

# **FLUXOS DE MATRIZES**

**Carlos Tomei**

COPYRIGHT © - 1985 - by Carlos Tomei

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,  
por qualquer processo, sem a permissão do autor.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Estrada Dona Castorina 110

22.460 - Rio de Janeiro - RJ

**Para Gloria**



## Introdução

Leitor(a), não espere a generalidade costumeira dos textos matemáticos - essas são as notas de uma equação só. Mas que equação! Nenhuma pergunta fica sem resposta e a "teoria" é uma sequência de surpresas. Pense, leitor(a), que essas notas são apenas um exemplo de uma estrutura mais geral e acredite comigo que esta equação está em quase toda a parte.

O fluxo de Toda e suas variantes são uma área ativa de pesquisa. Mas é surpreendente quanto pode ser concluído a partir de poucos pré-requisitos. As vezes, um comentário ou um exercício podem exigir mais do que os cursos básicos de álgebra linear e equações diferenciais. Nesse caso, leitor(a), simplesmente pule para a próxima linha "compreensível". O Capítulo 7 é um mini-curso de mecânica, despretensiosíssimo. O último Capítulo é uma indicação de que um conhecimento teórico maior implica uma interpretação do assunto mais abrangente. Espero que o conteúdo do texto seja suficiente para provocar um estudo mais detalhado desses tópicos.

Vários matemáticos são responsáveis pelo material apresentado, e os créditos aparecem no final de cada capítulo, ou sob a forma de referências bibliográficas. Agradecimentos especiais vão para Percy Deift, co-autor moral dessas notas, e Maria Lúcia Menezes, de quem ouço as críticas com prazer. Agradeço também a Rogério Dias Trindade pela datilografia eficiente.

## CAPÍTULO 1

A equação diferencial que nos interessa provém de uma situação física, o "Toda lattice" [T], que é um modelo matemático para a propagação de ondas num cristal. Essencialmente, considere  $n$  partículas no eixo real que se movem satisfazendo a hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n y_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \exp(x_k - x_{k+1})$$

onde  $x_k$  e  $y_k$  são, respectivamente, a posição e a velocidade da  $k$ -ésima partícula. Em outras palavras, as partículas se movem de modo a satisfazer as equações diferenciais abaixo:

$$\dot{x}_k = y_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\dot{y}_1 = -\exp(x_1 - x_2),$$

$$\dot{y}_k = \exp(x_{k-1} - x_k) - \exp(x_k - x_{k+1}), \quad k = 2, \dots, n-1,$$

$$\dot{y}_n = \exp(x_{n-1} - x_n),$$

onde  $\dot{f}$  é a derivada da função  $f$  na variável  $t$ , o tempo.

O que essas equações querem dizer? As  $n$  primeiras, que a derivada em relação ao tempo da posição de uma partícula,  $x_k$ , é sua velocidade,  $y_k$  - grande coisa. As outras mostram que a aceleração da  $k$ -ésima partícula (a derivada de sua velocidade) é composta de dois termos que dependem da distância da partícula às suas vizinhas, as partículas  $k - 1$  e  $k + 1$ . Note também os fatos abaixo.

1) Da segunda lei de Newton, a aceleração, a menos de uma constante multiplicativa (a massa da partícula - vamos supor que to-

das as massas são iguais a um), é a força exercida sobre a partícula. A força entre as partículas  $k - 1$  e  $k$  puxa sempre a partícula  $k$  para a direita e a partícula  $k - 1$  para a esquerda, mas a intensidade dessa força depende muito da posição relativa das duas partículas. As figuras abaixo indicam a força resultante em duas situações.



2) As vizinhas da partícula  $k$  não são necessariamente as partículas mais próximas de  $k$ . A indexação é feita de modo arbitrário para  $t = 0$ , a situação inicial do sistema, e as partículas, apesar de possíveis cruzamentos, mantêm o índice atribuído originariamente.

3) As equações diferenciais para as velocidades seriam formalmente idênticas se imaginássemos partículas  $n+1$  e  $0$ , fixas, respectivamente em  $\infty$  e  $-\infty$ . O problema físico original considerava o caso periódico, no qual a partícula  $n$  é vizinha das partículas  $n - 1$  e  $1$ . Moser [M] foi o primeiro a considerar as "condições de fronteira" acima.

Então, qual é o problema? Dada uma configuração inicial de partículas (isso é, posições  $x_k$ 's e velocidades  $y_k$ 's no tempo  $t = 0$ ), estudar como elas se movem - em linguagem matemática, resolver as equações diferenciais acima com as condições iniciais  $x_k(0)$  e  $y_k(0)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Começamos (como Flaschka [F]) fazendo uma troca de variáveis,

$$a_k = -y_k/2, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$b_k = (\exp[(x_k - x_{k+1})/2])/2, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

nas quais o sistema de torna

$$(S) \quad \begin{aligned} \dot{a}_k &= 2(b_k^2 - b_{k-1}^2), \quad k = 1, \dots, n, \\ \dot{b}_k &= b_k(a_{k+1} - a_k), \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Honestamente, isso não é uma troca de variáveis (isto é, um difeomorfismo - ou, pelo menos, uma bijeção): afinal, começamos com  $2n$  variáveis ( $n$   $x_k$ 's e  $n$   $y_k$ 's) e sobraram  $2n - 1$  ( $n$   $a_k$ 's e  $n-1$   $b_k$ 's). Entretanto, uma vez resolvido o sistema (S), podemos obter  $x_k$  e  $y_k$  da conservação de momento e uma outra informação adicional. Detalhando, note que a soma das acelerações (isto é, a soma das derivadas dos  $y_k$ 's) é igual a zero, o que implica que o centro de massa do sistema (a média das posições  $x_k$ 's) se move com velocidade constante (qual?). Em particular, então, se sabemos a posição inicial do centro de massa (a média das posições iniciais), sabemos a média das posições para todos os tempos. Além disso, obter as variáveis  $b_k$  equivale a obter as posições relativas  $x_k - x_{k+1}$ , e quem sabe as posições relativas e a média das posições sabe todas as posições (exercício). Em resumo, os dois sistemas são completamente equivalentes, e tudo o que temos a fazer é resolver o sistema (S) acima, com as condições iniciais óbvias,



$a_k(0)$ ,  $k = 1, \dots, n$  e  $b_k(0)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ .

Você não precisa ter entendido nada até agora para continuar lendo: basta tomar as equações diferenciais para os  $a_k$ 's e  $b_k$ 's como ponto de partida. E não se preocupe quanto à motivação, vão aparecer outras razões para estudar esse sistema nos próximos capítulos que, aparentemente, não têm nada a ver com o problema original. A interpretação física, por outro lado, torna certos resultados mais plausíveis.

Resolver o sistema (S) parece pretensioso - se a gente aprende alguma coisa num curso de equações diferenciais é que quase nunca é possível resolver uma equação. Um curso típico, talvez, começa com a solução de sistemas lineares (o que, certamente, não é o caso que nos interessa) e, eventualmente, trata de equações não lineares de um modo muito geral, abordando propriedades qualitativas das soluções. Inicialmente, prova-se um teorema de existência local e unicidade para o problema de valor inicial, que pode ser usado para demonstrar que o sistema (S) tem solução (única) para tempos suficientemente pequenos.

**Exercício: Detalhe.**

Por que não vale, em geral, um teorema de existência global? A razão, também apresentada nesse curso hipotético, é que a solução pode ir a infinito em tempo finito - mais precisamente (veja, por exemplo, [HS]), uma solução do problema de valor inicial que não admite extensão além de um tempo  $t_0$  finito não

está contida em nenhum conjunto compacto do espaço de fase. Um exemplo perigosamente parecido com (S) é a equação escalar

$$\frac{da}{dt} = a^2(t), \quad a(0) = a_0,$$

solúvel explicitamente (como?), cujas soluções "estouram" em tempo finito. Veremos no próximo capítulo que (S) tem soluções globais.

CAPÍTULO 2

A razão para a "troca de variáveis" do capítulo anterior é a seguinte: o sistema (S) é equivalente a equação

$$\frac{dL}{dt} = [B, L] = BL - LB, \quad L(0) = L_0,$$

onde  $L$  e  $B$  são as matrizes abaixo.

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ -b_1 & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{n-1} \\ 0 & & -b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & & 0 \\ -b_1 & & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{n-1} \\ 0 & -b_{n-1} & & 0 \end{pmatrix}$$

Veremos que sistemas dessa forma (chamados pares de Lax) têm propriedades muito especiais. Uma matriz como  $L$ , cujas entradas  $L_{ij}$  não nulas satisfazem  $|i-j| \leq 1$ , é dita tridiagonal. Por conveniência, suponhamos que todas as matrizes são reais e denotemos a derivada em relação a variável  $t$ ,  $\frac{df}{dt}$ , por  $\dot{f}$ .

Lema 1:  $L(t) = Q(t)^T L_0 Q(t)$ , onde  $Q(t)$  é uma matriz ortogonal satisfazendo a equação

$$\dot{Q}(t) = -Q(t)B(t), \quad Q(0) = I.$$

Além disso,  $L(t)$  é sempre simétrica e tridiagonal.

Demonstração:

Pelo teorema de existência local para o problema de valor inicial,  $L(t)$  (logo  $B(t)$  e  $Q(t)$ ) é bem definida para  $t$  pequenos. Vamos mostrar que  $Q(t)$  é ortogonal. Note que (omitindo a dependência em  $t$ )

$$(QQ^T)' = \dot{Q}Q^T + Q\dot{Q}^T = -QBQ^T + QBQ^T = 0$$

(como  $B^T = -B$ ) e  $Q(0)Q^T(0) = I$ . Pela unicidade da solução do problema de valor inicial,  $Q(t)Q^T(t) = I$ , desde que  $Q(t)$  exista. Defina  $M(t) = Q(t)^T L_0 Q(t)$ . Da ortogonalidade de  $Q$  (novamente omitindo a dependência em  $t$ ),  $QM = L_0 Q$ . Tomando derivadas em  $t$  (lembre que  $L_0$  é uma constante), e usando  $\dot{Q} = -QB$ , obtemos  $M' = BM - MB$ . Como  $M(0) = L_0$ ,  $L(t) = M(t)$  é a (única) solução da equação diferencial  $\dot{L} = BL - LB$ ,  $L(0) = L_0$ . Obviamente,  $L(t) = Q(t)^T L_0 Q(t)$  é uma matriz simétrica. Uma conta simples mostra que  $BL - LB$  é tridiagonal, e, assim,  $L(t)$  não pode abandonar o espaço vetorial das matrizes tridiagonais. ■

Corolário: Os autovalores de  $L(t)$  não dependem de  $t$ . ■

Corolário: O sistema (S) tem solução global, para qualquer condição inicial (simétrica, tridiagonal)  $L_0$ .

Demonstração:

Basta ver que existe uma limitação para  $L(t)$  (veja o fim do capítulo anterior), onde temos a liberdade de escolher

a norma no espaço das matrizes simétricas. Por conveniência, seja  $\|M\| = \sup |(Mv, v)| / \|v\|^2$ , onde se  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  e  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , então  $(v, u) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$  e  $\|v\|^2 = (v, v)$ .  
Então  $\|L(t)\| = \|Q L_0 Q^T\| = \|L_0\|$ . ■

Exercício: Uma outra demonstração da existência de soluções globais - A hamiltoniana  $H$  é positiva e independe de  $t$ . Então as velocidades são limitadas para qualquer tempo, o que mostra que as posições também não podem ser infinitas em tempo finito. Detalhe.

O que temos até agora? Antes de tudo, demonstramos que as soluções do sistema (S) são definidas para todos os tempos. Além disso, encontramos várias leis de conservação (constantes de movimento, integrais) do sistema. Leis de conservação são de grande interesse físico e conceitual, e no capítulo anterior já tínhamos encontrado uma - a conservação de momento (isto é, o fato que a soma dos  $y_k$  era constante), que usamos para justificar a "troca de variáveis".

Exercício: Expresse a conservação de momento do sistema original em termos da preservação dos autovalores de  $L(t)$ .

Exercício: Todo mundo sabe que num sistema físico a energia se conserva, seja lá o que energia for. É fácil descrever a energia do nosso modelo físico: energia cinética (lembra, leitor(a),  $mv^2/2$ ?) mais energia potencial (algo cujo gradiente é a força

com o sinal trocado) - exatamente  $H$ , dada pela primeira fórmula do Capítulo I (afinal,  $H$  era a hamiltoniana do sistema). Escreva  $H$  em termos dos autovalores de  $L(t)$ .

Sugestão: escreva  $\text{tr } L^2$  de dois modos diferentes.

Exercício: Se você sabe um pouco sobre variedades, dê um argumento geométrico para mostrar que soluções de  $\dot{Q} = -QB$ , para  $Q(0)$  ortogonal e  $B(t)$  anti-simétrica (isto é,  $B^T = -B$ ), são curvas no grupo ortogonal.

O lema e sua demonstração parecem caídos do céu. A origem da idéia é interessante, mas exige algum conhecimento de análise funcional. Em 1967, físicos em Princeton [GGKM] mostraram o seguinte fato surpreendente: se  $u(x,t)$  satisfaz a equação de Korteweg-deVries (KdV),

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) + u_{xxx}(x,t) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x)$$

então os autovalores do operador de Schrödinger,

$$Lf(x) = f''(x) + \frac{1}{6} u(x,t)f(x)$$

são independentes de  $t$ . Procurando uma explicação natural para esse fato, Lax [L] argumentou que o operador  $L$  devia mudar no tempo por uma conjugação unitária (afinal, a evolução preservava os autovalores e a simetria do operador). A pergunta óbvia, depois disso, é: que equação diferencial é satisfeita por  $L(t)$  se  $L(t) = Q(t) L_0 Q^T(t)$ ? Fica por sua conta, leitor(a) (você pode pensar nesse problema supondo que  $L'$ s e

$Q$ 's são matrizes). Assim como mostramos que o sistema (S) podia ser escrito na forma  $\dot{L} = [B, L] = BL - LB$ , Lax mostrou que KdV equivale a

$$\dot{L} = [B, L],$$

onde

$$Bf = 24(f'''(x) + 2u(x,t)f'(x) + u_x(x,t)f(x))$$

(verifique), o que, pelo menos formalmente (em dimensão infinita), explica a preservação dos autovalores de  $L(t)$ . Aliás, como você acha que Lax encontrou a fórmula acima?

Vamos estudar agora o comportamento assintótico das soluções do sistema (S). Da equação diferencial para  $a_1$ , a coordenada  $L_{11}$ ,

$$\dot{a}_1 = 2b_1^2,$$

vemos que, tipicamente,  $a_1$  aumenta no tempo. Mas como  $L(t)$  é conjugada a  $L_0$ ,  $a_1$  deve permanecer limitada. Isso quase diz (por quê não?) que a velocidade de crescimento de  $a_1$ , dada por  $2(b_1)^2$ , vai a zero. Uma vez que  $b_1$  "é" zero, o sistema (S) se reduz a um sistema análogo para uma matriz  $n-1 \times n-1$ . O mesmo argumento nos faria concluir que  $b_2$  vai a zero, e assim sucessivamente, até obtermos que, quando  $t$  vai a  $\infty$ , a matriz  $L(t)$  converge a uma matriz diagonal. Os próximos lemas tornam essas idéias precisas.

Lema 2: O sinal de  $b_k(t)$  é constante. Em particular, se  $b_k(0) = 0$ , então  $b_k(t) = 0$ , para qualquer  $t$ .

Demonstração:

A equação diferencial satisfeita por  $b_k$ ,

$$\dot{b}_k = b_k(a_{k+1} - a_k),$$

admite a solução constante zero. O resultado segue da unicidade da solução do problema de valor inicial. ■

Se algum  $b_k$  é zero inicialmente, o lema anterior mostra que o sistema (S) se parte em dois sistemas completamente independentes. Sem perda de generalidade, então, basta estudar evoluções cujos  $b_k$ 's iniciais são não nulos. Os  $b_k(0)$ 's provenientes do problema físico são positivos - eles são exponenciais de números reais.

