao operador  $c_1(Q) : A_1 G \longrightarrow A_0 G$ , observando que  $c_1(Q) \cap [Z_1] = [Z_0]$ . Com efeito, na notação do diagrama (10.5.3), e restrição de  $\tilde{\lambda}_s$  a  $Z_1$  se anula em um único ponto  $r_1 \in G$ , a saber, a reta indicada na figura,



Do mesmo modo, a relação

$$c_2(Q) \cap Z_3 = [Z_1]$$

mostra que  $A_3 G$  é livre. Por fim, das relações

$$(10.5.5) \quad c_2(Q) \wedge [Z_2] = c_2(R) \wedge [Z_2'] = 0$$

$$c_2(Q) \wedge [Z_2'] = c_2(R) \wedge [Z_2] = [Z_0]$$

segue que  $[Z_2]$ ,  $[Z_2']$  são linearmente independentes. Em resumo, vemos que  $A_4G$  é livre de posto 6. Deixamos como exercício a verificação direta de que o 2º membro de (10.5.1) é livre de posto 6 e que valem as fórmulas

$$sc_1(Q)^4 \wedge [G] = 2$$

$$sc_1(Q)^2 \wedge [G] = sc_2(R)^2 \wedge [G] = sc_1^2(Q) \wedge c_2(Q) \wedge [G] = 1.$$

**10.6 Aplicação : cordas de uma curva em  $\mathbb{P}^3$ .** Seja  $C \subset \mathbb{P}^3$  uma curva projetiva não singular e não plana. Consideremos a variedade  $C' \subset G = G(2,4)$  formada pelas cordas de  $C$ , i.e.,  $C'$  é a imagem do morfismo  $f: C \times C \rightarrow G$  que associa a cada par de pontos  $A, B$  em  $C$  e reta secante (=corda)  $AB$ . É imediato que  $\dim C' = 2$ . Pelo exemplo anterior, temos

$$(10.6.1) \quad [C'] = m[Z_2] + n[Z_2'] \text{ em } A_2G.$$

Mostraremos que

$$(10.6.2) \quad \begin{cases} m = n^\circ \text{ de cordas contidas num plano genérico,} \\ n = n^\circ \text{ de cordas passando por um ponto genérico.} \end{cases}$$

Calculemos  $m$ . Restringindo (10.5.4) sobre  $C'$ , deduzimos que  $c_2(R) \wedge C'$  é a classe do zero ciclo formado por pontos de  $C'$  que representam cordas de  $C$  contidas num dado plano  $\pi$ . Por (10.5.5) e (10.6.1), vem

$$sc_2(R) \wedge C' = m.$$

Portanto, é razoável se esperar

$$(10.6.3) \quad m = \binom{d}{2}, \quad (d=d^0C)$$

pois se  $\pi$  for suficientemente genérico, intersectará  $C$  em  $d$  pontos distintos, os quais, combinados 2 a 2, fornecerão as cordas de  $C$  em  $\pi$ . Para justificarmos (10.6.3) com rigor, munidos das armas disponíveis, vamos remeter o cálculo a  $C \times C$  através do morfismo  $f: C \times C \rightarrow C'$ . De início, note que  $d^0 f = 2$ , fato que em car. zero se reduz à constatação de que uma corda genérica não é tri-secante. Temos assim, pela fórmula de projeção,

$$f_*(c_2(f^*R) \wedge C \times C) = 2c_2(R) \wedge C'.$$

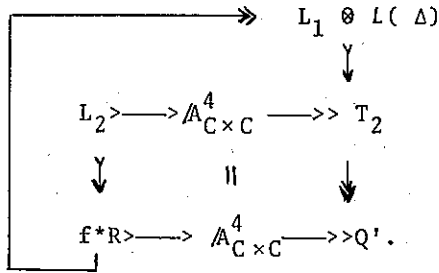
Resta calcular  $S := f^*R$ . Devemos construir um subfibrado  $S$  de posto 2 de  $\mathbb{A}^4$  cuja fibra sobre  $(P, Q) \in C \times C$  é o subespaço  $P' + Q'$  de  $\mathbb{A}^4$ , onde  $P', Q' \subset \mathbb{A}^4$  denotam as retas representadas por  $P, Q \in \mathbb{P}^3$ . Quanto à diagonal  $\Delta \subset C \times C$ , naturalmente  $f(P, P)$  é a reta tangente a  $C$  em  $P$ . Seja  $L_i$  (resp.  $T_i$ ) a imagem recíproca pela  $i$ -ésima projeção  $p_i: C \times C \rightarrow C \subset \mathbb{P}^3$  ( $i=1, 2$ ) do subfibrado (resp. quociente) tautológico  $L$  (resp.  $T$ ) de  $\mathbb{A}_{\mathbb{P}^3}^4$ . O homomorfismo de fibrados  $L_1 \rightarrow T_2$  obtido por composição,

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \longrightarrow & \mathbb{A}_{C \times C}^4 \\ & \searrow & \downarrow \\ & & T_2 \end{array}$$

se anula exatamente sobre  $\Delta$ . Mais precisamente, a imagem de  $T_2^* \otimes L_1 \rightarrow \mathbb{A}_{C \times C}^1$  é o fibrado  $L(-\Delta)$ . Dualizando, resulta o homomorfismo injetivo,

$$L_1 \otimes L(\Delta) \rightarrow T_2.$$

Obtemos assim um fibrado quociente  $Q'$  de posto 2 que se encaixa no seguinte diagrama:



Resumindo,  $f^*R$  aparece como extensão de  $L_1 \otimes L(\Delta)$  por  $L_2$ . Daí vem

$$c(f^*R) = c(L_2)c(L_1 \otimes L(\Delta))$$

e em especial,

$$c_2(f^*R) = c_1(L_2)(c_1(L_1) + c_1(L(\Delta))).$$

Calculamos (cf. Exc. 9-6)

$$f_{C \times C} c_1(L_2)c_1(L_1) = (f_C c_1(L))^2 = d^2,$$

$$f_{C \times C} c_1(L_2)c_1(L(\Delta)) = f_C c_1(L_2) \wedge \Delta$$

$$= f_C c_1(L) \wedge C = -d \quad (8.7)$$

donde

$$f_{C \times C} c_2(f^*R) = d^2 - d$$

como queríamos.

Para calcular  $n$  em (10.6.1), recorremos a (10.5.5), obtendo

$$n = f_C c_2(Q) \wedge C'.$$

Pelo exposto acima, levamos o cálculo a  $C \times C$ , resultando

$$\begin{aligned}
2n &= \int_{C \times C} c_2(Q') = \\
&= \int_{C \times C} (c_1(f^*R))^2 - c_2(f^*R) \\
&= \int_{C \times C} (c_1(L_2) + c_1(L_1 \otimes L(\Delta)))^2 - c_2(f^*R) \\
&= 2d^2 - 4d + 2 - 2g - (d^2 - d) \\
&= (d-1)(d-2) - 2g
\end{aligned}$$

donde

$$(10.6.4) \quad n = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g.$$

Este é o chamado nº de pontos duplos aparentes de  $C$ . É igual ao nº de pontos duplos de uma projeção plana genérica de  $C$  (cf. 11.3).

### EXERCÍCIOS

1) Seja  $C$  uma curva de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^3$ . Seja  $C' \subset G(2,4)$  a coleção das retas incidentes a  $C$ . Mostre que  $C'$  é uma hipersuperfície e que, na notação de (10.5.2),  $[C'] = d[Z_3]$ . Conclua que existem  $d$  retas incidentes a  $C$  e a 3 outras retas em posição geral.

2) Descreva geradores naturais para  $G(2,5)$ , a grassmanniana de retas projetivas em  $\mathbb{P}^4$ . Calcule a classe da variedade de cordas de uma curva lisa em  $\mathbb{P}^4$ .

§11 OBSTRUÇÕES PARA IMERSÕES E MERGULHOS EM  $\mathbb{P}^m$

Sabemos que toda variedade projetiva não singular de dim. n admite um mergulho (resp. uma imersão) em  $\mathbb{P}^N$  para  $N \geq 2n+1$  (resp.  $N \geq 2n$ ). A possibilidade de mergulhar ou imergir com N menor impõe restrições às classes características da variedade em questão. A filosofia geral para explicitar tais restrições consiste em construir certas "classes de homologia", i.e., classes de ciclos no grupo de Chow com suporte o conjunto dos pontos em que um dado morfismo tem comportamento singular.

O caso das curvas é já bastante instrutivo. Toda curva projetiva lisa se mergulha em  $\mathbb{P}^3$  e daí, uma projeção genérica para  $\mathbb{P}^2$  fornece uma imersão. Esta apresenta um nº finito,  $\delta$ , de pontos duplos. Obteremos a fórmula clássica,

$$\delta = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - g \quad (g = \text{gênero}; d = \text{grau da curva}).$$

Para uma curva em  $\mathbb{P}^3$ , de grau d e gênero g, a condição  $\delta=0$  é necessária e suficiente para mergulhar em  $\mathbb{P}^2$ . (Na realidade,  $\delta=0$  implica que a curva já está contida em um plano em  $\mathbb{P}^3$ ...). A demonstração que daremos poderá servir de indicação para o caso geral (11.4).

Vamos às preliminares necessárias.

11.1 Proposição. Sejam  $f: F \rightarrow Y$  um fibrado vetorial,  $p: \mathbb{P} = \mathbb{P}(F) \rightarrow Y$  o projetivo associado e

$$0_F(-1) =: L \rightarrow p^*F \rightarrow T$$

a sequência tautológica. Sejam  $p_1, p_2$  as projeções  $\mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ . Então:

(1) a diagonal  $\Delta \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}$  é o esquema de zeros de uma seção regular de

$L_1^* \otimes T_2$ , com  $L_i := p_i^* L$ ,  $T_i = p_i^* T$ .

(2) o fibrado tangente relativo  $T(\mathbb{P}/Y)$  é isomorfo a  $L^* \otimes T$ .

Demonstração. Construimos o diagrama de fibrados  $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ ,  
 $Y$

$$\begin{array}{ccc} L_1 & & \\ \downarrow & \searrow & \\ L_2 & \longrightarrow & p_1^* p^* F = p_2^* p^* F \longrightarrow T_2 \end{array}$$

Dado  $(P_1, P_2) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ , a fibra de  $p_i^* L$  sobre  $(P_1, P_2)$  é  $P_i$  (considerado como subespaço de dim.1 de  $f^{-1}(p(P_i))$ ). Logo,  $s$  se anula em  $(P_1, P_2)$  sse  $P_1 = P_2$ , seguindo-se (1) facilmente.

(2) Em geral, dado um fibrado vetorial  $E \rightarrow X$  munido de seção regular  $s$ , sabe-se que o fibrado conormal do esquema de zeros de  $s$  em  $X$  é naturalmente isomorfo à restrição de  $E^*$ . Lembrando que o conormal da diagonal é isomorfo ao cotangente e observando que  $L_1^* \otimes T_2$  restrito a  $\Delta$  é isomorfo a  $L^* \otimes T$ , o resultado segue. //

11.2 Proposição. Seja  $X$  uma curva projetiva lisa e seja  $p: X \rightarrow X' \subset \mathbb{P}^2$  um morfismo birracional não ramificado sobre sua imagem  $X' = p(X)$ . Então existe um divisor efetivo  $D \subset X$  tal que  $p|_{X-D}$  é um isomorfismo e

$$\delta = f[D] = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - g$$

onde  $g = g$  gênero e  $d = d^0 X'$ . ( $D$  é o lugar dos pontos duplos de  $p$ ).

Demonstração. Seja

$$q := p \times p: X \times X \rightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2,$$

e sejam  $q_i: X \times X \rightarrow X$  as projeções, de sorte que temos  $p_i q = p q_i$ . O sub

esquema  $q^{-1}\Delta_{\mathbb{P}^2}$  contém o divisor  $\Delta_X$ . Com a notação de (11.1) com  $Y=.$ ,  $F=\mathbb{A}^3$ , temos que o fibrado

$$(11.2.1) \quad E := q^*(p_1^*L^* \otimes p_2^*T) = q_1^*p^*L^* \otimes q_2^*p^*T$$

admite uma seção cujas expressões locais são múltiplos de uma equação local de  $\Delta_X$ . Portanto, o fibrado

$$(11.2.2) \quad \bar{E} := E \otimes L(-\Delta_X)$$

admite uma seção  $s$  que se anula em  $q^{-1}\Delta_{\mathbb{P}^2} - \Delta_X$  e cuja restrição sobre  $\Delta_X$  fornece o homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} L(\Delta_X)|_{\Delta_X} & \longrightarrow & E|_{\Delta_X} \\ \parallel & & \parallel \\ TX & \xrightarrow{dp} & p^*T\mathbb{P}^2. \end{array}$$

Por hipótese, a aplicação tangente  $dp$  é não nula em cada fibra. Assim, o esquema  $Z(s)$  consiste dos pares  $(P_1, P_2) \in X \times X$  tais que  $P_1 \neq P_2$  e  $p(P_1) = p(P_2)$ . Logo,  $Z(s)$  é finito,  $s$  é regular e podemos escrever (9.8)

$$[Z(s)] = c_2(\bar{E}) \cap [X \times X].$$

Calculamos (cf. Exc. 9-3),

$$\begin{aligned} c_2(\bar{E}) &= c_2(E) + c_1(E)c_1(L(-\Delta_X)) + c_1(L(-\Delta_X))^2 \\ &= c_1(q_1^*p^*L)c_1(q_2^*p^*L) + (c_1(L(\Delta)) - 3c_1(q_1^*p^*L^*)) (c_1L(\Delta)). \end{aligned}$$

Utilizamos, na simplificação de termos, relações como

$$c_1(q_1^*p^*L)c_1(q_1^*p^*L) = 0 \quad (\text{pois } \dim X = 1).$$

e

$$c_1(T) + c_1(L) = 0.$$



Assim vem (cf. Exc. 9-6, 6.14(3)),

$$f[Z(s)] = d^2 - 3d + 2 - 2g.$$

Observando que  $(P_1, P_2) \in Z(s)$  sse  $(P_2, P_1) \in Z(s)$ , podemos tomar

$$D = \frac{1}{2} q_{1*}[Z(s)] \quad \text{em } C_0 X,$$

completando a prova de (11.2). //

**11.3 Observação.** Seja  $X \subset \mathbb{P}^3$  curva projetiva lisa. Sabemos que uma projeção genérica  $p: X \rightarrow \mathbb{P}^2$  satisfaz as condições de (11.2) e nesse caso,  $d^0 X = d^0 X'$ . É imediato que  $p$  é um isomorfismo sobre  $X'$  sse  $\delta = 0$ . Sendo este o caso, como  $p$  é linear temos

$$0_{\mathbb{P}^3(1)}|_X = p^* 0_{\mathbb{P}^2(1)}|_{X'}.$$

Logo,  $H^0(X, \mathcal{O}(1))$  é de dimensão  $\leq 3$  e portanto  $X$  é de fato uma curva plana.

Uma generalização de (11.2) para dimensão arbitrária pode ser formulada como segue (cf. [L]).

**11.4 Teorema.** Seja  $X$  uma variedade completa, lisa de dim.  $n$  e seja  $p: X \rightarrow \mathbb{P}^m$  um morfismo. Seja  $f: X \times X \rightarrow X \times X$  a explosão da diagonal e seja  $\tilde{\Delta} = f^{-1}(\Delta)$  o divisor excepcional. Então existe um subesquema  $\tilde{S} = \tilde{S}(p)$  em  $X \times X$  tal que

- (1)  $\tilde{S} - \tilde{\Delta}$  consiste dos pares  $(x, x')$  tais que  $p(x) = p(x')$
- (2)  $\tilde{S} \cap \tilde{\Delta}$  consiste dos pontos cujas imagens em  $X$  são pontos de ramificação de  $p$  ;
- (3) cada componente de  $\tilde{S}$  é de dim.  $\geq 2n - m$ ;

(4) se  $\bar{S}=\phi$  ou  $\dim \bar{S}=2n-m$ , então  $[\bar{S}]=\bar{D}_m$ , com

$$\bar{D}_m := c_m(f^*E \otimes L(-\bar{\Delta})) \cap [X \times X] \text{ em } A_{2n-m}X \times X$$

onde  $E$  é definido como em (11.2.1);

(5) a imagem de  $\bar{D}_m$  em  $A_{2n-m}X$  é a classe

$$D_m := (dh^{m-n} - \sum_{i=0}^{m-n} \binom{m+1}{i+n+1} h^{m-n-i} s_i(TX)) \cap [X]$$

onde  $h$  denota  $c_1(p^*\mathcal{O}(1))$  e  $d := f^*h^n \cap [X]$ .

