

UMA INTRODUÇÃO À ANÁLISE CONVEXA
Felipe Acker e Flávio Dickstein

COPYRIGHT © - 1983 - by FELIPE ACKER
FLÁVIO DICKSTEIN

Nenhuma parte deste livro pode reproduzida,
por qualquer processo, sem a permissão dos autores.

ISBN 85-244-0006-4

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Estrada Dona Castorina, 110
22.460 - Rio de Janeiro - RJ

ÍNDICE

	<u>Página</u>
<u>APRESENTAÇÃO</u> -----	1
<u>CAPÍTULO 0 - PRELIMINARES</u> -----	9
1 - PROPRIEDADES DOS ESPAÇOS DE BANACH E DE HILBERT -----	9
2 - CONVERGÊNCIA FORTE E FRACA -----	12
3 - SOLUÇÕES FRACAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ---	14
4 - ESPAÇOS DE SOBOLEV -----	15
5 - EXEMPLOS -----	19
<u>CAPÍTULO I - PEQUENA INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DAS</u> <u>VARIAÇÕES</u> -----	 21
1 - INTRODUÇÃO -----	21
2 - DIFERENCIAÇÃO EM ESPAÇOS DE BANACH -----	24
3 - EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE -----	31
4 - MULTIPLICADORES DE LAGRANGE -----	37
5 - TRANSFORMADA DE LEGENDRE -----	44
6 - CONCLUSÃO -----	54
<u>CAPÍTULO II - ANÁLISE CONVEXA</u> -----	57
1 - FUNÇÕES CONVEXAS DE UMA VARIÁVEL REAL -----	57
2 - FUNÇÕES CONVEXAS EM ESPAÇOS VETORIAIS -----	58
3 - MINIMIZAÇÃO E SEMICONTINUIDADE INFERIOR -----	62
4 - SUBDIFERENCIABILIDADE -----	75
5 - DESIGUALDADES VARIACIONAIS -----	86

	<u>Página</u>
6 - MULTIPLICADORES DE LAGRANGE E PROBLEMA DUAL -----	95
7 - FUNÇÕES CONVEXAS CONJUGADAS -----	100
8 - PROBLEMA DUAL — CONTINUAÇÃO -----	116
9 - EXEMPLOS -----	125
APÊNDICE -----	135
1 - CONJUNTOS CONVEXOS -----	135
2 - CONJUNTOS CONVEXOS EM ESPAÇOS DE HILBERT. O TEOREMA DA PROJEÇÃO -----	136
3 - CONJUNTOS CONVEXOS EM ESPAÇOS NORMADOS. PONTOS INTE RIORES E PONTOS INTERNOS -----	141
4 - TEOREMAS DE SEPARAÇÃO -----	145
5 - TOPOLOGIA FRACA E CONVERGÊNCIA FRACA -----	152
6 - CONVEXOS FECHADOS SÃO FRACAMENTE FECHADOS -----	158
BIBLIOGRAFIA -----	159

APRESENTAÇÃO

Nosso ponto de vista, ao apresentar uma introdução à Análise Convexa, é o de matemáticos interessados na resolução de equações a derivadas parciais (EDP).

Longo é o percurso histórico que faz da convexidade, hoje, uma importante ferramenta no vasto campo das EDP. Sem a pretensão de analisá-lo em toda sua profundidade, limitamo-nos aqui a algumas considerações, na esperança de contribuir para que não se perca o fio da meada.

A formulação variacional de um problema de EDP é uma das idéias mais ricas no estágio atual da teoria. Não se trata, propriamente, de uma novidade, já que o primeiro a ressaltar o vínculo entre equações diferenciais e problemas variacionais foi Euler, no século XVIII.

Estudando de forma sistemática problemas que exigiam a minimização, de uma grandeza associada a uma dada família de curvas, Euler chegou à conclusão de que a curva minimizante deveria satisfazer, em cada caso, a uma equação diferencial determinada. Lendo os trabalhos de Euler, Lagrange (que tinha então 19 anos) inventou um método analítico que permite chegar ao mesmo resultado de maneira mais elegante. O método de Lagrange foi chamado por Euler de "método das variações", e a equação diferencial associada ao problema de minimização passou à história sob o nome de "equação de Euler-Lagrange" do problema. Para mais detalhes sobre os

primórdios do Cálculo das Variações, o leitor pode consultar com proveito, além das obras completas de Euler e de Lagrange, as referências [13],[23],[25],[31] e [54].

Colocando a questão em termos modernos, o resultado de Euler é o seguinte: se E é um espaço de funções e $u \in E$ é solução de

$$(*) J(u) = \min J(v), v \in E,$$

então u é solução de

$$(**) J'(u) = 0.$$

((**)) é, precisamente, a equação de Euler-Lagrange do problema (*).

O que se chama hoje de formulação variacional de um problema de EDP é exatamente o procedimento inverso: parte-se de uma equação diferencial $F(u) = 0$, $u \in E$ e procura-se um funcional $J: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $J' = F$. Desta forma, $F(u) = 0$ passa a ser encarada como equação de Euler-Lagrange de um problema variacional.

Euler já observara que a formulação matemática de fenômenos físicos (que conduz, em geral, a equações diferenciais) podia também ser feita em termos de problemas variacionais, dependendo a grandeza a minimizar do problema considerado.

No entanto, a possibilidade de passar de uma equação diferencial a um problema variacional (que está implícita nesta observação) não parece ter impressionado muito os matemáticos, naquele momento. De fato, as equações envolvidas na maioria dos problemas então estudados eram ordinárias, o que parece justificar esta atitude (uma equação diferencial ordinária é, em princí

pio, algo mais simples do que um problema de Cálculo das Variações)*.

A questão da existência de soluções dos problemas do Cálculo das Variações também não causava sensação. Admitia-se, sem muita discussão, que o problema

$$\min J(u)$$

admitia solução sempre que J fosse limitado inferiormente. É somente na segunda metade do século XIX que Weierstrass, criticando um trabalho de Riemann que se apoiava na existência de soluções de um problema variacional, chama a atenção para a inconseqüência deste tipo de argumento.

A objeção de Weierstrass causou um certo impacto na época. Na busca de uma saída para o impasse é posta em evidência, entre outras coisas, a noção de compacidade. No âmbito do Cálculo das Variações, o resultado é o chamado "método direto", que pode ser atribuído a Arzela e a Hilbert.

A idéia deste método é simples: dado um funcional J , procura-se minimizá-lo diretamente, tomando uma seqüência (u_n) tal que

$$J(u_n) \rightarrow \inf J.$$

A questão passa a ser: existe u tal que

$$u_n \rightarrow u ?$$

Existindo tal u , pode-se dizer que $J(u) = \inf J$?

(*) Veremos mais tarde, nas aplicações do capítulo II, um exemplo de solução de um problema de EDO via formulação variacional.

A resposta afirmativa à primeira pergunta depende de alguma compacidade do espaço considerado; a segunda depende de alguma forma de continuidade de J . Em ambos os casos, como veremos no capítulo II, a convexidade desempenha um papel importante.

Logo ficou claro que exigir a continuidade dos funcionais que aparecem no Cálculo das Variações seria querer demais (a essa altura, no limiar do século XX, trabalhava-se com a convergência uniforme em u , o que não garante a continuidade de J , pois $J(u)$ sempre envolve derivadas de u). A dificuldade foi contornada pela semicontinuidade inferior destes funcionais (ver [31] e [51]).

Consolidado o método direto no Cálculo das Variações, a inversão do processo de Euler-Lagrange mostrou-se um instrumento extremamente útil em EDP. Parte-se de uma equação diferencial, associa-se-lhe um problema variacional, e ataca-se este último via método direto. De maneira geral, porém, pode haver soluções da equação diferencial $J'(u) = 0$ que não sejam pontos de mínimo (ou de máximo) de J . Para uma discussão geral desta questão, veja [40]. Para uma idéia do sentido físico destas soluções, veja [23]. Entretanto, se J é um funcional convexo, as soluções da equação $J'(u) = 0$ (isto é, os pontos críticos de J) são exatamente os pontos de mínimo.

É importante ressaltar que a formulação do Cálculo das Variações em termos de Cálculo Diferencial em espaços de funções data apenas do início deste século. A partir daí a atenção se volta, em grande parte, para o estudo destes espaços. A integral de

Lebesgue e a teoria das distribuições, conduzindo aos espaços de Sobolev, criam condições bastante cômodas para o tratamento dos problemas. O desenvolvimento da Análise Funcional, na primeira metade do século, põe em relevo os conjuntos convexos, em particular no que diz respeito às questões de convergência fraca e com pacidade.

Há ainda uma outra vertente que nos conduz à convexidade. Sua origem está na "transformada de Legendre", que foi generalizada por Fenchel (ver [20]) para funções convexas. Trata-se de associar a um problema de partida ("problema primal"), via multiplicadores de Lagrange, um novo problema, chamado "problema dual". Em alguns casos importantes o problema dual fornece informações sobre o problema primal. Além disso, em vários contextos diferentes, como, por exemplo, na Economia, na Termodinâmica ou na Mecânica, a dualização permite um melhor entendimento dos conceitos envolvidos (ver, para isso, [3],[26] e [38]).

Cabe aqui uma pequena digressão. Embora a Análise Convexa seja tratada, nestas notas, como uma ferramenta no estudo de problemas variacionais, seu papel na Matemática vai muito além disto e sua história se desenvolveu de maneira independente. A primeira definição de convexidade (para curvas e superfícies) parece ter sido dada por Arquimedes [2], que estava interessado em áreas e volumes. Em tempos mais recentes, Minkowski [36],[37] fez o primeiro estudo sério de conjuntos convexos (em dimensão finita). A definição de função convexa é dada por Jensen [27],

que mostra que várias desigualdades conhecidas decorrem das propriedades desta funções. A Análise Funcional (e em particular o teorema de Hahn-Banach) veio destacar a importância dos conjuntos convexos em espaços de dimensão infinita. Muitos dos resultados em Análise Não Linear estão baseados na convexidade de conjuntos ou funções. Em otimização, a extensão natural da Programação Linear (que já envolve convexidade) deu origem à Programação Convexa (cabe ressaltar que é neste contexto que surgem a transformada de Fenchel e a idéia de dualização convexa).

Cumprе observar, finalmente, que não são apenas de caráter teórico as razões que conduzem ao estudo da Análise Convexa: são muitos os problemas concretos da Física e da Engenharia que, uma vez formulados em termos matemáticos, produzem como resultado um funcional convexo a minimizar.

Uma simples comparação entre tudo que foi dito acima e o índice do livro mostra que este não foi escrito seguindo exatamente "o fio da meada". Do ponto de vista da evolução das idéias, a ordem natural seria: em primeiro lugar, um capítulo sobre o Cálculo das Variações clássico (este nos pareceu desnecessário); em segundo lugar, a formulação dos problemas variacionais em termos do Cálculo Diferencial em espaços de funções (o que é feito no capítulo I); em terceiro lugar, o desenvolvimento da Análise Funcional (capítulo 0) e, em particular, dos teoremas de separação (apêndice), dos quais depende toda a teoria; finalmente, os resultados de Análise Convexa propriamente ditos (capítulo II).

Por outro lado, alguns dos elementos citados nesta apresentação sequer aparecem no texto. Outros nem mesmo aqui aparecem. Como a maioria dos livros, este deve ser encarado como um quebra-cabeça. A figura que se deseja montar varia conforme o leitor. É permitido fabricar peças que porventura estejam faltando.

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

Nesse capítulo pretendemos apresentar, sem demonstrá-las, algumas proposições básicas da Análise Funcional. Acreditamos que o leitor que desconhece tais resultados poderá, aceitando-os, tirar proveito do que segue nos próximos capítulos sem maiores prejuízos. Para aqueles que quiserem se aprofundar nas questões aqui abordadas indicamos algumas referências bibliográficas: [16], [30], [40], [49] para os parágrafos 1 e 2; [1], [31], [35] para os parágrafos 3, 4 e 5.

1. PROPRIEDADES DOS ESPAÇOS DE BANACH E DE HILBERT

1.1 - Dados E e F dois espaços vetoriais normados (EVN) definimos o EVN $\mathcal{L}(E, F) = \{A: E \rightarrow F, A \text{ linear e contínua}\}$, munido da norma $\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ definida por qualquer uma das formas abaixo:

$$\sup_{\|u\|_E=1} \|Au\|_F = \sup_{\|u\|_E \leq 1} \|Au\|_F = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|_F}{\|u\|_E} = \inf_{c > 0} \{c, \|Au\|_F \leq c \|u\|_E \forall u \in E\}$$

Deste modo, $\|Au\|_F \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|u\|_E$.

Denotamos por $D(A)$, $\text{Im}(A)$, $N(A)$ ao domínio, imagem e núcleo de A , respectivamente.

1.2 - Recordamos também que $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach se F é de Banach.

1.3 - Em particular o espaço DUAL $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de E é um espaço de Banach. Se $f \in E^*$, $u \in E$ usaremos as notações $\langle f, u \rangle$ ou fu para $f(u)$.

1.4 - Uma questão não trivial é a de saber se, dado E um espaço normado, existem elementos de E^* distintos de 0. A resposta é afirmativa e é consequência do Teorema de Hahn-Banach. O Teorema de Hahn-Banach é um instrumento básico da Análise Funcional e, particularmente, da Análise Convexa.

Ele será abordado com detalhes no Capítulo 2 e no Apêndice I. Por ora nos limitaremos a enunciar um corolário deste resultado.

1.5 - PROPOSIÇÃO - Dado $u \in E$ $E \vee N$ existe $f \in E^*$ tal que $\|f\|=1$ e $\langle f, u \rangle = \|u\|$.

1.6 - Se E é um espaço de Banach e $V \subset E$ subespaço vetorial fechado, o espaço QUOCIENTE E/V das classes de equivalência de E módulo V é um espaço de Banach com a norma $\|u\| = \inf_{v \in V} \|u+v\|_E$.

1.7 - Se E, F são espaços de Banach o espaço PRODUTO $E \times F$ com normas $\|(u,v)\| = \|u\|_E + \|v\|_F$ é de Banach.

1.8 - Dizemos que F está INCLUÍDO TOPOLOGICAMENTE em E se existe uma injeção $i \in \mathcal{L}(F, E)$. Nesse caso escrevemos $F \hookrightarrow E$. É fácil verificar que $F \hookrightarrow E$ implica $E^* \hookrightarrow F^*$ (dado por $i^*(f) = f \circ i$).

1.9 - Se H é um espaço de Hilbert com produto escalar (\cdot, \cdot) , o análogo ao Teorema de Hahn-Banach é o

TEOREMA DE RIESZ - Dado $f \in H^*$ existe um único $u_f \in H$ tal que $\langle f, v \rangle = (u_f, v) \quad \forall v \in H$.

Podemos então identificar H^* a H , o que será sempre feito,

salvo menção explícita em contrário.

1.10 - Se $V \hookrightarrow H$, V e H espaços de Hilbert, podemos escrever $V \hookrightarrow H = H^* \hookrightarrow V^*$. O leitor deverá convencer-se que não é possível, em geral, identificar simultaneamente H^* a H e V^* a V . Optamos sempre pela primeira alternativa. (O espaço H é dito o espaço pivô nesse contexto).

1.11 - Nos espaços de Hilbert o espaço quociente H/V pode ser identificado a $V^\perp = \{u \in H, (u, v) = 0 \ \forall v \in V\}$.

1.12 - Seja $A: D(A) \subset E \rightarrow F$ linear, com $\overline{D(A)} = E$, e $D(A^*) = \{v \in F^*, \exists v^* \in E^* \text{ tal que } \langle v, Au \rangle = \langle v^*, u \rangle \ \forall u \in D(A)\}^{(1)}$
Definimos $A^*: D(A^*) \subset F^* \rightarrow E^*$, $A^*v = v^*$. A^* é dito o DUAL de A . Portanto, $\langle v, Au \rangle = \langle A^*v, u \rangle \ \forall u \in D(A), v \in D(A^*)$.

1.13 - Se H é um espaço de Hilbert e $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ linear com $\overline{D(A)} = H$, A^* é também chamado de ADJUNTO de A . Se $A = A^*$, isto é, se $D(A) = D(A^*)$ e $\langle v, Au \rangle = \langle Av, u \rangle \ \forall u, v \in D(A)$ então A é dito AUTOADJUNTO.

1.14 - Se E, F são EVN dizemos que o operador linear $A: D(A) \subset E \rightarrow F$ é FECHADO se $\text{Graf } A = \{(x, Ax), x \in D(A)\}$ é fechado em $E \times F$. Ou seja, A é fechado se e só se $u_n \rightarrow u$ em E , $Au_n \rightarrow v$ em F implica $u \in D(A)$ e $Au = v$.

(1) É claro que $\langle v, Au \rangle$ e $\langle v^*, u \rangle$ se referem às dualidades F^*, F e E^*, E , respectivamente. Iremos omitir, sempre que não houver possibilidade de confusão, qualquer notação que diferencie tais dualidades.

O leitor deve demonstrar as duas proposições abaixo

1.15 - PROPOSIÇÃO - A^* é um operador fechado.

1.16 - PROPOSIÇÃO - Se A é fechado e inversível então A^{-1} é fechado (Sugestão: $\text{Graf } A^{-1} = \{(y,x) \in F \times E, (x,y) \in \text{Graf } A\}$)

1.17 - Se M é um subconjunto de E definimos o ANULADOR M^0 de M como $M^0 = \{u \in E^*, \langle u, v \rangle = 0 \ \forall v \in M\}$. Se $M \subset E^*$ definimos o POLAR de M como ${}^0M = \{v \in E, \langle u, v \rangle = 0 \ \forall u \in M\}$.

Enunciamos a seguir dois importantes resultados da Análise Funcional Linear.

1.18 - TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO - Se E, F são espaços de Banach e $A: E \rightarrow F$ é um operador linear fechado então $A \in \mathcal{L}(E; F)$

1.19 - TEOREMA DA IMAGEM FECHADA - Sejam E, F espaços de Banach, $A: D(A) \subset E \rightarrow F$ linear e fechado, com $\overline{D(A)} = E$. São equivalentes:

- (i) $\text{Im}(A)$ é fechado em F
- (ii) $\text{Im}(A^*)$ é fechado em E^*
- (iii) $\text{Im}(A) = {}^0N(A^*)$
- (iv) $\text{Im}(A^*) = N(A)^0$

1.20 - Outro resultado importante, corolário do Teorema da Aplicação Aberta, é o seguinte: Se E, F são espaços de Banach e $A \in \mathcal{L}(E, F)$ é injetora e sobre, então $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

2 - CONVERGÊNCIA FORTE E FRACA

2.1 - Dizemos que $\{u_n\} \subset E$ EVN converge FORTEMENTE a $u \in E$ ($u_n \rightarrow u$ forte) se $\{u_n\}$ converge a u na norma de E , isto é, $\|u_n - u\|_E \rightarrow 0$.

$\{u_n\}$ converge a u FRACAMENTE ($u_n \rightharpoonup u$ fraco) se para toda $f \in E^*$ temos que $\langle f, u_n \rangle$ converge a $\langle f, u \rangle$. (1)

2.2 - É evidente que a convergência forte implica na convergência fraca. A recíproca, como indica o exemplo abaixo, não é verdadeira.

2.3 - EXERCÍCIO - Seja $E = \ell^2$ o espaço das seqüências $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tais que $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i^2 < +\infty$. ℓ^2 é um espaço de Hilbert com a norma $(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i^2)^{1/2}$. Seja $e_j = (\delta_{ij})$, onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Mostre que $\{e_j\}$ é fracamente convergente a zero, mas não fortemente. (Lembre-se que $(\ell^2)^* \approx \ell^2$)

2.4 - Dado $u \in E$ seja $i_u: E^* \rightarrow \mathbb{R}$, $i_u(f) = \langle f, u \rangle$. É imediato verificar que $i_u \in E^{**} = (E^*)^*$ e que $i_u: E \rightarrow E^{**}$ é uma inclusão topológica. Na realidade $\|i_u\|_{**} \leq \|u\|$ e 1.5 garante que $\|i_u\|_{**} = \|u\|$. Portanto, $\|i\|_{\mathcal{L}(E, E^{**})} = 1$.

2.5 - Dizemos que E é um espaço de Banach REFLEXIVO se a imersão $E \rightarrow E^{**}$ é sobre. Neste caso identificamos $E^{**} \approx E$.

Enunciamos um outro resultado fundamental.

2.6 - TEOREMA - Se $\{u_n\} \subset E$ EVN é uma seqüência fracamente convergente então ela é limitada. Reciprocamente, se E é um espaço de Banach reflexivo e B é um conjunto limitado de E então B é fracamente sequencialmente pré-compacto, isto é, se $\|u_n\| \leq c$

(1) Pode-se mostrar que esta noção de convergência não pode em geral ser definida através de uma norma. Munido da topologia da E pela convergência fraca, E é um espaço vetorial topológico localmente convexo.

existe uma subsequência $u_{n_k} \rightharpoonup u$ fraco em E, com $\|u\| \leq c$.

3 - SOLUÇÕES FRACAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Para motivarmos a introdução de soluções fracas de equação diferencialis, tomemos a equação diferencial ordinária.

$$a_1(x)u''(x) + a_2(x)u'(x) + a_3(x)u(x) = f(x) \quad x \in (a, b)$$

Vamos supor que $a_i(x), i=1,2,3$ e $f(x)$ são suficientemente regulares, de modo que todas as operações abaixo sejam válidas.

Consideremos $C_0^2(a,b) = \{\varphi \in C^2(a,b), \varphi(a) = \varphi(b) = \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0\}$

Podemos então escrever

$$\int_a^b a_1 u'' \varphi + \int_a^b a_2 u' \varphi + \int_a^b a_3 u \varphi = \int_a^b f \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^2(a,b)$$

Integrando por partes obtemos

$$(*) \quad \int_a^b u(a_1 \varphi)'' - \int_a^b u(a_2 \varphi)' + \int_a^b a_3 u \varphi = \int_a^b f \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^2(a,b)$$

Se u satisfaz (*) dizemos que u é solução fraca do problema. Vemos então que se u é solução no sentido usual (diremos u é solução forte) então u é solução fraca. Reciprocamente, se u é solução fraca e suficientemente regular (de classe C^2) então u é solução forte. A vantagem de considerarmos (*) é que podemos ter soluções fracas não regulares, o que permite, como veremos, estudar uma classe mais ampla de problemas.⁽¹⁾ Esta idéia se estende da seguinte forma.

(1) Esta não é a única vantagem na introdução da noção de soluções fracas. Em geral, é nesse contexto onde podemos obter mais informações sobre soluções de equações diferenciais, tanto do ponto de vista teórico quanto da análise numérica do problema.

3.1 - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos o SUPORTE de φ , $\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}}$. Definimos também $C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega), \text{supp } \varphi \text{ compacto}\}$

3. - Dado $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ denotamos $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ e

$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Seja Lu o operador diferencial $\sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha (a_\alpha u)$.

Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ então $\int_\Omega Lu \varphi = \int_\Omega u L^* \varphi$, onde $L^* \varphi = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \varphi$.

L^* é dito o adjunto de L .

3.3 - Dizemos que u é solução FRACA ou solução no sentido das DISTRIBUIÇÕES de $Lu=f$ se $\int_\Omega u L^* \varphi = \int_\Omega f \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

3.4 - Toda solução clássica (ou solução FORTE) de $Lu=f$ é solução fraca. Para que a recíproca seja válida é suficiente que $u \in C^k(\Omega)$.

3.5 - Se $Lu=f$ no sentido fraco e $f \in L^2(\Omega)$ então $Lu=f$ em quase todo ponto de Ω .

Como veremos adiante, a introdução de soluções fracas em equações diferenciais nos conduz a considerar normas do tipo

$(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$. Os chamados espaços de Sobolev aparecem como o completamento de $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ sob tais normas.

4 - ESPAÇOS DE SOBOLEV

4.1 - Dizemos que $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tem derivada $D^\alpha u$ FRACA ou derivada no sentido das DISTRIBUIÇÕES pertencente a $L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq +\infty$ se existe uma função $u_\alpha \in L^q(\Omega)$ tal que $\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \varphi$

Nesse caso vamos escrever $u_\alpha = D^\alpha u$ e que $D^\alpha u \in L^q(\Omega)$.

4.2 - Dado $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ definimos o espaço de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m \}$$

munido da norma $\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}$ se $1 \leq p < +\infty$ e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} \sup_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}.$$

4.3 - Vamos considerar daqui por diante Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^n regular. Um aberto Ω é dito regular quando sua fronteira Γ é uma variedade regular. Para uma definição mais precisa, ver [1],[28] ou [32].

4.4 - Podemos mostrar que $\overline{C^\infty(\bar{\Omega})} \cdot \| \cdot \|_{m,p} = W^{m,p}(\Omega)$ se $1 \leq p < +\infty$.

O complemento de $C^\infty_0(\Omega)$ na norma $\| \cdot \|_{m,p}$ é o espaço de Banach $W^m_0(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$. $W^m_0(\Omega), W^{m,p}(\Omega)$ são separáveis⁽¹⁾ se $1 \leq p < +\infty$.

4.5 - Denotamos $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $H^m_0(\Omega) = W^{m,2}_0(\Omega)$ e

$\| \cdot \|_{m,2} = \| \cdot \|_m$. $H^m(\Omega)$ e $H^m_0(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

4.6 - Denotamos também a semi-norma

$$|u|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \right)^{1/p} \quad \text{e} \quad |u|_{m,2} = |u|_m. \quad \text{Vale a desigualdade}$$

$\|u\|_{L^p} \leq C |u|_{1,p}$, $\forall u \in W^{1,p}_0(\Omega)$. Decorre imediatamente que a semi-

norma $|u|_{1,p} = \| \nabla u \|_{L^p}$ é uma norma em $W^{1,p}_0(\Omega)$, equivalente à norma dada inicialmente. Se $p=2$ a desigualdade acima é chamada desigualdade de Poincaré-Friedrichs.

4.7 - É fácil ver a partir da definição que $u \in H^m_0(\Omega)$ implica

$D^\alpha u \in H^{m-|\alpha|}_0(\Omega)$ se $|\alpha| \leq m$. Segue deste fato e da desigualdade de

Poincaré-Friedrichs que $|u|_m$ é uma norma em $H^m_0(\Omega)$, equivalente

(1) Um EVN é dito separável se ele possui um subconjunto enumerável denso.

à usual. (Temos o análogo se $p \neq 2$).

4.8 - Se $f \in (H_0^m(\Omega))^*$ existem $f_\alpha \in L^2(\Omega)$, $(\alpha) \leq m$ tais que

$$\langle f, u \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_\alpha D^\alpha u \quad \forall u \in H_0^m(\Omega)$$

Motivado pelo resultado acima escrevemos $H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))^*$.

Repare que estamos usando aqui 1.10, com $H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega)$.

Outra propriedade importante dos espaços de Sobolev é a existência do traço de uma função na fronteira Γ de Ω .

4.9 - Se $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ podemos mostrar que $(\int \varphi^2)^{1/2} \leq C \|\varphi\|_1$. Portanto, a aplicação $\gamma_0 : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(\Gamma)$ se prolonga por continuidade a uma aplicação $\gamma_0 \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), L^2(\Gamma))$, dita aplicação traço.

Definimos $H^{1/2}(\Gamma) = \text{Im } \gamma_0 \subset L^2(\Gamma)$, que é um subespaço próprio e denso de $L^2(\Gamma)$. Munido da norma $\|g\|_\Gamma = \inf_{\gamma_0 v = g} \|v\|$, $H^{1/2}(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert.

4.10 - É imediato que $H_0^1(\Omega) \subset \ker \gamma_0$. Podemos mostrar que $H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0$.

4.11 - Se $v \in H^1(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ e $\gamma_0 v = g$ no sentido fraco, isto é, se $\int_{\Gamma} \gamma_0 v \varphi = \int_{\Gamma} g \varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, então $\gamma_0 v = g$ em quase todo ponto de Γ .

4.12 - Se $\eta(x) = (\eta_i(x))_{i=1}^n$ é o vetor normal unitário exterior em $x \in \Gamma$, definimos $\gamma_1 : H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$, $\gamma_1(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma} = \sum_{i=1}^n \gamma_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \cdot \eta_i$. Temos que $\text{Im } \gamma_1 = \text{Im } \gamma_0 = H^{1/2}(\Gamma)$ e que $\ker \gamma_1 = H_0^2(\Omega)$.

4.13 - Analogamente podemos definir a aplicação sobre

$\gamma_m: H^m(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma_m u = \frac{\partial^m u}{\partial \eta^m}$, com $\ker \gamma_m = H_0^m(\Omega)$. Além disso, se $u \in H^{m+k+1}(\Omega)$ então $\gamma_m u \in H^{k+1/2}(\Gamma)$, $k \geq 0$.

4.14 - Se $\xi, \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, vale a Identidade de Green

$$\int_{\Omega} \nabla \xi \nabla \varphi = - \int_{\Omega} \Delta \xi \varphi + \int_{\Gamma} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \varphi$$

Podemos então obter por passagem ao limite

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = - \int_{\Omega} \Delta u v + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v \quad \forall u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega)$$

A regularidade dos espaços de Sobolev é determinada a partir do

4.15 - TEOREMA DE IMERSÃO DE SOBOLEV - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de fronteira regular. Temos as seguintes inclusões algébricas e topológicas:

$$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \begin{cases} L^q(\Omega) & \text{se } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \\ L^q(\Omega) & \forall 1 \leq q < +\infty \text{ se } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \\ C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ (1)} & \text{se } 0 < m - \frac{n}{p} - k \leq 1. \end{cases}$$

No terceiro caso tomamos $\alpha = m - \frac{n}{p} - k$ se $m - \frac{n}{p} - k < 1$.

Se $m - \frac{n}{p} - k = 1$, o resultado é válido para todo $\alpha < 1$.

Além disso, se Ω é limitado a injeção $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega)$ é compacta para $1 \leq q_1 \leq q$ se $m \leq \frac{n}{p}$. Se $m > \frac{n}{p}$ a injeção $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\beta}(\bar{\Omega})$ é compacta para $\beta < \alpha$.

(1) $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{f \in C^k(\bar{\Omega}), \sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty\}$. Se $f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$,

dizemos que f é α -holderiana.

5 - EXEMPLOS

5.1 - PROBLEMA DE DIRICHLET - Consideremos o problema de Dirichlet para o Laplaciano:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

onde f é uma função regular.

Uma solução fraca do problema satisfaz

$$- \int_{\Omega} u \Delta \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

Se $u \in H^1_0(\Omega)$ podemos escrever $\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Por passagem ao limite temos $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$. Mas

$u = 0$ em Γ implica $u \in H^1_0(\Omega)$. Isto nos conduz a introduzir a formulação fraca

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

Assim, se u é solução forte u satisfaz (P). Reciprocamente, se u satisfaz (P) e f é suficientemente regular ($f \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$) então u é solução clássica do problema de Dirichlet. ($u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$).

Analogamente, se $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, $u_0 \in H^1(\Omega)$ com $\gamma_0(u_0) = g$ e $w \in H^1_0(\Omega)$ é solução de $\int_{\Omega} \nabla w \nabla v = \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma} \nabla u_0 \nabla v \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$ então $u = w + u_0$ é solução fraca de $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \Gamma \end{cases}$

Observamos também que a formulação fraca do problema acima tem sentido se $f \in H^{-1}(\Omega)$. Nesse caso substituímos $\int_{\Omega} f v$ por $\langle f, v \rangle$.

5.2 - PROBLEMA DE NEUMANN - Sejam $a \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ e $u \in H^1(\Omega)$

$$\text{solução do problema } (*) \quad \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + a \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv + \langle g, \gamma_0 v \rangle$$

Vamos interpretar (*) quando $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ e $u \in H^2(\Omega)$. Tomando $v = \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos $\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + a \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$ e assim

$-\Delta u + au = f$ no sentido das distribuições. Usando a identidade de Green (ver 4.14) vem $a \int_{\Omega} uv - \int_{\Omega} \Delta u v + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v = \int_{\Omega} fv + \int_{\Gamma} gv$ e como

$-\Delta u + au = f$ em $L^2(\Omega)$ (ver 3.5) concluímos que $\frac{\partial u}{\partial \eta} = g$ em Γ (ver 4.11). Deste modo u é solução fraca do problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + au = f & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

Esta é apenas uma interpretação formal de (*) quando $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $u \in H^1(\Omega)$.

5.3 - PROBLEMA BIHARMÔNICO - Dados $f \in H^{-2}(e)$, $u_0 \in H^2(\Omega)$ seja $w \in H_0^2(\Omega)$ solução do problema $\int_{\Omega} \Delta w \Delta v = \langle f, v \rangle - \int_{\Omega} \Delta u_0 \Delta v \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$. Então, se $u = w + u_0$, $\Delta^2 u = f$ no sentido das distribuições com

$$u|_{\Gamma} = u_0|_{\Gamma}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\Gamma} = \frac{\partial u_0}{\partial \eta}|_{\Gamma}$$

CAPÍTULO 1

PEQUENA INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DAS VARIAÇÕES

1 - INTRODUÇÃO

Seja E o espaço vetorial das funções $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $K \subset E$ um subconjunto de E e $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ também de classe C^1 .

Consideremos o problema

$$(M) \quad \inf_{u \in K} \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx$$

isto é, minimizar a função $J: K \subset E \rightarrow \mathbb{R}$, $J(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx$.

Problemas desse tipo ocuparam um lugar importante no desenvolvimento da Matemática a partir do século XVI. Associados a eles estão nomes como os de Newton, Jean Bernoulli, Jacques Bernoulli Euler, Lagrange, Legendre, Hamilton, Jacobi, Weierstrass, entre outros.

Alguns exemplos de tais problemas são:

(i) Braquistócrona

Dado um corpo de massa unitária situado em $(0,0)$ queremos deslocá-lo até $B = (x_B, y_B)$ com $y_B < 0 < x_B$ sob a ação da gravidade g , na ausência de atrito. Queremos determinar a curva $y(x)$ satisfazendo $y(0) = 0$, $y(B) = y_B$, para a qual o tempo de percurso é mínimo.

Podemos mostrar que tal tempo é dado por

$$T(y) = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx$$

(ii) Superfícies mínimas

Consideremos uma membrana bidimensional em repouso ocupando uma região limitada Ω de \mathbb{R}^2 , de fronteira Γ . Desejamos submetê-la a deformações normais à superfície e de modo que o deslocamento em Γ seja prescrito, isto é, $u(s) = f(s) \quad \forall s \in \Gamma$.

A posição de equilíbrio da membrana pode ser encontrada minimizando-se a energia potencial de deformação (ou, o que é equivalente, a área da superfície lateral).

$$U = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \quad dx dy$$

entre todos os deslocamentos $u(x,y)$ que coincidem com f em Γ .

Tal problema é também chamado de problema de Plateau. ■

(iii) Problema de Dirichlet

O problema de Dirichlet é uma linearização do problema de Plateau considerando, para pequenos deslocamentos $u(x,y)$, a aproximação

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} u_x^2 + u_y^2 \quad dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 \quad dx dy$$

O problema de Dirichlet em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 aparece em vários outros contextos. Por exemplo, no caso do equilíbrio térmico, onde u representa uma temperatura, ou no do equilíbrio eletrostático, onde u é o potencial eletrostático.

Mostraremos mais tarde que são formulações equivalentes do mesmo problema a que apresentamos aqui e aquela dada em 0.5.1. ■

(iv) Problema isoperimétrico

O problema isoperimétrico, em sua forma original, se enuncia do seguinte modo: encontrar a curva fechada de perímetro $2l$ dado que envolva a maior área possível.

O leitor deve se convencer que podemos considerar a curva solução como sendo simétrica em relação ao eixo \vec{x} , sendo a parte superior o gráfico de uma função $y(x)$, $0 \leq x \leq \xi$.

