

**INTRODUÇÃO À DINÂMICA DAS FUNÇÕES
RACIONAIS NA ESFERA DE RIEMANN**
Paulo Sad

COPYRIGHT © - 1983 - by PAULO SAD

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,
por qualquer processo, sem a permissão do autor.

ISBN 85-244-0002-1

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Estrada Dona Castorina, 110
CEP 22460 - Rio de Janeiro - RJ

A Chafith e Leonor.

Conteúdo:

	<u>Pág.</u>
I - <u>Capítulo 1.</u> Propriedades Básicas dos Endomorfismos	
§1 - Pontos Fixos de Difeomorfismos Locais Analíticos	1
§2 - Órbitas Periódicas de Endomorfismos de \mathbb{C}	11
§3 - O Conjunto de Julia	20
§4 - O Complementar do Conjunto de Julia	25
§5 - Exemplos	35
II - <u>Capítulo 2.</u> O Teorema das Componentes	
§1 - Aplicações Quase Conformes no Plano	47
§2 - Deformações de Endomorfismos de \mathbb{C}	54
§3 - Demonstração do Teorema das Componentes	58
III - <u>Capítulo 3.</u> Estabilidade	
§1 - Condições Necessárias de Estabilidade	63
§2 - Construção de Conjugações	74
§3 - Geometria das Conjugações	84
IV - <u>Capítulo 4.</u> Hiperbolicidade	
§1 - O Conjunto de Julia de um Endomorfismo Hiperbólico	87
§2 - Estabilidade do Conjunto de Julia	100
§3 - Estabilidade x Hiperbolicidade	103
V - <u>Apêndice</u>	110

Introdução

O objetivo destas notas é colocar o leitor em condições de acompanhar os desenvolvimentos recentes do estudo de iterações de funções racionais. Após uma exposição inicial das propriedades clássicas (conhecidas já por Fatou e Julia), são analisadas questões associadas à dinâmica global de um polinômio (o Teorema das Componentes) e o comportamento desta dinâmica quando submetida a perturbações (estabilidade). No último capítulo comparamos o roteiro usualmente seguido em Sistemas Dinâmicos para se procurar propriedades estáveis com aquele, algo inesperado, seguido até o momento no caso das funções racionais. Num apêndice se encontra rápida enumeração das ferramentas analíticas utilizadas no texto. Chamamos a atenção do leitor para os comentários colocados no final de cada capítulo; lá se põem algumas questões em aberto.

Agradeço a J. Palis pela sugestão (quase imperativa) para que estas notas fossem escritas, e a R. Mañé pelas explicações acerca do Capítulo 2.

Belo Horizonte, maio de 1983.

CAPÍTULO 1

PROPRIEDADES BÁSICAS DOS ENDOMORFISMOS ([1])

Neste capítulo estudamos as propriedades essenciais à compreensão da dinâmica global dos endomorfismos analíticos da esfera de Riemann. Começamos com um breve estudo da dinâmica em torno de pontos fixos de difeomorfismos locais analíticos; a seguir definimos o conjunto de Julia associado a um endomorfismo e finalmente descrevemos o seu comportamento fora daquele conjunto.

§1 - Pontos Fixos de Difeomorfismos Locais Analíticos

Consideremos um difeomorfismo local $\varphi: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ analítico tendo $0 \in \mathbb{C}$ como ponto fixo. Temos várias possibilidades, conforme o valor de $a = \varphi'(0)$.

1º Caso: $0 < |a| < 1$.

Observemos que existem $|a| < \mu < 1$ e $r > 0$ tais que

$$|\varphi(z)| < \mu |z|$$

desde que $|z| \leq r$. Segue-se que

$$|\varphi^n(z)| < \mu^n |z|,$$

de modo que a órbita positiva $\{\varphi^n(z), n \geq 0\}$ de qualquer ponto $z \in \mathbb{C}$ no disco fechado de raio r e centro $0 \in \mathbb{C}$ converge ao ponto fixo. Diremos que este é um ponto fixo atrator.

1.1.1. Teorema. Existe uma única função analítica F definida para $|z| < r$ satisfazendo $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ e

$$F(\varphi(z)) = a \cdot F(z).$$

Em outras palavras, φ é analiticamente equivalente à sua parte linear.

Demonstração. Consideremos a seqüência de funções

$$h_n(z) = \frac{\varphi^n(z)}{a^n}, \quad |z| \leq r, \quad n \geq 0.$$

Provemos que a seqüência (h_n) é convergente. Temos que

$$h_{n+1}(z) = z \cdot \frac{h_2(z)}{h_1(z)} \dots \frac{h_{n+1}(z)}{h_n(z)} = z \prod_{i=1}^n \frac{h_{i+1}(z)}{h_i(z)}$$

e

$$\frac{h_{i+1}(z)}{h_i(z)} = \frac{1}{a} \frac{\varphi^{i+1}(z)}{\varphi^i(z)} = \frac{\varphi(z_i)}{a z_i},$$

onde $z_i = \varphi^i(z)$.

Agora: $\frac{\varphi(z)}{az} = 1 + \xi(z)$, com $|\xi(z)| \leq \alpha|z|$ para $\alpha \in \mathbb{R}$, $|z| \leq r$.

Logo: $h_{n+1}(z) = z \prod_{i=1}^n (1 + \xi(z_i))$.

Finalmente, observemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi(z_i)| \leq \sum_{t=1}^{\infty} \alpha |z_t| \leq \alpha |z| \sum_{t=1}^{\infty} \mu^t < \infty,$$

de modo que (h_n) é uniformemente convergente.

Seja $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z)$; temos $F(0) = 0$ e $F'(0) = 1$.

Além disso:

$$F(\varphi(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\varphi(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{n+1}(z)}{a^n} = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{n+1}(z)}{a^{n+1}} = a \cdot F(z).$$

Quanto à unicidade: se $\tilde{F}(z)$ é outra função analítica definida numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$ tal que $\tilde{F}(0) = 0$, $\tilde{F}'(0) = 1$ e $\tilde{F}(\varphi(z)) = a\tilde{F}(z)$, então $H(z) = \tilde{F}(F^{-1}(z))$ satisfaz as condições: $H(0) = 0$, $H'(0) = 1$ e $H(az) = aH(z)$. Comparando os desenvolvimentos em séries de potências de ambos os membros da última equação, concluímos que $H(z) = z$, ou seja, $F(z) = \tilde{F}(z)$, para $z \in \mathbb{C}$ numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$. ■

Utilizaremos mais tarde uma versão parametrizada deste teorema de linearização. Sejam $B_s(0) \subset \mathbb{C}^n$ a bola aberta de centro $0 \in \mathbb{C}^n$ e raio $s > 0$, e $D_r(0)$ o disco aberto em \mathbb{C} de raio $r > 0$ contendo $0 \in \mathbb{C}$. Consideremos uma função analítica $\varphi: B_s(0) \times D_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi(0,0) = 0$ e $0 < |D_2\varphi(0,0)| < 1$. Sabemos que se $|\lambda| < s' < s$ existe uma única função analítica $p(\lambda)$ tal que $p(0) = 0$, $\varphi(\lambda, p(\lambda)) = p(\lambda)$ e $0 < |D_2\varphi(\lambda, p(\lambda))| < 1$.

1.1.2 Teorema. Existe uma única função analítica $F(\lambda, z)$ definida para $|\lambda| < s'' < s'$ e $|z| < r' < r$ que satisfaz $F(\lambda, p(\lambda)) = 0$, $D_2F(\lambda, p(\lambda)) = 1$ e

$$F(\lambda, \varphi(\lambda, z)) = a_\lambda \cdot F(\lambda, z),$$

onde $a_\lambda = D_2\varphi(\lambda, p(\lambda))$.

Usando uma notação mais sugestiva:

$$F_\lambda(\varphi_\lambda(z)) = a_\lambda \cdot F_\lambda(z) .$$

Assim, a linearização depende analiticamente do parâmetro. A demonstração do Teorema 1.1.2 é uma simples adaptação daquela do Teorema 1.1.1, e fica para o leitor.

2º Caso: $|a| > 1$

Aplicando a descrição do 1º caso a φ^{-1} , vemos que a órbita negativa de qualquer ponto suficientemente próximo de $0 \in \mathbb{C}$ está bem definida e converge ao ponto fixo; diremos que $0 \in \mathbb{C}$ é um ponto fixo repulsor. Valem teoremas correspondentes a 1.1.1 e 1.1.2.

3º Caso: $|a| = 1$, e $a \in \mathbb{C}$ é raiz da unidade.

Consideremos inicialmente $a = 1$, e

$$\varphi(z) = z + bz^{k+1} + \dots, \quad \text{com } b \neq 0, \quad k \geq 2 .$$

(caso em que $\varphi(z)$ não é a identidade).

Escrevamos

$$\varphi(z) = \frac{z}{1 - z^k \xi(z)},$$

onde $\xi(0) = b$ e ξ é analítica numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$. Fazendo a mudança de coordenadas $z = w^{-1/k}$ (e fixando alguma de terminação), obtemos

$$\tilde{\varphi}(w) = \left[\frac{1}{\varphi(w^{-1/k})} \right]^k = w - k \cdot b + \frac{1}{w} \tilde{\xi}(w^{-1/k}),$$

onde $\tilde{\xi}$ é analítica numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$. Concluimos que, para $|w| > R$, R conveniente, $\tilde{\varphi}$ se comporta aproximadamente como a translação $w \mapsto w - kb$. Assim, existem retas orientadas L_1 e L_2 , perpendiculares ao vetor $-kb$, tais que:

- (i) $\tilde{\varphi}^n(w) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ uniformemente em L_1^+ (região à direita de L_1).
- (ii) $\tilde{\varphi}^{-n}(w) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ uniformemente em L_2^- (região à esquerda de L_2).
- (iii) caso $w \notin L_1^+ \cup L_2^-$ e $|w| \gg R$, sua órbita positiva (resp. negativa) penetra em L_1^+ (resp. L_2^-).

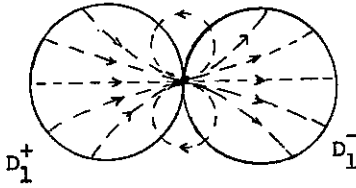
Retornando à coordenada original, vemos que existem, alternando-se, k regiões D_1^+, \dots, D_k^+ e k regiões D_1^-, \dots, D_k^- , disjuntas entre si e tendo $0 \in \mathbb{C}$ no bordo, tais que

i - $\varphi^n(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ uniformemente em cada $D_i^+ (\overline{\varphi(D_i^+)} \subset D_i^+)$

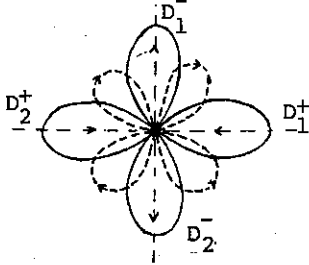
ii - $\varphi^{-n}(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ uniformemente em cada $D_i^- (\overline{\varphi^{-1}(D_i^-)} \subset D_i^-)$

iii - caso $z \in \mathbb{C}$ seja suficientemente pequeno e

$z \notin \bigcup_{i=1}^k D_i^+ \cup D_i^-$, sua órbita positiva (resp. negativa) penetra em $\bigcup_{i=1}^k D_i^+$ (resp. $\bigcup_{i=1}^k D_i^-$).



$$z \rightarrow z + bz^2 + \dots$$



$$z \rightarrow -z + bz^3 + \dots$$

Examinemos agora a situação em que $a^m = 1$, $n > 1$.
 Pode-se mostrar que, excluído o caso $\varphi(z) = a \cdot z$, existe uma mudança de coordenadas analítica em $0 \in \mathbb{C}$ de modo que $\varphi(z)$ passa a ser (conservando a notação)

$$\varphi(z) = az + bz^{km+1} + \dots, \quad k \in \mathbb{N}, \quad b \neq 0.$$

Utilizando a descrição acima para $\varphi^m(z) = z + mabz^{km+1} + \dots$, concluímos que existem, alternando-se, regiões $D_{1,1}^+, \dots, D_{1,m}^+, \dots, D_{k,1}^+, \dots, D_{k,m}^+$ e $D_{1,1}^-, \dots, D_{1,m}^-, \dots, D_{k,1}^-, \dots, D_{k,m}^-$, tendo $0 \in \mathbb{C}$ no bordo, tais que

$$i - \varphi^j(D_{i,1}^+) = D_{i,j}^+, \quad \varphi^{-j}(D_{i,1}^-) = D_{i,j}^- \quad (2 \leq j \leq m-1)$$

$$ii - \varphi^{n \cdot m}(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ uniformemente em cada } D_{i,j}^+(\overline{\varphi^m(D_{i,j}^+)}) \subset D_{i,j}^+)$$

$$iii - \varphi^{-nm}(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ uniformemente em cada } D_{i,j}^-(\overline{\varphi^{-m}(D_{i,j}^-)}) \subset D_{i,j}^-)$$

iv - caso $z \in \mathbb{C}$ esteja próximo de $0 \in \mathbb{C}$ e $z \notin \cup D_{i,j}^+ \cup D_{i,j}^-$, sua φ^m -órbita positiva (resp. negativa) penetra em $\cup D_{i,j}^+$ (resp. $\cup D_{i,j}^-$).

O ponto fixo estudado neste 3º caso será denominado racionalmente indiferente ([2]).

4º Caso: $|a| = 1$, e $a \in \mathbb{C}$ não é raiz da unidade.

Sempre se pode encontrar uma mudança formal de coordenadas que transforma $\varphi(z)$ em $z \mapsto a.z$, bastando para isto resolver (formalmente) a equação $F(a.z) = \varphi(F(z))$, com $F(0) = 0$ e $F'(0) = 1$. Provamos a existência de F indutivamente: supondo conhecidos os coeficientes de seu desenvolvimento em série formal de potências $F(z) = z + \sum_{i=2}^{\infty} a_i z^i$ até ordem $n-1$, procedemos à comparação dos termos em z^n nos dois membros da equação anterior. Obtemos então

$$a^n \cdot a_n = a \cdot a_n + R_n(a_2, \dots, a_{n-1}),$$

onde $R_n(a_2, \dots, a_{n-1})$ é uma expressão algébrica envolvendo a_2, \dots, a_{n-1} e os coeficientes da expansão de $\varphi(z)$ em série de potências até ordem n . Segue-se que a_n pode ser calculado a partir dos coeficientes anteriores:

$$a_n = \frac{R_n(a_2, \dots, a_{n-1})}{a^n - a}.$$

Esta expressão evidencia o papel dos "pequenos denominadores" (isto é, a seqüência $a^n - a$ possui $0 \in \mathbb{C}$ como ponto de acumula-

ção), de modo que $\sum_{i=2}^{\infty} a_i z^i$ pode não convergir. O teorema seguinte dá uma condição bastante ampla para a convergência:

1.1.3. Teorema ([3]) - Suponhamos que existam $C > 0$, $\beta > 0$ tais que

$$|a^n - 1| \geq \frac{C}{\beta^{2+\beta}}, \quad n \geq 1.$$

Então $\varphi(z)$ é linearizável.

A desigualdade acima é verificada para um conjunto de medida 1 em S^1 . Quando $\varphi(z)$ é linearizável, suas órbitas preenchem densamente círculos analíticos em torno do ponto fixo; quanto ao caso não linearizável, muito pouco se conhece. Em qualquer situação diremos que o ponto fixo é irracionalmente indiferente.

5º Caso: $a = 0$.

Apesar de não se tratar mais de um difeomorfismo local, vamos tratar aqui o caso

$$\varphi(z) = z^m + \dots, \quad m \geq 2.$$

Do ponto de vista dinâmico, trata-se de uma situação simples. De fato, se $r > 0$ é suficientemente pequeno, temos que $|\varphi(z)| \leq 2|z|^m$ para $|z| \leq r$; assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(z) = 0$ uniformemente em $|z| \leq r$. Diremos que $0 \in \mathbb{C}$ é ponto fixo fortemente atrator.

1.1.4. Teorema - Existe um único difeomorfismo local $F(z)$ analítico satisfazendo $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ e

$$F(\varphi(z)) = F(z)^m$$

Assim, $\varphi(z)$ é localmente equivalente a $z \mapsto z^m$.

Demonstração. Trata-se paraticamente da mesma prova do Teorema 1.1.1. Consideramos a seqüência de funções

$$h_n(z) = (\varphi^n(z))^{1/m^n}, \quad h_n'(0) = 1.$$

Afirmamos que a seqüência (h_n) é uniformemente convergente para $|z| \leq r$. De fato:

$$h_{n+1}(z) = z \cdot \prod_{i=1}^n \frac{h_{i+1}(z)}{h_i(z)}$$

$$\frac{h_{i+1}(z)}{h_i(z)} = \frac{(\varphi^{i+1}(z))^{1/m^{i+1}}}{(\varphi^i(z))^{1/m^i}} = \left(\frac{\varphi(z^i)^{1/m}}{z^i} \right)^{1/m^i},$$

onde fizemos $z^i = \varphi^i(z)$.

Se $\xi(z) = \frac{\varphi(z)^{1/m}}{z} = 1 + \tilde{\xi}(z)$ (onde $\tilde{\xi}$ é analítica),

temos que

$$h_{n+1}(z) = z \prod_{i=1}^n \xi(z^i)^{1/m^i}.$$

Devemos então verificar se

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m^i} \log \xi(z^i)$$

é convergente. Se $r > 0$ é suficientemente pequeno:

$$|\log \xi(z^i)| = |\log(1 + \tilde{\xi}(z^i))| \leq 2|\tilde{\xi}(z^i)| \leq c ;$$

ou seja, $\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{m^i} \log \xi(z^i) \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c}{m^i} < \infty$; logo, a seqüência

(h_n) é uniformemente convergente. Seja

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z) , \quad |z| \leq r' .$$

Temos que:

$$\begin{aligned} F(\varphi(z)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\varphi(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi^{n+1}(z))^{1/m^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(\varphi^{n+1}(z))^{1/m^{n+1}} \right]^m = F(z)^m , \end{aligned}$$

de modo que $F(z)$ é a função procurada. Deixamos a unicidade para o leitor. ■

Como antes, existe também a versão parametrizada deste teorema. Sejam $B_s(0) \subset \mathbb{C}^n$ e $D_r(0)$ como antes, e $\varphi: B_s(0) \times D_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$ função analítica tal que $\varphi(0, z) = z^m + \dots$, $m \geq 2$. Suponhamos que exista uma função analítica $p(\lambda)$, definida para $|\lambda| \leq s$, tal que $\varphi(\lambda, p(\lambda)) = p(\lambda)$ e $D_2 \varphi(\lambda, p(\lambda)) = 0$.

1.1.5. Teorema - Existe uma única função analítica $F(\lambda, z)$ definida para $|\lambda| \leq s' < s$ e $|z| \leq r' < r$ que satisfaz $F(\lambda, p(\lambda)) = 0$, $D_2 F(\lambda, p(\lambda)) = 0$ e

$$F(\lambda, \varphi(\lambda, z)) = \varphi(\lambda, z)^m .$$

Demonstração. Para o leitor.

§2. Órbitas Periódicas de Endomorfismos de $\bar{\mathbb{C}}$

Consideremos uma aplicação analítica $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ não constante e não linear. O grau de f é a cardinalidade de $f^{-1}(p)$, onde $p \in \bar{\mathbb{C}}$ é qualquer valor regular da aplicação. Denotemos por $\text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$ o espaço das aplicações analíticas de $\bar{\mathbb{C}}$ em $\bar{\mathbb{C}}$ de grau $d \in \mathbb{N}$, munido da topologia C^0 .

Na coordenada usual para $\bar{\mathbb{C}}$, $f \in \text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$ se escreve como

$$f(z) = \frac{\sum_{i=0}^d a_i z^i}{\sum_{j=0}^d b_j z^j}, \quad a_i, b_j \in \mathbb{C}$$

onde $(a_d, b_d) \neq (0,0)$ e algum $b_j \neq 0$.

Podemos assim associar $f \in \text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$ ao ponto

$[a_0 : \dots : a_d : b_0 : \dots : b_d] \in \mathbb{C} P^{2d+1}$ de modo único; a imagem de $\text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$ via esta associação é um aberto de $\mathbb{C} P^{2d+1}$, e isto nos permite introduzir naquele espaço uma estrutura de variedade complexa.

1.2.1. Definição - Dados $f \in \text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$ e $z \in \bar{\mathbb{C}}$, a órbita positiva (resp. negativa) de $z \in \bar{\mathbb{C}}$ é $\{f^n(z), n \geq 0\}$ (resp. $\{y \in \bar{\mathbb{C}}; z = f^n(y) \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$). A órbita completa de $z \in \bar{\mathbb{C}}$ é a união das órbitas positiva e negativa de $z \in \bar{\mathbb{C}}$. Elas serão indicadas por $\mathcal{O}^+(z)$, $\mathcal{O}^-(z)$ e $\mathcal{O}(z)$. Se, para $p \in \bar{\mathbb{C}}$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $f^{\ell-1}(p) = p$, diremos que $p \in \bar{\mathbb{C}}$ é pon-

to periódico de f e que $\mathcal{O}^+(p)$ é órbita periódica de f ; o menor inteiro $l \in \mathbb{N}$ que satisfaz $f^{l-1}(p) = p$ é o período de $\mathcal{O}^+(p)$.

1.2.2. Proposição - Se $d \geq 2$, $f \in \text{End}_d(\overline{\mathbb{C}})$ possui uma infinidade (enumerável) de órbitas periódicas.

Distinguiremos vários tipos de órbitas periódicas, de acordo com a análise feita no parágrafo anterior.

1.2.3. Definição - Seja $p \in \overline{\mathbb{C}}$ ponto periódico de período $l \in \mathbb{N}$. A órbita $\mathcal{O}^+(p)$ é atratora, fortemente atratora ou repulsora conforme $0 < |(f^l)'(p)| < 1$, $(f^l)'(p) = 0$ ou $|(f^l)'(p)| > 1$. Quando $|(f^l)'(p)| = 1$, $\mathcal{O}^+(p)$ é órbita periódica indiferente (racionalmente ou irracionalmente, dependendo de $(f^l)'(p)$ ser raiz da unidade ou não).

A dinâmica local de $f \in \text{End}_d(\overline{\mathbb{C}})$ próximo a uma órbita periódica de período $l \in \mathbb{N}$ é estudada considerando-se f^l em vizinhanças dos pontos da órbita.

Nosso objetivo, até o final deste parágrafo, é mostrar que, a menos de um número finito, todas as órbitas periódicas de $f \in \text{End}_d(\overline{\mathbb{C}})$ são repulsoras.

1.2.4. Definição - Seja $\mathcal{O}^+(p)$ uma órbita periódica atratora ou fortemente atratora de $f \in \text{End}_d(\overline{\mathbb{C}})$ de período $l \in \mathbb{N}$. O conjunto estável de $\mathcal{O}^+(p)$ é

$$E(\mathcal{O}^+(p)) = \{z \in \overline{\mathbb{C}}; \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{nl}(z), \mathcal{O}^+(p)) = 0\},$$

onde d é distância esférica em $\bar{\mathbb{C}}$.

Pelo Teorema 1.1.1., existem discos $D_0, \dots, D_{\ell-1}$ em torno de $p, f(p), \dots, f^{\ell-1}(p)$ de modo que $\bigcup_{i=0}^{\ell-1} D_i \subset E(\mathcal{O}^+(p))$. Dado $z_0 \in E(\mathcal{O}^+(p))$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(z_0) \in \bigcup_{i=0}^{\ell-1} D_i$; segue-se que $E(\mathcal{O}^+(p))$ é aberto em $\bar{\mathbb{C}}$ contendo $\mathcal{O}^+(p)$ e

$$E(\mathcal{O}^+(p)) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n} \left(\bigcup_{i=0}^{\ell-1} D_i \right).$$

Denotemos por $E_i(\mathcal{O}^+(p))$ a componente conexa de $E(\mathcal{O}^+(p))$ que contém $f^i(p)$, $0 \leq i \leq \ell-1$. É fácil ver que $f(E_i(\mathcal{O}^+(p))) = E_{i+1}(\mathcal{O}^+(p))$, de modo que $f^\ell(E_i(\mathcal{O}^+(p))) = E_i(\mathcal{O}^+(p))$.

1.2.5. Definição. A bacia de $\mathcal{O}^+(p)$ é

$$B(\mathcal{O}^+(p)) = \bigcup_{i=0}^{\ell-1} E_i(\mathcal{O}^+(p)).$$

1.2.6. Teorema ([4]). A bacia de qualquer órbita periódica atratora contém um ponto crítico do endomorfismo.

Este teorema é fundamental para tudo o que se segue. Uma de suas consequências mais importantes decorre de ser o número de pontos críticos de $f \in \text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$ limitado por $2(d-1)$.

1.2.7. Corolário - Existem no máximo $2(d-1)$ órbitas periódicas atradoras e fortemente atradoras de $f \in \text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$.

Demonstração do Teorema 1.2.6 - Seja $p \in \bar{\mathbb{C}}$ um ponto periódico de período $\ell \in \mathbb{N}$ para $f \in \text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$. Se $\mathcal{O}^+(p)$ é fortemente a-

tratora, então $f'(f^i(p)) = 0$ para algum $0 \leq i \leq l-1$. Podemos supor, portanto, que $\mathcal{O}^+(p)$ é atratora. Seja $g = f^l$; prove-mos que em $E_0(\mathcal{O}^+(p))$ existe um ponto crítico $c \in \bar{U}$ de g . Se-gue-se daí que algum dos pontos $c, f(c), \dots, f^{l-1}(c)$ é crítico para f . Suponhamos, por absurdo, que $g'(z) \neq 0 \ \forall z \in E_0(\mathcal{O}^+(p))$. Em $E_0(\mathcal{O}^+(p))$ não existem valores críticos para a restrição $g: E_0(\mathcal{O}^+(p)) \rightarrow E_0(\mathcal{O}^+(p))$; assim, podemos definir sucessivamente inversas analíticas

$$\begin{array}{l}
 g_1^{-1}: D_0 \longrightarrow D_0^1 \subset \bar{U}, \quad g_1^{-1}(p) = p \\
 g_2^{-1}: D_0^1 \longrightarrow D_0^2 \subset \bar{U}, \quad g_2^{-1}(p) = p \\
 \vdots \\
 g_i^{-1}: D_0^{i-1} \longrightarrow D_0^i \subset \bar{U}, \quad g_i^{-1}(p) = p,
 \end{array}$$

usando o fato de que $D_0 \subset D_0^1 \subset D_0^2 \subset \dots \subset D_0^i \subset \dots$. Fazendo $D_0^\infty = \bigcup_{i=0}^\infty D_0^i$, temos bem definida $g_\infty^{-1}: D_0^\infty \rightarrow D_0^\infty$, inversa de $g: D_0^\infty \rightarrow D_0^\infty$. Ora, cada D_0^i é difeomorfo ao disco \mathbb{D} , de modo que D_0^∞ é simplesmente conexo, e $\# \bar{U} \setminus D_0^\infty \geq 2$ (D_0^∞ evita as outras órbitas periódicas de g). Pelo Teorema de Uniformização, D_0^∞ é analiticamente difeomorfo ao disco \mathbb{D} , e pelo Lema de Schwartz $|g'(p)| = 1$, contradição. ■

Vamos agora adaptar o Teorema 1.2.6 para as órbitas pe-riódicas racionalmente indiferentes. Suponhamos $\mathcal{O}^+(p)$ periódi-ca de período $l \in \mathbb{N}$, e tal que $f^l(z) = p + (f^l)'(p)(z-p) +$

+ $b(z-p)^{km+1} + \dots$, onde $[(f^\ell)'(p)]^m = 1$ e $b \neq 0$.