Demonstração. O argumento é análogo ao de (11.2). Explodimos a diagonal justamente para construirmos o fibrado

$$\tilde{E} := f^*E \otimes L(-\tilde{\Delta}).$$

Como em (11.2.2),  $\tilde{E}$  é munido de seção  $s$  cujo esquema de zeros  $\tilde{S}$  satisfaz as propriedades (1), ..., (4).

Talvez (2) exija maiores comentários. Lembremos que o divisor excepcional  $\tilde{\Delta}$  se identifica com o fibrado  $\mathbb{P}(TX)$  das direções tangentes de  $X$ . Além disso, o fibrado normal  $L(\tilde{\Delta})_{\tilde{\Delta}}$  se identifica ao subfibrado tautológico  $\mathcal{O}_{TX}(-1)$ . Verifica-se então que a restrição de  $s$  sobre  $\tilde{\Delta}$  induz o homomorfismo indicado ainda por  $s$  no diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{TX}(-1) & \xrightarrow{\quad} & TX|_{\tilde{\Delta}} \\ & \searrow s & \downarrow dp \\ & & T\mathbb{P}^m|_{\tilde{\Delta}} = f^*E|_{\tilde{\Delta}} \end{array}$$

onde a seta vertical provém da aplicação tangente associada a  $p$ . Assim,  $s$  se anula sobre um ponto de  $\tilde{\Delta}$  sse  $p$  é ramificada na imagem desse ponto.

Passemos a (5). Com a notação introduzida em (11.2.1), temos

$$f_* \bar{D}_m = f_* \left( (c_m(f^*E) + \sum_1^m c_1(L(-\bar{\Delta}))^i c_{m-i}(f^*E)) \cap [X \times X] \right)$$

(fórmula de projeção)

$$= c_m(E) \cap [X \times X] - f_* \sum_1^m (c_{m-i}(f^*E) c_1(L(-\bar{\Delta}))^{i-1} \cap [\bar{\Delta}]).$$

Pondo

$$h_i = c_1(q_i^* p^* \theta_{\mathbb{P}^m}(1)), \quad (i=1,2),$$

podemos calcular

$$\begin{aligned} c_m(E) &= \sum_0^m c_1(q_1^* p^* \theta(1))^{m-i} c_i(q_2^* p^* T) \\ &= \sum_0^m h_1^{m-i} h_2^i, \end{aligned}$$

(uma vez que  $c(p^*T) = c(p^*L)^{-1} = (1-h)^{-1} = \sum h^i$ ). Daí vem

$$\begin{aligned} q_{1*} (c_m(E) \cap [X \times X]) &= q_{1*} \sum_0^m (h^{m-i} \cap [X]) \times (h^i \cap [X]) \quad (\text{Ex.4-6}) \\ &= \int_X h^n h^{m-n} \cap [X], \end{aligned}$$

que é o 1º termo do 2º membro de (5). Para calcular os demais termos, sejam  $j: \bar{\Delta} \hookrightarrow X \times X$ ,  $i: \Delta \hookrightarrow X \times X$ ,  $g: \bar{\Delta} = \mathbb{P}(TX) \longrightarrow X = \Delta$  (induzida por  $f$ ). Seja  $u = c_1(\theta_{TX}(1))$ . Temos então

$$f_* \sum_1^m c_{m-i}(f^*E) c_1(L(-\bar{\Delta}))^{i-1} \cap [\bar{\Delta}] =$$

(form. projeção)

$$f_* j_* \sum c_{m-i}(j^* f^* E) c_1(j^* L(-\bar{\Delta}))^{i-1} \cap [\bar{\Delta}] =$$

$$(j^* L(-\bar{\Delta}) = \theta_{TX}(1))$$

$$i_* g_* \Sigma c_{m-i}(g^* i^* E) u^{i-1} \cap [\bar{\Delta}] =$$

(9.3(4), 9.4.4)

$$i_* \Sigma g_* (u^{n-l+i} \cap g^* (c_{m-n-i}(i^* E) \cap [\Delta])) =$$

(9.2)

$$i_* \Sigma c_{m-n-i}(i^* E) s_i(TX) \cap [\Delta].$$

Lembrando (11.1), temos

$$i^* E = p^* T\mathbb{P}^m$$

donde vem

$$c(i^* E) = (1+h)^{m+1} = \Sigma \binom{m+1}{i} h^i,$$

e portanto,

$$c_{m-n-i}(i^* E) = \binom{m+1}{m-n-i} h^{m-n-i},$$

completando a verificação de (5).  
//

11.5 Observações. (1) Se  $X \subset \mathbb{P}^N$  é projetiva e  $p: X \rightarrow \mathbb{P}^m$  é induzida por projeção genérica, demonstra-se que vale  $\dim \tilde{S} = 2n-m$  (cf. J. Roberts, "Generic projections of algebraic varieties", Am. J. Math 93 (1971) 191-214). Neste caso, a classe  $D_m$  é a obstrução para que  $p$  seja um mergulho. Com efeito,  $\tilde{S} \rightarrow q_1 f(\tilde{S})$  é genericamente finita, donde  $D_m$  é a classe de um ciclo efetivo. Como  $X$  é projetiva, tal classe é nula apenas se  $\tilde{S} = \emptyset$ .

(2) Seja  $\tilde{R} = \tilde{S} \cap \bar{\Delta}$  e seja  $R_m$  a imagem da classe  $\bar{\Delta} \cdot \tilde{D}_m$  em  $A_{2n-m-1} X$ . Um cálculo análogo ao da demonstração de 11.4(5) fornece

$$R_m = \sum_0^{m-n+1} \binom{m+1}{n+1} h^{m-n-i+1} s_i(TX) \wedge [X].$$

Se  $\dim \tilde{R} = 2n-m-1$  e  $\tilde{R} \longrightarrow q_1 f(\tilde{R})$  é genericamente finita (hipóteses verificadas para projeções genéricas), segue-se que  $R_m$  é a obstrução para imersão.

(3) Um cálculo imediato fornece a relação

$$h \wedge D_m - D_{m+1} = R_m.$$

Esta nos leva ao surpreendente resultado seguinte, devido a K. Johnson.

11.6 Proposição. Seja  $X$  uma subvariedade lisa de dim.  $n$  em  $\mathbb{P}^N$ ,  $N \leq 2n$ . Se  $X$  pode ser imersa por projeção em um projetivo de dim. inferior então pode ser de fato mergulhada. (cf. [J]).

Demonstração. Se  $X$  pode ser imersa em  $\mathbb{P}^m$  por projeção, obviamente também o pode em  $\mathbb{P}^{m+1}, \dots, \mathbb{P}^{2n-1}$ . Assim  $R_m = R_{m+1} = \dots = R_{2n-1} = 0$ . Portanto,

$$h \wedge D_m - D_{m+1} = R_m = 0$$

$$\vdots$$

$$h \wedge D_{2n-1} - D_{2n} = 0,$$

seguinte-se que

$$h^{2n-m} \wedge D_m = D_{2n}.$$

Mas  $D_{2n} = 0$  (pois  $X \subset \mathbb{P}^{2n}$ ), donde  $D_m = 0$  e  $X$  pode ser mergulhado em  $\mathbb{P}^m$  por projeção. //

11.6 Observações. (1) O resultado acima não tem paralelo na categoria de variedades diferenciáveis: a garrafa de Klein se mergulha em

$\mathbb{R}^4$  e se imerge em  $\mathbb{R}^3$  por projeção sem ser aí possível mergulhá-la.

(2) Fulton e Hansen provaram que um morfismo arbitrário  $X^n \longrightarrow \mathbb{P}^m$  com  $X^n$  projetiva e irredutível não pode ser uma imersão com  $m < 2n$  a menos que já seja um mergulho! (Annals of Math. 110 (1979)).

(3) Podem ser obtidas fórmulas para classes suportadas pelos pontos duplos ou de ramificação para morfismos  $X^n \longrightarrow Y^m$  generalizando o discutido acima. Tanto o enunciado como a demonstração requerem mais teoria de interseção do que apresentamos até o momento. Em particular, faz-se necessário construir a "classe de interseção por um subesquema regularmente imerso de codim.  $\geq 1$ ". No caso acima, socorremo-nos com o privilégio de  $\Delta_{\mathbb{P}^m}$  ser um esquema de zeros de uma seção regular, fato que nos permitiu fazer uma redução ad-hoc da "interseção por  $\Delta_{\mathbb{P}^m}$ ", ao cálculo de classes de Chern.

### Exercícios

1) Seja  $V \subset \mathbb{P}^5$  a superfície de Veronese (imagem de  $\mathbb{P}^2$  pelo morfismo  $(X:Y:Z) \longrightarrow (X^2:Y^2:Z^2:XY:XZ:YZ)$ ). Mostre que  $V$  se mergulha em  $\mathbb{P}^4$  por projeção genérica.

2) Seja  $X^n \subset \mathbb{P}^m$  uma variedade abeliana. Mostre que  $m \geq 2n$ , com igualdade só se  $d^0 X = \binom{2n+1}{n}$ . (Para  $n=1$ , cúbica elítica plana;  $n=2$  é o célebre exemplo de Horrocks-Mumford [HM].)

3) Calcule as classes de obstrução  $D_m, R_m$  da projeção genérica para as variedades de Segre  $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^{r+s+r+s}, m=2(r+s), \dots, r+s+1$ .

§12 INVARIANTES PROJETIVOS CLÁSSICOS

Dada uma variedade projetiva lisa  $X \subset \mathbb{P}^N$ , definem-se invariantes projetivos como os números de hiperplanos que satisfazem a certas condições de osculação com  $X$  e de incidência com subespaços fixos (em posição geral). Por exemplo, para uma curva  $X \subset \mathbb{P}^2$ , temos, além do grau (= nº de interseções com uma reta fixa), a classe-nº de retas tangentes a  $X$  passando por um ponto genérico-bem como os  $n^{\circ}$ s de retas inflexionais e de bitangentes. Historicamente, tais invariantes foram introduzidos antes da aparição do ferramental de topologia algébrica e mesmo antes da conceituação de gênero de uma curva.

Indicaremos um modo de obter esses invariantes em termos das classes características de  $X$ , ou melhor, de  $c_*(TX)$  e  $c_*(\mathcal{O}_X(1))$ .

Observemos inicialmente que as seções hiperplanas de  $X$  definem um sistema linear de divisores em  $X$ . Condições de incidência (e.g., passar por um ponto, conter uma reta...) fornecem subsistemas. As condições de osculação traduzem-se nos tipos de singularidades da seção hiperplana.

Um modelo apropriado para tratar dessa situação e correlatas é o seguinte. É dado um diagrama de esquemas,

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \supset \mathbb{D} \\
 12.1 & & p \downarrow \\
 & & \pi
 \end{array}$$

em que:

(i)  $X$  é liso/ $\mathbb{T}$  de dimensão relativa  $\dim. \text{rel. } X/\mathbb{T} = n$

(ii)  $\mathbb{D}$  é o esquema de zeros de uma seção  $s_{\mathbb{D}}$  de um fibrado em retas  $\mathbb{P}^1 \rightarrow X$ . Imaginamos  $X \rightarrow \mathbb{T}$  como uma família  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  de espaços ambientes, e  $\{\mathbb{D}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  uma família de "pseudo-divisores", i.e., subesquemas localmente definidos por uma equação (permi-tindo-se divisores de zero). Estamos interessados em investigar, por exemplo, o lugar

$$\{x \in X \mid x \text{ é um ponto singular de } \mathbb{D}_t, t=p(x)\},$$

ou, mais geralmente,

$$12.2 \quad m\mathbb{D} := \{x \in X \mid \text{a multiplicidade de } x \text{ em } \mathbb{D}_t \text{ é } \geq m\}.$$

Esta última condição significa que a equação local de  $\mathbb{D}_t$  em  $X_t$  em torno de  $x$  pertence à potência  $m$ -ésima do ideal de  $x$  em  $X_t$ .

12.3 Exemplos. (1) Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$  variedade lisa projetiva. Seja  $\mathbb{T} = \mathbb{P}^{N*}$ , o espaço projetivo dual que parametriza os hiperplanos de  $\mathbb{P}^N$ . Tomamos  $X \times \mathbb{T}$  e definimos o divisor universal da família de seções hiperplanas,

$$\mathbb{D} := \{(P, t) \mid P \in X \cap H_t\} \subset X \times \mathbb{T}$$

onde  $H_t$  denota o hiperplano associado a  $t \in \mathbb{T}$ . Note que  $\mathbb{D}$  é o esquema dos zeros da seção obtida por restrição da seção natural de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{T}}(1)$ . Explicitamente, se  $x_0, \dots, x_N$  são coordenadas homogêneas de  $\mathbb{P}^N$ , e se  $a_0, \dots, a_N$  são coordenadas homogêneas de  $\mathbb{P}^{N*}$ ,  $\mathbb{D}$  é definido por



$$\sum a_i \bar{x}_i = 0,$$

onde  $\bar{x}_i$  denota restrição de  $x_i$  a  $X$ . Neste exemplo,

$${}_2\mathbb{D} = \{(P, t) \mid H_t \text{ é tangente a } X \text{ em } P\}.$$

Se  $N=2$  e  $X$  é uma curva, então

$${}_3\mathbb{D} = \{(P, t) \mid H_t \text{ é reta tangente inflexional}\}.$$

(2) Seja  $X \subset \mathbb{P}^N$  uma hipersuperfície lisa. Seja  $\mathbb{T} = G(2, N+1)$  a grassmanniana de retas (projetivas) em  $\mathbb{P}^N$ . Seja  $R$  o subfibrado tautológico de posto 2 da  $A_{\mathbb{T}}^{N+1}$ , e ponhamos

$$X := \mathbb{P}(R) = \{(t, P) \in \mathbb{T} \times \mathbb{P}^N \mid P \text{ pertence à reta } t\}.$$

Seja

$$\mathbb{D} = X \cap \mathbb{T} \times X = \{(t, P) \mid P \in t \cap X\},$$

divisor universal da família de interseções de  $X$  com retas. Temos agora

$$L = L(\mathbb{D}) = \mathcal{O}_R(d), \quad (d = d^{\circ}X)$$

e

$${}_m\mathbb{D} = \{(t, P) \mid \text{a ordem de contato de } t \text{ com } X \text{ em } P \text{ é } \geq m\}.$$

**12.4 Proposição.** Nas condições de (12.1), (12.2), existe um fibrado vetorial

$$E = E(m; L) \longrightarrow X$$

munido de uma seção  $s_{\mathbb{D}}^m$  com esquema de zeros  ${}_m\mathbb{D}$  e tal que,

$$(12.4.1) \quad c_*(\mathbb{E}) = \prod_{i=1}^m c_*(S_{i-1}(T^*(X/\mathbb{T})) \otimes \mathbb{L})$$

e

$$\text{posto}(\mathbb{E}) = \binom{m+n-1}{n}, \quad n = \dim X/\mathbb{T}.$$

Demonstração. Seja  $I$  o ideal da diagonal  $\Delta \subset X \times X$  e denotemos por  ${}_m\Delta$  o subesquema associado a  $I^m$ . Tensorizamos a sequência exata de  $0_{X \times X / \mathbb{T}}$ -módulos,

$$I^m \hookrightarrow 0_{X \times X / \mathbb{T}} \longrightarrow 0_{{}_m\Delta}$$

pelo feixe  $p_2^*\mathbb{L}$ , obtendo o diagrama

$$(12.4.2) \quad \begin{array}{ccc} & 0_{X \times X / \mathbb{T}} & \bar{s} \\ & \downarrow & \searrow \\ I^m \otimes p_2^*\mathbb{L} & \hookrightarrow & p_2^*\mathbb{L} \longrightarrow 0_{{}_m\Delta} \otimes p_2^*\mathbb{L}. \end{array}$$

Aqui, a seta vertical é  $p_2^*s_{\mathbb{D}}$ . A restrição de  $\bar{s}$  à fibra  $p^{-1}(x) = X_t$  ( $t = p(x)$ ) é nula sse uma expressão local de  $s_{\mathbb{D}}|_{X_t}$  em torno de  $x$  pertence à  $m$ -ésima potência do ideal de  $x$  em  $X_t$ . Seja

$$\mathbb{E} = p_{1*}(0_{{}_m\Delta} \otimes p_1^*\mathbb{L}),$$

o feixe imagem direta. A fibra de  $\mathbb{E}$  sobre um ponto  $x \in X$  é

$$\mathbb{E}_x = (0_{X_t, x} / M^m) \otimes_{\mathbb{K}(x)} \mathbb{L}_x$$

onde  $M$  denota o ideal maximal do anel local de  $X_t$  em  $x$  (com  $t=p(x)$ ). Segue-se que  $E_x$  é um  $\mathbb{k}(x)$ -espaço vetorial de dimensão

$$\dim E_x = \binom{n+m-1}{n}.$$

O diagrama 12.4.2 induz, via imagem direta, o diagrama de feixes de  $\mathcal{O}_X$ -módulos,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & & \\ \downarrow & \searrow s_{\mathbb{D}}^m & \\ p_{1*}(I^m \otimes p_2^* \mathbb{L}) & \hookrightarrow & p_{1*}(p_2^* \mathbb{L}) \longrightarrow \mathbb{E}, \end{array}$$

em que uma expressão local de  $s_{\mathbb{D}}^m$  se identifica ao desenvolvimento de Taylor de ordem  $m-1$  de uma expressão local de  $s_{\mathbb{D}}$ . Assim, o esquema de zeros de  $s_{\mathbb{D}}^m$  é  $m\mathbb{D}$ .