Devemos então minimizar $A(y) = \int_0^{\xi} y \, dx$ sujeito à restrição $L(y) = \int_0^{\xi} \sqrt{1+y'^2} \, dx = \ell$ ■

O estudo de (1.1) conheceu um grande desenvolvimento a partir da introdução, por Euler e por Lagrange, do chamado método das variações. Daí a denominação de Cálculo das Variações à teoria que trata da minimização de funcionais dados sob a forma integral. O problema (M) é dito o problema mais simples do Cálculo das Variações.

Como vimos nos exemplos acima, podem haver vários tipos de restrições para as funções $y \in E$. O conjunto K é dito o conjunto dos valores admissíveis.

Sabemos que se $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ possui um mínimo (local) em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ então $f'(x_0) = 0$. O método das variações é uma generalização dessa idéia para funcionais $J: E \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $u \mapsto \int F(x, u, u') dx$. Aqui também podemos mostrar que uma condição necessária para que u_0 seja mínimo (local) de J é que $J'(u_0) = 0$. A derivada $J'(u)$, a ser definida no próximo parágrafo, é conhecida no Cálculo das Variações como a primeira variação de J .

Nesse capítulo vamos considerar a seguinte generalização de (M): Seja E um espaço de Banach, $K \subset E$ e $J: E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sobre E . Estaremos interessados no problema $\min_{u \in K} J(u)$, que chamaremos de um problema variacional.

A vantagem de estudar o problema nesta generalidade se deve a duas razões. A primeira, ligada a J , reside no fato de que podemos formular problemas que não são do tipo mais simples. A segunda, relativa a E , é que a teoria moderna do Cálculo das Variações se faz no contexto dos espaços de Sobolev.

Para um estudo do Cálculo das Variações clássico, ver [13], [23], [25].

2 - DIFERENCIAÇÃO EM ESPAÇOS DE BANACH

Sejam E, W dois espaços de Banach e $F: D \subseteq E \rightarrow W$ uma função. A definição abaixo estende a noção de derivada de funções definidas em \mathbb{R}^n .

2.1 - DEFINIÇÃO - Dado $u \in D$ dizemos que $v \in E$ é uma direção admissível se existe um intervalo $[u, u+tv] \subseteq D$. Se v é uma direção admissível para u , definimos a diferencial de Gâteaux em u na direção v de F como sendo o limite (se existir)

$$G(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t}$$

Se $G(u, v)$ é linear e contínua em v , isto é, se $G(u, v) = Av$ para todo v admissível onde $A \in \mathcal{L}(E; W)$, dizemos que F é Gâteaux derivável (G-derivável) em u e que $F'(u) = A$ é a sua derivada de Gâteaux (G-derivada) em u . F é G-derivável se F é G-derivável em todo ponto.

O exercício abaixo mostra que $G(u, v)$ pode ser bem definida em u para todo $v \in E$ e, no entanto, $F'(u)$ não existir.

2.2 - EXERCÍCIO - Seja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } xy \leq 0 \\ x & \text{se } xy > 0 \end{cases}$

Mostre que F é G -diferenciável na origem com $G(0, \cdot) = F$. Conclua que F não é G -derivável na origem.

Algumas propriedades da derivada de Gâteaux são verificadas imediatamente:

- (i) a derivada de Gâteaux, se existir, é única.
- (ii) se F e G são G -deriváveis, $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha F + G$ é G -derivável e $(\alpha F + G)' = \alpha F' + G'$.

Vale também a seguinte desigualdade do valor médio.

2.3 - TEOREMA - Seja $F: D \subset E \rightarrow W$ G -derivável em $[u, u+tv] \subset \overset{\circ}{D}$. Então,

$$\|F(u+tv) - F(u)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|F'(u+tv)\| \|v\|$$

(As normas que aparecem na desigualdade acima se referem aos espaços W , $\mathcal{L}(E;W)$ e E respectivamente. Nesse capítulo usaremos sempre a notação $\|\cdot\|$, independentemente do espaço considerado.)

Demonstração - Seja $G(t) = F(u+tv)$. Então $G'(t) = F'(u+tv)v$ e o teorema fica demonstrado se mostrarmos que

$$\|G(1) - G(0)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|G'(t)\|$$

Primeiramente, observemos que, se $G: [0,1] \rightarrow W$ é G -diferenciável, então G é contínua. Tal fato, cuja demonstração o leitor é convidado a fazer, não se verifica necessariamente para $G: D \subset E \rightarrow W$.

Seja $M = \sup_{t \in [0,1]} \|G'(t)\|$. Podemos supor que $M < +\infty$. Vamos fixar $\epsilon > 0$ e considerar $S = \{s \in [0,1], \|G(s) - G(0)\| \leq (M + \epsilon)s\}$.

$0 \in S$ e, devido à continuidade de G , S é fechado. Logo, $\bar{S} = \sup S \in S$. Suponhamos $\bar{S} \neq 1$. Da definição da G -derivada de G em \bar{S} , podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$\|G(\bar{s} + \delta) - G(\bar{s})\| \leq (\|G'(\bar{s})\| + \epsilon) \delta$$

Logo,

$$\|G(\bar{s} + \delta) - G(0)\| \leq \|G(\bar{s} + \delta) - G(\bar{s})\| + \|G(\bar{s}) - G(0)\| \leq (M + \epsilon)(\bar{s} + \delta)$$

Assim, $\bar{s} + \delta \in S$, o que contradiz a definição de \bar{s} . Isso mostra que $1 \in S$ e, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, a demonstração fica concluída. ■

Porém, nem todas as boas propriedades que poderíamos esperar para uma derivada são verificadas.

2.4 - EXERCÍCIO - Seja $F(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$. Mostre que F é G -derivável na origem, mas não é contínua nesse ponto.

2.5 - EXERCÍCIO - Seja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (0,0) \end{cases}$

e $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G(x,y) = (x,y^2)$. Mostre que F e G são G -deriváveis na origem mas que o mesmo não ocorre com $F \circ G$.

Mais adiante tentaremos explicar porque tais "anormalidades" podem ocorrer. Antes disso, porém, vamos calcular algumas derivadas que aparecem frequentemente nas aplicações:

2.6 - EXEMPLOS

1 - Se $F(u)$ é constante então $F' = 0$.

2 - Se $A: E \rightarrow W$ é linear, então A' é constante e igual a A , isto é,

$$A'(u)v = Av \quad \forall u, v \in E.$$

3 - Se $B: E_1 \times E_2 \rightarrow W$ é bilinear, então

$$B'(u_1, u_2)(v_1, v_2) = B(u_1, v_2) + B(v_1, u_2)$$

4 - Seja H um espaço de Hilbert, que identificamos a seu dual, $A:H \rightarrow H$ um operador linear autoadjunto e $F:H \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle_H. \text{ Então } F'(u) = Au.$$

Em particular, se $A=I$ é a identidade em H , temos

$$F(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 \text{ e } F'(u) = u.$$

As verificações de 1, 2, 3 e 4 são imediatas. Todavia, chamamos a atenção do leitor de que, se $F:E \rightarrow \mathbb{R}$, então $F'(u) \in E^*$. Se, como em 4, E é de Hilbert com $E^* \cong E$, então $F'(u) \in E$, isto é, $F'(u)v = \langle F'(u), v \rangle_E \quad \forall v \in E$.

Examinemos agora os exercícios 2.4 e 2.5. O primeiro nos diz que F pode ter uma aproximação linear contínua sem, contudo, ser ela mesma contínua. O segundo nos indica que F', G' podem ser aproximações lineares ótimas de F e G sem que o mesmo ocorra de F', G' em relação a $F \circ G$. Podemos concluir que a noção de aproximação dada pela derivada de Gâteaux apresenta problemas.

Tais dificuldades podem ser explicadas a partir do seguinte fato: a G -derivada é a melhor aproximação linear contínua de F em u ao longe de cada reta passando por u . Mas a proximidade em X não se mede, salvo se $X \cong \mathbb{R}$, pela convergência sob retas. Observemos mesmo que a existência da derivada de Gâteaux de F não depende da norma de E ! A noção de derivada que consideramos a seguir vem remediar esse problema.

2.7 - DEFINIÇÃO - Dizemos que $F:D \subseteq E \rightarrow W$ é Fréchet diferenciável (F -diferenciável) em $u \in \overset{\circ}{D}$ se existe $A \in \mathcal{L}(E, W)$ tal que

$$F(u+v) = F(u) + Av + r(u, v)$$

onde $\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|r(u,v)\|}{\|v\|} = 0$.

Nesse caso, denotamos, como anteriormente, $F'(x) = A$ e a denominamos a derivada de Fréchet (F-derivada) de F em u .

Temos as seguintes propriedades para a F-derivada.

2.8 - PROPOSIÇÃO

- (i) Se F é F-derivável em u , então F é G-derivável em u e as duas derivadas coincidem. Portanto, a derivada de Fréchet é única.
- (ii) Se F, G são F-deriváveis, $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha F + G$ é F-derivável e $(\alpha F + G)' = \alpha F' + G'$.
- (iii) Se F é F-derivável em u , então F é contínua em u .
- (iv) Se F, G são F-deriváveis, então $F \circ G$ é F-derivável e $(F \circ G)'(u) = F'(G(u)) G'(u)$.

Demonstração:

Deixamos a demonstração de (i), (ii) e (iii) a cargo do leitor. Mostremos (iv).

A partir da definição de F-derivada, podemos escrever $F(G(u+w)) = F(G(u) + G'(u)w + r(u,w)) =$

$$= F(G(u)) + F'(G(u))(G'(u)w + r(u,w)) + \tilde{r}(G(u), G'(u)w + r(u,w))$$

onde $\lim_{\|w\| \rightarrow 0} \frac{\|r(u,w)\|}{\|w\|} = \lim_{\|z\| \rightarrow 0} \frac{\|\tilde{r}(G(u), z)\|}{\|z\|} = 0$.

Logo, $F(G(u+w)) = F(G(u)) + F'(G(u)) G'(u)w + s(u,w)$

onde $s(u,w) = F'(G(u)) r(u,w) + \tilde{r}(G(u), G'(u)w + r(u,w))$

Precisamos provar, pois, que $\lim_{\|w\| \rightarrow 0} \frac{\|s(u,w)\|}{\|w\|} = 0$.

É claro que $\frac{F'(G(u))}{\|w\|} \frac{r(u,w)}{\|w\|} = F'(G(u)) \frac{r(u,w)}{\|w\|} \xrightarrow{\|w\| \rightarrow 0} 0$.

Seja $z(u,w) = G'(u)w + r(u,w)$. Então $\|z(u,w)\| \xrightarrow{\|w\| \rightarrow 0} 0$ e

$$\frac{\|F(G(u), z(u,w))\|}{\|w\|} = \frac{\|F(G(u), z(u,w))\|}{\|z(u,w)\|} \frac{\|z(u,w)\|}{\|w\|} \xrightarrow{\|w\| \rightarrow 0} 0.$$

pois $\frac{\|z(u,w)\|}{\|w\|}$ é limitada numa vizinhança de 0.

Isso mostra que $\frac{\|s(u,w)\|}{\|w\|} \xrightarrow{\|w\| \rightarrow 0} 0$. ■

A recíproca de (1) não é, em geral, verdadeira.

2.9 - EXERCÍCIO - Considere $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como no exercício 2.5. Mostre que F não é F -derivável em $(0,0)$.

Temos, porém, o seguinte resultado.

2.10 - PROPOSIÇÃO. Seja $F: D \subseteq E \rightarrow W$ G -derivável em um aberto $\mathcal{O} \subseteq D$, com $F': \mathcal{O} \subseteq E \rightarrow \mathcal{L}(E, W)$ contínua em \mathcal{O} . Então, F é F -derivável nesse aberto.

Demonstração:

A demonstração do teorema é uma decorrência direta do teorema do valor médio. Temos que mostrar que

$$\frac{\|F(u+w) - F(u) - F'(u)w\|}{\|w\|} \rightarrow 0 \text{ quando } \|w\| \rightarrow 0.$$

Seja $G(w) = F(u+w) - F'(u)w$. G é G -derivável com G -derivada igual a $G'(w)v = F'(u+w)v - F'(u)v$.

Podemos então usar o teorema 2.3 e escrever

$$\frac{\|G(w) - G(0)\|}{\|w\|} \leq \sup_{t \in [0,1]} \|G'(tw)\|$$

Mas $\|G'(tw)\| = \|F'(u+tw) - F'(w)\| \xrightarrow{\|w\| \rightarrow 0} 0$ uniformemente em $t \in [0,1]$,

devido à continuidade de F' , o que termina a demonstração. ■

Para maiores informações sobre a diferenciabilidade em espaços de Banach o leitor poderá consultar [16],[30],[39].

EXERCÍCIOS

(Os exercícios marcados com (*) no livro são os mais difíceis)

2.11 - Seja G Gâteaux derivável em u e F Fréchet derivável em $G(u)$. Prove que $F \circ G$ é G -derivável em u . (Compare com o exercício 2.5).

2.12 - Seja $G(u,w)$ a G -diferencial de F . Mostre que:

(i) $G(u, \alpha w) = \alpha G(u,w) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Vale o teorema do valor médio:

$$\|F(u+w) - F(u)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|G(u+tw,w)\|$$

(Faça as modificações necessárias na demonstração do teorema 2.3)

(iii) $G(u, w_1 + w_2) = G(u, w_1) + G(u, w_2)$ se $G(u,w)$ é contínua em u .

(Use a definição de G -diferencial e (ii))

(iv) Conclua que a continuidade em u da G -diferencial de F implica na existência da sua derivada, isto é, $G(u,w) = F'(u)w$.

2.13 - Mostre que, se H é um espaço de Hilbert, a aplicação $N(x) = \|x\|$ é F -derivável para todo $x \neq 0$, com derivada dada por

$$N'(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$$

2.14 - Mostre que a aplicação norma $N(f) = \|f\|_p$ em $L^p(\Omega)$, com $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem por F -derivada

$$N'(f) = \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}} |f|^{p-2} f, \quad f \neq 0.$$

(Sugestão: Use a identidade $(a-b) \sum_{i=0}^{p-1} a^{\frac{1}{q}} - \frac{i}{p} \cdot b^{\frac{i}{p}} = a^{\frac{1}{p}} - b^{\frac{1}{p}}$, $a \neq 0$, $b > 0$)

2.15 - Mostre que, em $L^1(\Omega)$ e em $L^\infty(\Omega)$, a aplicação norma não é derivável em nenhum ponto.

2.16 - Seja $F: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x)) dx, \quad y \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$$

Mostre que J é F -derivável com

$$J'(y)z = \int_a^b F_y(x, y(x)) z(x) dx$$

2.17 - Seja E um espaço de Banach e $J: E \rightarrow \mathbb{R}$ G -derivável. Se u é ponto de mínimo local de J , mostre que $J'(u) = 0$.

3 - EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Retomemos a questão da minimização do funcional $J(v)$ definido sobre um espaço normado E . Nesta seção, estaremos interessados no caso em que o conjunto dos valores admissíveis K é um subespaço afim de E . Seja, pois, $p \in E$, V_0 um subespaço vetorial de E e $V = \{p\} + V_0$. Vamos considerar o problema

$$(M) \quad \min_{v \in V} J(v)$$

3.1 - EXERCÍCIO - Mostre que os exemplos (i), (ii) e (iii) do primeiro parágrafo deste capítulo são problemas deste tipo.

O resultado abaixo, embora de demonstração imediata, é fundamental para tudo o que faremos a seguir.

3.2 - TEOREMA - Se u é uma solução de (M) e J é G-derivável em u , então $J'(u)\xi = 0 \quad \forall \xi \in V_0$. (ou seja, $J'(u) = 0$ em V_0^*)

Demonstração - Se u é solução de (M) e $\xi \in V_0$, então $u + t\xi \in V$ se $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Logo, } J(u) \leq J(u + t\xi) \Rightarrow \frac{J(u + t\xi) - J(u)}{t} \geq 0 \quad \forall t > 0.$$

Passando ao limite, temos que $J'(u)\xi \geq 0$. Trocando ξ por $-\xi$, concluímos que $J'(u)\xi = 0$. ■

Vejamus uma aplicação desse resultado no caso em que $E = C_p^1[a, b]$ é o espaço vetorial das funções cujas derivadas são contínuas por partes em $[a, b]$, $V = \{y \in E; y(a) = y_0, y(b) = y_1\}$ e $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')$, onde $F \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$.

3.3 - TEOREMA - Nas condições acima, J é G-derivável com

$$J'(y)\xi = \int_a^b F_y(x, y, y') \xi + F_{y'}(x, y, y') \xi' \quad (1)$$

Além disso, se y é solução de (M), então

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Antes de passarmos à demonstração do teorema, vamos estabelecer um resultado preliminar

3.4 - LEMA - Se $g(x) \in C^0[a, b]$ e $\int_a^b g(x) \xi(x) dx = 0$ para

todo $\xi \in V_0 = \{\xi \in C_p^1[a, b]; \xi(a) = \xi(b) = 0\}$, então $g(x) = 0$.

(1) Estamos aqui cometendo um abuso usual de notação ao considerarmos y como função de derivada y' e, ao mesmo tempo, y e y' como variáveis de $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Assim, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ e $F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$ são derivadas parciais de F .

Demonstração - Por absurdo, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $x_0 \in (a, b)$ com $g(x_0) = g > 0$ e $A = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ com $g|_A > 0$.

$$\text{Definimos } \xi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\delta} |x - x_0| & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Assim, $\xi \in V_0$ e $g(x)\xi(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Como

$\int_a^b g(x)\xi(x)dx = 0$, concluímos que $g(x)\xi(x) \equiv 0$, o que é uma contradição. ■

Já estamos prontos para iniciarmos a

Demonstração do teorema 3.3 - Temos que

$$\frac{J(y+t\xi) - J(y)}{t} = \int_a^b \frac{F(x, y+t\xi, y'+t\xi') - F(x, y, y')}{t}$$

Pelo teorema do valor médio,

$$\frac{J(y+t\xi) - J(y)}{t} = \int_a^b F_y(x, y+\bar{t}\xi, y'+\bar{t}\xi')\xi + F_{y'}(x, y+\bar{t}\xi, y'+\bar{t}\xi')\xi'$$

onde $\bar{t} = \bar{t}(x) \rightarrow 0$ uniformemente com t . Logo, para cada y, ξ fixados, o integrando acima converge uniformemente em t . Assim,

$$J'(y)\xi = \int_a^b F_y(x, y, y')\xi + F_{y'}(x, y, y')\xi'$$

Para mostrarmos a segunda parte do teorema, observamos que, se $p \in V = \{y \in E; y(a) = y_0, y(b) = y_1\}$ e V_0 é definido como no Lema 3.4, então $V = \{p\} + V_0$. Pelo teorema 3.2, se y é solução de (M) e $\xi \in V_0$,

$$J'(y)\xi = \int_a^b F_y(x, y, y')\xi + F_{y'}(x, y, y')\xi' = 0$$

Integrando por partes, temos

$$\int_a^b (F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y')) \xi = 0 \quad \forall \xi \in V_0 \quad (1)$$

Usando o Lema 3.4, concluímos a demonstração.

3.5 - OBSERVAÇÃO - Se definirmos $\tilde{J}: V_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{J}(v) = J(v+p)$, então (M) é equivalente a (*) $\min_{v \in V_0} \tilde{J}$. Podemos, pois, considerar (M) como um problema de minimização sem restrições, isto é, onde o conjunto de valores admissíveis é todo o espaço. Nesse caso, o Teorema 3.3 nos diz que uma solução de (*) satisfaz $J'(u) = 0$ (em V_0^*).

A equação dada pelo teorema 3.3 é chamada equação de Euler-Lagrange associada à minimização de $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')$. Ela expressa a igualdade $J'(y) = 0$ nessa situação particular. Foi Euler, no estudo da braquistóclona, quem primeiro chegou a formulá-la. A idéia de Euler foi a de discretizar o problema, usando o hoje chamado método das diferenças finitas. Mas o próprio Euler perguntava em seu trabalho se não haveria uma forma menos geométrica e mais analítica de se obter o mesmo resultado. Foi Lagrange, então com 19 anos, quem deu a resposta à questão, usando a chamada variação de um funcional. Euler, impressionado com o trabalho do jovem Lagrange, considerou a nova técnica como a mais adequada ao estudo da minimização de funcionais e chamou-a de Cálculo das Variações. Hoje em dia dizemos, de uma maneira geral, que $J'(u) = 0$ é a equação de Euler-Lagrange associada ao problema $\min_{u \in E} J(u)$.

(1) Ao leitor familiarizado com a teoria das distribuições indicamos que é nesse contexto onde, historicamente, aparece pela primeira vez uma função expressa como distribuição.

Se $J'(u) = 0$, dizemos que u é um ponto extremal de J . Como no caso n -dimensional, todo mínimo é um extremo. A recíproca não é evidentemente verdadeira. Ao procurarmos condições de suficiência para a obtenção de mínimo, temos aqui também que olhar para a segunda derivada.

Seja, pois, J de classe C^2 . Então

$$J(u+tv) = J(u) + tJ'(u)v + \frac{t^2}{2} J''(u+\bar{t}v)v^2 \quad \forall u, v \in E$$

onde $0 < \bar{t} \leq t$. Se u é ponto de mínimo, $J'(u) = 0$ e

$$J(u+tv) = J(u) + \frac{t^2}{2} J''(u+\bar{t}v)v^2 \geq J(u)$$

ou seja, $J''(u+\bar{t}v)v^2 \geq 0$. Fazendo $t \rightarrow 0$ temos $J''(u)v^2 \geq 0$ para todo $v \in E$.

Reciprocamente, vemos imediatamente que, se existe uma vizinhança N de um ponto extremal u tal que

$$J''(w)v^2 \geq 0 \quad \forall v \in E, \quad \forall w \in N,$$

então u é ponto de mínimo (local).

Tomemos mais uma vez como exemplo a situação dada no teorema 3.3. Nesse caso,

$$J''(y)\xi^2 = \int_a^b F_{yy} \xi^2 + 2F_{yy'} \xi\xi' + F_{y'y'} \xi'^2$$

Assim, para que um arco extremal $y(x)$ seja um ponto de mínimo é suficiente que a matriz $\begin{pmatrix} F_{yy} & F_{yy'} \\ F_{yy'} & F_{y'y'} \end{pmatrix}$ seja estritamente positiva definida em todos os pontos de y , isto é, que

$$F_{yy} \cdot F_{y'y'} - (F_{y'y'})^2 > 0, F_{y'y'} > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad (1)$$

De fato, temos o seguinte resultado.

3.6 - EXERCÍCIO - Uma matriz é (estritamente) positiva definida se $(Av, v) \geq 0$ (> 0) para todo $v \neq 0$. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ é uma matriz 2×2 simétrica, então A é (estritamente) positiva definida se e só se $\begin{cases} \det A = ac - b^2 \geq (> 0) \\ a \geq 0 \end{cases}$.

A caracterização dos pontos de mínimo está estreitamente ligada ao assunto principal do nosso livro: a convexidade. Mostremos no próximo capítulo que um funcional J de classe C^2 é convexo se e só se J'' é positiva definida.

EXERCÍCIOS

3.7 - Mostre que se $u(x, y)$ é solução do problema de Plateau (ver exemplo (ii) do parágrafo 1) então u satisfaz a equação não linear.

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0 \quad \text{em } \Omega$$

com $u=f$ sobre Γ

3.8 - Suponha que $u(x, y) \in C^2(\Omega)$ seja solução do problema de Dirichlet (exemplo. (iii)). Mostre que a integral de Dirichlet

$$J(v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} v_x^2 + v_y^2 \quad \text{é G-derivável em } u \text{ e que}$$

$$J'(u)v = - \iint_{\Omega} \Delta u \cdot v = 0.$$

(1) Podemos impor condições menos restritivas que esta afim de que J seja positiva definida numa vizinhança de u. Ela é, no entanto, adequada para nossos propósitos. A questão da suficiência ocupa um lugar central no Cálculo das Variações. O Leitor interessado poderá consultar, por exemplo, [13] ou [23].

Use um análogo bidimensional do Lema 3.4 para concluir que u satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

Observe que esta é uma linearização da equação de Plateau dada no exercício 3.7.

3.9 - Na presença de forças de densidade superficial $g(x,y)$, a integral de Dirichlet se escreve $J(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) + g u$. Nesse caso, mostre que a solução u satisfaz o também chamado problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = g & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

3.10 - (i) Prove o Lema 3.4 no caso em que $V_0 = C_0^m[a,b]$, $m \geq 1$.

*(ii) Faça o mesmo se $V_0 = C_0^\infty[a,b]$.

4 - MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

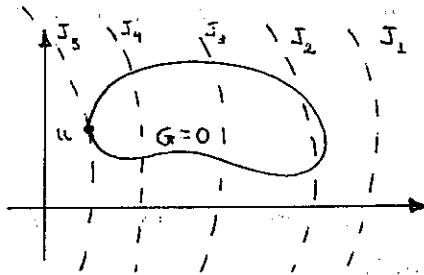
No Cálculo das Variações surge uma outra classe importante de problemas, os chamados problemas de minimização com restrições, onde o conjunto K de valores admissíveis não é mais todo o espaço. As restrições sobre K podem ser de vários tipos. Por exemplo, se J, G são funções de E em \mathbb{R} , nos chamados problemas iso-perimétricos (do qual o problema isoperimétrico original, dado no exemplo (iv) do primeiro parágrafo, é um caso particular),

$$(4.1) \quad \min_{G(v) = 0} J(v)$$

o conjunto $K = \{v \in E, G(v) = 0\}$ é, em geral, uma variedade. (1)

A representação gráfica das curvas de nível de J e G nos ajuda a entender o que se passa.

(1) de codimensão 1, como veremos adiante.



Vamos mostrar que em geral temos exatamente a situação indicada na figura acima: no ponto de mínimo u , a curva de nível $J = J(u)$ é tangente à superfície $G = 0$. Daqui por diante estaremos considerando J e G funções de classe C^1 .

4.1 - DEFINIÇÃO - Seja E um espaço vetorial. Dizemos que um subespaço vetorial $V \subset E$ tem codimensão 1 se existe $v_0 \in E$ tal que $E = [v_0] \oplus V$.

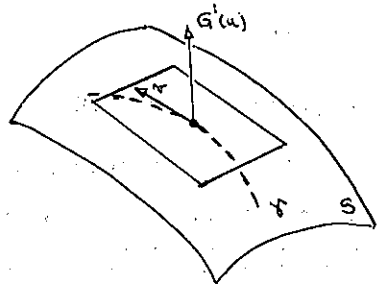
4.2 - LEMA - Se $A \in E^*$ e $A \neq 0$ então $N(A) = \{v \in E, Av = 0\}$ tem codimensão 1.

Demonstração - Seja $v_0 \in E$ tal que $Av_0 \neq 0$. É claro que $[v_0] \cap N(A) = \{0\}$. Se $z \in E$, seja $k = \frac{Az}{Av_0}$. Então, $A(z - kv_0) = 0$ e $z - kv_0 = v \in N(A)$. Isso mostra que $E = [v_0] \oplus N(A)$. ■

4.3 - LEMA - Seja $G \in C^1(E; \mathbb{R})$ e $S = \{v \in E, G(v) = 0\}$. Seja $u \in S$ com $G'(u) \neq 0$. Se $v \in E$ e $G'(u)v = 0$, então existe $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = u$ e $\gamma'(0) = v$.

Demonstração - Seja $v_0 \in E$ tal que $G'(u)v_0 \neq 0$ e $F(\alpha, \beta) = G(u + \alpha v_0 + \beta v)$. Então, $F(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \alpha}(0, 0) = G'(u)v_0 \neq 0$ e

$\frac{\partial F}{\partial \beta}(0, 0) = G'(u)v = 0$. Pelo Teorema da



Função Implícita, existe $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha(0) = 0$, $F(\alpha(\beta), \beta) = 0$, com $\alpha'(0) = -\frac{\partial F / \partial \beta}{\partial F / \partial \alpha}(0, 0) = 0$. Basta, então, definir mos $\gamma(\beta) = u + \alpha(\beta)v_0 + \beta v$. ■

Agora estamos prontos para enunciarmos o

4.4 - TEOREMA - Consideremos u solução do problema isoperimétrico com $G'(u) \neq 0$. Então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (multiplicador de Lagrange) tal que $J'(u) = \lambda G'(u)$.

Demonstração - Vamos primeiro verificar que

$$N(G'(u)) \subset N(J'(u))$$

De fato, se $G'(u)v = 0$, pelo Lema 4.3 existe $\gamma(\beta) \subset S$ tal que $\gamma(0) = u$, $\gamma'(0) = v$. Seja $f(\beta) = J(\gamma(\beta))$. Então, 0 é ponto de mínimo de f , o que implica que $f'(0) = J'(u)v = 0$.

Tomemos agora $v_0 \in E$ tal que $G'(u)v_0 \neq 0$. Definimos

$\lambda = \frac{J'(u)v_0}{G'(u)v_0}$. Dado $z \in E$, decorre do Lema 4.2 que podemos escrever $z = kv_0 + v$, com $v \in N(G'(u)) \subset N(J'(u))$.

Logo, $J'(u)z = k J'(u)v_0 = k \lambda G'(u)v_0 = \lambda G'(u)z$. ■

Se considerarmos $F(u, \lambda) = J(u) + \lambda G(u)$, então F é de classe C^1 com $\frac{\partial F}{\partial u}(u, \lambda) = J'(u) + \lambda G'(u)$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(u, \lambda) = G(u)$. Vemos assim que o Teorema 4.4 nos diz que podemos transformar o problema de minimização com restrições em um problema sem restrições, porém definido em um espaço maior: encontrar pontos críticos de $F(u, \lambda)$. Uma questão natural é a de determinarmos a natureza do ponto crítico $(u, -\lambda)$ que aparece no teorema 4.4. Veremos adiante que em geral temos um ponto-sela.

O teorema 4.4 tem inúmeras aplicações. Em geometria diferencial, problemas isopermétricos aparecem naturalmente quando estamos trabalhando sobre superfícies. Por exemplo, na determinação de geodésicas. Também em problemas onde a variável $u(x)$ representa uma probabilidade, como na Física Quântica, temos restrições do tipo $\int u^2(x)dx = 1$. Uma outra aplicação importante, que discutimos a seguir, está relacionada com a teoria espectral de operadores lineares contínuos e autoadjuntos em espaços de Hilbert.

Consideremos H um espaço de Hilbert e $A \in \mathcal{L}(H;H)$ um operador autoadjunto. Se $J(u) = \langle Au, u \rangle$, vimos em 2.6 que

$J'(u) = 2 Au$. Suponhamos que o problema

$$(M1) \quad \max_{\|u\|^2=1} J(u), \quad u \in H$$

admite uma solução u_1 . Aqui, $G(u) = \|u\|^2 - 1$ e u_1 satisfaz

$Au_1 = \lambda_1 u_1$ com $J(u_1) = \lambda_1$. Assim, λ_1 é o maior autovalor de A .

Seja agora $H_1 = \{u \in H, \langle u, u_1 \rangle = 0\}$ e consideremos o problema

$$(M2) \quad \max_{\|u\|^2=1} J(u), \quad u \in H_1$$

Se (M2) tem uma solução u_2 então $Au_2 = \lambda_2 u_2$ em H_1^* , ou seja, $\langle Au_2, v \rangle = \lambda \langle u_2, v \rangle \forall v \in H_1$. Mas é fácil verificar que

$\langle Au_2, u_1 \rangle = \langle u_2, Au_1 \rangle = \lambda_1 \langle u_2, u_1 \rangle = 0 = \lambda_2 \langle u_2, u_1 \rangle$ e logo

$\langle Au_2, v \rangle = \lambda_2 \langle u_2, v \rangle \forall v \in H$. Desta forma, encontramos um segundo

autovalor $\lambda_2 = J(u_2) \leq \lambda_1$ e assim sucessivamente. O leitor deve

observar, no entanto, que não é evidente a existência de uma solução de (M1), (M2), etc. Indicamos abaixo como podemos encon-

trar uma infinidade de autovalores e autovetores para uma classe importante de operadores lineares: os operadores compactos.

*4.5 - EXERCÍCIO - Dizemos que $A \in \mathcal{L}(H, H)$ é compacto se A leva seqüências fracamente convergentes em seqüências fortemente convergentes de H , espaço de Hilbert. Vamos supor inicialmente que A possui uma infinidade de autovalores estritamente positivos.

(i) Use a compacidade de A para mostrar que (M1) tem uma solução.

(ii) Faça o mesmo para (M2) e construa assim uma seqüência infinita de autovalores λ_i correspondente a u_i , com $\lambda_{i+1} \geq \lambda_i > 0$.

(iii) Use a compacidade de A para provar que $\lambda_i \searrow 0$. (Sugestão: $\{u_i\}$ tem uma subsequência fracamente convergente e

$$\|Au_i - Au_j\|^2 = \lambda_i^2 + \lambda_j^2$$

(iv) De (iii) conclua que todos os autovalores positivos podem ser obtidos por esse processo.

(v) Para obter os autovalores negativos, proceda analogamente a partir de $\lambda_{-1} = \inf_{\|u\|^2=1} J(u)$.

No caso de termos não apenas uma mais sim k restrições $G_1(u) = G_2(u) = \dots = G_k(u) = 0$, podemos generalizar o resultado de existência de multiplicadores de Lagrange da seguinte forma:

4.6 - TEOREMA - Seja $J \in C^1(E; \mathbb{R})$, $G = (G_1, G_2, \dots, G_k) \in C^1(E; \mathbb{R}^k)$

Consideremos o problema

$$\min_{G(u)=0} J(u)$$

Se u é solução e $G'(u)$ é sobrejetora então existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ tais que $J'(u) = \sum_{i=1}^k \lambda_i G'_i(u)$.

A demonstração pode ser feita de forma essencialmente

análoga à do teorema 4.4 e é deixada como exercício.

4.7 - EXERCÍCIO - Eis um roteiro para a demonstração do teorema 4.6.

(i) Use a sobrejetividade de $G'(u)$ para mostrar que existem v_1, v_2, \dots, v_k tais que $G'(u)v_j = \delta_{ij}$.

(ii) Mostre que $N(G'(u))$ tem codimensão k , isto é,
 $E = N(G'(u)) \oplus [v_1, v_2, \dots, v_k]$ (compare com o Lema 4.2)

(iii) Mostre o análogo ao Lema 4.3: Se $G'(u)v = 0$, então existe $\gamma(\beta)$ tal que $G(\gamma(\beta)) = 0$, $\gamma(0) = u$ e $\gamma'(0) = v$. (Sugestão: Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ considere $F(\alpha, \beta) = G(u + \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i + \beta v)$).

(iv) Proceda como na demonstração do teorema 4.4, definindo $\lambda_j = J'(v_j)$.

4.8 - EXERCÍCIO - Ainda sobre o teorema 4.6

(i) Mostre que $G'(u)$ é sobrejetora se e somente se $\{G'_i(u)\}_{i=1}^k$ é linearmente independente em E^* .

(ii) De um exemplo em dimensão finita que mostre que a condição de sobrejetividade não pode ser suprimida (Uma figura ajuda).

Muitas áreas importantes da Matemática se ocupam de problemas de minimização com restrições. A Teoria do Controle trata de minimizar um certo funcional $J(x)$, dito função de custo, onde $x(t)$ são trajetórias que dependem de um parâmetro de controle v , isto é, $\dot{x} = F(t, x, v)$. (1) Definindo $u = (x, v)$ e

(1) Na realidade, este é o problema clássico da Teoria do Controle. Hoje em dia, esta teoria trata de problemas cujas restrições são equações diferenciais parciais ou ordinárias. Veja, por exemplo, Control Theory of Systems Governed by Partial Differential Equations, de J.L.Lions, ou Function Spaces and Optimal Control of Distributed Systems, do mesmo autor.

$G(u) = \dot{x} - F(t, x, v)$ o problema se reduz a (*) $\min_{G(u)=0} J(u)$. Aqui, G é uma aplicação entre dois espaços de Banach.

Outro caso é o de restrições na forma de desigualdade $G(u) \leq 0$, que aparece na teoria de otimização e em problemas envolvendo equações diferenciais parciais não-lineares. Este tipo de restrição dá lugar às chamadas desigualdades variacionais. Teremos oportunidade de discutir melhor esta questão no capítulo 2.

