TEORIA DO ÍNDICE

Daciberg Lima Gonçalves e José Carlos de Souza Kiihl

COPYRIGHT © - by DACIBERG LIMA GONÇALVES

JOSÉ CARLOS DE SOUZA KIIHL

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida, por qualquer processo, sem a permissão dos autores.

ISBN 85-244-0005-6

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Estrada Dona Castorina 110

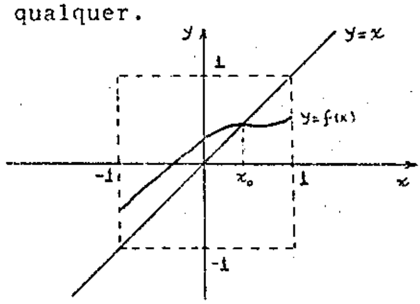
22.460 - Rio de Janeiro - RJ

PREFÁCIO

Seja X um espaço topológico qualquer. Dada uma aplicação contínua $f:X \longrightarrow X$, uma pergunta natural de se fazer é a seguinte: Existem pontos x em X tais que $f(x) = x$?

Êstes pontos quando existem são chamados de pontos fixos da f, e em geral denota-se por $Fix(f)$ o conjunto de todos êles. Dizemos que um espaço X tem a propriedade do ponto fixo se para toda aplicação contínua $f:X \longrightarrow X$, $Fix(f) \neq \emptyset$.

Analisemos um exemplo bem simples. Seja $X = [-1,1]$ o intervalo dos números reais $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Considere $f:X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua qualquer.



Se $f(-1) = -1$ ou $f(1) = 1$, então f tem um ponto fixo. Suponhamos que os extremos do intervalo não sejam pontos fixos. Então temos que

$$f(-1) > -1 \qquad e \qquad f(1) < 1.$$

Considere a aplicação $g:X \longrightarrow X$ definida por $g(x) = f(x) - x$, para todo $x \in [-1,1]$. Temos então que

$$g(-1) > 0 \qquad e \qquad g(1) < 0.$$

Como g é contínua e assume valores positivos e negativos no intervalo, temos que existe um número $-1 \leqslant x_0 \leqslant 1$ tal que $g(x_0) = 0$. Mas então temos $f(x_0) = x_0$. Isto é, f tem um ponto fixo no interior do intervalo X. Provamos assim que o intervalo $[-1,1]$ tem a propriedade do ponto fixo.

Na verdade o intervalo $[-1,1]$ é apenas um caso particular de $X = B^n = \{x \in R^n;\ \|x\| \leqslant 1\}$ a bola fechada de centro na origem e raio 1. No início dêste século (1912) L. F. J. Brouwer demonstrou que B^n tem a propriedade do ponto fixo.

Na Secção 1 destas notas apresentamos uma demonstração dêste resultado. A demonstração dêste resultado que apresentamos aqui é devida a Hirsh. A demonstração original de Brouwer é bastante diferente e conduziu à definição do conceito de grau de uma função $f: S^n \longrightarrow S^n$, onde $S^n = \{x \in R^{n+1};\ \|x\| = 1\}$ é a esfera unitária. O grau de f é denotado por $\deg(f)$.

A noção de grau tem inúmeras aplicações importantes. Além disso, a menos de homotopia, nos dá uma classificação completa das aplicações $f: S^n \longrightarrow S^n$, pois:

i. Usando-se homologia mostra-se fàcilmente que se $f \simeq g$, então $\deg(f) = \deg(g)$.

ii. Usando teoria de homotopia, Hopf mostrou que se $\deg(f) = \deg(g)$, então $f \simeq g$.

Na Secção 2 apresentamos um estudo do conceito de grau e de algumas de suas propriedades.

A noção de grau conduz naturalmente à noção de grau local: Suponha que V é um subconjunto aberto de S^n e $f:V \longrightarrow S^n$ é uma aplicação contínua, então podemos definir o grau local de f em tôrno de $Q \in S^n$, desde que $f^{-1}(Q)$ seja compacto. Se $f^{-1}(Q)$ tiver um número finito de pontos, então o grau local de f em tôrno de Q, denotado por $\deg_Q(f)$, conta o número de pontos, levando-se em conta a "multiplicidade" de cada um.

Na Secção 3, apresentamos o conceito de grau local e estudamos suas principais propriedades.

Retornando à questã dos pontos fixos de uma função, observamos que se $f:R^n \longrightarrow R^n$ então a aplicação

$$(id - f):R^n \longrightarrow R^n$$

dada por $(id - f)(x) = x - f(x)$, para todo $x \in R^n$, é tal que

$$Fix(f) = (id - f)^{-1}(0).$$

Logo o grau local de (id - f) em tôrno da origem, se estiver definido, nos dá o "número" de pontos fixos de f, contados com as suas "multiplicidades".

É exatamente esta idéia que motiva a definição de índice dos pontos fixos de uma função definida em um aberto $V \subset R^n$ e com valores em R^n.

Na Secção 4 definimos o índice dos pontos fixos de aplicações $f:V \longrightarrow R^n$ com $V \subset R^n$ aberto e $Fix(f) \subset V$ compacto. São também estudadas suas propriedades principais.

Uma das propriedades do índice, chamada de Comutatividade oferece uma maneira de se definir o conceito de índice para outros espaços.

Isto é feito na Secção 5, onde estudamos o índice para espaços ENR, isto é, espaços que são retrato de vizinhança euclideana.

Quando fala-se de pontos fixos, não se pode deixar de mencionar o famoso teorema de Lefschetz. Lefschetz provou que para determinado tipo de espaços pode-se definir um número (chamado o número de Lefschetz), denotado por $\Lambda(f)$, tal que se $f: X \longrightarrow X$ e $\Lambda(f) \neq 0$, então f tem pelo menos um ponto fixo.

Na Secção 6 enunciamos o Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz e um teorema posterior a êste, devido a Hopf, que relaciona o índice de f com o número de Lefschetz $\Lambda(f)$. Isto motivou um teorema chamado de Lefschetz-Hopf, o qual relaciona o índice com o número de Lefschetz. Êste teorema tem inúmeras aplicações.

Na Secção 7 apresentamos a Teoria do Índice do ponto de vista axiomático.

Retornando ao Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz, êle também pode ser enunciado da seguinte maneira: Se f não tem pontos fixos, então $\Lambda(f) = 0$. Uma pergunta natural de se fazer é a seguinte: Vale a recíproca?

Na verdade o número de Lefschetz é um invariante homotópico. Então a pergunta acima deveria ser: Se $\Lambda(f) = 0$ existe alguma aplicação g homotópica a f, tal que g não tem ponto fixo?

A resposta é negativa mesmo para complexos simpliciais finito, e até mesmo para superfícies compactas. Sòmente em situações especiais pode-se chegar a uma resposta afirmativa. No entanto existe um outro número, chamado o número de Nielsen de f, denotado por $N(f)$. $N(f)$ é um inteiro não negativo, que é definido utilizando-se a Teoria do Índice e vem a ser um invariante homotópico e é na verdade um limitante inferior para o número de pontos fixos das funções g homotópicas a f. Se X tem a propriedade de que para toda $f:X \longrightarrow X$ existe uma função g homotópica a f com exatamente $N(f)$ pontos fixos, então X é chamado um espaço de Wecken.

Na Secção 8 definimos os números de Nielsen e descrevemos o problema do número mínimo de pontos fixos.

Na Secção 9 apresentamos dois exemplos onde mostramos que o número de Nielsen é um invariante mais forte que o número de Lefschetz, e que o bouquet de dois círculos não é um espaço de Wecken.

Na Secção 10 mostramos que S^1, S^2, o toro e a garrafa de Klein são espaços de Wecken.

A teoria do índice para ENR que apresentamos aqui nestas notas é devida a Dold [8] . Ela é menos geral que aquela desenvolvida por Leray ([16], [17]) mas é a que parece mais adequada para ser utilizada no contexto de Topologia Algébrica. G. de Cecco redigiu umas notas:

"Teoria dei Punti Fissi"

Quaderni dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche

HEIDELBERG - 1975

sôbre um curso que o Prof. A. Dold desenvolveu em 1975. Nestas notas é coberta a teoria de índice para espaços ENR, apresentada uma demonstração do Teorema de Lefschetz-Hopf para espaços ENR compactos. E é apresentada uma generalização da teoria para espaços ENR sôbre B (ENR_B).

R. Brown no seu livro:

"The Lefschetz Fixed Point Theorem"

Scott, Foresman and Co, Glenview-London (1971)

apresenta tôda a teoria de pontos fixos e do índice para espaços ANR. Nos capítulos VI, VII e VIII êle desenvolve o estudo dos números de Nielsen e problemas a êles relacionados.

Finalmente, gostaríamos de mencionar que Fadell em [11] apresenta um survey excelente sôbre o estado de desenvolvimento dêste assunto até à época de 1970.

São Paulo, 22 de abril de 1983.

Daciberg Lima Gonçalves

José Carlos de Souza Kiihl

Í N D I C E

PREFÁCIO i

1. O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER 1

2. GRAU DE UMA APLICAÇÃO 8

3. GRAUS LOCAIS 15

4. O ÍNDICE DOS PONTOS FIXOS 26

5. ESPAÇOS ENR E ÍNDICE PARA ESPAÇOS ENR 39

6. O TEOREMA DOS PONTOS FIXOS DE LEFSCHETZ 50

7. AXIOMATIZAÇÃO 56

8. NÚMEROS DE NIELSEN E O PROBLEMA DO NÚMERO MÍNIMO DE PONTOS FIXOS ... 60

9. DOIS EXEMPLOS 69

10. O CÍRCULO E ALGUMAS SUPERFÍCIES COMPACTAS 74

REFERÊNCIAS 96

1. O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER

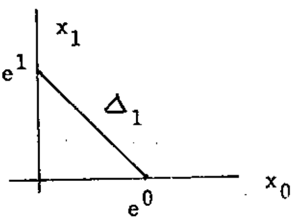
Inicialmente recordamos alguns conceitos básicos da Teoria de Homologia Singular e estabelecemos algumas notações que serão utilizadas no texto. A referência básica para esta secção é o livro "Lectures on Algebraic Topology", de A. Dold [9].

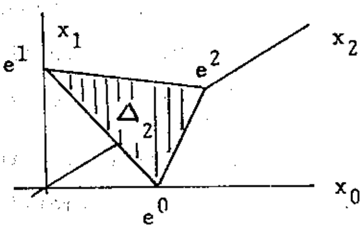
1.1 DEFINIÇÃO: O q-simplexo Δ_q consiste de todos os pontos $x = (x_0, x_1, \ldots, x_q) \in R^{q+1}$ tais que

(a) $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 0, 1, \ldots, q$,

(b) $x_0 + x_1 + \ldots + x_q = 1$.

Por exemplo Δ_0 é um ponto, Δ_1 é um segmento, Δ_2 é um triângulo equilátero, Δ_3 é um tetraedro regular





Os vetores unitários $e^j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ de R^{q+1} estão em Δ_q; êles são chamados os vértices de Δ_q.

1.2 DEFINIÇÃO: Uma aplicação f de Δ_q em R^n é dita linear se existir uma transformação linear (no sentido usual) $F : R^{q+1} \longrightarrow R^n$ tal que $F|\Delta_q = f$.

Observe que se $P^0, P^1, \ldots, P^q \in R^n$ são pontos arbitrarios, então existe uma única aplicação linear $f : \Delta_q \longrightarrow R^n$ tal que $f(e^i) = P^i$, a saber $f(x) = x_0P^0 + \ldots + x_qP^q$. A imagem $f(\Delta_q)$ consiste de todos os pontos $P = x_0P^0 + \ldots + x_qP^q$ de R^n com

$0 \leqslant x_i \leqslant 1$ e $x_0 + \ldots + x_q = 1$. Dêste modo as aplicações lineares de Δ_q ficam completamente determinadas conhecendo-se os seus valores nos vértices.

1.3 DEFINIÇÃO: Um par de espaços (topológicos) (X,A) consiste de um espaço X e um subespaço $A \subset X$. Se (X,A), (Y,B) são pares de espaços então uma aplicação de pares $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ é uma aplicação contínua f de X em Y, tal que $f(A) \subset B$.

No §3 do Capítulo III do livro de Dold, mencionado acima, temos a definição de homologia singular (com coeficientes inteiros) para um par (X,A). Denotamos por $H_q(X,A)$ o q-ésimo grupo de homologia relativo de X mod A. Se $A = \phi$ denotamos simplesmente $H_q(X)$.

1.4 Se P é um ponto temos que

$$\begin{cases} H_0(P) = Z & \text{(anel dos números inteiros)} \\ H_i(P) = 0 & \text{se } i \neq 0 . \end{cases}$$

1.5 Para cada espaço X temos a aplicação constante $c : X \longrightarrow P$ que induz um homomorfismo $c_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(P)$, chamado a aumentação. Denotamos $\tilde{H}_q(X) = \ker (c_* : H_q(X) \longrightarrow H_q(P))$ e êste é chamado o grupo de homologia reduzida do espaço X. Observe que por (1.4), se $q \neq 0$ temos $\tilde{H}_q(X) = H_q(X)$.

1.6 DEFINIÇÃO: Se $i : A \subset X$ é um par de espaços, dizemos que A é um retrato de X se existe uma aplicação $r : X \longrightarrow A$ tal que temos $ri = id$; a aplicação r é dita uma retração.

Por exemplo, cada ponto P de X é um retrato de X; se B é um espaço qualquer e Q é um ponto de B, então $A \approx A \times Q \subset A \times B$

e $r : A \times B \longrightarrow A \times Q$, dada por $r(a,b) = (a,Q)$ é uma retração.

Se (X,A) é um par de espaços então A é dito um retrato de vizinhança (em X) se A tem uma vizinhança em X da qual é retrato. Todo retrato é um retrato de vizinhança, mas não reciprocamente: se $X = [0,1]$ é o intervalo unitário e $A = \{0\} \cup \{1\}$ então A é um retrato de vizinhança mas não é um retrato.

Recordamos que

$$S^n = \left\{x \in R^{n+1};\ \|x\| = 1\right\}$$

é a n-esfera usual,

$$B^n = \left\{y \in R^n\ ;\ \|y\| \leqslant 1\right\}$$

é a n-bola usual, onde $\|x\| = (x_0^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. A bola aberta $\overset{o}{B}{}^n = \left\{y \in R^n\ ;\ \|y\| < 1\right\}$ é também chamada n-célula usual. Observe que S^n é a fronteira $\dot{B}^{n+1}$ de B^{n+1}.

Temos a seguinte proposição, cuja demonstração está na página 56 do livro de Dold citado anteriormente.

1.7 PROPOSIÇÃO:

(a) $\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n \\ Z & \text{se } k = n \end{cases}$

(b) $H_k(B^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n \\ Z & \text{se } k = n \end{cases}$

(c) $H_k(R^n, R^n - P) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n \\ Z & \text{se } k = n \end{cases}$

para qualquer ponto P de R^n.

Como consequências imediatas desta proposição temos:

1.8 COROLÁRIO: Esferas de dimensões diferentes não são homeomorfas. Espaços euclideanos de dimensões diferentes não são homeomorfos.

Demonstração:

Para esferas o resultado está claro por (a) de (1.7). Se $h : R^m \approx R^n$ então $h : (R^m, R^m - 0) \approx (R^n, R^n - h(0))$, então por (c) de (1.7) temos que $m = n$.

1.9 COROLÁRIO: S^n não é retrato de B^{n+1}.

Demonstração:

De fato se $r : B^{n+1} \longrightarrow S^n$ fôsse uma retração então $ri = id$, donde seguiria que a composta

$$\tilde{H}(S^n) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}(B^{n+1}) \xrightarrow{r_*} \tilde{H}(S^n)$$

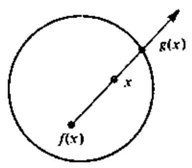
seria a identidade. Mas isto é impossível pois $\tilde{H}(S^n) \neq 0$ ao passo que $\tilde{H}(B^{n+1}) = 0$.

Podemos agora enunciar e dar uma demonstração para o teorema do ponto fixo de Brouwer.

1.10 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER: Se $f : B^{n+1} \longrightarrow B^{n+1}$ é uma aplicação contínua, então f tem pelo menos um ponto fixo.