Para calcular  $c(\mathbb{E})$ , escrevemos a sequência exata,

$$I^{m-1}/I^m \hookrightarrow \mathcal{O}_{m\Delta} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{(m-1)\Delta},$$

tensorizamos por  $p_2^* \mathbb{L}$  e aplicamos  $p_{1*}$ , resultando

$$(12.4.3) \quad \begin{array}{ccc} p_{1*}((I^{m-1}/I^m) \otimes p_2^* \mathbb{L}) & \longrightarrow & \mathbb{E}(m; \mathbb{L}) \twoheadrightarrow \mathbb{E}(m-1; \mathbb{L}) \\ \cong & & \\ S_{m-1}(I/I^2) \otimes \mathbb{L} & & (S_i = \text{potência simétrica } i\text{-ésima}) \end{array}$$

O isomorfismo indicado provém de que  $\Delta$  é regularmente imerso em  $X \times X$  e de que,  $I^{m-1}/I^m$  sendo um  $\mathcal{O}_{\Delta}$ -módulo, podemos escrever

$$(I^{m-1}/I^m) \otimes p_2^* \mathbb{L} \simeq I^{m-1}/I^m \otimes p_1^* \mathbb{L}.$$

O homomorfismo  $\mathbb{E}(m; \mathbb{L}) \longrightarrow \mathbb{E}(m-1; \mathbb{L})$  é sobrejetivo porque, na sequência exata longa de imagens diretas, o próximo termo

$$R^1 p_{1*}((I^m/I^{m-1}) \otimes p_2^* \mathbb{L}) = 0.$$

Com efeito, o termo entre parênteses é um  $\mathcal{O}_\Delta$ -módulo e  $p_1: \Delta \longrightarrow X$  é um isomorfismo.

Constatando que

$$\mathbb{E}(1; \mathbb{E}) = \mathbb{L},$$

obtemos por fim

$$c_r(\mathbb{E}(m; \mathbb{L})) = \prod_{i=1}^m c_r(S_{i-1}(I/I^2) \otimes \mathbb{L}),$$

que é a fórmula desejada (lembrando que  $I/I^2 = T^*(X/T)$ , fibrado co-tangente relativo). //

**12.5 Corolário.** Se  $T$  é Cohen-Macaulay e  ${}_m \mathbb{D}$  tem a codim. correta ou é vazio, vale, com  $r = \binom{m+n-2}{n-1}$ ,  $r' = \binom{m+n-1}{n}$ ,

$$\begin{aligned} [{}_m \mathbb{D}] &= c_r(S_{m-1}(T^*(X/T)) \otimes \mathbb{L}) \wedge [{}_{m-1} \mathbb{D}] \quad \text{em } A_*[{}_{m-1} \mathbb{D}], \\ &= c_{r'}(\mathbb{E}(m; \mathbb{L})) \wedge [X] \quad \text{em } A_*[X]. \end{aligned}$$

No restante deste capítulo apresentamos variações sobre o tema "singularidades versus classes características"; a referência básica é o artigo [Ks].

12.6 Grau da variedade dual. Sejam  $X \subset \mathbb{P}^N$  variedade projetiva lisa de dim.  $n$ ,  $\Pi = \mathbb{P}^{N*}$ ,  $\mathbb{X} = X \times \Pi$ ;  $\mathbb{L} = \mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_\Pi(1)$ ;  $\mathbb{D}$  como em 12.3(1). É imediato que  ${}_2\mathbb{D}$  tem dim.  $N-1$ , i.e.,  $\text{codim. } ({}_2\mathbb{D}, \mathbb{X}) = n+N-(N-1) = n+1$ , a correta. Logo, com  $\mathbb{E} = \mathbb{E}(2; \mathbb{L})$ , temos

$$[{}_2\mathbb{D}] = c_{n+1}(\mathbb{E}) \cap [\mathbb{X}],$$

que pode ser calculado levando em conta que

$$c_i(\mathbb{E}) = c_i(\mathbb{L}) \cdot c_i(\mathcal{T}^*(\mathbb{X}/\Pi) \otimes \mathbb{L})$$

e

$$\mathcal{T}(\mathbb{X}/\Pi) = p^*\mathcal{T}X,$$

onde  $p: X \times \Pi \rightarrow X$  denota a projeção. A imagem  $X^*$  de  ${}_2\mathbb{D}$  via  $f: X \times \Pi \rightarrow \Pi = \mathbb{P}^{N*}$  é a variedade dual de  $X$  e consiste dos hiperplanos tangentes a  $X$ . Se  $q: {}_2\mathbb{D} \rightarrow X^*$  for birracional, o grau  $d^{\circ}X^*$  é o nº de hiperplanos tangentes a  $X$  e contendo um  $\mathbb{P}^{N-2}$  genérico em  $\mathbb{P}^N$ . Para calculá-lo, ponhamos

$$u := c_1(\mathcal{O}_X(1)), \quad \tilde{u} := c_1(p^*\mathcal{O}_X(1))$$

$$v := c_1(\mathcal{O}_\Pi(1)), \quad \tilde{v} := c_1(q^*\mathcal{O}_\Pi(1)).$$

Temos então

$$\begin{aligned} d^{\circ}X^* &= \int v^{N-1} \cap [X^*] && \text{(fórmula de projeção)} \\ &= \int \tilde{v}^{N-1} \cap [{}_2\mathbb{D}] \\ &= \int_{\mathbb{X}} \tilde{v}^{N-1} c_{n+1}(\mathbb{E}) \\ &= \int_X p_*(\tilde{v}^{N-1} c_{n+1}(\mathbb{E}) \cap [\mathbb{X}]). \end{aligned} \tag{3.9.2}$$

Ora,

$$c_{n+1}(\mathbb{E}) = \sum_0^n c_k(p^*T^*X)(\tilde{u}+\tilde{v})^{n+1-k},$$

seguinte-se

$$\begin{aligned} d^0X^* &= \int_X p_* \sum_0^n (n+1-k) \tilde{u}^{n-k} \tilde{v}^k c_k(p^*T^*X) \cap [X] \\ &= \int_X \sum_0^n (n+1-k) u^{n-k} c_k(T^*X). \end{aligned}$$

Em particular, se  $X$  é uma curva plana,  $d^0X = d \geq 2$ , então

$$d^0X^* = 2d + d^2 - 3d = d(d-1)$$

(a menos do grau da aplicação de Gauss  $X \rightarrow X^*$ , que é 1 em car.0) (cf. [Pi] para generalizações e [He] para condições de dualidade).

12.7 Pontos de Weierstrass. Sejam  $X$  uma curva projetiva lisa de gênero  $g$ ,  $L$  um fibrado em retas/ $X$ ,  $V$  um subespaço vetorial de dim.  $r+1$  em  $H^0(X, L)$  (= espaço das seções de  $L$ ). Os elementos de  $\Pi := \mathbb{P}(V)$  se identificam a divisores efetivos  $D$  com  $L(D) \simeq L$ . Dizemos que um ponto  $P \in X$  é de Weierstrass com respeito ao sistema linear  $\Pi$  se existir  $D \in \Pi$  com  $D \geq (r+1)P$ . Logo, com

$$\mathbb{D} = \{(P, D) \in X \times \Pi \mid P \in D\},$$

temos a considerar o esquema  ${}_{r+1}\mathbb{D}$ . A imagem  $W(\Pi)$  de  ${}_{r+1}\mathbb{D}$  em  $X$ , formada pelos pontos de Weierstrass, é o esquema dos zeros de uma seção de  ${}_{r+1}A \mathbb{E}(r+1; L)$ . Com efeito, existe um homomorfismo natural

de fibrados definido pela "expansão de Taylor de ordem  $r+1$ ",

$$X \times V \longrightarrow \mathbb{E}(r+1; L)$$

cujo posto em cada  $P \in X$  é  $\leq r$  sse  $P \in W(\Pi)$ . Logo, se  $W(\Pi)$  é finito, podemos calcular

$$\begin{aligned} [W(\Pi)] &= \int_X c_1(\mathbb{E}(r+1; L)) \\ &= \int_X \sum_{k=1}^{r+1} c_1(L \otimes (\mathcal{T}^* X)^{\otimes k-1}) \\ &= (r+1) \int_X c_1(L) + (2g-2) \binom{r+1}{2}. \end{aligned}$$

Em particular, com  $L = \mathcal{T}^* X$  e  $r = g-1$  esta expressão se reduz a

$$g(2g-2) + (2g-2) g(g-1)/2 = g(g-1)(g+1),$$

fórmula para o nº de pontos de Weirstrass clássicos "contados com multiplicidade".

Se  $X$  é plana de grau  $\geq 3$ , com  $L = \mathcal{O}(1)|_X$ ,  $r=2$ ,  $V = H^0(X, L)$ , então  $W(\Pi)$  consiste dos pontos de inflexão. A fórmula acima dá

$$3d + 3d(d-3) = 3d(d-2).$$

12.8 Singularidades da aplicação normal de Gauss. (Cf. McCrory & Shifrin [MS]). Seja  $X \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície lisa de grau  $d \geq 3$ . A aplicação de Gauss,

$$g: X \longrightarrow \mathbb{P}^{3*}$$

associa a cada ponto o plano (projetivo imerso) tangente. Sua imagem

é a superfície dual  $X^*$ . Em coordenadas homogêneas, se  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$  é a equação de  $X$ , temos

$$g(P) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) : \dots : \frac{\partial F}{\partial x_4}(P) \right),$$

e portanto,

$$g^*0_{\mathbb{P}^3}(1) = 0_X(d-1).$$

Para cada  $P \in X$ , a interseção de  $X$  com o plano  $g(P)$  é uma curva singular no ponto  $P$ . É de se esperar que, para  $P$  genérico em  $X$ , a singularidade seja quadrática ordinária, i.e., com 2 retas tangentes distintas. Supondo doravante característica zero, esta condição de não degenerescência é equivalente a exigir que o posto de  $dg_P$  seja 2. Define-se a curva parabólica

$$\Pi = \{P \in X \mid \text{posto}(dg_P) \leq 1\}.$$

Se  $dg_P = 0$ ,  $P$  é dito um ponto planar. Se  $F$  é genérico, não ocorrem pontos planares. Define-se a curva de inflexões assintóticas,

$$\zeta = \{P \in X \mid \exists \text{ reta com contato de ordem } \geq 4 \text{ com } X \text{ em } P\}.$$

Vamos calcular as classes dessas curvas.

Mostremos que  $\Pi$  é o esquema de zeros de uma seção de

$$(\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{A}^1} \mathcal{T}^* X)^{\otimes 2}$$

onde  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(d)$ . Observemos inicialmente que o gráfico de  $g$  se identifica a  ${}^2\mathcal{D}$ , onde  $\mathcal{D} \subset X \times \mathbb{P}^3$  é o divisor universal das seções hi-



perplanas de  $X$ . Lembrando (12.4.3), temos o diagrama com seqüência exata,

$$\begin{array}{ccccc}
 (S_2 T^* X) \otimes L & \longrightarrow & E(3; L) & \longrightarrow & E(2; L) \\
 & \swarrow \sigma & \uparrow s_{\mathbb{D}}^3 & \searrow s_{\mathbb{D}}^2 & \circledast \\
 & & 0 & & \\
 & & X \times \mathbb{P}^{3*} & & 
 \end{array}$$

no qual os elementos pontilhados indicam que a restrição sobre  ${}_2\mathbb{D} = Z(s_{\mathbb{D}}^2)$  produz a seção denotada por  $\sigma$ . Verifica-se que, em coordenadas locais em torno de um ponto  $(P, g(P)) \in {}_2\mathbb{D}$ , a seção  $\sigma$  se identifica com a matriz  $2 \times 2$  hessiana de uma equação local de  $X \cap g(P)$ . Globalmente,  $\sigma$  fornece o homomorfismo ainda indicado

$$\sigma: TX \longrightarrow T^* X \otimes L.$$

Seu determinante,

$${}^2_{\Delta} \sigma: {}^2_{\Delta} TX \longrightarrow {}^2_{\Delta} (T^* X \otimes L)$$

é uma seção do fibrado em retas

$$(L \otimes {}^2_{\Delta} T^* X)^{\otimes 2},$$

com esquema de zeros  $Z({}^2_{\Delta} \sigma) = \Pi$ . Observando que o fibrado denotado por  $L$  em (12.6) quando restrito a  ${}_2\mathbb{D} (= \text{gráfico de } g) \cong X$ , se identifica a

$$0_X(1) \otimes g^* 0_{\mathbb{P}^{3*}}(1) = 0_X(d),$$

obtemos

$$[\Pi] = 2dH + 2K \text{ em } A_1X,$$

onde  $H$  denota a classe de uma seção hiperplana e

$$K = c_1(T^*X) \cap [X]$$

é a classe canônica de  $X$ . Esta última se explicita em vista da sequência exata

$$TX \longrightarrow T\mathbb{P}^3|_X \longrightarrow N = \mathcal{O}_X(d),$$

donde

$$\begin{aligned} c_*(TX) &= (1+h)^4(1+dh)^{-1} \\ &= 1+(4-d)h + (d^2-4d+6)h^2. \end{aligned} \quad (\text{cf. 11.1(2)})$$

Em conclusão, temos

$$(12.8.1) \quad [\Pi] = (2d-2(4-d))H = (4d-8)H.$$

Calculemos em seguida a classe de  $\mathcal{Z}$ . Reportando-nos à situação de 12.3(2) (com  $N=3$ ), consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} {}_4\mathbb{D} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(R) =: \mathbb{X} & & \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \searrow q \\ \mathcal{Z} \subset X \subset \mathbb{P}^3 & & G(2,4) =: \mathbb{T}, \end{array}$$

onde a identificação  $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(R)$  provém de (10.4.4) (com  $r=2$ ). Note que  $\mathbb{D} = \mathbb{P}(T|_X)$ . Vamos obter, de início a classe de  ${}_4\mathbb{D}$  em  $\mathbb{D}$ . Por (12.4), cada componente de  ${}_4\mathbb{D}$  é de  $\text{codim} \leq 4 = \text{posto } \mathbb{E}(4; L)$ . Para  $X$  genérica e de grau  $\geq 4$  pode-se mostrar que

$$\dim_4 \mathbb{D} = 1 \quad (= \dim X - 4).$$

Neste caso, temos

$$[{}_4 \mathbb{D}] = \prod_1^3 c_1(S_1(\tau^*(X/\mathbb{T})) \otimes \mathbb{L}) \cap [\mathbb{D}] \quad \text{em } A_1 \mathbb{D} \quad (\text{por 12.5})$$

onde

$$\mathbb{L} = \mathcal{O}_R(d), \quad (12.3(2))$$

e

$$\tau(X/\mathbb{T}) = (\tilde{A}R) \otimes \mathcal{O}_R(2). \quad (11.1(2))$$

Escrevendo

$$h = c_1(\mathcal{O}_R(1)),$$

$$t = c_1(\mathcal{O}_T(1)),$$

vem

$$\begin{aligned} [{}_4 \mathbb{D}] &= \prod_1^3 ((d-i)h + it) \cap [\mathbb{D}] \\ &= (6t^3 + (11d-18)ht^2 + \dots) [\mathbb{D}] \end{aligned}$$

onde os termos omitidos  $\cap [\mathbb{D}]$  têm imagem nula via  $p_*$ . Com efeito,

$$p_*(t^{2+i} \cap p^*z) = s_i(T) \cap z, \quad z \text{ em } A_* \mathbb{P}^3; \quad (9.2)$$

lembrando a sequência tautológica,

$$\mathcal{O}(-1) \longrightarrow A_{\mathbb{P}^3}^4 \longrightarrow T,$$

temos

$$\begin{aligned} s_*(T) &= s_*(O(-1))^{-1} \\ &= c_*(O(-1)) = 1-h. \end{aligned}$$

Daí resulta

$$\begin{aligned} [\tau] &= p_*[4D] \\ &= (6(-h) + (11d-18)h) \cap [X] \\ &= (11d-24) [H]. \end{aligned}$$

Uma vez estabelecido o produto de ciclos em  $A_*X$  (cf. (13.14)), as fórmulas acima obtidas para  $[\Pi]$ ,  $[\tau]$  fornecem o número

$$(4d-8)(11d-24)d$$

de interseções das curvas  $\Pi, \tau$  em  $X$ , contados com multiplicidade. De acordo com [MS], para  $X$  genérica  $\Pi$  e  $\tau$  são lisas e tangentes em cada ponto de  $\Pi \cap \tau$ .