Por ora, vamos considerar o caso particular de (*) em que $G(u)$ é uma aplicação linear $B \in \mathcal{L}(E, W)$ entre dois espaços de Banach:

$$\min_{Bu=0} J(u)$$

O multiplicador de Lagrange que aparece aqui não é mais uma constante, mas sim um elemento de W^* .

4.9 - TEOREMA - Seja $B \in \mathcal{L}(E; W)$ satisfazendo a seguinte condição:

(C) $\forall w \in \text{Im } B, \exists v \in E$ tal que $Bv = w$ e $\|v\| \leq C\|w\|$. Então, se u é uma solução do problema, existe um multiplicador de Lagrange $\lambda \in (\text{Im } B)^*$ tal que $J'(u) = \lambda \circ B = B^* \lambda$.

Demonstração - Observemos que podemos transformar o problema em outro de minimização sem restrições: $\min_{v \in V} J(v)$, onde $V = N(B)$ é um espaço de Banach. Assim, se u é ponto de mínimo, temos $J'(u) = 0$ em V^* ou seja

$$J'(u)v = 0 \quad \forall v \in V.$$

Seja $X = \text{Im } B$ (a condição (C) nos garante que X é um espaço de Banach) e $w = Bv \in X$. Consideramos $\lambda w = J'(u)v$.

$\lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ é um operador linear bem definido, pois se $Bv_1 = Bv_2$ então $v_1 - v_2 \in N(B)$ e $J'(u)v_1 = J'(u)v_2$.

Além disso, dado $w \in \text{Im } B$, seja $v \in E$ como em (C). Então $\|\lambda w\| = \|J'(u)v\| \leq \|J'(u)\| \|v\| \leq C \|J'(u)\| \|w\|$.

Portanto, $\lambda \in (\text{Im } B)^*$, o que queríamos mostrar. ■

4.10 - EXERCÍCIO - (i) Mostre que se $B \in \mathcal{L}(E; W)$ satisfaz à condição (C) do teorema 4.9 então $\text{Im } B$ é um subespaço fechado de W .

(ii) Reciprocamente, se $\text{Im } B$ é fechada então $B \in \mathcal{L}(E; W)$ satisfaz à condição (C). (Sugestão: Considere $E_* = E/N(B)$ com a norma quociente. Então, E_* é um espaço de Banach e $B: E_* \rightarrow \text{Im } B$ é injetora é sobre (Use 0.1.20)

4.11 - EXERCÍCIO - Mostre que a condição (C) é equivalente à condição de Babuška - Brezzi: $\sup_v \frac{(Bv, \xi)}{\|v\|} \geq c \|\xi\| \quad \forall \xi \in (\text{Im } B)^*$.

(Sugestão: Use o teorema da imagem fechada 0.1.19)

5 - TRANSFORMADA DE LEGENDRE

Vamos voltar a tratar do problema mais simples do Cálculo das Variações

$$(1) \min \int_a^b F(x, y, y') \quad , \quad y(a) = y(b) = 0$$

na forma de um problema de minimização com restrições. Para tanto, escrevemos (1) como

$$(2) \min_{z-y'=0} \int_a^b F(x, y, z) \quad , \quad y(a) = y(b) = 0$$

$$\text{Seja } u = (y, z), \quad J(u) = \int_a^b F(x, y, z) \quad , \quad B \in \mathcal{L}(E; W),$$

$Bu = y' - z$, onde $E = C_0^1[a, b] \times C^0[a, b]$ e $W = C^0[a, b]$. O leitor deve

verificar que a condição (C) do teorema 4.9 se aplica e (2) se reduz a encontrar pontos críticos de

$$(3) \int_a^b F(x,y,z) + \langle p, y'-z \rangle$$

onde \langle, \rangle denota a dualidade W^*, W .

5.1 - OBSERVAÇÃO - O significado da dualidade \langle, \rangle nos é dado pelo Teorema da Representação de Riesz (ver [30]), que diz que W^* é o espaço das funções de variação limitada, isto é, $\langle p, y'-z \rangle = \int (y'-z)dP$, onde $P(x)$ é uma função de variação limitada.

Vamos admitir o fato, cuja demonstração o leitor é convidado a fazer, de que se F for suficientemente regular (C^2 , por exemplo) e se p é o multiplicador de Lagrange de (2), então existe $P \in C^1[a,b]$ tal que $dP = p dx$. Devido à densidade das funções regulares em W^* , nesse caso podemos substituir (3) por

$$(3') \int_a^b F(x,y,z) + \int_a^b p(y'-z)$$

5.2 - OBSERVAÇÃO - Uma maneira mais natural de obtermos a formulação (3') é munindo os espaços E e W com as normas

$$\left(\int_a^b y^2 + y'^2 \right)^{1/2} + \left(\int_a^b z^2 \right)^{1/2} \text{ e } \left(\int_a^b w^2 \right)^{1/2}, \text{ respectivamente.}$$

Assim, $W^* = L^2[a,b]$ e temos (3') imediatamente, com $p \in L^2[a,b]$.

Chamamos a atuação do leitor que, nesse caso, E e W não são mais espaços de Banach. Porém, no que concerne a Teoria desenvolvida até aqui, isto não é realmente um problema, visto que tudo o que fizemos permanece válido para espaços normados.

Teríamos, no entanto, uma dificuldade real no estabeleci-

mento da existência de soluções, que trataremos no próximo capítulo. Nesse caso, temos necessidade de trabalhar em espaços completos e somos levados a considerar o completamento de E e W sob tais normas, isto é, $H^1_0[a,b] \times L^2[a,b]$ e $L^2[a,b]$, respectivamente.

Retomamos agora a pergunta formulada na seção 2 desse capítulo:

Qual a natureza do ponto crítico dado por (3') ?

É fácil ver que (2) é equivalente a

$$(4) \quad \min_{(y,z)} \max_p \int_a^b F(\bar{x}, y, z) + \int_a^b p(y'-z)$$

De fato, se $y' \neq z$ então $\max_p \int_a^b F(x, y, z) + \int_a^b p(y'-z) = +\infty$

(seria mais correto escrever \sup_p). Se $y' = z$, o problema se reduz a (2). Logo, estamos em presença de um ponto crítico de tipo sela.

Pontos de sela da forma $\min \max$ aparecem em vários contextos e uma questão importante é saber quando podemos trocar $\min \max$ por $\max \min$. Voltaremos a ela no próximo capítulo. Por ora, vamos admitir que (4) possa ser escrito (ao menos localmente) como

$$(5) \quad \max_p \min_{(y,z)} \int_a^b F(x, y, z) + \int_a^b p(y'-z)$$

Vamos admitir também que, fixado p , exista o ponto de mínimo (y_p, z_p) de $\int_a^b F(x, y, z) + \int_a^b p(y'-z)$. Então,

$$F_y(x, y_p, z_p) - p' = 0 \quad (1)$$

$$F_z(x, y_p, z_p) - p = 0$$

Suponhamos que F satisfaça a condição de suficiência (ver seção 3)

$F_{yy} \cdot F_{zz} - (F_{yz})^2 > 0$ (2) pontualmente numa vizinhança da solução y de (1).

Então, para cada par $(r, p) \in \mathbb{R}^2$ o problema

$$(6) \quad \begin{cases} F_y(x, y, z) = r \\ F_z(x, y, z) = p \end{cases}$$

admite uma única solução nessa região e (5) se escreve

$$\max_{r-p'=0} \int_a^b F(x, y, z) - yr - zp$$

onde (y, z) e (r, p) estão relacionados pontualmente por (6). Definindo

$$F^*(x, r, p) = yr + zp - F(x, y, z)$$

temos que (2) é equivalente a

$$(7) \quad \max_{r-p'=0} - \int_a^b F^*(x, r, p)$$

F^* é dita a transformada de Legendre (ou o dual) de F e (7) é o problema dual de (2).

(1) Esta equação é obtida integrando previamente $\int py'$ por partes. No caso de outras condições de fronteira que não $y(a)=y(b)=0$, teríamos a contribuição do termo $y(b)p(b)-y(a)p(a)$, o que não alteraria substancialmente o que estamos fazendo.

(2) Passaremos a usar nessa seção z no lugar de y' como a terceira coordenada no domínio de F .

Calculemos a derivada de F^* . Em virtude de (6) temos

$$F_r^* = r y_r + y + z_r p - F_y y_r - F_z z_r = y.$$

$$F_p^* = y_p r + z_p p + z - F_y y_p - F_z z_p = z$$

Assim $F^{**} = (F')^{-1}$ com $F(x, y, z) = yr + zp - F^*(x, r, p)$ e logo $F^{**} = F$. Temos, portanto, duas formulações duais, (2) e (7), de um mesmo problema e, em cada caso concreto, poderemos escolher qual delas é a melhor para se resolver.

Pode acontecer, no entanto, que (6) não possa ser resolvido univocamente em uma vizinhança da solução. Podemos recorrer então a outro tipo da dualização, escrevendo (5) como

$$(8) \quad \max_p \min_y \min_z \left(\int_a^b F(x, y, z) + \int_a^b p(y' - z) \right)$$

Se, para cada (p, y) fixado, o problema

$$\min_z \left(\int_a^b F(x, y, z) + \int_a^b p(y' - z) \right) \text{ possui um único mínimo (local) } z(p, y),$$

então

$$(9) \quad F_z(x, y, z(p, y)) = p$$

Suponhamos que $F_{zz}(x, y, z) > 0$ ⁽¹⁾ ao longo da solução do problema. Então, $z(p, y)$ está univocamente determinado por (9).

Definindo

$$(10) \quad H(x, y, p) = pz(p, y) - F(x, y, z(p, y))$$

o problema (8) se reduz a

(1) Se $F_{zz} \geq 0$ ao longo da solução da equação de Euler-Lagrange
(*) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ então diremos que F satisfaz à condição de Legendre. $F_{zz} > 0$ é dita a condição forte de Legendre.

$$(11) \quad \max_p \min_y \left\{ \int_a^b py' - \int_a^b H(x,y,p) \right.$$

Nesse caso H , a transformada de Legendre de F na terceira coordenada, é dita a transformada canônica de F e (y,p) são as variáveis canônicas. Da mesma forma, as equações de Euler-Lagrange associadas a (11),

$$(12) \quad \begin{cases} y' = \frac{\partial H}{\partial p} \\ p' = -\frac{\partial H}{\partial y} \end{cases}$$

são ditas as equações canônicas relativas ao problema.

Exemplo 5.3 - Uma situação onde não podemos resolver (6) univocamente em torno da solução é quando F não depende de y . Mas, se $F_{zz} > 0$, podemos usar a transformada canônica (9), (10) obtendo um problema mais simples. De fato, nesse caso (11) se escreve

$$\max_p \left\{ - \int_a^b H(x,p) + \min_y \int_a^b py' \right\}$$

$$\text{Mas, } \int_a^b py' = 0 \quad \forall y \in C_0[a,b] \Leftrightarrow p = C \text{ (constante) em}$$

$[a,b]$ (veja exercício 5.8).

$$\text{Logo, } \min_y \int_a^b py' = \begin{cases} 0 & \text{se } p=C \\ -\infty & \text{senão} \end{cases} \quad \text{de modo que basta}$$

resolver

$$\max_{C \in \mathbb{R}} - \int_a^b H(x,C)$$

a que reduz o problema inicial à uma maximização na reta.

Exemplo 5.4 - Vamos considerar agora o problema da mecânica clássica da determinação do movimento de um sistema de n partículas entre as instantes t_0 e t_1 . Aqui, a variável x será substituída pelo tempo t , a incógnita $y(x)$ pela posição generalizada $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ ⁽¹⁾. Suponhamos conhecidos

$$(13) \quad q(t_0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1$$

O princípio de Hamilton diz que entre todas as possíveis trajetórias satisfazendo (13) a que realmente se verifica é aquela que minimiza $\int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt$, onde L é dito o Lagrangeano do sistema e $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$.

A equação de Euler-Lagrange, $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$ é conhecida em mecânica como a equação de Lagrange, e a colocação do problema nesses termos é conhecida com sua formulação lagrangeana.

No caso de um sistema conservativo, o Lagrangeano se escreve como $L = T - U$, onde $T(q, \dot{q}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$ é a energia cinética e $U(q)$ é a energia potencial.

Uma outra formulação do problema, a chamada formulação hamiltoniana, é a que se obtém através da transformação canônica (9), (10). Chamamos a atenção de leitor para o fato de que as quantidades envolvidas são vetoriais, mas isto não altera essencialmente nada do que fizemos. A equação (9) traduz-se no sistema

(1) De acordo com o problema, pode ser mais conveniente caracterizar a posição de uma partícula através de outros parâmetros que não as suas coordenadas cartesianas. Daí o nome de posição generalizada.

$$(14) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t, q, \dot{q}) = p_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

onde $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ é o momentum generalizado e (14) é localmente inversível se a matriz $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)$ for inversível.

A função $J(t, q, p) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(t, q, \dot{q})$ é chamada o hamiltoniano do sistema e as equações canônicas

$$(5.14) \quad \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

são conhecidos na mecânica como as equações de Hamilton.

Os exercícios 5.11, 5.12 mostram que, no caso de sistemas conservativos, H representa a energia total do sistema e é constante ao longo do movimento.

EXERCÍCIOS

5.5 - Seja $E = C^1_0[a, b] \times C^0[a, b]$, $W = C^0[a, b]$ e $B \in \mathcal{L}(E; W)$ definido por $B(y, z) = y' - z$. Mostre que B satisfaz à condição (C) do Teorema 4.6 observando que $B(0, -w) = w$.

5.6 - Mostre que se E e F são dois espaços normados, $F \subseteq E$ e $\bar{F} = E$ então F^* pode ser identificado a E^* . Assim, a respeito da Observação 5.2, se $W = C^0[a, b]$ é munido da norma $L^2[a, b]$ então $\bar{W} = L^2[a, b]$ e $W^* = L^2[a, b]$.

5.7 - O problema de superfícies mínimas (veja exercício 3.7) nos leva à equação não linear $(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0$. Para soluções satisfazendo $u_{xx} \cdot u_{yy} - (u_{xy})^2 \neq 0$ podemos utilizar

a transformada de Legendre $w(p,q) = px + qy - u(x,y)$, onde

$p = u_x$, $q = u_y$. Mostre que w verifica a equação linear

$$(1+q^2)w_{qq} + 2pq w_{pq} + (1+p^2)w_{pp} = 0$$

5.8 - Mostre que $p \in C[a,b]$ satisfaz $\int_a^b py' = 0 \quad \forall y \in C_0[a,b]$ se e somente se p é constante em $[a,b]$.

5.9 - Este exercício mostra como podemos dualizar o problema de Dirichlet e pode ser considerado o análogo bidimensional do Exemplo 5.3.

Considere o problema de Dirichlet (veja exercício 3.9)

$$(*) \quad m = \min_{u \in C_0^1[a,b]} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) + \int_{\Omega} g u$$

(i) Mostre que (*) é equivalente a

$$m = \min_{u,r,s} \max_{p=(p_1,p_2)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (r^2 + s^2) + \int_{\Omega} gu - p_1(r - u_x) - p_2(s - u_y)$$

(ii) Admita que possamos permutar max e min e que p seja de classe C^1 . Mostre que

$$m = \min_{r,s} \max_p \frac{1}{2} \int_{\Omega} (r^2 + s^2) - \int_{\Omega} (p_1 r + p_2 s) + \min_u \int_{\Omega} (g - \nabla \cdot p) u, \text{ onde } \nabla \cdot p = \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} \text{ é o divergente de } p.$$

$$(iii) \quad \text{Então, } m = \max_{\nabla \cdot p = g} \min_{r,s} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (r^2 + s^2) - \int_{\Omega} p_1 r + p_2 s \text{ ou ainda}$$

$$(**) \quad m = \max_{\nabla \cdot p = g} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |p|^2$$

(iv) Para uma interpretação da dualização (**), verifique que se u é solução de (*) e $p = \nabla u$ então $\nabla \cdot p = g$ e

$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} gu = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |p|^2$. Portanto $p = \nabla u$ é solução de (**).

5.10 - No exemplo 5.4 suponha que a posição generalizada $q(t)$ seja dada em coordenadas cartesianas, $q_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$.

Nesse caso, a energia cinética é dada por $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\dot{q}_i|^2$ onde m_i é a massa da i -ésima partícula e $\frac{\partial U}{\partial q_i} = -F_i$, onde F_i é a

força que atua sobre a partícula i . Mostre que o momentum generalizado $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ reduz ao momentum usual $p = m\dot{q}$ e que as equações

de Lagrange $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$ às equações de Newton

$$m_i \ddot{q}_i = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

5.11 - Um sistema é dito conservativo se o seu lagrangeano não depende do tempo. Deduza, usando as equações de Hamilton, que

$\frac{d}{dt} (H(q(t), p(t))) = 0$, ou seja, H é constante sob as trajetórias do sistema.

5.12 - (i) Seja $u: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ homogênea de grau k , isto é, $u(tx) = t^k u(x)$. Mostre a relação de homogeneidade de Euler $u'(x) \cdot x = ku(x)$.

(ii) Use o fato de que T é quadrática para mostrar que $H = T + U$. Assim, H representa a energia total do sistema.

5.13 - Este exercício mostra que as equações de Hamilton podem ser obtidas a partir do Princípio da Menor Ação (Princípio de Euler-Maupertuis): "Entre todas as trajetórias de energia total dada

$h = \int_0^T H(t, q, p) dt$ o movimento real é aquele que minimiza a ação sobre a trajetória $A(p, q) = \int_0^T p \dot{q} dt$."

(i) Use o Princípio da Menor Ação para mostrar que uma solução do sistema verifica $\dot{q} = \lambda \frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = -\lambda \frac{\partial H}{\partial q}$.

(ii) Se (q, p) não for a solução trivial constante, considere a reparametrização no tempo $p^*(t) = p(\frac{t}{\lambda})$, $q^*(t) = q(\frac{t}{\lambda})$ e mostre que (q^*, p^*) satisfaz as equações de Hamilton.

6. CONCLUSÃO

Vimos que o problema de minimização sem ou com restrições nos conduz às equações (*) $J'(u) = 0$, $J'(u) = \lambda G'(u)$, respectivamente.

No entanto, nas aplicações estas equações (diferenciais, integrais ou íntegro-diferenciais) não são de fácil resolução e muitas vezes fazemos o movimento inverso ao que foi feito neste capítulo: uma das técnicas utilizadas na procura de solução de uma equação do tipo (*) é através do estudo da existência de mínimos de J , sem ou com restrições.

Tal estudo, a chamada teoria dos pontos críticos, não é de modo algum imediato, principalmente quando estamos trabalhando em dimensão infinita. Uma idéia das dificuldades que podem aparecer é dada pelo exercício abaixo.

6.1 - EXERCÍCIO - Seja $E = \ell^2 = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}}; \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2 < +\infty\}$ munido da norma usual. Consideremos $B = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$ e uma sequência crescente de números positivos α_i tais que $\alpha_i \rightarrow 1$ com $\alpha_i < 1$. Definamos $J: E \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma: se $x = (x_i) \in B$, $J(x) = -\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i x_i^2$. Se $x \notin B$, $J(x) = J(\frac{x}{\|x\|}) + \|x\| - 1$. Mostre que J é contínuo, limitado inferiormente e coercivo (isto é, $J(x) \rightarrow +\infty$

se $\|x\| \rightarrow +\infty$). Porém, J não tem mínimo.

É um fato conhecido que se E é um espaço de dimensão finita tal situação não pode ocorrer (ver II.3.1).

Se E é da dimensão infinita podemos ainda assim nos resguardar de desagradáveis surpresas se acrescentarmos a hipótese de J ser convexo. Esta é uma das razões pelas quais os funcionais convexos são importantes.

Outras razões existem. Na realidade, o lugar natural de tratar algumas questões relacionadas com o que vimos ao longo desse capítulo é no contexto da Análise Convexa. Como por exemplo:

- A existência da transformada de Legendre.

A transformada de Fenchel, uma generalização da transformada de Legendre para funcionais convexos, está sempre bem definida e de forma global, não apenas localmente. Por isso a dualização de problemas variacionais ocupa um lugar importante na Análise Convexa.⁽¹⁾

- Permutação de minmax por maxmin

Como dissemos, esta é uma questão que surge em várias situações. Veremos como os resultados obtidos na Análise Convexa nos permitem obter critérios que garantam tal possibilidade.

- Desigualdades variacionais e inclusões

Dois casos que aparecem com frequência nas aplicações não foram abordados até aqui. São eles:

(1) Tem sentido falar na transformada de Fenchel para funcionais não convexos, assim como de dualização de problemas não convexos. Estas noções são de utilidade na resolução de certos problemas aplicados.

(i) minimização com uma ou mais restrições na forma de desigualdades do tipo $G_i(u) \leq 0$, $i=1,2,\dots,n$.

(ii) minimização de funcionais não deriváveis

No caso de funções convexas, podemos estender as equações(*) para (i),(ii), que aparecem então como desigualdades. Elas são ditas desigualdades variacionais.

Para (ii) existe uma outra possibilidade de extensão de $J'(u)=0$ através da noção do subgradiente ∂J de J , generalização do gradiente J' . $\partial J(u)$ é um conjunto e a equação de Euler-Lagrange se escreve então $0 \in \partial J(u)$.

Caro leitor, pretendemos com esses comentários chamar sua atenção para o fato de que a Análise Convexa é um instrumento poderoso na resolução de problemas variacionais. Nós lhe asseguramos que as aplicações da teoria estão longe de se esgotar nos poucos exemplos que apresentamos nesse livro.

Esperamos que isto já seja uma motivação suficiente para que você vire esta página. Senão, podemos lhe dizer ainda que outras surpresas virão.

Se agora você se sente disposto a seguir em frente, boa sorte.

CAPÍTULO 2

ANÁLISE CONVEXA

1. FUNÇÕES CONVEXAS DE UMA VARIÁVEL REAL

Se I é um intervalo de \mathbb{R} , diz-se que $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se $\forall a, b \in I, t \in [0, 1] \quad \varphi(ta + (1-t)b) \leq t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)$, que é a expressão analítica de "o gráfico de φ fica abaixo do segmento que une dois quaisquer de seus pontos".

Outro ponto de vista (que retomaremos mais à frente) é dizer que φ é convexa se o epigráfico de φ é um conjunto convexo. O epigráfico de φ é o conjunto definido por

$$\text{epi } \varphi = \{(x, t) \in I \times \mathbb{R} \mid t \geq \varphi(x)\}$$

Se φ é derivável tem-se uma caracterização de convexidade em termos de φ' : φ é convexa se e só se φ' é crescente.

Os dois resultados a seguir são menos difundidos:

1.1 - PROPOSIÇÃO: Se φ é convexa em $[a, b]$, então φ é contínua em $]a, b[$.

1.2 - PROPOSIÇÃO: Se φ é convexa em $]a, b[$, então φ possui derivadas laterais em todos os pontos de $]a, b[$, com $\varphi'(x-0) \leq \varphi'(x+0) \quad \forall x \in]a, b[$. Vale também $a < x < y < b \Rightarrow \varphi'(x+0) \leq \varphi'(y-0)$. Se $x \in]a, b[$ e $\varphi'(x-0) \leq \alpha \leq \varphi'(x+0)$, então $\varphi(y) \geq \varphi(x) + \alpha(y-x) \quad \forall y \in [a, b]$.

1.3 - RECOMENDAÇÃO: Demonstre os resultados acima (utilize, em cada caso, o argumento geométrico pertinente). Isto é fundamental para tudo que vem a seguir.

EXERCÍCIOS:

1.4 - Mostre que a média aritmética é menor que a média geométrica.

1.5 - Demonstre a desigualdade de Jensen:

Se μ é uma medida positiva, $\mu(\Omega) < \infty$, $f \in L^1(\Omega)$, $f(\Omega) \subset]a, b[$ e φ é convexa em $]a, b[$, então

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} f \, d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} \varphi \circ f \, d\mu.$$

1.6 - Mostre que se φ é convexa e $t \in]0, 1[$, então

$$\varphi(ta + (1-t)b) \geq t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)$$

(sempre que isto faça sentido!).

2. FUNÇÕES CONVEXAS EM ESPAÇOS VETORIAIS

Se E é um EV e $K \subset E$ é convexo, diz-se que $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}$ é CONVEXA se

$$\forall a, b \in K, t \in [0, 1] \quad \varphi(ta + (1-t)b) \leq t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b) \quad (1).$$

Embora a definição acima seja bastante boa, adotaremos a seguinte postura, já mundialmente consagrada: se o domínio de φ não for o espaço inteiro, poremos $\varphi(x) = +\infty$ nos pontos em que φ não está definida. É fácil ver que a nova φ será convexa se e só se a antiga for (as operações envolvendo ∞ são as usuais⁽²⁾).

Indo um pouco mais longe, poderíamos admitir que φ tomasse o valor $-\infty$. Mas isto não nos levaria tão longe assim. De fato, se φ é convexa e $\varphi(x_0) = -\infty$, para cada reta R passando por x_0 o conjunto $A = \{x \in R \mid \varphi(x) \neq \pm \infty\}$ contém no máximo 2 pontos!

Uma função convexa será sempre, pois, definida no espaço inteiro e tomará valores em $] -\infty, \infty]$. (salvo menção contrária). Excluiremos também o caso $\varphi \equiv +\infty$ (3).

(1) ESTRITAMENTE CONVEXA, se valer a desigualdade estrita para $t \in]0, 1[$.

(2) $0 \cdot \infty = 0$

(3) A nomenclatura usual para as funções convexas que não tomam o valor $-\infty$ e não valem identicamente $+\infty$ é FUNÇÃO CONVEXAS PRÓPRIAS.

O DOMÍNIO EFETIVO de uma função $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ é o convexo $D(\varphi) = \{x \in E \mid \varphi(x) < \infty\}$.

Graças à adoção desse sistema, podemos operar com liberdade quase total com funções cujos domínios efetivos são distintos (mas não disjuntos!).

Se K é um convexo de E , a FUNÇÃO INDICATRIZ de K é i_K definida por

$$i_K(x) = \begin{cases} 0, & x \in K \\ +\infty, & x \notin K \end{cases}$$

i_K é convexa e, se $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ é convexa, a função $\varphi + i_K$ funciona exatamente como a restrição de φ a K .

Uma definição alternativa de função convexa é: φ é convexa se "a parte de cima" de seu gráfico for um conjunto convexo. De maneira mais formal, se $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ é uma função, o EPIGRÁFICO de φ é o subconjunto $\text{epi } \varphi$ de $E \times \mathbb{R}$ definido por

$$\text{epi } \varphi = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq t\};$$

e φ é convexa se e só se $\text{epi } \varphi$ é convexo.

No que se refere à continuidade, as funções convexas funcionam como as formas lineares (esta é, aliás, uma das razões da importância da noção de convexidade). Suponhamos que E é um EVT (ou EVN, se o leitor preferir). Os resultados abaixo ilustram essa similitude.

2.1 - LEMA: Seja $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ uma função convexa e seja $u \in E$. Se existe uma vizinhança de u em que φ é majorada por uma constante, então φ é contínua em u .

Demonstração: Podemos supor, sem perda de generalidade, que $u=0$ e $\varphi(0)=0$. Se $a>0$ e V vizinhança de 0 são tais que $\varphi(v)\leq a$ $\forall v \in V$, seja $U=-V \cap V$. U é uma vizinhança simétrica de 0 tal que $\varphi(v)\leq a$ $\forall v \in U$. Como φ é convexa e $\varphi(0)=0$, temos também

$$\varphi(v) \geq -\varphi(-v) \geq -a \quad \forall v \in U.$$

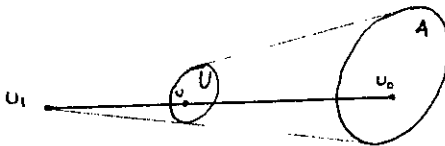
Segue $|\varphi(v)| \leq a$ $\forall v \in U$. Aplicando mais uma vez a convexidade de φ e o fato de que $\varphi(0)=0$, temos $\varphi(\epsilon U) \subset [-\epsilon a, \epsilon a]$ $\forall \epsilon \in [0,1]$, e φ é contínua em 0 . ■

Como no caso das formas lineares, a continuidade em um ponto é suficiente para garantir a continuidade global (a menos de uma pequena diferença):

2.2 - PROPOSIÇÃO: Seja $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ convexa. São equivalentes:

- (i) φ é contínua em um ponto.
- (ii) Existe um aberto não vazio de E sobre o qual φ é majorada por uma constante.
- (iii) φ é contínua no interior de seu domínio efetivo e este é não vazio.

Demonstração: Basta provar que (ii) \Rightarrow (iii). Suponhamos que A é um aberto não vazio de E e que $\varphi(v)\leq a$ $\forall v \in A$. Então $A \subset D(\varphi)$, e $D(\varphi) \neq \emptyset$. Seja u um ponto do interior de $D(\varphi)$ e seja $r>1$ tal que $u_0 + r(u-u_0) = u_1 \in D(\varphi)$ (r existe porque u é pt. interior de $D(\varphi)$).



Seja $U = u_1 + \frac{r-1}{r}(A-u_1)$. U é um aberto que contém

$u = u_1 + \frac{r-1}{r}(u_0 - u_1)$. Por 2.1, basta mostrar que φ é majorada por uma constante sobre U . Ora, se $v \in U$, podemos escrever

$v = u_1 + \frac{r-1}{r}(v_0 - u_1)$ para algum $v_0 \in A$.

Segue $\varphi(v) = \varphi(u_1 + \frac{r-1}{r}(v_0 - u_1)) = \varphi(\frac{1}{r} u_1 + (1 - \frac{1}{r})v_0) \leq$

$$\leq \frac{1}{r} \varphi(u_1) + (1 - \frac{1}{r})\varphi(v_0) \leq \frac{1}{r} \varphi(u_1) + (1 - \frac{1}{r})a. \blacksquare$$

Uma função convexa contínua em um EVN não precisa ser lipschitziana. Mas localmente esta propriedade se mantém.

2.3 - PROPOSIÇÃO: Se E é um EVN e $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ é convexa, são equivalentes:

- (i) φ é contínua no interior de $D(\varphi)$
- (ii) φ é localmente lipschitziana no interior de $D(\varphi)$.

Demonstração: Basta mostrar (i) \Rightarrow (ii). Seja u no interior de $D(\varphi)$ e seja $r_1 > 0$ tal que $\varphi(v) \leq M < \infty \forall v \in \bar{B}_{r_1}(u)$. Seja $m > -\infty$ tal que $\varphi(v) \geq m \forall v \in B_{r_1}(u)$. Seja $r_2 \in]0, r_1[$. Afirmamos que $|\varphi(v_1) - \varphi(v_2)| \leq \frac{M-m}{r_1-r_2} |v_1 - v_2| \forall v_1, v_2 \in B_{r_2}(u)$.

De fato, se $v_1, v_2 \in B_{r_2}(u)$, com $\varphi(v_1) \geq \varphi(v_2)$, $v_1 \neq v_2$, seja $w = v_2 + t(v_1 - v_2)$, com $t > 1$ e tal que $|w - u| = r_1$. Temos $r_1 = |w - u| = |v_2 - u + t(v_1 - v_2)| \leq r_2 + t|v_1 - v_2|$, o que dá $t \geq \frac{r_1 - r_2}{|v_1 - v_2|}$.

Segue (ver 1.6).

$$\varphi(w) = \varphi(tv_1 + (1-t)v_2) \geq t\varphi(v_1) + (1-t)\varphi(v_2), \text{ donde}$$

$$M - m \geq \varphi(w) - \varphi(v_2) \geq t(\varphi(v_1) - \varphi(v_2)) \geq \frac{r_1 - r_2}{|v_1 - v_2|} (\varphi(v_1) - \varphi(v_2)),$$

$$\text{e } \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = |\varphi(v_1) - \varphi(v_2)| \leq \frac{M - m}{r_1 - r_2} |v_1 - v_2|, \text{ como queríamos } \blacksquare$$

Naturalmente vale também:

2.4 - PROPOSIÇÃO: Se $\dim E < \infty$ e $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ é convexa, então φ é contínua no interior de $D(\varphi)$.

Demonstração: Sejam v_0, \dots, v_n $n+1$ pontos em $D(\varphi)$ tais que $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, onde $K = \text{conv}(v_0, \dots, v_n)$. Temos então $\varphi(v) \leq \max_{i=0, \dots, n} \varphi(v_i)$

$\forall v \in K$. ■

EXERCÍCIOS:

2.5 - Se $\varphi_1, \varphi_2: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ são convexas, $D(\varphi_1) \cap D(\varphi_2) \neq \emptyset$ e $\lambda > 0$, então $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$ é convexa.

2.6 - Se $T: E \rightarrow F$ é linear e $\varphi: F \rightarrow]-\infty, \infty]$ é convexa, então $\varphi \circ T: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ é convexa.

2.7 - Se $\varphi_1: E \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, \infty]$ são convexas, φ_2 crescente, então $\varphi_2 \circ \varphi_1$ é convexa.

2.8 - Seja E um EVN e seja $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ G-derivável. Mostre que φ é convexa se e só se φ' é monótona ($A: D \subset E \rightarrow E^*$ é dita MONÓTONA se $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in D$).

2.9 - Se $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de funções convexas definidas em E , então a ENVOLTÓRIA SUPERIOR de $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, dada por $\varphi(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x)$, é convexa (eventualmente $\varphi = \infty$).

3 - MINIMIZAÇÃO E SEMICONTINUIDADE INFERIOR

O resultado mais útil relativo à existência de pontos de mínimo globais, em dimensão finita, é o seguinte:

3.1 - PROPOSIÇÃO: Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e coerciva, isto é,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

então f possui um ponto de mínimo global. ■

O argumento essencial na demonstração de 3.1 é a compacidade das bolas fechadas de \mathbb{R}^n , o que impede sua generalização imediata para espaços de dimensão infinita (para um contra-exemplo, ver I.6.1).

A alternativa, nesse caso, é passar pela convergência fraca, lembrando que as bolas fechadas de um espaço reflexivo são fracamente compactas. Temos, então:

3.2. PROPOSIÇÃO: Se E é um espaço reflexivo e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ é fracamente contínua e coerciva, então f possui um ponto de mínimo global.

Demonstração: Como f é coerciva, existe $R > 0$ tal que $|x| > R \Rightarrow f(x) > f(0)$. Sendo $\bar{B}_R(0)$ fracamente compacta e f fracamente contínua, f possui ponto de mínimo x_0 sobre $\bar{B}_R(0)$. Como $f(x_0) \leq f(0)$, x_0 é pt. de mínimo global. ■

3.3 - OBSERVAÇÕES:

- (i) A demonstração não muda se autorizamos f a tomar o valor $+\infty$.
- (ii) Para os menos familiarizados com a noção de topologia fraca, uma demonstração alternativa usando seqüências: seja $m = \inf f(E) = \inf(\bar{B}_R(0))$ ($m = -\infty$, eventualmente); seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f(x_n) \rightarrow m$ e $|x_n| \leq R \forall n \in \mathbb{N}$; tome uma subsequência convergindo fracamente para $x_0 \in \bar{B}_R(0)$; segue $f(x_0) = m$.

O grande defeito de 3.2 é o seguinte:

3.4 - EXERCÍCIO: Seja E um espaço normado de dimensão infinita

e seja $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ fracamente contínua e coerciva. Mostre que f não existe. (Sugestão: use A.5.4).

O ponto crucial na demonstração de 3.2 parece ser o fato de que se C é compacto e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f tem ponto de mínimo. Mas na realidade a continuidade de f não é essencial. Para isolar o conceito de SEMICONTINUIDADE INFERIOR, daremos duas demonstrações, destacando em cada caso o ponto importante do argumento.

3.5 - TEOREMA: Se C é um compacto e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então existe $x_0 \in C$ tal que $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in C$.