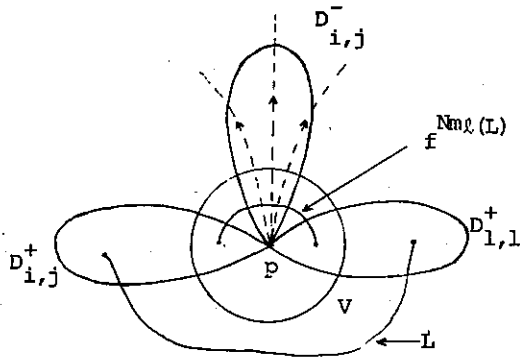
1.2.8. Definição - O conjunto estável de $\mathcal{O}^+(p)$ é o conjunto $E(\mathcal{O}^+(p)) = \{z \in \bar{\mathbb{C}}; \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(z), \mathcal{O}^+(p)) = 0\} \setminus \mathcal{O}^+(p)$.

Decorre da descrição apresentada no 3º caso do parágrafo anterior (conservamos a notação) que, se $z \in \bar{\mathbb{C}}$ está no conjunto estável de $\mathcal{O}^+(p)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $f^{n_0}(z) \in \bigcup_{n=0}^{\ell-1} f^n(\bigcup_{i,j} D_{i,j}^+)$, onde $D_{i,j}^+$ é região em torno de $p \in \bar{\mathbb{C}}$ associada a f^ℓ . Segue-se que $E(\mathcal{O}^+(p))$ é aberto.

1.2.9. Definição - Cada componente conexa de $E(\mathcal{O}^+(p))$ que contém algum ponto de $\mathcal{O}^+(p)$ em seu bordo é uma pétala de $\mathcal{O}^+(p)$.

1.2.10. Proposição - Seja L um arco de Jordan ligando dois pontos $q_1 \in D_{1,1}^+$ e $q_2 \in D_{i,j}^+$, com $D_{1,1}^+ \neq D_{i,j}^+$ e $L \cap \mathcal{O}(p) = \emptyset$. Então a sequência $(f|_L^{n \cdot m \cdot \ell})_{n \in \mathbb{N}}$ não converge uniformemente a $p \in \mathbb{C}$.

Demonstração - Seja V uma vizinhança pequena $p \in \mathbb{C}$. Suponhamos que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n \cdot m \cdot \ell}(L) \subset V$ para $n \geq N$. Ora, o arco $f^{N \cdot m \cdot \ell}(L)$ liga $f^{N \cdot m \cdot \ell}(q_1) \in D_{1,1}^+$ a $f^{N \cdot m \cdot \ell}(q_2) \in D_{i,j}^+$ sem passar por $p \in \bar{\mathbb{C}}$; logo, $f^{N \cdot m \cdot \ell}(L)$ deve atravessar algum $\bar{D}_{i,j}^+$, o que impede $f^{n \cdot m \cdot \ell}(L) \subset V$ para $n \geq N$. ■



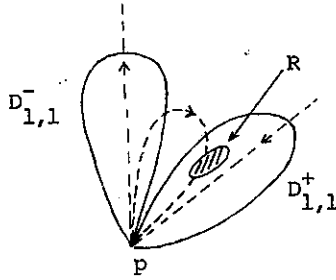
Como consequência, cada pétala que possui $p \in \bar{\mathbb{C}}$ em seu bordo contém exatamente um $D_{i,j}^+$ (logo, existem $k \cdot m$ destas pétalas). Se P é uma pétala de $\mathcal{O}^+(p)$, temos que $f^{l \cdot m}(P) = P$; diremos que $\bigcup_{n=0}^{lm} f^n(P)$ é a órbita da pétala. Existem, portanto, k órbitas distintas de pétalas de $\mathcal{O}^+(p)$.

1.2.11. Teorema - Cada órbita de pétala de uma órbita periódica racionalmente indiferente possui um ponto crítico do endomorfismo.

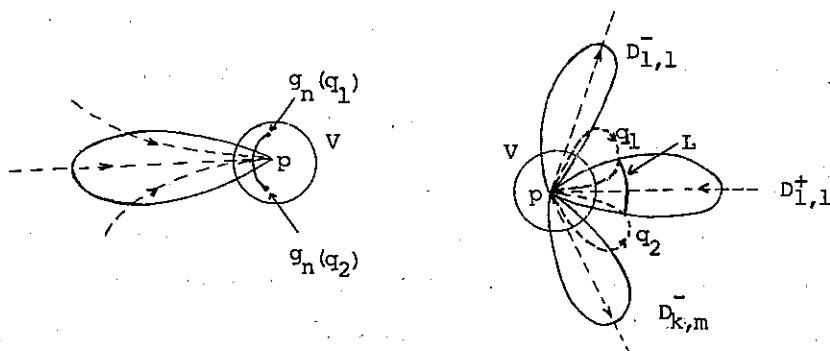
1.2.12. Corolário - Existem no máximo $2(d-1)$ órbitas periódicas atratoras, fortemente atratoras e racionalmente indiferentes de $f \in \text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$.

Demonstração do Teorema 1.2.11 - Devemos provar que, se P é uma pétala com $p \in \partial P$, então $g(z) = f^{m \cdot l}(z)$ possui um ponto crítico em P (estamos usando a mesma notação acima). Suponhamos $P \supset D_{1,1}^+$; já sabemos que $\overline{g(D_{1,1}^+)} \subset D_{1,1}^+$. Admitamos que não existam pontos críticos da restrição de g a P . Dentre os ra-

mos possíveis para se definir uma inversa de g em $D_{1,1}^+$, escolhemos aquele cuja imagem contém $D_{1,1}^+$. Denotêmo-lo por $g_1: D_{1,1}^+ \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$; assim, $g_1(D_{1,1}^+) = D_1 \supset D_{1,1}^+$. A seguir, escolhemos g_2 como o ramo de g^{-2} definido em D_1 tal que $D_2 = g_2(D_{1,1}^+) \supset D_{1,1}^+$, e assim por diante. Observe-se que $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ evita uma infinidade de órbitas periódicas de g , de modo que a família $\{g_i\}$ é normal. Afirmamos que $\lim_{i \rightarrow \infty} g_i(z) = 0$ uniformemente em compactos de $D_{1,1}^+$. De fato, existe um disco fechado $R \subset D_{1,1}^+$ tal que $g_{i_0}(R) \subset D_{1,1}^-$ para algum i_0 , de modo que



$\lim_{i \rightarrow \infty} g_i(z) = 0$ para $z \in R$. Isso implica a afirmativa. Considere agora um arco de Jordan L ligando $q_1, q_2 \in \partial D_{1,1}^+$, como na figura. Dada uma vizinhança V pequena de $p \in \bar{\mathbb{C}}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g_n(L) \subset V$ se $n \geq N$. Ora, $g_n(L)$ liga $g_n(q_1) \in D_{1,1}^-$ a $g_n(q_2) \in D_{k,m}^-$; segue-se que $g_n(L)$ deve atravessar algum $D_{i,j}^+$, e então não será possível manter $g_n(L) \subset V$ para todo $n \geq N$, contradição. ■



1.2.13. Definição - A órbita periódica $\Theta^+(p)$ de $f_0 \in \text{End}_d(\mathbb{C})$ de período $\iota \in \mathbb{N}$ é simples se $(f_0^\iota)'(p) \neq 1$.

Pelo teorema das funções implícitas, existe uma função analítica $p(f): U \rightarrow \mathbb{C}$, onde $U \subset \text{End}_d(\mathbb{C})$ é vizinhança de f_0 tal que $p(f_0) = p$ e $\Theta^+(p(f))$ é a única órbita periódica de f de período $\iota \in \mathbb{N}$ próxima a $\Theta^+(p)$ (e $\Theta^+(p(f))$ é ainda simples).

1.2.14. Teorema - O número de órbitas periódicas indiferente simples de $f_0 \in \text{End}_d(\mathbb{C})$ é limitado por $4(d-1)$.

Demonstração - Sejam $\Theta^+(p_1), \dots, \Theta^+(p_n)$ órbitas periódicas indiferentes simples de f_0 tais que $|(f_0^{\iota_i})'(p_i)| = 1$, onde ι_i é o período de $\Theta^+(p_i)$, $1 \leq i \leq n$. Como antes, existem extensões analíticas $p_i: U \subset \text{End}_d(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ para aqueles pontos periódicos. Façamos $\mu_i(f) = (f^{\iota_i})'(p_i)$, $V_i = \{f \in U; |\mu_i(f)|^2 = 1\}$

e $H_i = \{f \in U; |\mu_i(f)|^2 < 1\}$. Como $\mu_i(f_0)$ é valor regular de $\mu_i(f)$ $\forall 1 \leq i \leq n$, vemos que V_i é hipersuperfície real em U ; segue-se que, dado $\epsilon > 0$, existe uma bola $B \subset U$ em torno de f_0 tal que

$$\frac{\text{vol}(H_i \cap B)}{\text{vol}(B)} \geq \frac{1}{2} - \epsilon, \quad \forall i.$$

Seja $X_i =$ função característica de $H_i \cap B$. Temos que

$$X_1 + \dots + X_n \leq 2(d-1)$$

Logo:

$$\int_B (X_1 + \dots + X_n) \leq 2(d-1) \text{vol}(B)$$
$$\implies n\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \text{vol } B \leq 2(d-1) \text{vol}(B).$$

Concluimos que $n \leq 4(d-1)$ depois de fazer $\epsilon \rightarrow 0$. ■

Reunindo o Corolário 1.2.12 ao Teorema 1.2.14, vemos que apenas um número finito ($\leq 6(d-1)$) de órbitas periódicas de $f \in \text{End}_d(\overline{\mathbb{C}})$ não são repulsoras ([5]).

1.2.15. Definição - O conjunto de Julia $J(f)$ associado a $f \in \text{End}_d(\overline{\mathbb{C}})$ é o fecho de seu conjunto de órbitas periódicas repulsoras.

De certo modo, toda a complicação dinâmica de $f \in \text{End}_d(\overline{\mathbb{C}})$ se concentra em $J(f)$. No parágrafo seguinte analisaremos suas propriedades principais.

§3. O Conjunto de Julia

Freqüentemente teremos ocasião de utilizar uma definição alternativa para o conjunto de Julia, dada a seguir na forma de teorema.

1.3.1. Teorema - Dado $f \in \text{End}_q(\bar{\mathbb{C}})$, tem-se que $J(f) = \{z \in \bar{\mathbb{C}}; \text{ a família } \{f^n\}_{n \geq 0} \text{ não é normal em nenhuma vizinhança de } z \in \bar{\mathbb{C}}\}$ ([6]).

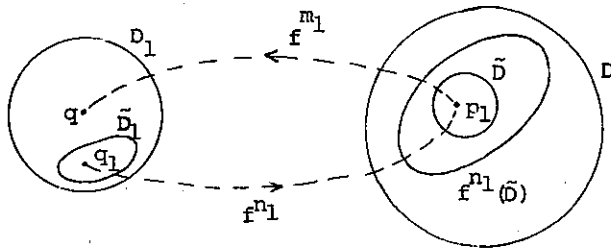
Demonstração - Se V é uma vizinhança qualquer de $z \in J(f)$, existe em V um ponto $p \in \mathbb{C}$ periódico, de período $l \in \mathbb{N}$, e com $\Theta^+(p)$ repulsora. Ora, $\lim_{n \rightarrow \infty} |(f^{n \cdot l})'(p)| = \infty$, de modo que $\{f^n\}$ não é normal em V . Reciprocamente, seja $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ disco on de $\{f^n\}$ não é normal; devemos provar que passa em D uma órbita periódica de f . Seja $q \in \bar{\mathbb{C}}$ ponto periódico repulsor de f cuja órbita negativa não contenha pontos críticos. Como $\bigcup_{n \geq 0} f^n(D)$ evita no máximo 2 pontos de $\bar{\mathbb{C}}$, vemos que existem $p_1 \in D$ e $m_1 \in \mathbb{N}$ tais que $f^{m_1}(p_1) = q$. Para simplificar, imaginemos $f(q_1) = q_1$. Se D_1 é um disco contendo $q \in \bar{\mathbb{C}}$, novamente $\{f^n\}$ não é normal em D_1 ; assim, podemos supor que $f^{n_1}(q_1) = p_1$ para $q_1 \in D_1$, $n_1 \in \mathbb{N}$. Será conveniente escolher D_1 de modo que f seja aí linearizável. Consideremos discos $q_1 \in \tilde{D}_1 \subset D_1$ e $p_1 \in \tilde{D} \subset D$ tais que:

(i) $f^{n_1}|_{\tilde{D}_1}$ seja injetivo (observe-se que $q_1 \in \Theta^-(q)$)

(ii) $f^{m_1}|_{\tilde{D}}$ seja injetivo, e existe $\ell_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{m_1 + \ell_1}(\tilde{D}) = D_1$$

(iii) $\tilde{D} \subset f^{n_1}(\tilde{D}_1)$



Segue-se que $f^{m_1 + \ell_1 + n_1}$ é injetivo e $f^{m_1 + \ell_1 + n_1}(\tilde{D}) \supset \tilde{D}$, de modo que existe em \tilde{D} um ponto fixo de $f^{m_1 + \ell_1 + n_1}$. ■

1.3.2. Corolário - Se V é vizinhança de $q \in J(f)$, então

$\bigcup_{n \geq 0} f^n(V)$ cobre \bar{V} à exceção possivelmente de dois pontos. Os pontos omitidos, se existem, independem do par (q, V) , e estão fora de $J(f)$.

Demonstração - Basta demonstrar a última afirmativa.

1º Caso. Apenas um ponto é evitado. Podemos supor, via uma mudança de coordenadas linear de \bar{V} , que o ponto em questão é ∞ . Se $q \in f^{-1}(\infty)$ mas $q \neq \infty$, existe $p \in V$ tal que $f^\ell(p) = q$ para $\ell \in \mathbb{N}$, e daí $f^{\ell+1}(p) = \infty$, absurdo. Segue-se que

$f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, e portanto f é polinomial.

2º Caso. Exatamente dois pontos são evitados; podemos supô-los $0 \in \mathbb{C}$ e $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$. Como $f^{-1}(0)$ e $f^{-1}(\infty)$ são omitidos, temos duas possibilidades: a) $f^{-1}(0) = 0$ e $f^{-1}(\infty) = \infty$, e então $f(z) = z^d$, ou b) $f^{-1}(0) = \infty$ e $f^{-1}(\infty) = 0$, quando $f(z) = z^{-d}$.

A afirmativa acima decorre facilmente. ■

1.3.3. Proposição - Valem as propriedades seguintes.

- (i) $J(f)$ é completamente invariante, isto é, $f^{-1}(J(f)) = J(f) = f(J(f))$. Segue-se que $J(f^n) = J(f) \quad \forall n \geq 0$.
- (ii) $J(f)$ é um conjunto perfeito.
- (iii) Se $\text{int } J(f) \neq \emptyset$ então $J(f) = \bar{\mathbb{C}}$.
- (iv) As órbitas periódicas racionalmente indiferentes estão em $J(f)$; dentre aquelas irracionalmente indiferentes, pertencem a $J(f)$ as que não são (localmente) linearizáveis.

Demonstração.

- (i) A família $\{f^n\}$ é normal no aberto V se e somente se $\{f^n\}$ o for também em $f(V)$. Concluimos que

$$f^{-1}(\bigcap J(f)) = \bigcap J(f) = f(\bigcap J(f)),$$

e pelo Teorema 1.3.1, vemos que $f^{-1}(J(f)) = J(f) = f(J(f))$.

(ii) $J(f)$ sendo fechado, devemos provar que não existem nele pontos isolados. Seja $p \in J(f)$; escolhamos $q \in J(f)$ fora de $\mathcal{O}^+(p)$. Pelo Corolário 1.3.2, existem pontos da órbita negativa de $q \in \mathbb{C}$ arbitrariamente próximos de $p \in \bar{\mathbb{C}}$ e distintos deste, por construção. Pela parte (i), estes pontos ainda estão em $J(f)$.

(iii) Se $V \subset J(f)$ é aberto, então $\bigcup_{n \geq 0} f^n(V) \subset J(f)$ omni-
te no máximo 2 pontos. Sendo $J(f)$ fechado, temos que $J(f) = \bar{\mathbb{C}}$

(iv) Seja $\mathcal{O}^+(p)$ uma órbita periódica racionalmente indiferente de período $l \in \mathbb{N}$, com $(f^{lm})'(p) = 1$. Então:

$$f^{lm}(z) = p + (z-p) + b(z-p)^{km+1} + \dots,$$

onde $b \neq 0$. Logo:

$$f^{lmn}(z) = p + (z-p) + nb(z-p)^{km+1} + \dots,$$

de modo que $\{f^{lmn}\}_{n \geq 0}$ não é normal. Daí $\mathcal{O}^+(p) \subset J(f)$.

Consideremos agora o caso em que $\mathcal{O}^+(p)$ é racionalmente indiferente. Para simplificar, suponhamos $\infty \in J(f)$, $p = 0$ e $f(0) = 0$. Provemos que, se $0 \notin J(f)$, então f é linearizável em $0 \in \mathbb{C}$. Seja $\bar{D} \ni 0$ um disco fechado em $\mathbb{C} \setminus J(f)$; então, a família $\{f^n|_{\bar{D}}\}_{n \geq 0}$ é normal e constituída por funções analíticas (não meromorfas); como $f^n(0) = 0 \quad \forall n$, vemos que a mencionada família é limitada. Definamos agora a seqüência de funções analíticas em \bar{D}

$$h_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^i(z)}{a^i}, \quad \text{onde } a = f'(0).$$

Trata-se de uma sequência limitada; escolhamos uma subsequência convergente (h_{n_k}) , e $F(z) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} h_{n_k}(z)$, a qual é uma função analítica em \bar{D} . Temos então:

$$\begin{aligned} F(f(z)) &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} h_{n_k}(f(z)) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{f^{i+1}(z)}{a^i} = \\ &= a \cdot \lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{f^{i+1}(z)}{a^{i+1}} = a \cdot \lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \left(\frac{f^{n_k}(z)}{a^{n_k}} - z + \sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{f^i(z)}{a^i} \right) \end{aligned}$$

= a F(z), de modo que $f(z)$ é linearizável em $0 \in \mathbb{C}$. ■

Desejamos mostrar agora que $J(f)$ é dinamicamente indivisível. Precisamos inicialmente do fato seguinte.

1.3.4. Proposição - Seja V um aberto de $J(f)$. Então, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(V) = J(f)$.

Demonstração - Observemos que se $V = \tilde{V} \cap J(f)$, onde $\tilde{V} \subset \bar{\mathcal{T}}$ é aberto, então $\bigcup_{n \geq 0} f^n(\tilde{V})$ cobre $\bar{\mathcal{T}}$ exceto, talvez, 2 pontos fora de $J(f)$. Como $J(f)$ e $\mathcal{J}(J(f))$ são f -invariantes, temos que $\bigcup_{n \geq 0} f^n(V)$ cobre $J(f)$. O restante da Proposição decorre da compactidade de $J(f)$. ■

1.3.5. Teorema - $J(f)$ é topologicamente transitivo, isto é, $\exists q \in J(f)$ tal $\mathcal{O}^+(q) = J(f)$.

Demonstração - Seja $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ base enumerável de abertos de $J(f)$. Definamos $A_i = \{z \in J(f); \mathcal{O}^+(z) \cap V_i = \emptyset\}$. Então A_i é fechado, e pela Proposição 1.3.4, $\text{int } A_i = \emptyset$. Segue-se que $\bigcup_{i \geq 0} A_i$ possui interior vazio; qualquer $q \notin \bigcup_{i \geq 0} A_i$ satisfaz $\mathcal{O}^+(q) \cap V_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \mathbb{N}$, ou seja, $\mathcal{O}^+(q)$ é densa. ■

Este teorema traduz a idéia de indivisibilidade dinâmica. O leitor observe que segue-se do Corolário 1.3.2 e Proposição 1.3.3 a densidade em $J(f)$ da órbita negativa de quaisquer de seus pontos.

§4. O Complementar do Conjunto de Julia

Vimos anteriormente que $\complement J(f)$, para $f \in \text{End}_d(\overline{\mathbb{C}})$, é completamente invariante, isto é:

$$f^{-1}(\complement J(f)) = \complement J(f) = f(\complement J(f)).$$

Estudaremos agora a dinâmica de $f \in \text{End}_d(\overline{\mathbb{C}})$ neste conjunto. Ela depende da riqueza de possibilidades para as funções limites de $\{f^n\}_{n \geq 0}$ nas componentes conexas de $\complement J(f)$ (as quais são os domínios de normalidade daquela família).

Seja $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ uma componente conexa de $J(f)$. Então, $\partial A \subset J(f)$, e $f(A)$ também é componente conexa de $J(f)$.

Já encontramos anteriormente conjuntos deste tipo, como as componentes conexas de bacias de órbitas periódicas atratoras ou fortemente atratoras, e as pétalas associadas às órbitas periódicas racionalmente indiferentes. As funções limites de $\{f^n\}$ associadas a estas componentes são constantes e em número finito: os pontos da órbita periódica associada. As duas situações se distinguem por serem as funções limites pontos de $[J(f)$, no primeiro caso, e pontos de $J(f)$, no segundo.

1.4.1. Teorema - Sejam A componente de $[J(f)$, e $g(z) = p \notin J(f)$ uma função limite de $\{f^n\}_{n \geq 0}$ em A . Então, existem $\ell, i_0 \in \mathbb{N}$ tais que $f^\ell(f^{i_0}(A)) = f^{i_0}(A)$. Além disso, $\mathcal{O}^+(p)$ é órbita periódica atratora ou fortemente atratora de período $\ell \in \mathbb{N}$, e $f^{i_0}(A) \cup \dots \cup f^{i_0 + \ell - 1}(A)$ é sua bacia.

Demonstração - Seja B a componente de $[J(f)$ que contém $p \in \mathbb{C}$. Pela hipótese, $\lim_{n_k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z) = p$, de modo que $f^{n_k}(A) \cap B \neq \emptyset$ (logo $f^{n_k}(A) = B$) para n_k suficientemente grande. Podemos então definir $i_0 = \min\{n \in \mathbb{N}; f^n(A) = B\}$ e $i_0 + \ell$ como o seguinte inteiro neste conjunto. Portanto, $f^\ell(f^{i_0}(A)) = f^{i_0}(A)$. Para simplificar o restante da prova, suponhamos $f(B) = B$. Consideremos um disco \bar{D}_r compacto de raio $r > 0$ centrado em $p \in \mathbb{C}$, $\bar{D}_r \subset B$. Ainda pela hipótese, existe $\bar{m} \in \mathbb{N}$ tal que $f^{\bar{m}}(\bar{D}_r) \subset \bar{D}_{r/2}$, de modo que $f^{\bar{m}}$ possui um ponto fixo $\bar{p} \in \bar{D}_{r/2}$. Agora:

$$(f^{\bar{m}})'(\bar{p}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{f^{\bar{m}}(\xi)}{(\xi - p)^2} d\xi,$$

donde

$$|(f^m)'(\bar{p})| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{r/2}{r^2} 2\pi r = \frac{1}{2},$$

ou seja, $\mathcal{O}^+(\bar{p})$ é órbita periódica atratora ou fortemente atratora. É trivial verificar que $f(\bar{p}) = \bar{p}$ e $\bar{p} = p$. ■

O caso mais complicado aparece quando todas as funções limites são constantes pertencentes a $J(f)$. Vamos adiar um pouco seu estudo, e analisar os casos restantes.

1.4.2. Teorema - Se $\{f^n\}_{n \geq 0}$ possui em A uma função limite não constante, existem então $\epsilon, i_0 \in \mathbb{N}$ tais que $f^\epsilon(f^{i_0}(A)) = f^{i_0}(A)$. Além disso, a identidade é função limite de $\{f^{n \cdot \epsilon}\}_{n \geq 0}$ em $f^{i_0}(A)$.

Demonstração - Observemos inicialmente que se $g(z) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z)$ em A e $g(z_0) \in J(f)$, então $g(A)$ contém um pequeno disco centrado em $g(z_0)$ (por ser g aberta) e, portanto, o mesmo ocorre para $f^{n_k}(A)$, $n_k \geq N$; mas $f^{n_k}(A) \subset J(f)$. Daí, $g(A) \subset J(f)$, de modo que existe uma componente B de $J(f)$ tal que $g(A) \subset B$. Definimos então $i_0 = \min\{n \in \mathbb{N}; f^n(A) = B\}$ e $i_0 + \epsilon$ como o inteiro seguinte. Seja $h(z)$ função limite para $f^{n_{k+1} - n_k}$ em $f^{i_0}(A)$, $n_k \geq N$; como $f^{n_{k+1} - n_k} \circ f^{n_k} = f^{n_{k+1}}$, passando ao limite obtemos $h \circ g = g$, o que mostra ser $h(z) = z \forall z \in f^{i_0}(A)$.

1.4.3. Corolário - $f^{\iota}: f^{i_0}(A) \rightarrow f^{i_0}(A)$ é um difeomorfismo.

É fácil ver que se B é componente de $[J(f)]$ e $f^{\iota}: B \rightarrow B$ é difeomorfismo para algum $\iota \in \mathbb{N}$, então a identidade é uma função limite de $\{f^{n \cdot \iota}\}_{n \geq 0}$.

1.4.4. Definição - Se $f^{\iota}: B \rightarrow B$ é difeomorfismo para algum $\iota \in \mathbb{N}$ e B componente de $[J(f)]$, dizemos que B é domínio singular.

Podemos classificar completamente o tipo topológico e a dinâmica dos domínios singulares. Para $1 < r \leq \infty$, denotemos $A_r = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < r\}$ se $r < \infty$ e $A_{\infty} = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z|\}$.

1.4.5. Teorema ([7]) - Seja A um domínio singular ($f^{\iota}(A) = A$). Existem então $1 < r \leq \infty$, $a \in S^1$ e um difeomorfismo $\phi: A \rightarrow A_r$ tais que

$$\phi(f(z)) = a \cdot \phi(z), \quad z \in A.$$

Em outras palavras, $f|_A$ é analiticamente equivalente a uma rotação (a qual é necessariamente irracional)

Demonstração (esboço) - Para simplificar suponhamos $\iota = 1$. A é uma superfície de Riemann aberta; claramente A não pode ser equivalente nem a \mathbb{C} nem a \mathbb{C}^* , de modo que o recobrimento universal analítico de A é o disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. A este recobrimento $\pi: \mathbb{D} \rightarrow A$ está associado o grupo de transformações $\Gamma = \{\psi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}; \psi \text{ é difeomorfismo analítico do disco e } \pi(\psi(z)) = \psi(z), z \in \mathbb{D}\}$. Este grupo é discreto e atua sem pontos fixos em \mathbb{D} . Seus elementos são da forma

$$T(z) = \frac{az + b}{bz - \bar{a}} \quad , \quad |a|^2 - |b|^2 = 1 \quad ,$$

e se classificam como parabólicos ou hiperbólicos, dependendo de possuírem um ou dois pontos fixos em $\partial\mathbb{D}$ (se $T: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ é hiperbólico e $p, q \in \partial\mathbb{D}$ são seus pontos fixos, então $p = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(z)$ $\forall z \in \mathbb{D} \setminus \{q\}$ e $q = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{-n}(z)$ $\forall z \in \mathbb{D} \setminus \{p\}$; se $T: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ é parabólico e $p \in \partial\mathbb{D}$ é seu ponto fixo, temos que $p = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} T^n(z)$).