Uma matriz  $L$  simétrica, real, tridiagonal, com  $L_{ij} \neq 0$ , para  $|i-j| = 1$  é chamada uma matriz de Jacobi.

Lema 3: Todos os autovalores de uma matriz de Jacobi são diferentes.

Demonstração:

Suponha que  $L$  tem um autovalor  $\lambda$  associado a dois autovetores. Então existe uma combinação linear não nula dos autovetores (também um autovetor, digamos,  $v$ ) cuja primeira coordenada  $v_1$  é nula. Igualando a primeira coordenada dos dois lados da equação  $Lv = \lambda v$ , obtemos que a segunda coordenada de  $v$  é nula. Continuando de modo análogo, obtemos  $v = 0$  - absurdo. ■



Teorema (comportamento assintótico [M]):  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} L(t) = L(\pm\infty)$  é uma matriz diagonal. Se  $L(0)$  é uma matriz de Jacobi, então as entradas na diagonal de  $L(\infty)$  ( $L(-\infty)$ ) aparecem em ordem decrescente (crescente), e são exatamente os autovalores de  $L(0)$ .

Demonstração:

Vamos demonstrar as afirmações acima para  $t$  indo a  $\infty$  - o resto é análogo.  $L(t)$  é conjugada a  $L_0$ , e, na norma matricial definida acima,  $\|L(t)\| = \|L_0\|$ . Além disso,  $L_{ij} = (Le_i, e_j)$ , onde  $e_i$  e  $e_j$  são vetores da base canônica de  $R^n$ , logo  $|L_{ij}| \leq \|L_0\|$ , pela desigualdade de Cauchy-Schwartz (isso é,  $|(v,u)| \leq \|v\| \|u\|$ ) - em palavras, o valor absoluto de todas as entradas de  $L(t)$  é menor do que uma constante  $C$  durante a evolução. Agora, vamos mostrar que  $a_1$  vai a zero. Da equação para a evolução de  $b_1$ , vemos que o valor absoluto da derivada de  $b_1$  também é limitado por uma constante  $D$  (qual?). Vamos supor, por absurdo, que  $b_1$  não vai a zero. Então, para qualquer  $t$ , existe um  $T \geq t$  para o qual  $|b_1(T)| \geq \epsilon$ , para algum  $\epsilon$  positivo. Como a derivada de  $b_1$  em módulo é limitada por  $D$ , temos que  $|b_1| \geq \epsilon/2$ , no intervalo  $(T - \epsilon/2D, T + \epsilon/2D)$  (verifique a geometria). Escolhendo valores adequados de  $t$ , podemos obter infinitos intervalos disjuntos do mesmo comprimento no qual  $|b_1| \geq \epsilon/2$ . Isso contradiz o fato que, da evolução de  $a_1$ ,

$$a_1(t) = a_1(0) + \int_0^t b_1^2(s) ds,$$

e  $|a_1| = |L_{11}| \leq C$ . Logo  $b_1$  vai a zero. Agora, vamos ver que  $b_2$  vai a zero. Para isso, considere a evolução para  $a_1 + a_2$ :

$$(a_1 + a_2)' = 2b_1^2 + 2b_2^2 - 2b_1^2 = 2b_2^2.$$

Como  $a_1 + a_2$  deve permanecer limitada, o mesmo argumento de antes mostra que  $b_2$  vai a zero. Assim (como, exatamente?), obtemos sucessivamente que todos os  $b_k$ 's vão a zero. Isso garante que os  $a_k$ 's são, por sua vez, convergentes (por quê? novamente, mostre antes que  $a_1$  é convergente, depois  $a_1 + a_2$ , etc.). Logo, a matriz limite  $L(\infty)$  existe. Pelo corolário do lema 1, as entradas na diagonal de  $L(\infty)$  são os autovalores de  $L(0)$  (por que, exatamente?).

Falta ver a ordenação dos autovalores, se a condição inicial é uma matriz de Jacobi. Lembre que, pelo lema 3, todos os autovalores de  $L_0$  (logo de  $L(\infty)$ ) são diferentes. Suponha que  $a_{i+1}(\infty) > a_1(\infty)$ . Então, da equação

$$\dot{b}_i = b_i(a_{i+1} - a_i)$$

obtemos, multiplicando por  $b_i$  e usando que  $(b_i^2)' = 2b_i \dot{b}_i$ ,

$$(b_i^2)' = 2b_i^2(a_{i+1} - a_i).$$

Mas, pela convergência dos  $a_i$ 's, para todos os tempos maiores que um certo tempo fixo  $T$ , temos que  $a_{i+1}(t) > a_i(t)$ . Relembrando a equação anterior, vemos que  $b_i^2$ , certamente um número positivo, é crescente para  $t > T$ , contrariando o fato que  $b_i$

vai a zero. ■

O sistema de equações diferenciais acima se generaliza naturalmente para matrizes simétricas arbitrárias: considere a equação

$$\dot{L} = [B, L] = BL - LB, \quad L(0) = L_0,$$

onde  $B(L)$  é a matriz anti-simétrica, cuja parte triangular superior é igual à de  $L$ .

Exercício: Imitando a demonstração do teorema anterior, mostre que essa equação diferencial também tem soluções globais convergentes para matrizes diagonais.

O teorema acima e sua extensão (o exercício anterior) sugerem que podemos calcular os autovalores de uma matriz simétrica resolvendo uma equação diferencial. Talvez isso não seja eficiente, mas indica que pode haver uma conexão entre o sistema (S) e os métodos usuais de cálculo de autovalores, o que realmente acontece e será visto no Capítulo 6.

Exercício: Use o exercício anterior e a compacidade do grupo de matrizes ortogonais para provar o teorema espectral - toda matriz simétrica é conjugada por uma matriz ortogonal a uma matriz diagonal.

Exercício: Interprete fisicamente o comportamento assintótico do sistema. Compare as configurações em  $\infty$  e  $-\infty$ . Dê uma outra demonstração da conservação dos autovalores de  $L(t)$ .

CAPÍTULO 3

Vamos estudar uma troca de variáveis nas quais a equação de Toda (isto é, o sistema (S)) é solúvel explicitamente.

Seja  $L = L(a,b)$  uma matriz  $n \times n$  real, simétrica, tridiagonal, com entradas  $L_{ii} = a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $L_{ii+1} = b_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , tais que  $b_i > 0$ . Matrizes assim serão chamadas matrizes de Jacobi com superdiagonal positiva. Pelo lema 3 do capítulo anterior, os autovalores de  $L$  são todos diferentes, e, pela demonstração do lema, todos os autovalores de  $L$  podem ser normalizados de modo a ter sua primeira coordenada (estritamente) positiva. Obviamente, o vetor  $u_1(L)$ , cujas coordenadas são as primeiras coordenadas dos autovetores devidamente normalizados de  $L$ , tem norma 1 (por que?). Seja  $T$  o conjunto das matrizes de Jacobi com superdiagonal positiva e  $\sigma(L)$  (o espectro de  $L$ ) a sequência dos autovalores de  $L$  em ordem decrescente. Defina também

$$\mathcal{J} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n\} \times \\ \times \{v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1; v_i > 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Teorema (variáveis espectrais):  $T$  e  $\mathcal{J}$  são difeomorfos. Mais precisamente, a função  $\psi$  que leva cada matriz  $L$  de  $T$  a  $\sigma(L)$  e  $u_1(L)$  é um difeomorfismo.

Demonstração:

Pelo teorema espectral (o penúltimo exercício do capítulo anterior),  $L = U \Lambda U^T$ , onde  $U$  é uma matriz ortogonal e  $\Lambda$  é diagonal. Escrevendo  $LU = U\Lambda$ , vemos que as colunas de  $U$  são os autovetores de  $L$  e as entradas na diagonal de  $\Lambda$  são os autovalores de  $L$ . Em particular, podemos supor que as entradas na diagonal de  $\Lambda$  estão em ordem decrescente, e os autovalores de  $U$  estão normalizados de modo a encontrarmos  $u_1$  na primeira linha de  $U$ . Seja  $(D, v)$  um elemento de  $\mathcal{J}$ . Inverter  $\psi$  é encontrar uma matriz  $L$  em  $T$  tal que  $\sigma(L) = D$  e  $u_1(L) = v$ . Obviamente, se  $L = U \Lambda U^T$ , devemos ter  $\Lambda = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ , e a primeira linha de  $U$ ,  $u_1(L)$ , deve ser  $v$ . Agora, "só" falta obter as outras linhas  $u_i$ ,  $i = 2, \dots, n$  de  $U$ . Para não esconder a idéia da demonstração, vamos fixar  $n = 5$ . Note que

- 1) Pelo teorema espectral, todos os  $u_i$ 's são ortogonais entre si.
- 2)  $L_{11}$  é simplesmente  $(u_1, \Lambda u_1)$  (escreva  $L = U \Lambda U^T$  em coordenadas).

Analogamente, o teorema espectral e a tridiagonalidade de  $L$  nos dizem que  $u_3, u_4$  e  $u_5$  são ortogonais a  $Au_1, u_4$  e  $u_5$  são ortogonais a  $Au_2$  e  $u_5$  é ortogonal a  $Au_3$ .

- 3) Se  $L$  é tridiagonal,  $L^2$  é pentadiagonal (o que isso quer dizer?).

Além disso,  $L^2 = U \Lambda^2 U^T$ , do que obtemos que  $u_4$  e  $u_5$  são ortogonais a  $\Lambda^2 u_1$  e  $u_5$  é ortogonal a  $\Lambda^2 u_2$ .

4)  $L^3$  é heptadiagonal (perdão, leitores) e  $u_5$  é ortogonal a  $\Lambda^3 u_1$ . Ou, expressando as relações de ortogonalidade de outro modo, temos que  $u_5$  é ortogonal a  $u_1$ ,  $\Lambda u_1$ ,  $\Lambda^2 u_1$  e  $\Lambda^3 u_1$ . Esses quatro vetores podem ser obtidos a partir de  $D$  e  $v$ , e são linearmente independentes (Exercício: use que as coordenadas de  $v$  são não nulas e note a aparição de um determinante de Vandermonde).

Conclusão: Como  $u_5$  tem módulo 1, as relações de ortogonalidade e a independência dos quatro vetores determinam  $u_5$  a menos de sinal. Como obter  $u_4$  (a menos de sinal)? Basta ver que  $u_4$  é ortogonal a  $u_1$ ,  $\Lambda u_1$ ,  $\Lambda^2 u_1$  e  $u_5$  - quatro vetores independentes (por que?). De maneira análoga, obtemos, a menos de sinal,  $u_3$  e  $u_2$ . A receita descrita, então, obtém as linhas de  $U$  (a menos de sinal) começando por baixo. Há uma maneira mais conveniente de rearrumar a informação disponível até agora. Note que os conjuntos  $u_1, \Lambda u_1, \Lambda^2 u_1, \Lambda^3 u_1$  e  $u_1, u_2, u_3, u_4$  geram o mesmo subespaço (o subespaço normal a  $u_5$ ). Analogamente,  $u_1, \Lambda u_1, \Lambda^2 u_1$  e  $u_1, u_2, u_3$  geram o mesmo subespaço (qual?) e que, finalmente,  $u_1$  e  $\Lambda u_1$  geram o mesmo subespaço que  $u_1$  e  $u_2$ . Em outras palavras,  $u_1$  e  $u_2$  (a menos de sinal) são os vetores obtidos a partir de  $u_1$  e  $\Lambda u_1$  usando o algoritmo de ortonormalização de Gram-Schmidt (por quê?). De maneira geral, a menos de sinais, os vetores  $u_2$  a  $u_5$  vêm da aplicação de Gram-Schmidt à sequência  $u_1, \dots, \Lambda^4 u_1$ . Isso faz com que as linhas de  $U$  sejam obtidas de baixo para cima. Como escolher os sinais? Só há uma escolha de sinal para  $u_2$  que faz

$L_{12} = (u_1, \Lambda u_2)$  positivo, como desejado para ter  $L$  em  $T$ . Para garantir isso, temos que ver que  $(u_1, \Lambda u_2)$  é não nulo. Mas  $(u_1, \Lambda u_2) = (\Lambda u_1, u_2)$  e  $u_2$  não pode ser ortogonal a dois vetores do subespaço gerado por  $u_1$  e  $\Lambda u_1$  (ou, equivalentemente, por  $u_1$  e  $u_2$ ). A exigência que  $L_{23}$  seja positivo determina o sinal de  $u_3$ , e, de maneira análoga, obtemos os sinais de  $u_4$  e  $u_5$ . Em resumo, a função  $\psi$  é injetora. Para ver sobrejetividade, basta verificar que a matriz  $L$  dada por  $L = U \Lambda U^T$ , onde  $U$  e  $\Lambda$  são obtidos pela receita acima, a partir de um par  $(D, v)$  de  $\mathfrak{J}$ , é realmente uma matriz de  $T$  com  $\sigma(L) = D$  e  $u_1(L) = v$ . Que  $L$  pertence a  $T$  segue da construção de  $U$  e  $\Lambda$ : essencialmente, a tridiagonalidade de  $L$  vem das relações de ortogonalidade dos  $u_i$ 's e a positividade da superdiagonal vem da escolha dos sinais dos  $u_i$ 's (aliás, de onde vem a simetria?). Além disso,  $\sigma(L) = D$  e  $u_1(L) = v$  são conseqüências de  $L = U \Lambda U^T$ . Diferenciabilidade de  $\psi$  segue da dependência diferenciável dos autovalores e autovetores de uma matriz com espectro simples (isto é, todos os autovalores diferentes) em relação a perturbações diferenciáveis da matriz. A inversa de  $\psi$  é uma composição das quatro operações com extrações de raízes quadradas (com sinais pré-fixados), logo também diferenciável. ■

Exercício só para constar: Convença-se de que essa demonstração se estende para matrizes  $n \times n$ .

O resultado acima é conhecido por analistas numéricos sob o nome de algoritmo de Lanczos [P]. A parte difícil, em um certo sentido, é encontrar as  $n - 1$  variáveis que, combinadas com o espectro, recuperam uma matriz tridiagonal. Existem outras escolhas, essencialmente equivalentes a dar o vetor  $u_1$ .

Exercício: Seja  $M$  a matriz  $(n-1) \times (n-1)$  obtida removendo as primeiras linha e coluna de  $L$ . Mostre que dar  $\sigma(L)$  e  $u_1(L)$  é equivalente a dar  $\sigma(L)$  e  $\sigma(M)$ .

Sugestão: Escreva  $(L-\lambda I)^{-1}$  usando o teorema espectral e a forma da inversa de uma matriz em termos de seus cofatores - iguale as duas funções racionais em  $\lambda$ .

Exercício: Existem variáveis espectrais para, digamos, matrizes  $L$  pentadiagonais. Essencialmente, dar  $L$  equivale a dar  $\sigma(L)$ ,  $u_1$  e  $u_2$  (vetores ortonormais). Para obter as outras linha de  $U$ , a matriz de autovetores de  $L$ , aplique Gram-Schmidt na sequência  $u_1, u_2, Au_1, Au_2, \dots$ . Verifique. Obtenha condições para garantir que o algoritmo seja executável (por exemplo, os vetores da sequência acima devem ser linearmente independentes).

Um difeomorfismo é uma troca de variáveis. E as variáveis espectrais são obviamente convenientes para a equação de Toda: afinal,  $n$  delas não mudam no tempo ( $\sigma(L)$ ). O passo seguinte é descrever como  $u_1 = u_1(L(t))$  muda.



Lema 1:  $\dot{u}_1 = \Lambda u_1 - (\Lambda u_1, u_1) u_1$ .