Demonstrações:

(i) Seja $m = \inf f(C)$. Seja (x_n) uma sequência em C tal que $\lim f(x_n) = m$. (x_n) tem uma subsequência convergente (que também será notada (x_n)) para $x_0 \in C$. Temos então $f(x_0) \leq \lim f(x_n) = m$. Como $m = \inf f(C)$, segue $f(x_0) = m$.

Portanto, não é necessário que f seja contínua. Basta que $x_n \rightarrow x$ e $f(x_n) \rightarrow m$ ($= -\infty$, eventualmente) $\Rightarrow f(x) \leq m$, ou, equivalentemente,

$$f(\lim x_n) \leq \lim f(x_n) \quad \forall (x_n) \text{ convergente em } C.$$

(ii) Seja $m = \inf f(C)$ e suponhamos que $f(x) \neq m \quad \forall x \in C$. Então

$$C = \bigcup_{a > m} f^{-1}([a, \infty[).$$

Como $f^{-1}([a, \infty[)$ é aberto para todo a , existem a_1, \dots, a_n tais que $C = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}([a_i, \infty[)$, com $m < a_1 < \dots < a_n$. Mas então

$$\inf f(C) \geq a_1 > m.$$

O argumento essencial aqui não é a continuidade de f (que daria $f^{-1}(]a, b[)$ aberto $\forall a, b$), mas o fato de que

$$f^{-1}(]a, \infty[) \text{ é aberto } \forall a \in \mathbb{R},$$

ou, equivalentemente,

$$f^{-1}(]a, \infty]) \text{ é aberto } \forall a \in \mathbb{R} \quad \blacksquare.$$

3.6. DEFINIÇÃO: Sejam X um espaço topológico e $f: X \rightarrow]-\infty, \infty]$ uma função. Dizemos que f é semicontínua inferiormente (sci) se

$$f^{-1}(]a, \infty]) \text{ é aberto } \forall a \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que f é sequencialmente semicontínua inferiormente se

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x) \leq \underline{\lim} f(x_n).$$

3.7 - EXERCÍCIO: Mostre que se f é semicontínua inferiormente então f é sequencialmente semicontínua inferiormente. Se souber bastante Topologia Geral, mostre que a recíproca não vale. Mostre que se f é contínua então f é sci.

3.8 - TEOREMA: Se C é compacto e $f: C \rightarrow]-\infty, \infty]$ é semicontínua inferiormente, então existe $x_0 \in C$ tal que $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in C$.

Demonstração: Veja 3.5(ii). Observe que basta supor f sequencialmente sci. Neste caso a demonstração se faz como em 3.5 (i) \blacksquare

3.9 - COROLÁRIO: Se E é um espaço reflexivo e $f: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ é coerciva e fracamente sci, então f possui um ponto de mínimo global.

Felizmente, 3.4 não se generaliza para funções sci. Vamos mostrar que, para funções convexas, semicontinuidade inferior em norma e semicontinuidade inferior fraca são equivalentes.

Antes, porém, vejamos uma caracterização elegante de semicontinuidade inferior.

3.10 - PROPOSIÇÃO: $f: X \rightarrow]-\infty, \infty]$ é semicontínua inferiormente se e só se $\text{epi } f$ é fechado em $X \times \mathbb{R}$;

Demonstração: Suponhamos que $\text{epi } f$ é fechado e seja $a \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que $f^{-1}(]a, \infty])$ é aberto.

Ora, se $y \in f^{-1}(]a, \infty])$ temos $f(y) > a$, o que equivale a $(y, a) \notin \text{epi } f$. Como $\text{epi } f$ é fechado, existem V vizinhança de y e $\varepsilon > 0$ tais que

$$(V \times]a - \varepsilon, a + \varepsilon]) \cap \text{epi } f = \emptyset.$$

Segue $f(z) > a \quad \forall z \in V$, donde $V \subset f^{-1}(]a, \infty])$.

Reciprocamente, se f é sci e $(y, a) \notin \text{epi } f$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $f(y) > a + \varepsilon$. Temos então que

$$f^{-1}(]a + \varepsilon, \infty]) \times]-\infty, a + \varepsilon[$$

é uma vizinhança de (y, a) que não intercepta $\text{epi } f$ ■

3.11 - PROPOSIÇÃO: Sejam E um EVN e $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ convexa.

Então φ é sci na norma de E se e só se φ é fracamente sci.

Demonstração: Temos que $\text{epi } \varphi$ é um subconjunto convexo de $E \times \mathbb{R}$. Dizer que φ é sci na norma de E equivale a dizer que $\text{epi } \varphi$ é fechado em $E \times \mathbb{R}$, onde $E \times \mathbb{R}$ é visto como EVN com alguma das normas usuais. Por outro lado, dizer que φ é fracamente sci equivale a dizer que $\text{epi } \varphi$ é fechado em $E \times \mathbb{R}$ com a topologia produto da topologia fraca de E pela de \mathbb{R} . Mas esta última é a topologia fraca de $E \times \mathbb{R}$ (pois $(E \times \mathbb{R})^* = E^* \times \mathbb{R}$). Como conjuntos convexos

são fechados em norma se e só se são fracamente fechados (ver 3.6.1), a Proposição está demonstrada. ■

3.12 - EXERCÍCIO: Dê uma demonstração de 3.11 usando seqüências (isto é, mostre que se φ é sci na norma de E e $x_n \rightarrow x$, então $\varphi(x) \leq \lim \varphi(x_n)$).

3.13 - ESCÓLIO: Em virtude de 3.11, a receita para obter funções convexas fracamente sci é simples:

(i) Considera-se uma função $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}$ convexa e contínua na norma de E ($K \subseteq E$ convexo).

(ii) Verifica-se se, dada uma seqüência qualquer (x_n) em K ,
 $x_n \rightarrow x \notin K \Rightarrow \varphi(x_n) \rightarrow \infty$

(iii) Redefine-se $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in K \\ \infty, & x \notin K \end{cases}$$

Note-se que (ii) equivale a verificar se o gráfico de φ é fechado (o que vale sempre que K for fechado).

3.11 nos permite, para funções convexas definidas em um EVN, falar em semicontinuidade inferior "tout court", sem especificar se estamos considerando a convergência em norma ou a convergência fraca.

Em termos de aplicações, a generalização de 3.1 será então a seguinte:

3.14 - TEOREMA: Se E um espaço reflexivo e $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ é convexa, coerciva e sci, então φ possui um ponto de mínimo global. Se φ é estritamente convexa, então este ponto é único.

Demonstração: Não há mais nada a demonstrar, a não ser a última afirmativa, que é um exercício fácil. ■

Como no caso das formas lineares, a semicontinuidade inferior é suficiente para que uma função convexa seja contínua no interior de seu domínio efetivo (mas é preciso acrescentar uma hipótese):

3.15 - PROPOSIÇÃO: Se E é um espaço de Banach e $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ é convexa sci, então φ é contínua no interior de $D(\varphi)$.

Demonstração: Seja u um ponto do interior de $D(\varphi)$. Sem perda de generalidade, podemos supor $u = 0$. Por 2.1, se φ é majorada por uma constante numa vizinhança de 0, então φ é contínua em 0. Seja $a > \varphi(0)$ e seja

$$A = \{v \in E \text{ tq } \varphi(v) \leq a\}.$$

Como φ é sci, A é fechado em E . Vamos mostrar que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. Ora, se $x \in E$, temos que a restrição de φ à reta $R = \{tx, t \in \mathbb{R}\}$ é contínua em 0 (0 está no interior do domínio de $\varphi|_R$; aplique 1.1). Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varphi\left(\frac{1}{n}x\right) \in A.$$

Mas isso mostra que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nA$. Como E é um espaço de Baire e cada nA é fechado, devemos ter $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ ■

Uma outra propriedade importante das funções convexas sci é consequência imediata dos teoremas de separação de conjuntos convexos:

3.16. PROPOSIÇÃO: Se $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ é convexa sci, então φ é minorada por uma transformação afim.

Demonstração: Seja $u \in E$ tal que $\varphi(u) < \infty$ e seja $a < \varphi(u)$. Então $(u, a) \notin \text{epi } \varphi$. Como $\text{epi } \varphi$ é convexo e fechado, podemos (A.4.13) encontrar $L: \text{Ex} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linear e contínua tal que

$$L(u, a) < \alpha, \quad L(v, t) \geq \alpha \quad \forall (v, t) \in \text{epi } \varphi,$$

onde α é um número real. L pode ser posta na forma

$$L(v, t) = \ell(v) + \lambda t,$$

onde $\ell \in E^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais ainda, como

$$L(u, \varphi(u)) > \alpha > L(u, a),$$

temos

$$\lambda \varphi(u) > \lambda a,$$

o que nos dá $\lambda > 0$.

Podemos agora mostrar que $\varphi > T$, onde T é a transformação afim cujo gráfico é $L^{-1}(\alpha)$. De fato, seja $T: E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T(v) = \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \ell(v).$$

Temos então, como

$$\alpha < L(v, \varphi(v)) = \ell(v) + \lambda \varphi(v) \quad \forall v \in D(\varphi),$$

$$\varphi(v) > \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \ell(v) = T(v) \quad \forall v \in E \quad \blacksquare$$

Apresentamos algumas aplicações do teorema 3.14. No que segue, Ω é um aberto limitado de \mathbb{R}^n , de fronteira Γ regular.

3.17 - PROBLEMA DE DIRICHLET - Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

com $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Então, existe $u_0 \in H^1(\Omega)$ com $\gamma_0(u_0) = g$ (ver 0.4.9). Seja $\ell(v) = \langle f, v \rangle - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v$ uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$ e $J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \ell(v)$.

De acordo com 0.4.6, 0.4.7, J é coercivo sobre $H_0^1(\Omega)$. Como é fácil observar que J é estritamente convexo, s.c.i., segue que J possui um único mínimo $w \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo $\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v = \langle f, v \rangle - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Assim (ver 0.5.1), tomando $u = w + u_0$, temos que u é a (única) solução procurada.

3.18 - PROBLEMA DE NEUMANN - Dados $a > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, o problema de Neumann se escreve

$$\begin{cases} au - \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

Consideremos $E = H^1(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left(a \int_{\Omega} |u|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}, \text{ equivalente à usual. Então,}$$

$$J(v) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} fv - \langle g, v \rangle_{\Gamma} \text{ é um funcional estritamente con-}$$

vexo, s.c.i. e coercivo, definido em E , espaço reflexivo. Logo, o mínimo u de J em E satisfaz o problema de Neumann no sentido das distribuições (ver 0.5.2).

3.19 - OBSERVAÇÃO - Se $a=0$, o argumento acima não é válido pois $\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$ não é uma norma em $H^1(\Omega)$. Para tratarmos desse caso, precisamos considerar o espaço quociente $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$.

3.20 - LEMA - Seja $\|v\|$ a norma usual em $H^1(\Omega)$, $|v|_1 = \|\nabla v\|_{L^2}$ e $\|v\|_2 = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|v+c\|$ a norma usual em $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$. Então $|\cdot|_1$ é uma norma em $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Demonstração - É imediato verificar que $|\cdot|_1$ é uma norma em $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que $|v|_1 \leq \|v\|_2$. Escolhemos em $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ o elemento v de média nula, $\int_{\Omega} v = 0$. Basta mostrar que $|v|_1 \geq C \|v\|$. Suponhamos por absurdo que existe $(v_n) \subset H^1(\Omega)$, $\int_{\Omega} v_n = 0$ tal que

$|v_n|_1 = 1$ e $\|v_n\| \rightarrow \infty$. Seja $u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$. Então $\int_{\Omega} u_n = 0$ em $L^2(\Omega)$, $u_n \rightharpoonup C$ fraco em $H^1(\Omega)$. Portanto $u_n \rightarrow C$ forte em $L^2(\Omega)$ e $u_n \rightarrow C$ forte em $H^1(\Omega)$. Como $\int_{\Omega} u_n = 0$, $C = 0$. Mas isto contradiz $\|u_n\| = 1$.

3.21 - PROPOSIÇÃO - Seja $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Uma condição necessária e suficiente para que o problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

tenha uma solução $u \in H^1(\Omega)$ é que $\int_{\Omega} f + \langle g, 1 \rangle_{\Gamma} = 0$. A solução, se existir, é única a menos de uma constante aditiva.

Demonstração - Se u é solução do problema, da identidade de Green resulta $\int_{\Omega} f = \langle -\Delta u, 1 \rangle = - \langle \frac{\partial u}{\partial n}, 1 \rangle_{\Gamma} = - \langle g, 1 \rangle_{\Gamma}$.

Reciprocamente, se $\int_{\Omega} f + \langle g, 1 \rangle_{\Gamma} = 0$, seja

$J(v) = \frac{1}{2} \|v\|_1^2 - \int_{\Omega} f v - \langle g, v \rangle$, $v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$. J está bem definido e é estritamente convexo, sci e coercivo com $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ espaço de Hilbert. Logo existe u solução única em $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$.

3.22 - PROBLEMA BIHARMÔNICO - De acordo com 0.4.7, $|u|_2 = \|\Delta u\|_{L^2}$ é uma norma equivalente à norma usual de $H_0^2(\Omega)$. Se $g_1, g_2 \in H^{1/2}(\Gamma)$ são tais que existe $u_0 \in H_0^2(\Omega)$ com $u_0 = g_1$ em Γ , $\frac{\partial u_0}{\partial \eta} = g_2$ em Γ e $f \in H^{-2}(\Omega)$ então existe uma única solução $u_1 \in H_0^2(\Omega)$ de

$$\int_{\Omega} \Delta u_1 \Delta v = \langle f, v \rangle - \int_{\Omega} \Delta u_0 \Delta v \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

De fato, basta considerar $J(v) = \frac{1}{2} \|\Delta v\|_{L^2}^2 - \langle f, v \rangle - \int_{\Omega} \Delta u_0 \Delta v$ e proceder como nos exemplos anteriores. Se u_1 é mínimo de J em $H^2(\Omega)$, fazendo $u = u_1 + u_0$, vemos que u verifica.

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{em } \Omega \\ u = g_1 & \text{em } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_2 & \text{em } \Gamma \end{cases} \quad \blacksquare$$

Para os resultados de regularidade dos problemas de Dirichlet, Neumann e biharmônico, veja [35].

3.23 - EQUAÇÃO DE STOKES - A equação de Stokes é um modelo linearizado do equilíbrio em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N=2$ ou 3) de um tipo de fluido (dito newtoniano) incompressível e de densidade uniforme. Ela se escreve, em unidades apropriadas,

$$(S) \begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{em } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ representa a velocidade em cada ponto, p a pressão e f uma densidade de forças. A condição $\nabla \cdot u = 0$ traduz a incompressibilidade do fluido. Para maiores detalhes, ver [44].

Seja $L^2_0(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q = 0\}$ e $B: (H^1_0(\Omega))^N \rightarrow L^2_0(\Omega)$,

$Bu = \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$. B é um operador contínuo e portanto

$N(B) = \{u \in (H^1_0(\Omega))^N, Bu = 0\}$ é um espaço de Banach.

Vamos considerar $f \in (H^{-1}(\Omega))^N$ e $J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \langle f, v \rangle$.

Da mesma forma que nos exemplos anteriores, o problema

$$\min_{v \in N(B)} J(v)$$

tem solução única u que satisfaz $\langle -\Delta u - f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in N(B)$.

Podemos mostrar que B tem imagem fechada (na realidade $\text{Im } B = L^2_0(\Omega)$, ver [44]). Admitindo-se tal fato, o teorema I.4.6

se aplica e existe um único $p \in (L^2_0(\Omega))^*$ tal que

$$J'(u) = -\Delta u - f = B^* p.$$

A existência de uma solução de (S) está garantida se utilizarmos o

3.24 - EXERCÍCIO - (i) Mostre que $(L^2_0(\Omega))^*$ pode ser identificado a $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

(ii) Mostre que $B^*: L^2(\Omega)/\mathbb{R} \rightarrow (H^{-1}(\Omega))^N$, $B^* p = -\nabla p$.

EXERCÍCIOS:

3.25 - Sejam $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ e $m \in \mathbb{R}$. Seja $A_m = \{x \in E, \varphi(x) \leq m\}$.

Mostre que se φ é convexa, então A_m é convexo. Mostre que se φ é sci, então A_m é fechado.

3.26 - Mostre que se $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa sci, então φ é contínua.

3.27 - Seja $K = \{0, 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$. Seja $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{y}, \text{ se } y > 0, \quad \varphi(0, 0) = 0.$$

Mostre que φ é convexa sci, mas não é contínua em $(0,0)$.

3.28 - Se $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de funções sci definidas em um espaço X , a envoltória superior de (f_λ) , definida por $f(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$ é sci.

3.29 - A semicontinuidade inferior aparece no Cálculo das Variações com os trabalhos de Tonelli, Goursat, Lebesgue, entre outros (Fréchet atribui a Baire a paternidade do conceito). Historicamente, o exemplo abaixo pode ser considerado o primeiro a interessar os matemáticos.

Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ e sejam a, b dois pontos de V . Procura-se uma curva em V , de extremidades a e b , cujo comprimento seja mínimo. Mais formalmente, seja

$$X = \{c: [0,1] \rightarrow V, \text{ } c \text{ biunívoca e contínua, } c(0)=a, c(1)=b\}$$

Seja $L: X \rightarrow [0, \infty]$ dada da seguinte forma:

para cada partição P de $[0,1]$, $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ e cada $c \in X$, define-se

$$L(P, c) = \sum_{i=1}^n |c(t_i) - c(t_{i-1})| ;$$

$L(c)$ é definida por

$$L(c) = \sup_{c \in P} L(P, c) ,$$

onde P é o conjunto de todas as partições de $[0,1]$.

(i) Mostre que L pode assumir o valor $+\infty$.

(ii) Mostre que se $c_1, c_2 \in X$, $c_1([0,1]) = c_2([0,1])$, então

$$L(c_1) = L(c_2) .$$

(iii) Mostre que se $c \in X$ é c é de classe C^1 , então

$$L(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt$$

(iv) Defina em X a métrica

$$d(c_1, c_2) = \max_{t \in [0, 1]} |c_1(t) - c_2(t)|$$

Mostre que L não é contínua.

(v) Mostre que L é semicontínua inferiormente.

3.30 - Seja E um EVN e seja $K \subseteq E$ um conjunto fechado. Mostre que $i_K: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ é sci na norma de E . Observe que se K é convexo então i_K é convexa sci.

4. SUBDIFERENCIABILIDADE

Começemos com uma propriedade bastante conhecida da derivada de Gâteaux de uma função convexa:

4.1 - PROPOSIÇÃO: Se E é um EVN e $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ é convexa e G-derivável em u , então

$$\varphi(v) \geq \varphi(u) + \langle \varphi'(u), v-u \rangle \quad \forall v \in E$$

Demonstração: Evidentemente, para falar em $\varphi'(u)$, estamos supondo $\varphi(u) < \infty$ (na realidade é preciso que u seja um ponto interno de $D(\varphi)$). Seja então $v \in E$. Se $\varphi(v) = \infty$, não há nada a provar. Suponhamos pois $\varphi(v) < \infty$. Temos então

$$\langle \varphi'(u), v-u \rangle = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u+t(v-u)) - \varphi(u)}{t}$$

Mas se $0 < t < 1$, vale

$$t(\varphi(v) - \varphi(u)) \geq \varphi(u+t(v-u)) - \varphi(u)$$

e o resultado segue imediatamente. ■

4.2 - DEFINIÇÃO: Se E é um EVN, diz-se que uma função

$f: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ é subdiferenciável em u se $f(u) < \infty$ e existe $u^* \in E^*$ tal que

$$f(v) \geq f(u) + \langle u^*, v-u \rangle \quad \forall v \in E.$$

u^* é dito um subgradiente de f em u e o conjunto dos subgradientes de f em u é chamado subdiferencial de f em u , sendo notado por $\partial f(u)$.

É claro que as funções convexas são o nosso interesse central, em termos de subdiferenciabilidade. Mas a definição geral não custa mais caro e vai ser útil em alguns (poucos) casos. Na realidade, estamos preparando o caminho para a definição da TRANSFORMADA DE FENCHEL de uma função (II.7), que é uma generalização da transformada de Legendre (I.5), e para uma formulação mais geral do princípio variacional enunciado no cap. I (I.3.2).

4.3 - EXEMPLO: Se $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa, temos para cada a em \mathbb{R} , $\partial\varphi(a) = [\varphi'(a-0), \varphi'(a+0)]$.

O DOMÍNIO EFETIVO de ∂f é definido por

$$D(\partial f) = \{u \mid \partial f(u) \neq \emptyset\}$$

Lembramos que o domínio efetivo de f é dado por $D(f) = \{u \mid f(u) < \infty\}$. É claro que sempre se tem $D(\partial f) \subset D(f)$, mas a igualdade não vale em geral, mesmo para funções convexas (dê um exemplo em \mathbb{R}).

4.4 - EXEMPLO: Seja H um espaço de Hilbert e $K \subset H$ um convexo fechado. Seja $i_K: H \rightarrow]-\infty, \infty]$ dada por

$$i_K(x) = \begin{cases} 0, & x \in K \\ \infty, & x \notin K \end{cases}.$$

Neste caso temos, para $u \in K$,

$$\partial i_K(u) = \{u^* \in E \mid \text{tq } P_K(u+u^*) = u\} \quad (\text{ver A.2.4}).$$

Temos então $D(\partial i_K) = K = D(i_K)$.

Em termos de caracterização de pontos de mínimo absoluto a subdiferenciabilidade é até melhor que a diferenciabilidade:

4.4 - PROPOSIÇÃO: u é ponto de mínimo (absoluto) de $f: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ se e só se $0 \in \partial f(u)$.

Demonstração: Óbvio (estamos excluindo $f \equiv \infty$) ■

A relação entre subdiferenciabilidade e G-diferenciabilidade, para funções convexas, é dada pela Proposição 4.5. Embora a derivada de Gâteaux possa também ser definida para pontos que não são interiores a $D(\varphi)$, não consideraremos esse caso.

4.5 - PROPOSIÇÃO: Sejam E um EVN, $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ convexa, u no interior de $D(\varphi)$ e $u^* \in E^*$. São equivalentes:

(i) $\varphi'(u) = u^*$ (φ' = G-derivada)

(ii) $\partial \varphi(u) = \{u^*\}$.

Demonstração:

(i) \Rightarrow (ii): De 4.1 segue $u^* \in \partial \varphi(u)$. Por outro lado, se $u_1^* \in \partial \varphi(u)$, temos

$$\varphi(u+tv) - \varphi(u) \geq t \langle u_1^*, v \rangle \quad \forall v \in E, t > 0.$$

Dividindo por t e passando ao limite, vem

$$\langle u^*, v \rangle \geq \langle u_1^*, v \rangle \quad \forall v \in E,$$

o que mostra que $u_1^* = u^*$.

(ii) \Rightarrow (i): Da definição de $\partial \varphi(u)$ tiramos, para $t \geq 0$ e $v \in E$,

$$\frac{\varphi(u-tv) - \varphi(u)}{-t} \leq \langle u^*, v \rangle \leq \frac{\varphi(u+tv) - \varphi(u)}{t}$$

Portanto, se para cada $v \in E$ existir

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u+tv) - \varphi(u)}{t},$$

este será $\langle u^*, v \rangle$ e teremos $\varphi'(u) = u^*$.

Suponhamos então que o limite acima não exista para um certo v . Como os limites laterais existem sempre (ver 1.2), podemos encontrar $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq \langle u^*, v \rangle$ e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(u+tv) - \varphi(u)}{t} \geq a \geq \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(u+tv) - \varphi(u)}{t}$$

Temos então, da convexidade de φ ,

$$\varphi(u+tv) \geq \varphi(u) + ta \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Trata-se agora de mostrar que existe $u_1^* \in E^*$ tal que $\langle u_1^*, v \rangle = a$ e $\varphi(w) \geq \varphi(u) + \langle u_1^*, w-u \rangle \quad \forall w \in E$.

Ora, a reta $\{(u, \varphi(u)) + t(v, a), t \in \mathbb{R}\}$ não corta o interior de $\text{epi } \varphi$ (que é não vazio, pois u é interior a $D(\varphi)$). Podemos então incluí-la em um hiperplano fechado de $E \times \mathbb{R}$ que também não corta $\widehat{\text{epi}} \varphi$ (ver A.4.10). É fácil mostrar (ver a demonstração de 3.18) que este hiperplano é gráfico de uma transformação

$$w \mapsto \varphi(u) + \langle u_1^*, w-u \rangle, \quad w \in E,$$

que minorava φ . Temos então $v_1^* \in \partial \varphi(u)$. Mas $\langle u_1^*, v \rangle = a \neq \langle u^*, v \rangle$, o que dá $u_1^* \neq u^*$, contra a hipótese. ■

As regras de subdiferenciação são as seguintes:

4.6 - PROPOSIÇÃO: Seja E um EVN e sejam $\varphi_1, \varphi_2, \varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ convexas, $u \in E$. Então:

(i) $\partial \varphi(u)$ é convexo e fechado em E^* .

- (ii) $\delta(\lambda\varphi)(u) = \lambda\delta\varphi(u) \quad \forall \lambda \geq 0$
- (iii) $\delta(\varphi_1 + \varphi_2)(u) \supset \delta\varphi_1(u) + \delta\varphi_2(u)$
- (iv) Se F é um EVN e $T:F \rightarrow E$ é linear contínua, então $\delta(\varphi \circ T)(v) \supset T^* \delta\varphi(Tv) \quad \forall v \in F$.
- (v) Se existe $v \in D(\varphi_1) \cap D(\varphi_2)$ tal que φ_1 ou φ_2 é contínua em v , então vale a igualdade em (iii). Se existe $w \in E$ tal que φ é contínua em w , então vale a igualdade em (iv).

Demonstração: (i), (ii), (iii) e (iv) não apresentam problema.

(v) Para demonstrar a primeira assertiva, observemos que o que se quer é, dado $u^* \in \delta(\varphi_1 + \varphi_2)(u)$, encontrar u_1^* tal que

$$\varphi_1(v) - \varphi_1(u) \geq \langle u_1^*, v-u \rangle \quad \forall v \in E$$

$$\varphi_2(v) - \varphi_2(u) \geq \langle u^* - u_1^*, v-u \rangle \quad \forall v \in E$$

Isto equivale a

$$\varphi_1(v) - \varphi_1(u) \geq \langle u_1^*, v-u \rangle \geq \varphi_2(u) - \varphi_2(v) + \langle u^*, v-u \rangle \quad \forall v \in E$$

Sejam então

$$K_1 = \{(v, t) \in E \times \mathbb{R} \text{ tq } t \geq \varphi_1(v) - \varphi_1(u)\}$$

$$K_2 = \{(v, t) \in E \times \mathbb{R} \text{ tq } -t \geq \varphi_2(v) - \varphi_2(u) - \langle u^*, v-u \rangle\}$$

K_1 e K_2 são convexos ($K_1 = \text{epi } \psi_1$, $\psi_1(v) = \varphi_1(v) - \varphi_1(u)$, $K_2 = T \text{epi } \psi_2$,

$\psi_2(v) = \varphi_2(v) - \varphi_2(u) + \langle u^*, v-u \rangle$, $T(v, t) = (v, -t)$. Além disso, pode-

mos supor que φ_1 é contínua em algum ponto, o que nos dá

$\overset{\circ}{K}_1 \neq \emptyset$. Temos também

$$(v, t) \in \overset{\circ}{K}_1 \Rightarrow t > \varphi_1(v) - \varphi_1(u) \geq -\varphi_2(v) + \varphi_2(u) + \langle u^*, v-u \rangle,$$

o que mostra que $\overset{\circ}{K}_1 \cap K_2 = \emptyset$. Segue (ver A.4.12) que existem

$(\bar{u}_1^*, \alpha) \in E^* \times \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\langle \bar{u}_1^*, v \rangle + \alpha t \geq \alpha \geq \langle \bar{u}_1^*, w \rangle + \alpha s \quad \forall (v, t) \in K_1, (w, s) \in K_2$$

Observemos que, fixado $v \in D(\varphi_1) \cap D(\varphi_2)$, podemos, tomando $t > 0$ suficientemente grande, afirmar que $(v, t) \in K_1$ e $(v, -t) \in K_2$.

Conclui-se daí que $a \geq 0$. Na realidade, como o hiperplano

$\langle \bar{u}_1^*, v \rangle + at = \alpha$ separa K_1 e K_2 , temos $a \neq 0$. Fazendo então

$$u_1^* = \frac{1}{a} \bar{u}_1^*, \text{ vem}$$

$$\langle u_1^*, v \rangle + t \geq \frac{\alpha}{a} \geq \langle u_1^*, w \rangle + s \quad \forall (v, t) \in K_1, (w, s) \in K_2.$$

$$\text{Fazem } t = \varphi_1(v) - \varphi_1(u), w = v, s = \varphi_2(u) - \varphi_2(v) + \langle u^*, v - u \rangle,$$

temos, $\forall v \in E$

$$\langle u_1^*, v \rangle + \varphi_1(v) - \varphi_1(u) \geq \frac{\alpha}{a} \geq \langle u_1^*, v \rangle + \varphi_2(u) - \varphi_2(v) + \langle u^*, v - u \rangle.$$

$v = u$ nos dá $\frac{\alpha}{a} = \langle u^*, u \rangle$, e o resultado segue.

Vejamos agora a segunda assertiva de (v). Queremos, dados $v \in F$ e $v^* \in \delta(\varphi \circ T)(v)$, encontrar $u^* \in \delta\varphi(Tv)$ tal que

$$\langle u^*, Tw \rangle = \langle v^*, w \rangle, \quad \forall w \in F.$$

Ora, seja $\bar{u}^* \in (TF)^*$ dado por

$$\langle \bar{u}^*, Tw \rangle = \langle v^*, w \rangle, \quad w \in F.$$

Já temos

$$\varphi(Tw) - \varphi(Tv) \geq \langle \bar{u}^*, Tw - Tv \rangle \quad \forall w \in F.$$

Resta estender \bar{u}^* a $u^* \in E^*$, de modo que u^* pertença a $\delta\varphi(Tv)$. Mais uma vez, há que aplicar um teorema de separação.

Sejam

$$M = \{(x, \bar{u}^* x + \varphi(Tv) - Tv), x \in TF\},$$

$$K = \text{epi } \varphi.$$

M é um subespaço afim de E , K é um convexo com $K \cap \emptyset$ e

$M \cap \hat{K} = \emptyset$. Existe então um hiperplano M_1 que contém M e tal que $M_1 \cap \hat{K} = \emptyset$. Mostra-se como de costume, que M_1 é o gráfico do u^* que procuramos. ■

Em alguns casos, é conveniente trabalhar com subderivadas parciais.

4.7 - DEFINIÇÃO: Sejam E, V EVNs, $f: E \times V \rightarrow]-\infty, \infty]$, $(u_0, p_0) \in E \times V$. As subderivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial p}$ são definidas por

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, p_0) = \delta f_{p_0}(u_0), \quad \frac{\partial f}{\partial p}(u_0, p_0) = \delta f_{u_0}(p_0),$$

onde $f_{p_0}(u) = f(u, p_0)$, $f_{u_0}(p) = f(u_0, p)$.

4.8 - EXERCÍCIO: Mostre que as subderivadas parciais podem existir sem que o subdiferencial exista. Mostre que se φ é convexa e contínua em (u_0, p_0) , então

$$\forall p^* \in \frac{\partial \varphi}{\partial p}(u_0, p_0) \exists u^* \in \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, p_0) \text{ tal que}$$

$$(u^*, p^*) \in \partial \varphi(u_0, p_0).$$

4.9 - OBSERVAÇÃO: Já provamos de passagem, algumas vezes, que se φ é convexa e contínua em u , então φ é subdiferenciável em u . Por outro lado, sabemos que se E é um espaço de Banach e φ é convexa sci, então φ é contínua no interior de $D(\varphi)$ (3.17). Temos então, para $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$, φ convexa sci, E espaço de Banach,

$$\overbrace{D(\varphi)}^{\circ} \subset D(\partial \varphi) \subset D(\varphi).$$

Na realidade, porém, isto não assegura que $D(\partial \varphi) \neq \emptyset$, pois $D(\varphi)$ pode ter interior vazio. Para tranquilidade do leitor, in-

formamos que, com as hipóteses acima, é possível provar que

$$\overline{D(\delta\varphi)} \supset D(\varphi) \text{ (ver [19] e exercício 4.22)}$$

4.10 - OBSERVAÇÃO: Já vimos (I.3.2), que para funções G-diferenciáveis, todo ponto de mínimo de $J: E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz à equação

$$J'(u) = 0$$

A definição de subdiferenciabilidade possibilita uma formulação mais geral, para funções quaisquer: todo ponto de mínimo de $J: E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a

$$0 \in \delta J(u)$$

Em alguns casos, porém, pode ser preferível dar outro tratamento ao problema. Suponhamos que J é G-diferenciável sobre o convexo $K \subset E$ e que queremos minimizar J sobre K . Nosso tratamento usual seria redefinir J sobre $E \setminus K$ por $J(x) = \infty \quad \forall x \notin K$, e dizer que u é pt. de mínimo de J se e só se $0 \in \delta J(u)$.

No entanto, é mais natural usar o seguinte resultado (interprete-o geometricamente, em espaços de Hilbert):

4.11 - PROPOSIÇÃO: Se $K \subset E$ é convexo e $J: K \rightarrow \mathbb{R}$ é G-diferenciável sobre K , então todo ponto de mínimo de J sobre K satisfaz à inequação

$$\langle J'(u), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K$$

Demonstração: Se u é pt. de mínimo e $v \in K$, seja $h = v - u$. Temos então $u + th \in K \quad \forall t \in [0, 1]$ e

$$\frac{J(u+th) - J(u)}{t} \geq 0 \quad \forall t \in]0, 1[.$$

Segue $\langle J'(u), v-u \rangle \geq 0$. ■

No caso de funcionais convexos, temos a recíproca:

4.12 - PROPOSIÇÃO: Se $\varphi:K \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa e G-diferenciável, $u \in K$ é ponto de mínimo de φ se e só se

$$\langle \varphi'(u), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Demonstração: Decorre imediatamente de 4.1. ■

A inequação

$$\langle J'(u), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K$$

é um exemplo de INEQUAÇÃO VARIACIONAL. Mais geralmente, temos o seguinte resultado:

4.13 - PROPOSIÇÃO: Se $\varphi_1, \varphi_2:K \rightarrow \mathbb{R}$ são convexas e φ_1 é G-diferenciável sobre K, então u é ponto de mínimo de $\varphi_1 + \varphi_2$ se e só se

$$(I) \quad \langle \varphi_1'(u), v-u \rangle + \varphi_2(v) - \varphi_2(u) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Demonstração: Da convexidade de φ_1 temos, para qualquer u em K,

$$\varphi_1(v) - \varphi_1(u) \geq \langle \varphi_1'(u), v-u \rangle \quad \forall v \in K$$

Logo, se u satisfaz à inequação (I), u é ponto de mínimo de $\varphi_1 + \varphi_2$.

Reciprocamente, suponhamos que u seja ponto de mínimo de $\varphi_1 + \varphi_2$. Seja v um ponto qualquer de K. Vale então

$$\varphi_1(u+t(v-u)) - \varphi_1(u) + \varphi_2(u+t(v-u)) - \varphi_2(u) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Da convexidade de φ_2 , vem:

$$\varphi_1(u+t(v-u)) - \varphi_1(u) + t(\varphi_2(v) - \varphi_2(u)) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Dividindo por t e fazendo t tender a 0, temos (I) ■

4.14 - OBSERVAÇÃO: A segunda parte da demonstração de 4.13 só exigiu a convexidade de φ_2 . Assim, se $J:K \rightarrow \mathbb{R}$ é da forma $J = F + \varphi$, F G -diferenciável e φ convexa, todo ponto de mínimo de J deve satisfazer à inequação variacional

$$\langle F'(u), v-u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0 \quad \forall v \in K$$

4.15 - EXERCÍCIO: Mostre que 4.14 generaliza 4.11 (faça $\varphi = i_K$), assim como 4.13 generaliza 4.12 ($\varphi_2 = i_K$).