Precisamos da seguinte propriedade: dois difeomorfismos lineares de $\bar{\mathbb{C}}$ comutam se e somente se possuem os mesmos conjuntos de pontos fixos.

Os difeomorfismos $f^n: A \rightarrow A$ levantam-se a difeomorfismos lineares $F_n: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ e estes, por sua vez, induzem $(F_n)_\# : \Gamma \rightarrow \Gamma$ como

$$(F_n)_\# (T) = F_n \circ T \circ F_{-n} \quad .$$

A escolha dos levantamentos deve ser feita de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n_k}(z_0) = z_0 \quad \text{para algum } z_0 \in \mathbb{D}; \text{ daí então vemos que}$$

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} F_{n_k}(z) = z, \quad z \in \mathbb{D}, \quad \text{sendo } \lim_{n_k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z) = z. \text{ Como } \Gamma \text{ é}$$

discreto, dado qualquer $T \in \Gamma$ existe $n(T)$ tal que

$$F_{n_k} \circ T \circ F_{-n_k} = T \quad \text{para } n_k \geq n(T). \text{ Consideremos um par } T_1 T_2 \in \Gamma;$$

para $\bar{n}_k \geq \max\{n(T_1), n(T_2)\}$, vemos que

$$F^{\bar{n}_k} \circ T_1 = T_1 \circ F^{\bar{n}_k}$$

$$F^{\bar{n}_k} \circ T_2 = T_2 \circ F^{\bar{n}_k}$$

Segue-se que T_1 e T_2 possuem os mesmos conjuntos de pontos fixos, logo $T_1 T_2 = T_2 T_1$. Vemos assim que Γ é abeliano, de modo que A é Φ -analiticamente equivalente a algum A_r (observe-se que $A_\infty \setminus \{\infty\}$ está excluído por não existirem pontos isolados de $J(f)$). Um cálculo simples envolvendo a fórmula explícita do recobrimento π permite concluir que $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}: A_r \rightarrow A_r$ é uma rotação irracional. ■

1.4.6. Definição - Os domínios singulares analiticamente equivalentes ao disco \mathbb{D} são denominados domínios de Siegel; aqueles analiticamente equivalentes a algum anel são os domínios de Herman.

Pelo que vimos até agora, se $\{f^n\}_{n \geq 0}$, para uma componente A de $J(f)$, possui alguma função limite não-constante ou alguma função limite que é uma constante não pertencente a $J(f)$, então necessariamente existem $t, i_0 \in \mathbb{N}$ tais que $f^t(f^{i_0}(A)) = f^{i_0}(A)$.

1.4.7. Definição - Se B é componente de $J(f)$ tal que $f^t(B)$ para algum $t \in \mathbb{N}$, diremos que B é cíclica.

O teorema seguinte também é fundamental no estudo da dinâmica dos endomorfismos de \mathbb{C} ; discutiremos sua demonstração no

capítulo seguinte.

1.4.8. Teorema das Componentes ([8]) - Toda componente do complementar do conjunto de Julia torna-se cíclica após um certo número de iterados.

A dificuldade da demonstração está na existência de componentes cujas funções limites de $\{f^n\}_{n \geq 0}$ são todas constantes de $J(f)$.

Admitido o Teorema 1.4.8, o tipo acima de componente já é nosso conhecido.

1.4.9. Teorema - Toda componente cujas funções limites associadas são constantes do conjunto de Julia são pétalas de órbitas racionalmente indiferentes.

Demonstração - Para simplificar a exposição suponhamos a componente invariante, isto é, $f(A) = A$. Seja $p \in J(f)$, $p = \lim_{n_k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z)$,

$z \in A$. Temos que $f(p) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} f^{n_k+1}(z) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} f^{n_k}(f(z)) = p$,

pois $f(z) \in A$. Segue-se que $p \in \bar{\mathbb{C}}$ é ponto fixo de f .

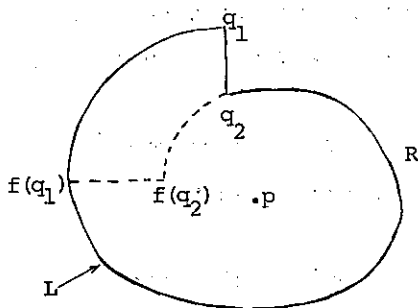
Afirmamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = p$, $\forall z \in A$. De fato, quaisquer pontos limites de $\{f^n\}_{n \geq 0}$ em A são pontos fixos de $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\bar{\mathbb{C}})$, logo existem apenas em número finito, digamos p_1, \dots, p_m . Caso $m > 1$, escolhemos vizinhanças disjuntas V_1, \dots, V_m destes pontos de modo que $f(V_i) \cap \bigcup_{j \neq i} V_j = \emptyset$, $1 \leq i \leq m$. Cada vez que

$\mathcal{C}^+(z)$, $z \in A$, penetra em algum V_j , ao deixá-lo passa por $\overline{\mathcal{C}} \setminus \bigcup_{j=1}^m V_j$; segue-se que $\mathcal{C}^+(z)$ teria uma infinidade de elementos em $\overline{\mathcal{C}} \setminus \bigcup_{j=1}^m V_j$, contradição. Uma idéia semelhante prova que $|f'(p)| = 1$: se $|f'(p)| > 1$, escolhemos um disco D centrado em $p \in J(f)$ onde f é linearizável; assim, $\mathcal{C}^+(z)$, $z \in A$ deve necessariamente passar em $D \setminus f^{-1}(D)$ uma infinidade de vezes, absurdo.

Provemos então que $p \in \mathcal{C}$ não pode ser irracionalmente indiferente (daí se segue $f'(p) = 1$). Admitamos, por absurdo, que $\frac{1}{2\pi} \text{Arg } f'(p) \notin \mathbb{Q}$. Seja $D \ni p$ um disco onde f é difeomorfismo local; se $z \in A \cap D$, podemos supor $z_n = f^n(z) \in A \cap D \quad \forall n \geq 0$. Liguemos z_1 a z_2 por um arco de Jordan L_1 , e definamos $L_n = f^n(L_1)$. Temos que $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ é ainda um arco de Jordan, $f(L) \subset L$, e L tende a $p \in \overline{\mathcal{C}}$ espiralando em torno deste ponto. De fato, como $\frac{z_n - p}{f'(p)^n} \rightarrow 0$, a seqüência $\frac{1}{2\pi} \text{Arg } \frac{z_n - p}{f'(p)^n}$ possui algum ponto de acumulação $\theta_0 \in [0, 1]$. Então,

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \text{Arg } \frac{z_{n_k} - p}{f'(p)^{n_k}} = \theta_0, \quad \text{ou} \quad \lim_{n_k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \text{Arg}(z_{n_k} - p) - \frac{1}{2\pi} n_k \text{Arg } f'(p) \right] = \theta_0.$$
 Basta agora observar que a seqüência $e^{i(n_k \text{Arg } f'(p))}$ preenche S^1 densamente.

Sejam agora $q_1, q_2 \in L$ como na figura abaixo, e R a região em torno de $p \in \overline{\mathcal{C}}$ limitada pelo segmento $[q_1, q_2]$ e a parte de L entre q_1 e q_2 .



Como $f(z)$ é um difeomorfismo local em D , a imagem de $[q_1, q_2]$ por f não corta L entre os pontos q_1 e q_2 ; além disso, sendo $f(z)$ próximo a $z \rightarrow f'(p)(z-p)$, também $f([q_1, q_2]) \cap [q_1, q_2] = \emptyset$. Concluímos que $f(R) \subset R$; mas então $f^n(R) \subset R$ para $n \geq 0$, o que contradiz o Corolário 1.3.2. ■

Temos, a esta altura, o seguinte quadro para a dinâmica de $f \in \text{End}_d(\mathbb{C})$ em $[J(f)$:

- 1 - Toda componente de $[J(f)$ torna-se cíclica depois de suficientemente iterada.
- 2 - A órbita de uma componente cíclica pode ser:
 - (i) a bacia de uma órbita periódica fortemente atratora.
 - (ii) a bacia de uma órbita periódica atratora.
 - (iii) a órbita de uma pétala associada a alguma órbita periódica racionalmente indiferente.
 - (iv) a órbita de um disco de Siegel.
 - (v) a órbita de um anel de Herman.

Antes de terminar este parágrafo, vamos incluir dois resultados ligados aos Teoremas 1.2.6, 1.2.11 e Corolário 1.3.2.

1.4.10. Teorema ([9]) - O bordo de um domínio singular está contido no fecho das órbitas positivas dos pontos críticos.

Demonstração - Sejam A domínio singular de $f \in \text{End}_d(\mathbb{C})$ e $z_0 \in \partial A$; dado $n \in \mathbb{N}$, existe $z_{-n} \in f^{-n}(z_0) \cap \partial A$.

Suponhamos que não existam iterados positivos de pontos críticos em um disco $D \ni z_0$; podemos então definir ramos sucessivos

$g_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ para f^{-n} com a condição $g_n(z_0) = z_{-n}$. A sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é claramente normal; seja $h(z) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} g_{n_k}$. Dois

casos podem ocorrer: (i) h é não constante: se $\bar{D} \subset \text{Im}(h)$ é algum disco contendo $h(z_0)$, a família $f^{n_k}|_{\bar{D}}$ é normal por ser $f^{n_k}(\bar{D}) \subset D \quad \forall n_k$, absurdo. (ii) $h(z) = h(z_0) \quad \forall z \in D$.

Isso contradiz o fato de ser cada f^{-n_k} em A conjugado a uma rotação irracional.

Portanto, podemos concluir que qualquer disco centrado em algum ponto de ∂A é visitado pelas órbitas positivas dos pontos críticos de $f \in \text{End}_d(\mathbb{C})$. ■

1.4.11. Teorema - Se $p \in \mathbb{C}$ não é valor excepcional de $f \in \text{End}_d(\mathbb{C})$ e não pertence a nenhum domínio singular, então todos os pontos de acumulação de $f^{-n}(p)$ pertencem a $J(f)$.

Demonstração - Se $p \in J(f)$ o teorema é óbvio. Sem perda de ge-

neralidade, podemos admitir que $p \in \bigcup J(f)$ não seja ponto periódico. Seja $q = \lim_{n_k \rightarrow \infty} p_{n_k}$, onde os pontos de (p_{n_k}) são distintos e $f^{n_k}(p_{n_k}) = p$. Se $q \notin J(f)$, escolhamos um disco $D \ni q$ em $\bigcup J(f)$, e suponhamos $\lim_{n_k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z) = g(z)$ em D . Ora, $g(q) = p$, e $f^{n_k}(B) = A \quad \forall n_k \geq N$, onde B é a componente de $\bigcup J(f)$ que contém $q \in \bar{D}$ e A é aquela contendo $p \in \bar{D}$. Como A não é domínio singular, concluímos que $g(z) = p, \quad \forall z \in A$. Pelo Teorema 1.4.1, $\mathcal{O}^+(p)$ é órbita periódica, contradição. ■

1.4.12. Corolário - (i) Se $p \in J(f)$, então $\overline{\mathcal{O}^-(p)} = J(f)$
 (ii) Se $p \notin J(f)$ não está em nenhum domínio singular nem é valor excepcional de f , então $\overline{\mathcal{O}^-(p)} \setminus \mathcal{O}^-(p) = J(f)$.

§.5. Exemplos.

Nesta seção exibiremos exemplos onde aparecem os tipos de componentes cíclicas descritos acima, e também exemplos onde o conjunto de Julia assume as mais variadas formas.

1.5.1. Exemplo $f(z) = z^d, \quad d \geq 2$.

Temos que $0 \in \mathbb{C}$ e $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$ são pontos fixos fortemente atratores. Como $f^n(z) = z^{d^n}$, vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \infty$ para $|z| > 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = 0$ para $|z| < 1$; segue-se que $|z| < 1$ é a bacia de $0 \in \mathbb{C}$ e $|z| > 1$ é a bacia de $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$. Por isto mesmo, nenhuma subsequência de $\{f^n\}$ pode convergir em

algum disco centrado em um ponto de S^1 , de modo que $J(f) = S^1$. Temos $|f'(z)| = d \quad \forall z \in S^1$; em particular, as órbitas periódicas em $J(f)$ são todas repulsoras. Existem $d-1$ pontos críticos concentrados em $0 \in \mathbb{C}$ e outros $d-1$ concentrados em ∞ .

Fixemos dois discos $D_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \frac{1}{2}\}$ e $D_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| \geq 2\}$, e consideremos $f_\epsilon(z) = z^d + \epsilon$, $d \geq 2$. Para ϵ suficientemente pequeno existe um ponto fixo atrator z_ϵ próximo de $0 \in \mathbb{C}$; além disso, $\overline{f_\epsilon(D_1)} \subset \text{int } D_1$ e $\overline{f_\epsilon(D_2)} \subset \text{int } D_2$. Logo, D_1 e D_2 estão contidos, respectivamente, nas bacias de z_ϵ e ∞ . Como $f_\epsilon^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ e $f_\epsilon^{-1}(z_\epsilon)$ não possui pontos em $D_2 \setminus D_1$ (diminuindo $\epsilon > 0$ se necessário), vemos que aquelas bacias são completamente invariantes.

Os pontos críticos de f_ϵ são $0 \in B(z_\epsilon)$ e $\infty \in B(\infty)$, de modo que $\bar{C} = B(z_\epsilon) \cup J(f_\epsilon) \cup B(\infty)$.

É fácil ver que $D_1 \subset f_\epsilon^{-1}(D_1) \subset \dots \subset f_\epsilon^{-n}(D_1) \dots$ e $D_2 \subset f_\epsilon^{-1}(D_2) \subset \dots \subset f_\epsilon^{-n}(D_2) \dots$, e que todos estes conjuntos são ainda discos fechados. Segue-se que $B(z_\epsilon) = \bigcup_{n \geq 0} f_\epsilon^{-n}(D_1)$ e $B(\infty) = \bigcup_{n \geq 0} f_\epsilon^{-n}(D_2)$ são simplesmente conexos, portanto analiticamente equivalente ao disco \mathbb{D} .

Quanto a $J(f_\epsilon)$, trata-se de uma curva de Jordan; pode-se vê-lo como o faremos no último capítulo, por comparação com $f(z) = z^2$ (mostraremos mesmo que a dinâmica de $f_\epsilon(z)$ em $J(f_\epsilon)$ se parece com a de $f(z)$ em S^1), ou então pelo fato geral seguinte (o qual discutiremos no exemplo 4.1.6): se $f \in \text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$

possui dois pontos fixos, atratores ou fortemente atratores, $p_1, p_2 \in \bar{\mathbb{C}}$, e se $B(p_1), B(p_2)$ são completamente invariantes, então $\bar{\mathbb{C}} = B(p_1) \cup J(f) \cup B(p_2)$ e $J(f)$ é uma curva de Jordan.

1.5.2. Exemplo - Consideremos um endomorfismo $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\bar{\mathbb{C}})$ com a seguinte propriedade: todos seus pontos críticos pertencem à bacia de um ponto fixo atrator (ou fortemente atrator) $p \in \bar{\mathbb{C}}$.

Exemplos onde esta situação ocorre são:

a) $f_0(z) = z^2 + c$, $c > \frac{1}{4}$ ($c \in \mathbb{R}$). De fato, os pontos fixos finitos de $f_0(z)$ são $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4c})$, não reais, portanto.

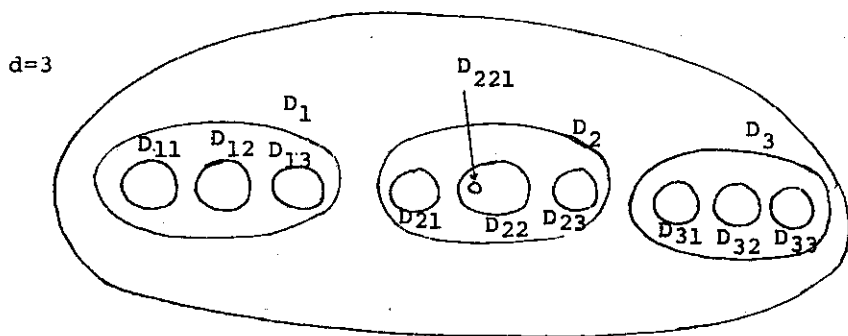
Por outro lado, $f_0^n(x) > x$ se $x \geq 0$; se $p = \lim_{n \rightarrow \infty} f_0^n(\bar{x})$ para $\bar{x} \geq 0$, então $f_0(p) = p$, ou seja $p = \infty$. Concluimos que $[0, \infty) \subset B(\infty)$; como os pontos críticos de f_0 são $0 \in \bar{\mathbb{C}}$ e $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$, temos $\{0, \infty\} \subset B(\infty)$.

b) $f_1(z) = 2z - \frac{1}{z}$. Os pontos críticos de $f_1(z)$ são $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$.

Fazendo $z = iy$, obtemos $f_1(iy) = i(2y + \frac{1}{y})$; como $2y + \frac{1}{y} > y$ se $y > 0$, $2y + \frac{1}{y} < y$ se $y < 0$ e $f_1(0) = \infty$, vemos que $i\mathbb{R} \subset B(\infty)$.

Queremos mostrar que, para os endomorfismos em questão, $\bar{\mathbb{C}} = B(p) \cup J(f)$, e $J(f)$ é um conjunto de Cantor. Como $B(p)$ é recoberto analiticamente pelo disco unitário em \mathbb{C} , introduzamos nele a métrica de Poincaré d_p . Consideremos um disco qualquer $D_r(p) = \{z \in B(p); d_p(z, p) < r\}$, $r > 0$. Sendo $p \in \bar{\mathbb{C}}$ ponto fixo atrator ou fortemente atrator, temos que $d_p(f(z), p) < \lambda d(z, p)$ para $z \in D_r(p)$ e algum $\lambda < 1$, ou seja,

$f(D_r(p)) \subset D_r(p)$. Escolhamos $r > 0$ de modo que $D_r(p)$ contenha todos os valores críticos de f ; escrevamos $D_0 = \overline{D_r(p)}$. Temos $f^{-1}(D_0) \subset \text{int } D_0$. Ora, em D_0 não existem valores críticos de f , de modo que $f^{-1}(D_0) = D_1 \cup \dots \cup D_d$, discos fechados em $\text{int } D$. Do mesmo modo, $f^{-1}(D_i) = D_{i1} \cup \dots \cup D_{id}$, onde $D_{ij} \subset D_i$ e $f(D_{ij}) = D_j$. Prosseguindo a construção, na n -ésima



etapa obtemos d^n discos, digamos $D_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, com $D_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \subset D_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}$, $f(D_{\alpha_1 \dots \alpha_n}) \subset D_{\alpha_2 \dots \alpha_n}$, \dots , $f^{n-1}(D_{\alpha_1 \dots \alpha_n}) \subset D_{\alpha_n}$.

Observemos que o complementar dos d^n discos obtidos na n -ésima etapa está em $B(p)$, de modo que

$$J(f) \subset K = \bigcap_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{\alpha_1 \dots \alpha_n} D_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$$

Além disso, dado $q \in K$, $f^n(q) \in D \forall n \in \mathbb{N}$; daí $\{f^n\}_{n \geq 0}$ não pode ser normal em nenhuma vizinhança de $q \in \mathbb{C}$, pois esta é interceptada por $B(p)$. Segue-se que $J(f) = K$, e $\overline{E} = B(p) \cup J(f)$.

Finalmente devemos provar que qualquer sequência encai-

xante de discos como $D_{a_1 \dots a_n}$ converge a exatamente um ponto.

De fato, estes discos são imagens de ramos de inversas sucessivas

de f em D : $f^{-n_1}, f^{-n_2}, \dots$. Esta família é normal; se $h(z) =$

$= \lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{-n_i}(z)$, $z \in D$, ou $h(z)$ é não constante (absurdo, pois

se $R \subset \text{Im}(h)$ é aberto, teríamos $f^{n_i}(R) \subset D$ para $n_i \rightarrow \infty$) ou

$h(z)$ é constante, o que encerra a demonstração.

1.5.3. Exemplo - Vimos que para $f_c(z) = z^2 + c$, $c > 0$, podem o-

correr os casos distintos seguintes: (i) $0 \leq c < \frac{1}{4}$: a órbita do ponto crítico converge ao ponto fixo atrator $z_c = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2}$;

(ii) $c > \frac{1}{4}$: $f_c^n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Quando $c = \frac{1}{4}$, o ponto $z_c = \frac{1}{2}$

se torna racionalmente indiferente: $f'_{1/4}(\frac{1}{2}) = 1$; temos que

$f_{1/4}^n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$, e $0 \in \mathbb{C}$ pertence à (única) pétala fixa P de

$z_c = \frac{1}{2}$. As únicas componentes de $J(f_{1/4})$ são a bacia de ∞

e esta pétala; de fato, se existirem outras componentes, devem

ser pré-imagens destas duas, pois todos os pontos críticos já fo-

ram utilizados. Ora, $f_{1/4}^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, de modo que $B(\infty)$ é com-

pletamente invariante. Provemos que $f_{1/4}^{-1}(P) = P$. Temos que o

segmento $[0, i/2) \subset P$, e $f_{1/4}^{-1}(0) = \pm \frac{1}{2}i$. Consideremos os seg-

mentos $L_1 = \{iy; 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ e $L_2 = \{iy; -\frac{1}{2} \leq y \leq 0\}$. Ora,

$f_{1/4}(L_1)$ e $f_{1/4}(L_2)$ são constituídos por pontos da forma

$-y^2 + \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$, de modo que $f_{1/4}(L_1 \cup L_2) = [0, \frac{1}{2}] \subset P$.

Conclusão: $L_1 \cup L_2 \subset P$, e $f_{1/4}^{-1}(P) = P$. Segue-se que

$\mathbb{C} = B(\infty) \cup J(f_{1/4}) \cup P$. Como no exemplo 1.5.1, $B(\infty)$ é analíti-

camente equivalente a \mathbb{D} ; quanto a P , temos o argumento geral seguinte:

1.5.4. Exemplo - Qualquer componente de $[J(f)$, à exceção de $B(\infty)$, é simplesmente conexa quando f é polinomial.

Sejam $A \neq B(\infty)$ uma componente, e $C \subset A$ uma curva de Jordan C^∞ . A seqüência $f^n|_C$ é limitada, pois $f^n(A) \cap B(\infty) = \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Mas

$$f^n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f^n(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

para $z \in \mathbb{C}$ na região R limitada por C . Consideremos um disco fechado $\bar{D} \subset R$ qualquer; então

$$|f^n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{|f^n(\xi)|}{\delta} \ell(C),$$

onde $\ell(C)$ é o comprimento de C e $|\xi - z| \geq \delta$ para $\xi \in C$, $z \in \bar{D}$, e portanto $\{f^n|_{\bar{D}}\}$ é limitada. Conclusão: $R \subset A$, ou seja, A é simplesmente conexa.

Quanto a $B(\infty)$, já vimos casos onde possui conexão de ordem infinita ou é simplesmente conexa. O leitor pode demonstrar que a bacia de qualquer ponto fixo atrator ou fortemente atrator ou é simplesmente conexa ou possui ordem de conexão infinita.

1.5.5. Exemplo - $f(z) = z^2 - 2$.

Temos que $f(0) = -2$, $f^2(0) = 2$, e $f(2) = 2$, isto é, $0 \in \mathcal{O}^-(2)$, e $2 \in \mathcal{C}$ é um ponto fixo repulsor ($f'(2) = 4$). Es

te é um exemplo onde o conjunto de Julia possui um ponto crítico. Com os mesmos argumentos anteriores, vemos que $\bar{C} = J(f) \cup B(\infty)$. Podemos mesmo afirmar que $J(f) = [-2, 2]$. De fato, é fácil ver que $f([-2, 2]) = [-2, 2]$, de modo que $[-2, 2] \subset J(f)$. Além disso, $f^{-1}(y) \in [-2, 2]$ se $y \in [-2, 2]$; como $J(f) = \overline{C^{-1}(y)}$, concluímos que $J(f) \subset [-2, 2]$.

1.5.6. Exemplo - $f(z) = az + z^2$, $|a| = 1$ mas $a \in \mathbb{C}$ não é raiz da unidade.

Se $a \in \mathbb{C}$ satisfaz a hipótese do Teorema 1.1.3, vemos que f é (localmente) linearizável em $0 \in \mathbb{C}$, de modo que a componente contendo este ponto é um disco de Siegel ([10]).

Quando $a \in \mathbb{C}$ não satisfizer o Teorema 1.1.3 (diremos que $a \in \mathbb{C}$ é Liouville), pode ocorrer de $f(z)$ não ser linearizável, e portanto $0 \in J(f)$. Por exemplo, se $\exists n_i \rightarrow \infty$ tal que

$$|a^{n_i} - 1| \leq \frac{1}{2 + \beta_i n_i}$$

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \frac{\beta_i n_i}{2} = 1$$

afirmamos que $0 \in J(f)$. De fato, $0 \in \mathbb{C}$ é ponto de acumulação de órbitas periódicas de f :

$$f^n(z) = z^{2^n} + \dots + a^n z$$

$$f^n(z) = z \iff z^{2^n} + \dots + a^n = 1.$$

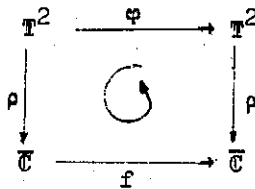
Seja c_n a menor das raízes desta equação

$$|c_n| \leq |a^n - 1|^{1/2^n}.$$

Logo: $|c_{n_i}| \leq |a^{n_i} - 1|^{1/2^{n_i}} \leq \frac{1}{\left(\frac{2+\beta_i}{2^{n_i}}\right)^{n_i}}$; então $\lim_{n_i \rightarrow \infty} c_{n_i} = 0$,

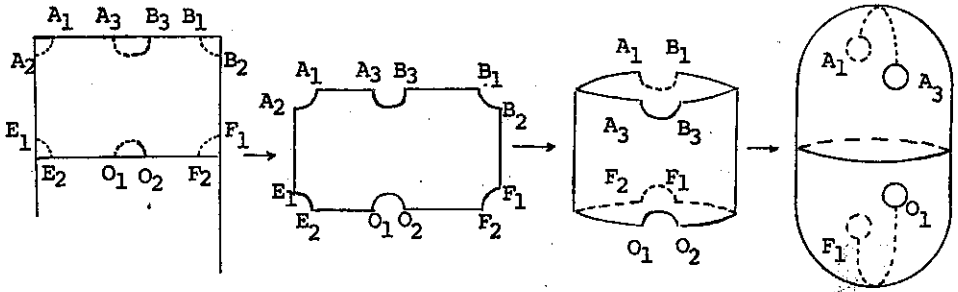
como queríamos.

1.5.7. Exemplo ([11]). - Vejamos agora um exemplo onde $\bar{\mathbb{C}} = J(f)$. Começemos com o endomorfismo analítico $\varphi(z) = 2z \text{ mod } \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ em $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. É fácil ver que as órbitas periódicas de φ são densas em \mathbb{T}^2 . Consideremos agora um recobrimento (ramificado) analítico $\rho: \mathbb{T}^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ que permite "abaixar" φ a um endomorfismo f de $\bar{\mathbb{C}}$



Segue-se que as órbitas periódicas de f são densas em $\bar{\mathbb{C}}$, de modo que $J(f) = \bar{\mathbb{C}}$.