Demonstração:

Suponha que f não tenha ponto fixo, isto é, $f(x) \neq x$ para todo x de B^{n+1}. Então para cada x de B^{n+1} considere a semi-reta saindo de f(x) e passando por x, e denote por g(x) a interseção desta semi-reta com o bordo S^n de B^{n+1}.



Então a função $g : B^{n+1} \longrightarrow S^n$ definida na página anterior é uma aplicação contínua e $g(x) = x$ para todo x de S^n. Mas isto contradiz o corolário (1.9), pois $gi = id$.

A primeira demonstração para o teorema acima foi dada por Brouwer em 1912. A demonstração dada aqui não é a original de Brouwer mas sim de Hirsh. Na demonstração original de Brouwer as técnicas desenvolvidas levaram à definição de grau de uma aplicação, noção esta que além de importante tem aplicações bastante interessantes; é o que veremos na secção seguinte.

Antes de passarmos para a próxima secção recordamos a seguinte proposição:

1.11 PROPOSIÇÃO: Se (X,A) é um par de espaços com $A \neq \phi$ então temos a sequência exata

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{q+1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{q+1}(X) \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_q(A)$$
$$\xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{j_*} \cdots$$

Esta sequência é chamada a sequência de homologia reduzida do par (X,A).

EXERCÍCIOS

1.1 Um espaço topológico X é dito ter a propriedade do ponto fixo se para tôda função contínua $f: X \longrightarrow X$, f tem pelo menos um ponto fixo. Mostre que a propriedade do ponto fixo é um invariante topológico.

Obs.: A propriedade do ponto fixo não é um invariante homotópico (não é óbvio).

1.2 Chamemos de bouquet de X com Y à união disjunta de X e Y, com um ponto $x_0 \in X$ identificado com um ponto $y_0 \in Y$. Denotemos por $X \vee Y$ o bouquet de X com Y. Mostre que se X e Y têm a propriedade do ponto fixo, então $X \vee Y$ tem a propriedade do ponto fixo.

1.3 Dê um exemplo de um espaço X que tem a propriedade do ponto fixo, mas que o espaço quociente X/A, onde A é um subespaço de X, não tem a propriedade do ponto fixo.

1.4 Mostre que um bouquet de um número finito de círculos não tem a propriedade do ponto fixo.

1.5 Mostre que se removermos do disco B^2 um número finito de discos abertos o espaço obtido não tem a propriedade do ponto fixo.

1.6 Mostre que a retração preserva a propriedade do ponto fixo. Isto é, se o espaço X tem a propriedade do ponto fixo e $r:X \longrightarrow A$ é uma retração, então A tem a propriedade do ponto fixo.

1.7 Mostre que a função $g:B^{n+1} \longrightarrow S^n$, definida na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, é contínua.

2. GRAU DE UMA APLICAÇÃO

Inicialmente recordamos que se h é um endomorfismo de um grupo cíclico infinito G então h é dado por um inteiro, isto é, existe d em Z, determinado de maneira única, tal que $h(x) = d.x$ para todo x de G. Aplicando êste resultado a grupos de homologia podemos definir a noção de grau em Topologia Algébrica. Êste conceito tem inúmeras aplicações interessantes como veremos adiante.

2.1 DEFINIÇÃO: Se $f : S^n \longrightarrow S^n$ (resp. $f : (B^{n+1}, S^n) \longrightarrow (B^{n+1}, S^n)$) é uma aplicação contínua qualquer, então o endomorfismo induzido f_* de $\tilde{H}_n(S^n) = Z$ (resp. $H_{n+1}(B^{n+1}, S^n) = Z$) é dado por $f_*(x) = \deg(f).x$, onde $\deg(f) \in Z$ é um inteiro determinado de maneira única. Êste inteiro deg(f) é chamado o grau de f (algumas vêzes também chamado de grau de Brouwer de f).

Para determinar o inteiro deg(f) basta tomar um gerador $a \in H_n(S^n)$, então $f_*(a) = \deg(f).a$. Se o gerador escolhido for $-a$ temos que $f_*(-a) = -f_*(a) = -\deg(f).a = \deg(f).(-a)$. De modo que êste inteiro independe da escolha do gerador.

As seguintes propriedades básicas do grau de uma aplicação são imediatas.

2.2 PROPOSIÇÃO: (a) $\deg(id) = +1$

(b) $\deg(f o g) = \deg(f).\deg(g)$

(c) Se $f \simeq g$, então $\deg(f) = \deg(g)$

(d) Se f é uma aplicação constante então $\deg(f) = 0$

(e) Se f é uma equivalência homotópica então deg(f) é igual a ± 1

(f) Se $f : (B^{n+1}, S^n) \longrightarrow (B^{n+1}, S^n)$ então $\deg(f) = \deg(f|S^n)$.

Demonstração:

As propriedades (a)-(e) são imediatas. A propriedade (f) segue do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(B^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_{n+1}(B^{n+1}, S^n) \\ \partial_* \downarrow \cong & & \cong \downarrow \partial \\ \bar{H}_n(S^n) & \xrightarrow{(f\ S^n)_*} & \bar{H}_n(S^n) \end{array}$$

Uma propriedade menos óbvia é que dado um inteiro m em Z existe uma aplicação $f : S^n \longrightarrow S^n$ tal que $\deg(f) = m$ (veja os exercícios). Tôdas estas propriedades são resultados da Teoria de Homologia, uma propriedade muito mais sofisticada é o resultado da Teoria de Homotopia devido a Hopf, que é a recíproca da propriedade (c) de (2.2): se $\deg(f) = \deg(g)$ então $f \simeq g$ (veja 7.5.7, página 398 do livro de Spanier). Assim temos que a noção de grau nos fornece um invariante algébrico completo para o estudo das classes de homotopia de aplicações de S^n em S^n.

2.3 PROPOSIÇÃO: O grau de uma aplicação linear $f : (\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ $(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ que permuta os vértices é igual a assinatura da permutação, isto é, $\deg(f) = \operatorname{sign}(f|\{e^0, e^1, \ldots, e^n\})$. O grau de uma aplicação ortogonal $g : S^n \longrightarrow S^n$ é igual a seu determinante, isto é, $\deg(g) = \det(g)$.

A demonstração para a proposição (2.3) pode ser encontrada na página 63 do livro de Dold. Observe que a aplicação antípoda $A : S^n \longrightarrow S^n$, dada por $A(x) = -x$, é uma aplicação ortogonal e como $\det(A) = (-1)^{n+1}$, temos que $\deg(A) = (-1)^{n+1}$.

2.4 PROPOSIÇÃO: Se $f, g : S^n \longrightarrow S^n$ são aplicações contínuas tais que $f(x) \neq g(x)$ para todo x em S^n, então g é homotópica a composta Af.

Demonstração:

Geomètricamente a idéia é a seguinte: se $g(x) \neq f(x)$ então o segmento em R^{n+1} que une $Af(x)$ a $g(x)$ não passa pela origem. Assim projetando radialmente da origem sôbre a esfera obtemos um caminho em S^n que une $Af(x)$ a $g(x)$. Êstes caminhos fornecem a homotopia desejada. Definindo a homotopia explìcitamente temos a função $H : S^n \times I \longrightarrow S^n$, dada por

$$H(x,t) = \frac{(1-t)Af(x) + tg(x)}{\|(1-t)Af(x) + tg(x)\|} .$$

Observe que se $f = id$, a proposição acima nos diz: Se a aplicação $g : S^n \longrightarrow S^n$ não tem pontos fixos, então g é homotópica a aplicação antípoda A; logo nêste caso $\deg(g) = (-1)^{n+1}$. Se $f = A$, a proposição nos diz: Se g não tem pontos antípodas, isto é, se $g(x) \neq -x$ para todo x em S^n, então g é homotópica a aplicação identidade, e portanto $\deg(g) = +1$.

2.5 COROLÁRIO: Tôda aplicação $g: S^{2n} \longrightarrow S^{2n}$ tem pelo menos um ponto fixo ou um ponto antípoda.

Demonstração:

Se $g(x) \neq x$ para todo x, então como vimos acima g é homotópica a aplicação antípoda A. Por outro lado, se $g(x) \neq -x$ para todo x, então g é homotópica a composta AA = identidade. Quando ambas as condições valem, temos

$$\deg(A) = \deg(g) = \deg(id).$$

Contudo, $\deg(A) = (-1)^{2n+1} = -1$ e $\deg(id) = +1$, e as duas condições não podem valer simultâneamente.

Recordamos que S^n é uma variedade de dimensão n, isto é, ela é localmente homeomorfa a R^n. Em cada ponto x de S^n temos o espaço tangente $T_x(S^n)$. Com S^n identificada com a esfera unitária em R^{n+1}, $T_x(S^n)$ é o hiperplano n-dimensional em R^{n+1} que é tangente a S^n em x. Podemos transladar êste hiperplano para a origem onde êle pode ser visto como o subespaço n-dimensional ortogonal ao vetor x. É claro que quando x varia em S^n êstes subespaços variam de modo adequado. Um campo de vetores em S^n é uma aplicação contínua que associa a cada ponto x em S^n um vetor no correspondente subespaço. Um campo de vetores V é dito não-nulo se $V(x) \neq 0$ para todo x em S^n.

2.6 COROLÁRIO: Não existe nenhum campo de vetores não-nulo em S^{2n}.

Demonstração:

Se V é um campo de vetores não-nulo em S^{2n}, então $W(x) = V(x)/\|V(x)\|$ é um campo de vetores em S^{2n} de comprimento unitário. Assim $W : S^{2n} \longrightarrow S^{2n}$ é uma aplicação contínua com W(x) ortogonal a x para cada x, mas isto é impossível pois contradiz o corolário (2.5).

Observamos que nas esferas de dimensão ímpar sempre existem campos de vetores não-nulos. Basta definir em S^{2n+1}, por exemplo o campo de vetores $V(x) = (x_1,-x_o,\ldots,x_{2n+1},-x_{2n})$.

E X E R C Í C I O S

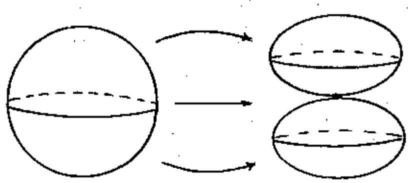
2.1 Se $f: S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$ não tem ponto fixo, mostre que f é homotópica à identidade

2.2 Se $g: S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$ é homotópica à constante, mostre que então g tem pelo menos um ponto fixo.

2.3 Seja C o corpo de todos os números complexos. Considere a função $p: C \longrightarrow C$, dada por $p(z) = z^3 - 15z$. Mostre que p não tem zeros em S^1. Defina $\overline{p}: S^1 \longrightarrow S^1$ pondo $\overline{p}(z) = p(z) / |p(z)|$. Calcule o grau de p(z).

2.4 Considere $S^3 \subset R^4$, com R^4 munido da multiplicação dos quaterniônicos. Mostre que a aplicação $f: S^3 \longrightarrow S^3$ dada por $f(z) = z^n$ tem grau n.

2.5 Dadas duas aplicações $f_a, f_b: S^n \longrightarrow S^n$ de graus, respectivamente, a e b; vamos definir $f_a * f_b: S^n \longrightarrow S^n$ da seguinte maneira: seja $\theta: S^n \longrightarrow S^n_{\prime} \vee S^n_{\prime\prime}$ dada pela figura



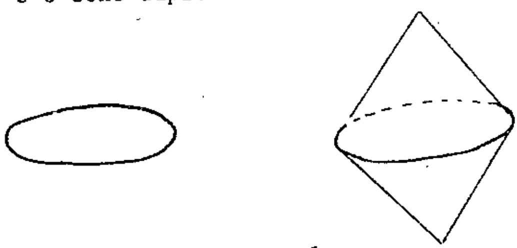
e $\nabla: S^n_{\prime} \vee S^n_{\prime\prime} \longrightarrow S^n$ dada por $\nabla(x, x_0) = \nabla(x_0, x) = x$.

Então $f_a \ast\!\ast f_b = \nabla (f_a \vee f_b)\ \theta$. Mostre que $\deg(f_a \ast\!\ast f_b) = \deg(f_a) + \deg(f_b)$. Qual é um homeomorfismo que leva a orientação de $S^n_{\prime}$ na de $S^n_{\prime\prime}$? (Veja os casos $n = 1$ e 2).

2.6 Mostre que tôda aplicação $f: S^0 \longrightarrow S^0$ tem grau 0 ou ±1.

2.7 Seja $k \in Z$ um inteiro arbitrário, mostre que existe uma aplicação $f: S^1 \longrightarrow S^1$ de grau k.

2.8 A suspensão de um espaço Y, denotada por ΣY, é o espaço obtido de $I \times Y$ pela identificação de cada um dos subconjuntos $\{0\} \times Y$ e $\{1\} \times Y$ a um ponto. Mais intuitivamente, ΣY é o cone duplo sôbre Y.



(a) Mostre que $\Sigma S^n = S^{n+1}$.

(b) Se $f: X \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua, então temos que $id \times f: I \times X \longrightarrow I \times Y$ leva cada subconjunto $\{t\} \times X$ em $\{t\} \times Y$ e, portanto induz uma aplicação $\Sigma f: \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$ entre as suspensões. Em particular, se $f: S^n \longrightarrow S^n$ então $\Sigma f: S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$. Mostre que $\deg(\Sigma f) = \deg(f)$.

<u>COROLÁRIO</u>: Para $n > 0$ existe aplicação $S^n \longrightarrow S^n$ de grau arbitrário $k \in Z$.

3. GRAUS LOCAIS

A noção de grau local vem extender a noção de grau estudada na secção anterior. Usaremos esta noção para definir o conceito de índice de uma função em tôrno de um ponto fixo isolado ou, mais geralmente, em tôrno de um subconjunto compacto contendo o conjunto dos pontos fixos.

3.1 DEFINIÇÃO: Considere a esfera S^n, com $n > 0$. Seja $V \subset S^n$ um subconjunto aberto e $f : V \longrightarrow S^n$ uma aplicação contínua. Fixemos um ponto $Q \in S^n$ tal que $f^{-1}(Q)$ seja um compacto. Considere a composta

$$H_n(S^n) \xrightarrow{j_*} H_n(S^n - f^{-1}(Q)) \overset{exc}{\cong} H_n(V, V - f^{-1}(Q))$$

$$\xrightarrow{f_*} H_n(S^n, S^n - Q) \xrightarrow{j_*^{-1}} H_n(S^n)$$

onde exc é o isomorfismo induzido pela excisão e j_* é o isomorfismo dado pelo fato de que $S^n - P$, onde P é um ponto qualquer, é homotópico a um ponto. A composta é um homomorfismo da forma

$$x \longmapsto \deg_Q(f) . x$$

onde $\deg_Q(f)$ é um inteiro chamado de grau local de f em tôrno de Q.

No caso em que o aberto V é tôda a esfera S^n o grau local em tôrno de qualquer ponto $Q \in S^n$ é igual ao grau da f, como veremos na proposição seguinte.

3.2 PROPOSIÇÃO: Seja $f: S^n \longrightarrow S^n$ e $Q \in S^n$, então temos que

$$\deg(f) = \deg_Q(f).$$

Demonstração:

Considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H_n(S^n) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(S^n, S^n - f^{-1}(Q)) \arrow[r, "f_*"] & H_n(S^n, S^n - Q) \\
H_n(S^n) \arrow[urr, "j'_*"'] & &
\end{tikzcd}$$

Logo $j'^{-1}_* f_* j_* = f_*$, e portanto segue-se o resultado.

3.3 PROPOSIÇÃO: Seja $V \subset S^n$ um aberto e $f: V \longrightarrow S^n$ uma aplicação contínua. Então temos

i. $\deg_Q(f) = 0$, se $Q \notin \mathrm{Im}(f)$;

ii. $\deg_Q(f) = 1$, para todo $Q \in V$ se f é a inclusão;

iii. $\deg_Q(f) = \pm 1$, para todo $Q \in f(V)$ se f é um homeomorfismo sôbre um aberto $f(V)$ de S^n.

Demonstração:

A primeira afirmação é clara pois $f^{-1}(Q) = \emptyset$ e

$H_n(S^n, S^n - f^{-1}(Q)) = 0.$

A segunda e a última afirmações seguem do fato de que tôdas as aplicações envolvidas na composta que define o grau local são isomorfismos. Como os únicos isomorfismos de Z são a identidade e menos a identidade o resultado segue.