4.16 - OBSERVAÇÃO: Quando o convexo K é um cone de vértice g (ver A.2.6) e u é solução da inequação

$$\langle J'(u), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

podemos, fazendo $v_1 = g + \frac{1}{2}(u-g)$ e $v_2 = g + 2(u-g)$, concluir que

$$\langle J'(u), u-g \rangle = 0$$

EXERCÍCIOS:

4.17 - Seja H um espaço de Hilbert. Suponha que $K \subset H$ é um convexo fechado e que $\varphi_1: H \rightarrow \mathbb{R}$ é G -diferenciável. Calcule $\partial\varphi$, onde $\varphi = \varphi_1 + i_K$.

4.18 - Sejam $L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa e contínua, $E = C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, onde Ω é um aberto limitado de \mathbb{R}^n . Seja $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(u) = \int_{\Omega} L(u(x), \nabla u(x), x)$$

Mostre que φ é convexa e contínua. Calcule $\partial\varphi$.

4.19 - Seja $E = L^2(0,1)$ e seja $E_0 = E \cap \{u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$. Seja $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ dada por

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x) dx, & u \in E_0 \\ \infty, & u \notin E_0 \end{cases}$$

Mostre que se $u \in E_0$ e \tilde{u} está em $L^2(0,1)$, então $\tilde{u} \in \partial\varphi(u)$. Que acontece se $\tilde{u} \notin L^2(0,1)$?

4.20 - Mostre que a norma de L^1 é subdiferenciável em todos os pontos.

Sugestão: Tente $u^*(x) = \text{sgn } u(x) = \begin{cases} 1, u(x) > 0 \\ 0, u(x) = 0 \\ -1, u(x) < 0 \end{cases}$

4.21 - Mostre que se φ é convexa, então $\partial\varphi$ é monótona. Isto é,

$$u^* \in \partial\varphi(u), v^* \in \partial\varphi(v) \Rightarrow \langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0$$

4.22 - Seja H um espaço de Hilbert e seja $\varphi: H \rightarrow]-\infty, \infty]$ convexa e sci. Mostre que $D(\partial\varphi) \supset D(\varphi)$. Esquema:

(i) Seja $x \in H$. Mostre $\forall \lambda > 0$ existe um único $x_\lambda \in D(\partial\varphi)$ tal que

$$\frac{x - x_\lambda}{\lambda} \in \partial\varphi(x_\lambda),$$

ou seja, $x_\lambda = (I + \lambda \partial\varphi)^{-1}(x)$. Sugestão: x_λ é ponto de mínimo de $y \mapsto \frac{1}{2\lambda} |y - x|^2 + \varphi(y)$.

(ii) Mostre que se $x \in D(\varphi)$, então $x_\lambda \rightarrow x$. Sugestão: substitua x em

$$\varphi(y) - \varphi(x_\lambda) \geq \left\langle \frac{x - x_\lambda}{\lambda}, y - x_\lambda \right\rangle \quad \forall y \in H,$$

observe que φ é minorada por uma transformação afim, e vá em frente.

4.23 - Demonstre 4.5 supondo apenas que u é um ponto interno de $D(\varphi)$ (ver A.3.4 e A.4.8).

4.24 - Suponha que $K \subset E$ é convexo e u é ponto de mínimo de $F:K \rightarrow \mathbb{R}$. Mostre que se F é G-diferenciável em u e se existem $E_0 \subset E$ e $\delta > 0$ tais que

$$\forall v \in E_0, |v| < \delta \Rightarrow u+v \in K,$$

então

$$\langle F'(u), v \rangle = 0 \quad \forall v \in E_0.$$

Mostre que o mesmo resultado vale se se supõe que 0 é ponto interno (em E_0) de $(K-u) \cap E_0$.

5 - DESIGUALDADES VARIACIONAIS - Vamos apresentar alguns problemas que nos conduzem à desigualdades variacionais.

5.1 - PROBLEMA DO OBSTÁCULO - Seja $g \in H^1_0(\Omega)$, $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $K = \{u \in H^1_0(\Omega), u \geq g \text{ q.t.p. sobre } \Omega\}$. O problema do obstáculo de enuncia como

$$(0.1) \quad \min_{v \in K} J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \langle f, v \rangle$$

J é estritamente convexo, sci e coercivo, K é convexo. A existência de uma única solução u de (0.1) estará assegurada se mostrarmos que K é fechado e não vazio. É claro que $0 \in K$ e se $(v_n) \subset K$, $v_n \rightarrow v$ em $H^1_0(\Omega)$ então $v_n \rightarrow v$ em L^2 e para alguma subseqüência $v_{n_k} \rightarrow v$ qtp em Ω . Assim $v \geq 0$ e K é fechado.

Além disso, K é um cone de vértice g e de 4.16 segue que

$$(0.2) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v-g) + \langle f, v-g \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K$$

$$(0.3) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (-g) + \langle f, u-g \rangle = 0$$

Para uma interpretação de (0.2), (0.3) suponhamos u, f e g regulares. Tomando $v = \varphi + u$ com $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, podemos escrever

$$(0.4) \quad -\Delta u + f \geq 0$$

De (0.3), (0.4) e $u \in K$ decorre que $(-\Delta u + f) \cdot (u-g) = 0$ em Ω . Seja $\Omega_1 = \{x \in \Omega, -\Delta u(x) + f(x) > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega - \Omega_1$, $\Gamma_t = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ e $u_i = u|_{\Omega_i}$, $i=1,2$. Então,

$$\begin{aligned} u_1 &= g && \text{em } \Omega_1 \\ -\Delta u_2 + f &= 0 && \text{em } \Omega_2 \end{aligned}$$

com as condições de continuidade $u_1 - u_2|_{\Gamma_t} = \frac{\partial}{\partial \eta}(u_1 - u_2)|_{\Gamma_t} = 0$.

A fronteira Γ_t , a ser determinada, é dita a fronteira livre do problema.

5.2 - EQUILÍBRIO TÉRMICO EM MEIO SEMI-PERMEÁVEL - Suponhamos um corpo homogêneo e isotrópico Ω em equilíbrio térmico. Se em Ω atuam fontes de calor de densidade f , então a temperatura u satisfaz a equação de Laplace $-\Delta u = f$ em Ω . Suponhamos ainda que a parede Γ de Ω seja semi-permeável: só há fluxo de calor do exterior para o interior. Assim, se a temperatura externa na parede $g(x)$ é menor que a interna, há isolamento. Se $g(x) \geq u(x)$ então pode haver troca de calor. Nesse caso, porém, o contato dos dois meios obriga a que $u(x) = g(x)$.

Podemos então formular o problema como sendo

$$(P) \quad \min_{v \in K} \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v$$

onde $K = \{v \in H^1(\Omega), v \geq g \text{ qtp em } \Gamma\}$.

Interpretação de (P)

Seja $u_0(x)$ tal que $u_0|_{\Gamma} = g$. Então K é um cone convexo e, denotando indistintamente $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = (\nabla u, \nabla v)$ e $\int_{\Omega} f v = (f, v)$, temos que u é solução de (P) se e só se

$$(0.5) \quad (\nabla u, \nabla(v-u)) - (f, v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K$$

$$(0.6) \quad (\nabla u, \nabla(u-u_0)) - (f, u-u_0) = 0$$

Tomando $v = u_0 + \varphi$, $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ e $C^{\infty}(\Omega)^+$ respectivamente, em (0.5) obtemos $-\Delta u = f$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta} \geq 0$. Por outro lado, de (0.6) vem

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta}, u-g \right\rangle_{\Gamma} = 0, \text{ o que implica } \frac{\partial u}{\partial \eta} (u-g) = 0 \text{ qtp em } \Gamma^{(1)}$$

Portanto, existem duas regiões $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, tais que

$$\begin{cases} u=g & \text{e } \frac{\partial u}{\partial \eta} \geq 0 \text{ em } \Gamma_1 \\ u > g & \text{e } \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ em } \Gamma_2 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Vamos agora estudar a existência de soluções de (P), supondo que $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Usando a continuidade da aplicação traço e procedendo como no exemplo anterior, temos que $K \neq \emptyset$ é fechado. Além disso, $J(v)$ é convexo e sci. A coercividade de J é menos evidente, uma vez que $v \in H^1(\Omega)$.

(I) Interpretação formal e válida se u for suficientemente regular.

Para estudarmos esta questão, observamos que dado $v \in H^1(\Omega)$ podemos decompô-lo na soma de uma função de média nula em Γ e uma constante, $v = v_1 + \bar{v}$, onde $\bar{v} = \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} v \, ds$, $\int_{\Gamma} v_1 = 0$

5.3 - LEMA - Se $\|v\| \rightarrow +\infty$ então $\|\nabla v\|_{L^2} + |\bar{v}| \rightarrow +\infty$

Demonstração - Suponhamos por absurdo que existe uma sequência $\|v_n\| \rightarrow +\infty$ com $\|\nabla v_n\|_{L^2} + |\bar{v}_n| \leq C$. Tomando $u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$

temos $\|u_n\| = 1$ e $\|\nabla u_n\|_{L^2} + |\bar{u}_n| \rightarrow 0$. Assim, $u_n \rightharpoonup u$ fraco em $H^1(\Omega)$, o que implica $u_n \rightarrow u$ forte em $L^2(\Omega)$, com $\nabla u_n \rightarrow 0$ forte em $L^2(\Omega)$. Então, $u_n \rightarrow C$ forte em $H^1(\Omega)$. Mas $\bar{u}_n \rightarrow 0$ e $C = 0$. Isso contradiz $\|u\| = 1$. ■

Agora estamos prontos para estabelecer a coercividade de J em K .

5.4 - PROPOSIÇÃO - Se $(f, 1) < 0$ então J é coercivo em K .

DEMONSTRAÇÃO - Pelo Lema 5.3, se $\|v\| \rightarrow +\infty$ então $\|\nabla v_1\|_{L^2} + |\bar{v}| \rightarrow +\infty$. Se $v \in K$, $\bar{v} = \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} v \geq \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} g$. Está portanto excluída a possibilidade $\bar{v} \rightarrow -\infty$.

Assim, $J(v) = \frac{1}{2} \|\nabla v_1\|_{L^2}^2 - (f, v_1) - \bar{v} (f, 1) \geq C_1 (\|\nabla v\|_{L^2} + |\bar{v}|) + C_2$. ■

A proposição 5.4 nos garante a existência de uma solução de (P). A unicidade vem do

5.5 - EXERCÍCIO - Mostre que (P) tem solução única. (Sugestão: Se u, u' são soluções, então $u - u' = C$. Se $C \neq 0$ as condições de fronteira acarretam $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ sobre Γ . Mas $\langle \frac{\partial u}{\partial \eta}, 1 \rangle_{\Gamma} = (f, 1) < 0$.)

A condição $(f,1)$ é natural: se só é permitida a entrada de calor, o equilíbrio térmico pressupõe que o fornecimento total de calor devido às fontes externas $(f,1)$ seja não positivo. De fato, fazendo $v = 1 + u_0$ em (0.5), é fácil ver que $(f,1) \leq 0$ é uma condição necessária para a existência de soluções. O caso crítico é estudado abaixo.

5.6 - EXERCÍCIO - Suponha que $(f,1) = 0$.

(i) Mostre que se u é solução de (P) então u satisfaz o problema de Neumann

$$(*) \begin{cases} -\Delta u = f \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \end{cases}$$

Use a proposição 3.22 para mostrar que (*) tem uma infinidade de soluções.

(ii) Mostre que (P) tem solução se e só se (*) tem uma solução limitada inferiormente. Nesse caso, (P) tem uma infinidade de soluções.

5.7 - EQUILÍBRIO DE PLACAS - Uma placa é um corpo cuja espessura, sendo muito pequena em relação às outras dimensões, será desprezada. Vamos considerar, pois, Ω uma região limitada de \mathbb{R}^2 e vamos supor, em primeira aproximação, que ela sofra apenas deslocamentos normais $u(x_1, x_2)$ quando deformada. A energia potencial de deformação linearizada é dada por $\frac{1}{2} a(u, u)$ onde

$$a(u, v) = D \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) + \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

$D > 0$ é o módulo de rigidez à flexão e $\nu \in (0, 1/2)$ é o coeficiente de Poisson. Em presença de forças externas em Ω de densidade f , a posição de equilíbrio corresponde à minimização de $\frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} fv$, o que nos conduz à equação biarmônica $\Delta^2 u = f$. Vamos considerar aqui o problema

$$(P) \min J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + g \int_{\Gamma} |v| - \int_{\Omega} fv, \quad g > 0$$

Este é um modelo para o equilíbrio de placas cuja fronteira Γ está em contato com outras superfícies que podem exercer sobre ela forças na forma de atrito.

INTERPRETAÇÃO DE (P). Vamos considerar u solução de (P) suficientemente regular, de modo que todas as funções de u que aqui aparecem sejam contínuas. Esta é, portanto, uma interpretação formal de (P).

De 4.13 temos que

$$a(u, v-u) + g \int_{\Gamma} |v| - g \int_{\Gamma} |u| \geq \int_{\Omega} f(v-u)$$

Utilizando a identidade de Green podemos escrever

$$a(u, v) = D \left(\int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v + \int_{\Gamma} Fv + \int_{\Gamma} M \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)$$

$$\text{onde } F = \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta u + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial \tau} [n_1 n_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}]$$

$$M = \Delta u + (1-\nu)(2n_1 n_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - n_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - n_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2})$$

Aqui, $\hat{n} = (n_1, n_2)$ é o vetor normal unitário exterior e $=(-n_2, n_1)$ vetor tangente unitário. F representa uma densidade de forças sobre Γ e M uma densidade de momentos na direção τ . (Para maiores detalhes, ver [17])

Fazendo $v = u \pm \varphi$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ vem

$$(0.7) \quad D\Delta^2 u = f$$

$$\text{Logo,} \quad \int_{\Gamma} F(v-u) + \int_{\Gamma} M \frac{\partial}{\partial \eta} (v-u) + g \int_{\Gamma} |v| - g \int_{\Gamma} |u| \geq 0$$

Tomamos $v = u \pm \varphi$, com φ regular e $\varphi|_{\Gamma} = 0$. Então

$$\int_{\Gamma} M \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0. \text{ Admitimos o fato (perfeitamente razoável) de que}$$

daí podemos concluir que $M=0$. Então $\int_{\Gamma} Fv + g \int_{\Gamma} |v| \geq$

$$\int_{\Gamma} Fu + g \int_{\Gamma} |u|$$

Seja $v = s \varphi \in C^\infty(\Gamma)$. Fazendo $s \rightarrow \pm \infty$ e $s \rightarrow 0$ concluímos que

$$\int_{\Gamma} F\varphi \leq g \int_{\Gamma} |\varphi| \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma} Fu + g \int_{\Gamma} |u| \leq 0$$

Segue que $|F| \leq g$ em Γ e $F \cdot u + g|u| = 0$. Podemos então escrever

$$(0.8) \quad \text{Em } \Gamma \quad \begin{cases} M = 0 \\ |F| \leq g \\ |F| < g \Rightarrow u = 0 \\ |F| = g \Rightarrow F \cdot u \leq 0 \end{cases}$$

Temos assim a interpretação do problema:

- (i) Não há rotação na direção tangencial em Γ .
- (ii) Se em $(x_1, x_2) \in \Gamma$ a densidade de forças $F(x, y)$ devido ao atrito não atinge um certo nível, o ponto permanece em repouso. Ao atingir o nível g , o ponto pode ser deslocado. Evidentemente, o deslocamento tem sentido oposto ao da força de atrito.

Deixamos a cargo do leitor a verificação de que reciprocamente, se u satisfaz (0.7) e (0.8) então u minimiza J . ■

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA - Seja $W \subset H^2(\Omega)$ o subespaço dos polinômios de primeiro grau restritos a Ω e $u \in E$ solução de (P). Então, $a(u, v-u) + \int_{\Gamma} |v| - \int_{\Gamma} |u| \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in E$.

Tomando $v = u + w$ com $w \in W$, vem

$$\int_{\Gamma} |u+w| - \int_{\Gamma} |u| \geq \int_{\Omega} fw. \text{ Mas } \int_{\Gamma} |u+w| - \int_{\Gamma} |u| \leq \int_{\Gamma} |w| \quad e$$

isso mostra que uma condição necessária para a existência de solução é que $\langle f, w \rangle \leq \int_{\Gamma} |w| \quad \forall w \in W$. Reciprocamente, temos

5.8 - Proposição - Seja $f \in (H^2(\Omega))^*$ tal que $\langle f, w \rangle \leq \int_{\Gamma} |w| \quad \forall w \in W$.

Então (P) tem uma solução.

Antes de demonstrarmos este resultado, precisamos de um Lema preliminar.

5.9 - Lema - Dado $v \in H^2(\Omega)$, consideremos a decomposição $v = z + w$, onde $w \in W, z \in W^{\perp}$. Então $\|v\| = (a(z, z) + \|w\|^2)^{1/2}$ é uma norma equivalente à norma usual $\|v\|$.

Demonstração - Parte da verificação de que $||| \cdot |||$ é uma norma é deixada ao leitor. Vamos apenas mostrar que se $|||v||| = 0$ então $v=0$.

De fato, se $|||v||| = 0$ então $w=0$ e $a(z,z)^{1/2} = 0$. Assim $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ para todo $i, j=1,2$, o que implica $z \in W$. Mas $z \in W^\perp$ e então $z=0$.

Tomemos que $|||v||| = (a(z,z) + \|w\|^2)^{1/2} \leq C(\|z\|^2 + \|w\|^2)^{1/2} = C\|v\|$. Resta mostrar que existe $c > 0$ tal que $|||v||| \geq c\|v\|$. Procedendo como na demonstração do Lema 5.3, suponhamos por absurdo que $\|v_n\| = 1$ e $|||v_n||| \rightarrow 0$. Então $v_n \rightharpoonup v$ fraco em $H^2(\Omega)$, $v_n \rightarrow 0$ forte em $H^2(\Omega)$, $\frac{\partial^2 z_n}{\partial x_i \partial x_j} \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$ para $i, j=1,2$. Assim $z_n \rightharpoonup z$ fraco em $H^2(\Omega)$, o que implica $z_n \rightarrow z$ forte em $H^1(\Omega)$. Portanto, $z_n \rightarrow z$ forte em $H^2(\Omega)$ com $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = 0$, $i, j=1,2$. Isso mostra que $z \in W \cap W^\perp$ e $z=0$. Logo, $v_n = z_n + w_n \rightarrow 0$ forte em $H^2(\Omega)$, o que contraria $\|v_n\| = 1$. ■

Demonstração da Proposição 5.8 - $J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) + g \int_\Gamma |v| - \langle f, v \rangle$ é um funcional convexo, próprio e s.c.i. A coercividade não é evidente, já que $v \in W = a(v,v) = 0$. Para mostrar que J é coercivo, seja $k = \inf_{\substack{v \in W \\ \|v\|=1}} g \int_\Gamma |v| - \langle f, v \rangle$. Por hipótese $k > 0$ e temos então que $g \int_\Gamma |v| - \langle f, v \rangle \geq k \|v\| \quad \forall v \in W$.

Observemos que $a(v,v) = a(z,z)$ e que, em virtude do teorema do traço, $g \int_\Gamma |v| \leq C_1 \left(\int_\Gamma |v|^2 \right)^{1/2} \leq C_2 \|v\|$. Podemos então escrever

$$J(v) = \frac{1}{2} a(z, z) + g \int_{\Gamma} |z+w| - \langle f, z+w \rangle \geq \frac{1}{2} a(z, z) + g \int_{\Gamma} |w| - g \int_{\Gamma} |z| - \langle f, z+w \rangle$$

$$J(v) \geq \frac{1}{2} a(z, z) + k \|w\| - g \int_{\Gamma} |z| - \langle f, z \rangle \geq \frac{1}{2} a(z, z) + \frac{k^2}{2} + \frac{\|w\|^2}{2} - C \|z\|$$

$$\geq C_1 \|v\|^2 + C_2 \quad \blacksquare$$

5.9 - OBSERVAÇÃO - Ao que nos consta, está em aberto o problema de saber se existe solução no caso em que $\langle f, v \rangle \leq g \int_{\Gamma} |v| \quad \forall v \in W$, bem como a questão da unicidade ou não da solução dada pela Proposição 5.8.

6. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE E PROBLEMA DUAL

Vamos retomar agora, de um ponto de vista mais geométrico, embora mais abstrato, a discussão colocada em I.5.

Trata-se, para nós, de minimizar

$$J: U \rightarrow \mathbb{R},$$

onde U é um espaço de Banach (U será, em geral, um espaço de funções). No caso do Cálculo das variações, J costuma ser da forma

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)),$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e D é um operador de derivação ($Du = \nabla u$, por exemplo).

Como já vimos em I.5, minimizar J sobre U equivale, nesse caso, a

$$\min_{Du-p=0} \int_{\Omega} F(x, u, p)$$

ou, o que dá no mesmo, a

$$\min_{p=0} \int_{\Omega} F(x, u, Du-p) .$$

Adotaremos esta última formulação, que tem a vantagem de transformar o vínculo $Du-p=0$ em $p=0$ e, principalmente, simplificará as coisas no futuro.

Assim, podemos dizer que nosso problema é

$$\min_{p=0} \varphi(u, p),$$

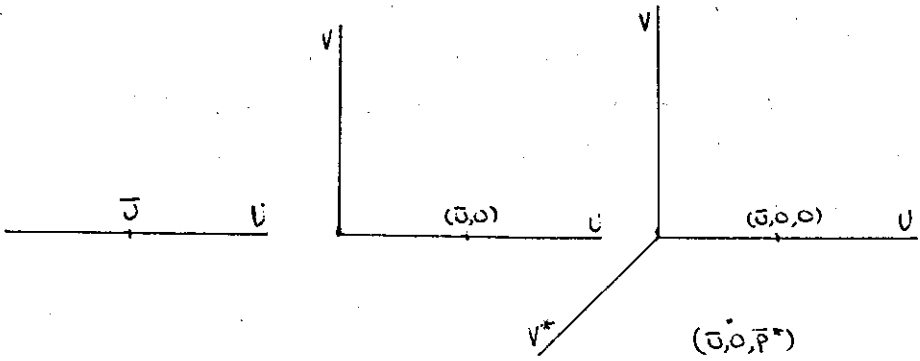
onde $\varphi: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\varphi(u, 0) = J(u)$. Não custa nada frisar que vai nos interessar é $\varphi(u, p) = \int_{\Omega} F(x, u, Du-p)$.

Para podermos usar a teoria dos multiplicadores de Lagrange desenvolvida em I.4 (em particular o Teorema I.4.6), basta observar que, sendo U e V espaços de Banach, a aplicação $B(u, p) = p$ satisfaz plenamente à condição (C) de I.4.6. Trata-se, então, para nós, de encontrar pontos críticos de

$$\begin{aligned} f: U \times V \times V^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, p, p^*) &\longmapsto \varphi(u, p) - \langle p^*, p \rangle, \end{aligned}$$

onde p^* será o multiplicador de Lagrange.

Assim, partimos do problema de minimizar $J(u)$ sobre U (encontrar ponto crítico \bar{u}), passamos à questão de encontrar um ponto de mínimo de $\varphi(u, p)$ sobre $U \times \{0\}$ e agora estamos à procura de pontos críticos de $\mathcal{L}(u, p, p^*)$.



O procedimento clássico para encontrar um ponto crítico $(\bar{u}, \bar{p}, \bar{p}^*)$, de \mathcal{L} é simples: $(\bar{u}, \bar{p}, \bar{p}^*)$ deve ser solução do sistema

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} (\bar{u}, \bar{p}, \bar{p}^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} (\bar{u}, \bar{p}, \bar{p}^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^*} (\bar{u}, \bar{p}, \bar{p}^*) = 0 \end{cases} ,$$

ou seja, $(\bar{u}, \bar{p}, \bar{p}^*)$ deve satisfazer às equações:

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} (\bar{u}, \bar{p}) = 0$$

$$(2) \quad \bar{p}^* = \frac{\partial \varphi}{\partial p} (\bar{u}, \bar{p})$$

$$(3) \quad \bar{p} = 0$$

Imaginando que cada uma das equações acima determina uma variedade, podemos dizer que procuramos $(\bar{u}, \bar{p}, \bar{p}^*) \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$, onde

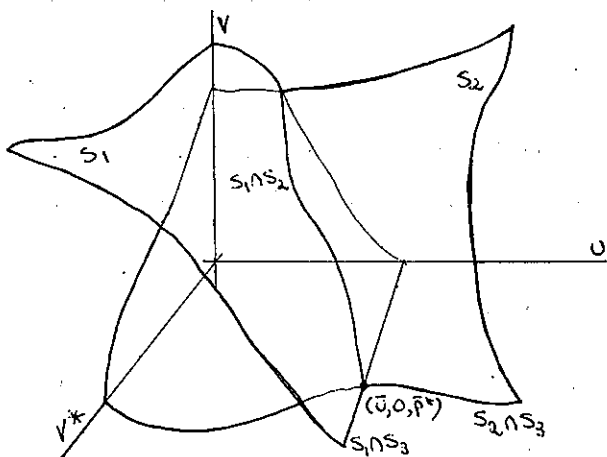
$$S_1 = \{(u, p, p^*) \text{ t.q. } \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, p) = 0\}$$

$$S_2 = \{(u, p, p^*) \text{ t.q. } p^* = \frac{\partial \varphi}{\partial p}(u, p)\}$$

$$S_3 = \{(u, p, p^*) \text{ t.q. } p = 0\}$$

Observando que $\varphi(u,0) = J(u)$, temos que

$S_1 \cap S_3 = \{(u,0,p^*) \text{ t.q. } J'(u) = 0\}$. Ou seja, $(\bar{u}, \bar{p}, \bar{p}^*) \in S_1 \cap S_3$ significa que \bar{u} é pt. crítico de J e $p=0$, o que não traz nenhuma informação nova.



Assim, se não era possível resolver o problema em sua formulação inicial (o que implicitamente estamos supondo), torna-se imprescindível calcular o multiplicador \bar{p}^* . De um ponto de vista puramente algébrico, a questão seria apenas resolver o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}, 0) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p}(\bar{u}, 0) = \bar{p}^* \end{cases} ,$$

ou, de forma mais sucinta, resolver

$$\varphi'(\bar{u}, 0) = (0, \bar{p}^*)$$

O sistema acima se resolve, como todo sistema a duas incógnitas, calculando primeiro uma das duas. É razoável esperar que qualquer método que calcule primeiro \bar{u} nos leve de volta ao problema de minimizar J . Se é isto que queremos evitar, há que procurar um caminho que primeiro calcule \bar{p}^* . O problema de determinar \bar{p}^* será chamado PROBLEMA DUAL do problema de minimizar $J(u)$ (PROBLEMA PRIMAL).

A abordagem que vamos desenvolver é bastante engenhosa, mas vai exigir do leitor um pouco de paciência até que as coisas fiquem claras.

Consideremos a equação mais geral

$$\varphi'(u, p) = (u^*, p^*),$$

ou, se φ é convexa,

$$\partial\varphi(u, p) \ni (u^*, p^*).$$

Se (u, p) é dado, a questão é apenas diferenciar (ou subdiferenciar) φ , coisa que já tratamos. O que vamos fazer agora é estudar primeiro o caso inverso, em que o dado é (u^*, p^*) e a incógnita (u, p) , para em seguida tratar o caso misto que nos interessa (isto é: metade da incógnita está de um lado e metade do outro). Resumindo:

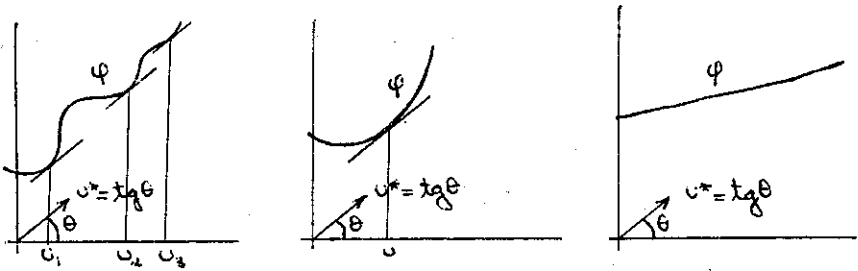
- (i) Queremos encontrar (u, p^*) tal que $\varphi'(u, 0) = (0, p^*)$
- (ii) Já sabemos, dado (u, p) , encontrar (u^*, p^*) tal que $\varphi'(u, p) = (u^*, p^*)$.
- (iii) Precisamos estudar como, dado (u^*, p^*) , encontrar (u, p) tal que $\varphi'(u, p) = (u^*, p^*)$.
- (iv) Esperamos que (ii) e (iii) nos ajudem a resolver (i).

7. FUNÇÕES CONVEXAS CONJUGADAS

Seja $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ e consideremos, dado $u^* \in E^*$, a questão de encontrar $u \in E$ tal que

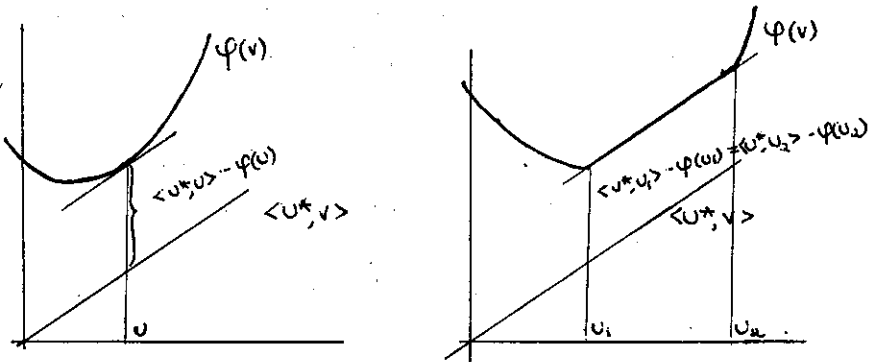
$$\varphi'(u) = u^*$$

Para ter uma idéia da coisa, pensemos no caso $E = \mathbb{R}$. Trata-se, dada uma direção u^* , de encontrar $u \in E$ tal que a tangente ao gráfico de φ tenha exatamente direção u^* .



Dependendo de φ , pode haver uma, nenhuma, ou várias soluções (infinitas, inclusive). Se φ for convexa, não é difícil ver que qualquer solução u é tal que

$$\langle u^*, u \rangle - \varphi(u) \geq \langle u^*, v \rangle - \varphi(v) \quad \forall v \in E$$



Assim, pelo menos quando φ é convexa, nosso problema se reduz a encontrar pontos de máximo da aplicação

$$v \longmapsto \langle u^*, v \rangle - \varphi(v)$$

7.1 - PROPOSIÇÃO: Seja $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ G-diferenciável e seja $u^* \in E^*$. Se $u \in E$ é ponto de máximo de

$$v \longmapsto \langle u^*, v \rangle - \varphi(v),$$

então $\varphi'(u) = u^*$.

Demonstração: Derive e iguale a zero ■

7.2 - PROPOSIÇÃO: Seja $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ convexa e seja $u^* \in E^*$.

Se $u \in E$, então $u^* \in \partial\varphi(u)$ se e só se u é ponto de máximo de

$$v \longmapsto \langle u^*, v \rangle - \varphi(v)$$

Demonstração: Se $u^* \in \partial\varphi(u)$, então $\varphi(u) < \infty$ e

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle u^*, v-u \rangle \quad \forall v \in E.$$

Segue

$$\langle u^*, u \rangle - \varphi(u) \geq \langle u^*, v \rangle - \varphi(v) \quad \forall v \in E.$$

Reciprocamente, se

$$\langle u^*, u \rangle - \varphi(u) \geq \langle u^*, v \rangle - \varphi(v) \quad \forall v \in E,$$

então.

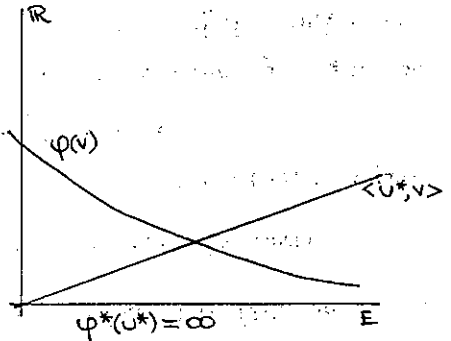
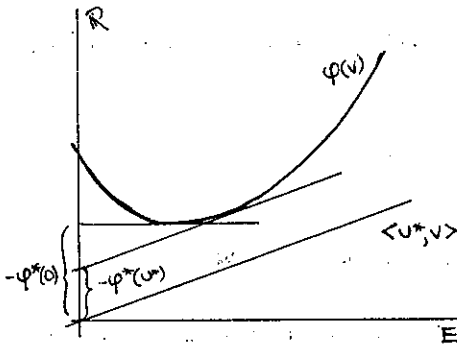
$$\varphi(v) \geq \varphi(u) + \langle u^*, v-u \rangle \quad \forall v \in E$$

(note-se que, como $\varphi \neq \infty$ está excluído, temos $\varphi(u) < \infty$) ■

De maneira pictórica, estamos traçando hiperplanos paralelos ao gráfico de $v \mapsto \langle u^*, v \rangle$ até encontrar o ponto de tangência ao gráfico de φ . O hiperplano que toca φ é determinado por

$$\varphi^*(u^*) = \sup \{ \langle u^*, v \rangle - \varphi(v), v \in E \},$$

caso $\varphi^*(u^*) < \infty$.



7.3 - DEFINIÇÃO: A aplicação $\varphi^*: E^* \rightarrow]-\infty, \infty]$ dada por

$$\varphi^*(u^*) = \sup \{ \langle u^*, v \rangle - \varphi(v), v \in E \}$$

é chamada POLAR ou TRANSFORMADA DE FENCHEL de φ .

Segue imediatamente da definição que

$$\varphi^*(u^*) + \varphi(u) \geq \langle u^*, u \rangle \quad \forall u \in E, u^* \in E^*.$$

7.4 - EXEMPLO: Vamos mostrar que a transformada de Fenchel nada mais é que uma generalização da transformada de Legendre definida em I.5.

Seja

$$E = E_1 \times E_2, \text{ onde}$$

$$E_1 = C_0^1[a, b], \quad E_2 = C^0[a, b],$$

e seja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Definimos

$$\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(y, p) \longmapsto \int_a^b F(x, y(x), p(x)) dx.$$

Suponhamos que F é convexa (basta $F(x, \dots)$ seja convexa). Então φ é convexa.

Seja $u^* = (\sigma, \lambda)$. Calcular $\varphi^*(u^*)$ equivale a maximizar:

$$\langle u^*, v \rangle - \varphi(v) \quad , \quad v \in E \quad ,$$

ou seja, maximizar

$$\int_a^b (\sigma y + \lambda p - F(x, y, p)) dx \quad , \quad (y, p) \in E_1 \times E_2 \quad .$$

Se (y, p) é ponto de máximo, temos

$$F_y(x, y(x), p(x)) = \sigma(x)$$

$$F_p(x, y(x), p(x)) = \lambda(x)$$

e

$$\varphi^*(\sigma, \lambda) = \int_a^b (\sigma y + \lambda p - F(x, y, p)) dx \quad .$$

Definindo a transformada de Legendre de F por

$$F^*: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, s, t) \mapsto sa + tb - F(x, a, b),$$

onde a e b são as soluções de

$$\begin{cases} F_y(x, a, b) = s \\ F_p(x, a, b) = t \end{cases} \quad ,$$

temos, para cada x, s, t

$$F^*(x, s, t) = \max_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} (\langle (s, t), (\alpha, \beta) \rangle - F(x, \alpha, \beta)) \quad ,$$

e

$$\varphi^*(\sigma, \lambda) = \int_a^b F^*(x, \sigma(x), \lambda(x)) dx \quad .$$

Existe, é claro, pelo menos um valor de φ^* que costuma ser interessante: $\varphi^*(0) = -\inf \varphi$. A proposição abaixo, embora menos evidente, é de caráter bastante geométrico.

7.5 - PROPOSIÇÃO: Seja $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ uma função (E é um espaço vetorial normado), com $\varphi(u) < \infty$ para pelo menos um elemento u de E . Então φ^* é convexa e sci (a menos que $\varphi^* \equiv \infty$).