Demonstração:

Pelo lema 1 do capítulo anterior,  $L(t) = Q(t)^T L_0 Q(t)$ , onde  $\dot{Q} = -QB$ . Pelo teorema espectral,  $L(t) = U(t)^T \Lambda U(t)$ , onde  $\Lambda$  é diagonal, com entradas em ordem decrescente. Mas  $L_0 = U(0)^T \Lambda U(0)$ , logo  $U(t) = U(0) Q(t)$  (por que? lembre que os autovalores de  $L$  são todos diferentes). Derivando,  $\dot{U} = U(0)\dot{Q} = -U(0)QB = -UB = -U(L-R)$ , onde  $R$  é uma matriz triangular inferior cuja diagonal coincide com a diagonal de  $L$  (a diagonal de  $B$  é zero). Como  $UL = \Lambda U$ ,  $\dot{U} = -\Lambda U + UR$ . Agora, basta tomar a primeira linha dos dois lados (verifique). ■

A equação para  $u_1$  é composta de um termo linear e outro não linear. Se só tivéssemos o primeiro termo, seria fácil resolver o problema de valor inicial: a equação

$$\dot{v} = \Lambda v, v(0) = v_0,$$

tem a solução (única)  $v(t) = \exp(t\Lambda) v_0$ . Certamente, essa não pode ser a solução da equação que nos interessa: o vetor  $u_1$  deve ter sempre módulo igual a 1. Isso sugere o palpite seguinte.

Lema 2:  $u_1(L(t)) = \exp(t\Lambda) u_1(L_0) / \|\exp(t\Lambda) u_1(L_0)\|$ .

Demonstração:

Uma simples conta. ■

Em resumo, para resolver a equação de Toda com condição inicial  $L_0$ , basta obter as variáveis espectrais correspondentes a  $L_0$  (isto é,  $\sigma(L_0)$  e  $u_1(L_0)$ ), calcular sua evolução (isto é, calcular  $\sigma(L(t))$  e  $u_1(L(t))$ , usando as fórmulas acima) e recuperar  $L(t)$  a partir das novas variáveis inversas. Moral: uma vez obtidos os autovalores e autovetores de  $L_0$ , resolvemos explicitamente a equação de Toda.

Foi Moser [M] a sugerir as variáveis espectrais e calcular sua evolução para a equação de Toda. Seu algoritmo inverso é diferente, e não se estende naturalmente para matrizes de banda. Equações de Toda para matrizes de banda foram estudadas inicialmente por Nanda [N], onde encontra-se uma descrição muito detalhada das variáveis espectrais para matrizes pentadiagonais, tomadas como exemplo do caso geral. A idéia de usar variáveis espectrais para resolver equações não lineares (o "inverse scattering method") remonta a [GGKM], onde os autores as empregaram na solução explícita do problema de valor inicial para a equação KdV. As variáveis, nesse caso, devem recuperar o potencial  $u(x,t)$  do operador de Schrödinger, que evolui preservando seu espectro (lembre dos últimos parágrafos do capítulo anterior). Descrever a "troca de variáveis" equivalente à função  $\psi$  é muito mais difícil (veja, por exemplo, [DT]). Várias outras equações não lineares podem ser resolvidas com métodos parecidos, mas essa é outra (?) história.

## CAPÍTULO 4

Existem vários espaços de fase naturais para a equação de Toda. Por exemplo, podemos considerar as evoluções definidas sobre o conjunto de matrizes  $n \times n$  reais, simétricas. Por conveniência, nesse capítulo, vamos tomar como espaço de fase o conjunto

$M_D = \{\text{matrizes } n \times n \text{ reais, simétricas, tridiagonais, com autovalores dados pelas coordenadas de } D\}$ ,

onde  $D$  é um vetor de  $\mathbb{R}^n$  fixo. Do que sabemos da equação de Toda, as soluções que começam no conjunto  $M_D$  não o abandonam (por quê?). Em outras palavras,  $M_D$  é invariante pelo fluxo de Toda.

Exercício: O que é  $M_D$ , se todas as coordenadas de  $D$  são iguais?

Exercício: Vamos mostrar que  $M_D$  é um círculo, se as duas coordenadas de  $D$  são diferentes. Suponha, por exemplo, que  $D = (1, 2)$ . Escreva todas as matrizes  $L$  de  $M_D$  usando o teorema espectral,  $L = Q \Lambda Q^T$ . Mostre que basta empregar matrizes  $Q$  em  $SO(2, \mathbb{R})$ , o conjunto de matrizes ortogonais  $2 \times 2$  reais com determinante positivo. Mostre que  $SO(2, \mathbb{R})$  é homeomorfo a um círculo ( $SO(2, \mathbb{R})$  é o conjunto de rotações do plano preservando orientação). Depois, mostre que, se  $QAQ^T = RAR^T$ , onde  $Q$  e  $R$  são matrizes em  $SO(2, \mathbb{R})$ , então  $Q = \pm R$ . Conclua que  $M_D$  é homeomorfo (difeomorfo) a um círculo com pontos

antípodas identificados - isto é, um círculo (por quê, mesmo?).

Exercício para quem sabe variedades: Se não exigirmos que todos os autovalores sejam diferentes,  $M_D$  não é uma variedade, necessariamente. Por exemplo, mostre que o conjunto das matrizes  $3 \times 3$ , reais, tridiagonais, simétricas com autovalores iguais a 0, 0 e 1 é homeomorfo a uma figura oito.

O conjunto  $M_D$  se decompõe na união disjunta de vários outros conjuntos invariantes menores: lembre que, pelo lema 2 do capítulo 2, os sinais dos  $b_k$ 's (os elementos na superdiagonal) são constantes nas órbitas (isto é, as soluções da equação diferencial). Assim, por exemplo, no caso  $3 \times 3$ ,  $M_D$  é a união disjunta dos conjuntos ++ (as matrizes de  $M_D$  cujos  $b_k$ 's são estritamente positivos), ++- (as matrizes de  $M_D$  com  $b_1$  positivo e  $b_2$  negativo), -+, --, +0, -0, 0+, 0- e 00, com definições análogas.

Exercício: Usando uma notação análoga, decomponha  $M_D$ , onde  $D = (1,2)$  na união disjunta de três conjuntos, +, - e 0. Represente-os numa figura.

Agora, vamos "montar"  $M_D$  no caso  $3 \times 3$ , onde, por conveniência,  $D = (1,2,3)$ .

Exercício: Mostre que ++, +-, -+ e -- são homeomorfos (difeomorfos).

Sugestão: Considere conjugações por matrizes diagonais contendo na diagonal uma escolha convenientes de  $1$ 's e  $-1$ 's.

Dê um significado à notação  $+\dots+$ . Mostre que dois conjuntos dados por duas cadeias de sinais de mesmo comprimento são homeomorfos (difeomorfos).

Já temos uma descrição detalhada do conjunto  $++$ : pelo teorema do capítulo anterior, dar uma matriz tridiagonal com superdiagonal estritamente positiva é a mesma coisa que dar seus autovalores e um vetor normal  $v$ , de coordenadas positivas. Logo,  $++$  é homeomorfo (difeomorfo) ao conjunto dos vetores normais com coordenadas positivas - um octante da esfera  $S^2$ , claramente homeomorfo (difeomorfo) a  $R^2$  (verifique). Quem é a fronteira de  $++$  em  $M_D$ ? Obviamente, a união dos conjuntos  $+0$  e  $0+$ .

Exercício: Mostre que  $+0$  (ou  $0+$ ) é homeomorfo (difeomorfo) a três cópias de  $+$ . Mostre que  $00$  é formado por seis pontos - as seis matrizes diagonais, com autovalores  $1, 2$  e  $3$ . Conclua que o fecho de  $++$  em  $M_D$  é um hexágono, onde as matrizes estão dispostas como na figura abaixo. Note que os outros conjuntos,  $+-, -+$  e  $--$ , têm fechos semelhantes.

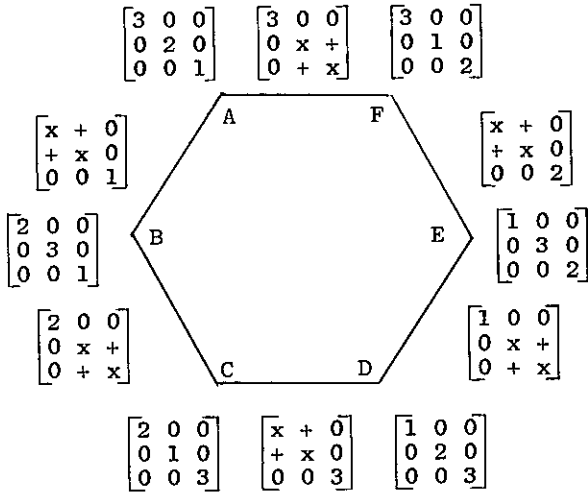


Figura 1

Para terminar de montar  $M_D$ , só falta colar os quatro hexágonos, ++, +-, -+ e --, identificando as fronteiras adequadamente. Não é difícil fazer as identificações graficamente: "cole" antes ++ com +- e -+ com --, obtendo as figuras abaixo.

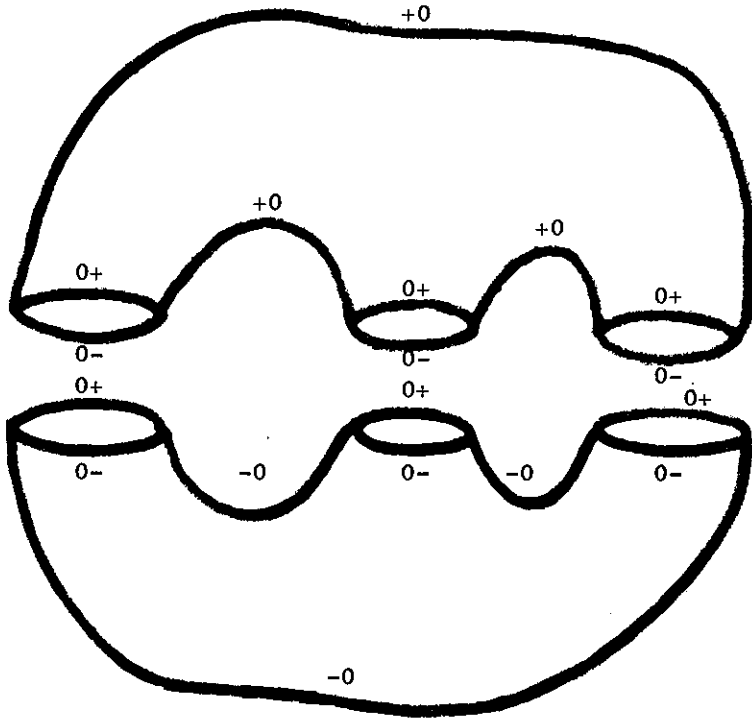


Figura 2

Agora cole os dois pedaços, sempre seguindo as identificações, obtendo um bitoro - isso é o  $M_{(1,2,3)}$ .



Figura 3

Todo esse trabalho foi só para identificar topologicamente o espaço de fase. Mas agora, desenhar as órbitas é fácil.

Note que

- 1) as matrizes diagonais são os pontos de equilíbrio da equação diferencial (verifique),
- 2) todos os conjuntos  $++$ ,  $+0$ ,  $0+$  e suas variações de sinais, são invariantes,
- 3) o comportamento assintótico das órbitas é dado pelo teorema do Capítulo 2.

Juntando tudo, concluímos que as órbitas da equação diferencial devem preencher o espaço de fase como abaixo.

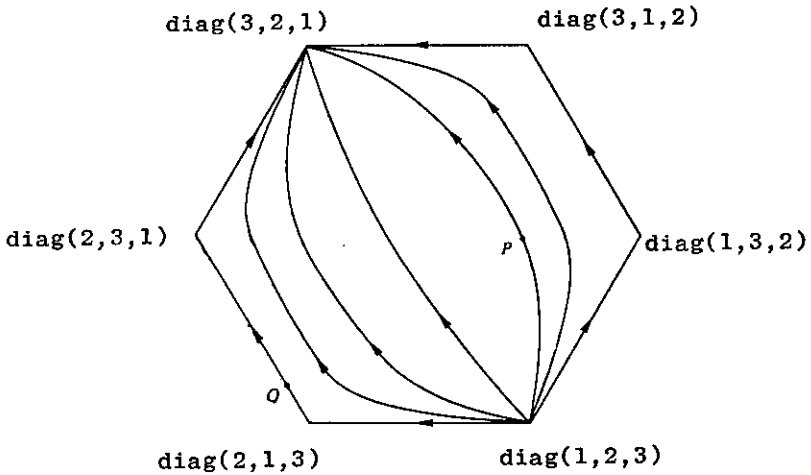


Figura 4



Exercício: Mostre que a função  $2a_1 + a_2$  é uma função de Morse para a equação diferencial, no caso  $3 \times 3$  (isto é, esta função cresce ao longo da órbita, a menos que a órbita consista de um ponto de equilíbrio). Obtenha os subespaços invariantes para cada ponto de equilíbrio (isto é, os conjuntos de matrizes que convergem, quando  $t$  vai a  $+\infty$ , para cada ponto de equilíbrio). Determine os índices dos pontos de equilíbrio e verifique o teorema de Euler-Poincaré, nesse caso.

Exercício: O que pode ser o fecho de  $+++$  em  $M_{(1,2,3,4)}$ ? Como antes, o interior é difeomorfo a  $\mathbb{R}^3$ , e a fronteira consiste de conjuntos de matrizes com zeros na diagonal. Matrizes na fronteira com  $b_1$  igual a zero são homeomorfas a quatro cópias do fecho de  $++$  (por quê?). Idem, para as matrizes com  $b_3$  igual a zero. Matrizes com  $b_2$  igual a zero são essencialmente a superposição de duas matrizes  $2 \times 2$ . Conclua que a fronteira de  $+++$  é composta de oito hexágonos e seis quadriláteros. (Lembre que todas as afirmações são topológicas - não existem métricas envolvidas.) Isso sugere que o fecho de  $+++$  é a figura abaixo, o que, realmente, pode ser demonstrado. Dê nomes aos vértices, arestas e faces.

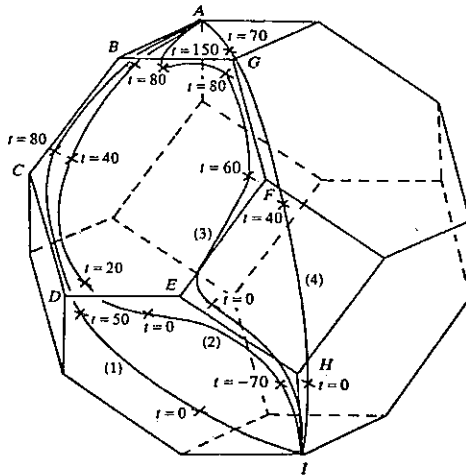


Figura 5

Como você pode imaginar, é possível ([To]) estudar a geometria do espaço de fase para qualquer dimensão, mas a combinatória envolvida complica. De brinde, na figura acima, algumas órbitas obtidas numericamente ([DNT]).

## CAPÍTULO 5

Nesse capítulo veremos uma generalização natural da equação de Toda.

No Capítulo 3, vimos que, nas variáveis  $(D, v)$ , o sistema de Toda se escreve assim:

$$\begin{aligned}\dot{D} &= 0 \quad (\text{conservação dos autovalores de } L(t)), \\ \dot{v} &= \Lambda v - (\Lambda v, v)v\end{aligned}$$

onde  $\Lambda$  é a matriz cujas entradas diagonais são as coordenadas de  $D$ . Considere a equação diferencial obtida substituindo  $\Lambda$  por uma matriz diagonal arbitrária (constante)  $A$ . Então

- 1)  $v(t)$  é sempre um vetor normal (derive  $(v, v)$ ), se  $v(0)$  é.
- 2) as coordenadas de  $v$  não mudam de sinal (como na demonstração do lema 2, Capítulo 2),
- 3) as novas equações ainda são solúveis explicitamente (como?).

Como  $(D(t), v(t))$  está em  $\mathcal{J}$  (lembre da definição, no começo do Capítulo 3) para todo  $t$ , essas equações correspondem (isto é, são uma troca de variáveis) a equações em  $T$ , o conjunto de matrizes de Jacobi com superdiagonal positiva. Em uma linguagem mais geométrica, os fluxos em  $\mathcal{J}$  induzem, via  $\psi^{-1}$  (veja o Capítulo 3), fluxos em  $T$ .