Agora passaremos a apresentar quatro propriedades de grau local que serão relevantes para o estudo de índice que faremos posteriormente.

3.4 PROPOSIÇÃO (LOCALIZAÇÃO): Seja $V \subset S^n$ um subconjunto aberto, $f: V \longrightarrow S^n$ uma aplicação contínua e $Q \in S^n$. Se $f^{-1}(Q) \subset K \subset U \subset V$, onde K é um subconjunto compacto e U é uma vizinhança de K, então o grau ao redor de Q pode também ser dado pela composta

$$H_n(S^n) \xrightarrow{j_*} H_n(S^n, S^n - K) \overset{\text{exc}}{\cong} H_n(U, U-K)$$

$$\xrightarrow{f_*} H_n(S^n, S^n - Q) \cong H_n(S^n)$$

Demonstração:

A demonstração segue imediatamente da comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H_n(S^n, S^n - f^{-1}(Q)) \arrow[r, phantom, "\cong"] & H_n(V, V - f^{-1}(Q)) \arrow[dr, "f_*"] & \\ H_n(S^n) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & H_n(S^n, S^n - Q) \\ & H_n(S^n, S^n - K) \arrow[r, phantom, "\cong"] & H_n(U, U-K) \arrow[ur, "f_*"'] & \end{tikzcd}$$

A proposição acima é que nos dá a justificativa para o adjetivo "local" no nome dêste grau, pois podemos diminuir V a qualquer vizinhança U de $f^{-1}(Q)$. A vizinhança U pode ser qualquer $f^{-1}(W)$ onde W é uma vizinhança qualquer de Q.

3.5 PROPOSIÇÃO (ADITIVIDADE): Sejam $f:V \longrightarrow S^n$ e $Q \in S^n$ como na definição (3.1). Suponha que V é a união finita de subconjuntos abertos, $V = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$, de modo que os subconjuntos $f_i^{-1}(Q)$, onde $f_i = f|V_i$, são mutuamente disjuntos. Então temos que

$$\deg_Q(f) = \sum_{i=1}^{r} \deg_Q(f_i).$$

3.6 PROPOSIÇÃO (INVARIÂNCIA HOMOTÓPICA): Seja $f_t:V \longrightarrow S^n$ uma homotopia, onde $V \subset S^n$ e $Q \in S^n$ são como na definição (3.1), isto é $f_t^{-1}(Q)$ é compacto para todo $t \in [0,1]$. Além disso supomos que a união $\bigcup \{f_t^{-1}(Q) \; ; \; t \in [0,1]\}$ é um subconjunto compacto. Então temos que

$$\deg_Q(f_0) = \deg_Q(f_1).$$

Observamos que a condição da compacidade de $\bigcup_{t \in I} f_t^{-1}(Q)$ é realmente necessária. De fato, considere

$$S^1 = R \cup \{\infty\} \qquad \text{e} \qquad V = R$$

seja $f_t:R \longrightarrow S^1$ a aplicação induzida por $r_t:R \longrightarrow R$, dada por $r_t(x) = 1 + (1-t)x$ para todo $x \in R$. Vemos que $\bigcup_{t \in I} f_t^{-1}(0) = [1,\infty)$, não é compacto, e $\deg_0(f_0) = 1$ e $\deg_0(f_1) = 0$.

3.7 PROPOSIÇÃO: Sejam $V \subset S^n$ um subconjunto aberto, $f: V \longrightarrow S^n$ e $g: S^n \longrightarrow S^n$ duas aplicações contínuas. Se $\deg_Q(f)$ está definido para algum $Q \in S^n$, então o grau em tôrno de Q está também definido para a aplicação composta

$$fg : g^{-1}(V) \longrightarrow S^n$$

e vale

$$\deg_Q(fg) = \deg_Q(f).\deg(g).$$

Observe que não vale em geral $\deg_Q(gf) = \deg_P(f)\deg(g)$ onde $g(P) = Q$. De fato, basta tomar $g: S^1 \longrightarrow S^1$ a aplicação dada por $g(z) = z^2$, considerar $V = \{e^{i\theta} ; -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$, a aplicação $f: V \longrightarrow S^1$ a inclusão, e escolher $P = Q = 1$. Então temos que

$$\deg_P(f) = 1 \quad \text{e} \quad \deg_Q(gf) = 1$$

pela proposição (3.3). Portanto a fórmula não vale, pois

$$\deg(g) = 2.$$

As demonstrações das três proposições acima são bastante semelhantes. Apresentamos aqui as demonstrações de duas delas e deixamos a demonstração da terceira a cargo do leitor.

Demonstração de (3.5):

Escolha vizinhanças abertas U_i de $f_i^{-1}(Q)$ em V_i de modo que tenhamos $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$, e denote $U = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$. Considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_n(S^n) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\{id\}"] & H_n(S^n,S^n-f^{-1}(Q)) \arrow[r, "exc", "\cong"'] \arrow[d, "\{k_{i_*}\}"] & H_n(U,U-f^{-1}(Q)) \arrow[r, "f_*"] & H_n(S^n,S^n-Q) \arrow[r, "\cong"] & H_n(S^n) \\
\oplus H_n(S^n) \arrow[r, "\oplus j_{i_*}"] & \oplus H_n(S^n,S^n-f_i^{-1}(Q)) \arrow[r, "exc", "\cong"'] & \oplus H_n(U_i,U_i-f_i^{-1}(Q)) \arrow[u, "\{k'_{i_*}\}"', "\cong"] \arrow[r, "\oplus f_{i_*}"] & \oplus H_n(S^n,S^n-Q) \arrow[u, "\{id\}"'] \arrow[r, "\cong"] & \oplus H_n(S^n) \arrow[u, "\{id\}"']
\end{tikzcd}$$

onde tôdas as somas são para $i = 1,\ldots,r$, onde $\{id\}$ é a aplicação cujas componentes são tôdas iguais à identidade, e k_i, k'_i denotam inclusões. A função $\{k'_{i_*}\}$ é um isomorfismo pois U é a união disjunta de U_i. A comutatividade do diagrama é clara exceto talvez pelo segundo quadrado; lá afirma que a composta

$$H_n(U_i,U_i-f_i^{-1}(Q)) \xrightarrow{k'_{i_*}} H_n(U,U-f^{-1}(Q))$$

$$\longrightarrow H_n(S^n,S^n-f^{-1}(Q)) \xrightarrow{k_{i'_*}} H_n(S^n,S^n-f_{i'}^{-1}(Q))$$

coincide com a inclusão para $i = i'$ (o que é óbvio), e é zero se $i \neq i'$ (isto segue do fato que $U_i \subset S^n-f_{i'}^{-1}(Q)$).

Pela proposição (3.4) temos que a linha superior do diagrama acima nos define $\deg_Q(f)$, enquanto que a linha inferior nos define $\deg_Q(f_i)$. Portanto a composta da linha inferior com as verticais exteriores nos dá que

$$\deg_Q(f) = \sum_{i=1}^{r} \deg_Q(f_i) .$$

<u>Demonstração de (3.6)</u>:

Considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(S^n,S^n-K_0) \arrow[r, "exc", "\cong"'] & H_n(V,V-K_0) \arrow[dr, "f_{0*}"] & \\
H_n(S^n) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & H_n(S^n,S^n-K) \arrow[r, "exc", "\cong"'] & H_n(V,V-K) \arrow[u, "i_{0*}"'] \arrow[d, "i_{1*}"] & H_n(S^n,S^n-Q)\cong H_n(S^n) \\
 & H_n(S^n,S^n-K_1) \arrow[r, "exc", "\cong"'] & H_n(V,V-K_1) \arrow[ur, "f_{1*}"'] &
\end{tikzcd}$$

Como por hipótese temos que f_0 e f_1 são homotópicas, segue-se que f_0i_0 e f_1i_1 são homotópicas como funções entre os pares $(V,V-K)$ e (S^n,S^n-Q). Logo

$$\deg_Q(f_0) = \deg_Q(f_1).$$

Nêste ponto poderíamos colocar a seguinte pergunta: Suponha dada uma função a valores nos inteiros Z, definida nas ternas (U,f,Q) onde $U\subset S^n$ é aberto, $f:U \longrightarrow S^n$ é uma aplicação contínua, $Q\in S^n$ é um ponto tal que $f^{-1}(Q)$ seja compacto, e satisfazendo as propriedades das proposições (3.2), (3.4), (3.5) e (3.6). É esta função necessàriamente o grau local acima definido?

3.8 EXEMPLOS:

(a) Seja $n>0$. Para todo inteiro $k\in Z$ sabemos que existe uma aplicação

$$f_k : S^n \longrightarrow S^n$$

tal que $\deg(f_k) = k$. (Veja exercício (2.8)). Na construção de f_k nêste exercício citado acima partimos de uma aplicação de S^1 em S^1, $z \longmapsto z^k$, e usamos a noção de suspensão. Apresentamos a seguir um outro exemplo de construção de aplicação de grau $k \in Z$, onde utilizamos a idéia sugerida pelo resultado da proposição (3.5).

(b) Seja como antes $n > 0$ e $k \in Z$ um inteiro dado. Vamos definir $f : S^n \longrightarrow S^n$ tal que $\deg(f) = k$. Identificamos S^n com $R^n \cup \{\infty\}$.

Primeiramente defina $g : S^n \longrightarrow S^n$ pondo

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } \|x\| \leqslant 1 \\ x(2 - \|x\|)^{-1} & \text{se } 1 \leqslant \|x\| \leqslant 2 \\ \infty & \text{se } \|x\| \geqslant 2. \end{cases}$$

Claramente temos que $\deg(g) = \deg_0(g) = +1$. Para cada ponto $P \in R^n$ considere também a translação paralela $t_P : S^n \longrightarrow S^n$ onde $t_P(x) = x - P$ se $x \in R^n$ e $t_P(\infty) = \infty$. Como $t_P \simeq id$ nós temos que

$\deg_0(gt_P) = \deg_0(g)\deg(t_P) = \deg_0(g) = +1$ por (3.7). Suponha agora que $k \geqslant 0$, e escolha k pontos $P_1, \ldots, P_k \in R^n$ de modo que a distância entre quaisquer dois dêles seja maior que 4; se B_i denota a bola de centro em P_i e raio 2 então $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Defina

$$f : S^n \longrightarrow S^n \quad , \quad f|B_i = (gt_{P_i})|B_i \quad , \quad f(x) = \infty \text{ se } x \notin \bigcup_{i=1}^{k} B_i.$$

Claramente $f^{-1}(0) = \{P_1,\dots,P_k\}$, e por (3.5) temos que

$$\deg(f) = \sum \deg_0(f\ B_i) = \sum \deg_0(gt_{p_i}) = k.$$

Se $k < 0$ construimos f' de grau $-k$ e a seguir pomos $f = rf'$, onde r é a reflexão por um hiperplano; então

$$\deg(f) = \deg(r)\deg(f') = (-1)(-k) = k.$$

Observe que para $k > 0$ a aplicação f construida acima é tal que cada ponto $Q \in R^n$ tem exatamente k pontos na sua imagem inversa, enquanto que ∞ tem infinitos, ainda assim temos $\deg_\infty(f) = k$ pois $\deg_\infty(f) = \deg(f)$.

E X E R C Í C I O S

3.1 Seja $p:C \longrightarrow C \subset S^2$ um polinômio. Vamos extender p a uma $\hat{p}:S^2 \longrightarrow S^2$ pondo $\hat{p}(\infty) = \infty$. Mostre que $\hat{p}$ é uma aplicação contínua.

3.2 Mostre que $\hat{p}$ é homotópica à aplicação $z \longmapsto z^n$, onde n é o grau de p, por uma homotopia h_t tal que $\bigcup_{t \in I} h_t^{-1}(0)$ está contido em um compacto.

3.3 Mostre que $\deg(\hat{p}) = \deg_0(\hat{p}) = n$.

3.4 Seja $f:U \longrightarrow C \subset S^2$ definida por $f(z) = p(z)(z-z_0)^r$ onde $p(z)$ é um polinômio e $p(z_0) \neq 0$. Mostre que

$$\deg_0(f) = r.$$

3.5 Se $p:C \longrightarrow C$ é um polinômio de grau n, mostre que p tem n raízes (contadas com a multiplicidade).

3.6 Seja $f:S^n \longrightarrow S^n$ uma função diferenciável. Um ponto $p \in Im(f)$ é dito valor regular de f se para todo $x \in f^{-1}(p)$ a diferencial de f em x é um isomorfismo. Mostre que se p é um valor regular de f, então $f^{-1}(p)$ é um conjunto finito e o número de pontos de $f^{-1}(p)$ é maior ou igual ao grau de f.

3.7 Demonstre a proposição (3.7).

4. O ÍNDICE DOS PONTOS FIXOS

Seja $V \subset R^n$ um subconjunto aberto e $g: V \longrightarrow R^n$ uma aplicação contínua. Dizemos que (R^n, g, V) é uma terna admissível se o conjunto , $Fix(g) = \{x \in V;\ g(x) = x\}$, dos pontos fixos de g é compacto. Iremos definir um inteiro $I(R^n, g, V)$ para tôda terna admissível. Logo quando mencionarmos o índice de uma terna subtendemos que a terna é admissível, mesmo que não seja explicitado. Algumas vêzes, para facilitar a notação denotaremos o índice $I(R^n, g, V)$ simplesmente por $I(g)$. Êste índice é também chamado de índice dos pontos fixos de g.

Observe que se $i: V \longrightarrow R^n$ denota a aplicação inclusão, então

$$(i-g)^{-1}(0) = Fix(g).$$

Dêste modo o "número" de pontos fixos de g deveria ser medido pelo grau da aplicação (i-g) em tôrno de $0 \in R^n$. É exatamente esta idéia que nos leva à definição do índice.

4.1 DEFINIÇÃO: Dada a terna admissível (R^n, g, V), denotaremos por K o compacto Fix(g). Seja D uma bola fechada em tôrno da origem contendo K, isto é, $K \subset D$. Considere a composta

$$H_n(R^n, R^n-0) \cong H_n(R^n, R^n-D) \xrightarrow{j_*} H_n(R^n, R^n-K)$$
$$\cong H_n(V, V-K) \xrightarrow{(i-g)_*} H_n(R^n, R^n-0)$$

Como sabemos que $H_n(R^n, R^n-0) \cong Z$, temos que a composta acima é na verdade um endomorfismo de Z. Logo êste endomorfismo é da forma

$$x \longmapsto I(R^n, g, V).x$$

onde $I(R^n, g, V) = I(g)$ é o único inteiro que determina o endomorfismo dado pela composta. Chamamos de índice dos pontos fixos de g a êste inteiro.

Observamos que o diagrama algébrico utilizado acima para definir o índice dos pontos fixos de g, provem de um diagrama geométrico, a saber

$$(R^n, R^n-0) \xleftarrow{j_1} (R^n, R^n-D) \xrightarrow{j_2} (R^n, R^n-K)$$

$$\xleftarrow{j_3} (V, V-K) \xrightarrow{(i-g)} (R^n, R^n-0)$$

onde as aplicações j_t são as inclusões óbvias, e $(i-g)$ é a aplicação $(i-g)(x) = x - g(x)$ mencionada anteriormente. Ao considerarmos as aplicações induzidas em homologia, temos que j_{1_*} é um isomorfismo, pois j_1 é uma equivalência homotópica; e j_{3_*} é um isomorfismo por excisão. O homomorfismo j_{2_*} é denotado no diagrama algébrico simplesmente por j_*.

Antes de passarmos a analisar as propriedades do índice que acabamos de definir, vamos considerar o seguinte exemplo.

4.2 EXEMPLO: Seja $\varepsilon > 0$ e considere $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ o intervalo dos números reais $-\varepsilon < x < \varepsilon$. Seja $g: V \longrightarrow R$ uma função contínua tal que $Fix(g) = \{0\}$. Quais os possíveis valores para o índice $I(R,g,V)$? Ilustraremos cada um dos casos com um gráfico.