O recobrimento ρ pode ser construído do seguinte modo: seja \sim a relação de equivalência $z_1 \sim z_2 \iff z_2 = -z_1$ em \mathbb{T}^2 , e $S = \mathbb{T}^2/\sim$,



Colocamos em S a estrutura analítica que torna $\rho: \mathbb{T}^2 \rightarrow S$ analítica; topologicamente S é a esfera, de modo que $S = \bar{\mathbb{C}}$. A aplicação ρ é 2-1, com 4 pontos de ramificação, onde o índice de ramificação é 2. O leitor pode verificar que $f \in \text{End}_4(\bar{\mathbb{C}})$.

1.5.8. Exemplo - $f(z) = \left(\frac{z-2}{z}\right)^2$

Este é outro exemplo onde $J(f) = \bar{\mathbb{C}}$. Os pontos críticos de f são $0 \in \mathbb{C}$ e $2 \in \mathbb{C}$. A órbita positiva destes pontos é $2 \rightarrow 0 \rightarrow \infty \rightarrow 1 \rightarrow 1$. Ora, $f'(1) = -4$, ou seja, 1 é ponto fixo repulsor. Concluimos que não existem pontos críticos a serem utilizados em componentes, de modo que $J(f) = \bar{\mathbb{C}}$

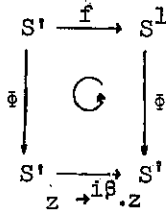
1.5.9. Exemplo ([12] - Examinemos agora o aparecimento dos anéis de Herman. Seja $f_1(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{z-\epsilon}{1-\bar{\epsilon}z}\right)^2$; vê-se que S^1 é preservado. Se ϵ for suficientemente pequeno, a restrição de f_1 a S^1 está próxima da identidade, de modo que ela é um difeomorfi-

mo analítico.

Pode-se escolher agora $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{1}{z} \left(\frac{z-\epsilon}{1-\bar{\epsilon}z} \right)^2 \quad \text{seja analiticamente equivalente a } z \mapsto e^{i\beta} \cdot z,$$

onde β é o número de rotação (irracional) de f ;



O difeomorfismo ϕ é \mathbb{R} -analítico, de modo que ele se estende \mathbb{C} -analiticamente a uma vizinhança de S^1 . Concluimos que S^1 está contido em um domínio singular de f ; mas $f(0) = \infty$ e $f(\infty) = 0$, de modo que este domínio não é simplesmente conexo. Trata-se então de um anel de Herman.

Referências

- [1] O estudo inicial dos endomorfismos analíticos de $\bar{\mathbb{C}}$ foi feito por Julia e Fatou, no início deste século. Grande número das propriedades descritas neste capítulo devem-se aos mesmos. O leitor pode consultar: G. Julia, Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles (J. Math. Pures Appl. 4 (1918) e P. Fatou, Sur les équations fonctionnelles, Bull. Soc. Math. France, volumes 47 (1913) e 48 (1920).

- [2] - Estes casos são topologicamente finitamente determinados, isto é, $\varphi(z)$ é topologicamente conjugado, numa vizinhança do ponto fixo, ao polinômio $z \mapsto az + bz^{km+1}$. Ver C. Camacho, On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in \mathbb{C}^2 , Astérisque 59-60 (1978). A classificação analítica aparece em J. Écalle: Théorie Itérative. Introduction à la théorie des invariants holomorphes, J.Math. Pures et Appl., 54 (1975).
- [3] - Este teorema deve-se a C.L.C. Siegel, Iteration of analytic functions, Ann.Math. 43 (1942). Pela primeira vez pode-se controlar uma situação envolvendo pequenos denominadores.
- [4] - Este notável resultado reaparece, algo misteriosamente, no estudo de aplicações do intervalo $[-1,1]$ que são pares, possuem um único máximo em $0 \in \mathbb{C}$ e têm derivada schwartziana negativa. Ver D. Singer, Stable orbits and bifurcations of maps of the interval. Siam J. Appl. Math. 35 (1978).
- [5] - Conjetura-se que o número mencionado é $\leq 2(d-1)$.
- [6] - O leitor pode consultar o apêndice para discussão sobre famílias normais.
- [7] - O leitor pode consultar o Capítulo IV do livro Riemann Surfaces, por H. Farkas e I. Kra (Springer-Verlag), para discussão em torno de uniformização de superfícies Riemannianas por grupos fuchsianos.

- [8] - Consultar D. Sullivan, Quasi Conformal Homeomorphisms and Dynamics I; Solution of the Fatou - Julia Problem on Wandering Domains, preprint IHES 1982. O teorema inclui também a afirmativa de que o número de componentes cíclicas é finito. Conjectura-se que este número é limitado por $2(d-1)$ (isto é, o número de órbitas de componentes cíclicas).
- [9] - Não se sabe se no bordo de um domínio singular deve existir um ponto crítico.
- [10] - Problema: o bordo de um disco de Siegel é uma curva de Jordan?
- [11] - Este exemplo deve-se a S. Lattès: Sur L'itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré, C.R.A.S. 166 (1918). O leitor pode também consultar M. Herman: Exemples des fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann (manuscrito), onde outros exemplos, de grau 3, desta situação são dados, não topologicamente conjugados entre si e nenhum conjugado ao exemplo de Lattès.
- [12] Exemplo devido a M. Herman; outros aparecem na referência acima.

CAPÍTULO 2

O TEOREMA DAS COMPONENTES

O objetivo deste capítulo é a introdução de técnicas ligadas ao estudo das aplicações quase conformes no plano. Faremos uma breve enumeração dos teoremas principais a serem utilizados, e a seguir analisaremos seu emprego na demonstração de que toda componente do complementar do conjunto de Julia torna-se cíclica após um certo número de iterados.

§1. Aplicações Quase Conformes no Plano ([1])

Trataremos sempre com homeomorfismos que preservam a orientação do plano \mathbb{C} .

As aplicações conformes do plano complexo são, por assim dizer, aquelas que não distorcem formas. Mais precisamente, um difeomorfismo de classe C^1 entre dois abertos de \mathbb{C} é conforme se preserva ângulos. Isto se traduz imediatamente nas condições de Cauchy-Riemann, ou seja, o difeomorfismo em questão é analítico. Um fato notável é que a conformalidade pode ser verificada a nível macroscópico (o que inclui inclusive, de início, o abandono da exigência de diferenciabilidade), como passamos a explicar.

Seja $A \subset \mathbb{C}$ um anel, isto é, um aberto de \mathbb{C} (portanto uma superfície de Riemann) cujo grupo fundamental é isomor-

fo a \mathbb{Z} . Pode-se mostrar que A é analiticamente equivalente a um só dos modelos seguintes:

(i) $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C}; z \neq 0\}$

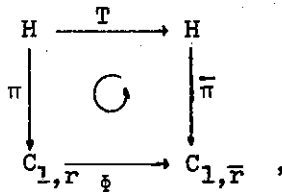
(ii) $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$

(iii) $C_{r_1, r_2} = \{z \in \mathbb{C}; 0 < r_1 < |z| < r_2 < \infty\}$

2.1.1. Proposição - C_{r_1, r_2} e $C_{\bar{r}_1, \bar{r}_2}$ são analiticamente equivalentes $\iff \frac{r_2}{r_1} = \frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_1}$.

Demonstração - Se $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_1}$, consideramos $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\phi(z) = \frac{\bar{r}_2}{r_2} z$, o qual é difeomorfismo analítico entre C_{r_1, r_2} e $C_{\bar{r}_1, \bar{r}_2}$.

Para a recíproca, basta provar que se $C_{1, r}$ e $C_{1, \bar{r}}$ são analiticamente equivalentes então $r = \bar{r}$. Sendo H o semi-plano superior de \mathbb{C} , temos que $C_{1, \bar{r}}$ e $C_{1, r}$ são, respectivamente, H/G e H/\bar{G} , onde $G = \{z \mapsto \lambda^n z, \lambda > 1\}$ e $\bar{G} = \{z \mapsto \bar{\lambda}^n z, \bar{\lambda} > 1\}$. Ora, se $\phi: C_{1, r} \rightarrow C_{1, \bar{r}}$ é equivalência analítica, existe $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ levantamento de ϕ :



onde π e $\bar{\pi}$ são as projeções canônicas de H em H/G e H/\bar{G} . Como T induz um isomorfismo $T_{\#}: G \rightarrow \bar{G}$, concluímos que $T(\lambda z) = \bar{\lambda}T(z)$. Segue-se facilmente que $\lambda = \bar{\lambda}$, ou seja, $G = \bar{G}$ e então $r = \bar{r}$. ■

Portanto, o quociente $\frac{r_2}{r_1}$ determina as classes de equivalência analítica em (iii).

2.1.2. Definição - O módulo de conformidade do anel $A \subset \mathbb{C}$ é $M(A) = \infty$ se A é equivalente a \mathbb{C}^* ou D^* , e $M(A) = \log \frac{r_2}{r_1}$ se A é equivalente a C_{r_1, r_2} .

Se $\varphi: U \rightarrow U'$ é conforme, onde U e U' são abertas de \mathbb{C} , então $M(A) = M(\varphi(A))$ para todo anel $A \subset U$.

2.1.3. Definição - Seja $\varphi: U \rightarrow U'$ um homeomorfismo entre dois abertos de \mathbb{C} . Dizemos que φ é k-quase conforme se

$$\sup \frac{M(\varphi(A))}{M(A)} = k < \infty$$

onde o supremo é considerado sobre os anéis $A \subset U$ de módulo finito. Diremos que φ é quase conforme se for k-quase conforme para algum $k \in \mathbb{R}$.

Vê-se que $k(\varphi) = 1$ se φ é conforme. O resultado seguinte é básico.

2.1.4. Teorema - Se φ é quase conforme mas não é conforme, então $k(\varphi) > 1$.

Assim $k(\varphi)$ é uma medida de quanto φ deixa de ser conforme.

Um exemplo bastante simples de uma aplicação que não é quase conforme é o seguinte: considere as seqüências de anéis

$\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{\tilde{C}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ definidos por

$$C_i = \{z \in \mathbb{C}; i \leq |z| \leq i+1\}$$

$$\tilde{C}_j = \{z \in \mathbb{C}; j^j \leq |z| \leq (j+1)^{j+1}\}.$$

Seja $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ homeomorfismo tal que $\varphi(C_i) = \tilde{C}_i \quad \forall i$.

Como $\frac{M(\tilde{C}_i)}{M(C_i)} = \frac{\log \frac{(i+1)^{i+1}}{i^i}}{\log \frac{i+1}{i}} \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$, vemos que

φ não é quase conforme.

Existe uma versão infinitesimal para a definição

2.1.3. Lembremos que se $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável em $z \in U$, podemos definir suas derivadas complexas (no ponto $z \in U$) como

$$\varphi_z = \frac{1}{2}(\varphi_x - i\varphi_y) \quad \text{e} \quad \varphi_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\varphi_x + i\varphi_y).$$

Consideremos em \mathbb{C} a medida \underline{m} de Lebesgue usual.

2.1.5. Teorema - Seja $\varphi: U \rightarrow U'$ um homeomorfismo k -quase conforme. Então

(i) φ é diferenciável para quase todo $z \in U$.

(ii) $|\varphi_z| \geq \frac{1}{k} |\varphi_{\bar{z}}|$ para quase todo $z \in U$, se $m(\varphi(R)) =$

$$= \int_R (|\varphi_z|^2 - |\varphi_{\bar{z}}|^2) dm$$

(em particular, φ preserva conjuntos de medida zero)

$$(iii) \quad \frac{|\varphi_z| + |\varphi_{\bar{z}}|}{|\varphi_z| - |\varphi_{\bar{z}}|} \leq k \quad \text{em quase todo } z \in U.$$

O quociente $\frac{|\varphi_z| + |\varphi_{\bar{z}}|}{|\varphi_z| - |\varphi_{\bar{z}}|}$ é a relação entre o eixo

maior e o eixo menor da elipse $\{w \in \mathbb{C}; w = d\varphi(z) \cdot u \text{ para } |u|=1\}$. Ele mede, portanto, o quanto φ deixa de ser conforme em $z \in U$ do ponto de vista infinitesimal. Podemos mesmo adotar tal ponto de vista para definição de quase conformidade, o que constará do Teorema 2.1.7.

2.1.6. Definição - Seja $\varphi: U \rightarrow U'$ um homeomorfismo. Dizemos que φ é localmente absolutamente contínuo em linhas se, dado um retângulo $[x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]$ em U , as funções

$$\varphi^{(x)}: [y_0-b, y_0+b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi^{(x)}(y) = \varphi(x,y)$$

$$\varphi^{(y)}: [x_0-a, x_0+a] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi^{(y)}(x) = \varphi(x,y)$$

são absolutamente contínuas para quase todo $x \in [x_0-a, x_0+a]$ e para quase todo $y \in [y_0-b, y_0+b]$.

O enunciado do Teorema 2.1.5 seria mais completo se acrescentássemos: um homeomorfismo k-quase conforme é localmente absolutamente contínuo em linhas (daqui se segue a existência das derivadas parciais de φ em quase todo ponto; em seguida se prova a diferenciabilidade de φ).

Podemos enfim enumerar a versão analítica da Defini-

ção 2.1.3.

2.1.7. Teorema - Suponhamos que o homeomorfismo $\varphi: U \rightarrow U'$ seja localmente absolutamente contínuo em linhas e que $\exists k \geq 1$ tal que $|\varphi_z| + |\varphi_{\bar{z}}| \leq k(|\varphi_z| - |\varphi_{\bar{z}}|)$ em quase todo ponto $z \in U$. Então φ é k -quase conforme.

Um dos fatos mais importantes relacionados ao estudo das aplicações quase conformes é que o Teorema da representação conforme de Riemann também se generaliza. Antes de enunciá-lo, faremos uma pequena digressão functorial.

2.1.8. Definição - Um campo (mensurável) de elipses em um aberto $U \subset \mathbb{C}$ é uma função mensurável $\mu \in L_\infty(U, \mathbb{C})$ tal que $|\mu(z)| < 1$ em quase todo ponto.

Geometricamente, estamos considerando em quase todo ponto $z \in U$ a elipse $e^{i\theta} + \mu(z)e^{i\theta}$ e seus equivalentes homotéticos; sua excentricidade é $(1 + |\mu(z)|)/(1 - |\mu(z)|)$.

2.1.9. Definição. Se $\|\mu\|_\infty < 1$, diremos que μ é uma estrutura quase conforme em U ; denotaremos por $Q_c(U)$ o espaço das estruturas quase conformes em U .

2.1.10. Definição - Se $\varphi: U \rightarrow U'$ é um homeomorfismo diferenciável em quase todo ponto de U , podemos definir $\varphi^*: Q_c(U') \rightarrow Q_c(U)$ como

$$\varphi^* \mu(z) = \frac{\varphi_{\bar{z}}(z) - \overline{\varphi_z(z)} \mu(\varphi(z))}{\varphi_{\bar{z}}(z) \mu(\varphi(z)) - \varphi_z(z)}$$

$\varphi^* \mu$ é a estrutura induzida em U por φ .

Simplemente estamos colocando em torno de $z \in U$ a elipse (e seus equivalentes homotéticos) que é levada em $e^{i\theta} + \mu(\varphi(z)) e^{-i\theta}$ por $d\varphi(z)$.

Se μ_0 é a estrutura conforme de U' , isto é, $\mu_0 = 0$, temos que $\varphi^*(0) = -\frac{\varphi_z}{\varphi_{\bar{z}}}$, e daí $\|\varphi^*(0)\|_\infty < 1 \iff \frac{|\varphi_z| + |\varphi_{\bar{z}}|}{|\varphi_z| - |\varphi_{\bar{z}}|} \leq k < \infty$ para quase todo ponto de U . Portanto: se φ é localmente absolutamente contínua em linhas e $\|\varphi^*(0)\|_\infty < 1$, então φ é quase conforme; em particular, se $\varphi^*(0) = 0$, φ é conforme pelo Teorema 2.1.4.

Uma pergunta natural consiste em saber se as estruturas quase conformes de um aberto $U \subset \mathbb{C}$ são induzidas por aplicações quase conformes.

2.1.11. Teorema de Riemann Mensurável ([2]) - Seja μ uma estrutura quase conforme no plano complexo. Então, existe um único homeomorfismo quase conforme $\varphi_\mu: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(\infty) = \infty$ e $\varphi_\mu^*(0) = \mu$.

O leitor pode verificar facilmente, a partir do Teorema 2.1.11, que se $\mu \in \mathcal{Q}_c(U)$ e U é simplesmente conexo, então existe $\varphi: U \rightarrow \mathbb{D}$ quase conforme tal que $\varphi^*(0) = \mu$. Isso justifica a denominação dada ao Teorema 2.1.11.

2.1.12. Exemplo - O Teorema 2.1.11 pode ser usado para uma rápida demonstração de que \mathbb{C} não pode ser quase conformemente equivalente ao disco \mathbb{D} . De fato, se existir $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ quase con-

forme, consideramos o homeomorfismo $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ quase conforme tal que $\psi^*(0) = \varphi^*(0)$. Segue-se que $\varphi \circ \psi^{-1}$ é um homeomorfismo quase conforme de \mathbb{C} em \mathbb{D} , e $(\varphi \circ \psi^{-1})^*(0) = \varphi^*(\psi^{-1})^*(0) = 0$, de modo que $\varphi \circ \psi^{-1}$ é conforme. Pelo Teorema de Liouville, isto é absurdo.

Para nós será importante uma versão parametrizada do Teorema 2.1.11.

2.1.12. Teorema ([3] - Seja $L \subset L_\infty(U)$ um subespaço (complexo) de dimensão finita. Então a aplicação,

$$\mu \in L \cap Q_C(U) \mapsto \varphi_\mu(z) \in \mathbb{C}$$

é analítica, para cada $z \in U$.

§.2. Deformações de Endomorfismos de $\bar{\mathbb{C}}$

Discutiremos agora como obter deformações de um elemento de $\text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$ utilizando as idéias expostas acima.

Como primeiro exemplo, consideremos um endomorfismo $f_0 \in \text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$ cujas componentes cíclicas são todas bacias de atratores, e que não possua pontos críticos em $J(f)$. Diremos mais tarde que $f_0 \in \text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$ é hiperbólico, e provaremos que $m(J(f_0)) = 0$. Suponhamos, para simplificar, que as bacias dos atratores são fixas. Vamos introduzir em $\bar{\mathbb{C}}$ uma estrutura quase conforme μ invariante por f_0 , isto é, $f_0^* \mu = \mu$. Sejam p_1, \dots, p_s os pontos fixos atratores de f_0 e D_1, \dots, D_s discos centrados nestes pontos onde se aplica o Teorema 1.1.1, ou

seja, f_0 é linearizável; observemos, então, que à exceção dos pontos em $J(f_0)$ e em $\bigcup_{i=1}^s \mathcal{O}^-(p_i)$, qualquer órbita possui um único representante em $\bigcup_{i=1}^s \bar{D}_i \setminus f_0(\bar{D}_i)$. Definamos então μ em $\bigcup_{i=1}^s \bar{D}_i \setminus f_0(\bar{D}_i)$ de modo mensurável e satisfazendo $\|\mu\|_\infty < 1$, e estendâmo-lo, via f_0 , para $[J(f_0) \cup \bigcup_{i=1}^s \mathcal{O}^-(p_i)]$, evitando as órbitas dos pontos críticos. Temos então $\mu \in L_\infty(\bar{\mathbb{C}})$ satisfazendo $\|\mu\|_\infty < 1$ e invariante por f_0 por construção. Agora podemos construir deformações de f_0 em $\text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$: seja $0 \leq t \leq 1$; pelo Teorema 2.1.11, existe $\varphi_t: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, homomorfismo quase conforme, tal que $\varphi_t^*(0) = t\mu$. Agora:

$$\begin{aligned} (\varphi_t \circ f_0 \circ \varphi_t^{-1})^*(0) &= (\varphi_t^{-1})^* f_0^* \varphi_t^*(0) = (\varphi_t^{-1})^* f_0^*(t\mu) = \\ &= (\varphi_t^{-1})^*(t\mu) = 0, \end{aligned}$$

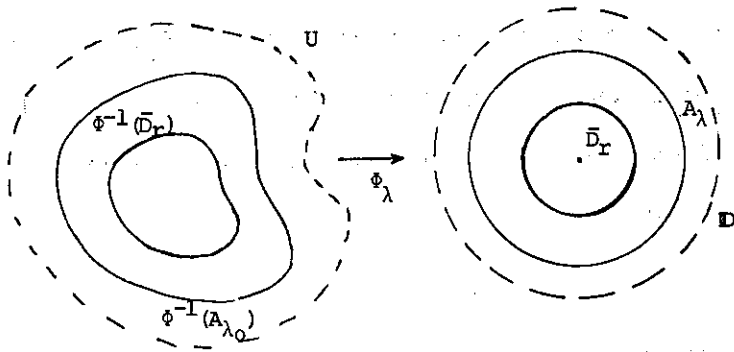
de modo que $\varphi_t \circ f_0 \circ \varphi_t^{-1}$, além de quase conforme, é na realidade conforme. Sendo conjugada a f_0 , vemos que $\varphi_t \circ f_0 \circ \varphi_t^{-1}$ possui grau $d \in \mathbb{N}$, de modo que $\varphi_t \circ f_0 \circ \varphi_t^{-1} \in \text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$. Veremos no capítulo 3 que, essencialmente, esta construção é muito mais geral do que se pode pensar à primeira vista. O leitor deve observar que poderia acontecer de ser trivial a deformação feita, isto é, $\varphi_t \circ f_0 \circ \varphi_t^{-1} = f_0 \quad \forall t \in [0, 1]$.

Passemos agora ao segundo exemplo ([4]). Para os polinômios quadráticos $f_c(z) = z^2 + c$, sabemos que existe no máximo uma órbita periódica finita atratora (ou fortemente atratora). Se $|\lambda| < 1$, vê-se facilmente que $f_{c(\lambda)}(z)$ possui um ponto fixo a-

trator (ou fortemente atrator) p_λ desde que $c(\lambda) = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}$; tem-se $f_c^t(p_\lambda) = \lambda$. A aplicação $c(\lambda)$ é representação conforme de \mathbb{D} no interior de uma cardióide $W(0)$. Este fato pode ser generalizado do seguinte modo: no aberto $W = \{c \in \mathbb{C}; f_c \text{ possui uma órbita periódica } \mathcal{O}^+(p_c) \text{ atratora ou fortemente atratora de período } t \in \mathbb{N}\}$ consideremos uma componente conexa $W(c_0)$ ($c_0 \in W(c_0)$).

2.2.1. Teorema - A função analítica $\rho: W(c_0) \rightarrow \mathbb{D}$ dada por $\rho(c) = (f_c^t)^{-1}(p_c)$ define um isomorfismo analítico de $W(c_0)$ sobre \mathbb{D} .

Demonstração - Seja U a componente da bacia de $\mathcal{O}^+(p_{c_0})$ que contém o ponto crítico $0 \in \mathbb{C}$ de f_{c_0} ; sem perda de generalidade, podemos supor que $U \ni p_{c_0}$. Como U é analiticamente equivalente a \mathbb{D} e $0 \in \mathbb{C}$ é simples, vemos que $f_{c_0}^t: U \rightarrow U$ é um recobrimento duplo ramificado, de modo que se $\tilde{\rho}: U \rightarrow \mathbb{D}$ é representação conforme, temos que $\tilde{\rho} \circ f_{c_0}^t \circ \tilde{\rho}^{-1}(z) = q_{\lambda_0}(z) = z \cdot \frac{z + \lambda_0}{1 + \bar{\lambda}_0 z}$, com $|\lambda_0| < 1$. Consideremos agora em \mathbb{D} a métrica de Poincaré; sejam $r > 0$ de modo que $d_p(\lambda_0, 0) < r$, e $D_r = \{\lambda \in \mathbb{D}; d_p(\lambda, 0) < r\}$. Como $f_{\lambda_0}^{-1}(0) = \{0, -\lambda_0\} \subset D_r$, temos que $q_{\lambda_0}^{-1}(\bar{D}_r) = A_{\lambda_0}$ é simplesmente conexo e pelo Lema de Schwartz, $\bar{D}_r \subset \text{int } A_{\lambda_0}$. Tudo isto persiste para $\lambda \in D_r$, isto é: $q_\lambda^{-1}(\bar{D}_r) = A_\lambda$ é simplesmente conexo e $\bar{D}_r \subset \text{int } A_\lambda$.



Para cada $\lambda \in D_r$, construímos um difeomorfismo de classe C^1 $\phi_\lambda: \varphi^{-1}(A_{\lambda_0}) \rightarrow A_\lambda$, dependendo continuamente em $\lambda \in \mathbb{C}$, de modo que $\phi_\lambda(f_{C_0}^t(z)) = q_\lambda(\phi_\lambda(z))$ para $z \in \partial\varphi^{-1}(A_{\lambda_0})$, e $\phi_{\lambda_0} = \phi$. Definimos agora $g_\lambda: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ do seguinte modo: $g_\lambda = f_{C_0}^t$ fora de $\varphi^{-1}(A_{\lambda_0}) \cup \dots \cup f_{C_0}^{t-1}(\varphi^{-1}(A_{\lambda_0}))$, e satisfazendo $g_\lambda^t = \phi_\lambda^{-1} \circ q_\lambda^{-1} \circ \phi_\lambda$ em $\varphi^{-1}(A_{\lambda_0})$ (o que inclui defini-lo em $\varphi^{-1}(A_{\lambda_0}) \cup \dots \cup f_{C_0}^{t-1}(\varphi^{-1}(A_{\lambda_0}))$). O difeomorfismo ϕ_λ deve ser construído de modo que g_λ resulte de classe C^1 . Introduzimos agora uma estrutura quase conforme em $\bar{\mathbb{C}}$ invariante por g_λ : definimos $\mu_\lambda = \phi_\lambda^*(0)$ em $g_\lambda^t(\varphi^{-1}(A_{\lambda_0}))$, e estendemos, via g_λ^{-1} , para $\bigcup \overline{B(\infty)}$; em $\overline{B(\infty)}$, colocamos a estrutura conforme usual: $\mu_\lambda = 0$. Resulta, por ser g_λ de classe C^1 , que $\|\mu_\lambda\|_\infty < 1$. Aplicamos agora o Teorema 2.1.11, e encontramos $\varphi_\lambda: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, quase conforme, tal que $\varphi_\lambda^*(0) = \mu_\lambda$. Resulta que $\varphi_\lambda \circ g_\lambda \circ \varphi_\lambda^{-1}$ é conforme, de grau 2 e $\varphi_\lambda \circ g_\lambda \circ \varphi_\lambda^{-1}(\infty) = [\infty]$, de modo que

$\varphi_\lambda \circ g_\lambda \circ \varphi_\lambda^{-1} = f_{c_\lambda}$ para um único $c_\lambda \in W(c_0)$ (observe-se que $c_{\lambda_0} = c_0$ e c_λ depende continuamente de $\lambda \in D_r$). Obtivemos então uma inversa contínua c_λ para a função $\rho(\lambda)$, pois $\rho(f_{c_\lambda}) = \lambda$ (pois g_λ^t é conjugado a q_λ em $\varphi^{-1}(A_{\lambda_0})$). Fazendo $r \rightarrow \infty$, concluímos a demonstração. ■

§3. Demonstração do Teorema das Componentes ([51])

Vamos nos restringir aqui aos endomorfismos polinomiais; denotamos por $\text{Pol}_d(\overline{\mathbb{C}})$ o espaço destes elementos de grau $d \in \mathbb{N}$. Como vimos no Exemplo 1.5.4, todas as componentes de $[J(P_0)]$, para $P_0 \in \text{Pol}_d(\overline{\mathbb{C}})$, são analiticamente equivalentes ao disco \mathbb{D} .