Pergunta óbvia: como são as equações diferenciais em termos das entradas de  $L(t)$ ? Todas as coordenadas de  $D$

são diferentes, o que nos permite pensar a matriz diagonal  $A$  como uma função de  $\Lambda$ ,  $A = G(\Lambda)$ , onde  $G$  é um polinômio. (Verifique - mais uma vez, um determinante de Vandermonde à espreita, leitor(a)).

Lema 1: A equação diferencial acima, em termos de  $L$ , é

$$\dot{L} = [B(G(L)), L] = B(G(L))L - LB(G(L)), \quad L(0) = L_0,$$

onde  $B(G(L))$  é, para variar, uma matriz anti-simétrica cuja parte triangular estritamente superior é igual à de  $G(L)$ .

Demonstração:

Pelo teorema do Capítulo 3, basta demonstrar duas coisas:

- a) que  $L(t)$  satisfazendo essa equação diferencial esta sempre em  $T$ , se  $L_0$  está em  $T$ ,
- b) que  $\sigma(L(t))$  e  $u_1(L(t))$  evoluem como requerido.

Para mostrar a primeira parte, basta mostrar que  $M = [B(G(L)), L]$  é uma matriz simétrica (verifique) tri-diagonal e que o sinal de  $L_{i,i+1}$  se conserva. Vamos ver que  $M$  é tridiagonal. Escreva  $B(G(L)) = G(L) - R$ , onde  $R$  é triangular inferior. Então  $[B(G(L)), L] = [-R, L]$ , porque  $G(L)$  e  $L$  comutam. Tridiagonalidade segue (verifique) do cálculo da entrada  $(i,j)$  com  $|i-j| > 1$  de  $[-R, L]$ , lembrando que  $L$  é tridiagonal (desenhe as matrizes). Para mostrar que o sinal de  $L_{i,i+1}$  se conserva, basta ver que  $M_{i,i+1}$

é um múltiplo de  $L_{i,i+1}$  (e aí imitar a demonstração do lema 2 do Capítulo 2). Novamente, basta calcular a entrada  $(i,i+1)$  de  $[-R,L]$  (verifique). Logo,  $L(t)$  está em  $T$ .

Como evoluem  $\sigma(L(t))$  e  $u_1(L(t))$ ? A equação tem a forma de um par de Lax. As mesmas contas empregadas na demonstração do lema 1, Capítulo 2, mostram que  $L(t) = Q(t)^T L_0 Q(t)$ , onde  $Q(t)$  é uma matriz ortogonal satisfazendo a equação  $\dot{Q}(t) = -Q(t)B(G(L(t)))$ . Logo  $\sigma(L(t))$  é constante e a matriz  $U(t)$  de autovetores de  $L(t)$  é dada por  $U(t) = Q(t)^T U(0)$ , ou, em outras palavras,  $\dot{U}(t) = -U(t)B(G(L(t)))$ . Agora, para calcular a evolução da primeira linha de  $U(t)$ ,  $u_1(t)$ , é só imitar a demonstração do lema 1, Capítulo 3 - boa sorte. ■

Então, para cada função  $G$ , temos um fluxo isoespectral no conjunto de matrizes simétricas tridiagonais, preservando o sinal das entradas fora da diagonal. A existência de solução global para essas equações já está demonstrada: as evoluções não abandonam o conjunto  $J$ . Ou, de outra maneira,  $L(t)$  evoluindo por conjugação ortogonal não pode "estourar" (lembre do lema 1, Capítulo 2). Como esses fluxos se comportam assintoticamente?

Lema 2: Se  $L(t)$  resolve  $\dot{L} = [B(G(L)), L]$ , então  $F(L)$  resolve  $(F(L))' = [B(G(L)), F(L)]$ .

Demonstração:

Lembre de um dos fatos básicos de álgebra linear:

toda função (bem, analítica, digamos) de uma matriz é um polinômio, mas esse polinômio depende da matriz (quase demonstração: quem sabe calcular funções polinomiais de grau menor ou igual ao grau do polinômio mínimo de uma matriz, sabe calcular qualquer função polinomial dessa matriz - tome limites). Se a matriz é simétrica, o polinômio depende apenas dos autovalores da matriz (quem sabe o polinômio característico de uma matriz simétrica sabe seu polinômio mínimo). Como o espectro de  $L(t)$  é constante,  $F(L(t))$  é dada por um polinômio constante em  $t, P(L(t))$ . Voltando ao lema, por linearidade, basta provar o resultado para  $P(x) = x^n$ . A indução facílima fica por sua conta, leitor(a). ■

Corolário: Se  $F = G$ ,  $L(t) = G(L(t))$  resolve a equação  $\dot{L} = [B(L), L]$ , com  $L(0) = G(L_0)$ .

Corolário: Se  $G$  é injetora em  $\sigma(L_0)$ , a solução de  $\dot{L} = [B(G(L)), L]$ ,  $L(0) = L_0$ , converge para uma matriz diagonal, quando  $t$  vai a  $\pm\infty$ .

Demonstração:

Pelo corolário acima e o teorema do Capítulo 2,  $G(L(t))$  converge para uma matriz diagonal. Mas  $L(t)^{-1} = G^{-1}(G(L(t)))$  (aliás, leitor(a), por quê  $G^{-1}$  existe no domínio que nos interessa?). ■

Exercício: Dada uma matriz simétrica  $L$ , obtenha um polinômio  $p$  tal que  $p(L) = G(L)$ , onde  $G$  é uma função injetora no espec-

tro de  $L$ . Aliás, mostre o seguinte fato geral. Seja  $M$  simétrica e  $f$ , digamos, uma função analítica num aberto contendo os autovalores de  $M$ . Seja  $p$  um polinômio tal que  $p(\lambda) = f(\lambda)$ , para todo  $\lambda$ , autovalor de  $M$ . Então  $p(M) = f(M)$ .

Sugestão: Usando o teorema espectral, suponha que  $M$  é diagonal.

Genericamente (isto é, para uma condição inicial típica), a matriz diagonal em  $\infty$  tem as entradas  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , tais que  $G(d_1) > G(d_2) > \dots > G(d_n)$ . Se  $G$  não é injetora,  $L(t)$  não converge necessariamente a uma matriz diagonal. Por exemplo, se  $\sigma(L_0) = \{1, -1\}$ , e  $G(x) = x^2$ , então  $L_0$  é um ponto de equilíbrio da equação diferencial (verifique).

Vamos chamar de  $G$ -fluxo,  $\varphi(G, M, s)$  a função que leva uma matriz  $M$  e um número real  $s$  à solução da equação diferencial

$$\dot{L} = [B(G(L)), L], \quad L(0) = M,$$

no tempo  $s$ .

Lema 3:  $G$ -fluxos comutam. Isto é,

$$\varphi(G_1, \varphi(G_2, M, s_2), s_1) = \varphi(G_2, \varphi(G_1, M, s_1), s_2),$$

para quaisquer matriz  $M$ , reais  $s_1$  e  $s_2$ .

Demonstração:

Basta fazer as contas nas variáveis inversas. Os autovalores das duas matrizes no enunciado do lema são iguais:

afinal, os  $G$ -fluxos preservam o espectro. Agora, basta comparar os vetores  $u_1$  das duas matrizes. Do lema 1, obtemos a evolução de  $u_1$ , o que nos dá

$$u_1(\varphi(G_1, \varphi(G_2, M, s_2), s_1), s_1) = \text{normalização de} \\ \exp(s_1 G_1(\Lambda)) \exp(s_2 G_2(\Lambda)) u_1(0),$$

$$u_1(\varphi(G_2, \varphi(G_1, M, s_1), s_2), s_2) = \text{normalização de} \\ \exp(s_2 G_2(\Lambda)) \exp(s_1 G_1(\Lambda)) u_1(0),$$

onde  $\Lambda$ , como sempre, é a matriz diagonal contendo na diagonal os autovalores de  $M$  em ordem decrescente. Todas as matrizes exponenciadas comutam entre si (são diagonais), logo os dois vetores são iguais. ■

Outra pergunta natural: o que querem dizer esses fluxos nas coordenadas "físicas",  $x_k$ 's e  $y_k$ 's, do Capítulo 1? Será que essas equações vêm de algum Hamiltoniano? Esse é o conteúdo do Capítulo 8, no qual veremos o contexto "certo" para estudar todos esses fluxos simultaneamente.



CAPÍTULO 6

Vamos ver um modo diferente de resolver a equação

$$\dot{L} = [B(G(L)), L], \quad L(0) = L_0, \quad (L_0 \text{ simétrica}),$$

na notação do capítulo anterior. Depois, aplicaremos os resultados obtidos para explicar um algoritmo muito importante em análise numérica.

Lema 1 (a fatoração QR): Toda matriz  $M$ , real, inversível, se fatora de modo único num produto  $QR$ , onde  $Q$  é ortogonal e  $R$  é triangular superior, com entradas diagonais positivas.

Demonstração:

Escreva  $M = QR$  e obtenha as colunas de  $M$  efetuando a multiplicação. Como as colunas de  $Q$  devem ser ortonormais, concluímos que as colunas de  $Q$  são obtidas aplicando o método de Gram-Schmidt às colunas de  $M$ . As normalizações são escolhidas de modo a obter  $R_{ii}$ 's positivos. Como  $M$  é inversível, suas colunas são linearmente independentes e a ortogonalização procede sem problemas. Unicidade vem da construção. ■

Teorema (solução por fatoração): A solução da equação

$$\dot{L} = [B(G(L)), L], \quad L(0) = L_0, \quad (L_0 \text{ simétrica}),$$

é dada por  $L(t) = Q^T(t) L_0 Q(t)$ , onde  $Q(t)$  é a matriz ortogonal na fatoração

$$\exp(tG(L_0)) = Q(t)R(t).$$

Demonstração:

Pelo teorema de existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial, basta ver que  $L(t)$  descrita acima satisfaz a equação diferencial (obviamente,  $L(0) = L_0$ ). Não há muito a fazer: temos que derivar  $L(t) = Q^T(t) L_0 Q(t)$  e  $\exp(tG(L_0)) = Q(t)R(t)$ . Da primeira equação, obtemos

$$\dot{L} = \dot{Q}^T Q L - L Q^T \dot{Q},$$

onde a dependência em  $t$  foi omitida. Da segunda,

$$Q^T G(L_0) Q = Q^T \dot{Q} + \dot{R} R^{-1}.$$

Só falta ver que  $\dot{Q}^T Q = B(G(L))$ . Note os fatos abaixo.

- 1)  $Q^T G(L_0) Q = G(Q^T L_0 Q) = G(L)$  (por quê?).
- 2) A matriz  $\dot{R} R^{-1}$  é triangular superior (o produto de duas matrizes triangulares superiores - por quê mesmo  $R^{-1}$  é triangular?).
- 3) A matriz  $Q^T \dot{Q}$  é anti-simétrica (derive  $Q(t)^T Q(t) = I$ ).
- 4) Toda matriz  $M$  se decompõe, de modo único, na soma de duas matrizes  $A$  e  $N$ , onde  $A$  é anti-simétrica e  $N$  é triangular superior.  $A$  é a matriz anti-simétrica cuja parte triangular estritamente inferior coincide com a de  $M$ . Da equação

$$Q^T G(L_0) Q = Q^T \dot{Q} + \dot{R} R^{-1},$$

então, temos que  $Q^T \dot{Q}$  é a matriz anti-simétrica cuja parte triangular inferior é a de  $G(L)$ . Transpondo  $Q^T \dot{Q}$  e usando a definição de  $B(G(L))$ , obtemos  $\dot{Q}^T Q = B(G(L))$ . ■

Note que essa descrição do G-fluxo (lembre da definição no Capítulo anterior) não tem nada a ver com o fato da condição inicial ser tridiagonal. Na verdade, o resultado se generaliza em várias direções: existem equações diferenciais parecidas com soluções descritas de modo análogo para matrizes não simétricas e para operadores em espaços de dimensão infinita. Então, qual é o interesse das variáveis espectrais? Antes de tudo, as equações nas variáveis espectrais sugeriram a generalização para outros G-fluxos, assim como outros resultados (a comutatividade dos G-fluxos, por exemplo). Além disso, as equações de Toda são um ótimo exemplo do uso das variáveis espectrais, uma técnica empregada com frequência em dimensão infinita (lembre dos últimos parágrafos do Capítulo 3). Mas a verdadeira razão para empregá-las é outra, e só vai ser apresentada no Capítulo 8.

O seguinte algoritmo foi descoberto no início da década de sessenta por Francis (veja, por exemplo, [P]). Seja  $L_0$  uma matriz simétrica positiva (isto é, com autovalores positivos). Em particular,  $L_0$  é inversível. A partir da sua fatoração QR (única, pelo lema acima):

$$L_0 = Q_0 R_0,$$

defina

$$L_1 = R_0 Q_0 = Q_0^T L_0 Q_0.$$

Note que  $L_0$  e  $L_1$ , por serem matrizes (simétricas) conjugadas,

têm os mesmos autovalores. Agora, repita o processo: fature  $L_1$ , troque a ordem dos fatores, obtendo  $L_2$ , e assim sucessivamente, gerando uma sequência de matrizes simétricas  $L_n$ .

Teorema (o método QR para obtenção de autovalores): Considere o G-fluxo com  $G(x) = \ln x$ , e condição inicial  $L(0) = L_0$ . Então  $L(\dot{n}) = L_n$ . Em particular, pelo segundo Corolário do lema 2 do Capítulo 5,  $L_n$  converge para uma matriz diagonal, cujas entradas diagonais são os autovalores de  $L_0$ .

Antes de dar a demonstração, vale a pena lembrar a definição do logaritmo de uma matriz simétrica positiva. Como vimos no capítulo anterior, toda função  $f$  de uma matriz simétrica é um polinômio da matriz - mais precisamente, o polinômio que leva os autovalores  $\lambda$  aos números  $f(\lambda)$ . Na situação acima,  $f(x) = \ln(x)$ , e todos os autovalores são positivos -  $\ln L$  está bem definida (isto é,  $\ln L$  é real, simétrica), se tomarmos  $\ln$  como sendo a função inversa de  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Demonstração:

Basta mostrar  $L(1) = L_1$  - o resto é uma indução trivial. Pelo teorema anterior, a solução do G-fluxo é dada por

$$L(t) = Q^T(t)L_0Q(t),$$

onde

$$\exp(t \ln(L_0)) = L_0^t = Q(t)R(t).$$

Tomando  $t = 1$ , temos que  $L(1) = Q^T(1)L_0Q(1)$ , onde  $L_0 = Q(1)R(1)$ . ■

A conclusão é que um G-fluxo apropriado interpola os valores  $L_n$  obtidos pelo método QR. Ou, pensando ao contrário, o método QR resolve em tempos inteiros uma equação diferencial muito complicada (tente escrever as equações no caso  $2 \times 2$ ). Podemos pensar um passo no método QR (isto é, o processo que vai de  $L_0$  a  $L_1$ ) como sendo um difeomorfismo (um sistema dinâmico discreto) no conjunto de matrizes positivas. Os resultados dos capítulos anteriores garantem que esse difeomorfismo possui muitos conjuntos invariantes, por exemplo: o conjunto de matrizes tridiagonais, os conjuntos  $M_D$ , os conjuntos  $+0+-0$ , etc. Mais ainda, o espaço de fase, qualitativamente, não difere (a menos de "discretização") do espaço de fase para  $G(x) = x$ , a equação de Toda original. Assim, a linguagem que usamos para falar do espaço de fase se torna adequada para interpretar certas ocorrências no método QR. Por exemplo, considere a tabela da página seguinte, que descreve uma sequência  $L_n$  de matrizes obtida pelo método QR. A "lentidão" do algoritmo entre as iterações 0 e 3 e 5 e 11, nas quais, essencialmente, dois autovalores trocam de posição, é explicada pela vizinhança das matrizes a pontos de equilíbrio da equação diferencial, as matrizes  $\text{diag}(2, 0, 4)$  e  $\text{diag}(8, 2, 4)$  (lembre do espaço de fase no "hexágono", no Capítulo 4).