Pela definição de índice temos

$$H_1(R,R-0) \xleftarrow{\simeq} H_1(R,R-\overline{V}) \longrightarrow H_1(R,R-0)$$

$$\xleftarrow{\simeq} H_1(V,V-0) \xrightarrow{(i-g)_*} H_1(R,R-0)$$

Simplificando, temos que calcular a composta

$$H_1(R,R-0) \overset{exc}{\cong} H_1(V,V-0) \xrightarrow{(i-g)_*} H_1(R,R-0).$$

Para calcular a composta considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
H_1(R,R-0) & \overset{exc}{\cong} & H_1(V,V-0) & \xrightarrow{(i-g)_*} & H_1(R,R-0) \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
H_0(R-0) & \overset{exc}{\cong} & H_0(V-0) & \xrightarrow{(i-g)_*} & H_0(R-0)
\end{array}$$

Seja $a \in H_1(R,R-0) \cong Z$ e $b,c \in H_0(R-0) \cong Z \oplus Z$ geradores. Sem perda de generalidade podemos supor que $\partial(a) = b-c$. A única outra possibilidade seria $\partial(a) = c-b$.

Para determinarmos a composta basta sabermos o que acontece com $h = (i-g)|(V-0)$. Temos três casos:

Caso 1 - $Im(h)$ está contida em uma componente de $R-0$.

Caso 2 - h preserva as componentes.

Caso 3 - h permuta as componentes.

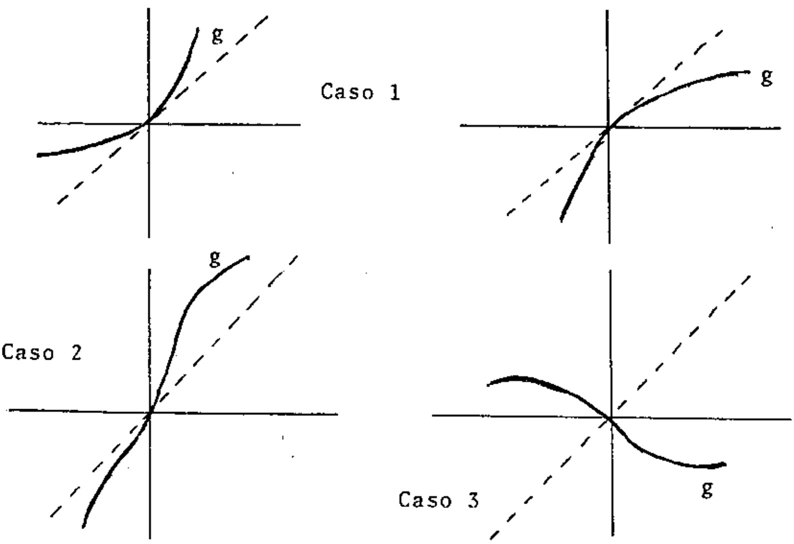
Em homologia isto corresponde a:

Caso 1 - A imagem de $\partial(a)$ é levada no zero, logo o índice é zero.

Caso 2 - A imagem de $\partial(a)$ é levada em $-b+c$ que é $-\partial(a)$ e o índice é -1.

Caso 3 - A imagem de $\partial(a)$ é levada nêle próprio, e o índice é 1.

O gráfico da função g em cada um dos casos corresponde a:



Agora vamos definir o índice de uma singularidade isolada de um campo diferenciável de vetores. Para isto, seja $U \subset R^n$ um subconjunto aberto, $X: U \longrightarrow R^n$ um campo de vetores onde $X(p) = 0 \in R^n$ e $p \in U$ é uma sigularidade isolada. Seja $\bar{B}(p)$ uma bola fechada contida em U tal que p é a única singularidade de X em $\bar{B}(p)$.

Por um teorema de equações diferenciais, existe um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e uma função $\varphi_\varepsilon : \bar{B}(p) \longrightarrow U$ contínua onde $\varphi_\varepsilon(x) = \gamma_{X(x)}(\varepsilon)$ com γ a única trajetória do campo que tem ponto inicial x e velocidade inicial $X(x)$.

4.3 DEFINIÇÃO: Chama-se o índice da singularidade p do campo de vetores X a $I(R^n, \varphi_\varepsilon, \mathring{B}(p))$.

Observamos que é necessário provar que o índice acima está bem definido. Isto será simples de ver a partir das propriedades gerais do índice que veremos a seguir. Os exercícios (4.2) e (4.3) dados no final desta secção são a respeito de índices de campos de vetores. O exercício (4.4) pede a construção de campo de vetores tendo sigularidades isoladas com índices especificados.

Observamos também que a definição de índice de uma singularidade de um campo de vetores coincide com a definição clássica dada para campos contínuos na qual se usa a noção de grau. Isto possibilita que resultados da teoria do índice sejam usados em campos de vetores.

Agora descreveremos as propriedades do índice que na verdade, no contexto moderno de Topologia Algébrica, servem para estabelecer uma axiomatização para a teoria do índice para algumas classes de espaços. Apresentaremos as demonstrações sômente das proposições cujas provas não são semelhantes às já apresentadas aqui nos contextos de graus e graus locais.

4.4 PROPOSIÇÃO: Seja $g:V \longrightarrow R^n$ uma aplicação satisfazendo as hipóteses dadas em (4.1). Seja K' um subconjunto compacto tal que $Fix(g) \subset K'$. Então a definição de $I(R^n,g,V)$ é a mesma se no diagrama dado em (4.1) usarmos K' em lugar de $K = Fix(g)$; com $K' \subset V$.

4.5 PROPOSIÇÃO (LOCALIZAÇÃO): Seja $g:V \longrightarrow R^n$ como em (4.1). Se W é um aberto tal que $K \subset W \subset V$, e se denotamos $g' = g|W$, então temos

$$I(R^n,g,V) = I(R^n,g',W).$$

4.6 PROPOSIÇÃO (ADITIVIDADE): Seja $g:V \longrightarrow R^n$ como em (4.1). Suponha que $V = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$, onde cada V_i é um aberto. Seja $g_i = g|V_i$ e vamos supor que para cada i $Fix(g_i)$ é compacto e dois a dois são disjuntos, isto é, $Fix(g_i) \cap Fix(g_j) = \emptyset$ se $i \neq j$. Então

$$Fix(g) = \bigcup_{i=1}^{r} Fix(g_i) \quad \text{e} \quad \text{temos}$$

$$I(R^n,g,V) = \sum_{i=1}^{r} I(R^n,g_i,V_i).$$

4.7 PROPOSIÇÃO (INVARIÂNCIA HOMOTÓPICA): Seja $g_t : V \longrightarrow R^n$ uma homotopia tal que as hipóteses de (4.1) estão satisfeitas para cada $t \in I$. Além disso, supomos que a união

$$\bigcup \{ Fix(g_t) ; \quad t \in I \}$$

é um subconjunto compacto. Então temos que

$$I(R^n, g_0, V) = I(R^n, g_1, V).$$

Observamos novamente que a condição que $\bigcup Fix(g_t)$ seja um subconjunto compacto é realmente necessária. Por exemplo, se considerarmos $g_t : R \longrightarrow R$ dada por $g_t(x) = 1 + tx$. Temos pelo exemplo (4.2) que $I(R, g_0, R) = 1$, mas por outro lado temos que $I(R, g_1, R) = 0$, pois $Fix(g_1) = \emptyset$.

Observamos também que esta propriedade nos diz que se $I(R^n, g, V) \neq 0$, então nós temos uma obstrução para deformar g em uma f sem pontos fixos através de homotopia h_t com a propriedade de que $\bigcup \{ Fix(h_t) ; \ t \in I \}$ é compacto (compactly fixed homotopy).

4.8 PROPOSIÇÃO (MULTIPLICATIVIDADE): Sejam $g : V \longrightarrow R^n$ e $g' : V' \longrightarrow R^{n'}$ satisfazendo as hipóteses de (4.1) e

$$g \times g' : V \times V' \longrightarrow R^n \times R^{n'}$$

Então temos

$$Fix(g \times g') = Fix(g) \times Fix(g')$$

e

$$I(g \times g') = I(g) . I(g').$$

Demonstração:

A primeira afirmativa é óbvia uma vez que temos que $(g \times g')(x,x') = (x,x')$ acarreta $g(x) = x$ e $g'(x') = x'$. Demonstraremos a segunda afirmação. Para simplificar a notação colocamos $R^n_0 = (R^n, R^n - 0)$, $R^n_D = (R^n, R^n - D)$, $V_K = (V, V-K)$ onde $g: V \longrightarrow R^n \supset D \supset K$. Analogamente para g'.

Demonstraremos inicialmente que

4.9 $$I(g \times 0) = I(g)$$

onde 0 é a aplicação constante que manda todo $R^{n'}$ em $0 \in R^{n'}$. Consideremos a composta

$$R^n_D \times R^{n'}_{D'} \longrightarrow R^n_K \times R^{n'}_{D'} \longrightarrow V_K \times R^{n'}_{D'} \longrightarrow R^n_0 \times R^{n'}_{D'}$$

onde as aplicações são aquelas dadas em (4.1) produto com a identidade. Em particular a última aplicação é $(i-g) \times id = i - (g \times 0)$ e passando-se a homologia temos

$$(i-(g \times 0))_* : H_{n+n'}(V_K \ \ R^{n'}_{D'}) \longrightarrow H_{n+n'}(R^n_0 \ \ R^{n'}_{D'})$$
$$[(x,y)] \longmapsto [((i-g)(x),y)]$$

isto é, temos a identidade na segunda componente. Usando-se o teorema de Künneth está demonstrada a fórmula (4.9).

A seguir consideremos o seguinte diagrama onde as aplicações são aquelas óbvias

$$\begin{array}{ccccccc}
R^n_D \times R^{n'}_{D'} & \longrightarrow & R^n_K \times R^{n'}_{D'} & \longrightarrow & V_K \times R^{n'}_{D'} & \longrightarrow & R^n_0 \times R^{n'}_{D'} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R^n_D \times R^{n'}_{K'} & \longrightarrow & R^n_K \times R^{n'}_{K'} & \longrightarrow & V_K \times R^{n'}_{K'} & \longrightarrow & R^n_0 \times R^{n'}_{K'} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R^n_D \times V_{K'} & \longrightarrow & R^n_K \times V_{K'} & \longrightarrow & V_K \times V_{K'} & \longrightarrow & R^n_0 \times V_{K'} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R^n_D \times R^{n'}_{0'} & \longrightarrow & R^n_K \times R^{n'}_{0'} & \longrightarrow & V_K \times R^{n'}_{0'} & \longrightarrow & R^n_0 \times R^{n'}_{0'}
\end{array}$$

Passando-se a homologia, tendo se em conta o resultado (4.9) a primeira linha nos dá $I(g)$, enquanto que a primeira coluna nos dá $I(g')$. Por outro lado a diagonal nos dá $I(g \times g')$. Pela comutatividade do diagrama segue-se a conclusão desejada.

4.10 PROPOSIÇÃO (COMUTATIVIDADE): Sejam $U \subset R^n$, $U' \subset R^{n'}$ dois abertos e $f : U \longrightarrow R^{n'}$, $g : U' \longrightarrow R^n$ aplicações contínuas. Então as aplicações compostas

$$gf : V = f^{-1}(U') \longrightarrow R^n$$

e

$$fg : V' = g^{-1}(U) \longrightarrow R^{n'}$$

satisfazem

$$\mathrm{Fix}(gf) \approx \mathrm{Fix}(fg).$$

E, se êstes conjuntos forem compactos, temos também que

$$I(fg) = I(gf).$$

Demonstração:

A primeira afirmação é clara. De fato temos que

$$\mathrm{Fix}(gf) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fix}(fg)$$

f e g são homeomorfismos um o inverso do outro.

Suponhamos que os conjuntos sejam compactos e definamos

$$\gamma : V \times V' \longrightarrow R^n \times R^{n'} , \quad \gamma(x,y) = (g(y), f(x)).$$

Usando a propriedade da invariância homotópica mostraremos que $I(\gamma) = I(gf)$ e $I(\gamma) = I(fg)$, donde se segue a conclusão u a vez que $Fix(\gamma)$ é compacto.

Inicialmente consideremos a deformação

$$\gamma_t(x,y) = (tgf(x) + (1-t)g(y), f(x)) \quad , \text{ com } x \in V, \ y \in V' \quad \text{e} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Esta deformação realiza uma homotopia entre

$$\gamma_0(x,y) = (g(y), f(x)) = \gamma(x,y) \quad \text{e}$$

$$\gamma_1(x,y) = (gf(x), f(x)).$$

Por outro lado

$$\gamma_t(x,y) = (x,y) \Longrightarrow \begin{cases} tgf(x) + (1-t)g(y) = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} gf(x) = x \\ y = f(x) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in Fix(gf) \\ y = f(x) \end{cases}$$

portanto

$$Fix(\gamma_t) = \{(x,y);\ x \in Fix(gf),\ y = f(x)\} ,$$

não depende de t e é compacto como produto topológico de dois compactos. Portanto por (4.7)

$$I(\gamma) = I(\gamma_0) = I(\gamma_1).$$

A aplicação γ_1 por seu lado pode ser considerada como sendo a restrição da aplicação

$$\delta : V \times R^{n'} \longrightarrow R^n \times R^{n'} , \quad \delta(x,y) = (gf(x), f(x))$$

e portanto por (4.5) temos que $I(\delta) = I(\gamma_1)$.

Consideremos agora uma nova deformação

$\delta_t : V \times R^{n'} \longrightarrow R^n \times R^{n'}$ $\qquad \delta_t(x,y) = (gf(x),(1-t)f(x))$

a qual realiza a homotopia entre

$$\delta_0(x,y) = \delta(x,y) \qquad \text{e} \qquad \delta_1(x,y) = (gf(x),0).$$

Por outro lado

$$\delta_t(x,y) = (x,y) \implies \begin{cases} gf(x) = x \\ (1-t)f(x) = y \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = gf(x) \\ y = (1-t)fgf(x) \end{cases}$$

êste caminho é o gráfico da aplicação

$$\begin{aligned} \mathrm{Fix}(gf) \times [0,1] &\longrightarrow V \\ (x,t) &\longmapsto (1-t)f(x). \end{aligned}$$

Donde segue-se que $\bigcup_t \mathrm{Fix}(g_t)$ é compacto e por (4.5)

$$I(\delta) = I(\delta_0) = I(\delta_1)$$

e portanto

$$I(\gamma) = I(\delta_1).$$

Mas

$$\delta_1 = (gf) \times \text{constante}$$

e portanto por (4.8) temos $I(\text{const}) = 1$ e então

$$I(\gamma) = I(gf).$$

Com um raciocínio análogo, considerando-se as deformações

$$(g(y),tfg(y)+(1-t)f(x)) \qquad \text{e} \qquad ((1-t)g(y),fg(y))$$

se demonstra que

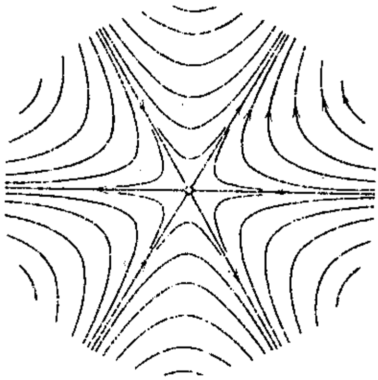
$$I(\gamma) = I(fg)$$

o que conclui a demonstração.

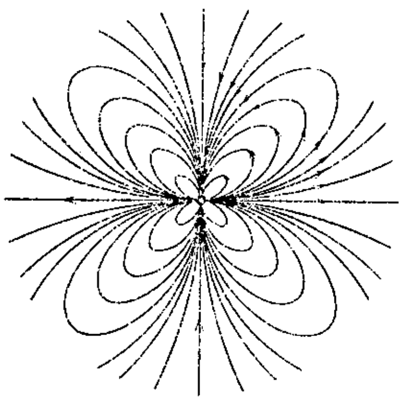
EXERCÍCIOS

4.1 Para cada n construa uma aplicação $f_n : B_\varepsilon(0) \longrightarrow R^2$, onde $B_\varepsilon(0) \subset R^2$ é a bola aberta de raio $\varepsilon > 0$ e centro 0, e $Fix(f_n) = \{0\}$, de modo que $I(R^2, f_n, B_\varepsilon(0)) = n$.