Demonstração: Para uma demonstração geométrica da convexidade de φ^* , veja 7.6.

Façamos a demonstração analítica. Queremos provar que, dados $u_1^*, u_2^* \in E$ e $t \in [0, 1]$, vale

$$\varphi^*(tu_1^* + (1-t)u_2^*) \leq t\varphi^*(u_1^*) + (1-t)\varphi^*(u_2^*).$$

Podemos, sem perda de generalidade, excluir o caso óbvio $\varphi^*(u_1^*) + \varphi^*(u_2^*) = \infty$. Temos então

$$\varphi^*(u_1^*) \geq \langle u_1^*, v \rangle - \varphi(v) \quad \forall v \in E$$

$$\varphi^*(u_2^*) \geq \langle u_2^*, v \rangle - \varphi(v) \quad \forall v \in E$$

e portanto

$$t\varphi^*(u_1^*) + (1-t)\varphi^*(u_2^*) \geq \langle tu_1^* + (1-t)u_2^*, v \rangle - \varphi(v) \quad \forall v \in E$$

Segue

$$\begin{aligned} t\varphi^*(u_1^*) + (1-t)\varphi^*(u_2^*) &\geq \sup_{v \in E} \langle tu_1^* + (1-t)u_2^*, v \rangle - \varphi(v) = \\ &= \varphi^*(tu_1^* + (1-t)u_2^*). \end{aligned}$$

Para mostrar que φ^* é sci (na norma de E^*), seja $u_n^* \rightarrow u^* \in E^*$. Temos

$$\varphi^*(u_n) \geq \langle u_n^*, v \rangle - \varphi(v) \quad \forall v \in E.$$

Como $\langle u_n^*, v \rangle - \varphi(v) \rightarrow \langle u^*, v \rangle - \varphi(v) \quad \forall v \in E$, vem

$$\underline{\lim} \varphi^*(u_n^*) \geq \langle u^*, v \rangle - \varphi(v) \quad \forall v \in E.$$

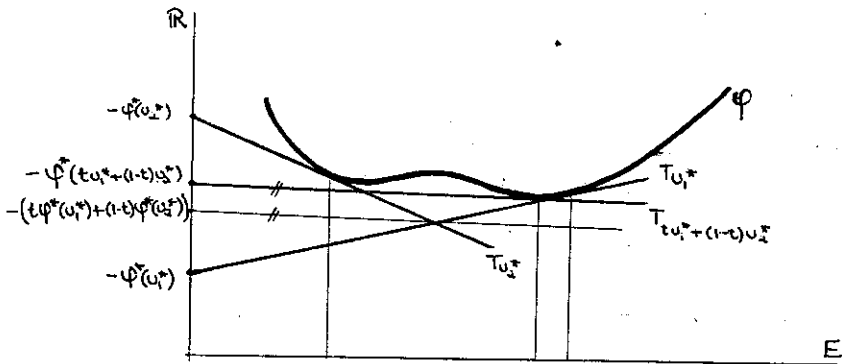
Conclui-se que

$$\underline{\lim} \varphi^*(u_n^*) \geq \varphi^*(u^*).$$

Finalmente, observemos que, como φ^* é convexa e sci na norma de E^* , φ^* é também fracamente sci ■

7.6. EXERCÍCIO (ELEMENTOS PARA UMA COMPREENSÃO GEOMÉTRICA DA CONVEXIDADE DE φ^*): Considere φ como em 7.5 e fixe

$u_1^*, u_2^* \in E^*$, com $\varphi^*(u_1^*) + \varphi^*(u_2^*) < \infty$.



a) Mostre que se $\varphi^*(u^*) < \infty$, então $\text{epi } \varphi \subset \text{epi } T_{u^*}$, onde $T_{u^*}.v = \langle u^*, v \rangle - \varphi^*(u^*)$. Mais ainda, mostre que se $\text{epi } \varphi \subset \text{epi } T$, onde $T.v = \langle u^*, v \rangle - a$, então $\varphi^*(u^*) \leq a$.

b) Mostre que se $T.v = \langle tu_1^* + (1-t)u_2^*, v \rangle - (t\varphi^*(u_1^*) + (1-t)\varphi^*(u_2^*))$, $t \in [0, 1]$, então $\text{epi } T_{u_1^*} \cap \text{epi } T_{u_2^*} \subset \text{epi } T$. A título de curiosidade, mostre que o gráfico de T contém a interseção dos gráficos

de $T_{u_1^*}$ e $T_{u_2^*}$.

c) Conclua que φ^* é convexa.

7.7 - EXERCÍCIO: Demonstre as seguintes propriedades:

- (i) $\varphi^*(0) = - \inf \varphi$
- (ii) $\varphi \leq \psi \Rightarrow \psi^* \leq \varphi^*$
- (iii) Dada uma família de funções φ_i como em 7.5, temos
 $(\inf \varphi_i)^* = \sup \varphi_i^*$, $(\sup \varphi_i)^* \leq \inf \varphi_i^*$
- (iv) $(\lambda \varphi)^*(u^*) = \lambda \varphi^*(u^*/\lambda) \quad \forall \lambda > 0, u^* \in E^*$
- (v) $(\varphi + \alpha)^* = \varphi^* - \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- (vi) Se $a \in E$, seja φ_a dada por $\varphi_a(v) = \varphi(v-a)$. Então
 $(\varphi_a)^*(u^*) = \varphi^*(u^*) + \langle a, u^* \rangle \quad \forall u^* \in E^*$.

Nosso próximo resultado geométrico diz respeito à identificação de $\partial \varphi^*$.

7.8 - PROPOSIÇÃO: Seja E um espaço vetorial normado e seja $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ uma função. Então

$$u^* \in \partial \varphi(u) \Rightarrow u \in \partial \varphi^*(u^*)$$

Demonstração: Para uma demonstração geométrica, veja 7.10. A demonstração analítica é trivial:

Se $u^* \in \partial \varphi(u)$, temos

$$\langle u^*, u \rangle - \varphi(u) \geq \langle u^*, v \rangle - \varphi(v) \quad \forall v \in E.$$

Segue $\varphi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle - \varphi(u) < \infty$. Daí vem

$$\varphi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle - \varphi(u)$$

$$\varphi^*(v^*) \geq \langle v^*, u \rangle - \varphi(u) \quad \forall v^* \in E^*$$

$$\varphi^*(v^*) - \varphi^*(u^*) \geq \langle v^* - u^*, u \rangle \quad \forall v^* \in E^* \quad \blacksquare$$

$$\varphi^*(w^*) - \varphi^*(u^*) = - (T_{w^*}(0) - T_{u^*}(0)) .$$

Usando b), conclua que

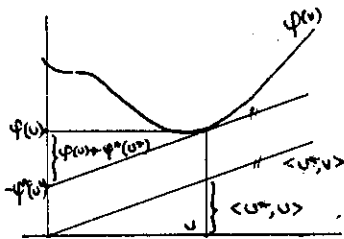
$$\varphi^*(w^*) - \varphi^*(u^*) \geq - (T(0) - T_{u^*}(0)) = \langle w^* - u^*, u \rangle .$$

Mais um resultado geométrico:

7.11 - PROPOSIÇÃO: Sejam $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$, $u^* \in E^*$ e $u \in E$. Então

$$u^* \in \partial\varphi(u) \Leftrightarrow \varphi(u) + \varphi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle$$

Demonstração:

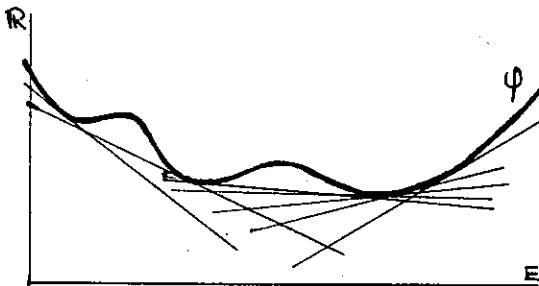


$$\begin{aligned} u^* \in \partial\varphi(u) &\Leftrightarrow \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle u^*, v - u \rangle \quad \forall v \in E \\ &\Leftrightarrow \langle u^*, u \rangle - \varphi(u) \geq \langle u^*, v \rangle - \varphi(v) \quad \forall v \in E \\ &\Leftrightarrow \varphi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle - \varphi(u) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \varphi(u) + \varphi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Façamos agora uma pequena pausa para compreender melhor o que está acontecendo. Dada uma função φ como em 7.5, os gráficos das funções

$$T_{u^*}: v \mapsto \langle u^*, v \rangle - \varphi^*(u^*)$$

formam uma família de hiperplanos de $E \times \mathbb{R}$, todos eles abaixo do gráfico de φ (supondo $\varphi^*(u^*) < \infty$).



É claro que duas funções diferentes podem engenhar a mesma família de hiperplanos (ou melhor, de aplicações afins).

7.12 - EXERCÍCIO: Medite um pouco sobre esta última afirmação. Faça desenhos. Dada uma função φ , qual a "melhor" função que gera os mesmos hiperplanos que φ ? Sugestão: "quem não é o maior pode ser o melhor".

É possível também fazer o caminho inverso: dada uma família \mathfrak{F} de aplicações afins (contínuas) de E , podemos definir uma função $\varphi: E \rightarrow [-\infty, \infty]$, $\varphi(u) = \sup_{T \in \mathfrak{F}} Tu$.

φ é chamada ENVOLTÓRIA SUPERIOR da família \mathfrak{F} .

Dada uma função $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$, seja

$$\mathfrak{F}_\varphi = \{T_{u^*}: E \rightarrow \mathbb{R}, T_{u^*}: v \mapsto \langle u^*, v \rangle - \varphi(u^*)\}$$

(note que T_{u^*} só está definida se $\varphi(u^*) < \infty$).

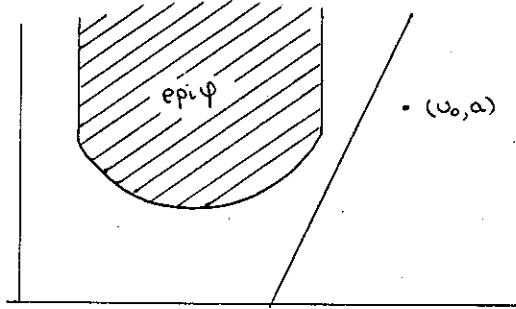
Como $\varphi \geq T_{u^*}$, qualquer que seja u^* , φ é sempre maior ou igual que a envoltória superior de \mathfrak{F}_φ . É razoável que se espere, diante de 7.12, que a igualdade ocorra quando φ é convexa sci.

7.13 - PROPOSIÇÃO: Se φ é envoltória superior de uma família \mathfrak{F} de transformações afins de E então, a menos que $\varphi \equiv -\infty$ ou $\varphi \equiv \infty$, φ é convexa sci.

Demonstração: Se a família \mathfrak{F} é vazia, então $\varphi \equiv -\infty$. Caso contrário, temos $\text{epi } \varphi = \bigcap_{T \in \mathfrak{F}} \text{epi } T$, o que mostra que $\text{epi } \varphi$ é convexo e fechado. Como φ majora uma transformação afim, temos $\varphi(u) > -\infty \forall u \in E$ ■

7.14 - TEOREMA: Seja $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ convexa sci. Então φ é a envoltória superior de \mathcal{F}_φ .

Demonstração: Basta mostrar que se $(u_0, a_0) \notin \text{epi } \varphi$, então $\psi(u_0) > a_0$, onde ψ é a envoltória superior de \mathcal{F}_φ . Suponhamos que $(u_0, a_0) \notin \text{epi } \varphi$ e provemos que existe $u_0^* \in E^*$ tal que $\langle u_0^*, u_0 \rangle - \varphi^*(u_0^*) > a_0$.



Vamos considerar dois casos:

(i) $\varphi(u_0) < \infty$

Este é o caso mais simples. Como $\text{epi } \varphi$ é convexo e fechado, existem $L \in (E \times \mathbb{R})^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $L(u, a) > \alpha \quad \forall (u, a) \in \text{epi } \varphi$ e $L(u_0, a_0) < \alpha$. Podemos sempre escrever $L(u, a) = \langle \ell, u \rangle + \lambda a$, onde $\ell \in E^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\varphi(u_0) < \infty$, temos $\langle \ell, u_0 \rangle + \lambda a > \alpha \quad \forall a \geq \varphi(u_0)$. Fazendo a tender a $+\infty$, obtemos $\lambda > 0$.

Seja então $T: E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$Tu = \frac{1}{\lambda}(\alpha - \langle \ell, u \rangle).$$

Segue $\varphi \geq T$ e $Tu_0 \geq a_0$.

Se $u_0^* = -\frac{1}{\lambda} \ell$, temos

$$\varphi(u) \geq Tu = \langle u_0^*, u \rangle + \frac{\alpha}{\lambda} \quad \forall u \in E$$

Como $\varphi^*(u_0^*) = \sup_{u \in E} \langle u_0^*, u \rangle - \varphi(u)$, segue

$$-\frac{r}{\lambda} \geq \varphi^*(u_0^*) .$$

Por outro lado, como $Tu_0 > a_0$, temos

$$\langle u_0^*, u_0 \rangle - \varphi^*(u_0^*) \geq \langle u_0^*, u_0 \rangle + \frac{r}{\lambda} = Tu_0 > a_0 ,$$

como queríamos.

(ii) $\varphi(u_0) = \infty$

O mesmo raciocínio é válido se pudermos encontrar L como em (i) e tal que $\lambda > 0$.

Suponhamos que $\lambda = 0$. Podemos então perturbar ligeiramente nosso L de modo a obter algo como em (i). Para isso, sejam $L_1 \in (\text{ExR})^*$ e $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tais que $L_1(u, a) > \alpha_1 \quad \forall (u, a) \in \text{epi } \varphi$. Suponhamos, ainda, que $L_1(u, a) = \langle l_1, u \rangle + \lambda_1 a \quad \forall (u, a) \in \text{ExR}$ e que $\lambda_1 > 0$ (isto é sempre possível porque existe $u_1 \in E$ tal que $\varphi(u_1) < \infty$).

Seja agora, dado $\epsilon \in \mathbb{R}$,

$$L_\epsilon = L + \epsilon L_1$$

Podemos supor que

$$L(u, a) > +\delta \quad \forall (u, a) \in \text{epi } \varphi$$

$$\text{e } L(u_0, a_0) < \alpha - \delta ,$$

para um certo $\delta > 0$. Temos então, se $\epsilon > 0$

$$L_\epsilon(u, a) > +\delta + \epsilon \alpha_1 \quad \forall (u, a) \in \text{epi } \varphi$$

$$\text{e } L_\epsilon(u_0, a_0) < -\delta + \epsilon L_1(u_0, a_0) .$$

Se ϵ é suficientemente pequeno, teremos

$$L_{\varepsilon}(u, a) > \alpha \quad \forall (u, a) \in \text{epi } \varphi$$

$$\text{e } L_{\varepsilon}(u_0, a_0) < \alpha$$

$$\text{com } L_{\varepsilon}(u, a) = \langle \lambda + \varepsilon \lambda_1, u \rangle + \varepsilon \lambda_1 a, \quad \varepsilon \lambda_1 > 0.$$

Tudo, então, se passa como em (i) ■

Assim, se deixamos de lado as funções $+\infty$ e $-\infty$, temos que φ é convexa sci se e só se φ é envoltória superior de $\tilde{\mathcal{F}}$. De maneira geral, dada uma $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ (convexa ou não), notamos por

$$\varphi^{**}: E \rightarrow [-\infty, \infty]$$

$$u \rightarrow \varphi^{**}(u) = \sup_{u^* \in E^*} \langle u^*, u \rangle - \varphi^*(u^*).$$

a envoltória superior de $\tilde{\mathcal{F}}_{\varphi}$. Por motivos óbvios φ^{**} é chamada BIPOLAR de φ .

7.15 - EXERCÍCIO: Qual a diferença entre φ^{**} e $(\varphi^*)^*$?

Resposta: $\varphi^{**} = (\varphi^*)^* \circ J$, onde J é a injeção canônica de E em E^{**} . Abusando da notação: $\varphi^{**} = (\varphi^*)^*|_E$

Assim, a polaridade estabelece uma bijeção entre as funções convexas sci de E e de E^* . φ e φ^* são, neste caso, ditas DUAIS ou CONJUGADAS.

7.16 - COROLÁRIO: Se φ é convexa sci, então

$$u^* \in \partial \varphi(u) \Leftrightarrow u \in \partial \varphi^*(u^*).$$

Demonstração: Estamos, evidentemente, identificando u e $J(u)$, onde J é a injeção canônica de E em E^{**} . (\Rightarrow) já foi mostrada em 7.8, 7.9. Suponhamos agora que $u \in \partial \varphi^*(u^*)$. Então, por 7.8, 7.9, $u^* \in \partial (\varphi^*)^*(u)$. Por 7.14 e 7.15, temos $u^* \in \partial \varphi(u)$ ■

7.17 - EXERCÍCIO: Seja $\varphi: E \rightarrow [-\infty, \infty]$. Mostre que $\text{epi } \varphi^{**}$ é a envoltória convexa fechada de $\text{epi } \varphi$.

7.18 - EXERCÍCIO: Seja $\varphi: E \rightarrow [-\infty, \infty]$. Mostre que

$$\inf \varphi = \inf \varphi^{**} .$$

Mostre que se \bar{u} é tal que $\varphi(\bar{u}) = \inf \varphi$, então $\varphi^{**}(\bar{u}) = \varphi(\bar{u})$ (interprete geometricamente). Mostre, com $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que φ^{**} pode ter mais pontos de mínimo do que φ .

7.19 - EXERCÍCIO: Mostre que $(\varphi^{**})^* = \varphi^*$. Compare com 7.12.

7.20 - EXERCÍCIO: Observe que uma função perfeitamente normal, como $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$, pode ter uma polar bastante patológica. Dê outros exemplos.

7.20 - EXEMPLO: Vamos dar uma estimativa para a ordem de crescimento de φ^* , em termos da ordem de crescimento de φ .

Para termos uma idéia da coisa, vamos olhar para a função

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto |x|^a \quad a > 1$$

Para $x^* \in \mathbb{R}$, $\varphi^*(x^*)$ é o valor máximo de

$$x \mapsto x^*x - |x|^a$$

que se obtém por derivação:

$$x^* = a|x|^{a-2}x, \quad \varphi^*(x^*) = (a-1)|x|^a,$$

o que nos dá, como

$$|x^*|^{\frac{a}{a-1}} = a^{\frac{a}{a-1}} |x|^a,$$

$$\varphi^*(x^*) = a^{\frac{a}{1-a}} (a-1) |x^*|^{\frac{a}{a-1}}.$$

Definindo b por $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, temos

$$\varphi^*(x^*) = \frac{a^{1-b}}{b} |x^*|^b,$$

o que mostra que o crescimento de φ^* é de ordem b .

Vamos agora examinar o comportamento de φ^* , quando $\varphi: E \rightarrow]-\infty, \infty]$ tem crescimento de ordem a . Antes de mais nada, fixemos $M > 0$ tal que

$$M^a - 2M > 0.$$

Seja $x^* \in E^*$. Vamos estimar $\varphi^*(x^*)$. Começemos observando que podemos tomar $x_0 \in E$ tal que

$$|x_0| = 1, \quad \langle x^*, x_0 \rangle \geq \frac{|x^*|}{2}$$

Seja então

$$x = \frac{|x^*|^{b-1}}{M} x_0$$

Temos

$$\langle x^*, x \rangle - |x|^a \geq \frac{|x^*|^b}{2M} - \frac{|x^*|^{a(b-1)}}{M^a} = \frac{M^a - 2M}{2M^{a+1}} |x^*|^b,$$

o que mostra que existe $M_1 > 0$ tal que

$$\langle x^*, x \rangle - |x|^a \geq M_1 |x^*|^b,$$

sempre que $x = \frac{|x^*|^{b-1}}{M} x_0$, com $|x_0| = 1$, $\langle x^*, x_0 \rangle \geq \frac{|x^*|}{2}$.

Além disso, vale, para todo $x \in E$,

$$\langle x^*, x \rangle - |x|^a \leq |x^*| |x| - |x|^a \leq \frac{a^{1-b}}{b} |x^*|^b = M_2 |x^*|^b$$

Suponhamos agora que φ é tal que, $\forall x \in E$,

$$A_2 + B_2 |x|^a \geq \varphi(x) \geq A_1 + B_1 |x|^a, \quad B_1, B_2 > 0.$$

Então (ver 7.7)

$$-A_1 + M_1 B_1^{-\frac{b}{a}} |x^*|^b \geq \varphi^*(x^*) \geq -A_2 + M_2 B_2^{-\frac{b}{a}} |x^*|^b$$

Mais ainda. Suponhamos que φ é tal que
 $\varphi(x) \leq A + B|x|^a$, $B > 0$ $\forall x$ com $|x| > R$.

Então, se x^* é tal que $\frac{|x^*|^{b-1}}{B^{b-1}M} > R$, podemos garantir que

$$\varphi^*(x^*) \geq B \langle \frac{x^*}{B}, x \rangle - \varphi(x) \geq -A + B \langle \frac{x^*}{B}, x \rangle - B|x|^a,$$

onde $x = \frac{|x^*|^{b-1}}{B^{b-1}M} x_0$, com $|x_0| = 1$ e $\langle \frac{x^*}{B}, x_0 \rangle \geq \frac{|x^*|}{2}$. Segue

$$\varphi^*(x^*) \geq -A + B M_1 \left| \frac{x^*}{B} \right|^b = -A + M_1 B^{-\frac{b}{a}} |x^*|^b.$$

Portanto, existem $R_1 > 0$, $B_1 > 0$ tais que

$$\varphi^*(x^*) \geq -A + B_1 |x^*|^b \quad \forall x^* \text{ com } |x| > R$$

Suponhamos agora que φ é tal que $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(x) \geq B|x|^a$,
 $B > 0$ $\forall x$ com $|x| \leq \epsilon$.

Vamos mostrar que, neste caso $\exists \epsilon_1 > 0$, $B_1 > 0$ tais que
 $\varphi^*(x^*) \leq B_1 |x^*|^b$ $\forall x^*$ com $|x^*| \leq \epsilon_1$.

Primeiramente, notemos que, como $\varphi(0) = 0$, vale
 $\varphi(tx) \geq t \varphi(x)$ $\forall t > 1$, $x \in E$.

Seja então $x^* \in E^*$. Temos, se $|x| \geq$,

$$\langle x^*, x \rangle - \varphi(x) = \frac{|x|}{\epsilon} \langle x^*, \epsilon \frac{x}{|x|} \rangle - \frac{|x|}{\epsilon} \varphi\left(\epsilon \frac{x}{|x|}\right) \leq \frac{|x|}{\epsilon} (\epsilon |x^*| - B \epsilon^a).$$

Se supusermos que $|x^*| < B \epsilon^{a-1}$, teremos

$$\langle x^*, x \rangle - \varphi(x) < 0 \quad \forall x \text{ tal que } |x| \geq 0.$$

Mas então

$$\varphi^*(x^*) = \sup_{|x| \leq \epsilon} \langle x^*, x \rangle - \varphi(x) \leq \sup_{|x| \leq \epsilon} |x^*| |x| - B|x|^a .$$

Calculando o maior valor de $s \mapsto |x^*|s - Bs^a$, obtemos

$$\varphi^*(x^*) \leq B_1 |x^*|^b , \text{ para um certo } B_1 > 0 .$$

8. PROBLEMA DUAL (CONTINUAÇÃO)

Voltemos à questão do final do parágrafo 6, só que com $\partial\varphi$ no lugar de φ' . Queremos resolver a equação

$$\partial\varphi(u, 0) \ni (0, p^*)$$

Lembramos que se (\bar{u}, \bar{p}^*) é solução, então

$$\varphi(u, 0) - \varphi(\bar{u}, 0) \geq \langle 0, u - \bar{u} \rangle + \langle p^*, 0 - 0 \rangle = 0 \quad \forall u \in E,$$

e \bar{u} será solução do problema primal

$$(P) \inf J(u) = \inf \varphi(u, 0) .$$

Procuraremos agora caracterizar \bar{p}^* . A pista é a seguinte: se φ é convexa sci, então $\varphi = \varphi^{**}$. Temos, então, por 7.16,

$$(\bar{u}, 0) \in \partial\varphi^*(0, \bar{p}^*) .$$

Isto significa que, para todo p^* em E^* , vale

$$\varphi^*(0, p^*) - \varphi^*(0, \bar{p}^*) \geq \langle 0 - 0, \bar{u} \rangle + \langle p^* - \bar{p}^*, 0 \rangle = 0 .$$

Assim, \bar{p}^* é solução de

$$(P^*) \inf \varphi^*(0, p^*) ,$$

que será chamado, como no parágrafo 6, PROBLEMA DUAL. Na realidade trabalharemos com

$$(P^*) \sup -\varphi^*(0, p^*)$$

Nossa motivação inicial nos levou a pensar (P^*) como um problema cuja solução é um multiplicador de Lagrange que aparece de

maneira bem precisa. Tínhamos

$$J(u) = F(x, u(x), Du(x)) ,$$

e passamos a

$$\varphi(u, p) = F(x, u(x), (Du-p)(x)) ,$$

com o vínculo $p=0$.

Mas nada nos impede de pensar de maneira mais geral. Dado o problema

$$(P) \inf J(u) ,$$

com $J:U \rightarrow]-\infty, \infty]$, podemos introduzir uma PERTURBAÇÃO $\varphi:U \times V \rightarrow]-\infty, \infty]$ de J (onde V é um EVN qualquer). A única exigência é que

$$\varphi(u, 0) = J(u) \quad \forall u \in U .$$

Por essa razão os problemas

$$(P_p) \inf_u \varphi(u, p) ,$$

com $p \in V$, são chamados PROBLEMAS PERTURBADOS.

8.1 - DEFINIÇÃO: Seja $\varphi:U \times V \rightarrow]-\infty, \infty]$ e seja

$$(P) \inf_{u \in U} \varphi(u, 0)$$

o problema primal. O problema

$$(P^*) \sup_{p^* \in V^*} -\varphi^*(0, p^*)$$

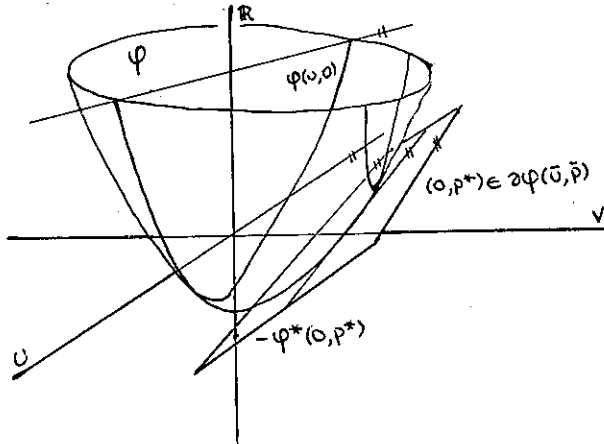
é chamado problema dual de (P).

A razão da inversão acima é técnica: φ^* foi definida de maneira a ser convexa, mas as relações interessantes vão envolver φ e $-\varphi^*$.

8.2 - PROPOSIÇÃO: Seja $\varphi:U \times V \rightarrow]-\infty, \infty]$. Então

$$\sup_{p^* \in V^*} -\varphi^*(0, p^*) \leq \inf_{u \in U} \varphi(u, 0).$$

Demonstração:



Raciocine em \mathbb{R}^3 , com uma figura. O gráfico de $\varphi(\cdot, 0)$ é a interseção do gráfico de φ com $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$. Supondo φ diferenciável, podemos obter $\varphi^*(0, p^*)$ como segue:

(i) Encontra-se um ponto (\bar{u}, \bar{p}) tal que $\nabla \varphi(\bar{u}, \bar{p}) = (0, p^*)$, isto

$$\text{é, } \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}, \bar{p}) = 0 \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial p}(\bar{u}, \bar{p}) = p^*$$

(ii) Considera-se o plano tangente ao gráfico de φ em (\bar{u}, \bar{p}) .

(iii) Este plano corta $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ segundo a reta horizontal $\{(u, p, r) \mid p=0 \text{ e } r = -\varphi^*(0, p^*)\}$. Esta reta está, evidentemente, abaixo do gráfico de $\varphi(\cdot, 0)$, o que nos dá $-\varphi^*(0, p^*) \leq \varphi(u, 0)$.

Analiticamente:

Seja $p^* \in V^*$. Da definição de φ^* , temos

$$-\varphi^*(0, p^*) \leq \varphi(u, p) - \langle p^*, p \rangle \quad \forall (u, p) \in U \times V.$$

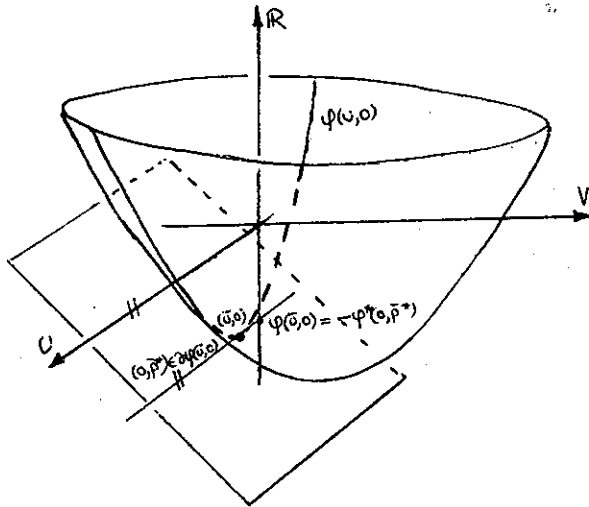
Em particular, se $p=0$,

$$-\varphi^*(0, p^*) \leq \varphi(u, 0) \quad \forall u \in U \quad \blacksquare$$

Voltando a raciocinar no caso $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, é de se esperar que valha a chamada relação de extremalidade:

$$\sup -\varphi^*(0, p) = \inf \varphi(u, 0) .$$

De fato, se $\varphi(\bar{u}, 0) = \inf \varphi(u, 0)$, teremos $\nabla \varphi(\bar{u}, 0) = (0, \bar{p}^*)$, para um certo $\bar{p}^* \in \mathbb{R}$, já que $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}, 0) = 0$. Como $-\varphi^*(0, \bar{p}^*)$ é obtido interceptando o plano tangente ao gráfico de φ em $(\bar{u}, 0)$ com o eixo vertical, temos $-\varphi^*(0, \bar{p}^*) = \varphi(\bar{u}, 0)$, o que "demonstra" a igualdade (veja a figura).



Para $\varphi: U \times V \rightarrow]-\infty, \infty]$ qualquer (isto é, φ convexa e sci) a coisa complica um pouco. Suponhamos que o problema (P) tenha so lução. Isto é: existe $\bar{u} \in U$ tal que

$$\varphi(\bar{u}, 0) \leq \varphi(u, 0) \quad \forall u \in U .$$

Isto significa que

$$0 \in \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}, 0) \text{ (no sentido da subdiferenciação).}$$

O que nos falta, neste caso, é alguma hipótese que garanta a existência de $\bar{p}^* \in V^*$ tal que

$$(0, \bar{p}^*) \in \partial \varphi(\bar{u}, 0).$$

Geometricamente, a questão é estender o espaço afim $\{(u, v, t) \in U \times V \times \mathbb{R}, v=0, t=\varphi(u)\}$ a um hiperplano não vertical.

8.3 - PROPOSIÇÃO: Seja $\varphi: U \times V \rightarrow]-\infty, \infty]$ convexa.

Se \bar{u} é solução do problema primal (P) e φ é contínua em $(\bar{u}, 0)$, então o problema dual (P*) tem solução $\bar{p}^* \in V^*$. Neste caso vale a relação de extremalidade

$$\varphi(\bar{u}, 0) = -\varphi^*(0, \bar{p}^*).$$

Demonstração: Como φ é contínua em $(\bar{u}, 0)$, podemos tomar $r \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ tais que a bola de centro $(\bar{u}, 0, r)$ e raio ϵ está contida no interior de $\text{epi } \varphi$. Como o espaço afim $E = \{(u, 0, \varphi(\bar{u}, 0)), u \in U\}$ é tal que $E \cap \widehat{\text{epi } \varphi} = \emptyset$, existe um hiperplano H de $U \times V \times \mathbb{R}$ tal que $E \subset H$ e $H \cap \widehat{\text{epi } \varphi} = \emptyset$ (ver A.4.8).

Como $(\bar{u}, 0, r) \in \widehat{\text{epi } \varphi}$, podemos garantir que H é gráfico de uma transformação afim $T: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos então tomar $\bar{p}^* \in V^*$ tal que

$$(u, v) \xrightarrow{T} \langle u, v \rangle - \langle (\bar{u}, 0), (0, \bar{p}^*) \rangle + \varphi(\bar{u}, 0)$$

Mas isto significa simplesmente que

$$(0, \bar{p}^*) \in \partial \varphi(\bar{u}, 0).$$

De 7.16 segue

$$(\bar{u}, 0) \in \partial \varphi^*(0, \bar{p}^*),$$

e o resultado está demonstrado. ■

Não é um mau resultado, segue estritamente o raciocínio intuitivo feito para $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , mas é um tanto ingênuo. De fato, não podemos nos contentar com a hipótese de continuidade de φ em $(\bar{u}, 0)$. Vamos enfraquecê-la.

8.4 - LEMA: Seja $\varphi: U \times V \rightarrow]-\infty, \infty]$ convexa e suponhamos que:

- (i) $\inf \varphi(u, 0) = a > -\infty$
- (ii) $\exists u_0 \in U$ t.q. $p \mapsto \varphi(u_0, p)$ é contínua em $p=0$.

Então existe $\bar{p}^* \in V^*$ tal que

$$\varphi(u, p) \geq a + \langle \bar{p}^*, p \rangle \quad \forall (u, p) \in U \times V .$$

Demonstração: A idéia é projetar $\text{epi} \varphi$ sobre $V \times \mathbb{R}$.

Seja $\pi: U \times V \times \mathbb{R} \rightarrow V \times \mathbb{R}$ e seja

$$(u, p, t) \mapsto (p, t)$$

$$K = \pi(\text{epi} \varphi) .$$

K é convexo e $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, pois, sendo

$$p \mapsto \varphi(u_0, p)$$

contínua em 0 e tomando $b > \varphi(u_0, 0)$, temos $(0, b) \in \overset{\circ}{K}$. Além disso, como

$$a \leq \varphi(u, 0) \quad \forall u \in U ,$$

concluimos que $(0, a) \notin \overset{\circ}{K}$.

Podemos então encontrar um hiperplano H de $V \times \mathbb{R}$ tal que $(0, a) \in H$ e $H \cap \overset{\circ}{K} = \emptyset$ (ver A.4.8). Como $(0, b) \in \overset{\circ}{K}$, H é gráfico de uma transformação afim:

$$p \mapsto a + \langle \bar{p}^*, p \rangle .$$

tal que $(p, t) \in K \Rightarrow t \geq a + \langle \bar{p}^*, p \rangle$.

A conclusão segue imediatamente. ■

8.5 - TEOREMA: Seja $\varphi: U \times V \rightarrow]-\infty, \infty]$ convexa sci e suponhamos que

- (i) $\inf \varphi(u, 0) = a > -\infty$
- (ii) $\exists u_0 \in U$ t.q. $p \rightarrow \varphi(u_0, p)$ é contínua em 0.