TABELA

Tempo	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$
0	2.0000E+00	7.6000E+00	4.4000E+00	4.3346E-10	1.2000E+00
1.0000E+00	2.0000E+00	7.9999E+00	4.0001E+00	2.4206E-07	2.4420E-02
2.0000E+00	2.0000E+00	8.0000E+00	4.0000E+00	5.7653E-05	4.4728E-04
3.0000E+00	2.0003E+00	7.9997E+00	4.0000E+00	3.9394E-02	8.1925E-06
4.0000E+00	7.2516E+00	2.7484E+00	4.0000E+00	1.9825E+00	4.2484E-07
5.0000E+00	8.0000E+00	2.0000E+00	4.0000E+00	5.6146E-03	2.9369E-00
6.0000E+00	8.0000E+00	2.0000E+00	4.0000E+00	1.3917E-05	2.1701E-05
7.0000E+00	8.0000E+00	2.0000E+00	4.0000E+00	3.4497E-00	1.6035E-03
8.0000E+00	8.0000E+00	2.0000E+00	4.0000E+00	8.5510E-11	1.1848E-03
9.0000E+00	8.0000E+00	2.0000E+00	4.0000E+00	2.1196E-13	8.7515E-01
1.0000E+01	8.0000E+00	2.0021E+00	3.9979E+00	5.2567E-16	6.4621E-02
1.1000E+01	8.0000E+00	2.1081E+00	3.8919E+00	1.3390E-18	4.5216E-01
1.2000E+01	8.0000E+00	3.5144E+00	2.4856E+00	6.5512E-21	8.3756E-01
1.3000E+01	8.0000E+00	3.9883E+00	2.0117E+00	1.0172E-22	1.5238E-01
1.4000E+01	8.0000E+00	3.9998E+00	2.0002E+00	1.9125E-24	2.0741E-02
1.5000E+01	8.0000E+00	4.0000E+00	2.0000E+00	3.5026E-26	2.8073E-03
1.6000E+01	8.0000E+00	4.0000E+00	2.0000E+00	6.4153E-28	3.7993E-04
1.7000E+01	8.0000E+00	4.0000E+00	2.0000E+00	1.1250E-29	5.1417E-05
1.8000E+01	8.0000E+00	4.0000E+00	2.0000E+00	2.1521E-31	6.9586E-06
1.8970E+01	8.0000E+00	4.0000E+00	2.0000E+00	4.4442E-33	9.9998E-07

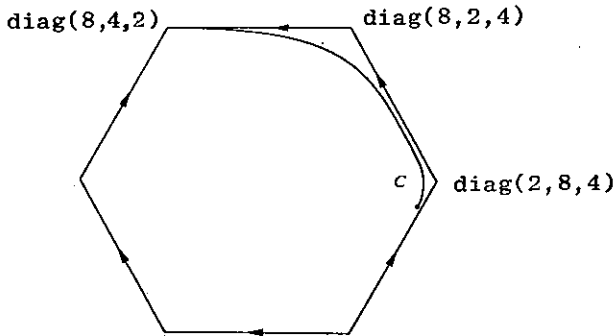


Figura 6

Existem outros métodos clássicos para cálculo de autovalores que podem ser interpolados por G-fluxos. Em vez de descrevê-los, entretanto, vamos usar as equações diferenciais para justificar uma modificação usadíssima que torna o método QR muito mais eficiente. Para isso, vamos antes estudar a velocidade de convergência da equação de Toda (isto é,  $G(x) = x$ ), no caso de matrizes de Jacobi.

Teorema (velocidade de convergência): Existe uma constante  $C$  e um tempo  $T$  tal que, se  $t > T$ ,

$$|a_k(t) - a_k(\infty)| \leq C \exp 2tm,$$

$$|b_k(t)| \leq C \exp tm, \quad \text{onde } m = -\min_{k \neq j} |\lambda_k - \lambda_j|.$$

Demonstração:

A técnica usada é muito frequente no estudo de equações diferenciais ordinárias e parciais. Do mesmo modo que uma limitação global nas entradas das matrizes  $L(t)$  nos permitiu obter o comportamento assintótico na demonstração do teorema do Capítulo 2, vamos, a partir do comportamento assintótico, obter as velocidades de convergência. Antes, uma troca de variáveis: seja  $c_k = 2b_k^2$ . As equações diferenciais se tornam

$$\dot{a}_k = c_k - c_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\dot{c}_k = 2c_k(a_{k+1} - a_k), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

onde  $c_0 = 0$ .

Como  $\dot{c}_k/c_k = (\ln(c_k))'$ , as equações diferenciais, integradas, se tornam

$$c_k(t) = c_k(0) \exp\left(\int_0^t 2(a_{k+1}(s) - a_k(s)) ds\right),$$

$$a_k(\infty) = \lambda_k = a_k(t) + \int_t^\infty (c_k(s) - c_{k-1}(s)) ds.$$

Pela convergência de  $L(t)$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , existe  $T$  tal que, se  $t \geq T$ , então

$$|a_k(t) - \lambda_k| \leq \epsilon, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$0 < c_k(t) \leq \epsilon, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

para qualquer  $\epsilon$  fixo, digamos, menor que  $(\min_{k \neq j} |\lambda_k - \lambda_j|)/2$ .

Da equação para  $c_k$ , então, obtemos, para  $t \geq T$ ,

$$0 < c_k(t) \leq c_k(0) \exp t(\lambda_{k+1} - \lambda_k + 2\epsilon), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

onde, pelo teorema do Capítulo 2,  $\lambda_{k+1} < \lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ .

Da equação para  $a_k$ , para  $t \geq T$ ,

$$|\lambda_k - a_k(t)| \leq \int_t^\infty [c_k(0) \exp s(\lambda_{k+1} - \lambda_k + 2\epsilon) + c_{k+1}(0) \exp s(\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1} + 2\epsilon)] ds \leq A_k \exp t(m + 2\epsilon),$$

onde  $m = \max_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k)$  é (estritamente) negativo e  $A_k$  inde-



pende de  $t$  (note que  $m+2\epsilon < 0$ ). Agora, vamos re-estimar os  $c_k$ 's usando essa velocidade de convergência dos  $a_k$ 's:

$$\begin{aligned} c_k(t) &= c_k(0) \exp \left[ \int_0^t 2(a_{k+1}(s) - \lambda_{k+1} - a_k(s) + \lambda_k) ds + \int_0^t 2(\lambda_{k+1} - \lambda_k) ds \right] \leq \\ &\leq c_k(0) (\exp 2t(\lambda_{k+1} - \lambda_k)) (\exp \int_0^t 4A_k \exp(s(m+2\epsilon)) ds) \leq \\ &\leq D_k \exp 2t(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \leq \\ &\leq D_k \exp 2tm, \end{aligned}$$

onde  $D_k$  independe de  $t$  e de  $\epsilon$ . Finalmente, a velocidade de convergência dos  $a_k$ :

$$\begin{aligned} |a_k(t) - \lambda_k| &\leq \int_t^\infty |c_k(s) - c_{k-1}(s)| ds \leq \\ &\leq \int_t^\infty |c_k(s)| ds + \int_t^\infty |c_{k-1}(s)| ds \leq E_k \exp 2tm. \end{aligned}$$

■

Em palavras, a velocidade de convergência é determinada, essencialmente, pela menor diferença dos autovalores.

Um cálculo parecido mostra que a velocidade de convergência de uma matriz cheia sob o fluxo de Toda também é determinada pela menor diferença entre os autovalores  $\lambda_k$ . No caso de um G-fluxo, lembre que, pelo lema 2 do Capítulo 5, a função  $G$  leva G-fluxos ao fluxo de Toda original (isto é, o G-fluxo com  $G(x) = x$ ). Não é difícil, então, concluir que, se  $G$  é

injetora no espectro de  $L_0$ , a velocidade de convergência do G-fluxo depende da menor diferença entre os  $G(\lambda_k)$ 's. Assim, por exemplo, no caso do método QR, onde  $G(x) = \ln x$ , a velocidade de convergência depende do menor quociente  $\lambda_k/\lambda_{k+1}$  (como sempre, estamos indexando os autovalores em ordem decrescente).

Existem duas operações em matrizes que não dificultam o cálculo de seus autovalores: multiplicar por um escalar e somar um múltiplo da identidade. Note que a primeira operação acelera a convergência do fluxo de Toda ( $G(x) = x$ ), mas não a do método QR. Para a segunda, o oposto ocorre. Por isso, em geral, ao implementar o método QR, as iterações são precedidas por uma translação desse tipo (um "shift"). A escolha da translação é um problema interessante, mas não convém dar os detalhes nessa nota (veja, por exemplo, [P]).

Esse modo de representar o G-fluxo de Toda foi descoberto originalmente por Symes [S], usando técnicas de álgebras de Lie. Symes também encontrou uma relação entre o fluxo de Toda ( $G(x) = x$ ) e o método QR. Em [DNT], essa representação do G-fluxo foi redescoberta e demonstrada usando as técnicas elementares apresentadas acima, e a identificação de QR com o fluxo para  $G(x) = \ln x$  foi apresentada e explorada na compreensão de algoritmos para cálculo de autovalores.

## CAPÍTULO 7

Nesse capítulo, vamos preparar a teoria necessária para a interpretação dos fluxos de Toda como sistemas hamiltonianos completamente integráveis.

Em mecânica clássica (e quântica), existe uma receita, o formalismo hamiltoniano, para obter fluxos a partir de uma função no espaço de fase  $M$ . Inicialmente, definimos um colchete de Poisson, que é uma função

$$\{, \}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

onde  $C^\infty(M) = \{f: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ infinitamente diferenciáveis}\}$ , satisfazendo as propriedades abaixo:

1) (bilinearidade)

$$\{f+ag, h\} = \{f, h\} + a\{g, h\},$$

$$\{f, g+ah\} = \{f, g\} + a\{f, h\}, \quad \forall f, g, h \in C^\infty(M), \quad a \in \mathbb{R},$$

2) (anti-simetria)

$$\{f, g\} = -\{f, g\}$$

3) (compatibilidade)

Sejam  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  funções em  $C^\infty(M)$  e  $G(x_1, \dots, x_n)$  uma função  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}$ , então

$$\{G(f_1, \dots, f_n), h\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_i}(f_1, \dots, f_n) \{f_i, h\}, \quad \forall h \in C^\infty(M).$$

4) (identidade de Jacobi)

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \quad \forall f, g, h \in C^\infty(M).$$

Por exemplo, seja  $M = \mathbb{R}^{2n} = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}^n \text{ e } y \in \mathbb{R}^n\}$ .

Defina

$$\{f, g\}(x, y) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) \frac{\partial g}{\partial y_i}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x, y) \right).$$

Exercício: Mostre que as propriedades acima valem para esse colchete.

Dada uma função  $H$  em  $C^\infty(M)$ ,  $H$  induz um fluxo em  $M$  do seguinte modo: qualquer  $f$  em  $C^\infty(M)$  varia ao longo da órbita desse fluxo de modo a satisfazer a equação

$$\dot{f} = \{f, H\}.$$

Em particular, para um sistema de coordenadas no espaço de fase, os colchetes de Poisson descrevem como cada coordenada varia na órbita. O sistema de equações diferenciais descrevendo a evolução das coordenadas nesse caso é chamado um sistema hamiltoniano.

Exercício: Tome  $M = \mathbb{R}^{2n}$ , com o colchete definido acima, e  $H$  definido no primeiro parágrafo do Capítulo 1. Mostre que as equações para  $x_k$  e  $y_k$  são as equações de Toda, nas variáveis físicas. Em outras palavras, o sistema satisfeito pelos  $x_k$ 's e  $y_k$ 's é um sistema hamiltoniano.

Exercício: Para mostrar como o formalismo hamiltoniano abrange as equações usuais de mecânica, vamos obter as equações de movimento para uma partícula em  $\mathbb{R}^n$ , sob a ação de uma força  $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Da segunda lei de Newton ( $f = ma$ ),

$$f(x) = m \ddot{x},$$

o que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= my, \\ \dot{y} &= f(x),\end{aligned}$$

onde  $y \in \mathbb{R}^n$  é a velocidade partícula. Defina o potencial  $V(x)$  como uma antiderivada de  $-f(x)$  (isto é, o gradiente de  $V(x)$  é  $-f(x)$ ). Considere agora a função

$$H(x, y) = \frac{1}{2} m \|y\|^2 + V(x)$$

Note que  $H$ , uma função em  $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , é exatamente a energia da partícula (energia cinética mais energia potencial). Mostre que as equações de evolução para  $x$  e  $y$ , com o colchete definido acima para  $\mathbb{R}^{2n}$ , são as mesmas dadas pela segunda lei de Newton. Mostre também que a energia se conserva.

Um problema aparente: o colchete nos diz como  $f$  e  $f^2$ , por exemplo, variam nas órbitas do fluxo induzido por  $H$ , mas a regra da cadeia impõe uma relação entre essas duas derivadas.

Exercício: Verifique que as duas maneiras de obter a evolução de  $f^2$  dão o mesmo resultado.

Sugestão: Use a compatibilidade.

De maneira geral, para mostrar que a construção acima está bem definida, basta ver que, realmente,  $H$  induz um fluxo em  $M$ . Para isto, basta representar a equação diferencial do

fluxo em algum sistema de coordenadas do espaço de fase, e mostrar que sistemas diferentes descrevem a mesma equação diferencial no espaço de fase, apesar de, possivelmente, fornecerem representações diferentes. Detalhando, sejam  $z_1, \dots, z_n$  e  $w_1, \dots, w_n$  coordenadas de dois sistemas na vizinhança de um ponto  $m_0$  do espaço de fase. Pela construção acima, devemos ter

$$\dot{w}_k = \{w_k, H\}, \quad \dot{z}_k = \{z_k, H\}.$$

Mas temos também que  $(w_1, \dots, w_n) = G(z_1, \dots, z_n)$ , para alguma função infinitamente diferenciável  $G$  (qual?). Da regra da cadeia,

$$\dot{w}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial z_i} \dot{z}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial z_i} \{z_i, H\}.$$

Pela compatibilidade do colchete, então, os dois sistemas de coordenadas nos dão a mesma evolução para os  $w_k$ 's.

Aliás, um sistema hamiltoniano não tem soluções globais necessariamente - os fluxos induzidos são apenas locais (isto é, definidos para  $t$  pequenos, numa vizinhança do ponto  $m_0$ ). Como a maioria das propriedades que nos interessam (invariância, comutatividade dos fluxos induzidos) são locais, vamos adiar um pouco a hipótese adicional de existência global de soluções.

**Exercício:** Explique o significado de "comutatividade dos fluxos é uma propriedade local".

Já vimos nos capítulos anteriores como o estudo de uma equação diferencial se simplifica com o conhecimento de quantidades conservadas (as integrais do sistema). É imediato ver que  $H$  é constante nas órbitas do sistema hamiltoniano associado a  $H$  (use a anti-simetria para mostrar que  $\{H, H\} = 0$ ). De maneira geral,  $f$  é uma integral do fluxo induzido por  $H$  se e somente se  $\{f, H\} = 0$ . Da propriedade 4, o colchete de duas integrais também é uma integral.

Exercício: Um modo de rephrasear certas propriedades do colchete é dizer que  $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$  é uma álgebra de Lie, e que as integrais de um sistema hamiltoniano formam uma sub-álgebra.

A situação (extremamente otimista) que motiva os próximos resultados é a seguinte. Suponhamos que o espaço de fase para a hamiltoniana  $H_1$  seja  $R^{2n}$ , mais uma vez, e que conseguimos encontrar  $n$  integrais "independentes"  $H_1, \dots, H_n$  (em um sentido definido mais precisamente abaixo) para o fluxo induzido por  $H_1$ . A órbita pela condição inicial  $m_0$ , então, permanece em  $N$ , a componente conexa da interseção das superfícies de nível  $H_k^{-1}(m_0)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , possivelmente uma superfície de dimensão  $n$ . Cada  $H_k$ , por outro lado, induz um fluxo, que também permaneceria em  $N$  se exigíssemos que  $\{H_k, H_j\} = 0$ , para cada escolha de  $k$  e  $j$ . Com um pouco de sorte, podemos esperar que  $N$  seja parametrizada pelos fluxos induzidos pelos  $H_k$ 's (em outras palavras, que é possível parametrizar  $N$  usando os  $n$  "tempos de emprego" de cada fluxo). Isto sugere que,

além das  $n$  variáveis  $H_k$ 's (variáveis sim, parâmetros do espaço de fase), devem existir outras  $n$  variáveis  $t_k$  (essencialmente, os "tempos") com as seguintes propriedades:

1) essas  $2n$  variáveis descrevem um sistema de coordenadas do espaço de fase na vizinhança do ponto  $m_0$ ,

2) o fluxo induzido por  $H_k$  mantém todos os  $H_j$ 's e  $t_j$ 's constantes, com exceção de  $t_k$ , que varia linearmente no tempo (afinal,  $t_k$  é o "próprio" tempo).