4.2 Calcule o índice do campo dado pelas curvas integrais



4.3 Calcule o índice do campo dado pelas curvas integrais



4.4 Construa campos em R^2 em que a origem 0 tem singularidades com índices 0, +1 , -1 , 2 , -3 respectivamente.

4.5 Seja $f:U \longrightarrow R^n$ e $x \in U$ um ponto fixo isolado cujo índice é zero. Mostre que existe uma vizinhança W fechada de x em U e uma aplicação g, tal que $g = f$ em W, $g \simeq f$ rel W e g não tem pontos fixos em W.

4.6 Demonstre as proposições (4.4) e (4.5).

4.7 Demonstre a proposição (4.6).

4.8 Demonstre a proposição (4.7).

4.9 Demonstre o seguinte resultado: Se $V \subset R^n$ é um aberto e $g:V \longrightarrow R^n$ é uma aplicação constante, então

$$I(R^n,g,V) = \begin{cases} 1 & \text{se } g(V) \in V \\ 0 & \text{se } g(V) \notin V. \end{cases}$$

5. ESPAÇOS ENR E ÍNDICE PARA ESPAÇOS ENR

Na secção anterior foi definida uma função chamada índice. O índice lá definido é uma função a valores inteiros e está definido para as ternas (R^n, g, V) ditas admissíveis. Nosso objetivo nesta secção é extender esta noção de índice para as ternas (M, f, U), onde $U \subset M$ é um aberto, $f: U \longrightarrow M$ é uma aplicação contínua, $Fix(f)$ é um subconjunto compacto e M pertence a uma classe de espaços que inclue as variedades compactas e os complexos simpliciais finitos. Não é claro que se possa extender a função índice já definida nas ternas admissíveis (R^n, g, V) para as ternas (M, f, U) se não impusermos algumas restrições aos espaços topológicos M. Se o leitor estiver interessado em mais detalhes sôbre êste problema veja, por exemplo, [3] e [4].

Passamos agora a apresentar a classe de espaços na qual definiremos o índice.

5.1 DEFINIÇÃO: Um subespaço $X \subset Y$ é dito um retrato de vizinhança (em Y) se existe um aberto $U \subset Y$ tal que $X \subset U \subset Y$ e uma função $r: U \longrightarrow X$, chamada de retração, tal que $ri = id_X$, onde i é a aplicação inclusão $X \longrightarrow U$ e id_X é a identidade em X.

Às vêzes denotaremos abreviadamente por NR, se um espaço fôr um retrato de vizinhança.

É fácil de se ver que:

(a) Se X é um retrato de Y, então X é NR.

(b) Todo aberto $X \subset Y$ é NR.

(c) Se $X \subset Y$ é NR, e $Y \subset Z$ é NR, então $X \subset Z$ é NR.

(d) Nem todo NR é retrato, como pode ser visto, tomando-se $Y = [0,1]$ e $X = \{0\} \cup \{1\}$.

5.2 DEFINIÇÃO: Um espaço X é dito um retrato de vizinhança euclideana (abreviadamente ENR) se X é homeomorfo a um retrato de vizinhança (em R^n) $Y \subset R^n$, para algum n.

Como exemplos de ENR temos:

(a) um número finito de pontos em R^n é ENR.

(b) Um p-simplexo em R^n é um ENR.

(c) O subconjunto da reta R, $X = \{0\} \cup \{1/n;\ n=1,2,..\}$ não é um ENR.

Existe na literatura matemática diversos livros que estudam as propriedades dos espaços ENR, veja por exemplo [2]. Ressaltaremos algumas que consideramos relevantes para os nossos propósitos.

5.3 PROPOSIÇÃO: Se K é um complexo simplicial finito, então K é um espaço ENR.

Demonstração:

Vamos supor que K tem $n+1$ pontos. Logo K pode ser visto como um sub-complexo do complexo $\sigma(n)$ onde os simplexos de $\sigma(n)$ são todos os subconjuntos de $n+1$ pontos. Nos exemplos acima foi observado que $\sigma(n)$ é um ENR. Como NR de NR é NR, basta mostrarmos que K é um retrato de vizinhança em $\sigma(n)$. Para isto consideremos como sendo S o sub-complexo da subdivisão baricêntrica de $\sigma(n)$ formado pelos simplexos que não têm ponto em comum com K. Então pode-se mostrar que $\sigma(n) \setminus S$ é um aberto de $\sigma(n)$ e existe uma retração $r: \sigma(n)-S \longrightarrow K$ de K.

Observamos que o resultado acima mostra que tôdas as variedades compactas que admitem uma triangularização são ENR.

5.4 PROPOSIÇÃO: Sejam X um espaço ENR, Y um espaco topológico qualquer e $B \subset Y$. Se $f_0, f_1 : Y \longrightarrow X$ são tais que $f_0|B = f_1|B$, então existe uma vizinhança aberta W de B em Y para a qual temos $f_0|W \simeq f_1|W$ relB.

Demonstração:

Temos que $X \xrightarrow{i} A \xrightarrow{r} X$ com A aberto em R^n e $ri = id$. Indiquemos por $W \subset Y$ o conjunto de todos os pontos $y \in Y$ tais que o segmento que une $if_0(y)$ a $if_1(y)$ está contido em A. Claramente vemos que W é um aberto e $B \subset W$. Definimos agora a aplicação $\theta : W \times [0,1] \longrightarrow X$, pondo $\theta(y,t) = r\ (1-t)if_0(y)+tif_1(y)$. Vemos que de fato $\theta(y,0) = rif_0(y) = f_0(y)$, $\theta(y,1) = rif_1(y) = f_1(y)$. E para todo $b \in B$, temos $\theta(b,t) = r\ (1-t)if_0(b)+tif_1(b) = rif_0(y) = f_0(b)$; isto é, $\theta_t|B = f_0|B$ para todo $t \in [0,1]$.

5.5 COROLÁRIO: Seja X um ENR. Consideremos as projeções

$$p_1, p_2 : X \times X \longrightarrow X$$

e a diagonal

$$B = \{(x,x) \in X \times X;\ x \in X\}.$$

Então existe uma vizinhança aberta W da diagonal B em $X \times X$ tal que

$$p_1|W \simeq p_2|W \quad \text{rel } B.$$

A demonstração dêste corolário é uma decorrência imediata da proposição anterior. Contudo êste corolário terá enorme importância na secção 8, pois nos permitirá provar a proposição (8.8) supondo que X é ENR ao invés de apenas complexo simplicial.

Concluimos dando, sem demonstração, a resposta à seguinte pergunta: quando um subconjunto $X \subset R^n$ é ENR?

5.6 PROPOSIÇÃO (Borsuk): Seja $X \subset R^n$. As condições seguintes são equivalentes:

i) X é ENR;

ii) X é localmente compacto e localmente contrátil;

iii) X é localmente compacto e localmente (n-1)-conexo.

Logo se Y é um espaço homeomorfo a X (verificando uma das condições acima) então Y é ENR.

Para a demonstração da proposição acima veja o livro de Dold [9], página 83. No mesmo livro na página 103 está provada:

5.7 PROPOSIÇÃO: Se Y é um compacto ENR, então $H_i(Y)$ é finitamente gerado para todo i, e $H_i(Y) = 0$ para i suficientemente grande.

Agora vamos extender a definição de índice para os espaços ENR.

5.8 DEFINIÇÃO: Uma terna (X,f,U) é dita admissível se $U \subset X$ é um aberto, $f:U \longrightarrow X$ é uma aplicação contínua e $Fix(f)$ é um subconjunto compacto.

Na proposição (4.10) da secção anterior apresentamos a propriedade do índice, chamada de comutatividade. Esta propriedade do índice nos sugere uma maneira de como extender a noção de índice para outros espaços. Vejamos então:

Seja Y um espaço topológico, $U \subset Y$ um subconjunto aberto e $h:U \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua que se fatora do seguinte modo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \\ & V \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

onde V é um aberto de R^n. Então faz sentido considerarmos o indice da aplicação composta

$$\alpha\beta : \beta^{-1}(U) \longrightarrow V \subset R^n$$

e tendo-se em conta a propriedade da comutatividade definir

$$I(Y,h,U) = I(R^n, \alpha\beta , \beta^{-1}(U)).$$

Neste caso também, sempre que não houver perigo de confusão, denotaremos o índice abreviadamente por $I(h)$. O primeiro problema que temos agora é mostrar que a função $I(Y,h,U)$ está bem definida. Para isto devemos impor certas restrições ao espaço Y. A proposição seguinte nos fornece uma condição suficiente para que o índice dependa apenas de h e não da fatoração escolhida.

5.9 PROPOSIÇÃO: Seja Y um espaço topológico, $U \subset Y$ um <u>aberto ENR</u> e $h:U \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Então

i) existe um aberto $V \subset R^n$ (n conveniente) tal que

$$h = \beta\alpha : U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} Y;$$

ii) se $Fix(h)$ é compacto o índice de

$$\alpha\beta : \beta^{-1}(U) \longrightarrow V \subset R^n$$

(está definido e) é independente da fatoração de h.

Demonstração:

i) Como U é ENR existe um aberto V' em algum $R^{n'}$ e uma retração tal que

$$U \xrightarrow{i} V' \xrightarrow{r} U \qquad ri = id.$$

Então colocando-se $\alpha = i$, $\beta = hr$ temos a fatoração desejada. De fato

$$\beta\alpha = hri = h(id) = h : U \longrightarrow V' \longrightarrow Y.$$

ii) Seja $U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} Y$ uma fatoração euclideana. Então pela comutatividade (4.10) temos

$$Fix(\alpha\beta) = Fix(\beta\alpha) = Fix(h).$$

Suponhamos agora que $Fix(h)$ seja compacto e consideremos as aplicações

$$\alpha r : V' \longrightarrow V \subset R^n , \qquad i\beta : \beta^{-1}(U) \longrightarrow V' \subset R^n .$$

Por (4.10) as aplicações

$$(\alpha r)(i\beta) = \alpha(ri)\beta = \alpha\beta$$

$$(i\beta)(\alpha r) = i(\beta\alpha)r = ihr$$

têm o mesmo índice, isto é, $I(\alpha\beta) = I(ihr)$, e claramente o lado direito não depende da fatoracão de h.

5.10 DEFINIÇÃO: Com as hipóteses acima colocamos por definição

$$I(Y,h,U) = I(R^n, \alpha\beta , \beta^{-1}(U))$$

Observamos que se $Y = R^n$ podemos escolher o aberto $V = U$ (que é óbviamente ENR) e tomar $\alpha = id$, $\beta = h$. E vemos que a definição acima coincide com aquela dada em (4.1). Logo a definição dada aqui realmente extende a anterior.

Observamos também que a propriedade da localização nos sugere que para definir $I(Y,h,U)$ não é necessário supor que Y seja ENR, bastaria que existisse uma vizinhança Y' de $Fix(h)$, a qual fôsse ENR. Então definiríamos

$$I(Y,h,U) = I(Y',h,Y' \cap h^{-1}(Y)).$$

As propriedades do índice consideradas na secção anterior permanecem tôdas válidas para esta classe mais geral de espaços ENR.

Passamos agora a enunciar estas propriedades:

5.11 LOCALIZAÇÃO

Se (X,h,U) é admissível e W é um aberto de X tal que $\mathrm{Fix}(h) \subset W \subset U$, então

$$I(X,h,U) = I(X,h',W) ,$$

onde $h' = h|W$.

5.12 ADITIVIDADE

Se (X,h,U) é admissível e $U = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$, com U_i aberto para todo i, e com $U_i \cap U_j \cap \mathrm{Fix}(h) = \emptyset$ sempre que $i \neq j$, então

$$I(h) = \sum_{i=1}^{r} I(h|U_i).$$

5.13 INVARIÂNCIA HOMOTÓPICA

Se (Y,h_t,U) é admissível e $h_t : U \longrightarrow Y$ é uma homotopia, com $0 \leq t \leq 1$, e $\bigcup_t \mathrm{Fix}(h_t)$ é compacto, então

$$I(h_0) = I(h_1).$$

5.14 MULTIPLICATIVIDADE

Sejam $h : U \longrightarrow Y$, $h' : U' \longrightarrow Y'$ aplicações tais que (Y,h,U) é (Y',h',U') são admissíveis, então temos

$$I(h \quad h') = I(h).I(h')$$

sendo $h \times h' : U \times U' \longrightarrow Y \times Y'$.

5.15 <u>COMUTATIVIDADE</u>

Se $U \subset X$, $U' \subset X'$ são abertos ENR, e $f: U \longrightarrow X'$ e $g: U' \longrightarrow X$ são aplicações contínuas, então considerando-se as aplicações compostas

$$gf : f^{-1}(U') \longrightarrow X$$

$$fg : g^{-1}(U) \longrightarrow X'$$

temos

$$\mathrm{Fix}(gf) \approx \mathrm{Fix}(fg).$$

Se êstes conjuntos forem compactos temos também que

$$I(X, gf, f^{-1}(U')) = I(X', fg, g^{-1}(U)).$$

A demonstração de cada uma destas propriedades não apresenta dificuldade alguma. Aqui, apenas como ilustração, apresentamos a demonstração de uma delas, as demais são deixadas a cargo do leitor.

<u>Demonstração de (5.12)</u>:

Seja V um aberto de R^n e $\rho: V \longrightarrow X$ uma retração. Então temos por definição que

$$I(X, h, U) = I(V, h\rho, \rho^{-1}(U)).$$

Chamemos de $h_i = h(\rho | \rho^{-1}(U_i))$. Usando a propriedade da aditividade (4.6) temos que

$$I(V, h\rho, \rho^{-1}(U)) = \sum_{i=1}^{r} I(V, h_i, \rho^{-1}(U_i)).$$

Mas por definição temos

$$I(V,h_i,\rho^{-1}(U_i)) = I(X,h|U_i,U_i)$$

e portanto o resultado é verdadeiro.

EXERCÍCIOS

5.1 Se X é um espaço compacto ENR e $f:X \longrightarrow X$ é tal que $I(X,f,X) \neq 0$, então mostre que tôda aplicação g homotópica a f tem pelo menos um ponto fixo.

5.2 Mostre que $I(X,f,X) = 0$ é condição necessária e suficiente para que tenhamos $g \simeq f$ com g sem pontos fixos, se $X = S^n$.

5.3 Mostre que:

(a) Se X é um retrato de Y, então X é NR.

(b) Todo aberto $X \subset Y$ é NR.

(c) Se $X \subset Y$ é NR e $Y \subset Z$ é NR, então $X \subset Z$ é NR.

(d) $X = \{0\} \cup \{1\}$ contido em $[0,1]$ é NR.

5.4 Demonstre as propriedades (5.11), (5.13), (5.14) e (5.15).

6. O TEOREMA DOS PONTOS FIXOS DE LEFSCHETZ-HOPF

Seja $f:X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Denotamos por Q o corpo de todos os numeros racionais. Vamos supor que o espaço X é tal que $H_i(X,Q) = 0$, para i suficientemente grande, e que para cada i , $H_i(X,Q)$ é de dimensão finita como espaço vetorial sôbre Q.

Se X é um complexo simplicial finito ou um espaço ENR compacto, então a condição acima está satisfeita.

Para cada i temos o homomorfismo induzido

$$f_i : H_i(X,Q) \longrightarrow H_i(X,Q).$$

6.1 DEFINIÇÃO: Chama-se o número de Lefschetz de f à expressão

$$\Lambda(f) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \ tr(f_i)$$

onde $tr(f_i)$ é o traço do homomorfismo f_i.

Lefschetz provou o resultado famoso, que hoje é conhecido como o Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz.

6.2 TEOREMA (Lefschetz): Se X é um complexo simplicial finito e $f:X \longrightarrow X$ é uma aplicação tal que $\Lambda(f) \neq 0$, então f tem pelo menos um ponto fixo.

A demonstração do teorema de Lefschetz pode ser encontrada, por exemplo, no livro de Croom [6].

Gostaríamos de saber qual a relação entre $\Lambda(f)$ e $I(X,f,X)$ no caso em que ambos estão definidos.

Para compará-los, observemos primeiramente que $I(X,f,X)$ é um inteiro. De agora em diante vamos considerá-lo como um número racional, simplesmente compondo com a inclusão $Z \subset Q$. Ou, alternativamente, aplicando a definição de índice dada em (4.1), considerando todos os coeficientes racionais ao invés de inteiros.