Então existe $\bar{p}^* \in V^*$ tal que

$$-\varphi^*(0, \bar{p}^*) = \inf \varphi(u, 0).$$

Demonstração: Por 8.4, existe $\bar{p}^* \in V^*$ tal que

$$\varphi(u, p) \geq a + \langle \bar{p}^*, p \rangle \quad \forall (u, p) \in U \times V.$$

Temos, por definição,

$$\varphi^*(0, \bar{p}^*) = \sup_{(u, p) \in U \times V} \langle \bar{p}^*, p \rangle - \varphi(u, p),$$

ou

$$-\varphi^*(0, \bar{p}^*) = \inf_{(u, p) \in U \times V} \varphi(u, p) - \langle \bar{p}^*, p \rangle.$$

Basta então mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $(u, p) \in U \times V$

tal que

$$\varphi(u, p) - \langle \bar{p}^*, p \rangle < a + \varepsilon.$$

Mas isto é fácil: basta fazer $p=0$ e tomar u tal que $\varphi(u, 0) < a + \varepsilon$. ■

8.6 - COROLÁRIO: Se U, V são reflexivos, $\varphi: U \times V$ é convexa sci e

- (i) $p^* \rightarrow \varphi^*(0, p^*)$ é coerciva,
- (ii) $\inf \varphi^*(0, p^*) > -\infty$,
- (iii) $\exists p_0 \in U$ t.q. $u \rightarrow \varphi(u, p_0)$ é contínua em 0, então os problemas (P) e (P*) admitem soluções \bar{u} e \bar{p}^* , respectivamente, e

$$\varphi(\bar{u}, 0) = -\varphi^*(0, \bar{p}^*) .$$

Demonstração: A condição (i) garante a existência de \bar{p}^* . Basta então aplicar 8.5 a φ^* , observando que $(\varphi^*)^* = \varphi^{**} = \varphi$. ■

8.7 - OBSERVAÇÃO: Em verdade, as duas condições seguintes são equivalentes:

- (i) $\varphi(\bar{u}, 0) = -\varphi^*(0, \bar{p}^*)$
- (ii) $(0, \bar{p}^*) \in \partial\varphi(\bar{u}, 0)$.

De fato, se $\varphi^*(0, \bar{p}^*) = -\varphi(\bar{u}, 0)$, temos

$-\varphi(\bar{u}, 0) \geq \langle p^*, p \rangle - \varphi(u, p) \quad \forall (u, p) \in U \times V$, o que equivale a $(0, \bar{p}^*) \in \partial\varphi(\bar{u}, 0)$. Em ambos os casos temos \bar{u} solução de (P) e \bar{p}^* solução de (P*).

8.8 - COMENTÁRIOS

- (i) Podemos perturbar o problema inicial $\inf_u J(u)$ de várias maneiras e obter assim mais de uma dualização. (ver [10],[17]).
- (ii) Como vimos, soluções u do problema primal $\inf_{p=0} \varphi(u, p)$ se transformam em pontos críticos $(u, 0, p^*)$ de $L(u, p, p^*) = \varphi(u, p) - \langle p^*, p \rangle$ onde p^* é um multiplicador de Lagrange. Neste caso é possível caracterizar estes pontos críticos como pontos de sela.

De fato, $\sup_{p^*} \varphi(u, p) - \langle p^*, p \rangle = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \neq 0 \\ \varphi(u, 0) & \text{se } p = 0 \end{cases}$ e portanto

$$\inf_u \varphi(u, 0) = \inf_u \sup_{p^*} \varphi(u, p) - \langle p^*, p \rangle$$

Por outro lado, $\sup_{p^*} -\varphi^*(0, p^*) = \sup_{p^*} \{-\sup_{u, p} \langle p, p^* \rangle - \varphi(u, p)\} =$

$$= \sup_{p^*} \inf_{u,p} \varphi(u,p) - \langle p^*, p \rangle$$

Assim, as hipóteses do teorema 8.5 nos dão uma condição suficiente para que possamos permutar $\inf \sup L(u,p,p^*)$ por $\sup \inf L(u,p,p^*)$. Na Pesquisa Operacional clássica (ver [10], [32]) hipóteses que possibilitem realizar tal permutação são ditas hipóteses de qualificação.

- (iii) Uma abordagem equivalente para a dualização de problemas convexos pode ser obtida através do teorema de Ky Fan-Sion. O leitor interessado poderá consultar [10],[19].
- (iv) Pode ocorrer que o problema dual tenha solução sem que o mesmo ocorra para o problema primal. Isto nos permite generalizar a noção de solução para certos problemas. (ver [19], capítulo V).
- (v) Às vezes o problema dual é mais fácil de se resolver que o primal e esta é evidentemente uma das vantagens da dualização. No Capítulo I, Seção 5, demos alguns exemplos onde isto acontece.

Formulações duais sempre acompanharam o desenvolvimento de várias áreas da física e de engenharia (mecânica, termodinâmica, eletromagnetismo, etc.). Em geral, as relações entre os problemas primais e duais ajudam-nos a compreender a natureza dos fenômenos em questão. Veja, por exemplo, [17],[19],[24],[26],[38], e a bibliografia destes trabalhos.

Também nos problemas de otimização muitas vezes a dualização

de problemas nos conduzem a formulações mais fáceis de serem tratadas numericamente (ver [10]).

9. EXEMPLOS

9.1 - Vamos inicialmente fornecer um quadro abstrato adequado ao tratamento de vários problemas.

Sejam E, V dois espaços de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, V)$. Considere mos o problema $\inf_{u \in E} \varphi(u)$, onde $\varphi(u) = \varphi_1(Au) + \varphi_2(u)$ com $\varphi_1: V \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi_2: E \rightarrow \mathbb{R}$ convexas, sci. Seja ainda

$\varphi: ExV \rightarrow \mathbb{R}$ a perturbação de $\varphi(u)$ dada por

$$\varphi(u, p) = \varphi_1(Au + p) + \varphi_2(u). \text{ Então,}$$

$$\varphi^*(0, p^*) = \sup_{u, p} \langle p^*, p \rangle - \varphi_1(Au + p) - \varphi_2(u) = \sup_u -\varphi_2(u) + \sup_p \langle p^*, p \rangle - \varphi_1(Au + p)$$

$$= \sup_u \langle -A^*p^*, u \rangle - \varphi_2(u) + \sup_q \langle p^*, q \rangle - \varphi_1(q) = \varphi_2^*(-A^*p^*) + \varphi_1^*(p^*)$$

e o problema dual de escreve $\sup_{p^*} -\varphi_2^*(-A^*p^*) - \varphi_1^*(p^*)$

Temos ainda a relação de extremalidade

$$\varphi_1(Au) + \varphi_2(u) + \varphi_2^*(-A^*p^*) + \varphi_1^*(p^*) = 0.$$

Mas, $\varphi_1(Au) + \varphi_1^*(p^*) \geq \langle Au, p^* \rangle$

$$\varphi_2(u) + \varphi_2^*(-A^*p^*) \geq \langle u, -A^*p^* \rangle$$

e assim podemos concluir que a relação de extremalidade é equiva-

lente a

$$\begin{cases} \varphi_1(A_u) + \varphi_1^*(p^*) = \langle Au, p^* \rangle \\ \varphi_2(u) + \varphi_2^*(-A^*p^*) = \langle u, -A^*p^* \rangle \end{cases}$$

9.2 - PROBLEMA DO OBSTÁCULO - Consideremos o problema do obstácu-

lo $\min_{u \in K} \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \langle f, u \rangle$ dado em 5.1. Tomemos

$E = H_0^1(\Omega)$, $V = L^2(\Omega)$, $Au = \nabla u$, $\varphi_1(p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |p|^2$ e $\varphi_2(u) = \langle f, u \rangle + i_K(u)$. Temos que $\varphi_1^*(p^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |p^*|^2$, $A^*p^* = -\nabla \cdot p^*$. Para calcularmos $\varphi_2^*(u^*)$ vamos definir $K_0 = \{v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0 \text{ q.t.p. sobre } \Omega\}$ e

$E_*^* = \{z \in H^{-1}(\Omega), \langle z, v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K\}$. Então $K = \{g\} + K_0$ e

$$\varphi_2^*(u^*) = i_K^*(u^*-f) = \begin{cases} \langle u^*-f, g \rangle & \text{se } u^*-f \in E_*^* \\ +\infty & \text{se } u^*-f \notin E_*^* \end{cases}$$

O problema dual se escreve $\sup_{\nabla \cdot p^* - f \in E_*^*} -\langle \nabla \cdot p^* - f, g \rangle - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |p^*|^2$.

Podemos determinar a existência de uma (única) solução tanto diretamente quanto aplicando o teorema 8.5.

As relações de extremalidade nos dão, respectivamente, $p^* = \nabla u$ e $u \in K$, $\nabla \cdot p^* - f \in E_*^*$, $\langle f, u \rangle + \langle \nabla \cdot p^* - f, g \rangle = \langle u, \nabla \cdot p^* \rangle$.

$$\text{Portanto, } \begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v-g) + \langle f, v-g \rangle \geq 0 & \forall v \in K \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (u-g) + \langle f, u-g \rangle = 0 & \blacksquare \end{cases}$$

Também no problema de Dirichlet podemos usar 9.1 para obter a formulação dual e as relações de extremalidade dadas no exercício I.5.9. Outros exemplos de aplicação de 9.1 são:

9.3 - EXERCÍCIO - PROBLEMA DE NEUMANN - Usando a notação de 3.19,

considere $E = H^1(\Omega)$, $V = (L^2(\Omega))^{n+1}$, $Au = (a^{1/2}u, \nabla u)$, $\varphi_1(p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |p|^2$

e $\varphi_2(u) = \langle \tilde{f}, u \rangle = - \int_{\Omega} fu - \langle g, u \rangle_{\Gamma}$. Mostre diretamente ou usando o

teorema 8.5 que o problema dual possui uma única solução

$p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_{n+1}^*)$ e que as relações de extremalidade implicam

$$p_1^* = a^{1/2} u, (p_2^*, \dots, p_{n+1}^*) = \nabla u .$$

9.4 - EXERCÍCIO - PROBLEMA DE STOKES

(i) Com a notação dada por 3.23 seja

$$E = \{u \in (H_0^1(\Omega))^n, \nabla \cdot u = 0\}, V = (L^2(\Omega))^{n^2},$$

$Au = \nabla u, \varphi_1(p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |p|^2, \varphi_2(u) = -\langle f, u \rangle$. Admita o seguinte resultado (que é equivalente ao fato de que $Bu = \nabla \cdot u$ tem imagem fechada): dado $z \in (H^{-1}(\Omega))^n$ tal que $\langle z, u \rangle = 0 \forall u \in E$ então existe um único $p \in L_0^2(\Omega)$, satisfazendo $z = \nabla p$.

Mostre que o problema dual admite uma única solução p^* e que $p^* = \nabla u$.

(ii) Considere $E = (H_0^1(\Omega))^n, V = L^2(\Omega), Au = \nabla \cdot u,$

$$\varphi_1(p) = i_{\{0\}} = \begin{cases} 0 & \text{se } p=0 \\ +\infty & \text{se } p \neq 0 \end{cases},$$

$$\varphi_2(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \langle f, u \rangle. \text{ Mostre que desta maneira obtemos uma}$$

dualização distinta da anterior, mas que aqui não podemos usar 8.5. Tente mostrar diretamente que o problema dual tem solução (única a menos de constante).

9.5 - DUALIZAÇÃO NÃO-CONVEXA - As técnicas desenvolvidas até aqui podem ser úteis no caso de funcionais J não convexos. Então, resolver a equação $0 \in \partial J(u)$ nem sempre significa determinar pontos de mínimo de J .

Vamos considerar $J: E \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \varphi(u)$, onde φ é convexo, sci e $A \in E^*$ é autoadjunto, $A^* = A$, mas não necessariamente positivo definido.

Temos o seguinte resultado [18].

9.6 - PROPOSIÇÃO - Se $0 \in \partial J(u)$ então $0 \in \partial I(u)$, onde $I(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \varphi^*(-Au)$. Reciprocamente, se existe $w \in E$ tal que φ^* é contínuo em w então $0 \in \partial I(u)$ implica $0 \in \partial J(u+v)$, para algum $v \in N(A)$.

Demonstração - $0 \in \partial J(u)$ se e só se $-Au \in \partial \varphi(u)$, o que equivale a dizer $u \in \partial \varphi^*(-Au)$. Logo, $-Au \in -A \partial \varphi^*(-Au) \subset \partial(\varphi^* \circ -A)(u)$. Assim, $0 \in Au + \partial(\varphi^* \circ -A) = \partial I(u)$.

Se $0 \in \partial I(u)$ então $-Au \in \partial(\varphi^* \circ -A)(u)$ e 4.6(v) implica que $-Au \in -A \partial \varphi^*(-Au)$. Portanto, existe $z \in \partial \varphi^*(-Au)$ tal que $-A(u-z) = 0$, ou seja, $u = z - v$ com $v \in N(A)$. Então,

$$z \in \partial \varphi^*(-Az) \Leftrightarrow -Az \in \partial \varphi(z) \Leftrightarrow 0 \in \partial J(z). \quad \blacksquare$$

A proposição 9.6 foi utilizada pela primeira vez por Clarke-Ekeland [11] na obtenção de soluções periódicas de sistemas hamiltonianos não lineares. Brézis-Nirenberg [9], Brézis-Coron-Nirenberg [8] aplicaram-na no estudo de soluções periódicas da equação da onda não-linear.

Vamos dar aqui uma idéia do trabalho desenvolvido em [11], considerando o problema (ver I.5.2).

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) \\ \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, p) \end{cases}$$

com
$$\begin{cases} x(0) = x(T) \\ p(0) = p(T) \end{cases}$$

onde $T > 0$, $x(t), p(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$.

Introduzimos o vetor $z = (x, p)$ e B a matriz

$2n \times 2n \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. B é uma matriz antisimétrica e podemos escrever de forma simplificada
$$\begin{cases} B\dot{z} = H'(z) \\ z(0) = z(T) \end{cases}$$

Se H é convexa, uma generalização do problema é dada por

(H)
$$\begin{cases} B\dot{z} \in \partial H(z) \\ z(0) = z(T) \end{cases}$$

Podemos então demonstrar o

9.7 - TEOREMA - Seja H convexo tal que

- (i) $H(z) \geq 0$, $H(0) = 0$
- (ii) $H(z) \leq C_1 |z|^a + c$ onde $a \leq 2$
- (iii) $H(z) \geq C_2 |z|^a$ se $|z| \leq \epsilon$.

Então (H) tem uma solução não-trivial ($z \neq 0$).

Vamos inicialmente discutir as idéias envolvidas na demonstração de 9.7. Uma solução de (H) é ponto crítico de

$$J(z) = \frac{1}{2} \int_0^T Az \cdot z + \int_0^T H(z), \text{ onde } Az = B\dot{z} \text{ é autoadjunto. } 0$$

leitor deve meditar e convencer-se que J não pode ser minimizado, independe do crescimento que impusermos a H . Isto porque não podemos controlar \dot{z} através de z . No entanto, podemos transformar o problema na procura de pontos críticos de

$I(z) = \frac{1}{2} \int_0^T Az \cdot z + \int_0^T H^*(-Az)$. Agora, trata-se de estimar z em

função de \dot{z} e, se H^* crescer mais rapidamente que a parte quadrática deveremos poder minimizar I . Como o crescimento de H^* é dual ao crescimento de H (ver 7.20) é de se esperar que com H sub-quadrático o raciocínio acima funcione.

Para evitar os argumentos técnicos e ressaltar as idéias envolvidas, vamos demonstrar 9.7 no caso em que $H(z) = \frac{|z|^a}{a}$.

Então $H^*(z^*) = \frac{|z^*|^b}{b}$ onde $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

No que segue, $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ denotam as normas de $L^a(0,T)$ e $L^b(0,T)$.

Primeiro mostremos o

9.8 - LEMA - (i) Seja $\{z_n\} \subset W_0^{1,b}(0,T)$ com $\|\dot{z}_n\|_b \leq C$. Então existe uma subsequência $z_{n_k} \rightarrow z$ uniformemente.

(ii) Se $z \in W_0^{1,b}(0,T)$ então $z \in L^a(0,T)$ e $\|z\|_a \leq C \|\dot{z}\|_b$.

Demonstração - O lema é uma consequência direta do teorema de imersão de Sobolev 0.4.15. No entanto, para a comodidade do leitor, faremos sua demonstração.

$$\text{Se } z \in C^1[0,T], z(0) = 0 \text{ então } z(t) = \int_0^t \dot{z}(s) ds \text{ e}$$

$|z(t)| \leq C \|\dot{z}\|_b$ para todo $t \in [0,T]$. Segue (ii) imediatamente. Da mesma forma, $|z(t) - z(t')| \leq |t - t'|^{1/a} \|\dot{z}\|_b$. Se $z \in W_0^{1,b}(0,T)$ podemos estender estes resultados por continuidade. Portanto, se $\|\dot{z}_n\|_b \leq C$, $\{z_n\}$ é equicontínua e equilimitada em $C^0[0,T]$ e (i) resulta do teorema de Arzelà-Ascoli. ■

9.9 - PROPOSIÇÃO - O teorema 9.7 vale se $H(z) = \left| \frac{z}{a} \right|^a$, $a < 2$.

Demonstração - Seja $E = W_p^{1,b}(0,T) = \{z \in W_p^{1,b}(0,T), z(0) = z(T)\}$. O

leitor deve verificar que, se $\varphi(z) = \int_0^T \left| \frac{z}{a} \right|^a dt$ então

$\varphi^*(z^*) = \int_0^T \left| \frac{z}{b} \right|^b dt$. É evidente que 9.7 se aplica nesse caso e

basta mostrar que $I(z) = \frac{1}{2} \int_0^T Az \cdot z + \int_0^T \left| \frac{Az}{b} \right|^b$ possui um mínimo não

trivial.

Em primeiro lugar, verifiquemos a coercividade de I . É claro que I não é coerciva sobre E , pois $I(z) = 0 \forall z \in N(A) = \mathbb{R}^{2n}$.

Somos levados então a considerar $E_0 = W_0^{1,b}(0,T)$. Nesse caso,

$\|Az\|_b = \|\dot{z}\|_b$ é uma norma equivalente à usual (ver 0.4.6). Então, pelo Lema 9.8

$$I(z) \geq \frac{1}{b} \|\dot{z}\|_b^b - C \|z\|_a \|z\|_a \geq \frac{1}{b} \|\dot{z}\|_b^b - C \|\dot{z}\|_b^2 \xrightarrow{\|z\| \rightarrow +\infty} +\infty$$

Para mostrarmos que $I(z)$ é fracamente sci, basta que

$\frac{1}{2} \int_0^T Az \cdot z$ o seja, já que $\varphi^*(-Az)$ é convexa e contínua. Vamos mostrar que $\frac{1}{2} \int_0^T Az \cdot z$ é fracamente sequencialmente contínua. Se

$z_n \rightharpoonup z$ fraco em E_0 então $\dot{z}_n \rightharpoonup \dot{z}$ fraco em $L^b(0,T)$ e de 0.2.6

temos que $\|\dot{z}_n\| \leq C$. Por 9.8 temos $z_{n_k} \rightarrow z$ forte em $L^a(0,T)$.

Podemos concluir que toda seqüência $z_n \rightarrow z$ forte em $L^a(0,T)$ e, logo, $\frac{1}{2} \int_0^T Az_n \cdot z_n \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^T Az \cdot z$. A existência de um mínimo z_0 decorre de 3.9

z_0 será um mínimo não trivial se $I(z_0) < 0$. Seja então

$z = \cos \frac{2\pi t}{T} e_1 + \sin \frac{2\pi t}{T} e_{n+1}$, onde e_i é o i -ésimo vetor canônico de \mathbb{R}^{2n} . $Az \cdot z = -\frac{2\pi}{T}$ e $I(sz) = -s^2\pi + \frac{|s|}{b} b_T < 0$ para s suficientemente pequeno.

Assim $z_0 \neq 0$ satisfaz $-Az_0 \in -A \partial\varphi^*(-Az_0)$ ou seja $z_0 + k \in \partial\varphi^*(-Az_0)$, onde $k \in \mathbb{R}^{2n}$. Logo, $-Az_0 \in \partial\varphi(z_0 + k)$ e $z = z_0 + k$ é a solução desejada. ■

9.10 - OBSERVAÇÃO - Uma forma equivalente, proposta por Brézis [7], de olharmos a dualização acima é a seguinte.

Seja H um espaço de Hilbert, $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ operador linear autoadjunto, $\overline{D(A)} = H$, $R(A)$ fechado e $\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, sci. Queremos resolver

(1) $Au \in \partial\varphi(u)$

Temos então a seguinte formulação variacional:

(2) Encontrar pontos críticos de $J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \varphi(u)$

Se A não é contínua, em geral teremos dificuldades em resolver (2).

No entanto, $A = A^*$ acarreta por 0.1.15 que A é fechado. Além disso, se $R(A)$ é fechado o teorema do gráfico fechado 0.1.19 nos diz que $H = R(A) \oplus N(A)$ com $A|_{R(A)}: R(A) \rightarrow R(A)$ inversível. Portanto, 0.1.18 implica que $A^{-1}: R(A) \rightarrow R(A)$ é contínuo.

Assim, dado $u \in H$, seja $u = u_1 + u_2$ com $u_2 \in N(A), u_1 \in R(A)$. Se $v = Au \in \partial\varphi(u)$ então $u_2 = A^{-1}v$ e $u \in \partial\varphi^*(v)$. Logo,

(3) $A^{-1}v \in \partial\varphi^*(v) + N(A)$

A formulação variacional de (3) é dada por

$$(4) I(v) = \frac{1}{2} \langle A^{-1}v, v \rangle + \varphi^*(v) \quad , \quad v \in R(A)$$

De fato, $N(A)$ neste caso aparece como um multiplicador de Lagrange associado à restrição $v \in R(A)$.

A vantagem de (4) é que A^{-1} sendo contínua (nas aplicações ele é em geral compacto) o problema fica mais fácil de ser tratado. Além disso, $N(A)$ é geralmente difícil de ser controlado e em (4) ele aparece apenas como um multiplicador de Lagrange.

É claro que no caso do teorema 9.7, $H = L^2(o, T)$ com $D(A) = W_p^{1, b}(o, T)$ e $N(A) = \mathbb{R}^{2n}$.

APÊNDICE

CONJUNTOS CONVEXOS E TEOREMAS DE SEPARAÇÃO

1. CONJUNTOS CONVEXOS

Um subconjunto K de um espaço vetorial real E é dito CONVEXO se para quaisquer pontos a e b de K o segmento $[a, b]$ está contido em K . $[a, b]$ é definido por

$$x \in [a, b] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1], x = ta + (1-t)b$$

EXEMPLOS:

- 1) $K = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i, \text{ com } \sum_{i=1}^n t_i = 1 \text{ e } t_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n \right\}$, onde x_1, \dots, x_n são pontos de E
- 2) $K = B_R(0) = \{x \in E \mid |x| \leq R\}$, se E é um espaço normado.
- 3) Qualquer subespaço de E
- 4) $K = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \forall x \in X\}$, onde $E = \mathbb{R}^X$ e f_1, f_2 são funções dadas (é claro que se não exigirmos $f_1(x) \leq f_2(x) \forall x \in X$ teremos $K = \emptyset$); X é um conjunto qualquer.
- 5) Se $K_1, K_2 \subset E$ são convexos e a é um escalar, então $aK_1 + K_2 = \{ax_1 + x_2, x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\}$ é convexo.
- 6) Se $K_1 \subset E_1$ é convexo e $A: E_1 \rightarrow E_2$ é linear, então $K_2 = A(K_1)$ é convexo.
- 7) Se $(K_a)_{a \in A}$ é uma família de convexos de E , então $K = \bigcap_{a \in A} K_a$ é convexo.
- 8) Se K é convexo e E é espaço normado, então \bar{K} e $\overset{\circ}{K}$ (o fecho

e o interior de K) são convexos.

Um caso particular interessante do exemplo 7) é o seguinte: se $X \subset E$, a ENVOLTÓRIA CONVEXA DE X é definida por

$$\text{conv}(X) = \bigcap \{ K \subset E \mid X \subset K \text{ e } K \text{ é convexo} \}$$

Se E é um espaço normado, o fecho de $\text{conv}(X)$ $\overline{\text{conv}(X)}$, recebe o nome de FECHO CONVEXO DE X ou ENVOLTÓRIA CONVEXA FECHADA DE X .

OBSERVAÇÕES:

- 1) $\text{conv}(X) = \{ x \in E \mid \exists n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, \text{ com } \sum_{i=1}^n t_i = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^n t_i x_i = x \}$
- 2) $\overline{\text{conv}(X)} = \bigcap \{ K \subset X \text{ e } K \text{ é convexo e fechado} \}$
- 3) Se $x_1, \dots, x_n \in E$, $\text{conv}(\{x_1, \dots, x_n\})$ é notado por $\text{conv}(x_1, \dots, x_n)$. Temos sempre $\overline{\text{conv}(x_1, \dots, x_n)} = \overline{\text{conv}(x_1, \dots, x_n)}$.

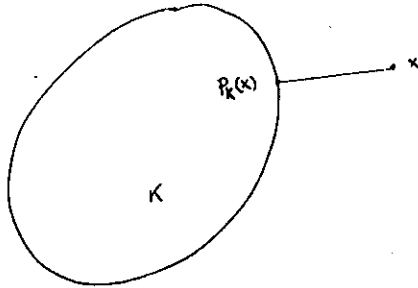
2. CONJUNTOS CONVEXOS EM ESPAÇOS DE HILBERT. O TEOREMA DE PROJEÇÃO

Se a noção de conjunto convexo já é algo bastante geométrico, a coisa fica ainda melhor quando o espaço em que se trabalha é um espaço de Hilbert.

O teorema de projeção que demonstraremos a seguir é a base de quase tudo que se faz de interessante nestes espaços.

Trata-se de uma generalização da bem conhecida "projeção ortogonal sobre um subespaço", velha companheira dos estudantes de Álgebra Linear (ou mesmo de Geometria). A passagem a conjuntos

convexos se faz de forma indolor.



2.1 - TEOREMA: Seja H um espaço de Hilbert e seja $K \subset H$ convexo e fechado. Para todo $x \in H$ existe um único $p_K(x) \in K$ tal que

$$|x - p_K(x)| \leq |x - y| \quad \forall y \in K .$$

Demonstração: É claro que podemos supor $x=0$ (caso não seja para o leitor, é um bom exercício).

O teorema se reduz portanto a mostrar que existe um ponto $p_K(0) \in K$ tal que $|p_K(0)| \leq |y| \quad \forall y \in K$. Mostremos.

Seja $d = \inf\{|y|, y \in K\}$. Seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de pontos de K tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = d$.

Em duas partes, mostraremos:

- 1) Existência - basta provar que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Teremos então $p_K(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.
- 2) Unicidade - segue do fato de que se $|x_1| = |x_2| = d$, $x_1 \neq x_2$, então $|\frac{1}{2}(x_1 + x_2)| < d$.

Tudo isto vai repousar sobre os ombros do seguinte lema,

conhecido como "identidade do paralelogramo".

2.2 - LEMA: Se H é um espaço de Hilbert e $a, b \in H$, então

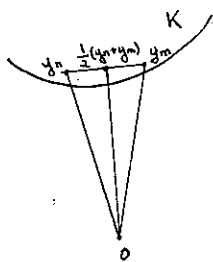
$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

Dem. do Lema: $|a+b|^2 + |a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\langle a, b \rangle +$
 $+ |a|^2 + |b|^2 - 2\langle a, b \rangle = 2(|a|^2 + |b|^2)$.

Voltemos ao Teorema. Restam por demonstrar duas afirmati-
 vas:

1) $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy - pelo lema, temos

$$|y_n + y_m|^2 + |y_n - y_m|^2 = 2(|y_n|^2 + |y_m|^2) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$



Dividindo por 4, temos

$$\frac{1}{4}|y_n - y_m|^2 = \frac{1}{2}(|y_n|^2 + |y_m|^2) - \left| \frac{1}{2}(y_n + y_m) \right|^2.$$

Mas $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in K$, e portanto

$$\left| \frac{1}{2}(y_n + y_m) \right| \geq d.$$

Segue

$$\frac{1}{4}|y_n - y_m|^2 \leq \frac{1}{2}(|y_n|^2 + |y_m|^2) - d^2 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim |y_n| = d$, podemos, dado $\epsilon > 0$, garantir a existên-
 cia de n_0 tal que

$$n, m > n_0 \Rightarrow \frac{1}{2}(|y_n|^2 + |y_m|^2) - d^2 < \frac{\epsilon}{4},$$

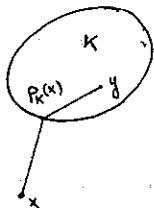
o que mostra que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.

2) $x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2, |x_1| = |x_2| = d \Rightarrow \left| \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right| < d$ segue do
 lema, pois

$$\left| \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right|^2 = \frac{1}{2}(|x_1|^2 + |x_2|^2) - \frac{1}{4}|x_1 - x_2|^2 < d^2 \quad \blacksquare$$

2.3 - DEFINIÇÃO: Se H é um espaço de Hilbert e $K \subset H$ é convexo e fechado, a aplicação $p_K: H \rightarrow K$ definida por 2.1 é chamada PROJEÇÃO SOBRE K .

As principais propriedades da projeção são tão geométricas que cada uma tem sua figurinha. Daqui até o final do parágrafo fica entendido que H é um espaço de Hilbert e $K \subset H$ é convexo fechado.



2.4 : PROPOSIÇÃO: Se $x \in H$ e $x_0 \in K$, então $x_0 = p_K(x)$ se e só se $\langle x - x_0, y - x_0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$.

Dem.: Se $x_0 = p_K(x)$ e $\langle x - x_0, y - x_0 \rangle > 0$ para um certo $y \in K$, teríamos, considerando $x(t) = x_0 + t(y - x_0)$:

- (i) $x(t) \in K \quad \forall t \in [0, 1]$
- (ii) $|x - x(t)|^2 = |x - x_0|^2 - 2t \langle x - x_0, y - x_0 \rangle + t^2 |x_0 - y|^2 \quad \forall t \in [0, 1]$.

Basta agora tomar $t_0 \in [0, 1]$ suficientemente pequeno para obter $x(t_0) \in K$ tal que $|x - x(t_0)| < |x - x_0|$, contradizendo a hipótese.

Reciprocamente, se $x_0 \in K$ e $\langle x - x_0, y - x_0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$, então $\forall y \in K$ vale

$$\begin{aligned} |y - x|^2 &= \langle (y - x_0) + (x_0 - x), (y - x_0) + (x_0 - x) \rangle = |y - x_0|^2 - 2 \langle x - x_0, y - x_0 \rangle \\ &+ |x_0 - x|^2 \geq |x_0 - x|^2, \end{aligned}$$

donde $x_0 = p_K(x)$ ■



2.5 - PROPOSIÇÃO: Se $x_1, x_2 \in H$, então

$$|p_K(x_1) - p_K(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$$

Dem.: De 2.4 segue:

$$\langle p_K(x_2) - p_K(x_1), x_1 - p_K(x_1) \rangle \leq 0$$

$$\langle p_K(x_1) - p_K(x_2), x_2 - p_K(x_2) \rangle \leq 0$$

Daí vem, somando,

$$\langle p_K(x_1) - p_K(x_2), p_K(x_1) - p_K(x_2) \rangle \leq \langle p_K(x_1) - p_K(x_2), x_1 - x_2 \rangle$$

$$\text{Como } \langle p_K(x_1) - p_K(x_2), x_1 - x_2 \rangle \leq |p_K(x_1) - p_K(x_2)| |x_1 - x_2|,$$

segue $|p_K(x_1) - p_K(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ ■

2.6 - DEFINIÇÃO: Um subconjunto C de um espaço vetorial é dito um CONE de vértice x_0 se para todo $x \in C$ vale:

$$x_0 + \lambda(x - x_0) \in C \quad \forall \lambda \geq 0$$

2.7 - PROPOSIÇÃO: Se $x_0 \in K$, então $p_K^{-1}(x_0)$ é um cone convexo fechado de vértice x_0 .

Dem.: Seja $C = p_K^{-1}(x_0)$

(i) C é convexo - Se $y \in K$, $x_1, x_2 \in C$, $t \in [0, 1]$, então

$$\langle y - x_0, x_0 - (tx_1 + (1-t)x_2) \rangle = t \langle y - x_0, x_0 - x_1 \rangle +$$

$$+ (1-t) \langle y - x_0, x_0 - x_2 \rangle \leq 0$$

Segue de 2.4 que $x_0 = p_K(tx_1 + (1-t)x_2)$, ou seja,

$$tx_1 + (1-t)x_2 \in C$$

(ii) C é fechado - Ainda usando 2.4, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em C e $x_n \rightarrow x$, então, como

$$\langle y - x_0, x_0 - x_n \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

segue

$$\langle y - x_0, x_0 - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K,$$

donde $x \in C$.

(iii) C é um cone de vértice x_0 - Se $x \in C$ e $\lambda > 0$, temos $p_K(x_0 + \lambda(x - x_0)) = x_0$, pois

$$\langle x_0 + \lambda(x - x_0) - x_0, x_0 - y \rangle = \lambda \langle x - x_0, x_0 - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K \quad \blacksquare$$

3. CONJUNTOS CONVEXOS EM ESPAÇOS NORMADOS. PONTOS INTERIORES E PONTOS INTERNOS

O conceito de conjunto convexo é independente das propriedades topológicas do espaço. Porém, pelo seu caráter geométrico, é natural que essa independência seja relativa. No caso de dimensão finita, em que as propriedades algébricas determinam as topológicas, a dependência é total (ver 3.1).

Em espaços de dimensão infinita a situação muda um pouco. Aparecem exemplos estranhos, como 3.2, e mesmo exemplos mais estranhos ainda, como 3.3.

Em termos sumários a explicação é a seguinte:

(i) Em dimensão finita todas as normas são equivalentes, mas não em dimensão infinita.

(ii) Em dimensão finita os conceitos de ponto interior e ponto

interno (ver 3.4) coincidem, mas não em dimensão infinita.

3.1 - PROPOSIÇÃO: Seja E um EVN e seja $K \subset E$ convexo e tal que $0 \in K$. Seja E_0 o subespaço gerado por K . Se $\dim E_0 < \infty$, valem:

(i) $\overset{\circ}{K} = \overset{\circ}{K}$

(ii) O interior de K em E_0 é não vazio.

Demonstração: Fica como exercício ■

Em dimensão infinita a coisa muda de figura. É fácil encontrar contra-exemplos para a parte (i) da Proposição acima.

3.2 - EXEMPLO: Seja $E = \ell^2(\mathbb{R})$ (sequências de quadrado somável, $|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}| = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2)^{\frac{1}{2}}$). Seja $K = \ell_0^2(\mathbb{R})$ (sequências $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $a_n \neq 0$ apenas para um número finito de n_s). Então $\bar{K} = E$, donde $\overset{\circ}{K} = E$, mas $\overset{\circ}{K} = \emptyset$.

Quando examinamos a parte (ii) da Proposição, porém, a coisa fica mais interessante.

3.3 - EXEMPLO: Seja $E = \ell^1(\mathbb{R})$ (sequências absolutamente somáveis) com a norma $|(a_n)| = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja

$e_i = (e_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ dado por $e_{in} = \delta_{in}$.

Seja $X = \{e_i, i \in \mathbb{N}\} \cup \{-e_i, i \in \mathbb{N}\}$ e seja $K = \overline{\text{conv}}(X)$.

Afirmamos que o espaço gerado por K é E , mas $\overset{\circ}{K} = \emptyset$.

(i) $\bar{K} = E$. Seja $x = (x_n) \in E \setminus \{0\}$. Seja $a = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|} x$.

Então $x = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|)a$. Mas $a \in K$, pois $a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$,

onde $a_i = \sum_{n=1}^i \frac{x_n}{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|} e_n$, e cada a_i está em $\text{conv}(x)$.

(ii) $\overset{\circ}{K} = \emptyset$. Mostremos primeiro que $0 \in \overset{\circ}{K}$. Seja $\epsilon > 0$ e seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n_0} < \epsilon^2$. Seja $a = (a_n)$, com $a_n = \frac{1}{n_0}$ se $n \leq n_0 + 1$ e $a_n = 0$ se $n > n_0 + 1$.

Temos $|a|^2 = \frac{n_0 + 1}{n_0^2} \leq \frac{2}{n_0} < \epsilon^2$, o que mostra que $a \in B_{\epsilon}(0)$. Mas $a \notin K$, pois $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq 1 \quad \forall (x_n) \in K$.