Nesse sistema de coordenadas, o fluxo induzido por  $H_1$  é trivialmente solúvel -  $2n - 1$  variáveis ficam paradas e  $t_1$  varia linearmente.

Uma dificuldade na construção acima é a seguinte.

Ao supor que os "tempos de emprego" de cada  $H_k$  parametrizam  $N$ , a interseção das superfícies de nível das integrais, estamos, sem querer (?), impondo uma condição extra sobre os fluxos induzidos pelos  $H_k$ 's - denotando por  $(t_1, \dots, t_n)$  os tempos necessários para ir da condição inicial  $m_0$  a um outro ponto  $m$ , estamos supondo que a ordem de emprego dos diversos  $H_k$ 's é irrelevante. Isto sugere que os  $H_k$ 's devem induzir fluxos comutando entre si. Como você já deve ter reparado, propriedades do fluxo (as próprias equações, as integrais) podem ser expressas em termos da hamiltoniana. A comutatividades dos fluxos não é exceção.

Lema : Se as hamiltonianas  $H$  e  $G$  comutam, os fluxos induzidos comutam.



A demonstraçã, um pouco comprida, é o Apêndice 1.

Logo, na situação extremamente otimista, todos os fluxos induzidos pelos  $H_k$ 's comutam entre si - já tínhamos exigido que  $\{H_k, H_j\} = 0$ , para quaisquer  $k$  e  $j$ .

Há algo de insatisfatório na construção acima; falta uma certa simetria entre os  $H_k$ 's e os  $t_k$ 's. Por exemplo, não podemos garantir que, se um  $t_k$  é tomado como hamiltoniano para um fluxo, então  $t_j$ 's e  $H_j$ 's se mantêm constantes, com exceção de  $H_k$ , variando linearmente.

Na verdade, a teoria geral mostra que, uma vez obtidas  $n$  integrais "independentes"  $H_k$  em involução (isto é, tais que  $\{H_k, H_j\} = 0$ ), então, sob certas condições técnicas genericamente satisfeitas, existem  $n$  variáveis  $A_k$  para as quais tudo isso acontece. Numa linguagem mais conveniente, os  $H_k$ 's e  $A_k$ 's satisfazem

$$\{H_k, H_j\} = 0, \quad \{A_k, A_j\} = 0$$

$$\{H_k, A_j\} = \delta_{kj}, \quad \forall k, j.$$

Vamos supor agora que os fluxos induzidos pelos hamiltonianos  $H_k$  em involução são definidos globalmente (isto é, as equações diferenciais são solúveis para quais quer tempos e condições iniciais). Isso vai nos permitir obter informações topológicas sobre  $N$ , uma componente conexa da interseção das superfícies de nível dos  $H_k$ 's.

No caso de uma hamiltoniana só, é claro que o conjun-

to de pontos do espaço de fase que pode ser alcançado saindo de um ponto fixo  $x$  (a órbita por  $x$ ) está em bijeção com um dos três conjuntos: um ponto (se  $x$  é um equilíbrio da equação diferencial), uma reta ou um círculo (se a órbita por  $x$  for periódica). Em outras palavras, o conjunto  $C$  de todos os  $t$  para os quais  $H_t(x) = H_0(x)$  só pode ser a reta toda, vazio ou o conjunto de todos os múltiplos inteiros de um certo número real  $T$  (o período da órbita). Isso é essencialmente consequência do fato que o conjunto  $C$  é vazio ou é um subgrupo de  $\mathbb{R}$ , em relação à soma.

Exercício: Por quê  $C$  é vazio ou um subgrupo?

Exercício: Mostre que, de fato, todos os subgrupos de  $(\mathbb{R}, +)$  são da forma acima.

Cuidado, entretanto: a órbita com a topologia induzida pelo espaço de fase não é necessariamente homeomorfa a um desses três conjuntos, com suas topologias usuais. O exemplo (essencialmente único) de situação onde não temos homeomorfismo é o seguinte. Suponha que o espaço de fase é o produto de dois círculos (com sua topologia usual), parametrizado por duas frações da volta completa, dadas por números  $a$  e  $b$  em  $[0, 1)$  (note que uma volta = zero voltas), e considere as equações diferenciais

$$\dot{a} = 1, \quad \dot{b} = \alpha, \quad a(0) = 0, \quad b(0) = 0,$$

onde  $\alpha$  é irracional. Resolvendo, temos que  $a(t) = t$  e

$b(t) = at$ . Não é difícil mostrar que os pontos da forma  $(t, at)$  formam um conjunto denso no espaço de fase.

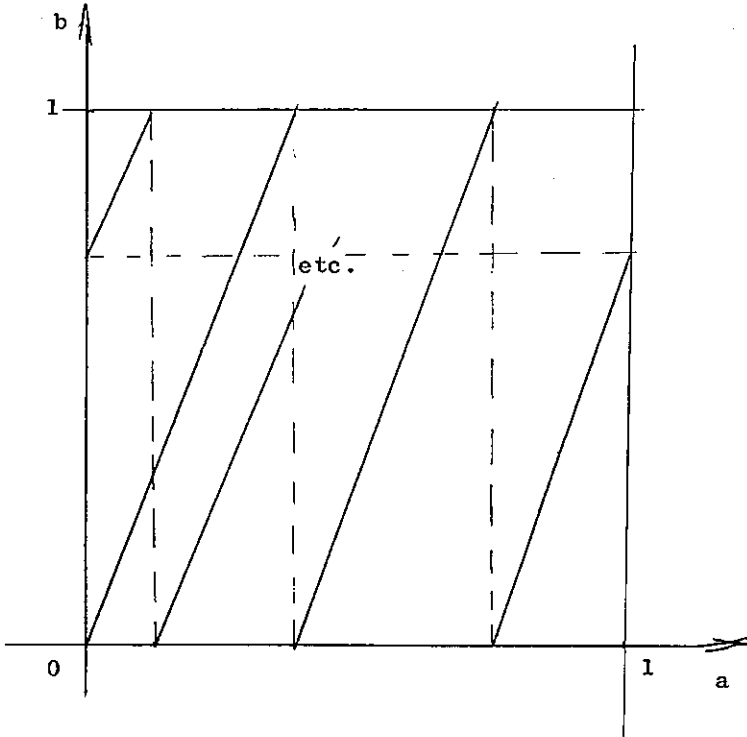


Figura 7

Exercício: Preencha os detalhes dessa demonstração da densidade. Podemos supor que o espaço de fase é o quadrado  $[0,1] \times [0,1]$ , com as identificações toroidais (isto é, os pontos  $(0,y)$  e  $(x,0)$  são colados aos pontos  $(1,y)$  e  $(x,1)$  respec

tivamente). O conjunto de pontos da forma  $(t, \alpha t)$  é composto de (infinitos) segmentos paralelos. Se esses segmentos não fossem densos no espaço de fase, existiria uma distância não nula entre dois segmentos lado a lado. Isso implicaria que existem infinitos segmentos lado a lado a essa mesma distância não nula - um absurdo.

De maneira geral, a superfície de nível  $N$  é parametrizável pelos tempos  $t_k$  (isto é, pontos em  $R^n$ ). Claramente, podem existir sequências de tempos diferentes que manteriam fixa a condição inicial  $x$ . O conjunto desses tempos forma um subgrupo de  $(R^n, +)$ , que vai ser discreto (isto é, composto de pontos isolados) se garantirmos que os  $n$  vetores tangentes induzidos pelos  $H_k$ 's são independentes em  $x$ .

Exercício: Aliás, mostre que esse subgrupo independe da condição inicial.

Então, como conjunto, a superfície  $N$  é o quociente de  $R^n$  por esse subgrupo discreto. Não é difícil mostrar que um subgrupo discreto de  $R^n$  é o conjunto de combinações lineares a coeficientes inteiros de  $k$  vetores independentes (sugestão: indução). O quociente, nesse caso, é o produto de  $k$  círculos e  $n - k$  retas, que não é necessariamente homeomorfo à superfície de nível  $N$  com a topologia induzida. No caso das equações de Toda, a equivalência é topológica também - essencialmente, o comportamento assintótico exclui a possibilidade de órbitas quaseperiódicas (isto é, a situação do exemplo anterior). Mas, de

novo, para as equações de Toda, o resultado vai ser demonstrado de modo independente.

Em resumo, se obtivermos  $2n$  variáveis  $H_k$  e  $A_k$  para um espaço de fase  $M$  de uma hamiltoniana  $H_1$ , satisfazendo as relações

$$\{H_k, H_j\} = 0, \quad \{H_k, A_j\} = \delta_{kj}, \quad \{A_k, A_j\} = 0, \quad \forall k, j,$$

e todos os fluxos são definidos globalmente, então o espaço de fase se "folheia" em superfícies de níveis homeomorfas a produtos de retas e círculos (mas não necessariamente na topologia induzida), e em cada superfície, os  $n$  fluxos induzidos pelas hamiltonianas  $H_k$ 's são lineares - em particular, trivialmente solúveis. Um sistema hamiltoniano num espaço de fase de dimensão  $2n$  proveniente de uma hamiltoniana  $H_1$  para a qual existem funções  $H_k$ ,  $h = 2, \dots, n$ , tais que

$$\{H_k, H_j\} = 0, \quad \forall k, j = 1, \dots, n,$$

é chamado sistema completamente integrável.

Vale a pena encerrar o capítulo com algumas observações.

Em geral, mecânica não "começa" com um colchete de Poisson. O espaço de fase é uma variedade de dimensão par, dotado de uma "estrutura simplética" (uma 2-forma não degenerada, etc., etc.). Existem várias razões para adotar o procedimento acima. Antes de tudo, evitamos ter que definir formas. O colchete de Poisson pode ser degenerado, o que permite encontrá-los

em variedades de qualquer dimensão. Em certos contextos, a forma não é um objeto "natural", enquanto o colchete é - por exemplo, em mecânica quântica. Obviamente, a estrutura simplética é uma maneira de obter colchetes e, muitas vezes, a geometria da situação oferece uma estrutura simplética de graça (no espaço cotangente, ou nas órbitas de uma ação coadjunta de um grupo de Lie), mas isso é outra história.

A idéia de obter integrais em involução para resolver explicitamente um sistema hamiltoniano é clássica (Hamilton, Jacobi). A folheação do espaço de fase por produtos de retas e círculos é o teorema de Arnold-Liouville, e uma boa descrição se encontra em [A].

## CAPÍTULO 8

Vamos interpretar o fluxo de Toda para matrizes tri-diagonais como um sistema completamente integrável.

Lembre que o problema original, apresentado no Capítulo 1, tratava de  $n$  partículas em  $\mathbb{R}^n$ , cujo movimento era descrito pela hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n y_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \exp(x_k - x_{k+1}).$$

$\mathbb{R}^{2n}$ , o espaço de fase natural para o problema, era dotado do colchete de Poisson usual,

$$\{f, g\}(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial y_k} - \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial g}{\partial x_k}.$$

A seguir, foi feita uma "troca de variáveis", de  $x$ 's e  $y$ 's para  $a$ 's e  $b$ 's, na qual supusemos que uma informação adicional era preservada - a média das posições iniciais, por exemplo (relembre o Capítulo 1). O que acontece com o espaço de fase nas novas variáveis? e o colchete de Poisson, como fica? Já sabemos a resposta da primeira pergunta: o espaço de fase é  $T$ , o conjunto de matrizes  $n \times n$  reais, simétricas, tridiagonais, com elementos fora da diagonal estritamente positivos. Por conveniência, entretanto, vamos restringir o espaço de fase ao conjunto  $M$  das matrizes em  $T$  com traço fixo, igual a zero, digamos (o que isso quer dizer fisicamente, leitor(a)?). Dos lemas do Capítulo 5,  $M$  é um conjunto invariante para qualquer  $G$ -fluxo.

Toda matriz simétrica  $L$  é a soma de três matrizes,  $L^0$ ,  $L^+$  e  $L^-$ , respectivamente, diagonal, triangular (estritamente) superior e triangular (estritamente) inferior. Seja  $\pi^-(L)$  a matriz triangular inferior

$$\pi^-(L) = L^0 + L^- + (L^+)^T$$

Vamos definir o colchete de Poisson em  $M$  como sendo

$$\{F, G\}(L) = -\text{tr } L[\pi^- \nabla F(L), \pi^- \nabla G(L)].$$

Isso pode parecer misterioso. Na verdade, essa expressão é a consequência de um argumento bastante natural. Em  $\mathbb{R}^{2n}$ , considere o vetor  $m = (1, \dots, 1)/n$ , e seja  $D_m$  a derivada na direção  $m$ . Defina

$$C_m^\infty(\mathbb{R}^{2n}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid D_m f = 0\}.$$

É fácil ver que o colchete de duas funções em  $C_m^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  também está em  $C_m^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  (verifique). Uma função  $f$  em  $C_m^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  induz de um modo óbvio (qual?) uma função  $F$  definida em  $M$ . Aliás, a correspondência entre  $f$  (em  $C_m^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ) e  $F$  (em  $C^\infty(M)$ ) é uma bijeção. A essa altura, o modo de definir um colchete para funções em  $M$  deve ser claro:

- 1) dadas  $F$  e  $G$  em  $C^\infty(M)$ , obtenha  $f$  e  $g$  em  $C_m^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  pela correspondência acima,
- 2) calcule  $h$ , o colchete em  $\mathbb{R}^{2n}$  de  $f$  e  $g$ ,
- 3) defina o colchete entre  $F$  e  $G$  (em  $M$ ) como sendo a função  $H$  induzida por  $h$ .



Exercício: Mostre que esse é exatamente o colchete em  $M$  definido acima (não esqueça de derivar as exponenciais na troca de variáveis).

Bem, ainda falta demonstrar que esse colchete satisfaz as propriedades exigidas de um colchete. Isso sai de uma conta enorme. Ou, simplesmente, mostrando que essas propriedades são preservadas pela correspondência acima.

Exercício: Há algo de aparentemente estranho na construção acima. Afinal, as matrizes em  $M$  são tridiagonais. Entretanto, ao tomarmos o gradiente de uma função em  $M$  do modo que definimos, estamos tomando derivadas direcionais na direção de todas as entradas possíveis. Mostre que, na verdade, a expressão para o colchete, quando avaliada para uma matriz  $L$  tridiagonal, só depende das entradas tridiagonais do colchete de Lie,  $[\pi^{-1}\nabla F(L), \pi^{-1}\nabla G(L)]$ .

Temos, então, um espaço de fase e um colchete. Agora, precisamos de uma função hamiltoniana que induza o fluxo de Toda (e, de modo geral, hamiltonianas para os  $G$ -fluxos).

Lema : A hamiltoniana  $F(L) = \text{tr}(L^2)/2$  induz o fluxo de Toda. A hamiltoniana  $H$  cujo gradiente é a função  $G$  induz o  $G$ -fluxo.

Demonstração:

Vamos começar calculando o gradiente de  $\text{tr} L^k$ , onde

L não é necessariamente tridiagonal. Pela definição de derivada direcional,

$$\frac{\delta}{\delta E_{ij}} (\text{tr} L^k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{tr}(L+tE_{ij})^k - \text{tr} L^k}{t} = k \text{tr} L E_{ij} = k L_{ji} = k L_{ij},$$

onde  $E_{ij}$  é a matriz cuja única entrada não nula é a entrada  $ij$ , igual a 1, e usamos  $\text{tr} AB = \text{tr} BA$ , ao expandir o binômio de Newton não comutativo. Com sempre, os termos "difíceis" são de ordem mais alta em  $t$ , e vão a zero no limite.