### Exercícios

1) Seja  $X$  uma curva projetiva lisa e seja  $S$  um sistema linear em  $X$ . Sejam  $\Pi = \{(D, P) \in S \times X \mid D \geq 3P\}$ ,  $\mathbb{X} = \Pi \times X$ ,  $\mathbb{D}' = \{(D, P, Q) \in \mathbb{X} \mid D \geq Q\}$ ,  $\mathbb{D}'' = \{(D, P, Q) \in \mathbb{X} \mid P=Q\}$ . Mostre que  $\mathbb{D} := \mathbb{D}' - 3\mathbb{D}''$  é um divisor de Cartier efetivo em  $\mathbb{X}$ . Calcule  $L(\mathbb{D})$  em termos de  $L(D)$  e do fibrado tautológico de  $S (\simeq \mathbb{P}^n)$ . Mostre que  $2\mathbb{D} = \{(D, P, Q) \mid D \geq 3P + 2Q\}$ . Suponha  $X \subset \mathbb{P}^3$ , não plana, e  $S = \{\text{seções planas de } X\}$ . Calcule o nº de planos osculadores de  $X$  que admitem um 2º ponto de tangência (i.e., cortam em  $X$  um divisor da forma  $3P + 2Q + \dots$ ).

2) Adapte a construção acima para calcular o nº de retas bitangentes de uma curva plana lisa.

§13 O ANEL DE CHOW.

Descreveremos neste capítulo a construção de Fulton para a classe de interseção de um ciclo por um subesquema regularmente imerso de codim. arbitrária. Dela resulta, em particular, a construção de um produto

$$A_*Y \otimes A_*Y \longrightarrow A_*Y$$

para uma variedade não singular  $Y$ , munindo  $A_*Y$  de uma estrutura natural de anel satisfazendo às propriedades esperadas.

Estudaremos o diagrama básico,

$$(13.1) \quad \begin{array}{ccc} C \subseteq N & \xrightarrow{\pi} & W \xrightarrow{j} V \\ & & \downarrow f \\ & & X \xrightarrow[i]{} Y \\ & & \downarrow g \end{array}$$

onde: (1)  $i$  denota uma imersão regular de codim.  $r$  (i.e., o ideal de  $X$  em  $Y$  é localmente gerado por uma sequência regular de comprimento  $r$ ); (2)  $V$  denota um esquema de dim. pura  $k$ ; (3)  $W = f^{-1}X$ ; (4)  $N =$  imagem recíproca do fibrado normal  $N_X Y$  e (5)  $C = C_W V$  é o cone normal de  $W$  em  $V$ .

Nestas condições, definiremos a classe de interseção de  $V$  por  $X$  em  $Y$ , denotada

$$X \cdot V \in A_{k-r} W.$$

Em particular, para  $W$  de dim. pura  $k-r$ , a classe  $X \cdot V$  é um ciclo bem definido, combinação linear das componentes irredutíveis de  $W$  (pois  $C_{k-r} W = A_{k-r} W!$ ). Em particular, se  $f: V \hookrightarrow Y$  é a inclusão de um subesquema de  $Y$  e a interseção  $X \cap V$  é própria, teremos  $X \cdot V$  escrito como combinação linear das componentes irredutíveis de  $X \cap V$ .

Seja  $I$  o feixe de ideais de  $X$  em  $Y$  e seja  $J=f^{-1}I$  o ideal de  $W$  em  $V$ . Temos os epimorfismos de  $\mathcal{O}_W$ -módulos,

$$(13.1.1) \quad g^*(I^n/I^{n+1}) = g^*i^*I^n \longrightarrow j^*J^n = J^n/J^{n+1}, \quad n=0,1,\dots$$

que fornece a imersão fechada do cone normal de  $W$  em  $V$ ,

$$C_W V := \text{Spec } \bigoplus J^n/J^{n+1} \subset (C_X Y) \times_X W$$

na imagem recíproca do cone normal de  $X$  em  $Y$  via  $g$ . Agora a hipótese de imersão regular implica que

$$\bigoplus I^n/I^{n+1} = \bigoplus S_n(I/I^2) \quad (\text{cf. [MA] p. 110})$$

e portanto, o cone  $C_X Y$  é o fibrado normal  $N_X Y = \text{Spec } \bigoplus S_n(I/I^2)$ . Escrevamos

$$N := g^*N_X Y = C_X Y \times_X W,$$

fibrado de posto  $r (= \text{codim}(X, Y))$ , de sorte que  $C := C_W V$  é um subcone de  $N$ ,

$$(13.1.2) \quad \begin{array}{c} C \subseteq N \\ \downarrow \pi \\ W \end{array}$$

13.2 Definição. A classe de interseção de  $V$  por  $X$  em  $Y$ , denotada

$$X \cdot V \quad (\text{ou } X_{\mathbb{F}}^! V \text{ ou } i^! V)$$

é a única classe em  $A_* W$  tal que

$$\pi^*(X \cdot V) = [C] \text{ em } A_* N$$

A existência e unicidade decorrem de (10.2).

Mais precisamente, temos  $X \cdot V$  em  $A_{k-r}W$ , pois  $C$  é de dim. pura  $k$ , conforme o seguinte

**13.3 Lema.** Seja  $V$  um esquema de dim. pura  $k$  e seja  $W \subset V$  um subesquema. Então  $C_W V$  é de dim. pura  $k$ .

Demonstração. O cone  $C=C_W V$  é um aberto denso do projetivizado  $\mathbb{P}(C \times \mathbb{A}^1)$ . Este, por sua vez, é o divisor excepcional da explosão de  $V \times \mathbb{A}^1$  ao longo de  $W \times \{0\}$ . Como o divisor excepcional é de codim. pura 1, segue o lema. //

**13.3.1 Exemplos.** (1) Suponhamos  $X$  de dim. pura  $k$  e tomemos  $V=X$ ,  $f=i$  em (13.1). Então  $W=X$  e  $C$ =imagem da seção nula de  $N$ . Por (10.2.2), segue a

Fórmula de autointerseção :  $X \cdot X = c_r(N) \cap [X]$  em  $A_{k-r}X$ .

(2) Se  $W \hookrightarrow V$  é também imersão regular da mesma codim.  $r$ , então  $C=N$ . Com efeito, (13.1.1) é um epimorfismo de módulos localmente livres de mesmo posto. Logo,

$$X \cdot V = [W] \text{ em } A_{k-r}W$$

i.e., neste caso, a classe de interseção é a classe do esquema interseção. Tal ocorre notadamente se  $V$  for Cohen-Macaulay ao longo de cada componente de  $W$  e se  $\dim W = k-r$ .

**13.4 Lema.** A classe de interseção (13.2) coincide com a definida em (6.13) para codim.  $r=1$ .

Demonstração. Suponhamos em (13.1) que  $f:V \hookrightarrow Y$  é a inclusão de uma subvariedade e que  $X$  é um divisor de Cartier efetivo em  $Y$ . Se  $V \subset X$  então  $W=V=C$ , mergulhado em  $N$  pela seção nula.

Segue-se que  $C$  é o esquema de zeros de uma seção regular de  $\pi^*N = N \times N$ ,  
 $W$   
 definida por  $v \mapsto (v, 0)$ ,  $v \in N$ , valendo então

$$[C] = c_1(\pi^*N) \cap [N] \text{ em } A_k N \quad (k = \dim V) \quad (7.1.1)$$

$$= \pi^*(c_1(N) \cap [W]) \quad (9.4.4)$$

donde, por definição,

$$X \cdot V = c_1(N) \cap [W] \text{ em } A_{k-1} W,$$

como em (6.13).

Se  $V \not\subset X$  então  $W$  é um divisor de Cartier em  $V$ , valendo as condições de 13.3.1 (2), i.e.,

$$X \cdot V = [W] \text{ em } A_{k-1} W$$

$$= c_1(L(X)) \cap V,$$

coincidindo com o prescrito em (6.13). //

13.5 Lema Com a notação de 13.1, seja  $\bar{C} := \mathbb{P}(C \times \mathbb{A}^1) \subseteq \mathbb{P}(N \times \mathbb{A}^1)$  o fecho projetivo do cone  $C$ . Seja  $\bar{\pi}: \mathbb{P}(N \times \mathbb{A}^1) \rightarrow W$  e seja  $Q$  o quociente tautológico de posto  $r$  de  $\bar{\pi}^*N \times \mathbb{A}^1$ . Temos então

$$X \cdot V = \bar{\pi}_*(c_r(Q) \cap [\bar{C}]) \text{ em } A_{k-r} W.$$

Demonstração. Tendo em vista que

$$\bar{C} \cap N = C,$$

o resultado segue de (10.2.3). //

13.5.1 Observação. Mesmo se  $W$  apresentar a dim. correta  $(k-r)$ ,  $X \cdot V$  se



rã, em geral, um ciclo "menor" do que  $[W]$  (cf. Exemplo 1.5(2) com  $t=0$ ).

**13.6 Definição.** Cada componente irredutível de  $W$  de dim.  $k-r$  é dita uma componente própria da interseção de  $V$  por  $X$ . A multiplicidade ou índice de interseção de  $V$  por  $X$  em  $Y$  ao longo de uma componente própria  $Z$  é o coeficiente  $i(Z, X \cdot V; Y)$  (ou  $i(Z)$ ) de  $Z$  em  $X \cdot V$  (cf. Exc.2-4). Temos assim

$$(13.6.1) \quad X \cdot V = \sum i(Z)Z \quad \text{em } A_{k-r}W.$$

**13.7 Proposição.** (1) Nas condições de (13.1), cada componente irredutível de  $W$  é de dim.  $\geq k-r$ ;

Se  $Z$  é uma componente própria de  $W$  então temos

$$(2) \quad 1 \leq i(Z) \leq \ell(O_{W,Z}), \text{ e}$$

(3)  $i(Z) = \ell(O_{W,Z})$  sse o ideal de  $W$  em  $V$  é gerado, localmente em  $O_{V,Z}$ , por uma sequência regular de comprimento  $r (= \text{codim}(X, Y))$ .

**Demonstração.** (1) Seja  $Z$  uma componente irredutível de  $W$ . Seja  $V^0$  o aberto complementar em  $V$  das demais componentes irredutíveis de  $W$  e sejam  $Z^0 = Z \cap V^0$ ,  $W^0 = W \cap V^0$ . Assim,  $Z^0$  é a única componente de  $W^0$ . Além disso, verifica-se facilmente que  $C^0 := C_{W^0}V^0 = (C_W V) \times_W W^0$ . (Em geral, a formação do cone normal comuta com mudança plana de base). Da inclusão

$$C^0 \subseteq N^0 := N_{|W^0}$$

resulta a desigualdade

$$k = \dim C^0 \leq \dim Z + r.$$

(2) Mantendo a notação acima, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A_{k-r}W & \xrightarrow{g^*} & A_kN \\
 \omega^* \downarrow & & \downarrow \\
 A_{k-r}W^0 & \xrightarrow{(g|_{W^0})^*} & A_kN^0,
 \end{array}$$

onde  $\omega: W^0 \hookrightarrow W$  denota a inclusão. É imediato que

$$\omega^*(X \cdot V) = X \cdot V^0$$

e que

$$i(Z, X \cdot V) = i(Z^0, X \cdot V^0).$$

Assim, podemos supor que  $Z$  é a única componente de  $W$ , e consequentemente,  $N|_Z$  é a única componente, tanto de  $N$  como de  $C$ . Temos assim

$$[C] = \lambda \cdot [N|_Z], \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{Z},$$

$$[N] = \ell \cdot [N|_Z]$$

e evidentemente vale

$$1 \leq \lambda \leq \ell.$$

Como  $g^*[Z] = [N|_Z]$ , segue-se que  $\lambda = i(Z)$ . Por fim, temos

$$\ell = \ell(\mathcal{O}_{W,Z})$$

por (4.4) (com  $f = \pi: N \rightarrow W$ ) ou por verificação direta.

(3) Se o ideal  $J$  de  $W$  em  $\mathcal{O}_{V,Z}$  é gerado por uma sequência regular de comprimento  $r$ , (13.1.1) é um isomorfismo numa vizinhança do ponto genérico de  $Z$ . Portanto,  $C=N$  sobre um aberto de  $W$ , donde  $\lambda = \ell$ . Deixamos a recíproca a cargo do leitor. //

13.8 Observações (1) O resultado acima indica em que medida a definição "ingênua" da multiplicidade de interseção ( $\ell(\mathcal{O}_{W,Z})$ ) difere da "correta" (via cone normal). O cálculo das multiplicidades das componentes do cone normal é em geral uma questão não trivial.

(2) Uma condição suficiente para a igualdade  $\ell=i$  em 13.7(3) é de que  $\mathcal{O}_{V,Z}$  seja Cohen-Macaulay (e.g.  $V$  liso).

(3) A desigualdade em 13.7(1) pode não ocorrer na falta de condições de regularidade, e.g.  $X, Y$  e  $V$  subvariedades de  $\mathbb{A}^4$  definidas respectivamente por  $X=Y=0, XZ=YW$  e  $Z=W=0$ .

13.9 Proposição. (Critério de multiplicidade 1). Seja  $Z$  uma componente própria da interseção de  $V$  por  $X$  em  $Y$ . Sejam  $A=\mathcal{O}_{V,Z}$ ,  $M$  o ideal maximal de  $A$  e  $J$  o ideal de  $A$  gerado pelo ideal de  $X$  em  $Y$ . Então  $i(Z)=1$  se ( $A$  é regular e)  $J=M$ . (Se  $V$  é uma variedade vale a recíproca).

Demonstração. Com a notação de (13.7), (13.1), temos

$$\mathcal{O}_{W,Z} = A/J$$

Logo, se  $J=M$ , segue-se  $i(Z)=\ell(A/J)=1$  por (13.7). //

13.9.1 Observação. Como  $\dim A=r$  e  $J$  é gerado por  $r$  elementos, a condição  $J=M$  implica  $A$  regular. Se  $X$  e  $V$  são subvariedades de  $Y$  e o ideal maximal de  $\mathcal{O}_{Y,Z}$  é soma dos ideais de  $X$  e de  $V$ , então  $i(Z)=1$ . Se  $\mathcal{O}_{Y,Z}$  é regular (e.g.,  $Y$  não singular), esta última condição é equivalente a que  $X, V$  sejam genericamente transversais ao longo de  $Z$ .

O próximo ponto é mostrar que a classe de interseção respeita equivalência racional.

Mantendo a notação de (13.1), definimos homomorfismos

$$i^!: C_m V \longrightarrow A_{m-r} W.$$

pela fórmula

$$i^! \Sigma_n [Z_i] = \Sigma_n X \cdot Z_i$$

para subvariedades  $Z_i \subset V$  de dim.m. Note que cada  $X \cdot Z_i$  é de fato uma classe que provem de  $A_{m-r} (X \times_Y Z_i)$ .

13.10 Teorema.  $i^!$  respeita equivalência racional, i.e.,  $i^! R_* V = 0$  e portanto, induz homomorfismos

$$i^!: A_m V \longrightarrow A_{m-r} W.$$

Em especial, com  $V=Y$  e  $f=I$ , obtemos  $i^!: A_m Y \longrightarrow A_{m-r} X$ .

Demonstração. O caso  $r=1$  é o conteúdo de (8.3). O caso geral se deduz mediante a importante técnica de deformação ao fibrado normal.

Seja  $C := C_W V$ . Para cada subvariedade  $Z \subset V$  o cone normal  $C_{Z \cap W} Z$  é uma subvariedade de  $C$  de dim.m. = dim  $Z$ . Definimos o homomorfismo

$$\sigma: C_m V \longrightarrow C_m C$$

$$\Sigma_n Z_i \longmapsto \Sigma_n [C_{Z_i} \cap W^{Z_i}].$$

É imediato que a composta

$$C_m V \xrightarrow{\sigma} C_m C \longrightarrow C_m N \longrightarrow A_m N \xrightarrow{\sim} A_{m-r} W$$

coincide com  $i^!: C_m V \longrightarrow A_{m-r} W$ . O ponto crucial é provar que  $\sigma$  respeita equivalência racional.