A idéia da demonstração é a seguinte. Suponhamos que exista uma componente A de $[J(P_0)]$ que jamais se torne cíclica; assim, $A, P_0(A), \dots, P_0^n(A), \dots$ é uma sucessão infinita de conjuntos. Certamente existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que em $P_0^n(A)$, $n \geq n_0$ não existem mais pontos críticos de P_0 ; como a restrição de P_0 a cada $P_0^n(A)$, $n \geq n_0$ é recobrimento, segue-se que se trata efetivamente de um difeomorfismo. Dado $\mu \in Q_c(P_0^{n_0}(A))$, podemos estendê-lo a $\mu \in Q_c(\overline{\mathbb{C}})$ como

$$(i) \quad \mu(z) = 0 \quad \text{se } z \notin \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} P_0^j(P_0^{n_0}(A))$$

$$(ii) \quad \mu = (P_0^j)_*(\mu) \quad \text{em cada } P_0^{n_0+j}(A), \quad \text{para } j > 0.$$

(iii) $\mu(z) = (P_0^{-j})^* (\mu(P_0^j(z)))$ se $z \in P_0^{-j}(P_0^{n_0}(A))$ para $j \geq 1$
 e $(P_0^j)'(z) \neq 0$; caso $(P_0^j)'(z) = 0$, definimos $\mu(z) = 0$.

É fácil ver que $\mu: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ assim definido é mensurável e $\|\mu\|_\infty < 1$, pois $\|\mu|_{P_0^{n_0}(A)}\|_\infty = \|\mu\|_\infty$. Em outras palavras, a aplicação que associa $\mu \in Q_c(P_0^{n_0}(A))$ à sua extensão em $Q_c(\bar{\mathbb{C}})$ é isometria linear sobre um subespaço $\tilde{Q}_c(\bar{\mathbb{C}}) \subset Q_c(\bar{\mathbb{C}})$. Ora, $P_0^* \mu = \mu$, de modo que podemos pensar em deformar P_0 , isto é, considerar $P_\mu = (h^\mu) \circ P_0 \circ (h^\mu)^{-1}$, onde $h^\mu: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ é o único homeomorfismo quase conforme tal que $(h^\mu)^*(0) = \mu$ e $h^\mu(0) = 0$, $h^\mu(1)$, $h^\mu(\infty) = \infty$. Temos que $P_\mu \in \text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$. Seja $\xi: \tilde{Q}_c(\bar{\mathbb{C}}) \rightarrow \text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$ dada por $\xi(\mu) = P_\mu$; temos que ξ é analítica, pois para cada $z \in \bar{\mathbb{C}}$, $\mu \rightarrow P_\mu(z)$ é analítica pelo Teorema 2.1.12, e os coeficientes de P_μ são determinados analiticamente em função de $P_\mu(z_1), \dots, P_\mu(z_m)$, para $m \in \mathbb{N}$ conveniente. Provaremos que não é possível se ter dimensão finita para a imagem de ξ , o que será uma contradição.

Seja $V \subset \tilde{Q}_c(\bar{\mathbb{C}})$ uma subvariedade real C^∞ conexa tal que $\xi|_V$ seja constante.

2.3.1. Lema - $h^\mu|_{J(P_0)}$ não depende de $\mu \in V$.

Demonstração - Fixemos $\mu_1 \in V$. Temos que

$$h^\mu \circ P_0 \circ (h^\mu)^{-1} = h^{\mu_1} \circ P_0 \circ (h^{\mu_1})^{-1} \quad \forall \mu \in V.$$

Segue-se que $(h^{\mu_1})^{-1} \circ h^\mu$ está no centralizador de P_0 .

Mais precisamente, $(h^{\mu_1})^{-1} \circ h^{\mu}$ está na componente conexa do centralizador de P_0 que contém a identidade. Devido à densidade das órbitas periódicas em $J(P_0)$, vemos que o centralizador de $P_0|_{J(P_0)}$ é discreto, de modo que $h^{\mu}|_{J(P_0)} = h^{\mu'}|_{J(P_0)}$ $\forall \mu \in V$.

2.3.2. Definição - Se $\mu_1, \mu_2 \in \tilde{Q}_c(\mathbb{C})$, diremos que μ_1 é equivalente a μ_2 ($\mu_1 \sim \mu_2$) se existir um homeomorfismo quase conforme $h: P_0^{n_0}(A) \rightarrow P_0^{n_0}(A)$ que se estende à identidade em $\partial P_0^{n_0}(A)$ e tal que $h^*(\mu_2) = \mu_1$.

2.3.2. Lema - Todos os elementos de V são equivalentes.

Demonstração - De fato, como $h^{\mu_1} \circ P_0 \circ (h^{\mu_1})^{-1} = h^{\mu_2} \circ P_0 \circ (h^{\mu_2})^{-1}$ para $\mu_1, \mu_2 \in V$, pelo Lema 2.3.1 temos que $(h^{\mu_2})^{-1} \circ h^{\mu_1} = \text{id}$ em $J(P_0)$. Portanto, $(h^{\mu_2})^{-1} \circ h^{\mu_1} = \text{id}$ em $P_0^{n_0}(A)$; além disso, $(h^{\mu_1})^*(0) = \mu_1$ e $(h^{\mu_2})^*(0) = \mu_2$, de modo que $(h^{\mu_1})^{-1} \circ (h^{\mu_1})^*(\mu_2) = \mu_1$, ou seja, $\mu_1 \sim \mu_2$.

Podemos agora completar a demonstração. Dado $m \in \mathbb{N}$ t.q. $m > \dim_{\mathbb{R}} \text{Pol}_d(\mathbb{C})$, consideramos em $\text{Dif}^{\infty}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ uma subvariedade S_1 de classe C^{∞} e dimensão real $m \in \mathbb{N}$ com as seguintes propriedades: (i) $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = \text{id}$ $\forall \varphi \in S_1$; (ii) $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{S_1} \notin \text{PSL}(S^1)$ para $\varphi_1 \neq \varphi_2 \in S_1$. Temos associada a subvariedade C^{∞} $S_1^* = \{\varphi^*(0); \varphi \in S_1\} \subset Q_c(\mathbb{D})$; por cons-

trução, $\dim_{\mathbb{R}} S_1^* = m$. Seja $\psi: P_0^{n_0}(A) \rightarrow \mathbb{D}$ representação conforme, e $S = \{\psi^*(\eta), \eta \in S_1\} \subset Q_c(P_0^{n_0}(A))$; naturalmente S é de classe C^∞ e $\dim_{\mathbb{R}} S = m$.

2.3.4. Lema - Dois elementos distintos de S não são equivalentes.

Demonstração - Suponhamos que $\psi^*(\eta_1) \sim \psi^*(\eta_2)$, isto é, existe $h: P_0^{n_0}(A) \rightarrow P_0^{n_0}(A)$, homeomorfismo quase conforme, tal que $h^*(\psi^*(\eta_2)) = \psi^*(\eta_1)$ e $h|_{\partial P_0^{n_0}(A)} = \text{id}$. Segue-se que $(h')^*(\eta_2) = \eta_1$

para $h' = \psi \circ h \circ \psi^{-1}$, ou seja, $(h')^*(\varphi_2^*(0)) = \varphi_1^*(0)$; portanto, $\varphi_2 \circ h' \circ \varphi_1^{-1} \in \text{PSL}(\mathbb{D})$, de modo que $h' \in \text{Dif}^\infty(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Pelo Teorema de Fatou ([6]), existe um subconjunto $\mathcal{L} \subset S^1$ de medida de Lebesgue 1 com a seguinte propriedade: se $a \in \mathcal{L}$ e $x_n \rightarrow a$ não tangencialmente a S^1 , então existe também $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(x_n) \in \partial P_0^{n_0}(A)$; além disso, a "extensão" $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \partial P_0^{n_0}(A)$ assim definida é contínua e injetiva. Afirmamos que $h'(a) = a \quad \forall a \in \mathcal{L}$; de fato, se $h'(x_n) \rightarrow h'(a) = b$, vemos que $h(\psi^{-1}(x_n)) = \psi^{-1}(h'(x_n)) \Rightarrow h(\psi^{-1}(a)) = \psi^{-1}(b) \Rightarrow \psi^{-1}(a) = \psi^{-1}(b) \Rightarrow a = b$. Concluimos que $h'|_{S^1} = \text{id}|_{S^1}$, e portanto $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{S^1}$ é linear; segue-se que $\varphi_1 = \varphi_2$, e $\eta_1 = \eta_2$. ■

Pelos Lemas anteriores, $\xi|_S$ deve ser injetiva, ou seja, $\dim_{\mathbb{R}} \text{Pol}_d(\overline{\mathbb{C}}) \geq m$, absurdo. A demonstração está concluída.

Referências

- [1] - Sugerimos ao leitor consultar O. Lehto, K. Virtanen, Quasiconformal Mappings in the Plane, Springer-Verlag.
- [2] - Este teorema foi inicialmente provado por Gauss no seguinte caso particular: uma métrica (real analítica) em \mathbb{R}^2 é localmente equivalente à métrica euclideana. A versão enunciada deve-se a C. Morrey (referência 1).
- [3] - Demonstrado por L. Ahlfors e L. Bers (referência 1).
- [4] - Este é um resultado demonstrado por A. Douady e J. Hubbard. Ver a exposição Systèmes Dynamiques Holomorphes, pelo primeiro dos autores, em Séminaire Bourbaki, nº 599.
- [5] - Como já vimos no Capítulo 1, este teorema foi provado por D. Sullivan, o qual introduziu as técnicas de aplicações quase conformes no estudo das iterações de funções racionais.
- [6] - Ver Analytic Function Theory, por E. Hille, vol.II (Chelsea).

CAPÍTULO 3

ESTABILIDADE

Dizemos que um endomorfismo polinomial da esfera de Riemann é estável quando sua dinâmica pouco se modifica se o sujeitamos a pequenas perturbações. Neste capítulo mostraremos que esta propriedade é bastante difundida entre os polinômios; chega mesmo a ser satisfeita por um conjunto aberto e denso dos mesmos. A justificativa básica deste fato reside em que é suficiente controlar a dinâmica nas partes "fáceis", ou seja, nos conjuntos estáveis das órbitas periódicas atratoras e fortemente atratoras; seguir-se-á completo controle em toda a esfera.

§1. Condições Necessárias de Estabilidade

Enumeraremos a seguir uma série de condições satisfeitas por polinômios estáveis. No parágrafo seguinte, provaremos que as mesmas são suficientes. Ao longo da enumeração, ficará claro que se tratam de condições amplamente satisfeitas.

3.1.1. Definição - (i) Dados $P_0, P_1 \in \text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$, dizemos que P_0 e P_1 são (topologicamente) conjugados se existe $h: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ homeomorfismo tal que $hP_0 = P_1h$; neste caso, h é uma conjugação (topológica) entre P_0 e P_1 ; (ii) $P_0 \in \text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$ é (estruturalmente) estável se existem uma vizinhança $V \subset \text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$ de P_0 e uma função contínua $H: V \rightarrow C^0(\bar{\mathbb{C}}, \bar{\mathbb{C}})$ tais que $H(P_0) = \text{Id}$ e

$H(P)$ é conjugação entre P_0 e $P \forall P \in V$.

O leitor pode verificar facilmente que conjugações preservam órbitas periódicas (incluindo o período e o tipo da órbita); em particular, os conjuntos de Julia são preservados, bem como as componentes de seus complementares e as componentes cíclicas, tanto em período quanto em tipo dinâmico.

Sejam agora $P_0, P_1 \in \text{Pol}_d(\overline{\mathbb{C}})$ conjugados via $h: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$; afirmamos que se $p \in \overline{\mathbb{C}}$ é ponto crítico de P_0 , então $h(p)$ também é ponto crítico de P_1 com a mesma multiplicidade. De fato, sendo $m \in \mathbb{N}$ a multiplicidade de $p \in \overline{\mathbb{C}}$, tem-se que P_0 é localmente m a 1 em $p \in \overline{\mathbb{C}}$; ora, isto é preservado por h , de modo que $h(p)$ possui multiplicidade $m \in \mathbb{N}$ como ponto crítico de P_1 .

3.1.2. Lema - O conjunto $E_1 \subset \text{Pol}_d(\overline{\mathbb{C}})$ constituído por polinômios cujos pontos críticos finitos são simples é aberto e denso (de fato, um aberto de Zariski em $\text{Pol}_d(\overline{\mathbb{C}})$).

3.1.3. Corolário - Se $P \in \text{Pol}_d(\overline{\mathbb{C}})$ é estável, então $P \in E_1$.

Podemos então enunciar nossa primeira condição de estabilidade.

3.1.4. Condição de Estabilidade - Os pontos críticos de um polinômio estável são simples. Ou seja, os polinômios estáveis pertencem a E_1 .

Antes de demonstrar o Lema 3.1.2, introduzimos a se-

guinte notação: a topologia C^0 em $\text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$ (aquela que estamos utilizando) é também dada pela proximidade entre os coeficientes dos polinômios. Tomaremos $\lambda = (a_0, \dots, a_{d-1}, 1) \in \mathbb{C}^d$ como coordenada para $P_\lambda(z) = a_0 + \dots + a_{d-1} z^{d-1} + z^d$, e indicaremos por $P(\lambda, z)$ a função analítica de $\mathbb{C}^d \times \bar{\mathbb{C}}$ em $\bar{\mathbb{C}}$.

$$P(\lambda, z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{d-1} z^{d-1} + z^d.$$

Demonstração do Lema 3.1.2 - Seja $d(\lambda)$ o discriminante do sistema algébrico de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} P(\lambda, z) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} P(\lambda, z) = 0. \end{cases}$$

Então $P_{\lambda_0}(z)$ possui um ponto crítico não simples se e somente se $d(\lambda_0) = 0$. ■

Observe-se que um ponto crítico $c \in \mathbb{C}$ de P_{λ_0} , sendo simples, possui um único prolongamento analítico $c(\lambda)$, para $\lambda \in \mathbb{C}^d$ próximo de $\lambda_0 \in \mathbb{C}^d$, tal que $c(\lambda_0) = c$ e $c(\lambda)$ é ponto crítico de $P_\lambda \in \text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$.

Analisemos agora as órbitas periódicas dos polinômios estáveis.

3.1.5. Definição - $E_2 \subset E_1 \subset \text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$ satisfaz: $P_{\lambda_0} \in E_2 \iff$ a função $N: \text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{N}$ que associa a cada polinômio seu número

de órbitas periódicas atradoras e fortemente atradoras é constante numa vizinhança de P_{λ_0} em $\text{Pol}_d(\mathbb{C})$.

Pelo Corolário 1.2.7, N está bem definida.

3.1.6. Condição de Estabilidade - Os polinômios estáveis pertencem a E_2 .

3.1.7. Teorema - $E_2 \subset \text{Pol}_d(\mathbb{C})$ é aberto e denso.

Demonstração - E_2 é aberto por definição. Quanto à densidade: dado $V \subset E_1$ aberto, escolhamos $P_{\lambda_1} \in V$ tal que $N(P_{\lambda_1}) \geq N(P_{\lambda})$ para todo $P_{\lambda} \in V$. Como N é semicontínua inferiormente, concluímos que $P_{\lambda_1} \in E_2$.

Os polinômios de E_2 satisfazem à importante propriedade dada pelo Corolário 3.1.9 abaixo: não possuem órbitas periódicas indiferentes.

3.1.8. Lema - Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ o menor inteiro para o qual $P_{\lambda_0}(z)$ possui uma órbita periódica $\mathcal{O}^+(p)$ indiferente de período $n_0 \in \mathbb{N}$. Existe então P_{λ} próximo a P_{λ_0} tal que $N(P_{\lambda}) > N(P_{\lambda_0})$. Mais precisamente, P_{λ} possui uma órbita periódica atradora de período $n_0 \in \mathbb{N}$ próxima à órbita de $p \in \mathbb{C}$ segundo P_{λ_0} .

Demonstração - Consideremos em $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}$ a variedade algébrica $W = \{(\lambda, z) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}; P_{\lambda}^{n_0}(\lambda, z) = z\}$. Tem-se $(\lambda_0, p) \in W$. Em W situa-se a subvariedade (estrita) algébrica real

$$\tilde{W} = \{(\lambda, z) \in W; \left| \frac{\partial}{\partial z} P^{n_0}(\lambda, z) \right| = 1\} .$$

Podemos então tomar uma curva analítica $\alpha(t)$, $t \in \mathbb{D}$, em W mas não em \tilde{W} passando por (λ_0, p) , isto é, $\alpha(0) = (\lambda_0, p)$. A função analítica $t \mapsto \frac{\partial}{\partial z} P^{n_0}(\alpha(t))$ não pode ser constante, de modo que existe $t_1 \in \mathbb{C}$ próximo de $0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} P^{n_0}(\alpha(t_1)) \right| < 1. \quad \text{Conclusão: se } \alpha(t_1) = (\lambda_1, z_1), \text{ vemos que}$$

$z_1 \in \bar{\mathbb{C}}$ é ponto periódico atrator de P_{λ_1} de período $\leq n_0 \in \mathbb{N}$.

Finalmente, como os pontos periódicos de P_{λ_0} de período $< n_0$ são todos simples, sem número é constante numa vizinhança de $\lambda_0 \in \mathbb{C}^d$, de modo que realmente o período de $z_1 \in \bar{\mathbb{C}}$ é $n_0 \in \mathbb{N}$. ■

3.1.9. Corolário - Se $P_{\lambda_0} \in E_2$, então suas órbitas periódicas são hiperbólicas, isto é, não são indiferentes. Conseqüentemente, as componentes cíclicas de P_{λ_0} são componentes de bacias de órbitas periódicas atradoras ou fortemente atradoras.

A condição seguinte é imediata a partir da definição de estabilidade. Seja $N_1: \text{Pol}_d(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $N_1(P_\lambda) =$ número de pontos críticos de P_λ fora de $J(P_\lambda)$. Definimos $E_3 \subset E_2$ como $P_{\lambda_0} \in E_3 \iff N(P_\lambda) = N(P_{\lambda_0})$ para todo P_λ numa vizinhança de P_{λ_0} .

3.1.10. Condição de Estabilidade. Os polinômios estáveis pertencem a E_3 .

3.1.11. Proposição - E_3 é aberto e denso em $\text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$.

Demonstração - E_3 é aberto por definição. Quanto à densidade: pelo Corolário 3.1.9 vemos que $N_1: E_2 \rightarrow \mathbb{N}$ é semicontínua inferiormente. Dado $V \subset E_2$ aberto, escolhemos $P_{\lambda_0} \in V$ tal que $N_1(P_{\lambda_0}) \geq N_1(P_\lambda)$ para todo $P_\lambda \in V$. Segue-se que $P_{\lambda_0} \in E_3$, ou seja, E_3 é denso em E_2 . ■

A condição que apresentamos agora diz, entre outras coisas, que somente $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$ é órbita periódica fortemente atratora para um polinômio.

3.1.12. Definição - $E_4 \subset E_3$ define-se por $P_{\lambda_0} \in E_4 \iff$ nenhum ponto periódico de P_{λ_0} fora de $J(P_{\lambda_0})$ está na órbita de um ponto crítico (à exceção de $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$).

3.1.13. Teorema - E_4 é aberto e denso em $\text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$.

Como consequência, obtemos mais uma caracterização para os polinômios estáveis.

3.1.14. Condição de Estabilidade - Todo polinômio estável pertence a E_4 .

Demonstração do Teorema 3.1.13 - Abertura de E_4 : Sejam $P_{\lambda_0} \in E_4$, e $\Theta^+(p_1), \dots, \Theta^+(p_s)$ as suas órbitas periódicas atradoras, de períodos t_1, \dots, t_s . Consideremos discos D_1, \dots, D_s centrados em p_1, \dots, p_s que satisfaçam o Teorema 1.1.2 para $P_{\lambda_0}^{t_1}, \dots, P_{\lambda_0}^{t_s}$, e $D_\infty \ni \infty$ dado pelo Teorema 1.1.5. Qualquer ponto crítico finito $c \notin J(P_{\lambda_0})$ possui um ponto de sua órbita positiva em

$\bigcup_{i=1}^s \text{int}(D_i \setminus P_{\lambda_0}^{\ell_i}(D_i)) \cup \text{int}(D_\infty \setminus P_{\lambda_0}(D_\infty))$, digamos $P_{\lambda_0}^m(c)$. Se-
gue-se que para $\lambda \in \mathbb{C}^d$ suficientemente próximo a λ_0 temos:
 $P_\lambda^m(c(\lambda)) \in \bigcup_{i=1}^s \text{int}(D_i \setminus P_\lambda^{\ell_i}(D_i)) \cup \text{int}(D_\infty \setminus P_\lambda(D_\infty))$, o que garan-
te $\Theta^+(c(\lambda)) \cap (\bigcup_{i=1}^s \Theta^+(p_i(\lambda)) \cup \{\infty\}) = \emptyset$. Estendendo o argumen-
to para todos os demais pontos críticos finitos de $J(P_{\lambda_0})$,
concluimos que $P_\lambda \in E_4$, para $\lambda \in \mathbb{C}^d$ próximo de $\lambda_0 \in \mathbb{C}^d$. ■

Densidade de E_4 : Sejam $P_{\lambda_0} \in E_3$ e $c \notin J(P_{\lambda_0})$ ponto crítico
tais que $P_{\lambda_0}^m(c) = p$, onde $\Theta^+(p)$ é periódica de período $\ell \in \mathbb{N}$.
O sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} P(\lambda, z) = 0 \\ P^{\ell+m}(\lambda, z) = P^m(\lambda, z) \end{cases}$$

é então satisfeito para (λ_0, c) ; escolhamos $\lambda_1 \in \mathbb{C}^d$ próximo
de $\lambda_0 \in \mathbb{C}^d$ com $d(\lambda_1) \neq 0$, onde $d(\lambda)$ é o discriminante do
sistema. Concluimos que $P^{\ell+m}(\lambda_1, c(\lambda_1)) \neq P^m(\lambda_1, c(\lambda_1))$, ou se-
ja, $P^m(\lambda_1, c(\lambda_1))$ está próximo a $p(\lambda_1)$ sem coincidir com ele.
Resulta $\# \Theta^+(c(\lambda_1)) = \infty$; repetindo o raciocínio para os demais
pontos críticos, encontramos uma aproximação para P_{λ_0} em E_4 . ■

Analisaremos agora uma distinção marcante entre as ór-
bitas periódicas fortemente atratores e aquelas atratoras. Tra-
ta-se da existência na bacia de uma órbita periódica fortemente

atratora de uma folheação invariante pelo endomorfismo e que pode ser dinamicamente definida, o que lhe dará o caráter de invariância por conjugações. No caso presente, estamos nos referindo à bacia de $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$, a qual, por sinal, é completamente invariante. Lembremo-nos de que, pelo Teorema 1.1.4, existem uma vizinhança U de $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$ e um único difeomorfismo $F: U \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ ($F(0) = \infty$, $F'(0) = 1$ e $\overline{F(U)} \subset \text{int } u$) analítico tais que

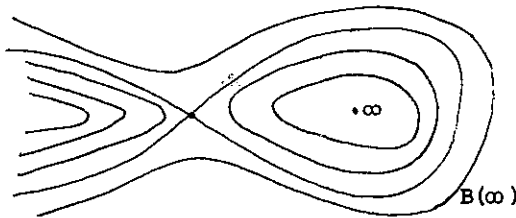
$$F(P_{\lambda_0}(z)) = F(z)^d,$$

para $P_{\lambda_0} \in E_4$.

3.1.15. Definição - A folheação \mathfrak{F}_{λ_0} em $B_{\lambda_0}(\infty)$ tem como folha passando por $z \in \bar{\mathbb{C}}$ o conjunto

$$\mathfrak{F}_{\lambda_0}(z) = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} P_{\lambda_0}^{-j} P_{\lambda_0}^j(z)}.$$

Pelo que dissemos acima, se tomarmos $U \setminus \{\infty\}$ sem pontos críticos, a folheação \mathfrak{F}_{λ_0} neste aberto é simplesmente constituída pelas imagens inversas $F^{-1}(S_r)$, com $S_r = \{z \in \mathbb{C}; |z| = r\}$ e $r > 0$ pequeno. Quando considerarmos toda a bacia de ∞ , aparecerão singularidades de \mathfrak{F}_{λ_0} nos pontos críticos de P_{λ_0} .



3.1.16. Definição - Sejam $P_{\lambda_0} \in E_4$, e $U_{\lambda_0} = F^{-1}(D_r)$, onde $D_r = \{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}$ e $r > 0$ é escolhido de modo que $U_{\lambda_0} \subset U$. Designemos por c_1, \dots, c_s os pontos críticos finitos de P_{λ_0} em $B_{\lambda_0}(\infty)$, e por $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ inteiros tais que $P_{\lambda_0}^{m_i}(c_i) \in \text{int}(U_{\lambda_0} \setminus P_{\lambda_0}(U_{\lambda_0}))$, $1 \leq i \leq s$. Então: $E_5 \subset E_4$ fica definido por:

$$P_{\lambda_0} \in E_5 \iff \exists_{\lambda_0}(P_{\lambda_0}^{m_i}(c_i)) \neq \exists_{\lambda_0}(P_{\lambda_0}^{m_j}(c_j)) \text{ para } i \neq j.$$

3.1.17. Teorema - $E_5 \subset \text{Pol}_d(\overline{\mathbb{C}})$ é aberto e denso.

O leitor não se surpreenderá portanto com a

3.1.18. Condição de Estabilidade - Os polinômios estáveis de $\text{Pol}_d(\overline{\mathbb{C}})$ estão em E_5 .

Demonstração do Teorema 3.1.17 - Como trataremos com perturbações de P_{λ_0} , utilizaremos o Teorema 1.1.5 ao invés do Teorema 1.1.4, com a conseqüente extensão da notação. A questão da abertura de E_5 é quase trivial: se $P_{\lambda_0} \in E_5$, e $P_{\lambda_0}^{m_i}(c_i) \in \text{int}(U_{\lambda_0} \setminus P_{\lambda_0}(U_{\lambda_0}))$ (onde c_1, \dots, c_s são os pontos críticos de P_{λ_0} em $B_{\lambda_0}(\infty)$), então $|F(\lambda_0, P_{\lambda_0}^{m_i}(c_i))| \neq |F(\lambda_0, P_{\lambda_0}^{m_j}(c_j))|$ se $i \neq j$. Ora, se $\lambda \in \mathbb{C}^d$ está suficientemente próximo a λ_0 , os pontos críticos de P_λ em $B_\lambda(\infty)$ são $c_1(\lambda), \dots, c_s(\lambda)$, $P_\lambda^{m_i}(c_i(\lambda)) \in \text{int}(U_\lambda \setminus P_\lambda(U_\lambda))$ e $|F(\lambda, P_\lambda^{m_i}(c_i(\lambda)))| \neq |F(\lambda, P_\lambda^{m_j}(c_j(\lambda)))|$ para $i \neq j$. Segue-se que $\exists_\lambda(P_\lambda^{m_i}(c_i(\lambda))) \neq$

$\neq \mathfrak{F}_\lambda(P_\lambda^{m_j}(c_j(\lambda)))$ para $i \neq j$, ou seja, $P_\lambda \in E_5$. . . Passemos à prova da densidade de E_5 . Dado $P_{\lambda_0} \in E_4$, observemos que se $P_\lambda^{m_i}(c_i(\lambda))$ e $P_\lambda^{m_j}(c_j(\lambda))$, $i \neq j$, pertencem sempre à mesma folha de \mathfrak{F}_λ em $\text{int}(U_\lambda \setminus P_\lambda(U_\lambda))$, para $\lambda \in \mathbb{C}^d$ próximo de $\lambda_0 \in \mathbb{C}^d$, então $|F(\lambda, P_\lambda^{m_i}(c_i(\lambda)))| = |F(\lambda, P_\lambda^{m_j}(c_j(\lambda)))|$ e então $|a| = 1$ t.q. $F(\lambda, P_\lambda^{m_i}(c_i(\lambda))) = a F(\lambda, P_\lambda^{m_j}(c_j(\lambda)))$, o que força $\lambda \in \mathbb{C}^d$ a estar somente numa hipersuperfície analítica, absurdo. Segue-se que certamente existe P_{λ_1} próximo de P_{λ_0} de modo que $P_{\lambda_1}^{m_i}(c_i(\lambda_1))$ e $P_{\lambda_1}^{m_j}(c_j(\lambda_1))$, $i \neq j$, estão em folhas distintas de \mathfrak{F}_λ . ■

Chegamos agora à nossa última condição de estabilidade. Observemos que, sendo $c_i \neq c_j$ pontos críticos de $P_{\lambda_0} \in E_5$, não ocorrerão coincidências do tipo $P_{\lambda_0}^m(c_i) = P_{\lambda_0}^n(c_j)$ para $m, n \geq 0$. Desejamos estender tal propriedade aos demais pontos críticos situados fora do conjunto de Julia. Introduzimos então $E_6 \subset E_5$ definido como: $P_{\lambda_0} \in E_6 \iff$ nunca ocorrem relações do tipo $P_{\lambda_0}^m(c_i) = P_{\lambda_0}^n(c_j)$, $i \neq j$ e $m, n \geq 0$, onde c_i e c_j são pontos críticos de P_{λ_0} fora de $J(P_{\lambda_0})$.