Agora, para obter as equações de movimento para o fluxo de Toda, basta aplicar a definição da evolução em termos do colchete, mas vamos passar direto para a situação geral - se o gradiente da hamiltoniana  $H$  é uma função de  $L, G(L)$ , o fluxo induzido é o  $G$ -fluxo. Suponha que estejamos calculando a evolução da entrada  $L_{ij}$ . Por simetria, podemos supor que a entrada pertence à parte triangular inferior (ou diagonal) da matriz  $L$ . Como sempre,

$$(L_{ij})' = \{L_{ij}, H\} = -\text{tr} L [E_{ij}, \pi^{-1} G(L)]$$

Note que  $\text{tr} A[B, C] = \text{tr} B[C, A]$  (afinal,  $\text{tr} XY = \text{tr} YX$ ) e  $\pi^{-1} \nabla L_{ij} = E_{ij}$ , que é o produto dos vetores  $e_i e_j^T$ , onde os vetores  $e_k$  são pensados verticais. Logo,

$$\begin{aligned} -\text{tr} L [E_{ij}, \pi^{-1} G(L)] &= -\text{tr} E_{ij} [\pi^{-1} G(L), L] \\ &= -\text{tr} e_i e_j^T [\pi^{-1} G(L), L] \\ &= -\text{tr} e_j^T [\pi^{-1} G(L), L] e_i \quad (\text{de novo, } \text{tr} XY = \text{tr} YX - X \text{ e } Y \text{ não} \\ &\text{precisam ser matrizes quadradas: verifique}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -e_j^T [\pi^- G(L), L] e_i \quad (\text{o traço de uma matriz } 1 \times 1) \\ &= (-[\pi^- G(L), L])_{ij} \quad (\text{a entrada } ij \text{ da matriz } -[\pi^- G(L), L]) \\ &= (-[G(L) - B(G(L)), L])_{ij} \quad (\text{lembre que } B(M) = M^+ - (M^+)^T) \\ &= ([B(G(L)), L])_{ij} \quad (G(L) \text{ comuta com } L). \end{aligned}$$

Em palavras, a evolução da matriz  $L$  é dada exatamente pela equação do  $G$ -fluxo, descrita no Capítulo 5. ■

Exercício: Que hamiltoniana induz o fluxo  $QR$ ?

Note que  $M$  é difeomorfo a  $R^{2n-2}$  (lembre que fixamos o traço das matrizes) - isso vê-se direto da "troca de variáveis" (como?). Vamos agora obter  $n - 1$  hamiltonianas  $H_k$  em involução, das quais  $H_1$  induz o fluxo de Toda. Da demonstração do lema anterior, a escolha é óbvia: seja  $H_k = \text{tr } L^{k+1}/(k+1)$  (as constantes multiplicativas são irrelevantes). Já sabemos que essas funções estão em involução (recapitulando: cada  $H_k$  é uma função dos autovalores da matriz  $L$  (qual? use o teorema espectral), cada  $H_j$  induz um  $G$ -fluxo, que preserva os autovalores - continue).

O passo seguinte é obter um conjunto de variáveis evoluindo linearmente com os fluxos induzidos pelos  $H_k$ 's. É agora que as variáveis descritas no Capítulo 3 se tornam importantes. Do Capítulo 3, sabemos que cada matriz  $L$  de  $M$  é recuperável uma vez conhecidos seus autovalores e o vetor normal  $f$ , composto das primeiras coordenadas dos autovetores, devidamente norma-

lizados. Sabemos também (lema 1, Capítulo 5) que a evolução de  $f$  sob um  $G$ -fluxo é dada por

$$\dot{f} = G(\Lambda)f - (G(\Lambda)f, f)f.$$

Vamos procurar expressões nas coordenadas de  $f$  que variem linearmente com os  $G$ -fluxos. Todas as coordenadas  $f_r$  de  $f$  são positivas, logo podemos tomar logaritmos,  $\log f_r$ . Para livrar-se dos denominadores, basta considerar os quocientes  $g_r = \log(f_r/f_1)$ ,  $r = 2, \dots, n$  (lembre que precisamos de apenas  $n - 1$  variáveis).

Exercício: Mostre que, realmente, os  $g_r$ 's mudam linearmente sob a ação dos  $G$ -fluxos.

Note também que os  $g_r$ 's são um sistema de coordenadas globais para a superfície de nível  $N$ , as matrizes de  $M$  com um certo espectro fixo (aliás, leitor(a), lembre que todos os autovalores são diferentes - lema 3, Capítulo 2). Isso é essencialmente consequência do teorema do Capítulo 3. Em particular, obtemos que  $N$  é composta de uma única componente conexa e é difeomorfa a  $\mathbb{R}^{n-1}$ , como a "teoria" do capítulo anterior tinha sugerido.

A essa altura, todos os  $G$ -fluxos estão trivialmente resolvidos - temos soluções explícitas nas variáveis espectrais. Nas mesmas variáveis, não é difícil ver que os  $n - 1$  campos induzidos pelos  $H_k$ 's são independentes em todos os pontos de  $N$ .

Exercício: Mostre a independência dos campos.

Sugestão: O problema se reduz a mostrar que o determinante de uma matriz de Vandermonde é não nulo.

Podemos ir além, e procurar variáveis  $h_k$ 's que se movem "uma de cada vez", sob a ação dos fluxos induzidos pelos  $H_k$ 's. Em outras palavras, vamos procurar variáveis  $h_k$ 's tais que  $[h_k, H_j] = \delta_{kj}$ . Para isso, vamos procurar combinações lineares (independentes de  $t$ ) das variáveis  $g_k$ 's. Em notação vetorial, vamos procurar  $h = Ag$ , onde  $A$  é uma matriz constante  $n-1 \times n-1$ , tais que as relações acima para os colchetes sejam satisfeitas.

Exercício: Mostre que a matriz  $A$  existe. Expresse  $A$  como a inversa de uma matriz comprovadamente inversível.

Sugestão: Faça o caso  $n = 4$ .

Nessas variáveis, aliás, é evidente que qualquer matriz de  $I$  pode ser alcançada a partir de qualquer outra matriz de  $I$ , para uma única escolha dos "tempos de emprego" de cada fluxo induzido por  $H_k$ . A descrição do fluxo de Toda como um sistema completamente integrável está completa. Na verdade, para mostrar que um sistema é completamente integrável, basta obter  $n$  integrais em involução - as variáveis  $h_k$  permitiram obter um sistema de coordenadas globais para a superfície de nível  $N$ -informação adicional. Não é verdade, entretanto, que as

variáveis  $h_k$  comutam entre si. É possível construir um sistema de coordenadas composto de  $H_k$ 's e  $A_k$ 's para as quais valem as relações de Poisson "ideais":

$$\{H_k, H_j\} = 0, \quad \{H_k, A_j\} = \delta_{kj}, \quad \{A_k, A_j\} = 0,$$

mas o cálculo dos colchetes é trabalhoso, e usa técnicas que vão um pouco além dessas notas (veja [DLNT]).

O lema foi essencialmente obtido por Kostant e Adler, que deram uma interpretação geométrica, usando idéias de grupos de Lie, ao fluxo de Toda (veja um pouco disso no próximo capítulo).



é exatamente o conjunto de matrizes tridiagonais com traço igual a zero e termos fora da diagonal estritamente positivos - o nosso familiar espaço de fase.

Em cada órbita, a estrutura simplética induz um colchete que é o nosso familiaríssimo

$$\{F,G\}(S) = -\text{tr } S[\pi^{-1}\nabla F(S), \pi^{-1}\nabla G(S)],$$

Kostant e Adler mostraram que a hamiltoniana  $\text{tr } L^2/2$  induz o fluxo de Toda com esse colchete - um resultado que vimos antes. Em outras palavras, existe uma interpretação geométrica para o fluxo de Toda. Muitas perguntas surgem a partir daí: o que acontece em outras órbitas da ação coadjunta? Isto é, suponha que consideramos a órbita passando por uma matriz simétrica cheia - é possível mostrar que o fluxo de Toda nessa órbita ainda é completamente integrável? Note que uma órbita desse tipo é bem "maior" que nossa órbita tridiagonal. Em particular, precisamos de outras integrais em involução além dos autovalores. Propriedades importantes das funções passam a ser suas invariâncias (por exemplo, o fato que autovalores são constantes por conjugação), e grupos de simetria desempenham um papel fundamental na procura das integrais adicionais (veja [DLNT]).

O fluxo de Toda é uma ferramenta conveniente em álgebra linear - lembre que já provamos o teorema espectral com ele. Vamos ver um outro exemplo. Dada uma matriz real  $M$ , defina

$$\|M\|_F^2 = \sum_{i,j} M_{ij}^2 = \text{tr } M^T M$$



(não é difícil ver que  $\|\cdot\|_F$  é realmente uma norma para o espaço de matrizes - em dimensão finita,  $\|\cdot\|_F$  é chamada de norma de Frobenius, em dimensão infinita, norma de Hilbert-Schmidt)

Teorema (Wielandt-Hoffman): Sejam  $M$  e  $N$  matrizes simétricas reais, com autovalores  $m_i$  e  $n_i$ . Então

$$\sum_{i=1}^n (m_i - n_i)^2 \leq \|M - N\|_F^2.$$

para alguma ordenação dos autovalores.

Demonstração:

Sem perda de generalidade, podemos supor que  $M$  e  $N$  são matrizes positivas (isto é, matrizes com autovalores positivos - basta somar a  $M$  e  $N$  um múltiplo adequado da identidade).

A norma de Frobenius é invariante por conjugações ortogonais (aplique, para variar, o teorema espectral), do que concluímos que

$$\|M\|_F^2 = \sum_{i=1}^n m_i^2, \quad \|N\|_F^2 = \sum_{i=1}^n n_i^2$$

e que basta demonstrar

$$\text{tr } M^T N \leq \sum_{i=1}^n m_i n_i \quad (\text{expanda a expressão acima})$$

para uma matriz diagonal  $N$ , cujas entradas diagonais estão em ordem não crescente.

Agora, imagine que  $M$  é a condição inicial para o

fluxo de Toda. Dois fatos imediatamente implicam o teorema:

1) A expressão  $\text{tr } M(t)N$  é não decrescente.

Para ver isso, tome a derivada em  $t$ ,  $\text{tr } \dot{M}N = \sum_{i=1}^n \dot{m}_{ii} n_i$ , onde  $m_{ij}$  são as entradas de  $M$ . Temos que

$$\dot{m}_{ii} = \sum_{k=1}^{n-1} m_{i+k,j}^2 - \sum_{k=1}^{i-1} m_{i-k,j}^2$$

(escreva, em termos das entradas das matrizes, a expressão  $M = [B(M), M]$ ). Como os  $n_i$  estão em ordem não crescente,  $\text{tr } \dot{M}N$  é uma soma de números não negativos.

2)  $\lim \text{tr } M(t)N = \sum_{i=1}^n m_i n_i$ , para alguma ordenação dos autovalores.

Claro,  $M(t)$  converge a uma matriz diagonal (teorema do Capítulo 2) com o mesmo espectro de  $M$ . ■

Existem fluxos de Toda em outros contextos: matrizes não simétricas, matrizes infinitas, e é possível construir "dicionários" entre propriedades espectrais das matrizes e propriedades do fluxo (veja as bibliografias das referências). Mas, repetindo a introdução, talvez a verdadeira importância do fluxo de Toda seja sua posição paradigmática: as idéias empregadas para entendê-lo se aplicam a muitos outros sistemas dinâmicos.

Apêndice 1 - Um lema

No Capítulo 1, ficamos devendo a demonstração do lema abaixo.

Lema: Se as hamiltonianas  $H$  e  $G$  comutam, seus fluxos induzidos comutam.

Demonstração: Sejam  $H_t(x)$  e  $G_s(x)$  os fluxos induzidos por  $H$  e  $G$ , respectivamente. Em outras palavras,  $H_t(x)$  é o ponto no espaço de fase alcançado pelo fluxo induzido por  $H$  no tempo  $t$  saindo do ponto  $x$ . Nessa notação, queremos mostrar que, se  $\{H,G\} = 0$ , então  $H_t(G_s(x)) = G_s(H_t(x))$ . Como basta provar o resultado para uma vizinhança de  $x$ , podemos tomar um sistema de coordenadas contendo  $x$ , e supor  $M = \mathbb{R}^n$ . Um último preparativo: seja  $f \in C^\infty(M)$ . Então, basta mostrar que  $f(H_t(G_s(x))) = f(G_s(H_t(x)))$ , para  $f$  arbitrária (por quê?). Para  $x$  fixo, os dois lados da equação anterior representam duas funções,  $f_e$  e  $f_d$ , com um domínio comum dado por uma vizinhança de  $0$  em  $\mathbb{R}^2$  ( $t$  e  $s$  pequenos - note que, das hipóteses, não podemos concluir que os fluxos são definidos para todos os tempos). As derivadas de  $f_e$  e  $f_d$  na origem  $0 \in \mathbb{R}^2$  coincidem, até segunda ordem (inclusive): vamos verificar isso para as derivadas cruzadas - para todas as outras, o fato é trivial. O colchete foi definido para que a linha abaixo faça sentido:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} f_e(t,s) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(H_t(G_s(x))) \right|_{t=0} = \{f,H\}(G_s(x))$$

(basta ler alto: a variação de  $f$  ao longo do fluxo induzido por  $H$  é...). Analogamente,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial t} f_e(t,s) \right) \Big|_{t=0} \Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} (\{f,H\}(G_s(x))) \Big|_{s=0} = \{\{f,H\},G\}.$$

Para  $f_d$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial}{\partial s} f_d(t,s) \right) \Big|_{t=0,s=0} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial}{\partial s} f(G_s(H_t(x))) \right) \Big|_{t=0,s=0} = \{\{f,G\},H\}.$$

Agora, basta usar a anti-simetria e a identidade de Jacobi (propriedades 3 e 4 do colchete) e a hipótese,  $\{H,G\} = 0$ :

$$\{\{f,H\},G\} + \{\{G,f\},H\} = \{\{f,H\},G\} + \{\{G,f\},H\} + \{\{H,G\},F\} = 0.$$

Expandindo em série de Taylor as funções  $f_e$  e  $f_d$ , acabamos de mostrar que, numa vizinhança de 0 (tomada como domínio comum de  $f_e$  e  $f_d$ ),

$$|f_e(t,s) - f_d(t,s)| \leq A(t^3 + s^3),$$

para alguma constante  $A$ .

Uma maneira conveniente de interpretar o resto da demonstração é a seguinte. O domínio comum de  $f_e$  e  $f_d$  contém um retângulo, de lados  $t$  e  $s$  fixos. Podemos alcançar o ponto  $(t,s)$  saindo de 0 de tantos modos diferentes.

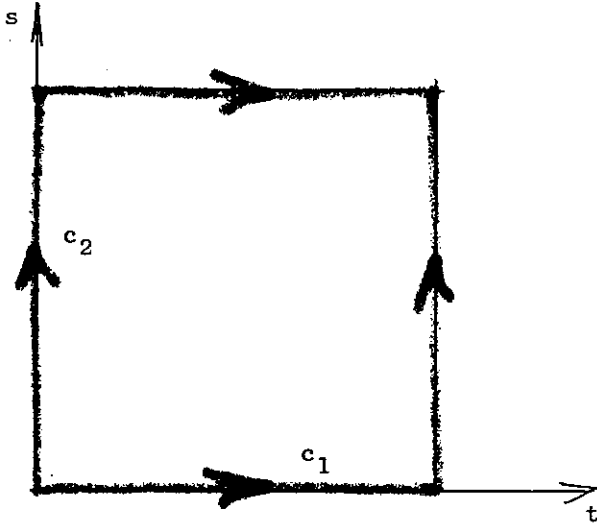


Figura 8

Cada caminho composto de segmentos horizontais e verticais percorridos no sentido esquerda/direita ou baixo/cima corresponde, de um modo natural, a um percurso pelo espaço de fase, começando pelo ponto  $x$ , e seguindo, alternadamente, o fluxo  $H$  para os segmentos horizontais e  $G$  para os verticais. Por exemplo, o que queremos demonstrar é que os caminhos  $c_1$  e  $c_2$  acima correspondem a percursos com o mesmo ponto final no espaço de fase. A idéia da demonstração, agora, é clara: vamos deformar  $c_1$  até  $c_2$  e acompanhar a deformação correspondente dos percursos. Note que as deformações não podem ser homotopias arbitrá-

rias: afinal, só sabemos obter percursos no espaço de fase a partir de caminhos compostos de segmentos horizontais e verticais. Em vez disso, vamos dividir o retângulo em  $n^2$  retangulinhos iguais como abaixo, e empregar deformações discretas - cada deformação corresponde a alterar um caminho mudando-o ao longo de um único retangulinho, como abaixo.