13.11 Lema (Deformação ao cone normal). Seja  $W$  subesquema de  $V$ . Então existem morfismos,

$$\begin{array}{ccc}
 W \times \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\psi} & M = M_W V \\
 \pi \searrow & & \swarrow \phi \\
 & & \mathbb{A}^1
 \end{array}$$

tais que:

- (1)  $\psi$  é imersão fechada;
- (2)  $\phi$  é plano de dim.rel. = dimV;
- (3) para  $t \neq 0$  em  $\mathbb{A}^1$  a imersão  $\psi_t: W \times \{t\} \hookrightarrow M_t := \phi^{-1}(t)$  é isomorfa à dada inclusão  $W \hookrightarrow V$  enquanto que  $\psi_0$  se identifica ao mergulho de  $W = W \times \{0\}$  como a seção nula do cone  $C := C_W V = M_0$ ;
- (4) O complementar de  $C$  em  $M$  se identifica a  $V \times \mathbb{A}^1 - \{0\}$ ;
- (5) para cada subvariedade  $Z \subset V$ , temos que  $M_Z \cap_W Z$  é uma subvariedade de  $M_W V$  que intersecta  $C_W V$  em  $C_Z \cap_W Z$ .

Pressupondo o lema por um instante, completemos a verificação de que  $\sigma$  (13.9.1) respeita equivalência racional.

Sejam  $\alpha: C \hookrightarrow M$ ,  $\beta: M - C = V \times \mathbb{A}^1 - \{0\} \hookrightarrow M$  as inclusões. Consideremos o diagrama com sequência exata (5.1),

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{m+1} C & \xrightarrow{\alpha_*} & C_{m+1} M & \xrightarrow{\beta_*} & C_{m+1} V \times \mathbb{A}^1 - \{0\} \\
 & & \downarrow \alpha^* & \swarrow \alpha' & \uparrow \pi^* \\
 & & A_m C & \longleftarrow \dots \longrightarrow & C_m V.
 \end{array}$$

O homomorfismo  $\alpha^*$  é o de interseção com  $C$  (8.4). A seta pontilhada  $\alpha'$  provem de que  $\alpha^* \alpha_* = 0$ . Esta última relação segue de (8.5), uma vez que o fibrado  $L(C)$  é trivial, pois  $C$  é principal. Ora,  $\alpha' \pi^*$  certamente respeita equivalência racional. Resta ver que  $\alpha' \pi^*$  é induzido por  $\sigma$ .

Para tal, seja  $Z$  subvariedade de  $V$ . Temos  $\pi^*[Z] = \beta^*[M_Z \cap_W Z]$  ((4) e (5) do lema) e portanto,

$$\begin{aligned} \alpha' \pi^*[Z] &= \alpha^*[M_Z \cap_W Z] \\ &= C \cdot [M_Z \cap_W Z] \\ &= [C_Z \cap_W Z] && \text{(por (5) do lema)} \\ &= \sigma[Z] \quad \text{em } A_*C, \end{aligned}$$

como queríamos. //

13.11.1 Demonstração do lema (13.11). Seja  $\bar{M} = \bar{M}_W V$  a explosão de  $V \times \mathbb{A}^1$  ao longo de  $W \times \{0\}$ . Apresentamos no diagrama seguinte os atores; a descrição dos respectivos papéis fornecerá as propriedades (1)...(5) desejadas:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(C \times \mathbb{A}^1) & \xrightarrow{\alpha} & \bar{M} & \longleftrightarrow & \bar{M}_0 = \mathbb{P}(C \times \mathbb{A}^1) + \tilde{V} \\ \downarrow & \nearrow \psi & \downarrow & \searrow \phi & \searrow \\ W \times \{0\} \subset W \times \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\quad} & V \times \mathbb{A}^1 & \searrow & \mathbb{A}^1 \ni 0 \end{array}$$

Sabendo-se que o cone normal de  $W \times \{0\}$  em  $V \times \mathbb{A}^1$  é  $C \times \mathbb{A}^1$ , com  $C = C_W V$  e que o divisor excepcional é a projetivização do cone normal, estabelecemos o papel da inclusão indicada por  $\alpha$ . Como  $W \times \{0\}$  é um divisor de Cartier em  $W \times \mathbb{A}^1$ , a explosão deste se identifica ao próprio e se mergulha em  $\bar{M}$  mediante  $\psi$ . A explosão  $\tilde{V}$  de  $V \times \{0\}$  ao longo de  $W \times \{0\}$  se mergulha em  $\bar{M}$  como um divisor de Cartier; ademais, temos

$$V \cap \mathbb{P}(C \times \mathbb{A}^1) = \mathbb{P}(C),$$

$$\mathbb{P}(C \times \mathbb{A}^1) - \mathbb{P}(C) = C.$$

(cf. 13.11.2)

A imagem de  $\psi$  intersecta  $\mathbb{P}(C \times \mathbb{A}^1)$  em  $W \times \{0\}$  mergulhado como a seção nula de  $C \rightarrow W$ ; em particular ela é disjunta de  $\tilde{V}$ . Portanto,  $\psi$  se fatora pelo aberto

$$M := \overline{M} - \tilde{V}.$$

Agora, para  $t \neq 0$  em  $\mathbb{A}^1$ , temos

$$\psi_t: W \times \{t\} \hookrightarrow M_t = V \times \{t\}$$

que se identifica à inclusão  $W \hookrightarrow V$ . E para  $t=0$ ,

$$\psi_0: W \times \{0\} \hookrightarrow M_0 = C,$$

uma vez verificado que  $\overline{M}_0 = \mathbb{P}(C \times \mathbb{A}^1) + \tilde{V}$ , soma de divisões de Cartier. Para tanto, devemos mostrar que a equação local,  $t$ , de  $\overline{M}_0$  em  $\overline{M}$  é produto de equações locais dos outros divisores. Podemos supor

$$V = \text{Sp}(A)$$

$$I = \text{ideal de } W \text{ em } V,$$

de sorte que

$$V \times \mathbb{A}^1 = \text{Sp}(A[t]),$$

$$I[t] = \text{ideal de } W \times \{0\} \text{ em } V \times \mathbb{A}^1.$$

Procedendo como na demonstração de (8.2), temos que os abertos da forma

$$\text{Sp}(I[t]_c), \text{ com } c \in I,$$

recobrem uma vizinhança de  $\overline{M}_0$ . Vê-se então que  $t/c$  é equação local de  $\tilde{V}$ , pois gera o núcleo do homomorfismo natural  $I[t]_c \rightarrow I_c$ . Lembran-

do que  $c$  é equação local do divisor excepcional, a relação

$$t/1 = (c/1)(t/c) \text{ em } I[t]_c$$

demonstra o que queríamos.

As asserções (1)...(5) do lema seguem da construção de  $M$  feita acima. (5), por exemplo, decorre de que  $\bar{M}_{Z \cap W} Z$  se mergulha em  $\bar{M}_W V$ , com

$$(\bar{M}_{Z \cap W} Z) \cap \mathbb{P}(C \times \mathbb{A}^1) = \mathbb{P}(C' \times \mathbb{A}^1),$$

onde  $C' = C_{Z \cap W} Z$ , por propriedades gerais da explosão explicitadas abaixo. //

13.11.2 Observações. Dado o diagrama cartesiano,

$$\begin{array}{ccc} W' & \subset & V' \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \subset & V \end{array}$$

temos um diagrama comutativo induzido pelas explosões,

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{P}(C_{W'} V') & \hookrightarrow & B_{W'} V' \\ & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\ W' & & & \hookrightarrow & V' \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}(C_W V) & \hookrightarrow & B_W V \\ W & & & \hookrightarrow & V \\ \downarrow & & \swarrow & & \swarrow \\ & & W & \hookrightarrow & V \end{array}$$

em que as faces, à exceção das laterais direita e esquerda, são produtos fibrados. (cf. [Hartshorne] p. 164, 165).



13.12 Proposição. (Compatibilidade com imagens diretas e recíprocas).

Dado um diagrama cartesiano com  $i$  nas condições de (13.1),

$$\begin{array}{ccccc} W' & \xrightarrow{q} & W & \xrightarrow{g} & X \\ j' \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow i \\ V' & \xrightarrow{p} & V & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

temos que:

(1) se  $p$  é próprio então, para cada  $z'$  em  $A_k V'$ , vale

$$q_* i' z' = i' p_* z' \quad \text{em } A_{k-r} W$$

(2) se  $p$  é plano de dim. rel.  $n$  então, para cada  $z$  em  $A_k V$ , temos

$$q_* i' z = i' p_* z \quad \text{em } A_{k+n-r} W'.$$

Demonstração. (1) Podemos supor  $z=V'$ ,  $V'$  uma variedade e  $V=p(V')$ . Sejam  $\bar{M}:=\bar{M}_W V$ ,  $\bar{M}':=\bar{M}_{W'} V'$  como em (13.11.1). Conforme observação acima, temos um diagrama cartesiano induzido por  $f$ ,

$$\begin{array}{ccc} \bar{C}' := \mathbb{P}(C' \times \mathbb{A}^1) & \hookrightarrow & \bar{M}' \\ \downarrow G & & \downarrow F \\ \bar{C} := \mathbb{P}(C \times \mathbb{A}^1) & \hookrightarrow & \bar{M}. \end{array}$$

Temos também o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} W' & \xleftarrow{\bar{\pi}'} & \mathbb{P}(q^* N \times \mathbb{A}^1) & \hookrightarrow & \bar{C}' \\ q \downarrow & & \downarrow H & & \downarrow G \\ W & \xleftarrow{\bar{\pi}} & \mathbb{P}(N \times \mathbb{A}^1) & \hookrightarrow & \bar{C} \end{array}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
 q_* i^! V' &= q_* \bar{\pi}_* (c_T (H^* Q) \cap [\bar{C}']) & (13.5) \\
 &= \bar{\pi}_* (c_T(Q) \cap H_*[\bar{C}']) \\
 &= \bar{\pi}_* (c_T(Q) \cap d[\bar{C}]), \quad d = d^0_F.
 \end{aligned}$$

A última igualdade decorre de

$$\begin{aligned}
 H_*[\bar{C}'] &= G_*[\bar{C}'] & \text{em} & \quad C_*\bar{C} \\
 &= F_*[F^*\bar{C}] & & \\
 &= d[\bar{C}] & & (7.1.2)
 \end{aligned}$$

(2) A condição de platitude implica que

$$C_W^* V' = W' \times_W C_W^* V.$$

A verificação agora é simples, reduzindo ao caso  $z=V$ . //

**13.12.1 Lema.** Seja  $s: X \rightarrow E$  seção de um fibrado vetorial  $\pi: E \rightarrow X$  de posto  $r$ . Então o homomorfismo  $s!: A_k E \rightarrow A_{k-r} X$  (13.10) é o isomorfismo inverso de  $\pi^*: A_{k-r} X \rightarrow A_k E$  (10.2).

**Demonstração.** Seva  $V$  subvariedade de dim.  $k-r$  em  $X$ . Devemos mostrar que  $s! \pi^* V = V$  em  $A_{k-r} X$ . Por construção de  $s!$ , reportamo-nos ao diagrama cartesiano (13.1), com  $i=s$ ,  $f$ =inclusão de  $\pi^{-1}V$  em  $E$ :

$$\begin{array}{ccc}
 V & \longrightarrow & \pi^{-1}V \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{s} & E.
 \end{array}$$

Agora é óbvio que  $C_V \pi^{-1}V = E_V$  e portanto,  $s! \pi^* V = V$ . //

13.1 3 Proposição. Com a notação de (13.1), suponha que  $X$  é o esquema de zeros de uma seção regular,  $s$ , de um fibrado  $E \rightarrow Y$ . Temos então

$$j_*(X \cdot V) = c_r(f^*E) \cap V \quad \text{em } A_{k-r}V.$$

Demonstração. Consideremos o diagrama de produtos fibrados,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & V & \xrightarrow{s_f^*E} & f^*E \\
 & & & \downarrow & \searrow f^*s & \downarrow \\
 & & & C_W V & \xrightarrow{j} & W & \xrightarrow{j} & V & \xrightarrow{j} & V \\
 & & & \downarrow & \searrow i & \downarrow f & & & & Y & \xrightarrow{s_E} & E \\
 & & & X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{s} & E
 \end{array}$$

onde  $s_E: Y \rightarrow E$  denota a seção nula. Da análise desse diagrama e da definição (13.2) segue-se que,

$$X \cdot V = i^!V = (f^*s)^!(s_{f^*E})_*V.$$

Com efeito,  $i^!V$  (resp.  $(f^*s)^!(\dots)$ ) se calcula pela face frontal (resp. superior) do diagrama. Em ambos os casos, a imagem recíproca a  $W$  do fibrado normal é  $j^*f^*E$ , e os cones normais coincidem.

Aplicando à seção  $f^*s$  o lema anterior, vem que

$$\begin{aligned}
 j_*(f^*s)^!(s_{f^*E})_*V &= (\pi^*)^{-1}(s_{f^*E})_*V \\
 &= c_r(f^*E) \cap V \quad (10.2.2) //
 \end{aligned}$$

13.14 Teorema (Construção do anel de Chow) Seja  $Y$  uma variedade não singular de dim.  $n$  e seja  $\delta = \delta_Y: Y \hookrightarrow Y \times Y$  a diagonal. Então o homomorfismo composto

$$A_*Y \otimes A_*Y \longrightarrow A_*Y \times Y \xrightarrow{\delta^!} A_*Y$$

$$V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V_1 \times V_2 \longrightarrow V_1 \cdot V_2 := \Delta \cdot V_1 \times V_2$$

define em  $A_*Y$  uma estrutura de anel comutativo, associativo e com unidade ( $=[Y]$ ).

Demonstração. Suporemos, por simplicidade, que  $Y$  satisfaz as seguintes

13.14.1 *hipóteses adicionais:*

(1)  $Y$  é completa

(2) A diagonal  $\Delta \subset Y \times Y$  é o esquema de zeros de uma seção regular  $s$  de um fibrado  $E \longrightarrow Y \times Y$

(As grassmannianas satisfazem (1) e (2).).

Comutatividade. Seja  $\sigma$  a involução de  $Y \times Y$  definida por  $\sigma(P, Q) = (Q, P)$ .

É óbvio que  $\Delta$  também é o esquema de zeros de  $\sigma^*s$ . Sejam  $V_1, V_2$  subvariedades. Consideremos o diagrama cartesiano,

$$\begin{array}{ccc} V_{12} & \xrightarrow{c_j} & V_1 \times V_2 \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{c_\delta} & Y \times Y \end{array}$$

Por (13.13) temos

$$f_*j_* V_1 \cdot V_2 = \delta_* V_1 \cdot V_2 = c_n(E) \cap [V_1 \times V_2] \text{ em } A_*Y \times Y.$$

Dado que  $p: Y \times Y \longrightarrow Y$  é próprio (por (1)), de  $p\delta = I$  segue  $p_*\delta_* = I$  e portanto  $\delta_*$  é injetiva. Por outro lado, temos  $\sigma\delta = \delta$ . Daí vem

$$\begin{aligned} \delta_* V_1 \cdot V_2 &= \sigma_*(c_n(E) \cap [V_1 \times V_2]) \\ &= c_n(\sigma^*E) \cap [V_2 \times V_1] && (\sigma_* = \sigma^*) \\ &= \delta_* V_2 \cdot V_1 && (13.13 \text{ aplicado a } \sigma^*s). \end{aligned}$$

Associatividade. Construímos o diagrama cartesiano,

$$\begin{array}{ccccc}
 V_{123} & \longrightarrow & V_{12} \times V_3 & \longrightarrow & V_1 \times V_1 \times V_3 \\
 \downarrow h & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{\delta} & Y \times Y & \xrightarrow{\gamma := \delta \times I} & Y \times Y \times Y. \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \beta & & 
 \end{array}$$

Temos então,

$$\delta_*((V_1 \cdot V_2) \cdot V_3) = \delta_* \delta^! (V_1 \cdot V_2 \times V_3) = c_n(E) \cap (V_1 \cdot V_2 \times V_3).$$

Agora, com  $E_{13} := p_{13}^* E$ ,  $p_{13}: Y \times Y \times Y \longrightarrow Y \times Y$  a projeção, temos  $E = \gamma^* E_{13}$  e

$$\begin{aligned}
 \gamma_* \delta_*((V_1 \cdot V_2) \cdot V_3) &= \gamma_*(c_n(E) \cap (V_1 \cdot V_2 \times V_3)) \\
 &= c_n(E_{13}) \cap \gamma_*(V_1 \cdot V_2 \times V_3) \\
 &= c_n(E_{13}) \cap (\delta_*(V_1 \cdot V_2) \times V_3) \\
 &= c_n(E_{13}) \cap ((c_n(E) \cap V_1 \times V_2) \times V_3) \\
 &= c_n(E_{13}) c_n(E_{12}) \cap V_1 \times V_2 \times V_3,
 \end{aligned}$$

onde  $E_{12} := p_{12}^* E$ . Ora,  $p_{13}^* s \circ p_{12}^* s$  é uma seção regular de  $E_{13} \otimes E_{12}$  que se anula exatamente em  $\beta(Y)$ . Novamente por (13.13), obtemos

$$\begin{aligned}
 \beta_* \beta^! V_1 \times V_2 \times V_3 &= \beta_*(V_1 \cdot V_2) \cdot V_3 \\
 &= \beta_*(V_1 \cdot (V_2 \cdot V_3)),
 \end{aligned}$$

a última igualdade advindo da fatoração

$$\beta = (I \times \delta) \delta.$$

Pelo mesmo argumento do item anterior,  $\beta_*$  é injetivo, completando a verificação da associatividade. Deixamos como exercício mostrar que  $[Y] \cdot z = z$  para todo  $z$  em  $A_* Y$ . //

13.15 Observações. (1) Sejam  $V_1, V_2 \subset Y$  subesquemas de dim. puras  $k_1, k_2$ . A classe  $[V_1] \cdot [V_2] \in A_{n-k_1-k_2} Y$ , por construção, provem de um ciclo em  $V_{12} := V_1 \cap V_2$ . Logo, se  $\dim V_{12} = n - k_1 - k_2$ , temos

$$[V_1] \cdot [V_2] = \sum i(Z) Z,$$

soma sobre as componentes irredutíveis de  $V_{12}$ . O coeficiente

$$i(Z) = i(Z, \Delta \cdot V_1 \times V_2, Y \times Y.) \quad (13.6)$$

é um inteiro positivo chamado o índice de interseção de  $V_1, V_2$  ao longo de  $Z$ . Temos

$$i(Z) \leq \ell(\theta_{V_{12}, Z})$$

com igualdade se o anel local de  $V_1 \times V_2$  ao longo de  $Z$  for Cohen-Macaulay. Ademais,  $i(Z) = 1$  se (e só se)  $V_1$  intersecta  $V_2$  transversalmente ao longo de um aberto denso de  $Z$ .