3.1.19. Proposição - E_6 é aberto e denso em E_5 .

Demonstração - Devemos nos preocupar somente com os pontos críticos fora da bacia de ∞ . Abertura de E_6 : sejam p_1, \dots, p_s os pontos periódicos finitos fora de $J(P_{\lambda_0})$ para $P_{\lambda_0} \in E_6$, com

períodos t_1, \dots, t_s . Tomemos discos D_1, \dots, D_s centrados nestes pontos, tais que o Teorema 1.1.2 se aplica aos mesmos em relação a $P_{\lambda_0}^{t_1}, \dots, P_{\lambda_0}^{t_s}$. Sejam $m_i \in \mathbb{N}$ tais que $P_{\lambda_0}^{m_i}(c_i) \in \bigcup_{k=1}^s \text{int}(D_k \setminus P_{\lambda_0}^{t_k}(D_k))$, onde c_i indica um ponto crítico qualquer de P_{λ_0} fora de $J(P_{\lambda_0})$. Ora, $P_{\lambda_0} \in E_6 \implies P_{\lambda_0}^{m_i}(c_i) \neq P_{\lambda_0}^{m_j}(c_j)$, $i \neq j$. Segue-se que para $\lambda \in \mathbb{C}^d$ suficientemente próximo de $\lambda_0 \in \mathbb{C}^d$ ainda temos que $P_{\lambda}^{m_i}(c_i(\lambda)) \neq P_{\lambda}^{m_j}(c_j(\lambda))$. Isto é suficiente para garantir $P_{\lambda} \in E_6$. Densidade de E_6 : consideremos dois pontos críticos distintos c_i e c_j de $P_{\lambda_0} \in E_5$. Queremos garantir $P_{\lambda_1}^{m_i}(c_i(\lambda_1)) \neq P_{\lambda_1}^{m_j}(c_j(\lambda_1))$ para $\lambda_1 \in \mathbb{C}^d$ próximo a $\lambda_0 \in \mathbb{C}^d$. Ora, consideremos o sistema

$$\begin{cases} P^{m_i}(\lambda, z) = P^{m_j}(\lambda, w) \\ \frac{\partial}{\partial z} P(\lambda, z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial w} P(\lambda, w) = 0 \end{cases}$$

e seja $d(\lambda)$ seu discriminante; escolhendo $\lambda_1 \in \mathbb{C}^d$ próximo de $\lambda_0 \in \mathbb{C}^d$ tal que $d(\lambda_1) \neq 0$, vemos que de fato a desigualdade acima fica garantida. Estendendo o argumento aos demais pares de pontos críticos, aproximamos P_{λ_0} por um polinômio em E_6 . ■

Temos então, para finalizar:

3.1.20. Condição de Estabilidade - Os polinômios estáveis de $\text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$ estão em E_G .

Veremos a seguir que o grupo de condições analisadas é mesmo suficiente para se ter estabilidade. Ou seja: o conjunto de polinômios estáveis é exatamente E_G . Como corolário, vemos que estabilidade é uma propriedade densamente satisfeita no espaço de polinômios.

§2. Construção de Conjugações.

Nosso objetivo é demonstrar o seguinte teorema.

3.2.1. Teorema ([1] - Os polinômios em E_G são estruturalmente estáveis.

Como mencionamos antes, da Proposição 3.1.19 seguir-se-á:

3.2.2. Teorema - O conjunto de polinômios estáveis é aberto e denso.

Para não acumular o leitor com excesso de notação, suporemos que $P_{\lambda_0} \in E_G$ possui somente uma órbita periódica atratora, e com período 1. Com os dados de que dispomos até o momento, seremos capazes de construir conjugações entre P_{λ_0} e seus vizinhos nos conjuntos estáveis de $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$ e do ponto fixo atrator mencionado acima.

Começemos pela bacia $B_{\lambda_0}(\infty)$, à qual aplicamos o Teorema 1.1.5. Sabemos que para uma vizinhança $\bar{U}_{\lambda_0} \ni \infty$ existe di

feomorfismo analítico $F: \bar{U}_{\lambda_0} \rightarrow \bar{D}_{r_0}$ tal que $F(0) = \infty$ e $F(P_{\lambda_0}(z)) = F(z)^{d-1}$; mais: se $\lambda \in V_1 \subset \text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$ é vizinhança conveniente de $\lambda_0 \in \mathbb{C}^d$, obtemos $F_\lambda: \bar{U}_\lambda \rightarrow \bar{D}_{r_0}$, difeomorfismo analítico dependendo analiticamente de $\lambda \in \mathbb{C}^d$ satisfazendo $F_\lambda(0) = \infty$ e $F_\lambda(P_\lambda(z)) = F_\lambda(z)^{d-1}$. Designemos por c_1, \dots, c_s os pontos críticos de P_{λ_0} em $B_{\lambda_0}(\infty)$, e por $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ os inteiros (únicos) tais que

$$P_{\lambda_0}^{m_i}(c_i) \in \text{int}(U_{\lambda_0} \setminus P_{\lambda_0}(U_{\lambda_0})), \quad 1 \leq i \leq s.$$

Conseqüentemente, podemos ainda supor que

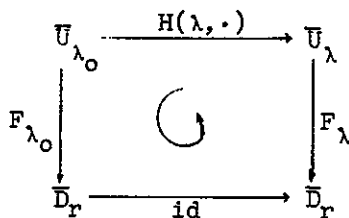
$$P_\lambda^{m_i}(c_i(\lambda)) \in \text{int}(U_\lambda \setminus P_\lambda(U_\lambda)), \quad \lambda \in V_1.$$

3.2.3. Lema - Existe uma aplicação $H: V_1 \times \bar{U}_{\lambda_0} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, contínua, satisfazendo:

- (i) $H(0, z) = z \quad \forall z \in \bar{U}_{\lambda_0}$.
- (ii) $H(\{\lambda\} \times \bar{U}_{\lambda_0}) = \bar{U}_\lambda, \quad \forall \lambda \in V_1$.
- (iii) $H(0, P_{\lambda_0}(z)) = P_\lambda(H(\lambda, z))$ para $(\lambda, z) \in V_1 \times \bar{U}$, isto é, $H(\lambda, \cdot)$ conjugua P_{λ_0} e P_λ .
- (iv) $H(0, P_{\lambda_0}^{m_i}(c_i)) = P_\lambda^{m_i}(c_i(\lambda)), \quad 1 \leq i \leq s, \quad \lambda \in V_1$.
- (v) Para cada $z \in \bar{U}_0$, a aplicação $\lambda \in V_1 \rightarrow H(\lambda, z) \in \bar{U}_\lambda$ é analítica.

O leitor julgará talvez obscura a inclusão do item (v); pode ignorá-lo, se o desejar, até o final da demonstração, quando ele se mostrará indispensável.

Demonstração - Para satisfazer (i), (ii) e (iii), basta considerar $H(\lambda, z) = F_\lambda^{-1} \circ F_{\lambda_0}(z)$, $(\lambda, z) \in V_1 \times \bar{U}_{\lambda_0}$.



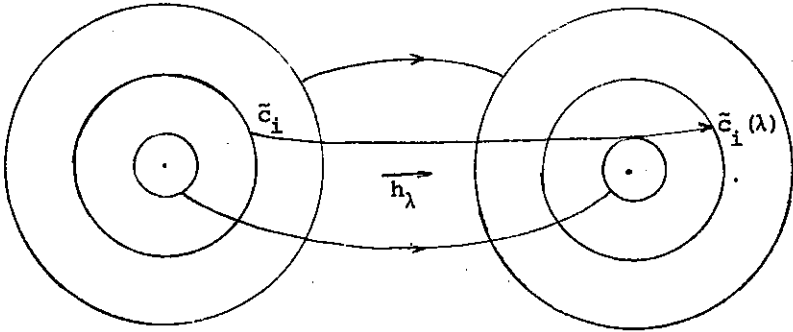
Entretanto, (IV) e (V), simultaneamente, representam uma complicação adicional. Vamos construir $h_\lambda(z) = h(\lambda, z)$, $(\lambda, z) \in V_1 \times \bar{D}_{r_0}$ tal que, além de representar H em coordenadas, satisfaz

$$h(\lambda, F_0^{m_i}(c_i)) = F_\lambda^{m_i}(c_i(\lambda)), \quad i = 1, \dots, s.$$

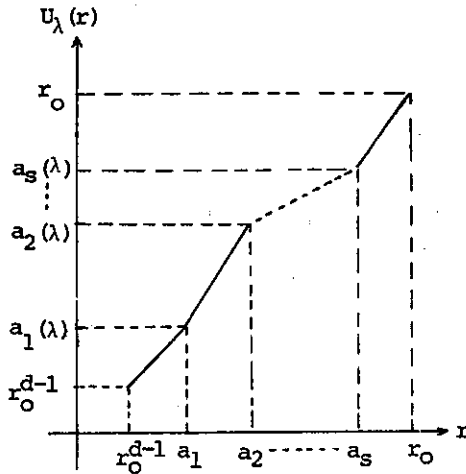
(e dependendo analiticamente em $\lambda \in V_1$, para cada $z \in \bar{D}_{r_0}$).

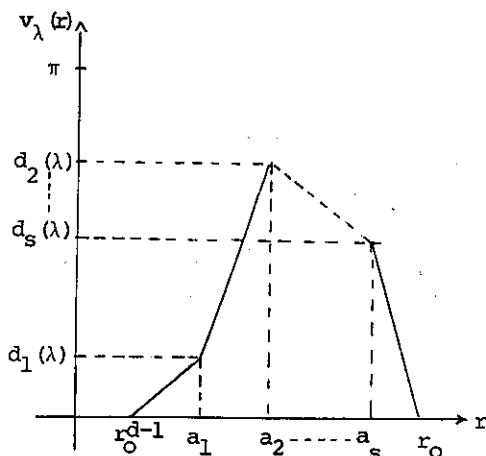
Para facilitar a notação, coloquemos $\tilde{c}_i(\lambda) = F_\lambda^{m_i}(c_i(\lambda))$.

Comecemos a construção de $h(\lambda, \cdot)$ em $\overline{D_{r_0} \setminus D_{r_0}^{d-1}}$



Definâmo-lo em coordenadas polares. Sejam $a_i(\lambda) = |\tilde{c}_i(\lambda)|$, $b_i(\lambda) = \text{Arg } \tilde{c}_i(\lambda)$ e $d_i(\lambda) = b_i(\lambda) - b_i(0)$. Dado $\lambda \in V_1$, consideramos funções lineares por partes $u_\lambda(r)$, $v_\lambda(r)$, $r_0^{d-1} \leq r \leq r_0$, como indicam os gráficos (supomos $a_1 < \dots < a_s$):





Fazemos então $h(\lambda, z) = u_\lambda(r) e^{i(\theta + v_\lambda(r))}$, onde $z = r e^{i\theta}$.

O leitor poderá facilmente verificar que $\lambda \mapsto h(z, \lambda)$ é analítica para z fixado, e $h(\lambda, \tilde{c}_i) = \tilde{c}_i(\lambda)$. Falta-nos estender

$h(\lambda, \cdot)$ a \bar{D}_{r_0} , para cada $\lambda \in V_1$. Para isso, dado $w \in D_r$,

com $r_0^{(d-1)^n} < |w| < r_0^{(d-1)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, existem $(d-1)^n$ pontos

em $D_{r_0} \setminus D_{r_0^{d-1}}$, digamos $z_1, \dots, z_{(d-1)^n}$, tais que

$(z_i)^{(d-1)^n} = w$. Portanto:

$$\begin{aligned} (h(\lambda, z_i))^{(d-1)^n} &= u_\lambda(|z_i|)^{(d-1)^n} e^{ik^n(\theta_i + v_\lambda(|z_i|))} = \\ &= u_\lambda(|z_j|)^{(d-1)^n} e^{i(d-1)^n(\theta_j + v_\lambda(|z_j|))} \cdot e^{i(d-1)^n(\theta_i - \theta_j)} = \\ &= h(\lambda, z_j)^{(d-1)^n} \cdot \left(\frac{z_i}{z_j}\right)^{(d-1)^n} = (h(\lambda, z_j))^{(d-1)^n}. \end{aligned}$$

Podemos definir então $h(\lambda, w) = h(\lambda, z_i)^{(d-1)^n}$ para qualquer escolha z_i em

$\{z_1, \dots, z_{(d-1)^n}\}$. Finalmente, se $|w| = r^{(d-1)^n}$ para $n \in \mathbb{N}$,

colocamos $h(\lambda, w) = w$. A aplicação

$$H(\lambda, z) = F_{\lambda}^{-1}(h(\lambda, F_0(z)))$$

satisfaz (i) a (v). ■

Analogamente podemos obter conjugações relativas ao ponto fixo atrator. Aplicamos o Teorema 1.4.2. Sendo $p \in \mathbb{C}$ o ponto fixo atrator de P_{λ_0} , existem uma vizinhança $U'_{\lambda_0} \ni p$ e um difeomorfismo analítico $F_{\lambda_0}: \bar{U}'_{\lambda_0} \rightarrow \bar{D}_{r_0}$ satisfazendo $F_{\lambda_0}(p) = 0$, $F'_{\lambda_0}(p) = 1$ e

$$F_{\lambda_0}(P_{\lambda_0}(z)) = a_{\lambda_0} \cdot P_{\lambda_0}(z), \quad \text{com} \quad a_{\lambda_0} = P'_{\lambda_0}(p).$$

Sendo $P_{\lambda} \in V_2$, vizinhança conveniente de P_{λ_0} em E_G , podemos admitir que o ponto fixo atrator varia analiticamente segundo uma função $p(\lambda)$, e existem \bar{U}'_{λ} vizinhança de $p(\lambda)$ e $F_{\lambda}: \bar{U}'_{\lambda} \rightarrow \bar{D}_{r_0}$ difeomorfismo analítico satisfazendo $F_{\lambda}(P_{\lambda}(z)) = a_{\lambda} \cdot P_{\lambda}(z)$, $a_{\lambda} = P'_{\lambda}(p(\lambda))$.

Digamos que c_1^i, \dots, c_q^i sejam os pontos críticos de P_{λ_0} em $E(p)$ (conjunto estável de $p \in \mathbb{C}$); existem inteiros $s_i \in \mathbb{N}$ tais que

$$P_{\lambda_0}^{s_i}(c_i^i) \in \text{int}(U_{\lambda_0} \setminus P_{\lambda_0}(U'_{\lambda_0})) ;$$

podemos supor que

$$P_{\lambda}^{s_i}(c_i^i(\lambda)) \in \text{int}(\bar{U}_{\lambda} \setminus P_{\lambda}(\bar{U}'_{\lambda})), \quad \lambda \in V_2.$$

3.2.4. Lema - Existe uma aplicação $H: V_2 \times \bar{U}_{\lambda_0}^i \rightarrow \mathbb{C}$ contínua com as propriedades seguintes.

- (i) $H(0, z) = z \quad \forall z \in \bar{U}_{\lambda_0}^i$.
- (ii) $H(\{\lambda\} \times \bar{U}_{\lambda_0}^i) = \bar{U}_{\lambda}^i, \quad \forall \lambda \in V_2$.
- (iii) $H(0, P_0(z)) = P_{\lambda}(H(\lambda, z))$ para $(\lambda, z) \in V_2 \times \bar{U}_{\lambda_0}^i$.
- (iv) $H(0, P_{\lambda_0}^{s_i}(c_i)) = P_{\lambda}^{s_i}(c_i(\lambda)), \quad 1 \leq i \leq q$.
- (v) Para cada $z \in \bar{U}_{\lambda_0}^i$, a aplicação $\lambda \in V_2 \mapsto H(\lambda, z) \in \bar{U}_{\lambda}^i$ é analítica.

A demonstração fica a cargo do leitor.

Seja então $V = V_1 \cap V_2$. O passo seguinte é facilmente previsível: se $P_{\lambda} \in V$, qualquer $p \in \bar{\mathbb{C}} \setminus J(P_{\lambda})$ está ou em $E(p_{\lambda})$ ou em $B_{\lambda}(\infty)$. Assim, procuramos estender a conjugação local entre P_{λ_0} e P_{λ} iterando-a negativamente. Denotemos por C_{λ} a união das órbitas dos pontos críticos de P_{λ} fora de $J(P_{\lambda})$.

3.2.5. Lema - Dado $z \notin J(P_{\lambda_0}) \cup C_{\lambda_0}$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ o menor inteiro tal que $P_{\lambda_0}^{n_0}(z) \in \bar{U}_{\lambda_0} \cup \bar{U}_{\lambda_0}^i$. Existe então uma única função analítica $z(\lambda)$, definida para $\lambda \in V$, tal que $z(\lambda_0) = z$ e $H_{\lambda}(P_{\lambda_0}^{m_0}(z)) = P_{\lambda}^{m_0}(z(\lambda))$.

Demonstração - Pelo teorema das funções implícitas, a função desejada pode ser definida para $\lambda \in \mathbb{C}^d$ suficientemente próximo a

$\lambda_0 \in \mathbb{C}^d$; devemos provar então que ela possui extensão analítica a todo V . Suponhamos que não: existe $\lambda_\infty \in \text{int } V$ no bordo do domínio de definição de $z(\lambda)$. O que impede a extensão para λ_∞ ? Certamente $\frac{\partial}{\partial z} P_{\lambda_\infty}^{m_0}(z(\lambda_\infty)) = 0$, ou seja existe um ponto crítico de P_{λ_∞} em $\mathbb{C}^+(z(\lambda_\infty))$. Mas $H_{\lambda_\infty}(P_{\lambda_0}^{m_0}(z)) = P_{\lambda_\infty}^{m_0}(z_{\lambda_\infty})$; pelo item (iv) dos Teoremas 3.2.3 e 3.2.4, concluímos que também $P_{\lambda_0}^{m_0}(z)$ pertence à órbita positiva de algum ponto crítico de P_{λ_0} , o que já havíamos excluído por hipótese. Segue-se que não existem em $\text{int } V$ pontos do bordo do domínio de definição de $z(\lambda)$. ■

3.2.6. Definição - Dado $z \notin J(P_{\lambda_0}) \cup C_{\lambda_0}$, definimos $H(\lambda, z) = z(\lambda)$, $\lambda \in V$, onde $z(\lambda)$ é a função analítica fornecida pelo Lema 3.2.5.

Com isto, avançamos mais um passo na construção da conjugação que temos em vista:

3.2.7. Proposição - (i) $H: V \times \overline{\mathbb{C}} \setminus (J(P_{\lambda_0}) \cup C_{\lambda_0}) \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus (J(P_\lambda) \cup C_\lambda)$ é contínua, e depende analiticamente em $\lambda \in V$ para cada $z \notin J(P_{\lambda_0}) \cup C_{\lambda_0}$ fixado; (ii) $H(\lambda, P_{\lambda_0}(z)) = P_\lambda(H(\lambda, z))$, para $\lambda \in V$, e $H(0, z) = z$, $\forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (J(P_{\lambda_0}) \cup C_{\lambda_0})$.

Falta-nos ainda injetividade e sobrejetividade de $z \mapsto H(\lambda, z) = H_\lambda(z)$, $\lambda \in V$ fixado, para afirmarmos que H_λ é conjugação entre P_{λ_0} e P_λ levando $\overline{\mathbb{C}} \setminus (J(P_{\lambda_0}) \cup C_{\lambda_0})$ em $\overline{\mathbb{C}} \setminus (J(P_\lambda) \cup C_\lambda)$. Ora, toda a construção feita até o momento foi,

digamos, "centrada" em $\lambda_0 \in V$; mas nada nos impede de realizá-la a partir de qualquer outro $\bar{\lambda} \in V$ fixado a priori. Com isto, obtemos naturalmente a inversa para $H_{\bar{\lambda}}$ como a aplicação, deste ponto de vista, que conjugua $P_{\bar{\lambda}}$ a P_{λ_0} . Resulta:

3.2.8. Proposição - $H: V \times \bar{\mathbb{C}} \setminus (J(P_{\lambda_0}) \cup C_{\lambda_0}) \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \setminus (J(P_{\lambda}) \cup C_{\lambda})$

para $\lambda \in V$ é um homeomorfismo; trata-se portanto de uma conjugação entre P_{λ_0} e P_{λ} naqueles domínios.

Até o momento, excluimos da construção os conjuntos $J(P_{\lambda_0}) \cup C_{\lambda_0}$ e $J(P_{\lambda}) \cup C_{\lambda}$, onde se concentra a complicação dinâmica dos endomorfismos em questão. O fato surpreendente é que as conjugações dadas pela Proposição 3.2.8 se estendem a toda a esfera, ainda como conjugações. Vamos abordar esta afirmativa de um ponto de vista abstrato, antes de retornar à situação que nos interessa.

3.2.9. Lema - Sejam $A \subset \bar{\mathbb{C}}$ um subconjunto qualquer e $i_{\lambda}: A \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ uma família de aplicações definidas para $\lambda \in \mathbb{D}$ satisfazendo:

(i) $i_{\lambda_0}(z) = z \quad \forall z \in A.$

(ii) i_{λ} é injetiva $\forall \lambda \in \mathbb{D}.$

(iii) fixado $z \in A$, a aplicação $\lambda \mapsto i_{\lambda}(z)$ é analítica.

Existe, então, uma única extensão $i_{\lambda}: \bar{A} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ para cada $\lambda \in \mathbb{D}$, a qual é contínua e ainda satisfaz (i), (ii) e (iii).

Em outras palavras, todo movimento analítico de um con

junto se estende ao fecho deste conjunto.

Demonstração - Podemos supor, via transformações lineares de \mathbb{C} , que os pontos $0, 1, \infty \in A$ e $i_\lambda(0) = 0, i_\lambda(1) = 1, i_\lambda(\infty) = \infty \forall \lambda \in \mathbb{D}$. Sejam $p \in \partial A$ e (x_n) seqüência em $A, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$. A seqüência de funções definida por $x_n(\lambda) = i_\lambda(x_n), \lambda \in \mathbb{D}$ é normal, pois pela condição (ii) ela evita $0, 1, \infty$. Afirmamos que duas subseqüências convergentes desta família possuem o mesmo limite. De fato: digamos que $x_{n_k}(\lambda) \rightarrow f(\lambda)$ e $x_{m_k}(\lambda) \rightarrow g(\lambda)$ uniformemente nas partes compactas de \mathbb{D} . Temos que $f(0) = p = g(0)$; se $g(\lambda) - f(\lambda)$ não for nula $\forall \lambda \in \mathbb{D}$, $\text{Im}(g-f)$ contém um disco compacto centrado em $0 \in \mathbb{C}$, de modo que $\text{Im}(x_{n_k} - x_{m_k})$, para n_k e m_k grandes, ainda contém este mesmo disco. Ora, isso significa que $x_{n_k}(\bar{\lambda}) = x_{m_k}(\bar{\lambda})$ para algum $\bar{\lambda} \in \mathbb{D}$, o que novamente contradiz (ii). Conclusão: $f(\lambda) = g(\lambda) \forall \lambda \in \mathbb{D}$, ou seja, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\lambda)$ para $\lambda \in \mathbb{D}$, na topologia de convergência em partes compactas de \mathbb{D} . Definimos então $i_\lambda(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\lambda)$; a definição, pelo mesmo argumento acima, independe da seqüência escolhida convergindo a $p \in \partial A$.

Verifiquemos as propriedades requeridas:

1) Continuidade de $i_\lambda: A \rightarrow \mathbb{C}$. Suponhamos $p_m \rightarrow p$ mas $\lim_{m \rightarrow \infty} i_\lambda(p_m) = a \neq i_\lambda(p)$. Escolhamos em A seqüências $x_n^{(m)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_m$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, selecionemos $n(m)$ tal que

$|i_\lambda(p_m) - i_\lambda(x_{n(m)}^{(m)})| < \frac{1}{m}$ e $|p_m - x_{n(m)}^{(m)}| < \frac{1}{m}$. Segue-se que,

ao tender $m \rightarrow \infty, x_{n(m)}^{(m)} \rightarrow p$ mas $i_\lambda(x_{n(m)}^{(m)}) \rightarrow a \neq i_\lambda(p)$,

absurdo.

2) $i_0(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p.$

3) Digamos que $i_{\bar{\lambda}}(p) = i_{\bar{\lambda}}(q)$ para algum $\bar{\lambda} \in \mathbb{D}$. Se $\lambda \mapsto i_{\lambda}(p) - i_{\lambda}(q)$ não é identicamente nula, então sua imagem contém algum disco compacto centrado em $0 \in \bar{\mathbb{C}}$; este mesmo disco deve estar contido na imagem de $\lambda \mapsto i_{\lambda}(x) - i_{\lambda}(y)$ para $x, y \in A$ próximos de p e q , respectivamente. Então existe $\lambda' \in \mathbb{D}$ satisfazendo $i_{\lambda'}(x) = i_{\lambda'}(y)$, absurdo.