A seguinte afirmação é equivalente ao teorema de Lefschetz:

"Nas hipóteses do teorema (6.2), se f não tem ponto fixo, então $\Lambda(f) = 0$."

Mas nêste caso temos $I(X,f,X) = 0$. Logo aqui temos a igualdade

$$\Lambda(f) = I(X,f,X).$$

Pouco depois de Lefschetz provar o seu teorema, Hopf provou o seguinte teorema:

6.3 TEOREMA (Hopf): Seja $f:K \longrightarrow K$ uma aplicação contínua, onde K é um complexo simplicial finito n-dimensional homogêneo (isto é, todo ponto está contido em um simplexo de dimensão n e todo simplexo tem dimensão menor ou igual a n). Suponha que f tem um número finito de pontos fixos e cada ponto fixo está no interior de algum simplexo de dimensão n. Então $\Lambda(f)$ é igual ao número de pontos fixos de f, contados com sua "multiplicidade".

Êste teorema está demonstrado em [1].

O teorema de Hopf pôsto na linguagem desenvolvida aqui, nos diz que

$$\Lambda(f) = I(X,f,X).$$

Os resultados acima motivaram o seguinte teorema:

6.4 TEOREMA DE LEFSCHETZ-HOPF:

Seja X um espaço ENR compacto e $f:X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Então

$$\Lambda(f) = I(X,f,X)$$

A demonstração dêste teorema é longa e bastante técnica. Por esta razão não a apresentaremos aqui no texto. O leitor poderá encontrá-la, por exemplo, em [5] ou [9].

Êste teorema tem inúmeras aplicações como era de se esperar, pois é a ponte de ligação entre duas teorias. Vejamos duas consequências imediatas dêste teorema.

6.5 COROLÁRIO: Se X é um espaço ENR compacto e $f:X \longrightarrow X$ é tal que $f_* = id_*$, então

$$I(X,f,X) = \chi(X)$$

onde $\chi(X)$ é a característica de Euler de X.

6.6 COROLÁRIO: Se X é Q-acíclico (isto é, $H_i(X,Q) = 0$ se $i > 0$, e $H_0(X,Q) = Q$), então X tem a propriedade do ponto fixo.

Em particular, o espaço projetivo real RP^n tem a propriedade do ponto fixo.

EXERCÍCIOS

6.1 Mostre que $\Lambda(f)$ é um invariante homotópico.

6.2 Seja $f: X \longrightarrow X$ uma aplicação continua e suponha que $\Lambda(f)$ está definido. Mostre que se definirmos

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{tr}(f^i)$$

onde $f^i : H^i(X,Q) \longrightarrow H^i(X,Q)$ são os homomorfismos induzidos em co-homologia, então esta expressão define um número que é igual a $\Lambda(f)$.

6.3 Mostre que o espaço projetivo complexo CP^{2n} tem a propriedade do ponto fixo. (Sugestão: use o fato que o anel de co-homologia

$$H^*(CP^{2n},Q) = Q[a] \big/ [a]^{2n+1}$$

6.4 Seja X um campo de vetores com singularidades isoladas em uma variedade compacta M. Mostre que a soma dos índices de X é igual à característica de Euler de M. (êste fato é conhecido como Teorema de Hopf).

6.5 Prove a seguinte generalização do Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz:

Seja $f: X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua, onde X é um complexo simplicial, não necessàriamente finito, e $f(X) \subset Y$ onde Y é um subcomplexo finito de X.

(a) Mostre que $\Lambda(f)$ está definido.

(b) Se $\Lambda(f) \neq 0$, então f tem pelo menos um ponto fixo.

7. AXIOMATIZAÇÃO

Uma pergunta natural de se fazer nêste ponto é a seguinte: Quais as propriedades do índice que servem para caracterizá-lo?

Para analisarmos esta questão, vamos definir uma teoria de índice através de axiomas.

Seja $\mathcal{C}$ uma classe de espaços conexos X tais que $H_i(X,Q) = 0$, para i suficientemente grande, e $H_i(X,Q)$ é de dimensão finita para todo i.

7.1 DEFINIÇÃO: Uma terna (X,f,U) é dita $\mathcal{C}$-admissível se $X \in \mathcal{C}$, $f:X \longrightarrow X$ é uma aplicação contínua, $U \subset X$ é um aberto e f não tem ponto fixo na fronteira de U.

Observamos que no caso da terna (X,f,U) ser $\mathcal{C}$-admissível, e $\mathcal{C}$ fôr a classe dos espaços ENR compactos, a definição acima implica que $\mathrm{Fix}(f|U)$ é compacto.

7.2 DEFINIÇÃO: Uma teoria de índice em $\mathcal{C}$ é uma função i definida nas ternas admissíveis com valores em Q satisfazendo as seguintes propriedades:

AXIOMA 1 (LOCALIZAÇÃO): Sejam (X,f,U) e (X,g,U) duas ternas admissíveis, satisfazendo $f|U = g|U$. Então

$$i(X,f,U) = i(X,g,U).$$

AXIOMA 2 (ADITIVIDADE): Seja (X,f,U) uma terna admissível. Se $U_1,\ldots,U_n$ são abertos de U, dois a dois disjuntos e tais que f não tem ponto fixo em $U - \bigcup\{U_i;\ i=1,\ldots,n\}$, então

$$i(X,f,U) = \sum_{i=1}^{n} i(X,f,U_i).$$

AXIOMA 3 (HOMOTOPIA): Seja $F: X \times I \longrightarrow X$ uma homotopia. Se (X,f_t,U) é uma terna admissível para todo $t \in I$, onde $f_t = F(\ ,t)$. Então

$$i(X,f_0,U) = i(X,f_1,U).$$

AXIOMA 4 (COMUTATIVIDADE): Sejam $X,Y \in \mathcal{C}$ e $f: X \longrightarrow Y$ e $g: Y \longrightarrow X$ são aplicações tais que a terna (X,gf,U) é admissível, então

$$i(X,gf,U) = i(Y,fg,g^{-1}(U)).$$

AXIOMA 5 (NORMALIZAÇÃO): Seja $X \in \mathcal{C}$ e $f: X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua, então

$$i(X,f,X) = \Lambda(f).$$

<u>OBSERVAÇÕES</u>:

(1) No caso em que $\mathcal{C}$ é a classe dos espaços ENR compactos, temos uma teoria de índice segundo a definição (5.10) bastando para isto definirmos

$$i(X,f,U) = I(X,f\,U,U)$$

onde o lado direito é o índice definido na secção 5.

(2) No caso em que $\mathscr{C}$ é a classe dos espaços ENR compactos, as hipóteses impostas no Axioma da Homotopia, isto é, (X,f_t,U) é admissível para todo $t \in I$, implica que $\bigcup_t \mathrm{Fix}(f_t|U)$ é compacto.

(3) Se $\mathscr{C}$ é uma classe qualquer de espaços, é fácil de ver que a função constante definida nas ternas admissíveis satisfaz os quatro primeiros axiomas, mas não satisfaz o quinto axioma se $\mathscr{C}$ contem pelo menos o espaço formado por um ponto.

(4) Consideremos o seguinte axioma:

AXIOMA 4' (MULTIPLICATIVIDADE): Se (X,f,U) e (Y,g,V) são ternas $\mathscr{C}$-admissíveis e $X \times Y \in \mathscr{C}$, então $(X \times Y, f \times g, U \times V)$ é admissível e

$$i(X \times Y, f \times g, U \times V) = i(X,f,U) \cdot i(Y,g,V).$$

Não sabemos se em geral os axiomas 4 e 4' são equivalentes.

(5) B. O'Neill provou que na classe dos complexos simpliciais finitos só existe uma teoria de índice (veja: "Essential sets and fixed points", Amer. J. Math. 75 (1953), 497-509). F. Browder em [3] provou o mesmo para a classe dos espaços ENR compactos.

E X E R C Í C I O S

7.1 Suponha que um índice i está definido para uma classe $\mathcal{E}$ de espaços e que para uma terna $\mathcal{E}$-admissível (X,f,U) temos que $i(X,f,U) \neq 0$. Mostre então, usando apenas os axiomas, que a função f tem pelo menos um ponto fixo em U.

7.2 Suponha que um índice i está definido para as ternas admissíveis de uma classe $\mathcal{E}$ de espaços. Se $X \in \mathcal{E}$ e $f: X \longrightarrow X$ é uma função tal que $\Lambda(f) \neq 0$, mostre então que tôda função $g \simeq f$ tem um ponto fixo.

8. NÚMEROS DE NIELSEN E O PROBLEMA DO NÚMERO MÍNIMO DE PONTOS FIXOS

Seja X um espaço topológico qualquer. Um caminho em X é uma aplicação contínua $\alpha: I \longrightarrow X$, onde I denota o intervalo unitário $[0,1]$. Dado um caminho α em X, definimos um caminho $\alpha^{-1}: I \longrightarrow X$, pondo $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ para todo $t \in I$. Para caminhos $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ com $\alpha(1) = \beta(0)$, podemos formar um novo caminho $\alpha\beta : \longrightarrow X$ pondo

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 . \end{cases}$$

Dois caminhos $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ são ditos homotópicos com os extremos fixos se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{array}{ll} H(s,0) = \alpha(0) = \beta(0) & \text{para todo } s \in I \\ H(s,1) = \alpha(1) = \beta(1) & \text{para todo } s \in I \\ H(0,t) = \alpha(t) & \text{para todo } t \in I \\ H(1,t) = \beta(t) & \text{para todo } t \in I. \end{array}$$

Quando existe uma tal H, denotamos $\alpha \simeq \beta$ rel $\{0,1\}$. É fácil de verificar que esta relação é uma relação de equivalência no conjunto de todos os caminhos em X

Se $f:X \longrightarrow X$ é uma aplicação contínua e $\alpha:I \longrightarrow X$ é um caminho em X, vemos que a composta $f\cdot\alpha : I \longrightarrow X$ também é um caminho em X.

Consideremos agora $f: X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua e denotemos por Fix(f) o conjunto dos pontos fixos de f. Vamos definir em Fix(f) uma relação de equivalência.

8.1 DEFINIÇÃO: Dados $x, y \in Fix(f)$ dizemos que x é equivalente a y, $x \sim y$, se existe um caminho $\lambda: I \longrightarrow X$ tal que $\lambda(0) = x$ e $\lambda(1) = y$ e $\lambda \simeq f\cdot\lambda$ rel $\{0,1\}$.

8.2 PROPOSIÇÃO: Os pontos $x, y \in Fix(f)$ são equivalentes se, e sòmente se, dado um caminho qualquer $\gamma: I \longrightarrow X$ ligando x a y, então $[\gamma f\cdot\gamma^{-1}] = \alpha f_{\#} \alpha^{-1}$ para algum $\alpha \in \pi_1(X,x)$.

Demonstração:

Suponha que $x \sim y$. Então existe por hipótese um caminho λ ligando x a y tal que $\lambda \simeq f\cdot\lambda$ rel $\{0,1\}$. Seja γ um caminho qualquer ligando x a y. Então temos que $\gamma \simeq \beta\lambda$ rel $\{0,1\}$ onde β é um laço com ponto base em x.

Logo $\gamma f\cdot\gamma^{-1} \sim \beta\lambda\, f\cdot\lambda^{-1} f\cdot\beta^{-1} \sim \beta\, f\cdot\beta^{-1}$. Isto é, temos que $[\gamma f\cdot\gamma^{-1}] = \alpha f_{\#}(\alpha^{-1})$ onde $[\beta] = \alpha$.

Recìprocamente, vamos supor que dado γ vale $\gamma f\cdot\gamma^{-1} \sim \beta\, f\cdot\beta^{-1}$, onde $[\beta] = \alpha$. Chamemos de $\lambda = \beta^{-1}\gamma$. Como temos que $\beta^{-1}\gamma\, f\cdot\gamma^{-1} f\cdot\beta$ é homotópico ao caminho constante, os dois pontos são equivalentes.

8.3 DEFINIÇÃO: As classes de equivalências definidas acima chamam-se classes de Nielsen da aplicação f.

8.4 DEFINIÇÃO: Para cada classe de Nielsen F da aplicação f definimos o índice $i(F)$ de F como sendo $I(X,f,U)$ onde $U \cap Fix(f) = F$.

Observamos aqui que esta definição só faz sentido se nos restringimos a uma classe de espaços topológicos onde uma teoria de índice esteja definida.

8.5 PROPOSIÇÃO: O índice de uma classe de Nielsen está bem definido.

A demonstração da proposição acima é uma consequência imediata da propriedade da Localização.

8.6 DEFINIÇÃO: Uma classe de Nielsen é dita essencial se seu índice é não nulo, isto é, F é essencial se $i(F) \neq 0$.

8.7 DEFINIÇÃO: Chamamos de número de Nielsen de f ao número de classes de Nielsen de f que são essenciais. Denotamos $N(f)$ a êste número.

Observe que em princípio êste número pode ser infinito.

Agora passaremos a mostrar um resultado importante sôbre $N(f)$. Para isto de agora em diante o espaço topológico X será um poliedro finito ou um complexo simplicial finito.

8.8 PROPOSIÇÃO: Cada classe de Nielsen F de uma função $f:X \longrightarrow X$ é um conjunto aberto em $Fix(f)$. Além disso, o número de classes de Nielsen de f é finito.

Demonstração:

Vamos supor que o complexo simplicial X está mergulhado em R^n. Vamos definir em X a seguinte função distância

$$d(x,y) = \inf_{\gamma \in C[x,y]} \rho(\gamma)$$

onde $\rho(\gamma)$ é o comprimento do caminho γ e $C[x,y]$ é o conjunto dos caminhos diferenciáveis por partes em X ligando x a y. Seja $\{U_i\}_{i \in A}$ uma cobertura finita de X por abertos contraíveis. (Esta cobertura sempre existe, veja [6]). Seja $\varepsilon > 0$ o número de Lebesgue associado a esta cobertura. Como f é contínua em um compacto ela é uniformemente contínua. Logo existe $\delta > 0$ tal que se $d(x,y) < \delta$ então $d(f(x),f(y)) < \varepsilon/2$. Sejam $x,y \in Fix(f)$ e $\delta_1 = \min\{\delta, \varepsilon/2\}$. Afirmo que se $d(x,y) < \delta_1$ então x e y pertencem à mesma classe de Nielsen. Sejam $x,y \in Fix(f)$ e suponha que $d(x,y) < \delta_1$. Então existe uma curva γ ligando x a y tal que $\rho(\gamma) < \delta_1$. Logo $d(x,\gamma(t)) < \delta_1$ para todo $t \in I$. Pela continuidade uniforme $d(f(x),f(\gamma(t))) < \varepsilon/2$ para todo $t \in I$, e consequentemente $d(\gamma(t_1),f(\gamma(t_2))) \leq d(x,\gamma(t_1)) + d(f(x),f(\gamma(t_2))) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Isto implica que γ e $f\cdot\gamma$ pertencem a um mesmo aberto U da cobertura. Como U é contrátil então $\gamma \simeq f\cdot\gamma$ rel $\{0,1\}$ e $x \sim y$. Logo as classes de Nielsen são abertas em Fix(f).

Para mostrar a segunda parte, basta observar que Fix(f) é compacto e pela primeira parte da proposição o conjunto das classes de Nielsen é uma cobertura de abertos dois a dois disjuntos. Logo deverá ser finita.

8.9 EXEMPLOS:

(a) Seja $id:X \longrightarrow X$ a aplicação identidade. Então $Fix(id) = X$ e temos apenas uma classe de Nielsen $F = X$. Nêste caso $i(F) = I(X,id,X)$. Pelo axioma da normalização temos que $I(X,id,X) = \Lambda(id)$. Logo $N(id) = 0$ se $\Lambda(id) = 0$ e $N(id) = 1$ se $\Lambda(id) \neq 0$. Sabemos também que $\Lambda(id)$ é igual à característica de Euler de X, isto é, $\chi(X)$.

(b) Seja $c:X \longrightarrow X$ a função constante, $c(x) = x_0$ para todo $x \in X$. Então $Fix(c) = \{x_0\}$ e $F = \{x_0\}$ é a única classe de Nielsen. Nêste caso temos $i(F) = I(X,c,X) = \Lambda(c) = 1$.

Agora passaremos a descrever o problema do número mínimo de pontos fixos.