(2) A demonstração de (13.14) para o caso geral baseia-se no importante teorema da functorialidade para o homomorfismo de interseção  $i^!$  (13.10) que enunciamos a seguir. Dado um diagrama cartesiano,

$$\begin{array}{ccccc} X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{i} & Z \end{array}$$

onde  $i, j$  denotam imersões regulares de codim.  $r, s$  respectivamente, então  $(ij)$  é regular de codim  $r+s$  e)

$$j^! i^! z' = (ij)^! z', \quad z' \text{ em } A_* Z'.$$

(cf. [F]p. 108).

(3) O produto comuta com os operadores classes de Chern de um fibrado  $F \longrightarrow Y$ ,

$$c_i(F) \cap (V_1 \cdot V_2) = (c_i(F) \cap V_1) \cdot V_2.$$

Em particular, vemos que os operadores  $c_i(F)$ , se identificam aos operadores definidos por multiplicação pelas classes  $c_i(F) \wedge [Y]$ ; idem para  $s_i(F)$ . Por simplicidade, faremos a verificação nas condições (13.14.1). Mantendo a notação introduzida acima, calculamos

$$\begin{aligned} \delta_*(c_i(F) \wedge (V_1 \cdot V_2)) &= \delta_*(c_i(\delta^* p^* F) \wedge V_1 \cdot V_2) \\ &= c_i(p^* F) \wedge \delta_* V_1 \cdot V_2 \\ &= c_i(p^* F) \wedge c_n(E) \wedge [V_1 \times V_2] \\ &= c_n(E) \wedge [(c_i(F) \wedge V_1) \times V_2] \\ &= \delta_*((c_i(F) \wedge V_1) \cdot V_2), \end{aligned}$$

e concluímos como na demonstração de (13.14).

**13.16 Teorema (de Bézout para espaços projetivos).** Sejam  $V_1, V_2 \subset \mathbb{P}^n$  subesquemas. Então temos,

(1)  $d^0([V_1] \cdot [V_2]) = d^0 V_1 d^0 V_2$  se  $\dim V_1 + \dim V_2 \geq n$ ; zero caso contrário.

(2) Se  $V_1 \cap V_2$  é interseção própria então

$$d^0 V_1 d^0 V_2 = \sum_Z i(Z) d^0 Z,$$

soma sobre as componentes irredutíveis de  $V_1 \cap V_2$ .

Demonstração. Denotemos por  $(r)$  a classe em  $A_r \mathbb{P}^n$  de um subespaço de dim.  $r$ . Mostraremos inicialmente que

$$(13.16.1) \quad (r) \cdot (s) = (r+s-n).$$

Como na demonstração de (13.14), consideremos o diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \\
 g \downarrow & & \downarrow f \\
 \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n
 \end{array}$$

Basta mostrar que

$$\delta_*(r) \cdot (s) = \delta_* \quad (r+s-n) \text{ em } A_{r+s-n} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n.$$

O 1º membro dá, por (13.13), (11.1),

$$c_n(T_1 \otimes L_2) \cap \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s = \sum h_1^{i_1} h_2^{n-i_1} h_2^{n-r} h_1^{n-s} \cap [\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n],$$

com  $h_i = c_1(L_i^*)$ . Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
 \delta_*(r+s-n) &= \delta_*(h^{2n-r-s} \cap [\mathbb{P}^n]) \\
 &= \delta_*(c_1(\delta^* L_1^*)^{n-r} c_1(\delta^* L_2^*)^{n-s} \cap [\mathbb{P}^n]) \\
 &= h_1^{n-r} h_2^{n-s} \delta_*[\mathbb{P}^n] \\
 &= h_1^{n-r} h_2^{n-s} \sum h_1^{i_1} h_2^{n-i_1} \cap [\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n],
 \end{aligned}$$

completando a verificação.

Para concluir (1), lembramos que o grau depende apenas das componentes de dim. máxima. Logo, podemos supor  $V_i$  puro dimensional,  $[V_i] = d_i(r_i)$ , seguindo-se facilmente de (13.16.1) a fórmula desejada. Por fim, (2) decorre da igualdade,

$$[V_1] \cdot [V_2] = \sum_Z i(Z) Z \quad (\text{cf. 13.6.1}). //$$

**13.17 Observação.** Sejam  $V_1, \dots, V_r$  subvariedades de  $\mathbb{P}^n$  e sejam  $Z_1, \dots, Z_s$  as componentes irredutíveis de  $\bigcap V_i$ . Então temos (cf. [F] p. 148)

$$\sum d^0 Z_i \leq d^0 V_1 \cdots d^0 V_r.$$



Exercícios

1) Nas condições de (13.14), se  $V_1 \subset X$  é regularmente imersa, mostre que as construções (13.2) e (13.14) para  $V_1 \cdot V_2$  são consistentes.

2) Com  $Y = \mathbb{A}^4$ ,  $X = \text{plano}$  dado por  $x=z$ ,  $y=w$ ,  $V = \text{SpK}[x,y,z,w]/(x,y) \cap (z,w)$  (cf. 1-5(2)), calcule  $X \cdot V$ .

3) (Conservação do número) Seja  $T$  uma variedade de dim.  $r$  e seja  $t \in T$  um ponto liso, de sorte que a inclusão  $t: \{t\} \hookrightarrow T$  é uma imersão regular de codim.  $r$ . Seja  $p: Y \rightarrow T$  um morfismo próprio. Mostre que, para cada  $z \in A_k^1 Y$ , o grau de zero ciclo  $t^! z$  independe de  $t$ . (Sugestão : calcule  $t^! p_* z$ ).

4) Seja  $p: \mathbb{P}^4 \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$  a projeção e seja  $Z \subset \mathbb{P}^4 \times \mathbb{A}^1$  definido pelo ideal

$$(x,y) \cap (z,w) + (x-z-tv, y-w),$$

onde  $v, w, x, y, z$  denotam coordenadas homogêneas em  $\mathbb{P}^4$  e  $t$  a coordenada em  $\mathbb{A}^1$ . Calcule  $st^! [Z]$ . Compare com 1.5(2).

5) Mostre que  $A_*(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$  é isomorfo, como anel, a  $\mathbb{Z}[X,Y]/(X^2, Y^2)$ .

6) Sejam  $P_1, \dots, P_6$  pontos em posição geral em  $\mathbb{P}^3$ . Mostre que existe uma única curva cúbica que os contém. (Sugestão: Seja  $\pi$  o plano dos  $P_i$ ,  $i=4,5,6$ ; seja  $\ell$  a reta  $P_1 P_2$ , seja  $Q$  o ponto de interseção de  $\ell$  com  $\pi$  e seja  $P_3^i$  a projeção de  $P_3$  em  $\pi$  com centro  $P_i$ ,  $i=1,2$ . Os pontos  $P_4, P_5, P_6, Q$  e  $P_3^i$  determinam um cone quadrático  $q_i$  com vértice  $P_i$  ( $i=1,2$ ). Temos então  $q_1 \cap q_2 = \ell \cup C$ , onde  $C$  denota uma cúbica que certamente contém  $P_i$  para  $i=3, \dots, 6$ . Mostre por fim que toda cúbica contida num cone quadrático passa pelo vértice. Para a unicidade, mostre que toda cúbica irredutível numa quádrlica lisa ( $= \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ) é linearmente equivalente a um ciclo da forma  $2A+B$ , onde  $A, B$  são geratrizes de sistemas

opostos. Conclua que 2 cúbicas reversas se intersectam no máximo em 5 pontos.

7) Seja  $F \rightarrow Y$  fibrado vetorial. Seja  $Y' = G(r, F)$ . Mostre que a diagonal de  $Y' \times_Y Y'$  é o esquema de zeros de uma seção regular do fibrado  $p_1^* R^* \otimes p_2^* Q$  onde  $p_i$  denota projeção e  $R \rightarrow p^* F \rightarrow Q$  é a sequência tautológica. Conclua que se  $Y$  satisfaz (13.14.1), então  $Y'$  (que é completo!) satisfaz a uma versão de (13.14.1(2)) modificada pela intervenção de 2 fibrados e pela fatoração  $\Delta_{Y'} \subset Y' \times_Y Y' \subset Y' \times Y'$ . Verifique (13.14) para  $Y'$ .

8) Verifique (13.14) para abertos de  $Y$ .

9) Mostre que (10.5.1) é um isomorfismo de anéis.

§14 NÚMEROS CARACTERÍSTICOS

Ilustraremos boa parte do material das seções anteriores apresentando o cálculo de números característicos da família de curvas cúbicas reversas. Para uma visão geral, indicamos [FKM], [F] p. 188.

Passemos brevemente em revista o problema análogo para famílias de curvas planas, com o intuito de colocar o assunto na devida perspectiva.

A família de curvas planas de grau  $d$  é parametrizada por um espaço projetivo  $\mathbb{P}^N$ ,  $N = d(d+3)/2$ , associando-se a cada ponto de coordenadas homogêneas  $(a_{ij})$  em  $\mathbb{P}^N$  a curva plana projetiva de equação

$$\sum a_{ij} x^i y^j z^{d-i-j} = 0.$$

A determinação do número dessas curvas que passam por  $a$  pontos e são tangentes a  $b$  curvas fixas em posição geral, com  $a+b=N$  é um problema não trivial. Notemos que os "círculos de Apolônio" é o caso  $d=2$ ,  $a=2$  (lembrando que círculos são cônicas passando pelos pontos  $(1:\pm i:0)$ ). Um resultado clássico em geometria enumerativa (generalizado e) demonstrado em [FKM] afirma que o número procurado se expressa na forma

$$\sum_{k=0}^b n(k+a, b-k) N_k,$$

onde  $N_k$  depende apenas dos graus e das classes das curvas fixas e  $n(a, b)$  são os números característicos da família, i.e.,  $n(a, b) = n^0$  de curvas de grau  $d$  passando por  $a$  pontos e tangentes a  $b$  retas, todos em posição geral.

As curvas de grau  $d$  tangentes a uma reta fixa  $\ell$  formam uma hipersuperfície  $\ell^*$  em  $\mathbb{P}^N$ . Mostra-se que  $\ell^*$  é de grau  $2d-2$ .

Com efeito,  $\ell^*$  é a hipersuperfície dual da imagem de  $\ell$  pela aplicação de Veronese associada às formas de grau  $d$ . Além disso,  $\ell^*$  contém cada ponto de  $\mathbb{P}^N$  correspondente a uma curva com componente múltipla.

Por outro lado, a condição de passar por um ponto  $P$  define um hiperplano  $P^*$  em  $\mathbb{P}^N$ .

Agora, dados os pontos  $P_1, \dots, P_a$  e as retas  $\ell_1, \dots, \ell_b$  em posição geral, verifica-se que a interseção  $\bigcap_{i,j} P_i^* \cap \ell_j^*$  é finita e transversal (ao menos em característica zero) para  $a$  suficientemente grande (de modo a garantir que nenhuma curva de grau  $d$  com componente múltipla passe por todos os  $P_i$ 's). Neste caso, o teorema de Bezout fornece

$$n(a,b) = (2d-2)^b.$$

Por exemplo, para  $d=2$ , esta fórmula funciona para  $a = 3, 4$  ou  $5$ , fornecendo os números 4 (resp. 2,1) de cônicas por 3 (resp. 4,5) pontos e tangentes a 2 (resp. 1,0) retas. Entretanto, dados só 2 pontos e 3 retas, a interseção

$$P_1^* \cap P_2^* \cap \ell_1^* \cap \ell_2^* \cap \ell_3^*$$

não é transversal no ponto de  $\mathbb{P}^5$  correspondente à reta dupla de  $P_1 P_2$ . Assim, o nº de cônicas lisas que passam por 2 pontos e tangenciam 3 retas é apenas 4, como se deduz por um argumento de dualidade (cf. [Kc]).

Para  $d=3$ , temos  $n(a,b) = 4^b$  para  $a \geq 3$ , e  $b = 9-a$ . A determinação dos números característicos no caso geral foi proposta por Chasles em 1866. Para  $d=3$  e 4 foram encontrados por Zeuthen [Z], com métodos tão intrincados quanto distantes dos padrões atuais de rigor. Para  $d \geq 5$  e  $a$  pequeno, desconhecemos a resposta.

Lembremos que uma cúbica reversa  $C \subset \mathbb{P}^3$  é imagem de  $\mathbb{P}^1$  pela aplicação de Veronese associada às formas de grau 3. Mediante escolha conveniente de coordenadas, podemos escrever

$$(14.1) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\longrightarrow C \subset \mathbb{P}^3 \\ (t:u) &\longrightarrow (t^3:t^2u:tu^2:u^3). \end{aligned}$$

Duas cúbicas reversas diferem por um automorfismo de  $\mathbb{P}^3$ . O subgrupo de  $SL(4)$  que deixa invariante  $C$  é isomorfo a  $SL(2)$ . O espaço homogêneo quociente,

$$T^0 := SL(4)/SL(2),$$

é o espaço de parâmetros ("moduli") da família de cúbicas reversas. Evidentemente,

$$\dim T^0 = 12.$$

Os números característicos da família em questão são definidos como

$$\begin{aligned} n(a,b,c) := n^\circ \text{ de cúbicas reversas passando por } a \text{ pontos,} \\ \text{incidentes a } b \text{ retas e} \\ \text{tangentes a } c \text{ planos,} \end{aligned}$$

todos em posição geral e com

$$2a+b+c=12.$$

Naturalmente estamos afirmando implicitamente que  $n(a,b,c)$  é finito e independe dos pontos, retas ou planos escolhidos em um aberto denso de  $(\mathbb{P}^3)^a \times G(2,4)^b \times (\mathbb{P}^{3*})^c$ . Esta é uma consequência típica do teorema de transversalidade do transladado genérico, transcrito a seguir para conveniência do leitor.

14.2 Teorema ([K], [V<sub>2</sub>]). Seja T uma variedade munida de uma ação transitiva de um grupo algébrico conexo  $\mathbb{G}$ . Sejam  $V_1, \dots, V_m$  subvariedades de T. Então existe um aberto denso U de  $\mathbb{G}^m$  tal que, para  $(g_i) \in U$ ,  $\bigcap g_i V_i$  é vazio ou da dim. pura correta,

$$d := \dim T - \sum \text{codim } V_i.$$

Quando  $d=0$ , o grau do zero-ciclo  $[\bigcap g_i V_i]$  é constante para  $(g_i)$  em U e, em característica zero, é o número de pontos distintos nessa interseção. Além disso, podemos requerer que  $\bigcap g_i V_i$  esteja contido num aberto denso de T prefixado.

No caso em discussão,  $\mathbb{G} = \text{SL}(4)$ , e as subvariedades de  $T^0$  pertinentes ao problema são cópias de

$$(14.2.1) \quad \begin{aligned} P^0 &:= \{C \in T^0 \mid P \in C\}, \\ \ell^0 &:= \{C \in T^0 \mid \ell \cap C \neq \emptyset\}, \\ H^0 &:= \{C \in T^0 \mid H \text{ é tangente a } C\}, \end{aligned}$$

onde P,  $\ell$ , H denotam um ponto, uma reta e um plano fixos. Notemos que

$$\begin{aligned} \text{codim } \ell^0 &= \text{codim } H^0 = 1, \\ \text{codim } P^0 &= 2. \end{aligned}$$

Assim, a transladados genéricos de  $P^0$ , b de  $\ell^0$  e c de  $H^0$  intersectam-se em  $n(a,b,c)$  pontos, desde que  $2a+b+c=12$ .