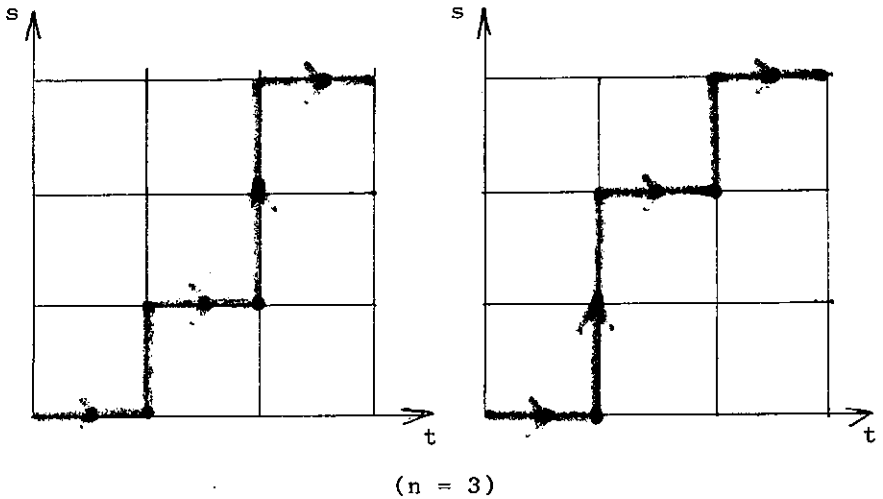


Figura 9

Para estimar a diferença entre os pontos terminais de um caminho e uma sua deformação no espaço de fase, considere os seguintes fatos.

1) Sejam  $x_k$  funções coordenadas no espaço de fase em torno de  $x$ , e considere um aberto do espaço de fase contendo  $x$ , com fecho compacto  $K$ , contido no domínio do sistema de coordenadas. Então as funções  $x_k, f, H, G, \{f, x_k\}, \{f, H\}, \{f, G\}$  têm seus valores absolutos menores do que uma constante  $C_0$  em  $K$ .

2) Podemos diminuir o retângulo inicial, de modo a garantir que todos os pontos alcançados por percursos correspondentes a caminhos seccionalmente horizontais e verticais dentro desse retângulo estão contidos em  $K$ . De fato, nesse compacto, qualquer fluxo (induzido por  $H$  ou  $G$ ) aplicado por um tempo  $T$  (pequeno o suficiente, para não abandonar  $K$ ) não pode aumentar as funções coordenadas mais que  $C_0 T$ , onde  $C_0$  é a constante obtida na observação anterior (por quê?). De modo análogo, se aplicarmos uma sequência de "tempos" horizontais e verticais, as coordenadas não podem aumentar mais do que  $C_0$  multiplicado pela soma de todos os tempos. Logo, basta tomarmos dimensões  $t$  e  $s$  para o retângulo de modo que sequências de fluxos (com tempo total necessariamente menor que  $s + t$ ) originários de  $x$  não abandonam  $K$ .

3) Podemos supor que

$$|f(H_t(G_s(y)) - f(G_s(H_t(y)))| \leq C_1(t^3 + s^3)$$

para uma mesma constante  $C_1$ , e qualquer ponto  $y$  no retângulo, desde que os fluxos não saiam do retângulo (de novo, por quê?).

4) Sejam  $c_1$  e  $c_2$  dois caminhos que diferem por apenas uma de formação. Vamos acompanhar  $f$  ao longo dos caminhos  $d_1$  e  $d_2$  correspondentes a  $c_1$  e  $c_2$ . Obviamente,  $f$  coincide em  $d_1$  e  $d_2$  até chegarmos à bifurcação dos caminhos.

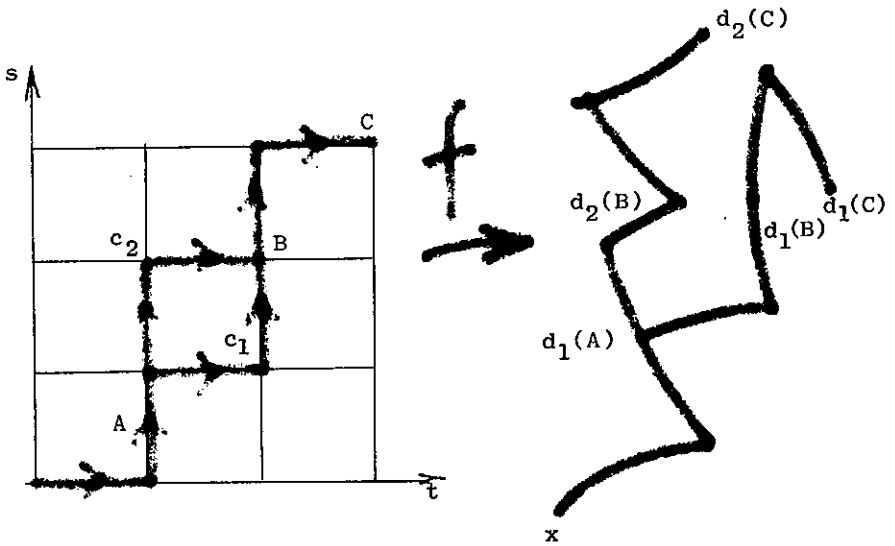


Figura 10

Como na figura, sejam A e B os vértices comuns do trecho de formado dos caminhos  $c_1$  e  $c_2$ , e sejam  $d_1(A) = d_2(A)$ ,  $d_1(B)$



e  $d_2(B)$  os pontos correspondentes no espaço de fase. Pelo fato anterior,

$$|d_1(B) - d_2(B)| \leq C_1((t/n)^3 + (s/n)^3)$$

onde  $t/n$  e  $s/n$  são os tempo de percurso horizontal e vertical nos dois segmentos alterados pela deformação. Os caminhos a partir de  $B$  são os mesmos no domínio, mas talvez sejam diferentes no espaço de fase (estamos justamente demonstrando que não). O próximo passo é estimar a distância entre  $d_1(C)$  e  $d_2(C)$ , onde  $C$  é o ponto  $(t,s)$  no domínio. Note que para obter  $d_1(C)$ , basta resolver uma sequência de equações diferenciais (alternadamente, dadas por fluxos horizontais e verticais) com a condição inicial  $d_1(B)$ . Para obter  $d_2(C)$ , devemos resolver a mesma sequência de equações para uma condição inicial um pouco diferente,  $d_2(B)$ . Vamos estudar o primeiro trecho no domínio, começando por  $B$ , que supomos horizontal (isto é, correspondendo a um fluxo induzido por  $H$ , por tempo  $t/n$ ).

5) Considere o seguinte problema geral: dada uma equação diferencial

$$\frac{d}{dt} y(t) = f(y(t)),$$

estimar a diferença para um tempo  $T$  de duas soluções começando em pontos diferentes, digamos,  $a$  e  $b$ . Vamos supor que a equação seja dada em  $R^n$  (se não, trabalhe com as equações para um sistema de coordenadas), e considere as equações integrais para as soluções,

$$z_a(t) = a + \int_0^t f(z_a(s))ds,$$
$$z_b(t) = b + \int_0^t f(z_b(s))ds.$$

Supondo que as duas equações não abandonam um conjunto compacto, a derivada de  $f$  nesse conjunto é limitada superiormente por  $L$ , que também é uma constante de Lipschitz para  $f$  no compacto (por quê?). Em outras palavras, para pontos  $z_1$  e  $z_2$  no compacto,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq L|z_1 - z_2|.$$

Subtraindo, então, as duas equações, e majorando da maneira óbvia, obtemos

$$|z_a(t) - z_b(t)| \leq |a - b| + \int_0^t L|z_a(s) - z_b(s)|ds.$$

Agora, o de sempre - com picardia, itere a estimativa, para concluir que

$$|z_a(t) - z_b(t)| \leq e^{tL}|a - b|.$$

Em resumo, o desvio entre as duas órbitas, num tempo finito, não é maior do que um múltiplo fixo do desvio inicial, para todas as condições iniciais num compacto.

6) Voltando ao assunto, aplicando o fato anterior várias vezes à sequência de fluxos associada ao trecho que vai de  $B$  a  $C$  no caminho do domínio (com condições iniciais diferentes,  $d_1(B)$ )

e  $d_2(B)$ , obtemos

$$|d_1(C)-d_2(C)| \leq e^{(t+s)C_0} |d_1(B)-d_2(B)| \leq e^{(t+s)C_0} C_1((t/n)^3+(s/n)^3).$$

7) Em  $n^2$  deformações, podemos passar do caminho  $(0,0) \rightarrow (t,0) \rightarrow (t,s)$  ao caminho  $(0,0) \rightarrow (0,s) \rightarrow (t,s)$  (verifique). Do fato anterior, os pontos terminais no espaço de fase correspondentes aos percursos por esses caminhos estão, para algum sistema de coordenadas fixo, a uma distância menor do que

$$n^2(e^{(t+s)C_0} C_1((t/n)^3+(s/n)^3)).$$

Faça  $n$  ir a infinito para concluir que os pontos terminais são iguais. ■

A demonstração acima é clássica e está esboçada, por exemplo em [A].

## Apêndice 2 - Tridiagonalizando

Por quê tanta ênfase em matrizes tridiagonais? As razões são várias. Para começar, o sistema físico que deu origem ao fluxo de Toda, uma vez expresso nas variáveis  $a_k$ 's e  $b_k$ 's, age sobre matrizes tridiagonais. Matrizes tridiagonais possibilitam uma descrição geométrica detalhada do espaço de fase (capítulo 3), e a conservação dos autovalores produz integrais suficientes para demonstrar que, nesse caso, o fluxo de Toda é completamente integrável. Mas existe outra razão, talvez a mais importante - é bastante fácil obter uma matriz tridiagonal simétrica conjugada a uma matriz real simétrica arbitrária. Em geral, então, para calcular os autovalores de uma matriz simétrica, inicialmente obtém-se essa matriz tridiagonal conjugada, e depois calcula-se o espectro dessa matriz mais simples. Vamos descrever o método de Householder para tridiagonalizar uma matriz simétrica (veja, por exemplo, [P]). Antes, uma construção auxiliar.

Lema : Sejam  $u$  e  $v$  dois vetores de norma um em  $\mathbb{R}^n$ . Então existe uma transformação ortogonal que leva  $u$  em  $v$ .

Demonstração: Claro que existe. O interessante é que existe uma muito fácil de implementar. Considere o hiperplano perpendicular ao vetor  $u - v$ . A transformação que nos interessa é a reflexão por esse hiperplano. ■

Exercício: Obtenha uma representação algébrica para essa transformação, em termos dos vetores  $u$  e  $v$ .

Seja  $S_0$  uma matriz real simétrica e ser tridiagonalizada. O primeiro passo é conjugar  $S_0$  de modo a obter uma matriz  $S_1$  cuja primeira coluna é a primeira coluna de uma matriz tridiagonal (isto é, uma combinação linear de  $e_1$  e  $e_2$ ). Por simetria, a primeira linha de  $S_1$  vai ser a transposição de sua primeira coluna. Para fazer isso, escreva

$$S_1 = Q_1 S_0 Q_1^T,$$

onde  $Q_1$  é uma matriz ortogonal e observe a partição em blocos abaixo, onde introduzimos uma notação conveniente ( $R$  e  $b_1$  vão ser definidos a seguir).

$$\left( \begin{array}{c|cccc} & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline b_1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} & v^T \\ \hline v & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R^T \end{array} \right)$$

$S_1 \qquad \qquad \qquad Q_1 \qquad \qquad \qquad S_0 \qquad \qquad \qquad Q_1^T$

Agora, multiplique para obter a equação

$$b_1 e_1 = R v,$$

onde  $R$  é ortogonal  $(n-1) \times (n-1)$ , e  $e_1$  e  $v$  são vetores de  $R^{n-1}$ . Devemos ter, então, a menos de sinal (que podemos tomar positivo), que  $b_1 = \|v\|$ . Agora, tome  $R$  sendo a reflexão que

leva  $v$  a  $b_1 e_1$ . No passo seguinte, conjugamos  $S_1$  por uma matriz ortogonal adequada de modo a manter inalterada a primeira coluna e fazer com que a segunda coluna pertença a uma matriz tridiagonal - como, leitor(a)?

Note que o processo de tridiagonalização, essencialmente, é uma construção com régua e compasso - mais precisamente, as entradas de cada  $Q_k$  pertencem a uma extensão quadrática do corpo contendo as entradas de  $S_k$ . Em outras palavras, o momento "algebricamente difícil" no cálculo dos autovalores é a diagonalização da matriz tridiagonal resultante.

Uma outra observação. Aplicando as conjugações sucessivas à representação da matriz  $S_0$  obtida pelo teorema espectral, vemos que as primeiras coordenadas dos autovetores das matrizes  $S_k$  são sempre as mesmas.

Exercício: Obtenha uma descrição do processo de tridiagonalização de Householder usando as variáveis espectrais (autovalores e  $k$ -ésimas coordenadas dos autovetores). Mostre que os fluxos de Toda (em particular, o método QR) comutam com tridiagonalização (em outras palavras, "fluir" por um certo tempo  $t$  e tridiagonalizar é a mesma coisa que tridiagonalizar e "fluir" pelo tempo  $t$ ).

Sugestão, se fôr preciso: estude a evolução das primeiras coordenadas dos autovetores usando o teorema espectral e a forma explícita dos fluxos dada no lema 1, Capítulo 5.

Bibliografia

- [A] Arnold, V.I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, New York, 1978.
- [DLNT] Deift, P., Li, L.C., Nanda, T., Tomei, C. - The Toda flow on a generic orbit is integrable, a sair em Comm. Pure Appl. Math. .
- [DNT] Deift, P., Nanda, T. Tomei, C., Ordinary Differential equations and the symmetric eigenvalue problem, SIAM J. of Num. Anal., 20 (1983), 1-22.
- [DT] Deift, P., Trubowitz, E., Inverse scattering on the line, Comm. Pure Appl. Math. 32, 1979, 121-251.
- [F] Flaschka, H., The Toda Lattice I, Phys. Rev. B 9 (1974), 1924-25.
- [GGKM] Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M., Method for salving the Korteweg - de Vries equation, Phys. Rev. Lett., 19 (1967), 1095-1097.
- [Ki] Kirillov, A.A., Elements of the theory of representations, Springer, New York, 1976.
- [HS] Hirsch, M., Smale, S., Differential equations, dynamical systems and linear algebra, Academic Press, New York, 1974.
- [L] Lax, P.D., Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure Appl. Math., 21, (1968) 467-490.

- [M] Moser, J., Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential - an integrable system, Dynamic Systems Theory and Applications (ed. J. Moser), Springer, New York, Lecture Notes in Physics 38, (1975), 467-497.
- [N] Nanda, T., Toda flows on band matrices, Ph. D. thesis, New York University, 1982.
- [P] Parlett, B., The symmetric eigenvalue problem, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [S] Symes, W.W., Hamiltonian group actions and integrable systems, Physica 1D (1980), 339-374.
- [T] Toda, M., Wave propagation in anharmonic lattices, Jour. Phys. Soc. Japan 23 (1967), 501-506.
- [To] Tomei, C., Isospectral manifolds of tridiagonal matrices, Duke Math. Jour., 51 (1984), 981-996.