4) Sendo limite uniforme de funções analíticas, $\lambda \mapsto i_{\lambda}(p)$ também é analítica para $p \in \partial A$. ■

O Teorema 3.2.1 é uma consequência imediata do Lema 3.2.9. De fato, pela Proposição 3.2.7, a família de aplicações $H_{\lambda}: \bar{\mathbb{C}} \setminus (J(P_{\lambda_0}) \cup C_{\lambda_0}) \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ satisfaz todas as hipóteses do Lema 3.2.9, de modo que se estende a $\bar{\mathbb{C}} = \overline{\bar{\mathbb{C}} \setminus (J(P_{\lambda_0}) \cup C_{\lambda_0})}$; a observação feita logo após este lema nos permite encontrar a inversa desta extensão. Segue-se que $H_{\lambda}: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ é homeomorfismo $\forall \lambda \in V$ e $H_{\lambda}(P_{\lambda_0}(z)) = P_{\lambda}(H_{\lambda}(z))$, ou seja, H_{λ_0} é conjugado a $H_{\lambda} \forall \lambda \in V$. O Teorema 3.2.1 está, portanto, demonstrado.

§3. Geometria das Conjugações

As conjugações construídas acima possuem a interessante propriedade seguinte (mantemos a notação anterior):

3.3.1. Teorema - A conjugação $H_\lambda: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ entre P_{λ_0} e P_λ , para $\lambda \in \mathbb{V}$, é quase conforme.

Para demonstrar este teorema, precisamos de uma versão métrica local da Definição 2.1.3.

3.3.2. Definição - Seja $\varphi: U \rightarrow U'$ homeomorfismo entre os abertos U e U' de \mathbb{C} . A dilatação circular de φ em $z \in U$ é

$$H_\varphi(z) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max_{|x-z|=r} |\varphi(x) - \varphi(z)|}{\min_{|x-z|=r} |\varphi(x) - \varphi(z)|}$$

Isto é, $H_\varphi(z)$ mede como φ deforma pequenos círculos ao redor de $z \in U$.

3.3.3. Teorema - Se $H_\varphi(z) < \infty \quad \forall z \in U$ e $H_\varphi(z) \leq k$ para quase todo ponto $z \in U$, então φ é quase conforme.

Com esta caracterização, podemos mesmo estender nossa definição de aplicação quase conforme para homeomorfismos entre subconjuntos de espaços métricos, da maneira óbvia.

3.3.4. Complemento ao Lema 3.2.9 - As extensões $i_\lambda: \bar{\mathbb{A}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ para $\lambda \in \mathbb{D}$ são quase conformes.

Demonstração - Fixemos $0 \leq r < 1$ e consideremos a família de

funções $\varphi_{x,y,z}(\lambda) = \frac{i_\lambda(x) - i_\lambda(z)}{i_\lambda(y) - i_\lambda(z)}$, $|\lambda| \leq r$ e $x,y,z \notin$

$\{0,1,\infty\}$. ($x,y,z \in \bar{\mathbb{A}}$). Vamos impor a condição $|x-z| = |y-z|$.

Ora, devido à injetividade de cada i_λ , $\lambda \in \mathbb{D}$, vemos que a fa-

mília é normal por evitar $0, 1, \infty$. Como $|\varphi_{x,y,z}(0)| = 1$

$\forall (x,y,z)$, concluímos que a família é uniformemente limitada.

Conclusão: $H_{1,\lambda}(z) \leq k$ para $z \in \bar{A} \setminus \{0, 1, \infty\}$ e $|\lambda| \leq r$. Renomeando os pontos $0, 1, \infty$ em A , e fazendo $r \rightarrow 1$, completamos a demonstração. ■

Vemos que o Teorema 3.3.1 é uma consequência imediata deste complemento.

Temos, finalmente, o seguinte quadro em $\text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$: um subconjunto aberto e denso é constituído por polinômios estruturalmente estáveis. Em cada componente conexa deste subconjunto, dois polinômios são conjugados por um homeomorfismo quase conforme.

Referências

- [1] - Demonstrado em R. Mañé, P. Sad e D. Sullivan: On the dynamics of rational maps, preprint IMPA, 1982. A versão geral, para famílias quaisquer de endomorfismos, foi começada naquele trabalho e completada por D. Sullivan e W. Thurston: Note on structural stability of rational maps, preprint IHES, 1982. Uma questão ainda em aberto é a existência ou não de um endomorfismo estável que possui um anel de Herman. Outra questão refere-se à existência de endomorfismos estáveis cujo conjunto de Julia é $\bar{\mathbb{C}}$. O leitor pode verificar facilmente que os exemplos dados no Capítulo 1 não são estáveis. O motivo é o aparecimento de pontos críticos em órbitas negativas de pontos periódicos. Quanto a este tipo de ocorrência para polinômios de grau 2, consultar também o trabalho mencionado de Douady e Hubbard.

CAPÍTULO 4

HIPERBOLICIDADE

Seguimos até o momento caminho não usual na Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Em geral, na busca de sistemas estáveis, impõem-se condições permitindo controlar a dinâmica em suas partes complicadas, de uma maneira tal que o controle se estenda às perturbações ([1]). Ora, o que fizemos no Capítulo 3 foi exclusivamente condicionar aspectos simples da dinâmica em suas partes "fáceis". A pergunta natural que surge, a ser estudada agora, é de como se relacionam estes aspectos complementares.

§1. O Conjunto de Julia de um Endomorfismo Hiperbólico.

Introduzimos nesta seção o conceito de hiperbolicidade de duas maneiras distintas. Suporemos sempre $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$ fora do conjunto de Julia.

4.1.1. Definição - Seja $f \in \text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$. Diremos que f é hiperbólica se $\lim_{n \rightarrow \infty} |(f^n)'(z)| = \infty \quad \forall z \in J(f)$.

4.1.1'. Definição - f é hiperbólica quando existem $C > 0$ e $\lambda > 1$ de modo que $|(f^n)'(z)| \geq C \lambda^n$ para $n > 0$.

Observe-se que a condição dada na Definição 4.1.1 é satisfeita pelos pontos periódicos repulsores de $J(f)$; a hiperbo

licidade, portanto estende-a a seu fecho.

Para ver a equivalência entre as definições acima, basta ver que a primeira implica a seguinte. Devido à compacidade de $J(f)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|(f^N)'(z)| > 1 \quad \forall z \in J(f)$; escolhamos $\lambda > 1$ de modo que $|(f^N)'(z)| > \lambda^N$. Definimos agora $C = \min_{1 \leq i \leq N-1} (|(f^i)'(z)| / \lambda^i)$; é claro que $C > 0$. Agora, se $n = j^{N+1}$, vemos que:

$$|(f^n)'(z)| = |(f^i)'(z)| \cdot |(f^{jN})'(f^i(z))| \geq C \lambda^i \cdot \lambda^{jN} = C \lambda^n .$$

É de se esperar que as características próprias dos endomorfismos forneçam critérios para hiperbolicidade.

4.1.2. Teorema - $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\bar{\mathbb{C}})$ é hiperbólico \iff não existem em $J(f)$ órbitas periódicas racionalmente indiferentes nem pontos críticos de f .

Demonstração - Se f é hiperbólico, não existem em $J(f)$ órbitas periódicas indiferentes nem pontos críticos, pelas definições anteriores. Reciprocamente, indiquemos por $C_f = \{\mathcal{O}^+(p), p \text{ ponto crítico de } f\}$. A condição dada implica em $\bar{C}_f \cap J(f) = \emptyset$. Sejam $x_0 \in J(f)$, e $r > 0$ escolhido de modo a $D_n = \{z \in \mathbb{C}; |z - f^n(x_0)| < r\} \cap \bar{C}_f = \emptyset$. Podemos então definir a inversa analítica para f^n :

$$g_n: D_n \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, \quad g_n(f^n(x_0)) = x_0 .$$

Sem perda de generalidade, podemos admitir que $\# \bigcup_{f'(p)=0} \mathcal{O}^-(p) > 2$ (caso contrário, teríamos $f(z) = z^{\pm d}$ após uma mudança de coor-

denadas, e então hiperbolicidade segue-se imediatamente). Como $g_n(D_n)$ é disjunto deste conjunto, vemos que $\{g_n \circ i^{(n)}\}_{n \geq 0}$ é normal, onde $i^{(n)}(z) = z + f^n(x_0)$. Seja $h(z) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} g_{n_k} \circ i_{n_k}(z)$ uma função limite desta família; temos $h(0) = x_0$. Se existir um disco $D \subset \text{Im } h$, vemos que $f^{n_k}(D) \subset D_{n_k} \forall n_k$, o que é absurdo pelo fato de $\{f^{n_k}\}_{n_k}$ não ser normal. Segue-se que $h(0) = x_0$, o que implica $|g'_{n_k}(f^{n_k}(x_0))| \rightarrow 0$ e portanto $\lim_{n_k \rightarrow \infty} |(f^{n_k})'(x_0)| = \infty$.

Uma consequência imediata é que não existem pétalas de órbitas racionalmente indiferentes como componentes cíclicas do complementar do conjunto de Julia. Podemos dizer mais: não existem domínios singulares como veremos a seguir.

4.1.3. Lema - Seja $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\bar{\mathbb{C}})$ hiperbólica. Existem então uma métrica Riemanniana $\| \cdot \|$ de classe C^∞ em $\bar{\mathbb{C}}$ e $\lambda' > 1$ de modo que $\|f'(x) \cdot v\|_{f(x)} > \lambda' \|v\|_x$ para todo $x \in J(f)$ (obs.: $\bar{\mathbb{C}}$ está sendo vista como variedade real).

Demonstração - Pela Definição 4.1.1', existem $C > 0$ e $\lambda > 1$ de modo que $|(f^n)'(x) \cdot v| > C \lambda^n |v| \forall x \in J(f)$.

Consideremos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C \lambda^{n_0} > 1$, e definamos $\|v\|_x = \frac{1}{n_0} (|v| + |f'(x) \cdot v| + \dots + |(f^{n_0-1})'(x) \cdot v|)$, para $x \in \bar{\mathbb{C}}$ numa vizinhança de $J(f)$; a seguir, estendemos $\| \cdot \|$ de modo C^∞ a toda a esfera. Temos então para $x \in J(f)$:

$$\begin{aligned} \|f'(x) \cdot v\|_{f(x)} &= \frac{1}{n_0} (|f'(x) \cdot v| + |(f^2)'(x) \cdot v| + \dots + |(f^{n_0})'(x) \cdot v|) = \\ &= \frac{1}{n_0} (|v| + |f'(x) \cdot v| + \dots + |(f^{n_0-1})'(x) \cdot v| + |(f^{n_0})'(x) \cdot v| - |v|) = \\ &= \|v\|_x + \frac{|(f^{n_0})'(x) \cdot v| - |v|}{n_0} \geq \|v\|_x \left(1 + \frac{C \lambda^{n_0-1}}{n_0} \cdot \frac{|v|}{\|v\|_x} \right) \end{aligned}$$

Seja $\mu > 1$ tal que $|f'(x)| < \mu \quad \forall x \in J(f)$. Então

$$\|v\|_x \leq \frac{1}{n_0} |v| (1 + \mu + \dots + \mu^{n_0-1}) = \frac{|v| (\mu^{n_0} - 1)}{n_0 (\mu - 1)}; \text{ segue-se que:}$$

$$\|f'(x) \cdot v\|_{f(x)} \geq \|v\|_x \left(1 + \frac{C \lambda^{n_0-1}}{n_0} \cdot \frac{n_0 (\mu - 1)}{\mu^{n_0-1}} \right) = \|v\|_x \left(1 + \frac{(C \lambda^{n_0-1}) (\mu - 1)}{\mu^{n_0-1}} \right)$$

Fazendo $\lambda' = 1 + \frac{(C \lambda^{n_0-1}) (\mu - 1)}{\mu^{n_0-1}}$, vemos que $\|f'(x) \cdot v\|_{f(x)} \geq$

$$\geq \lambda' \|v\|_x.$$

4.1.4. Proposição - Seja $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$. As componentes cíclicas de $J(f)$ são as componentes das bacias de órbitas periódicas atratoras ou fortemente atratoras.

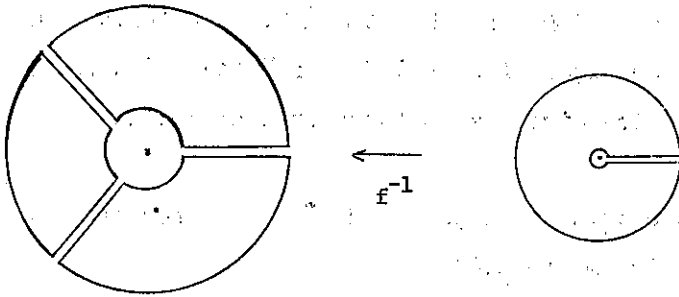
Demonstração - Vamos usar $\|f'(x)\|$ para indicar a norma de $f'(x)$ de acordo com o Lema 4.1.3. Seja $r > 0$ tal que no disco $D_r(x_0)$ de raio r centrado em $x_0 \in J(f)$ tenhamos $\|(f^{-1})'(x)\| < 1$ $\forall x \in D_r(x_0)$ (e para todos os ramos de f^{-1}). Sendo $U = \bigcup_{x_0 \in J(f)} D_r(x_0)$, vemos que $W = f^{-1}(U) \subset \text{int } \bar{U}$. Consequentemente, $f(\bar{W}) \subset \bar{U}$. Se A é componente cíclica de $J(f)$

com período. $l \in \mathbb{N}$ e $K = A \cap \bigcup W$, concluímos que $f^l(K) \subset \text{int } K$, ou seja, $A \cup f(A) \cup \dots \cup f^{l-1}(A)$ é a bacia de uma órbita periódica atratora ou fortemente atratora. ■

4.1.5. Corolário - O espaço $H_d(\mathbb{C})$ de endomorfismo hiperbólicos é aberto em $\text{End}_d(\mathbb{C})$.

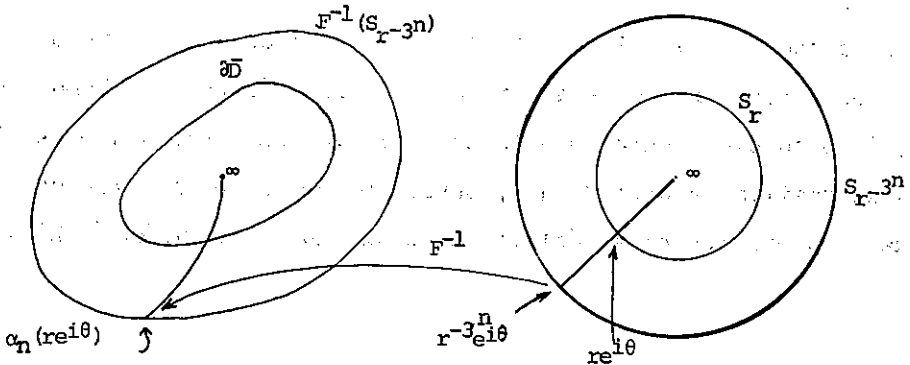
Demonstração - Pelo Teorema 4.1.2 e Proposição 4.1.5, todos os pontos críticos de $f_0 \in \text{End}_d(\mathbb{C})$ estão em conjuntos estáveis de órbitas periódicas atradoras ou fortemente atradoras. O mesmo vale para $f \in V$, onde $V \subset \text{End}_d(\mathbb{C})$ é uma vizinhança de f_0 . Novamente pelo Teorema 4.1.2, $V \subset H_d(\mathbb{C})$. ■

4.1.6. Exemplos - O leitor pode verificar facilmente que os exemplos 1.5.1 e 1.5.2 são hiperbólicos. Observe-se a diferença radical entre seus conjuntos de Julia, do ponto de vista topológico. Veremos agora um exemplo hiperbólico onde o conjunto de Julia é uma curva contínua, que não é simples. Seja $f(z) = \frac{-z^3 + 3z}{2}$ ([2]). Os pontos críticos de f são $-1, 1$ e ∞ ; além disso, $f(1) = 1$ e $f(-1) = -1$, de modo que f possui 3 pontos fixos fortemente atratores e é hiperbólica. Temos que $B(\infty)$ é completamente invariante e simplesmente conexa; esta última afirmativa decorre de que, sendo D um disco em torno de ∞ , suas imagens inversas são discos encaixados cuja união é $B(\infty)$.



Outra observação é que $J(f) = \partial B(\infty)$; de fato, é óbvio que $\partial B(\infty) \subset J(f)$, e a inclusão contrária segue-se da invariância de $B(\infty)$. Procuraremos então parametrizar $\partial B(\infty)$. Consideremos inicialmente a conjugação analítica $F: \bar{D} \rightarrow \bar{D}_r$, onde $\bar{D}_r = \{z \in \bar{\mathbb{C}}; |z| \leq r\}$ para r suficientemente grande, $F(\infty) = \infty$ e $F'(\infty) = 1$, tal que $F(f(z)) = F(z)^3$. Ela se estende, por continuação analítica, a $F: B(\infty) \rightarrow [D]$ de modo que $F(f(z)) = F(z)^3$. Seja $\alpha: S_r \rightarrow \partial \bar{D}$ a restrição de F^{-1} a S_r ; podemos definir sucessivamente $\alpha_1: S_r \rightarrow f^{-1}(\partial \bar{D}), \dots, \alpha_n: S_r \rightarrow f^{-n}(\partial \bar{D}), \dots$ como

$$\alpha_n(r e^{i\theta}) = F^{-1}(r^{-3^n} e^{i\theta}).$$



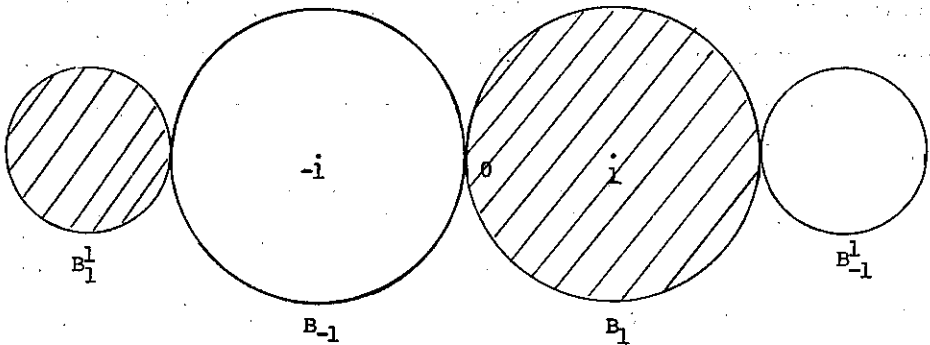
Afirmação: (α_n) é sequência uniformemente convergente de funções.

Utilizemos a métrica descrita no Lema 4.1.3. Seja U a vizinhança de $J(f)$ obtida na demonstração do Lema 4.1.3; temos $\|(f^{-1})'(x)\| < \mu < 1$ para $x \in U$. Agora, $\alpha_n(S_r) \subset U$ para $n \geq N$ suficientemente grande. Segue-se que $d(\alpha_n(re^{i\theta}), \alpha_{n+1}(re^{i\theta})) \leq \iota(R_n(\theta))$, onde $R_n(\theta) = F^{-1}(\{se^{i\theta}; r^{\frac{1}{2}-(n+1)} < s < r^{\frac{1}{2}-n}\})$, e ι é o seu comprimento. Ora, $\iota(R_{n+1}(\theta)) < \mu \iota(R_n(\theta))$; como $\iota(R_N(\theta)) \leq L$ para $\theta \in S^1$, concluímos que α_n é uniformemente convergente.

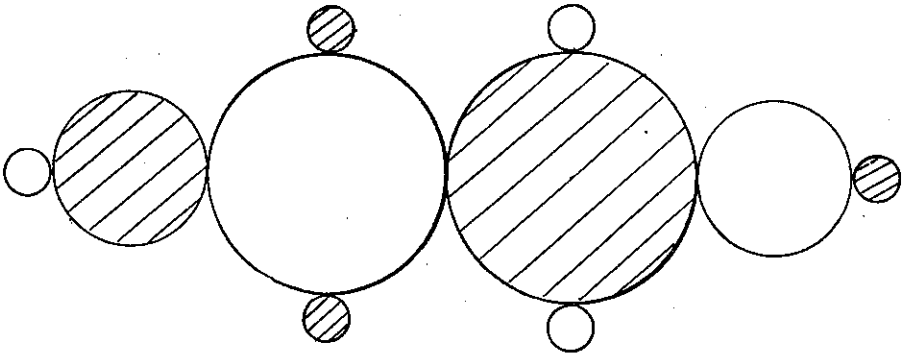
A parametrização desejada para $\partial B(\infty)$ é $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$; evidentemente trata-se de uma função contínua. Em definitivo $\partial B(\infty) = J(f)$ não será uma curva de Jordan; mostraremos agora que $\overline{B(\infty)}$ possui uma infinidade de componentes conexas. Todas estas componentes são pre-imagens das bacias dos pontos fixos fortemente atratores ± 1 .

Observemos a simetria dinâmica de f em relação a $O \in \mathbb{C}$: $f(-z) = -f(z)$. Assim, qualquer componente de $\overline{B(\infty)}$ possui sua companheira simétrica.

As bacias B_1 e B_{-1} de 1 e -1 , respectivamente, são simplesmente conexas e seus bordos se tocam em $O \in \mathbb{C}$ (o qual é ponto fixo repulsor). Cada uma destas componentes coincide com duas de suas pré-imagens por f ; portanto, existem pré-imagens distintas B_1' e B_{-1}' , indicadas na figura (usamos $f(\pm \sqrt{3}) = 0$).



Consideramos agora $f: B_1^1 \rightarrow B_1$, que é um difeomorfismo, e $f: B_1 \rightarrow B_{-1}$, que é um recobrimento ramificado 2 a 1. Obtemos para $\sqrt{3}$ uma pré-imagem em ∂B_1^1 e duas em ∂B_1 ; assim, das três pré-imagens de B_{-1}^1 , duas tocam B_1 e uma toca B_1^1 (em pontos do bordo). Pela simetria descrita acima, encontramos também as pré-imagens de B_1^1



O processo se repete sucessivamente, de modo que encontramos em $\overline{B(\infty)}$ uma infinidade de componentes conexas. O leitor pode ver a complexidade da curva $J(f)$; as pré-imagens su

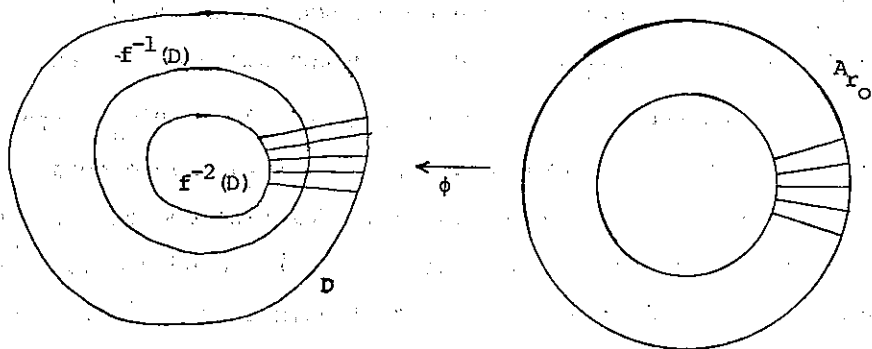
cessivas de $0 \in \mathbb{C}$, que constituem um subconjunto denso $J(f)$, correspondem sempre a pontos duplos da curva. Pode-se mesmo provar que $J(f)$, no caso presente, não possui tangente em ponto algum ([3]).

Vamos aproveitar a discussão anterior para justificar a afirmativa feita no exemplo 1.5.1: se $f \in \text{End}_d(\bar{\mathbb{C}})$ possui dois pontos fixos, atratores ou fortemente atratores, $p_1, p_2 \in \bar{\mathbb{C}}$, e se $B(p_1), B(p_2)$ são completamente invariantes, então $\bar{\mathbb{C}} = B(p_1) \cup J(f) \cup B(p_2)$, e $J(f)$ é uma curva de Jordam.

Observemos inicialmente que $B(p_1)$ e $B(p_2)$ são simplesmente conexos. De fato, digamos que $B(p_1)$ não o seja, o que significa ser $\int B(p_1)$ desconexo. Segue-se que existe uma componente conexa maximal de $\int B(p_1)$ em $\bar{\mathbb{C}}$ disjunta de $\overline{B(p_2)}$, e portanto, $J(f) \neq \partial B(p_2)$, o que contradiz a invariância completa de $B(p_2)$.

Se provarmos que existem $d-1$ pontos críticos em $B(p_1)$ e outro tanto em $B(p_2)$, concluiremos que $\bar{\mathbb{C}} = B(p_1) \cup J(f) \cup B(p_2)$. Seja $D \subset B(p_1)$ um disco centrado em $p_1 \in \mathbb{C}$ (na métrica de Poincaré) suficientemente grande para conter todas as pré-imagens de $p_1 \in \mathbb{C}$; então, $f^{-1}(D)$ é conexo, e como $B(p_1) \subset \bar{\mathbb{C}}$ é simplesmente conexo, o mesmo podemos dizer de $f^{-1}(D)$. Concluimos que $f|_{\partial f^{-1}(D)}$ recobre ∂D $d \in \mathbb{N}$ vezes, o que implica a existência de pelo menos $d-1$ valores críticos de f em D . Pelo mesmo argumento, encontramos pelo mesmo $d-1$ pontos críticos em $B(p_2)$.

Finalmente, provemos que $J(f)$ é uma curva de Jordan, utilizando uma pequena variação do argumento empregado anteriormente. Mapeamos conformemente o anel $A_{r_0} = \{1 < |z| < r_0\}$ sobre $f^{-1}(D) \setminus D$. Os raios em A_{r_0} são levados em linhas de $f^{-1}(D) \setminus D$ ortogonais a ∂D e $\partial f^{-1}(D)$; iterando f negativamente, estas linhas serão prolongadas sempre de modo ortogonal a $f^{-2}(\partial D), \dots, f^{-n}(\partial D), \dots$.



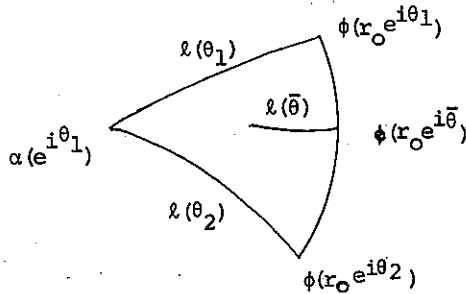
Portanto, podemos considerar parametrizações sucessivas

$$\alpha_n: S^1 \rightarrow \partial f^{-n}(D)$$

dados por $\alpha_n(e^{i\theta}) =$ interseção com $\partial f^{-n}(D)$ da linha $\iota(\theta)$ que passa por $\varphi(r_0 e^{i\theta})$. Exatamente como antes provamos que (α_n) é seqüência uniformemente convergente; tomamos $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$. A

diferença é que somos capazes agora de provar a injetividade de α . Suponhamos, por absurdo que $\alpha(e^{i\theta_1}) = \alpha(e^{i\theta_2})$. O leitor pode facilmente verificar que α não é constante em S^1 , de modo que podemos supor que $\alpha(e^{i\bar{\theta}}) \neq \alpha(e^{i\theta_1}) = \alpha(e^{i\theta_2})$ para $\bar{\theta} \in (\theta_1, \theta_2)$. Ora, se R é a região limitada pelo arco $(\varphi(r_0 e^{i\theta_1}), \varphi(r_0 e^{i\theta_2}))$

e pelas linhas $\ell(\theta_1)$ e $\ell(\theta_2)$, vemos que $\alpha(e^{i\bar{\theta}}) \in \text{RU} \{ \alpha(e^{i\theta_1}) \}$



Agora, se aplicamos o mesmo argumento a partir de $B(p_2)$, por ser $R \subset B(p_2)$ concluímos que $\alpha(e^{i\bar{\theta}}) = \alpha(e^{i\theta_1})$, contradição. Segue-se que α é 1-1, e $J(f)$ é uma curva de Jordan.