A estratégia para o cálculo é substituir  $T^0$  por uma compactificação lisa  $T$  com anel de Chow "acessível", de sorte que, denotando por  $P'$ , etc. as aderências de  $P^0, \dots$ , tenhamos o seguinte:

- (i) as classes de  $P'$ ,  $\ell'$ ,  $H'$  são "calculáveis" e independentes da escolha do ponto  $P$ , etc...;
- (ii) para escolha genérica de  $P_i$ ,  $\ell_j$  e  $H_k$  (pontos, retas e planos),

$$\bigcap_{i,j,k} P'_i \cap \ell'_j \cap H'_k = \bigcap_{i,j,k} P^0_i \cap \ell^0_j \cap H^0_k$$

(com  $1 \leq i \leq a$ ,  $1 \leq j \leq b$ ,  $1 \leq k \leq c$ ).

Esta última exigência significa que os elementos introduzidos na fronteira  $T-T^0$  não ocorrem como soluções estranhas ao problema original.

Nessas condições, teremos

$$n(a,b,c) = \int [P']^a [\ell']^b [H']^c.$$

Para a construção de  $T$ , vamos recordar certas propriedades de uma cúbica reversa  $C$ .

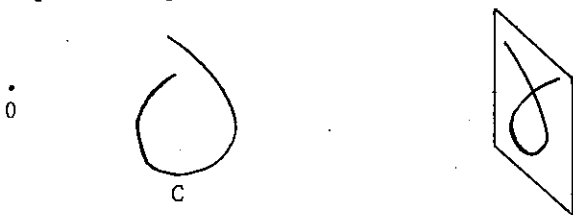
- (1) O ideal homogêneo de  $C$  é gerado minimalmente por 3 quádricas; e.g., para  $C$  como em (14.1), temos

$$I = (xw - yz, y^2 - xz, z^2 - yw), \quad (\text{cf. [A-S]p. 49.})$$

- (2) Duas quádricas quaisquer em  $I$  compartilham uma reta geratriz. Com efeito, o grau de interseção é 4, enquanto que o ciclo associado a  $C$  contribui com 3.
- (3) A reta residual é uma corda de  $C$ . De fato, cada corda (das  $\infty^2$  que  $C$  admite) ocorre como reta residual de um feixe de quádricas

$\{x_1q_1+x_2q_2|(x_1:x_2) \in \mathbb{P}^1\}$  em  $I$ . Visto que a família de tais feixes é irreduzível e de dim. 2, segue-se que a reta residual é mesmo uma corda.

(4) A projeção de  $C$  com centro num ponto  $0 \notin C$  (fixado de uma vez por todas) é uma cúbica plana singular. Vê-se assim que existe uma única corda de  $C$  passando por  $0$  (cf. 10.6.2,4):



Portanto, cada cúbica reversa que não contém  $0$  determina um e um só feixe de quádricas, a saber, aquele com reta geratriz residual a única corda passando por  $0$ ! Reciprocamente, dada uma reta  $r \ni 0$ , cada feixe suficientemente genérico (cf. Obs. 14.5.1) de quádricas que contém  $r$  fornece uma cúbica reversa, da qual  $r$  é uma corda.

Desta forma, somos levados a considerar a grassmanniana de feixes de quádricas a geratriz em comum. Mais precisamente, retomando a grassmanniana

$$G := G(2,4) = \{\text{retas em } \mathbb{P}^3\},$$

com sequência tautológica (10.3.1),

$$R \longrightarrow \mathbb{A}_G^4 \longrightarrow Q,$$

definimos o fibrado,

$$(14.3) \quad E := \text{núcleo}(S_2(\mathbb{A}_G^{4*}) \longrightarrow S_2(R^*)),$$

onde o homomorfismo entre parênteses é dado por restrição de forma



quadrática a subespaço de  $\mathbb{A}^4$  de dim. 2. A fibra  $E_r$  ( $r \in G$ ) consiste das formas quadráticas que se anulam ao longo da reta  $r$ . Anotemos que

posto  $E=7$ .

Seja agora

$$(14.4) \quad \mathbb{T} := G(2, E)$$

o fibrado em grassmannianas/ $G$ , com sequência tautológica

$$(14.4.1) \quad A \longrightarrow E_{\mathbb{T}} \longrightarrow B, \text{ posto } A=2.$$

Por construção, cada  $t \in \mathbb{T}$  representa um feixe de quádricas que contêm uma reta distinguida  $\underline{r}(t)$  em comum, onde

$$\underline{r}: \mathbb{T} \longrightarrow G$$

denota o morfismo estrutural. Observemos que

$$\dim \mathbb{T} = \dim G(2, 7) + \dim G(2, 4) = 14.$$

Cada  $t$  suficientemente genérico em  $\mathbb{T}$  representa uma cúbica reversa munida de uma corda, o que explica a diferença  $14-12$  para  $\dim \mathbb{T}^0$ .

Ponhamos

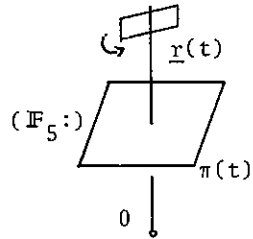
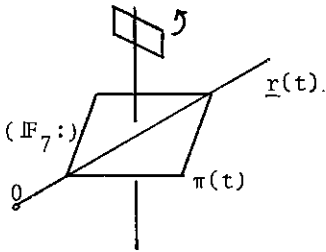
$$(14.4.2) \quad \begin{aligned} G_0 &:= \{r \in G \mid 0 \in r\}, \\ \mathbb{T} &:= \underline{r}^{-1} G_0 = G(2, E|_{G_0}). \end{aligned}$$

Observemos que  $G_0 = \mathbb{P}^2$  e que  $\mathbb{T}$  contém um aberto denso que consiste de feixes de quádricas em bijeção natural com cúbicas reversas  $\neq 0$ .

Em resumo, temos demonstrado a seguinte

14.5 Proposição.  $T$  é uma compactificação lisa do aberto  $T^{00}$  de  $T^0$  formado pelas cúbicas reversas  $\neq 0$ . //

14.5.1 Observação. Certos elementos de  $T$  são "tão" degenerados que não determinam cúbica residual. São os feixes a componente fixa; esta é necessariamente um plano. Seja  $t \in T$  um feixe com componente fixa  $\pi(t)$ . Agora ou bem  $\pi(t)$  contem a reta distinguida  $\underline{r}(t)$  ou não:



No 2º caso,  $\underline{r}(t)$  coincide obrigatoriamente com o eixo do feixe residual de planos. Denotemos

$$(14.5.2) \quad \mathbb{F} = \{t \in T \mid t \text{ admite um plano fixo}\}.$$

Segue da discussão acima que  $\mathbb{F}$  se escreve como união de duas componentes irredutíveis, com as dimensões indicadas,

$$(14.5.3) \quad \mathbb{F} = \mathbb{F}_7 \cup \mathbb{F}_5.$$

(De fato, temos  $\mathbb{F}_7 \simeq \mathbb{P}(Q^*_{|G_0})$ ,  $\mathbb{F}_5 = \mathbb{P}^{3*} \times G_0$ .)

14.6 Proposição. Seja  $s$  a seção de  $A^* \otimes \mathcal{O}(2)$  obtida por composição no diagrama de fibrados  $/ T \times \mathbb{P}^3$ ,

$$\begin{array}{ccc} E & \longleftarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow^s \\ S_2(A^{4*}) & \longrightarrow & \mathcal{O}(2) = S_2 \mathcal{O}(1). \end{array}$$

Então  $s$  é regular e seu esquema de zeros  $Z$  se decompõe como

$$Z = \mathbb{D} \cup \mathbb{E},$$

onde a fibra de  $\mathbb{D}$  sobre  $t \in T$  é a reta distinguida  $\underline{r}(t)$ , enquanto que a fibra de  $\mathbb{E}$  para  $t$  genérico é a cúbica reversa definida por  $t$ . (Por simplicidade, denotamos cada fibrado e sua imagem recíproca pela mesma letra).

Demonstração. Por construção,  $s(t,P)=0$  para  $(t,P) \in T \times \mathbb{P}^3$  sse  $P$  pertence a  $\bigcap_{q \in t} q$  ("base locus" do feixe  $t$ ). Para  $t \in T - \mathbb{F}$  (resp.  $t \in \mathbb{F}$ ) temos

$$\dim Z_t = 1 \quad (\text{resp. } 2).$$

Como  $Z$  é localmente definido por 2 (=posto  $A$ ) equações, cada componente é de dim. pelo menos 13 (=12+3-2). Dado que  $\dim \mathbb{F}=7$ , concluímos que nenhuma componente de  $Z$  domina  $\mathbb{F}$  e que  $\dim Z = 13$ . A decomposição pretendida para  $Z$  sendo clara sobre  $T - \mathbb{F}$ , segue-se facilmente o resultado. //

14.7 Corolário. A classe de  $\mathbb{E}$  em  $A_{13} T \times \mathbb{P}^3$  é dada por

$$[\mathbb{E}] = (c_2(A^* \otimes \mathcal{O}(2)) - c_2(Q \otimes \mathcal{O}(1))) \cap [T \times \mathbb{P}^3]$$

Demonstração. Temos  $[Z] = m[\mathbb{D}] + n[\mathbb{E}]$ . Deixamos como exercício a verificação de que  $m=n=1$ . Por outro lado, temos  $\mathbb{D} = \mathbb{P}(K) \times_G T$ . Portanto,

$$\begin{aligned} [\mathbb{E}] &= [Z] - [\mathbb{D}] \\ &= (c_2(A^* \otimes \mathcal{O}(2)) - c_2(Q \otimes \mathcal{O}(1))) \cap [T \times \mathbb{P}^3], \end{aligned}$$

por (9.8) e (9.9). //

14.7.1 Corolário. Sejam  $P \in \mathbb{P}^3$ ,  $\ell \in G$  (ponto, reta). Sejam

$$P' = \{t \in T \mid P \in \mathbf{E}_t\},$$

$$\ell' = \{t \in T \mid \mathbf{E}_t \cap \ell \neq \emptyset\}.$$

Temos então

$$[P'] = (c_2(A) - c_2(Q)) \cap [T] \text{ em } A_{10} T,$$

$$[\ell'] = -(2c_1(A) + c_1(Q)) \cap [T] \text{ em } A_{11} T.$$

Demonstração. É simples verificar que  $P'$  é a imagem (isomórfica) de

$$\mathbf{E} \cap T \times \{P\}$$

mediante a projeção  $p: T \times P^3 \rightarrow T$ . Escrevendo  $P$  como interseção de 3 planos, ou equivalentemente, como zero de uma seção de  $\mathcal{O}(1)^{\otimes 3}$ , deduzimos

$$[\mathbf{E} \cap T \times \{P\}] = c_3(\mathcal{O}(1)^{\otimes 3}) \cap [\mathbf{E}]$$

$$= h^3 \cap [\mathbf{E}],$$

com  $h = c_1(\mathcal{O}(1))$ . Tendo em conta (14.7) e empregando as fórmulas,

$$c_2(A^* \otimes \mathcal{O}(2)) = c_2(A^*) + 2c_1(A^*)h + 4h^2$$

$$= c_2(A) - 2c_1(A)h + 4h^2,$$

$$h^4 = 0,$$

obtemos

$$[P'] = p_*((h^3(c_2A - c_2Q) + \dots) \cap [T \times P^3])$$

$$= (c_2(A) - c_2(Q)) \cap [T].$$

Procede-se analogamente para  $\ell'$ . //

A obtenção da classe associada à condição de tangência a um

plano é mais laboriosa.

14.8 Proposição. Seja  $H \subset \mathbb{P}^3$  um plano  $\neq O$  e seja

$$H' = \{t \in T \mid \mathbb{E}_t \text{ é tangente a } H\}.$$

Então temos

$$[H'] = 2[\ell'] \text{ em } A_{11} T.$$

Demonstração. Com a notação de (14.6), explodimos  $T \times \mathbb{P}^3$  ao longo de  $\mathbb{D}$ ,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{D}} \subset T \times \mathbb{P}^3 & & \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{D} \subset T \times \mathbb{P}^3 & & \end{array}$$

Agora as coordenadas locais de  $p^*$ s são múltiplas da equação local de  $\tilde{\mathbb{D}}$ . Logo,  $A' := A^* \otimes \mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{L}(-\tilde{\mathbb{D}})$  admite uma seção  $\tilde{s}$  com esquema de zeros  $\tilde{\mathbb{E}} := Z(\tilde{s})$  igual à aderência de  $p^{-1}(\mathbb{E} - \mathbb{D})$  em  $T \times \mathbb{P}^3$ . A vantagem é que  $\tilde{\mathbb{E}}$  é localmente interseção completa, com fibrado normal  $= A'_{|\tilde{\mathbb{E}}}$ . Denotando  $\tilde{H}$  o transformado estrito de  $T \times H$  (i.e., explosão deste ao longo de  $T \times H \cap \mathbb{D}$ ), temos o diagrama de fibrados tangentes relativos e normais,

$$\begin{array}{ccc} T(\tilde{H}/T) & \longrightarrow & T(T \times \mathbb{P}^3/T) \longrightarrow L(\tilde{H}) \\ & \searrow u & \downarrow \\ & & A' \end{array}$$

restritos a  $\tilde{\mathbb{E}} \cap \tilde{H}$ . Para  $t$  genérico em  $T$ , é claro que  $H$  é tangente a  $\mathbb{E}_t$  sse algum vetor tangente  $\neq 0$  em  $T(H)$  tem imagem nula no fibrado normal de  $\mathbb{E}_t$ . Verifica-se então que o esquema de zeros  $\tilde{H}$  de

$\Lambda^2$  (cf. diagrama acima) se aplica birracionalmente sobre  $H'$ . Temos assim, de início,

$$[\hat{H}] = c_1^2(\Lambda T^*(\tilde{H}/T) \otimes \Lambda^2 A') \cap [\tilde{E} \cap \tilde{H}].$$

Para o cálculo do cotangente  $T^*(\tilde{H}/T)$  empregamos a sequência exata de feixes,

$$\begin{array}{ccccc} T^*(H \times T/T) & \longrightarrow & T^*(\tilde{H}/T) & \longrightarrow & T^*(\tilde{H}/H) \\ & & & & \parallel \\ & & & & T^*(\mathbb{P}(N)/T), \end{array}$$

proveniente do diagrama de explosão, (cf. [Mn] (12.2)),

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(N) & \xrightarrow{j} & \tilde{H} \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ T = \mathbb{D} \cap T \times H & \xrightarrow{i} & T \times H. \end{array}$$

Neste diagrama, o mergulho  $T \longrightarrow T \times H$  que identifica  $T$  com  $\mathbb{D} \cap T \times H$  é dado por  $t \longmapsto (t, P_t)$ , com  $P_t =$  ponto de interseção de  $H$  com  $\underline{r}(t)$ , bem definido supondo que o ponto fixo  $0 \notin H$ . O fibrado denotado por  $N$  no diagrama de cotangentes acima é o fibrado normal de  $T$  em  $T \times H$ ; portanto,

$$N = TH|_T.$$

A identificação lá indicada resulta de que, em geral, a formação do feixe cotangente comuta com mudança de base. Agora temos

$$T^*(\mathbb{P}(N)/T) = (\Lambda^2 N) \otimes \theta_N(-2). \quad (11.1(2))$$

Lembrando ainda a fórmula

$$L(\tilde{\mathbb{D}})|_{\mathbb{P}(N)} = \mathcal{O}_N(-1), \quad ([Mn] (12.2))$$

chega-se a

$$c_1(T^*(\tilde{H}/T)) = c_1(T^*(H)|_{\tilde{H}}) + c_1(L(\tilde{\mathbb{D}})|_{\tilde{H}}),$$

e daí a

$$[\tilde{H}] = ((\tilde{h} - \tilde{d} - c_1(A))(c_2(A^*) - c_1(A)(2\tilde{h} - \tilde{d}) + (2\tilde{h} - \tilde{d})^2) \cap [\tilde{H}],$$

onde  $\tilde{h} := c_1(L(\tilde{H})) = c_1(p^*L(T \times H))$  e  $\tilde{d} := c_1(L(\tilde{\mathbb{D}}))$ .