Seja agora x um ponto qualquer de K e suponhamos que $x \in \overset{\circ}{K}$. Como $\overset{\circ}{K}$ é simétrico em relação à origem, teríamos $-x \in \overset{\circ}{K}$. Sendo K convexo, isso nos daria $0 \in \overset{\circ}{K}$.

O Exemplo 3.3 motiva as seguintes definições:

3.4 - DEFINIÇÕES: Sejam E um EV e $K \subset E$ convexo. Um ponto $x_0 \in K$ é dito INTERNO se

$$\forall x \in E \exists \epsilon > 0 |x_0 + t(x - x_0) \in K, \text{ se } |t| < \epsilon.$$

O conjunto dos pontos internos de K é chamado NÚCLEO de K . Se o núcleo de K é não vazio, K é dito um CORPO CONVEXO.

Os conceitos acima não dependem da topologia do espaço, caso exista, e podem obviamente ser aplicados a subconjuntos não convexos de um EV. Se E é um EVN, porém, é claro que há relações entre as noções de ponto interno e ponto interior. Algumas destas relações são listadas a seguir:

- (i) Todo ponto interior é interno.
- (ii) Se $\dim E < \infty$, todo ponto interno é interior.
- (iii) Se o interior de K é não vazio, então todo ponto interno é interior.

(i) é óbvia. (ii) requer apenas um pouco de paciência, o que não temos (fica como exercício). Para mostrar (iii) usaremos o seguinte lema:

3.5 - LEMA: Sejam E um EV e $K \subset E$ convexo de núcleo K_0 .

Se $x \in K_0$ e $y \in K$, então $[x, y[\subset K_0$. Se E é um EVN,

$x \in \overset{\circ}{K}$ e $y \in \bar{K}$, então $[x, y[\subset \overset{\circ}{K}$.

Demonstração: Veja a figura ■

A demonstração de (iii) segue agora do fato de que se $x \in \overset{\circ}{K}$ e y é interno, então existe $y_0 \in K$ tal que $y \in [x, y_0[$.

A recíproca de (i) não vale, já que 3.3 nos dá um exemplo de corpo convexo de interior vazio.

Vale também o seguinte resultado:

3.6 - PROPOSIÇÃO: Transformações lineares sobrejetivas preservam pontos internos.

Demonstração: Seja $T: E_1 \rightarrow E_2$ linear e sobre, $K_1 \subset E_1$, x_1 pt. interno de K_1 , $x_2 = Tx_1$, $K_2 = T(K_1)$. Se z_2 é um ponto qualquer de E_2 , seja $z_1 \in T^{-1}(z_2)$. Então $\exists \epsilon > 0$ tal que

$I = [x_1 - \epsilon(z_1 - x_1), x_1 + \epsilon(z_1 - x_1)] \subset K_1$. Segue $T(I) \subset K_2$.

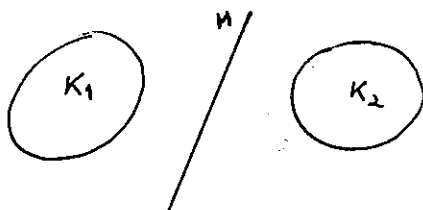
Mas $T(I) = [x_2 - \epsilon(z_2 - x_2), x_2 + \epsilon(z_2 - x_2)]$ ■

3.7 - EXERCÍCIO: Mostre que se E é espaço de Banach e $K = \bar{K} \subset E$ é um corpo convexo, então $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. Sugestão: teorema de Baire.

4. TEOREMAS DE SEPARAÇÃO

Os resultados deste parágrafo podem ser todos obtidos a partir do Teorema de Hahn-Banach (o Teorema 4.8 é às vezes chamado "forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach").

Queremos chegar a coisas do seguinte tipo:



Interpretando a figura, queremos saber se, como sugere a intuição, dados dois convexos (K_1 e K_2), existe um hiperplano (M) que os "separa".

4.1 - DEFINIÇÃO: Se A e B estão contidos em um espaço vetorial E e M é um hiperplano de E , diz-se que M separa A e B se, dados $x \in A$ e $y \in B$ quaisquer, tem-se $]x, y[\cap M \neq \emptyset$. Diz-se que M separa estritamente A e B se, dados $x \in A$ e $y \in B$, o segmento aberto $]x, y[$ corta M em um único ponto.

É interessante lembrar que $M \subset E$ é um hiperplano se e só se existem uma forma linear $\iota \neq 0$ de E e um número α tal que $M = \iota^{-1}(\alpha)$ (M é fechado se e só se ι é contínua). ι define 4 semiespaços:

$$L_+ = \iota^{-1}(] \alpha, \infty [), \quad \bar{L}_+ = \iota^{-1}([\alpha, \infty [)$$

$$L_+ = \iota^{-1}(]-\infty, \alpha[), \quad L_- = \iota^{-1}(]-\infty, \alpha])$$

4.2 - DEFINIÇÃO: Se E é um EV e $M = \iota^{-1}(\alpha)$ é um hiperplano (ι é uma forma linear de E), diz-se que $A \subset E$ fica de um lado só de M se A está inteiramente contido em um dos 4 semiespaços acima. Se A está inteiramente contido em L_+ ou em L_- , diz-se que A está estritamente de um lado só de M .

As relações entre as definições 4.1 e 4.2 são evidentes.

Ainda nesta linha, diremos que o hiperplano M TANGENCIA o convexo K (ou que M é um HIPERPLANO DE APOIO de K) se $M \cap K \neq \emptyset$ e M deixa K de um lado só. Um ponto de K pelo qual passa um hiperplano de apoio é dito um PONTO DE APOIO. Na verdade, porém, é preferível trabalhar com formas lineares, o que nos permite suprimir a condição $M \cap K \neq \emptyset$.

4.3 - PROPOSIÇÃO: Sejam K um corpo convexo, K_0 seu núcleo e M um hiperplano. Então M deixa K de um lado só se e só se $M \cap K_0 = \emptyset$.

Demonstração: Se $M \cap K_0 \neq \emptyset$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 \in M \cap K_0$. Seja ι uma forma linear tal que $M = \iota^{-1}(0)$ e seja $v \in E$ tal que $\iota(v) \neq 0$. Basta então tomar $t \neq 0$ tal que $tv \in K$ e $-tv \in K$ para concluir que M não deixa K de um lado só.

Reciprocamente, se M não deixasse K de um lado só, poderíamos tomar $x_1 \in K_0$ e $x_2 \in K$ tais que $\iota(x_1) < \alpha < \iota(x_2)$ (supondo $M = \iota^{-1}(\alpha)$). Mas então existe $x \in]x_1, x_2[$ tal que $\iota(x) = \alpha$. Temos então $x \in M \cap K_0$, pois $]x_1, x_2[\subset K_0$ (ver 3.5). ■

4.4 - DEFINIÇÃO: Se E é um EV e $K \subset E$ é convexo, diz-se que $M = \iota^{-1}(u)$ é um hiperplano de apoio de K se $\iota(K)$ é um intervalo de extremidade u .

Por ora chega de definições. O mais simples dos teoremas de separação é o seguinte:

4.5 - TEOREMA: Seja E um EV de dimensão finita. Se $K \subset E$ é convexo e $x \notin \overset{\circ}{K}$, existe um hiperplano de E que separa x e K (estritamente, se $x \notin \bar{K}$).

Demonstração: Como em dimensão finita todas as normas são equivalentes, faz sentido falar em $\overset{\circ}{K}$ e \bar{K} . Podemos também, a nosso bel prazer, considerar E como um espaço de Hilbert.

Suponhamos primeiro que $x \notin \bar{K}$. Seja u unitário de $x - p_{\bar{K}}(x)$. Seja ι dada por $\iota(y) = \langle y, u \rangle$. Temos $\iota(x) > \iota(p_{\bar{K}}(x))$ e $\iota(y) \leq \iota(p_{\bar{K}}(x)) \forall y \in K$.

Se $x \in \bar{K}$, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $E \setminus \bar{K}$ tal que $x_n \rightarrow x$. Para cada n , seja u_n o unitário de $x_n - p_{\bar{K}}(x_n)$. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada. Seja $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ uma sua subsequência convergente para $u \in E$ (é claro que $|u| = 1$). Temos, $\forall n, \langle x_n, u_n \rangle \geq \langle p_{\bar{K}}(x_n), u_n \rangle \geq \langle y, u_n \rangle \forall y \in K$.

Mas $x_{n_k} \rightarrow x, u_{n_k} \rightarrow u, p_{\bar{K}}(x_{n_k}) \rightarrow x$, donde $\langle x, u \rangle \geq \langle y, u \rangle \forall y \in K$.

Basta tomar $\iota(y) = \langle y, u \rangle$ ■

É um exercício interessante descobrir porque a demonstração acima não se aplica a espaços de Hilbert de dimensão infinita (é um pouco mais sutil do que parece).

4.6 - ESCÓLIO: Se E é um EV de dimensão finita e $K \subset E$ é convexo, então todo ponto da fronteira de K (relativa a uma norma qualquer) é um ponto de apoio.

Nos resultados que virão a seguir utilizaremos com frequência o conceito de ponto interno. O leitor, caso isso o incomode, poderá ler "interior" onde se escreve "interno" e entender "corpo convexo" como um convexo de interior não vazio (ficando subentendido que o espaço considerado é normado). Deverá também, neste caso, ler "interior" onde se escreve "núcleo".

Começemos, pois, a investigar a possibilidade de separar um ponto x de um convexo K . Podemos desde já excluir a possibilidade de ser x um ponto interno de K . Quanto a K , as restrições são mais delicadas.

4.7 - EXEMPLO: $E = l^2_0(\mathbb{R})$ (ver 3.2). $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, onde $(x_n) \in K_i$ se e só se $x_1 > 0$ e $x_n = 0 \ \forall n > i$. Neste caso não existe hiperplano M de E que separe 0 e K . De fato, se existisse um tal M este seria um subespaço. Podemos tomar $z \in E \setminus M$. Seja n tal que $z_i = 0 \ \forall i \geq n$. Certamente existe um $y \in M$ tal que $y_m > 0$ para algum $m > n$ e $y_i = 0 \ \forall i > m$. Então $y \in K_m \subset K$. Mais ainda, $y \pm z \in K_m \subset K$. Mas $y+z$ e $y-z$ não podem estar do mesmo lado de M !

Na realidade, uma pequena modificação no raciocínio acima demonstraria que não existe hiperplano de E que deixe K de um lado só. Não sendo $K=E$, isto é bastante surpreendente.

☛ Cabe então perguntar sob que condições, dado um convexo K ,

podemos garantir que existe um hiperplano que deixa K de um lado só. A Proposição 4.3 indica um caminho. Se K é um corpo convexo e M_0 é um subespaço afim que não corta o núcleo de K , podemos tentar "ir aumentando" M_0 até conseguir, via Lema de Zorn, um hiperplano M , que não corte o núcleo de K .

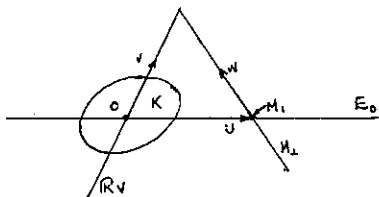
4.8 - TEOREMA: Sejam E um EV e $K \subseteq E$ um convexo de núcleo $K_0 \neq \emptyset$. Se M_0 é um subespaço afim de E tal que $M_0 \cap K_0 = \emptyset$, então existe um hiperplano M_1 de E tal que $M_0 \subset M_1$ e $M_1 \cap K_0 = \emptyset$.

Demonstração: Seja $\mathfrak{M} = \{M, M \text{ subespaço afim de } E, M_0 \subset M \text{ e } M \cap K_0 = \emptyset\}$. \mathfrak{M} é ordenado por inclusão e satisfaz às condições do Lema de Zorn. Seja M_1 um elemento maximal de \mathfrak{M} . Resta mostrar que M_1 é um hiperplano.

Sem perda de generalidade, suporemos que $0 \in K_0$. Então $0 \notin M_1$ e M_1 é um hiperplano se e só se o subespaço de E gerado por M_1 é o próprio E . Basta portanto mostrar que se o subespaço gerado por M_1 não é E , então existe um subespaço afim M_2 tal que $M_1 \subset M_2$ e $M_2 \cap K_0 = \emptyset$, o que será feito através de um Lema:

4.9 - LEMA: Sejam K um convexo de E de núcleo K_0 tal que $0 \in K_0$, M_1 um subespaço afim de E tal que $M_1 \cap K_0 = \emptyset$ e v um elemento de E que não pertence ao subespaço E_0 gerado por M_1 . Então existe $w \in E_0 \oplus \mathbb{R}v$, $w \neq 0$, tal que o subespaço afim $M_2 = M_1 + \mathbb{R}w$ não corta K_0 .

Demonstração do Lema: Seja $u \in M_1$ qualquer. A idéia é encontrar um par $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $w = au + bv$ demonstre o Lema.



Observemos que, se $H = M_1 - u$, então $E_0 = H \oplus \mathbb{R}u$. Seja então $\pi: E_0 \oplus \mathbb{R}v \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(h \oplus su \oplus tv) = (s, t)$ (π nada

mais é que a projeção de $E_0 \oplus \mathbb{R}v$ sobre o plano gerado por u e v).

π é linear e sobrejetiva. Temos pois $K_1 = \pi(K)$ convexo e $0 \in \pi(K_0) \subset \overset{\circ}{K}_1$ (3.6). É claro também que $\pi(u) = e_1$, $\pi(v) = e_2$ e que $e_1 \notin \overset{\circ}{K}_1$. Então, por 4.5, existe uma reta de \mathbb{R}^2 que separa e_1 e K_1 . Como nada nos impede de supor que tal reta passa por e_1 , podemos dizer que existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) \neq (0, 0)$, tal que a reta $(1, 0) + \lambda(a, b)$ não corta $\pi(K_0)$. Daí se conclui que, pondo $M_2 = M_1 + \mathbb{R}w$ (onde $w = au + bv$), $M_2 \cap K_0 = \emptyset$. De fato, se $y = x + \lambda(au + bv) \in M_1 + \mathbb{R}w$, então $\pi(y) = (1, 0) + \lambda(a, b) \notin \pi(K_0)$ ■

4.10 - OBSERVAÇÃO: Se em 4.8 supusermos que $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, então o hiperplano M será necessariamente fechado (pois, em um EVN, um hiperplano ou é fechado ou é denso).

4.11 - COMENTÁRIO: Uma vez entendido que, Lema de Zorn à parte, a demonstração do Teorema está toda no Lema 4.9, é importante entender a geometria da coisa. O problema se reduz a dimensão 2 porque, no fundo, trata-se de encontrar um "ângulo" (entre w e E_0). Este raciocínio leva, inclusive, a uma demonstração "alternativa". Uma vez reduzido o problema a \mathbb{R}^2 , a questão seria determinar um ângulo α tal que a reta passando por e_1 e fazendo ângulo α com o eixo horizontal não corte K_1 .

Não custa nada observar, também, que não é necessário supor, para demonstrar 4.9, que $K_0 \neq \emptyset$ (tomando a precaução de acrescentar algo do gênero $0 \notin M_1$).

Os resultados a seguir (que são os teoremas de separação propriamente ditos) seguem de 4.8.

4.12 - COROLÁRIO: Se E é um EV e $K_1, K_2 \subset E$ são dois convexos tais que K_1 tem núcleo não vazio e disjunto de K_2 , então existe um hiperplano que separa K_1 e K_2 .

Demonstração: Podemos, é claro, supor $K_2 \neq \emptyset$. Seja então $K = K_{10} - K_2 = \{k_1 - k_2, k_1 \in K_{10}, k_2 \in K_2\}$, onde K_{10} é o núcleo de K_1 . Como $K_{10} \neq \emptyset$, temos que $K_0 \neq \emptyset$ (K_0 é o núcleo de K). $\{0\}$ é um subespaço de E que não intercepta K_0 . Por 4.8, existe um hiperplano M que não corta K_0 . Seja ι uma forma linear de E tal que $M = \iota^{-1}(0)$ e $\iota(K) \subset [0, \infty[$. Segue $\iota(k_1) \geq \iota(k_2)$
 $\forall k_1 \in K_{10}, k_2 \in K_2$. Se $\alpha = \inf_{k_1 \in K_{10}} \iota(k_1)$, temos que $M_1 = \iota^{-1}(\alpha)$ separa K_1 e K_2 ■

4.13 - COROLÁRIO: Se E é EVN, $K_1, K_2 \subset E$ são convexos, K_1 fechado, K_2 compacto, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, então existe hiperplano fechado de E que separa estritamente K_1 e K_2 .

Demonstração: Basta notar que nesse caso há um aberto convexo que contém K_2 e não corta K_1 . O resultado segue de 4.12 (o "estritamente" fica por conta da compacidade de K_2 ; o hiperplano é fechado por 4.10) ■

4.14 - COROLÁRIO: Se E é EVN e $x \in E \setminus \{0\}$, então existe uma forma linear contínua ι de E tal que $\iota(x) \neq 0$.

Demonstração: Aplica-se 4.13 a $\{0\}$ e $\{x\}$ ■

Para terminar, e apenas a título de curiosidade, vamos demonstrar o Teorema de Hahn-Banach (em sua forma clássica).

4.15 - TEOREMA DE HAHN-BANACH: Seja E um EV e seja

$p:E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(i) \forall x, y \in E \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

$$(ii) \forall \lambda > 0, \quad x \in E \quad p(\lambda x) = \lambda p(x)$$

Se $M \subset E$ e $f:M \rightarrow \mathbb{R}$ é linear e tal que $f(x) \leq p(x) \forall x \in M$, então existe $\bar{f}:E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{f}|_M = f$ e $\bar{f}(x) \leq p(x) \forall x \in E$.

Demonstração: Seja K o epigráfico de p . Isto é,

$$K = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} \mid p(x) \leq t\}.$$

É fácil mostrar que K é convexo e que o núcleo de K e $K_0 = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} \mid p(x) < t\}$; Se $M_0 = \{(x, f(x)), x \in E\}$, temos que $M_0 \subset E$ e $M_0 \cap K_0 = \emptyset$. Segue de 4.8 que existe M_1 hiperplano de E tal que $M_0 \subset M_1$ e $M_1 \cap K_0 = \emptyset$. É fácil então mostrar que M_1 é gráfico de $\bar{f}:E \rightarrow \mathbb{R}$ linear e tal que $\bar{f}|_M = f$ ■

5. TOPOLOGIA FRACA E CONVERGÊNCIA FRACA

Neste parágrafo fixamos um EVN E e estudamos o conceito de convergência fraca em E .

5.1 - DEFINIÇÃO: Um subconjunto S de E é dito um semiespaço aberto de E se existem uma forma linear contínua $\iota \in E^*$ e um número real a tais que

$$S = \iota^{-1}(]-\infty, a])$$

(Observe que, trocando ι por $-\iota$ e a por $-a$, podemos sempre escre-

ver $S = (-2)^{-1} (]-a, \infty[)$.

5.2 - DEFINIÇÃO: Um subconjunto V de E é dito uma vizinhança fraca de x se $x \in V$ e V é uma interseção finita de semiespaços abertos. Um subconjunto A de E é dito fracamente aberto se A contém uma vizinhança fraca de cada um de seus pontos. Um subconjunto F de E é dito fracamente fechado se seu complementar é fracamente aberto.

5.3 - EXERCÍCIO: Compreenda que uma vizinhança fraca é tudo que fica dentro de uma região limitada por um número finito de hiperplanos fechados. Mostre que:

- (i) A interseção de duas vizinhanças fracas de x é uma vizinhança fraca de x .
- (ii) A interseção de dois abertos fracos é um aberto fraco.
- (iii) A união de uma família qualquer de abertos fracos é um aberto fraco.
- (iv) Se $x \neq y$ então existem vizinhanças fracas V_x e V_y de x e y tais que $V_x \cap V_y = \emptyset$.
- (v) A interseção de uma família qualquer de semiespaços fechados é um fechado fraco.
- (vi) Todo conjunto fracamente aberto é aberto na norma de E .
- (vii) V é uma vizinhança fraca de 0 se e só se $x+V$ é uma vizinhança fraca de $x \forall x \in E$.
- (viii) V é uma vizinhança fraca de x se e só se λV é uma vizinhança fraca de $\lambda x \forall \lambda \neq 0$.

(ix) Se $\dim E < \infty$, então todo conjunto aberto na norma de E é fracamente aberto.

Se $\dim E = \infty$, porém, os abertos fracos são sempre muito grandes:

5.4 - PROPOSIÇÃO: Se E é de dimensão infinita, então toda vizinhança fraca de 0 contém um subespaço fechado de E de dimensão infinita.

Demonstração: Seja V uma vizinhança fraca de 0. Podemos então tomar $t_1, \dots, t_n \in E^*$, $a_1, \dots, a_n > 0$, tais que

$$V = \bigcap_{i=1}^n t_i^{-1}(]-\infty, a_i[).$$

Definindo $N_i = t_i^{-1}(0)$, temos que, para cada i , N_i é um subespaço fechado de E (de codimensão 1) e, pondo

$N = \bigcap_{i=1}^n N_i$, $N \subset V$. É claro então que N é fechado e $\dim N = \infty$ ■

5.5 - PROPOSIÇÃO: Uma sequência (x_n) em E converge fracamente para $x \in E$ se e só se

$$\forall V \text{ viz. fraca de } x \exists n_0 \text{ tq. } n > n_0 \Rightarrow x_n \in V.$$

Demonstração: Suponhamos que $x_n \xrightarrow{f} x$. Seja $V = \bigcap_{i=1}^n t_i^{-1}(]-\infty, a_i[)$ uma vizinhança fraca de x .

Como $x_n \xrightarrow{f} x$,

$$\forall i=1, \dots, n \exists n_i \mid n > n_i \Rightarrow \langle t_i, x_n \rangle < a_i.$$

Então, se $n_0 = \max\{n_i, i=1, \dots, n\}$, temos

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in V.$$

Reciprocamente, suponhamos que $\forall V$ viz. fraca de $x \exists n_0$ tq $n > n_0 \Rightarrow x_n \in V$.

Então, se $t \in E^*$ e $\epsilon > 0$, temos que

$$V = t^{-1}(]-\infty, \langle t, x \rangle + \epsilon[) \cap t^{-1}(]\langle t, x \rangle - \epsilon, \infty[)$$

é vizinhança fraca de x . Tomando n_0 tq $n > n_0 \Rightarrow x_n \in V$, temos $n > n_0 \Rightarrow |\langle t, x_n - x \rangle| < \epsilon$, o que mostra que $x_n \rightarrow x$ ■

5.6 - DEFINIÇÃO: Seja X um espaço topológico (ou métrico, se o leitor preferir). Diz-se que $f: E \rightarrow X$ é fracamente contínua em $x_0 \in E$ se $\forall U$ viz. de $f(x_0)$ em $X \exists V$ viz. fraca de x_0 em E tal que $x \in V \Rightarrow f(x) \in U$.

5.7 - PROPOSIÇÃO: Seja t uma forma linear de E . t é fracamente contínua se e só se t é contínua na norma de E .

Demonstração: Se t é fracamente contínua, então é claro que t é contínua em norma, pois toda vizinhança fraca de 0 é um aberto em norma.

Reciprocamente, se t é contínua em norma, então $\forall x_0 \in E$, $\epsilon > 0$ temos

$$\begin{aligned} x \in t^{-1}(]-\infty, \langle t, x_0 \rangle + \epsilon[) \cap t^{-1}(]\langle t, x_0 \rangle - \epsilon, \infty[) = \\ \Rightarrow |\langle t, x \rangle - \langle t, x_0 \rangle| < \epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que t é fracamente contínua ■

5.8 - EXERCÍCIO: Mostre que $f: E \rightarrow X$ é fracamente contínua se e só se $f^{-1}(A)$ é fracamente aberto $\forall A$ aberto em X .

Se E e F são dois EVNs. Gostaríamos de poder afirmar

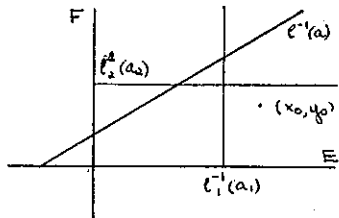
que $f: \text{Ex}F \rightarrow X$ é fracamente contínua se e só se

$\forall U$ viz. de $f(x_0, y_0)$ em $X \exists V_1$ viz. fraca de x_0 , V_2 viz. fraca de y_0 tais que $(x, y) \in V_1 \times V_2 \Rightarrow f(x, y) \in U$.

Isto decorre do seguinte resultado:

5.9 - LEMA: Se E, F são EVNS e V é uma vizinhança fraca de (x_0, y_0) em $\text{Ex}F$, então existem V_1 vizinhança fraca de x_0 em E , V_2 vizinhança fraca de y_0 em F tais que $V_1 \times V_2 \subset V$.

Demonstração: Suponhamos que V é um semiespaço:



$$v = t^{-1}([-\infty, a[), \quad t \in (\text{Ex}F)^*$$

Podemos então escrever

$$\langle t_1(x, y) \rangle = \langle t_1, x \rangle + \langle t_2, y \rangle,$$

onde $t \in E^*$ e $t_2 \in F^*$.

Em particular, temos

$$a \geq t(x_0, y_0) = \langle t_1, x_0 \rangle + \langle t_2, y_0 \rangle.$$

Sejam então $a_1 > \langle t_1, x_0 \rangle$, $a_2 > \langle t_2, y_0 \rangle$ tais que

$a_1 + a_2 < a$, e sejam

$$V_1 = t_1^{-1}([-\infty, a_1[), \quad V_2 = t_2^{-1}([-\infty, a_2[).$$

É imediato que $V_1 \times V_2 \subset V$.

Se V é uma interseção de semiespaços V^1, \dots, V^n , basta tomar, para cada $i=1, \dots, n$, semiespaços V_1^i e V_2^i como acima, para obter

$$V = \bigcap_{i=1}^n V^i \supset \bigcap_{i=1}^n V_1^i \times V_2^i = \left(\bigcap_{i=1}^n V_1^i \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n V_2^i \right),$$

de modo que $V_1 = \bigcap_{i=1}^n V_1^i$, $V_2 = \bigcap_{i=1}^n V_2^i$ resolvem o problema ■

5.10 - PROPOSIÇÃO: Se E, F são EVNs, então $A \subseteq \text{Ex}F$ é fracamente aberto se e só se

$\forall (x, y) \in A \exists V_1$ viz. fraca de x em E, V_2 viz. fraca de y em F tais que $V_1 \times V_2 \subseteq A$.

Demonstração: 5.9 nos demonstra que se A é fracamente aberto então existem V_1, V_2 como acima.

Réciprocamente, vamos mostrar que se V_1 é vizinhança fraca de x_0 e V_2 é vizinhança fraca de y_0 , então $V_1 \times V_2$ é fracamente aberto em $\text{Ex}F$. Podemos escrever

$$V_1 = \bigcap_{i=1}^n \alpha_i^{-1}([\]^{-\infty, a_i}[\]), \quad V_2 = \bigcap_{i=n+1}^m \beta_i^{-1}([\]^{-\infty, b_i}[\]),$$

com os α_i em E^* e os β_i em F^* . Sejam então

$$\langle \tau_i, (x, y) \rangle = \begin{cases} \langle \alpha_i, x \rangle, & i=1, \dots, n \\ \langle \beta_i, y \rangle, & i=n+1, \dots, m. \end{cases}$$

É imediato que $V_1 \times V_2 = \bigcap_{i=1}^m \tau_i^{-1}([\]^{-\infty, c_i}[\])$,

onde

$$c_i = \begin{cases} a_i, & i=1, \dots, n \\ b_i, & i=n+1, \dots, m \end{cases} \quad \blacksquare$$

A Proposição acima costuma ser também enunciada assim:

"a topologia fraca de $\text{Ex}F$ é a topologia produto das topologias fracas de E e de F ".

5.11 - EXERCÍCIO: Se E, F são EVNs, mostre que $f: X \rightarrow \text{Ex}F$ é contínua na topologia fraca de $\text{Ex}F$ se e só se suas coordenadas

são contínuas nas topologias fracas de E e de F.

6 - CONVEXOS FECHADOS SÃO FRACAMENTE FECHADOS

O objetivo deste parágrafo é destacar o seguinte corolário de 4.8:

6.1 - PROPOSIÇÃO: Se E é um EVN e $K \subset E$ é convexo e fechado, então K é fracamente fechado.

Demonstração: Se $x \notin K$, então, por 4.13, existe uma forma linear contínua de E tal que $\sup \iota(K) = a < \iota(x)$. Como ι é fracamente contínua, segue que $\iota^{-1}(]a, \infty[)$ é uma vizinhança de x (na topologia fraca) contida no complementar de K. Segue que $E \setminus K$ é fracamente aberto ■

Demonstração alternativa: Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em K tal que $x_n \rightharpoonup x$, então $\forall \iota \in E^*$ vale $\sup \iota(K) \geq \iota(x)$. Segue de 4.13 que $x \in K$ ■

6.2 - OBSERVAÇÃO: É claro que todo fracamente fechado é fechado. Uma versão mais geométrica de 6.1 é a seguinte: um subconjunto K de um EVN é convexo e fechado se e só se K é interseção de uma família de semiespaços fechados.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ADAMS, R.A. - Sobolev Spaces, Academic Press - NY - 1975
- [2] ARQUIMEDES - The works of Archimedes, Dover - NY (particularmente, "On the sphere and cylinder-book I)
- [3] AUBIN, J.P. - Mathematical Methods of Game and Economic Theory, North-Holland - Amsterdam - 1982.
- [4] BAIRE, R. - Leçons sur les Fonctions Discontinues, Gauthier - Villars, Paris, 1930.
- [5] BANACH, S. - Théorie des Opérations Linéaires, Warsawa, 1932
- [6] BRÉZIS, H. - Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [7] BRÉZIS, H. - Periodic Solutions of Nonlinear Vibrating Strings, Proc. AMS Symposium on the Math. Heritage of H. Poincaré, Bloomington, 1980.
- [8] BRÉZIS, H. - CORON, J.M. - NIRENBERG, L. - Free Vibrations for a Nonlinear Wave Equation and a Theorem of P. Rabinowitz, Comm. on Pure and Appl. Math., vol. XXXIII, 667-689, 1980
- [9] BRÉZIS, H. - NIRENBERG, L. - Forced Vibrations for a Nonlinear Wave Equation, Comm. Pure Appl. Math. 31, 1978, pp.1-30
- [10] CÉA, J. - Optimisation - Théorie et Algorithmes, Dunod - Paris, 1971
- [11] CLARKE, F.H. - EKELAND, I. - Hamilton Trajectories having prescribed min. period, Comm. on Pure and Appl. Math., vol. XXXIII, 103-116, 1980.

- [12] COMPTES RENDUES - Analyse Convexe et ses Applications, Lecture Notes in Economics and Math. Systems, Managing Editors: M.Beckmann - H.P. Kunzi, Springer-Verlag, Janeiro 1974.
- [13] COURANT,R. - HILBERT, D. - Methods of Mathematical Physics, Interscience, NY, 1953 (vol.I), 1962 (vol.II).
- [14] DICKSTEIN,F. - Sur des Méthodes Théoriques et Numériques pour le Calcul de Solutions Périodiques de Systèmes Hamiltoniens - Un. Pierre et Marie Curie (Thèse),Paris, 1981
- [15] DIEUDONNÉ,J. - History of Functional Analysis, North-Holland, Amsterdã, 1981.
- [16] DIEUDONNÉ,J. - Fundamentos de Analisis Moderno, Reverté, Barcelona, 1966.
- [17] DUVAUT,G. - LIONS,J.L. - Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, Paris, 1972.
- [18] EKELAND,I. - LARSRY,J.M. - Problèmes Var. non-convexes en Dualité, CRAS Paris, t.291, série A, 493, oct. 1980.
- [19] EKELAND,I. - TEMAM,R. - Analyse Convexe et Problèmes Variationnels, Dunod, Paris, 1974.
- [20] FENCHEL,W. - On Conjugate Convex Functions, Can J. Math,1, 1949, 73-77.
- [21] FENCHEL,W. - Convex Cones, Sets and Functions (notas mimeografadas), Princeton, 1951.
- [22] FRÉCHET,M. - Les Espaces Abstraits, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

- [23] GELFAND, I.M. - FOMIN, S. - Calculus of Variations, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1963.
- [24] GERMAIN, P. - Cours de Mécanique des Milieux Continus, Masson et C^{ie}, Paris, 1973.
- [25] GOLDSTINE, H.H. - A History of the Calculus of Var. from the 17th through the 19th century, Springer, NY, 1980.
- [26] ISRAEL, R.B. - Convexity in the Theory of Lattice Gases (Introduction by A.S. WIGHTMAN), Princeton Un. Press, NJ, 1979.
- [27] JENSEN, J.L.W.V. - Sur les Fonct. Convexes et les Inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Math. (30), 1906, pp. 175-193.
- [28] KARMANOV, V. - Programmation Mathématique, MIR, Moscou, 1977
- [29] KINDERLEHRER, D. - STAMPACCHIA, G. - An Intr. to Var. Inequalities and their Applications, Academic Press, NY, 1980.
- [30] KOLMOGOROV, A.N. - FOMIN, S. - Elementos de la Teoría de Funciones y del Analisis Funcional, MIR, MOSCOU, 1972.
- [31] LEBESGUE, H. - En marge du Calcul des Variations, Inst. de Mathématiques, Un. de Genève, 1963.
- [32] LIONS, J.L. - Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles, Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [33] LIONS, J.L. - Function Spaces and Optimal Control of Distributed Systems, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1980.

- [34] LIONS, J.L. - MAGENES, E. - Problèmes aux Limites non homogènes et Applications, Dunod, Paris, 1968.
- [35] LUENBERGER, D.G. - Optimization by Vector Spaces Methods, Wiley, 1969.
- [36] MINKOWSKI, H. - Geometrie der Zahlen, Teubner, Leipzig, 1910.
- [37] MINKOWSKI, H. - Theorie der Konvexen Körper, Insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs, Gesammelte Abhandlungen II, Leipzig, 1911.
- [38] MOREAU, J.J. - Fonctionnelles Convexes, Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [39] NEČAS, J. - Les Méthodes Directes en Th. des Eq. Elliptiques, Academia, Prague, 1967.
- [40] NIRENBERG, L. - Var. and Top. Methods in Nonlinear Probs., Bulletin AMS, vol. 4, n° 3, May 1981, 267-302.
- [41] NYKODYM, O. - Sur le principe du min. dans le probl de Dirichlet, Ann. Soc. Polon. Math. (10), 1931, 120-121.
- [42] ODEN, J.T. - REDDY, J.N. - Var. Meth. in Theoretical Mechanics, Springer, Berlin, 1976.
- [43] ORTEGA, J.M. - RHEINBOLDT, W.C. - Iterative Solution of Nonlinear Eq. in Several Variables, Academic Press, NY, 1970.
- [44] RIESZ, F. - NAGY, G.Sz. - Leçons d'Analyse Fonctionnelle, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.

- [45] ROCKAFELLAR, R.T. - Convex Analysis, Princeton Un. Press, 1970.
- [46] STAMPACCHIA, G. - Eq. ellittiques du second ordre à coeff. discontinus, Presses de l'Un. de Montréal.
- [47] TAYLOR, A. - LAY, S. - Intr. to Functional Analysis, Wiley.
- [48] TEMAN, R. - Navier-Stokes Equations: Theory and Num. An., North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [49] TOLAND, J.F. - A duality principle for non-convex opt. and the Calc. of Var., Arch. Rat. Mech. and An. (71), 1979.
- [50] TONELLI, L. - Opere Scelte, Edizioni Cremonese, Roma, 1962.
- [51] TONELLI, L. - La Semicontinuità nel Calcolo delle Variazioni, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo (44), 1920, 167-249.
- [52] VALENTINE, F.A. - Convex Sets, McGraw-Hill, N.Y., 1964
- [53] YOSIDA, K. - Funct. An., Springer, Berlin, 1974.
- [54] YOUNG, L.C. - Lectures on the Calc. of Var. and Opt. Control Th., W.B. Saunders, Philadelphia, 1969.