Descrevemos agora uma interessante propriedade geométrica ([3]) do conjunto de Julia de um endomorfismo hiperbólico. Ela diz essencialmente que a nível infinitesimal o conjunto de Julia repete sua estrutura macroscópica com distorção não muito grande.

4.1.7. Definição - Seja $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$. Dizemos que $J(f)$ é microscopicamente auto-similar se existem $r_0 > 0$ e constantes positivas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\forall r < r_0$ e $\forall z \in J(f)$ existe um homeomorfismo $h: D_r(z) \cap J(f) \rightarrow J(f)$ satisfazendo,

$$\frac{\beta}{r} |x-y| \leq |h(x) - h(y)| \leq \frac{\alpha}{r} |x-y|$$

(obs.: h depende de $r \in \mathbb{R}$ e de $z \in J(f)$).

Em outras palavras, se $s: D_r(z) \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $s(y) = z + (1/r)(y-z)$

(ampliação do disco de raio r até o raio 1), então:

$$\beta |s(x) - s(y)| \leq |h(x) - h(y)| \leq \alpha |s(x) - s(y)|.$$

Portanto, o conjunto $D_r(z) \cap J(f)$ amplificado linearmente até um tamanho bem definido praticamente reproduz uma parte de $J(f)$, de modo geométrico.

4.1.8. Teorema - Se $f \in H_d(\bar{\mathbb{C}})$, então $J(f)$ é microscopicamente auto-similar.

Para demonstrar este teorema podemos trocar f por f^n para $n \in \mathbb{N}$ qualquer; logo, suporemos $|f'(x)| > \lambda > 1$ para $x \in J(f)$.

4.1.9. Lema - Seja $r_0 > 0$ tal que $|f'(x)| > \lambda > 1 \quad \forall x \in D_{r_0}(z)$, $\forall z \in J(f)$. Existe $M > 0$ tal que se $x, y \in D_{r_0}^{(n)}(z) = \{w \in \bar{\mathbb{C}}; |f^i(w) - f^i(z)| < r_0 \text{ para } 0 \leq i \leq n\}$, então

$$\frac{1}{M} < \frac{|(f^{n+1})'(x)|}{|(f^{n+1})'(y)|} < M.$$

Observe-se que M independe de $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração - Temos que

$$\begin{aligned} \log \frac{|(f^{n+1})'(x)|}{|(f^{n+1})'(y)|} &= \log |(f^{n+1})'(x)| - \log |(f^{n+1})'(y)| = \\ &= \log |f'(x) \cdot f'(f(x)) \dots f'(f^n(x))| - \log |f'(y) \cdot f'(f(y)) \dots f'(f^n(y))| = \\ &= \sum_{j=0}^n \log |f'(f^j(x))| - \log |f'(f^j(y))| \leq K \sum_{j=0}^n |f^j(x) - f^j(y)| \leq \end{aligned}$$

$$\leq K(|f^n(x) - f^n(y)| + \mu|f^n(x) - f^n(y)| + \dots + \mu^n|f^n(x) - f^n(y)| = \\ = \frac{K}{1-\mu} |f^n(x) - f^n(y)| \leq \frac{Kr_0}{1-\mu} \quad \text{onde } 0 < \mu < \lambda^{-1}$$

Demonstração do Teorema 4.1.8 - Escolhamos $r_0 > 0$ satisfazendo a hipótese do Lema 4.1.9, e de modo que $f: D_{r_0}(z) \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ seja 1-1, $\forall z \in J(f)$. Fixemos agora $z \in J(f)$ e $r < r_0$; seja $\bar{n} \in \mathbb{N}$ o menor inteiro tal que diâmetro $(f^{\bar{n}}(D_r(z))) \geq 2r_0$. Portanto, existem $x', y' \in D_r(z)$ tais que $|f^{\bar{n}}(x') - f^{\bar{n}}(y')| \geq 2r_0$.

Ora, escolhamos $\theta' \in \overline{D_r(z)}$ de modo que

$$|f^{\bar{n}}(x') - f^{\bar{n}}(y')| \geq |(f^{\bar{n}})'(\theta')| |x' - y'|$$

(isto é uma consequência da injetividade).

Segue-se que $|(f^{\bar{n}})'(\theta')| \geq \frac{r_0}{r}$.

Dados $x, y \in D_r(z)$, para algum $\theta \in \overline{D_r(z)}$ temos

$$|f^{\bar{n}}(x) - f^{\bar{n}}(y)| \geq |(f^{\bar{n}})'(\theta)| |x-y|;$$

pele Lema 4.1.9,

$$|f^{\bar{n}}(x) - f^{\bar{n}}(y)| \geq M|(f^{\bar{n}})'(\theta')| |x-y| \geq \frac{Mr_0}{r} |x-y|.$$

Para obter a desigualdade oposta, escolhamos $\tilde{x}, \tilde{y} \in D_r(z)$ tais que $|\tilde{x} - \tilde{y}| = r$. Existe $\tilde{\theta} \in \overline{D_r(z)}$ satisfazendo:

$$|f^{\bar{n}-1}(\tilde{x}) - f^{\bar{n}-1}(\tilde{y})| \geq |(f^{\bar{n}-1})'(\tilde{\theta})| |\tilde{x} - \tilde{y}|;$$

daí: $|(f^{\bar{n}-1})'(\tilde{\theta})| \cdot r \leq 2r_0 \implies |(f^{\bar{n}-1})'(\tilde{\theta})| \leq \frac{2r_0}{r}$.

Logo:

$$|f^{\bar{n}-1}(x) - f^{\bar{n}-1}(y)| \leq \max_{\theta \in D_r(z)} |(f^{\bar{n}-1})'(\theta)| |x-y| \leq$$

$$\leq M |(f^{\bar{n}-1})'(\tilde{\theta})| |x-y| \Rightarrow |f^{\bar{n}-1}(x) - f^{\bar{n}-1}(y)| \leq \frac{2Mr_0}{r} |x-y|$$

para $x, y \in D_r(z)$.

Finalmente: $\exists k > 0$ t.q. $|f^{\bar{n}}(x) - f^{\bar{n}}(y)| \leq k |f^{\bar{n}-1}(x) - f^{\bar{n}-1}(y)|$.

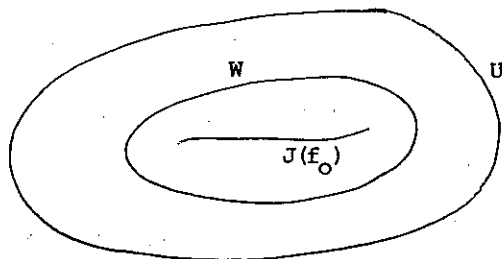
Dai: $|f^{\bar{n}}(x) - f^{\bar{n}}(y)| \leq \frac{2Mkr_0}{r} |x-y|$ para $x, y \in D_r(z)$.

Segue-se que podemos tomar $h = f^{\bar{n}}$. ■

§2. Estabilidade do Conjunto de Julia

Desejamos discutir agora as razões pelas quais a condição de hiperbolicidade imposta a um endomorfismo garante-lhe a estabilidade pelo menos em seu conjunto de Julia. Vimos na Proposição 4.1.4. que dado $f_0 \in \text{End}_d(\mathbb{C})$, existe um aberto U em torno de $J(f_0)$ de tal modo que $W = f_0^{-1}(U) \subset \text{int } \bar{U}$; portanto, $f_0(\bar{W}) \subset \bar{U}$. Escolhamos uma vizinhança $f_0 \subset V \subset \text{End}_d(\mathbb{C})$ onde $f(\bar{W}) \subset \bar{U} \quad \forall f \in V$. Como os pontos de \bar{U} jamais retornam a U sob iterações de $f \in V$, concluímos que $J(f) \subset U \quad \forall f \in V$. Temos assim desde já um caráter de estabilidade topológica para $J(f_0)$. Observemos ainda que $J(f) = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(U)$

$\forall f \in V$.



4.2.1. Definição - Dizemos que $f_0 \in \text{End}_d(\mathbb{C})$ é Julia-estável (J-estável para simplicidade) se existem uma vizinhança $N(f_0)$ de f_0 em $\text{End}_d(\mathbb{C})$ e uma função contínua $H: N(f_0) \rightarrow C^0(J(f_0), \mathbb{C})$ tais que:

- (i) $N(f_0) = \text{Id}$
- (ii) $N(f)$ é um homeomorfismo de $J(f_0)$ sobre $J(f)$,
 $\forall f \in N(f_0)$.
- (iii) $H(f) \circ f_0 = f \circ H(f) \quad \forall z \in J(f_0), \quad \forall f \in N(f_0)$.

4.2.2. Teorema - Os endomorfismos hiperbólicos são J-estáveis.

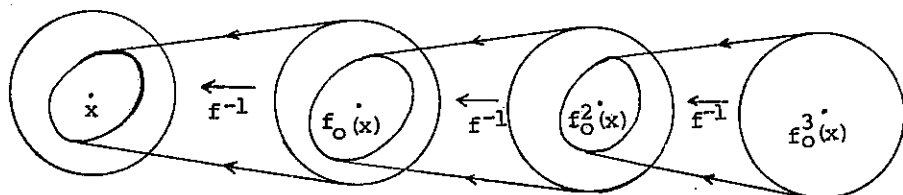
Apresentaremos uma demonstração bastante geométrica. Sugerimos ao leitor trabalhar em outra, envolvendo o Lema 3.2.9. Os movimentos analíticos a serem considerados serão aqueles executados pelas órbitas periódicas do conjunto de Julia.

Demonstração do Teorema 4.2.2. Vamos usar a métrica introduzida no Lema 4.1.3. Seja $2r > 0$ t.q. $\|(f_0^{-1})'(y)\| < \lambda^{-1}$

$\forall y \in D_{2r}(x), \forall x \in J(f_0)$. Temos então $f_0^{-1}(D_r(x)) \subset$
 $\subset \bigcup_{i=1}^d D_{\lambda^{-1}r}(x_i)$, onde $f^{-1}(x) = \{x_1, \dots, x_d\}$. Se $N(f_0) \subset$
 $\subset \text{End}_d(\bar{C})$ é uma vizinhança suficientemente pequena de f_0 , po-
 demos escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|(f^{-1})'(y)\| < \lambda^{-1} \quad \forall y \in D_r(x), \quad \forall x \in J(f_0) \\ f^{-1}(D_r(x)) \subset D_r(x_1) \cup \dots \cup D_r(x_d) \end{array} \right.$$

Pode-se ver facilmente que existe uma única função analítica
 $f \in N(f_0) \rightarrow f^{-1}(f_0(x)) \in \bar{C}$, com a condição $f^{-1}(f_0(x)) = x$,



Dado $x \in J(f_0)$, consideremos $f^{-1}(D_r(f_0^n(x))) \subset D_r(f_0^{n-1}(x))$,
 $f^{-1}(D_r(f_0^{n-1}(x))) \subset D_r(f_0^{n-2}(x))$, etc. Temos que
 $f^{-n}(D_r(f_0^n(x))) \subset D_r(x)$ possui diâmetro inferior a $2\lambda^{-n}r$, ou
 seja $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(D_r(f_0^n(x)))$ é exatamente um ponto em $D_r(x)$, o qual
 definimos como $H(f)(x)$. As condições (i) e (iii) da Definição
 4.2.1 são claramente satisfeitas. Provedmos a continuidade de
 $H(f)$. Dada uma vizinhança K de $H(f)(x)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal
 que $f^{-n_0}(D_r(f_0^{n_0}(x))) \subset K$. Se $y \in \bar{C}$ está suficientemente
 próximo a $x \in \bar{C}$ de modo a $f_0^{n_0}(y) \in D_r(f_0^{n_0}(x))$, temos tam-

também que $f^{-n_0}(f_0^{n_0}(y)) \in K$, ou seja, $H(f)(y) \in K$. Quanto à injetividade de $H(f)$: se $H(f)(x) = H(f)(x')$, $x, x' \in J(f_0)$, então $H(f)(f_0^k(x)) = H(f)(f_0^k(x')) \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Ora: $d(H(f)(x), x) < r$, donde $d(f_0^k(x), f_0^k(x')) \leq d(H(f)(f_0^k(x)), f_0^k(x)) + d(H(f)(f_0^k(x')), f_0^k(x')) \leq 2r \quad \forall k$. Daí: $d(x, x') < 2\lambda^{-k}r \quad \forall k \implies x = x'$.

Justifiquemos $H(f)(J(f_0)) = J(f)$: como $H(f)(J(f_0))$ não sai, por iteração sob f , de uma vizinhança de $J(f_0)$, vemos que $H(f)(J(f_0)) \subset J(f)$. Mas os pontos periódicos de $J(f_0)$ são transformados por $H(f)$ nos pontos periódicos de $H(f)(J(f_0))$; a partir de certo período, portanto, todos os pontos periódicos de f estão em $H(f)(J(f_0))$. Daí: $J(f) \subset H(f)(J(f_0))$.

Deixamos ao leitor a continuidade de $f \in N(f) \rightarrow \rightarrow H(f)(x) \in \bar{\mathbb{C}}$ para $x \in \bar{\mathbb{C}}$ fixado. ■

§3. Estabilidade x Hiperbolicidade

Descrevemos no capítulo anterior um subconjunto (aberto e denso) de $\text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$ constituído exatamente pelos polinômios estruturalmente estáveis. Ora, o conceito introduzido acima garante, senão a estabilidade do polinômio hiperbólico, pelo menos de seus aspectos dinamicamente complicados. Torna-se natural a questão: um polinômio (estruturalmente) estável é hiperbólico? Esta questão se reduz a: um polinômio estável possui pontos críticos em seu conjunto de Julia? Não temos uma resposta conclusiva. Mostraremos agora que efetivamente estabilidade implica hiperbolicidade desde que o conjunto de Julia seja bastante "rare-

feito" para não poder "esconder" pontos críticos.

4.3.1. Teorema - Se um polinômio é estável e seu conjunto de Julia possui medida zero então ele é hiperbólico ([4]).

Para ressaltar a naturalidade da condição proposta, provaremos antes o teorema seguinte.

4.3.2. Teorema - Se $f \in H_D(\mathbb{C})$ então a medida de $J(f)$ é zero.

Demonstração. Indiquemos por μ a medida de Lebesgue. Se $\mu(J(f)) > 0$, existe $p \in J(f)$ tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(D_r(p) \cap J(f))}{\mu(D_r(p))} = 1$$

(diz-se que $p \in \mathbb{C}$ é um ponto de densidade de $J(f)$; na verdade, quase todo ponto de $J(f)$ é ponto de densidade). Pelo Teorema 4.1.8 e Lema 4.1.9, existem $r_0 > 0$ e $M, M' > 0$ tais que, se $r < r_0$, podemos escrever

$$\frac{Mr_0}{r} |x-p| < |f^{m(r)}(x) - f^{m(r)}(p)|$$

desde que $x \in D_r(p)$ e $m(r)$ seja um inteiro (dependente de $r \in \mathbb{R}$) convenientemente escolhido.

Segue-se que $f^{m(r)}(D_r(p))$ contém o disco de centro $f^{m(r)}(p)$ e raio Mr_0 . Escolhamos $r_n \rightarrow 0$; desejamos provar agora que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(f^{m(r_n)}(D_{r_n}(p) \cap J(f)))}{\mu(f^{m(r_n)}(D_{r_n}(p)))} = 1$$

Realmente:

$$\mu(f^{m(r_n)}(D_{r_n}(p) \cap J(f))) = \int_{D_{r_n}(p) \cap J(f)} |(f^{m(r_n)})'(z)|^2 d\mu,$$

e

$$\mu(f^{m(r_n)}(D_{r_n}(p))) = \int_{D_{r_n}(p)} |(f^{m(r_n)})'(z)|^2 d\mu.$$

Então:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\mu(f^{m(r_n)}(D_{r_n}(p) \cap J(f)))}{\mu(f^{m(r_n)}(D_{r_n}(p)))} &= \\ &= \frac{\int_{D_{r_n}(p) \setminus D_{r_n}(p) \cap J(f)} |(f^{m(r_n)})'(z)|^2 d\mu}{\int_{D_{r_n}(p)} |(f^{m(r_n)})'(z)|^2 d\mu} \\ &= \frac{M^2 |(f^{m(r_n)})'(p)|^2 \mu(D_{r_n}(p) \setminus D_{r_n}(p) \cap J(f))}{\frac{1}{M^2} |(f^{m(r_n)})'(p)|^2 \mu(D_{r_n}(p))} \rightarrow 0 \text{ quando } r_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Seja $q \in \bar{E}$ um ponto limite de $f^{m(r_n)}(p)$; o disco de raio Mr_0 está contido em $f^{m(r_n)}(D_{r_n}(p))$ para r_n pequeno, e, pelo que vimos acima, $\mu(D_{M \cdot r_0}(q) \cap J(f)) = \mu(D_{M \cdot r_0}(q))$. Logo, $D_{M \cdot r_0}(q) \cap J(f) = D_{M \cdot r_0}(q)$ pois $J(f)$ é fechado. Isto é um absurdo porque $\text{int } J(f) \neq \emptyset$.

A idéia da demonstração do Teorema 4.3.1 é a seguinte. Seja E , o espaço das classes de polinômios estáveis analiticamente conjugados entre si. Temos que $\dim_{\mathbb{C}} E = d-1$. Ora, mostraremos que cada órbita do ponto crítico finito, fora do conjunto de Julia, corresponderá a uma coordenada analítica para E , e que estas coordenadas são suficientes para parametrizar E . Segue-se que a quantidade de pontos críticos fora do conjunto de Julia é $d-1$, ou seja, temos hiperbolicidade.

Formalizemos a discussão acima. Seja G o grupo de difeomorfismos analíticos de $\bar{\mathbb{C}}$ que preservam $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$, isto é, $G = \{T \in SL(2, \mathbb{C}); T(z) = \alpha z + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$. Se P_{λ_0} é um polinômio estável, a aplicação

$$\begin{aligned} \xi_{\lambda_0} : G &\longrightarrow \text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}}) \\ T &\longmapsto T^{-1} \circ P_{\lambda_0} \circ T \end{aligned}$$

é um mergulho analítico de uma vizinhança $V \ni \text{Id}$ em $\text{Pol}_d(\bar{\mathbb{C}})$. Denotemos por $\Sigma \ni P_{\lambda_0}$ uma seção transversal local a $\xi_{\lambda_0}(V)$. Segue-se que Σ é uma variedade analítica de dimensão $d-1$, mergulhada no conjunto de polinômios estáveis, sem elementos analiticamente conjugados por uma conjugação próxima à identidade.

Desejamos "realizar" dinamicamente a dimensão de Σ . Para simplificar a notação, suporemos que P_{λ_0} só possui uma órbita periódica atratora finita, a qual é fixa. Sendo $p \in \mathbb{C}$ este atrator, temos que $\bar{\mathbb{C}} = B_{\lambda_0}(\infty) \cup E_{\lambda_0}(p)$ ($E(p)$ é o conjunto estável de $p \in \mathbb{C}$). Pelo Teorema 1.1.5, existem uma vizinhan-

ça $\bar{U}_{\lambda_0} \ni \infty$ e um difeomorfismo analítico $F: \bar{U}_{\lambda_0} \rightarrow \bar{D}_{r_0}$ tais que $F(0) = \infty$ e $F(P_{\lambda_0}(z)) = F(z)^{d-1}$. Se $\lambda \in V_1 \subset \Sigma$ é uma vizinhança conveniente de $\lambda_0 \in \mathbb{C}^d$, obtemos $F_\lambda: \bar{U}_\lambda \rightarrow \bar{D}_{r_0}$ difeomorfismo analítico dependendo analiticamente de $\lambda \in \mathbb{C}^d$ e satisfazendo $F_\lambda(P_\lambda(z)) = F_\lambda(z)^{d-1}$. Indiquemos por $c_1(\lambda), \dots, \dots, c_s(\lambda)$ os pontos críticos de P_λ em $B_\lambda(\infty)$, e por $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ os inteiros (únicos) tais que

$$P_\lambda^{m_i}(c_i(\lambda)) \in \text{int}(U_\lambda \setminus P_\lambda(U_\lambda)), \quad \lambda \in V_1.$$

O leitor observe que estamos repetindo os passos da demonstração do Teorema 3.2.1. Definamos $(V_1 = \Sigma)$:

$$\begin{aligned} C^\infty: \Sigma &\rightarrow \mathbb{C}^s \\ \lambda &\mapsto (P_\lambda^{m_1}(c_1(\lambda)), \dots, P_\lambda^{m_s}(c_s(\lambda))) \end{aligned}$$

Aplicamos agora o Teorema 1.1.2 ao ponto fixo atrator de P_{λ_0} . Existem vizinhança $\bar{U}'_{\lambda_0} \ni p$ e um difeomorfismo analítico $F_\infty: \bar{U}'_{\lambda_0} \rightarrow \bar{D}_{r_0}$ satisfazendo $F_{\lambda_0}(p) = 0$, $F'_{\lambda_0}(p) = 1$ e $F_{\lambda_0}(P_{\lambda_0}(z)) = a_{\lambda_0} \cdot P_{\lambda_0}(z)$, onde $a_{\lambda_0} = P'_{\lambda_0}(p)$. Sendo $\lambda \in V_2 \subset \Sigma$ vizinhança conveniente de P_{λ_0} , existem $\bar{U}'_\lambda \ni p(\lambda)$ e $F_\lambda: \bar{U}'_\lambda \rightarrow \bar{D}_{r_0}$ difeomorfismo analítico tais que $F_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ e $F_\lambda(P_\lambda(z)) = a_\lambda \cdot P_\lambda(z)$, para $a_\lambda = P'_\lambda(p(\lambda))$. Se $c'_1(\lambda), \dots, \dots, c'_q(\lambda)$ são os pontos críticos de P_λ em $E_\lambda(p(\lambda))$, existem inteiros $t_i \in \mathbb{N}$ t.q.

$$P_\lambda^{t_i}(c'_i(\lambda)) \in \text{int}(U'_\lambda \setminus P_\lambda(U'_\lambda)).$$

Definamos

$$C': \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}^q$$

$$\lambda \longmapsto (a_\lambda, [P_\lambda^{L_1}(c'_1(\lambda)) : \dots : P_\lambda^{L_q}(c'_q(\lambda))])$$

$$([P_\lambda^{L_1}(c'_1(\lambda)) : \dots : P_\lambda^{L_q}(c'_q(\lambda))]) \in \mathbb{C}P^{q-1}.$$

Finalmente, consideremos

$$C: \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}^{s+q}$$

$$\lambda \longmapsto (C^\infty(\lambda), C'(\lambda)).$$

Vemos que $s+q$ é o número de pontos críticos de P_λ fora de $J(P_\lambda)$, para $\lambda \in \Sigma$. Queremos mostrar agora que C é injetiva, de onde resultará $d-1 = s+q$, ou seja, $P_\lambda \in H_d(\mathbb{C}) \quad \forall \lambda \in \Sigma$. Observemos inicialmente que, pelos Teoremas 2.1.5 e 3.3.1, $\mu(J(P_\lambda)) = 0 \quad \forall \lambda \in \Sigma$. Caso C' não seja injetiva, existe uma subvariedade complexa $S \in \Sigma$ tal que $(C^\infty(\lambda), C'(\lambda))$ é constante para $\lambda \in S$. Examinando a demonstração do Teorema 3.2.1, vemos que as conjugações construídas (ao longo de S) são analíticas fora do conjunto de Julia (as posições das órbitas dos pontos críticos próximos aos pontos fixos são tais que permitem as conjugações topológicas locais serem analíticas). Conclusão: as conjugações dadas pelo Teorema 3.2.1, ao longo de S , além de serem quase conformes (Teorema 3.3.1), são conformes fora de um conjunto (o conjunto de Julia) de medida zero. Pelo Teorema 2.1.4, tais conjugações são de fato analíticas, o que contradiz

a definição de Σ .

Referências

- [1] - Esta idéia já aparece em Fatou, na 2ª de suas três memórias sobre iterações de funções racionais.
- [2] - Este exemplo é analisado por G. Julia em seu trabalho já mencionado. A demonstração de que o conjunto de Julia é uma curva contínua foi retirada de M. Brolin: Invariant sets under iteration of rational functions, Arkiv für Mathematik 6 (1966). Este trabalho contém uma excelente introdução aos resultados clássicos. O autor destas notas não conseguiu provar que as bacias dos pontos fixos finitos são limitados por curvas de Jordan.
- [3] - No mencionado trabalho de M. Brolin, o leitor pode encontrar a demonstração desta afirmativa.
- [4] - Discutida por D. Sullivan em Seminar on Conformal and Hyperbolic Geometry, preprint IHES 1982. Recomendamos este trabalho ao leitor pelo (proveitoso) paralelo feito entre o estudo de funções racionais e o estudo de grupos Kleinianos.
- [5] - Demonstrado no trabalho já mencionado por R. Mañé, P. Sad e D. Sullivan: On the dynamics of rational maps. Não se sabe se o teorema persiste sem a condição do conjunto de Julia possuir medida zero.

APÊNDICE

Enumeramos brevemente neste apêndice as propriedades das famílias normais de funções meromorfas. O leitor pode consultar "Analytic Function Theory", por E. Hille, vol.2 (Chelsea).

Seja $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ um aberto, e $C^0(U, \bar{\mathbb{C}})$ o espaço das aplicações contínuas de U em $\bar{\mathbb{C}}$, munido da topologia da convergência uniforme em partes compactas. Esta topologia é metrizável, e $C^0(U, \bar{\mathbb{C}})$ torna-se um espaço métrico completo.

Proposição - Se $f_n \rightarrow f$ em $C^0(U, \bar{\mathbb{C}})$ e as aplicações f_n são analíticas, então f é também analítica.

Definição - Uma família $\mathfrak{F} \subset C^0(U, \bar{\mathbb{C}})$ de funções analíticas é normal se $\bar{\mathfrak{F}}$ é compacto.

O critério básico para a normalidade de uma família é o seguinte.

Teorema - Se uma família $\mathfrak{F} \subset C^0(U, \bar{\mathbb{C}})$ de funções analíticas é uniformemente limitada, isto é, caso exista $M > 0$ tal que $|f(z)| < M \quad \forall z \in U$ e $\forall f \in \mathfrak{F}$, então \mathfrak{F} é normal.

O domínio de aplicação deste teorema se estende a uma dimensão a princípio insuspeita. Vamos combiná-lo com um caso particular do Teorema de Uniformização para Superfícies de Riemann.

Teorema (Picard) - A superfície de Riemann $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$ é (analiticamente) recoberta pelo disco \mathbb{D}^2 .

Não há nada de especial na escolha dos pontos $0, 1$ e ∞ .

O resultado que usamos repetidas vezes no texto é o seguinte.

Teorema (Montel) - Seja $\mathfrak{F} \subset C^0(U, \bar{\mathbb{C}})$ uma família de funções analíticas. Se nenhuma função em \mathfrak{F} assume os valores $0, 1$ e ∞ , então \mathfrak{F} é normal.

Demonstração - Seja $\pi: \mathbb{D}^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$ recobrimento analítico. Fixemos $p \in U$; cada $f \in \mathfrak{F}$ possui um único levantamento analítico $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{D}^2$, isto é, $\pi \circ \tilde{f} = f$ e $\tilde{f}(p) = 0$. A família $\tilde{\mathfrak{F}} \subset C^0(U, \mathbb{D}^2)$ de tais levantamentos é uniformemente limitada, logo normal. Segue-se então que \mathfrak{F} é normal. ■