Empregando as relações,

$$\tilde{d}^i \cap [\tilde{H}] = j_*(c_1(j^*\mathcal{O}_N(-1))^{i-1} \cap [\mathbb{P}(N)]),$$

$$p_* \tilde{d} \cap [\tilde{H}] = 0$$

$$p_* \tilde{d}^2 \cap [\tilde{H}] = -i_*[T]$$

$$p_* \tilde{d}^3 \cap [\tilde{H}] = i_* s_1(N) \cap [T],$$

obtem-se, por fim,

$$[H'] = -2(c_1(A) + 2c_1(Q)) \cap [T]. \quad //$$

14.8.1 Notação. Denotaremos por  $P^a \ell^b H^c$  a condição de que  $t$  em  $T$  pertença à interseção de  $a$  (resp.  $b, c$ ) trasladados genéricos de  $P'$  (resp.  $\ell', H'$ ) sob a ação natural induzida do estabilizador do ponto 0. Esta ação não é transitiva. Diremos que a condição acima é própria (resp. transversal) se assim o for a interseção que a define e se não encontrar  $\mathbb{F}$ .

Convençamo-nos logo de que  $P^a \ell^b H^c$  não é própria para  $a < 5$ . A razão deste sério atropelo é que  $\ell'$  contém  $\mathbb{F}$ , já que  $\ell$  encontra

o plano fixo de cada  $t \in F$ . Ora, dados 4 (ou menos) pontos, construímos  $t \in T$  tomando o plano fixo  $\pi(t)$  por 3 (ou menos) desses pontos, ligando o restante a 0 para definir  $r(t)$ .

Vamos assim nos limitar aos casos  $a=5$  ou  $6$ .

**14.9 Proposição.** Suponhamos  $2a+b+c=12$ ,  $a=5$  ou  $6$ . Então  $P^a \ell^b H^c$  é própria. Em característica zero, é também transversal.

**Demonstração.** Seja  $S := (P^3)^a \times G^b \times (P^{3*})^c$ . Defina

$$W = \{(t, (P_i), (\ell_j), (H_k)) \in T-F \times S \mid t \in \bigcap P_i \cap \ell_j \cap H_k\}.$$

Cada componente de  $W$  é de dimensão  $\geq \dim(T \times S) - (2a+b+c) = \dim S$ . Por outro lado, denotemos, para cada curva  $C \subset P^3$ ,

$$C' := \{\ell \in G \mid \ell \cap C \neq \emptyset\},$$

$$C^* := \{H \in P^{3*} \mid H \text{ é tangente a } C\}.$$

Verifica-se que  $\dim C' = 3$ . Se  $C$  não admite componente múltipla,  $\dim C^* = 2$  (valendo  $\dim C^* = 3$  caso contrário). Para  $t$  em  $T-F$ , uma componente múltipla de cúbica  $\mathbb{I}_t$  é necessariamente uma reta (com estrutura não reduzida). Examinando as configurações possíveis, vê-se que tal ocorre apenas para  $t$  percorrendo uma subvariedade de dim. 7. Agora, para  $t$  em  $T-F$ , a fibra

$$W_t = \{t\} \times \mathbb{I}_t^a \times \mathbb{I}_t^b \times \mathbb{I}_t^{*c}$$

é de dim.  $= a+3b+d_t c$ , com  $d_t = 2$  ou  $3$ . Dessa estimativa, empregando o teorema da dim. das fibras segue-se que

$$\dim W = \dim S.$$



Ora, para  $t$  genérico,  $W_t$  é claramente irredutível, seguindo-se que  $W$  é irredutível. Por construção, a fibra de  $W$  sobre  $s = ((P_i), (\ell_j), (H_k)) \in S$  é

$$W_s = \bigcap_{i,j,k} P_i' \cap \ell_j' \cap H_k' \cap T - F.$$

Como  $a > 5$ ,  $\bigcap_{i=1}^a P_i' \cap F = \emptyset$  desde que 4 quaisquer dos  $P_i$  sejam não-coplanares nem haja 2 alinhados com o ponto fixo 0. Por conseguinte,

$$W_s = \bigcap_{i,j,k} P_i' \cap \ell_j' \cap H_k'$$

é finito para  $s$  genérico, novamente pelo teorema da dim. das fibras. Além disso, em caract. zero a fibra  $W_s$  é reduzida, o que implica a transversalidade da interseção. //

14.9.1 Observações. (1) Em caract.  $p > 0$ , a longura do anel local de  $W_s$  em cada ponto é igual ao grau de inseparabilidade do corpo de funções  $R(W)$  sobre  $R(S)$  para todo  $s$  num aberto denso de  $S$ , enquanto o grau separável dá o nº de pontos distintos (cf. [V<sub>2</sub>] p.109).

(2) Seja  $U \subset T$  aberto  $\neq \emptyset$ . Então existe um aberto não vazio  $S^0$  em  $S$  tal que, para  $s \in S^0$ , tenhamos

$$W_s \subset U.$$

Com efeito, sejam  $p, q$  as projecções de  $W$  em  $S, T$  resp. Temos

$$\dim q^{-1}(T-U) < \dim W = \dim S.$$

logo

$$S^0 = S - \overline{pq^{-1}(T-U)}$$

funciona. Em particular, com  $U = T^{00}$  como em (14.5), podemos supor

que a interseção

$$\bigcap P_i' \cap \ell_j' \cap H_k' = \bigcap P_i^0 \cap \ell_j^0 \cap H_k^0$$

como em (14.2.1). Ora,  $P^0$ ,  $\ell^0$ ,  $H^0$  são certamente Cohen-Macaulay:  $P^0$  é de fato liso (o estabilizador de  $P$  age transitivamente) enquanto que os outros 2 são hipersuperfícies em  $T^0$ . Logo, o índice de interseção é igual à longura acima referida, e em particular, é o mesmo em cada ponto da interseção.

A discussão acima nos fornece o seguinte

14.10 Teorema. O número  $n(a,b,c)$  de cúbicas reversas passando por  $a$  pontos, incidentes a  $b$  retas e tangentes a  $c$  planos, todos em posição geral, contados com multiplicidade, é igual ao grau do zero ciclo

$$(-1)^{b+c} 2^c (c_2(A) - c_2(Q))^a (2c_1(A) + c_1(Q))^{b+c} \cap [T]$$

para  $2a+b+c=12$ ,  $a=5$  ou  $6$ . A multiplicidade de interseção é igual a 1 tanto em caract. 0 como em caract.  $p$  se  $p \nmid n(a,b,c)$ .

Demonstração. Do observado acima segue que o produto das classes em  $A_*T$

$$\prod_{i,j,k} [P_i'] [\ell_j'] [H_k']$$

é a classe da interseção

$$\bigcap_{i,j,k} P_i' \cap \ell_j' \cap H_k'$$

para  $(P_i')$ ,  $(\ell_j')$ ,  $(H_k')$  num aberto denso de  $S$ . A fórmula para o zero ciclo resulta de (14.7.1), (14.8) e (13.15(3)). O comentário final

sobre a multiplicidade de interseção resulta de que esta é a mesma em todos os pontos da interseção, igual ao grau inseparável de  $R(W)$  sobre  $R(S)$ . //

Seja  $p: T \rightarrow G_0 \subset G(2,4)$  restrição de  $r$  (14.4.2), Construiremos alguns diagramas para calcular classes características dos fibrados  $A$ ,  $E$ ,  $Q$ , etc... (14.3). Por abuso intencional de notação, negligenciaremos a indicação das imagens recíprocas, escrevendo, e.g.,  $Q=p^*Q$ , etc... .

Restringindo a  $G_0$  a sequência tautológica de  $G$ , obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{A}^1 & = & \mathbb{A}^1 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 R & \longrightarrow & \mathbb{A}^4 & \longrightarrow & Q \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 M & \longrightarrow & \mathbb{A}^3 & \longrightarrow & Q,
 \end{array}$$

onde  $M = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$  mediante a identificação  $G_0 = \mathbb{P}^2$ . Seja

$$m := c_1(M^*).$$

Temos então .

$$(14.11) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 c_*(Q) = c_*(M)^{-1} = 1 + m + m^2; \\
 c_*(R) = c_*(M) = 1 - m; \\
 c_*(S_2(R^*)) = c_*(\mathbb{A}^1 \otimes M^* \otimes M^{*2}) \\
 \qquad \qquad \qquad = (1+m)(1+2m) = 1+3m+2m^2 \\
 \qquad \qquad \qquad = c_*(E)^{-1} = s_*(E) \quad (\text{cf. (14.3)}).
 \end{array} \right.$$

Agora, sobre  $T=G(2,E)$ , tomamos  $\mathbb{P}(A)$  (cf. 14.4.1) e transcreve

mos o diagrama (10.4.3) que agora se lê,

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \longrightarrow & A & \longrightarrow & U \\
 || & & \downarrow & & \downarrow \\
 V & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & B & = & B,
 \end{array}$$

onde a sequência vertical provém de (14.4),

$$V = \mathcal{O}_A(-1),$$

e

$$U = \mathcal{O}_F(-1)$$

ao identificarmos  $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(F)$ , fibrado projetivo sobre  $\mathbf{P}(E)$ . Ponhamos

$$\begin{aligned}
 (14.12) \quad u &= c_1(U^*), \\
 v &= c_1(V^*),
 \end{aligned}$$

seguinte-se

$$(14.13) \quad \begin{cases} c_1(A) = 1 - u - v + uv \\ s_2(F) = s_2(E) s_1(V)^{-1} = (1 + 3m + 2m^2)(1 - v) \\ \quad \quad \quad = 1 - v + 3m - 3mv + 2m^2 - 2m^2v. \end{cases}$$

Enfim, ao cálculo de  $n(a, b, c)$ .

(14.14)  $\hat{a} = b$  ( $b = c = 0$ ). Sabe-se que 6 pontos em posição geral determinam uma única cúbica reversa, i.e.,  $n(6, 0, 0) = 1$ . Vamos conferir! Por (14.10), devemos calcular

$$\int_T (c_2(A) - c_2(Q))^6 = \int_{\mathbf{P}(A)} (uv - m^2)^6 v \quad (9.3(1), 14.11-13)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbf{P}(F)} ((uv)^6 - 6(uv)^5 m^2) v \quad (m^3=0 \quad (14.11)) \\
&= \int_{\mathbf{P}(E)} v^7 s_1(F) - 6v^6 m^2 \quad (s_1(F) = s_1(E) - s_1(V)) \\
&= \int_{\mathbf{P}(E)} v^7 (3m - v) - 6v^6 m^2 \quad (14.11) \\
&= \int_{G_0} 3ms_1(E) - s_2(E) - 6m^2 = 9 - 2 - 6!!!
\end{aligned}$$

(14.15)  $a=5, b=2, c=0$ . Procedendo como acima, temos

$$\begin{aligned}
n(5, 2, 0) &= \int_{\mathbf{T}} (c_2(A) - c_2(Q))^5 (2c_1(A) + c_1(Q))^2 \\
&= \int_{\mathbf{P}(A)} ((uv)^5 - 5(uv)^4 m^2) (4(u+v)^2 - 4(u+v)m + m^2) v \\
&= \int_{\mathbf{P}(F)} 4u^7 v^6 + u^6 \underbrace{(8v^7 - 4v^6 m - 20v^5 m^2)}_{\alpha} + u^5 \underbrace{(4v^8 - 4v^7 m - 39v^6 m^2)}_{\beta} \\
&= \int_{\mathbf{P}(E)} 4s_2(F)v^6 + s_1(F)\alpha + \beta \\
&= \int_{\mathbf{P}(E)} -4v^8 + 12v^7 m - 23v^6 m^2 \\
&= -8 + 36 - 23 = 5,
\end{aligned}$$

seguinte-se imediatamente que

$$n(5, 1, 1) = 10,$$

$$n(5, 0, 2) = 20.$$

O cálculo dos demais números característicos pela presente abordagem esbarra na falta de melhor compreensão das estruturas de  $P', \ell', H'$  ao longo de  $F$ .

Estes e outros números foram calculados por Schubert [Sc]. Para uma discussão crítica dos métodos e hipóteses implícitas no chamado "cálculo de Schubert", recomendamos a leitura do prefácio de S. Kleiman à reedição [Sc] e [K15]. Outras compactificações para o espaço de cúbicas reversas foram investigadas por Piene, Schlessinger e Ellingsrud [PS], [PE] deixando a lacuna quanto à estrutura do anel de Chow e, em particular, referindo-se à questão do cálculo dos números característicos como objetivo a ser eventualmente alcançado. Coray [C] estuda o cálculo dos  $P^a \ell^b$  para curvas racionais em  $\mathbb{P}^3$ ; as quínticas racionais são revisitadas em [CV].

### Exercícios

- 1) Mostre que toda curva quártica elítica em  $\mathbb{P}^3$  é interseção completa de 2 superfícies quádricas.
- 2) Mostre que  $T := G(2,10)$  é uma compactificação do espaço de quárticas elíticas de  $\mathbb{P}^3$ . Discuta os casos em que a condição  $P^a \ell^b H^c$  é própria e calcule  $n(a,b,c)$ .

REFERENCIAS

- [AS] J. F. Andrade, A. Simis, Tópicos de álgebra comutativa, 13º Colóquio Bras. Mat., IMPA, Rio de Janeiro (1981).
- [C] D. F. Conay, "Enumerative Geometry of rational space curves" Proc. London Math. Soc. (3), 46 (1983), 263-287.
- [CV] D. F. Conay, I. Vainsencher, "Enumerative formulae for ruled cubic surfaces and rational quintic curves" preprint Notas e Com. Mat. nº 128 UFPE, Recife (1985).
- [EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné, "Elements de Geometrie Algebrique", Publ. Math. IHES.
- [F] W. Fulton, Intersection theory, Springer-Verlag (1984).
- [FKM] W. Fulton, S. L. Kleiman, R. Macpherson, "About the enumeration of contacts", Ravello 1982, Springer LNM 997 (1983), 156-196.
- [G] A. Grothendieck, "Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections", Sém. C. Chevalley - Anneaux de Chow et applications, Secr. Math. Paris (1958).
- [Gr] A. Grothendieck, "La théorie des classes de Chern", Bull. Soc. Math. France 86 (1958), 137-154.
- [Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Grad. Texts in Math., Springer-Verlag (1977).
- [Hi] F. Hirzebruch, Topological methods in algebraic geometry, Springer-Verlag (1966).

- [HM] G. Horrocks, D. Mumford, "A rank 2 vector bundle on  $\mathbb{P}^4$  with 15.000 symmetries, *Topology* 12 (1973), 63-81.
- [J] K. Johnson, "Immersion and imbedding of projective varieties", *Acta Math.* 140 (1978), 49-74.
- [K<sub>15</sub>] S. L. Kleiman, "Problem 15. Rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus", *Proc. Symp. Pure Math.* 28 AMS (1976), 445-482.
- [Ks] \_\_\_\_\_, "The enumerative theory of singularities", in *Real and complex singularities*, Oslo 1976, P. Holm (ed.), Sijthoff & Noordhoff (1977), 297-396.
- [Kc] \_\_\_\_\_, Chasles' enumerative theory of conics: a historical introduction, in *Studies in algebraic geometry*, Math. Ass. Am. Studies in Math. 20 (1980), 117-138.
- [L] D. Laksov, "Residual intersections and Todd's formula for the double locus of a morphism", *Acta Math.* 140 (1978); 75-92.
- [Ma] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Benjamin-Cummings (1980).
- [Mn] J. I. Manin, "Lectures on the K-functor in algebraic geometry", *Russ. Math. Surv.* 24 (5) (1969).
- [MS] C. McCrory, T. Shifrin, "Cusps of the projective Gauss map", *J. Diff. Geom.* 19-1 (1984), 257-276.
- [Pi] R. Piene, "Numerical characters of a curve in projective n-space", *mesmo volume que [Ks]*.



- [Pi] \_\_\_\_\_, "Polar classes of singular varieties", Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 11 (1978), 247-276.
- [Pi] \_\_\_\_\_, "Some formulas for a surface in  $\mathbb{P}^3$ ", Tromsø 1977, Springer LNM 687 (1978), 196-235.
- [PE] G. Ellingsrud, R. Piene, "A compactification of the space of twisted cubics", em preparação.
- [PS] R. Piene, M. Schlessinger, "The Hilbert-Scheme compactification of the space of twisted cubics" a aparecer no Am. J. Math.
- [Sc] H. C. H. Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie, 1879, reeditado com prefácio de S. L. Kleiman, Springer-Verlag (1979).
- [Sh] I. R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry, Springer-Verlag (1977).
- [V<sub>1</sub>] I. Vainsencher, "Counting divisors with prescribed singularities", Trans. Am. Math. Soc. 267 (1981), 399-422.
- [V<sub>2</sub>] \_\_\_\_\_, "Conics in characteristic 2", Compositio Math. 36 (1978), 101-112.
- [Z] H. Zeuthen, M. Pieri, "Géométrie énumérative", Encycl. sci. Math. III-2, Gauthier-Villars, Paris (1915), 260-331.

Impressão na Gráfica do