Dada uma aplicação $f:X \longrightarrow X$, para cada função $g:X \longrightarrow X$ homotópica a f consideremos o número de pontos de $Fix(g)$ ou seja, a cardinalidade de $Fix(g)$, que denotaremos por $\# Fix(g)$. O problema é determinar $\mu(f) = \inf_{g \in [f]} \# Fix(g)$ onde $[f]$ denota a classe de homotopia da aplicação f.

Vamos enunciar alguns resultados relacionados com a solução dêste problema.

Hopf demonstrou o seguinte teorema (veja [1] ou [5])

8.10 TEOREMA (Hopf): Se X é um poliedro finito, dada uma aplicação $f:X \longrightarrow X$ existe uma aplicação $g:X \longrightarrow X$ homotópica a f tal que $\# Fix(g)$ é finito.

Por êste teorema podemos concluir que $\mu(f) < \infty$ se X é um poliedro finito.

F. Wecken provou em [21] o seguinte teorema.

8.11 TEOREMA (Wecken): Se $g \in [f]$ então $N(f) = N(g)$.

Em vista dêste resultado podemos concluir que $\mu(f) \geqslant N(f)$ isto é, $N(f)$ é um limitante inferior para o número de pontos fixos de tôdas as funções homotópicas a f.

F. Wecken também provou o seguinte resultado famoso (veja [5] ou [21]).

8.12 TEOREMA (Wecken): Se X é uma variedade compacta de dimensão maior ou igual a 3 então dada $f: X \longrightarrow X$ existe $g \in [f]$ tal que $\# \mathrm{Fix}(g) = N(f)$.

Êste teorema é verdadeiro para poliedros mais gerais que variedades. Deixamos ao leitor interessado ver os detalhes em
ou

O teorema (8.12) sugeriu a seguinte definição:

8.13 DEFINIÇÃO: Um espaço X se chama um espaço de Wecken se para cada aplicação $f: X \longrightarrow X$ existe $g \in [f]$ tal que $\# \mathrm{Fix}(g) = N(f)$.

Após os resultados acima é natural perguntar se os poliedros de dimensão 1 e 2 são ou não espaços de Wecken. Em particular merecem atenção especial as superfícies compactas. Nas duas secções seguintes estudaremos alguns exemplos.

EXERCÍCIOS

8.1 Prove que a relação definida no parágrafo (8.1) é uma relação de equivalência em Fix(f).

8.2 Seja $f:X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua, e x_0 um ponto base tal que $f(x_0) = x_0$. Definimos em $\pi_1(X,x_0)$ a seguinte relação: $\alpha \sim \tau$ se e sòmente se existe $\sigma \in \pi_1(X,x_0)$ tal que $\tau = \sigma\alpha f_*(\sigma^{-1})$. Prove que esta relação é uma relação de equivalência.

8.3 As classes de equivalências definidas no exercício anterior são chamadas de classes de Reidemeister, que denotaremos por $\mathcal{R}(f)$. Considere a seguinte função $\theta:\mathrm{Fix}(f) \longrightarrow \mathcal{R}(f)$ definida da seguinte forma: seja λ um caminho qualquer ligando x_0 a um ponto $x \in \mathrm{Fix}(f)$. Então $\theta(x)$ é a classe de Reidemeister do elemento $[\lambda f \cdot \lambda^{-1}]$. Prove que θ está bem definida.

8.4 Seja $K \subset R^n$ um complexo simplicial finito. Sabemos que K é um espaço métrico com a métrica induzida do R^n e com a métrica definida na demonstração da proposição (8.8). Mostre que as duas métricas são equivalentes.

8.5 Se X é simplesmente conexo então $N(f) \leqslant 1$. $N(f) = 0$ se

$\Lambda(f) = 0$, e $N(f) = 1$ se $\Lambda(f) \neq 0$.

8.6 Seja $f: X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua, $p: \widetilde{X} \longrightarrow X$ o revestimento universal de X, F uma classe de Nielsen de f, $x_0 \in F$ e $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Consideremos o único levantamento $\widetilde{f}: \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ de f tal que $\widetilde{f}(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_0$. Prove que:

(a) $p(\mathrm{Fix}(\widetilde{f})) = \mathrm{Fix}(f)$.

(b) $p(\mathrm{Fix}(\widetilde{f})) = F$.

(c) Calcule o número de pontos fixos de $\widetilde{f}$ restrita a $p^{-1}(x_0)$ em têrmos de $\pi_1(X, x_0)$ e $f_{\#}: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$.

9. DOIS EXEMPLOS

Nesta secção descreveremos um exemplo de uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ para a qual $\Lambda(f) = 0$, mas $N(f) \neq 0$. O que mostra que $N(f)$ é um invariante mais forte que $\Lambda(f)$. Apresentaremos também um segundo exemplo mostrando que o bouquet de dois círculos não é um espaço de Wecken.

9.1 EXEMPLO:

Seja $X = S^1_{'} \vee S^1_{''} \subset S^1_{'} \times S^1_{''}$ e considere a aplicação $f:X \longrightarrow X$ definida da seguinte maneira

$$f(e^{i\theta},1) = (e^{-i\theta},1)$$

$$f(1,e^{i\theta}) = (1,e^{2i\theta}).$$

É fácil mostrar que $\Lambda(f) = 0$.

Denotemos $x_0 = (1,1)$ e $x_1 = (e^{i\pi},1)$. Temos que

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x_0, x_1\}.$$

Afirmo que x_0 e x_1 não pertencem à mesma classe de Nielsen. Suponhamos que x_0 e x_1 pertençam à mesma classe de Nielsen. Pela proposição (8.2) temos que $[\gamma f \cdot \gamma^{-1}] = \alpha f_*(\alpha^{-1})$ para algum $\alpha \in \pi_1(X,x_0)$ e γ o caminho $\gamma(t) = (e^{i\pi t},1)$ para $t \in I$. Vamos mostrar que a equação acima não pode ocorrer. Sabemos que $\pi_1(X,x_0) \cong F(a,b)$ onde $F(a,b)$ é o grupo livre em dois geradores, sendo que a e b representam os caminhos $\lambda_1(t) = (e^{2\pi it},1)$ e $\lambda_2(t) = (1,e^{2\pi it})$, $t \in I$, respectivamente. Logo a equação nos diz que $a = \alpha f_*(\alpha^{-1})$ para algum $\alpha \in \pi_1(X,x_0)$. Se esta equação é verdadeira em $\widetilde{\pi}_1(X,x_0)$ e a projetarmos em $H_1(X) \cong Z \oplus Z$, ela continuará sendo verdadeira em $H_1(X)$. Seja $p(\alpha) = (m,n)$ onde $p(\alpha)$ é a imagem de α em $H_1(X)$. A equação acima passa então a ser $p(a) = p(\alpha)\, pf_{*}(\alpha^{-1})$. Assim

$$(1,0) = (m,n) - (-m,2n) = (2m,-n)$$

e portanto

$$2m = 1 \quad \text{e} \quad n = 0.$$

Logo não admite solução. Portanto x_0 e x_1 não pertencem à mesma classe de Nielsen.

Finalmente pelo exemplo (4.2) $i(\{x_1\}) = 1$. Como $\Lambda(f) = i(\{x_0\}) + i(\{x_1\})$ pelo axioma da normalização, então $i(\{x_0\}) = -1$. Portanto temos duas classes essenciais e $N(f) = 2$.

9.2 OBSERVAÇÃO: Existem exemplos de aplicações $f: X \longrightarrow X$ onde X é uma variedade qualquer de dimensão maior ou igual a 2 e onde $\Lambda(f) = 0$, mas $N(f) \neq 0$. (Veja [19]).

9.3 EXEMPLO:

Seja novamente X o espaço definido no exemplo (9.1) e considere a aplicação $f: X \longrightarrow X$ definida por

$$f(e^{i\theta},1) = (e^{3i\theta},1)$$

$$f(1,e^{i\theta}) = \begin{cases} (e^{6i\theta},1) & 0 \leq \theta \leq 2\pi/3 \\ (1,e^{(3\theta-2\pi)i}) & 2\pi/3 \leq \theta \leq 4\pi/3 \\ (e^{(-3\theta+4\pi)i},1) & 4\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Seja $g:X \longrightarrow X$ qualquer aplicação homotópica a f. Temos que a composta

$$S^1_{'} \longrightarrow S^1_{'} \vee S^1_{''} \xrightarrow{g} S^1_{'} \vee S^1_{''} \xrightarrow{p_1} S^1_{'}$$

é homotópica à aplicação $h(x) = x^3$. Por (10.1) a composta admite pelo menos dois pontos fixos. Logo podemos supor que um dos pontos é diferente de (1,1). Logo é um ponto fixo de g. Seja x_0 êste ponto. Se êste é o único ponto fixo de g devemos ter então

$$\Lambda(g) = -3 = i(\{x_0\})$$

o que é absurdo pelo exemplo (4.2) . Logo tôda função homotópica a f tem pelo menos dois pontos fixos.

Finalmente provaremos que $N(f) = 1$. É fácil ver que

$$\mathrm{Fix}(f) = \{(1,1),\ (e^{i\pi},1),\ (1,e^{-i\pi})\}.$$

Consideremos os caminhos

$$\gamma_1(t) = (e^{i\pi t},1) \qquad t \in I$$

$$\gamma_2(t) = (1,e^{i\pi t}) \qquad t \in I.$$

Para provarmos que $(1,1) \sim (e^{i\pi},1)$ vamos exibir um laço β_1 tal que $\beta_1 \gamma_1 \simeq f(\beta_1 \gamma_1)^{-1}$ ou seja $[\beta_1] [\gamma_1 f\cdot\gamma^{-1}] (f_*(\beta^{-1}))$ $= 1$.

Usando a notação introduzida no exemplo (9.1), seja $[\beta_1] = a^{-1}b$. Temos que $f_*(a) = a^3$ e $f_*(b) = a^2ba^{-1}$ e portanto

$$a^{-1}b\, a^{-1} f_*(b^{-1}a) = a^{-1}ba^{-1}ab^{-1}a^{-2}a^3 = 1.$$

Logo (1,1) e $(e^{i\pi},1)$ pertencem à mesma classe de Nielsen.

Finalmente seja $[\beta_2] = a^{-1}$. Temos

$$[\beta_2]\ [\gamma_2 f\cdot\gamma_2^{-1}]\ f_{*}(\beta_2^{-1}) \quad =$$

$$a^{-1}a^{-2}a^{3} \quad = \quad 1.$$

Logo pelo mesmo argumento utilizado no exemplo (9.1) temos que (1,1) e $(1,e^{i\pi})$ pertencem à mesma classe de Nielsen. Logo $N(f) = 1$ e X não é um espaço de Wecken.

EXERCÍCIOS

9.1 Prove que $f_{*}(a) = a^{-1}$, $f_{*}(b) = b^2$ e $\Lambda(f) = 0$, onde f é a aplicação dada no primeiro exemplo.

9.2 Prove que $f_{*}(a) = a^3$, $f_{*}(b) = a^2ba^{-1}$ e $\Lambda(f) = -3$, onde f é a aplicação dada no segundo exemplo.

9.3 Prove que $\mathcal{R}(f)$ é um conjunto infinito, onde f é a aplicação dada em (9.2). (Sugestão: considere as classes de Reidemeister no abelianizado).

9.4 Prove que $\mathcal{R}(f)$ é um conjunto infinito, onde f é a aplicação dada em (9.1). (Sugestão: mostre que os elementos a, ab, aba, abab, ... pertencem a classes de Reidemeister distintas.

9.5 Prove que $S^2_{'} \vee S^2_{''}$ o bouquet de duas esferas não é um espaço de Wecken.

9.6 Dê exemplo de uma função

$$f : S^1_{'} \vee S^1_{''} \longrightarrow S^1_{'} \vee S^1_{''}$$

onde $N(f) = 0$, mas $\mu(f) \geqslant 1$.

10. O CÍRCULO E ALGUMAS SUPERFÍCIES COMPACTAS

Nesta secção mostraremos que o círculo S^1, a esfera S^2, o toro T e a garrafa de Klein K são espaços de Wecken.

10.1 O CASO S^1

Vamos considerar a sequência de aplicações $f_n : S^1 \longrightarrow S^1$ onde $f_n(x) = x^n$, para $n \neq 1$, e $f_1(x) = x.e^{i\pi}$.

É fato bem conhecido que dada uma aplicação $f : S^1 \longrightarrow S^1$ então $f \simeq f_n$ para algum inteiro $n \in \mathbb{Z}$ e, certamente, $N(f) = N(f_n)$.

Se $n = 1$ temos $Fix(f_1) = \emptyset$ e portanto $\mu(f) = 0 = N(f)$. Vamos supor de agora em diante que $n \neq 1$.

Temos

$$Fix(f_n) = \left\{ e^{2\pi ik/(n-1)};\ k=0,1,\ldots,n-2 \right\}.$$

Afirmo que cada classe de Nielsen contém apenas um ponto. Seja $x_k = e^{2\pi ik/(n-1)}$. Suponhamos por absurdo que x_j é equivalente a x_k, com $j < k$. Seja γ o arco definido por

$$\gamma(t) = e^{\frac{2\pi ij(1-t) + 2\pi ikt}{n-1}} \qquad \text{com} \quad t \in I.$$

Seja $a \in \pi_1(S^1,1)$ o gerador cujo representante é $\beta(t) = e^{2\pi it}$.

Temos

$$[\gamma f \cdot \gamma^{-1}] = a^{k-j}.$$

Pela proposição (8.2) existe $\alpha = a^m$ tal que

$$a^{k-j} = a^m f_{\#}(a^{-m}) = a^m . a^{-mn} = a^{m(1-n)}.$$

Logo $1-n$ divide $k-j$, o que é absurdo. Portanto temos $n-1$ classes de Nielsen.

Vamos calcular o índice de cada ponto. Pelo exemplo (4.2) temos que se $n>1$ o índice de cada ponto é -1 e se $n<1$ o índice é $+1$. Logo $N(f_n) = n-1 = \#\mathrm{Fix}(f_n)$. Portanto o círculo S^1 é um espaço de Wecken.

10.2 O CASO S^2

Seja $f:S^2 \longrightarrow S^2$ uma aplicação contínua. Sabemos que as classes de homotopia de aplicações de S^2 em si própria são caracterizadas pelo homomorfismo

$$f_* : H_2(S^2) \longrightarrow H_2(S^2)$$

como foi mencionado na secção 2. Lembramos que $H_2(S^2) \cong Z$ e $f_*(1)$ é o grau da aplicação f.

Como S^2 é simplesmente conexo temos sempre uma única classe de Nielsen, cujo índice

$$I(X,f,X) = \Lambda(f)$$

pelo axioma da normalização. Logo $N(f) = 0$ se $\Lambda(f) = 0$ e $N(f) = 1$ se $\Lambda(f) \neq 0$.

Seja $f:S^2 \longrightarrow S^2$ uma aplicação contínua com grau $\deg(f) = -1$. Então $\Lambda(f) = 1-1 = 0$ e $N(f) = 0$. A aplicação antípoda $g(x) = -x$, para todo $x \in S^2$, tem grau -1. Logo $g \simeq f$ e $\mathrm{Fix}(g) = \emptyset$. Portanto $\mu(f) = N(f)$.

Seja $f:S^2 \longrightarrow S^2$ uma aplicação contínua com grau $\deg(f) = n \neq -1$. Vamos construir uma aplicação $f_n:S^2 \longrightarrow S^2$ com grau

n com apenas um ponto fixo. Para isto vamos interpretar S^2 como sendo $R^2 \cup \{\infty\}$ ou seja, a compactificação de Alexandroff de R^2. Seja

$$f_n : R^2 \longrightarrow R^2$$

dada por $f_n(x,y) = (x',y')$, onde

$$\text{arc cotg } x' = n \text{ arc cotg } x \qquad \text{e} \qquad y' = y + 1.$$

Esta função se extende continuamente para $R^2 \cup \{\infty\}$. Denotemos a extensão também por f_n. Certamente $f_n(\infty) = \infty$.

É claro que $\mathrm{Fix}(f_n) = \{\infty\}$. Logo resta mostrar que o grau $\deg(f_n) = n$. Usando as propriedades de excisão e da sequência longa exata do par em homologia, a prova de que $\deg(f_n) = n$ se reduz a mostrar que

$$f_n|A_1 : A_1 \longrightarrow A_2$$

é de grau n, onde

$$A_1 = \{(x,0);\ x \in R\} \cup \{\infty\}$$

$$A_2 = \{(x,1);\ x \in R\} \cup \{\infty\}.$$

Seja $g_n = f_n | A_1$. Observe que A_1 e A_2 são homeomorfos a S^1. Vamos mostrar que g_n tem grau n.

Pela equação

$$x' = \text{cotg } (n \text{ arc cotg } x)$$

temos que se x varia de $-\infty$ a $+\infty$, então

$$n \cdot \text{arc cotg } x$$

varia de $-|n|\pi/2$ a $|n|\pi/2$.

Vamos supor que $n \geqslant 0$. O caso $n < -1$ é semelhante. A função cotg restrita a cada um dos intervalos

$[-n\pi/2, -n\pi/2 + \pi]$, $[-n\pi/2 + \pi, -n\pi/2 + 2\pi]$,...

$$\ldots\ldots, [n\pi/2 - \pi, n\pi/2],$$

corresponde a dar uma volta. Logo o grau de f_n é n e $N(f_n) = 1 = \#Fix(f_n)$.

Êste exemplo foi apresentado por L. E. J. Brouwer em 1912 no 5º Congresso Internacional de Matemática.

10.3 O CASO DO TORO T

Para mostrarmos que o toro T é um espaço de Wecken dividiremos a prova em quatro partes:

1ª Parte: Se $\Lambda(f) = 0$ então construiremos uma função homotópica a f, $g:T \longrightarrow T$, sem pontos fixos. Concluimos que se $N(f) = 0$, então $\Lambda(f) = 0$ e $\mu(f) = 0$.

2ª Parte: Dada f com $\Lambda(f) \neq 0$, construiremos g homotópica a f com $|\Lambda(f)|$ pontos fixos.

3ª Parte: Cada classe de Nielsen da função g acima tem apenas um ponto fixo.

4ª Parte: Os pontos fixos de g têm o mesmo índice.

Se provarmos estas quatro partes temos que

$$|\Lambda(f)| = N(f) = \mu(f).$$

Logo o resultado segue.

<u>Demonstração da 1ª Parte</u>:

Seja o toro $T = S^1 \times S^1$. Considere em

R^2 a seguinte relação de equivalência

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \qquad \text{se} \quad x_1 \equiv x_2 \quad \text{e} \quad y_1 \equiv y_2 \mod Z.$$

O conjunto das classes de equivalências pode ser identificado com T e a projeção $p:R^2 \longrightarrow T$ é o revestimento universal. Sabemos também que $\pi_1(T) = Z \oplus Z$ e duas funções $f_1,f_2 : T \longrightarrow T$ são homotópicas se, e sòmente se, $f_{1*} = f_{2*}$, isto é, os homomorfismos induzidos em $\pi_1(T)$ são iguais.

Seja $f:T \longrightarrow T$ e $\varphi:Z \oplus Z \longrightarrow Z \oplus Z$ a aplicação induzida por f em $\pi_1(T)$, cuja matriz é

$$\begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$$

em relação à base canônica de $Z \oplus Z$. Temos que

$$\Lambda(f) = 1 - (m+q) + mq - np$$

que pode ser interpretado como sendo

$$\det \begin{pmatrix} m-1 & p \\ n & q-1 \end{pmatrix} .$$

Vamos supor que $\Lambda(f) = 0$. Então consideremos a aplicação $g:R^2 \longrightarrow R^2$ dada por

$$g(a,b) = (ma+pb+\varepsilon, na+qb)$$

onde ε é um número irracional fixado.

É fácil de verificar (Exerc.(10.4) e (10.5)) que g induz uma aplicação $\bar{g}:T \longrightarrow T$ e que $\bar{g}$ é homotópica a f.

Agora vamos calcular o número de pontos fixos de g. Para isto basta resolver o sistema

$$m\,a + p\,b + \mathcal{E} \equiv a \quad \text{mod } (Z)$$

$$n\,a + q\,b \equiv b \quad \text{mod } (Z)$$

ou

$$(m-1)\,a + p\,b = -\mathcal{E} + k_1 \quad \text{para algum } k_1 \in Z$$

$$n\,a + (q-1)\,b = k_2 \quad \text{para algum } k_2 \in Z.$$

Como $\Lambda(f) = 0$ temos que as linhas da matriz

$$\begin{pmatrix} m-1 & p \\ n & q-1 \end{pmatrix}$$

são proporcionais. Sem perda de generalidade, vamos assumir que existe r tal que

$$r\,(n\,,\,q-1) = (m-1\,,\,p).$$

Certamente r é um número racional. Logo

$$r\,n\,a + r\,(q-1)\,b = r\,k_2$$

e

$$-\mathcal{E} + k_1 = r\,k_2\,,$$

o que é uma contradição, pois $\mathcal{E}$ é irracional. Portanto

$$\#\mathrm{Fix}(\bar{g}) = 0.$$

Demonstração da $2^{\underline{a}}$ Parte:

Considere a transformação linear

$$g(a,b) = (m\,a + p\,b\,,\,n\,a + q\,b).$$

Vamos calcular os pontos fixos da aplicação induzida $\bar{g} : T \longrightarrow T$.

Seja o sistema

$$m\,a + p\,b \equiv a \qquad \text{mod } (Z)$$

$$n\,a + q\,b \equiv b \qquad \text{mod } (Z)$$

assim

$$(m-1)\,a + p\,b = k_1 \qquad \text{para algum } k_1 \in Z$$

$$n\,a + (q-1)\,b = k_2 \qquad \text{para algum } k_2 \in Z.$$

Seja $\varphi : R^2 \longrightarrow R^2$ a transformação linear dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} m-1 & p \\ n & q-1 \end{pmatrix}$$

Logo uma solução para o sistema acima nada mais é do que um elemento de $\varphi^{-1}(r,s)$ onde $(r,s) \in Z \oplus Z$. Além disso duas soluções (a_1,b_1) e (a_2,b_2) são equivalentes se, e sòmente se, $(a_1,b_1) = (a_2,b_2) + (r,s)$. Logo

$$\varphi(a_1,b_1) - \varphi(a_2,b_2) \in \varphi(Z \oplus Z)$$

o que mostra que o número de soluções não equivalentes é no máximo a ordem do grupo quociente

$$Z \oplus Z \Big/ \mathrm{Im}(\varphi)$$

Como

$$\det(\varphi) = \det \begin{pmatrix} m-1 & p \\ n & q-1 \end{pmatrix} \neq 0$$

por hipótese temos que $\varphi : R^2 \longrightarrow R^2$ é sôbre. Logo o número de de soluções não equivalentes é a ordem de

$$Z \oplus Z \big/ \mathrm{Im}(\varphi).$$

Por um teorema de Álgebra (veja [13]) temos que êste grupo tem ordem

$$|\det(\varphi)| = |\Lambda(f)| .$$

Logo g tem precisamente $|\Lambda(f)|$ pontos fixos.

<u>Demonstração da 3ª Parte</u>:

Agora vamos mostrar que cada classe de Nielsen de g contém exatamente um único ponto.

Seja $p: R^2 \longrightarrow T$ o revestimento universal já definido. Se $x, y \in \mathrm{Fix}(\bar{g})$ estão na mesma classe de Nielsen, então existe um caminho γ ligando x a y tal que

$$\gamma \simeq \bar{g}\cdot\gamma \qquad \text{rel } \{0,1\} .$$

Seja $\tilde{\gamma}$ um levantamento de γ que tem ponto inicial $\tilde{x}$. Então

$$g\cdot\tilde{\gamma} - g(\tilde{x}) + \tilde{x}$$

é um levantamento de $\bar{g}\cdot\gamma$ com ponto inicial $\tilde{x}$. Logo devemos ter

$$\tilde{\gamma}(1) = g(\tilde{\gamma}(1)) - g(\tilde{x}) + \tilde{x}$$

ou

$$(g - id)(\tilde{\gamma}(1) - \tilde{x}) = 0$$

Isto contradiz o fato de $(g - id)$ ser injetora, a menos que $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}$, o que implica $x = y$.

<u>Demonstração da 4ª Parte</u>:

Sejam $x, y \in \mathrm{Fix}(\bar{g})$ e $h_{x,y}: T \longrightarrow T$

o homeomorfismo que leva x em y, dado pela equação

$$h_{x,y}(a) = yx^{-1}a .$$

Consideremos uma vizinhança aberta U de x tal que

$$U \cap Fix(\bar{g}) = \{x\}$$

e

$$h_{x,y}(U) \cap Fix(\bar{g}) = \{y\} .$$

Então temos

$$i(\{x\}) = I(T,\bar{g},U) = I(T,\bar{g}\, h^{-1}_{x,y}\circ h_{x,y},U)$$

$$i(\{y\}) = I(T,\bar{g},h_{x,y}(U)) .$$

Pelo axioma a comutatividade temos

$$I(T,\bar{g}\, h^{-1}_{x,y}\, h_{x,y},U) = I(T,h_{x,y}\,\bar{g}\, h^{-1}_{x,y},h_{x,y}(U)) .$$

Mas

$$\begin{aligned} h_{x,y}\,\bar{g}\, h^{-1}_{x,y}(a) &= y\, x^{-1}\, \bar{g}(y^{-1} x\ \ a) = \\ &= y\, x^{-1}\, \bar{g}(y^{-1})\bar{g}(x)\ \ g(a) = \\ &= g(a) . \end{aligned}$$

Logo

$$i(\{x\}) = i(\{y\}) .$$

10.4 O CASO DA GARRAFA DE KLEIN K

Êste é o caso mais complexo entre os até agora vistos. Sabemos de que $\pi_1(K)$ é um grupo com dois geradores sujeitos à única relação

$$\alpha\beta\alpha\beta^{-1} = 1 .$$

Pelos exercícios (10.6), (10.7), (10.8) vem que se $f:K \longrightarrow K$ é uma aplicação contínua então

$$f_* : \pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(K)$$

é um homomorfismo da forma:

$$\text{Tipo 1 -} \quad f_*(\alpha) = 1 \ , \quad f_*(\beta) = \alpha^p \beta^{2q}$$

$$\text{Tipo 2 -} \quad f_*(\alpha) = \alpha^r \ , \quad f_*(\beta) = \alpha^p \beta^{2q+1}.$$

Vamos considerar em R^2 a relação de equivalência gerada pelas relações:

$$(x,y) \sim (x+1,y)$$

e

$$(x,y) \sim (1-x, y + 1/2).$$

O espaço quociente é K (veja [18] para maiores detalhes). Dêste modo temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} R^2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & T \arrow[d, "p"] \\ & K \end{tikzcd}$$

onde $p_1 : R^2 \longrightarrow T$ foi definida em (10.3) e $p:T \longrightarrow K$ é a aplicação induzida nos espaços quocientes pela identidade. Além do mais temos que $p:T \longrightarrow K$ é um revestimento de duas fôlhas de K.

10.5 GERADORES DE $\pi_1(K)$ e $\pi_1(T)$

Usaremos a seguinte notação para os caminhos em R^2

$$\tilde{\alpha}(t) = (t,0) \quad , \quad \tilde{\beta}(t) = (0,t/2) \qquad t \in I$$

$$\tilde{a}(t) = (t,0) \quad , \quad \tilde{b}(t) = (0,t) \qquad t \in I,$$

então temos

$$\left[p_2(\tilde{\alpha})\right] = \alpha \quad , \quad \left[p_2(\tilde{\beta})\right] = \beta$$

$$p_*\left[p_1(\tilde{a})\right] = \alpha \quad e \quad p_*\left[p_1(\tilde{b})\right] = \beta^2.$$

Chamemos de $a = \left[p_1(\tilde{a})\right]$ e $b = \left[p_1(\tilde{b})\right]$ os geradores de $\pi_1(T)$.

É fácil calcular que $p_{2*}(\pi_1(T))$ é um subgrupo de $\pi_1(T)$ de índice 2. Logo seja $\theta : T \longrightarrow T$ a aplicação revestimento que corresponde ao elemento não nulo de

$$\pi_1(K)/p_*(\pi_1(T))$$

10.6 PROPOSIÇÃO: Dada $f:K \longrightarrow K$ então existem sempre dois levantamentos $f_1, f_2 : T \longrightarrow T$ que cobrem f e $f_2 = \theta f_1$. Seja

$$\varphi : \pi_1(K)/p_*(\pi_1(T)) \longrightarrow \pi_1(K)/p_*(\pi_1(T))$$

Temos que:

(a) Se φ é a aplicação constante então

$$p(\mathrm{Fix}(f_1)) = \mathrm{Fix}(f) \quad e \quad N(f_1) = N(f).$$

(b) Se φ for a identidade então

$$p(\mathrm{Fix}(f_1)) \cup p(\mathrm{Fix}(f_2)) = \mathrm{Fix}(f) \quad , \quad p(\mathrm{Fix}(f_1)) \cap p(\mathrm{Fix}(f_2)) = \emptyset$$

$$e \quad \frac{N(f_1) + N(f_2)}{2} = N(f).$$

Demonstração:

A primeira parte da proposição segue de fatos básicos sôbre revestimentos. Portanto passemos à segunda parte.

Caso (a):

A hipótese de φ ser o homomorfismo constante implica que se $\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1\} = p^{-1}(x)$ então $f_1(\tilde{x}_0) = f_1(\tilde{x}_1) \in p^{-1}(f(x))$. Logo, se x é ponto fixo então sôbre a fibra temos exatamente um ponto fixo, e segue que $p(\mathrm{Fix}(f_1)) = \mathrm{Fix}(f)$. Como p é um homeomorfismo local resulta que os índices de $\tilde{x}_0$ e $p(\tilde{x}_0)$ são os mesmos.

Seja $F' \subset \mathrm{Fix}(f_1)$ uma classe de Nielsen de F'. Então é claro que $p(F') \subset F$ para alguma classe de Nielsen de F. Se $x, y \in F$, existe um caminho λ ligando x a y tal que

$$\lambda \simeq f \cdot \lambda \qquad \mathrm{rel}\ \{0,1\} .$$

Se $\tilde{\lambda}$ é um levantamento de λ onde $\tilde{\lambda}(0) \in \mathrm{Fix}(f_1)$ então $\tilde{\lambda}$ e $f_1 \cdot \tilde{\lambda}$ têm os mesmos pontos finais e

$$\tilde{\lambda} \simeq f \cdot \tilde{\lambda} \qquad \mathrm{rel}\ \{0,1\} .$$

Logo $F = p(F')$ e segue que $N(f) = N(f_1)$.

Caso (b):

Se $x \in \mathrm{Fix}(f)$ e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ então existe um único levantamento $\bar{f}$ de f tal que $\bar{f}(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Como $\bar{f} = f_1$ ou f_2 temos que

$$p(\mathrm{Fix}(f_1)) \cup p(\mathrm{Fix}(f_2)) = \mathrm{Fix}(f).$$

Do fato de φ ser a identidade segue que se um ponto de uma fibra fôr ponto fixo de um levantamento $\bar{f}$ então todos os outros pontos da fibra são pontos fixos de $\bar{f}$. Logo

$$p(\mathrm{Fix}(f_1)) \cap p(\mathrm{Fix}(f_2)) = \emptyset .$$

Finalmente seja F uma classe de Nielsen de f. Então existe um levantamento $\overline{f}$ e uma classe de Nielsen F' de $\overline{f}$ tal que $p(F') = F$. Porém $\theta(F')$ também é uma classe de Nielsen de $\overline{f}$ que tem o mesmo índice de F'. Se $f_*(\beta) \neq \beta$ então $F' \cap \theta(F') = \emptyset$, isto é, os dois pontos da fibra que são pontos fixos não pertencem à mesma classe de Nielsen. Logo segue que

$$\frac{N(f_1) + N(f_2)}{2} = N(f) .$$

Se $f_*(\beta) = \beta$ fica a cargo do leitor.

Também deixamos a cargo do leitor a demonstração da seguinte proposição.

10.7 PROPOSIÇÃO: $\theta_*: \pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(T)$ é o homomorfismo tal que

$$\theta_*(a) = a^{-1} \quad \text{e} \quad \theta_*(b) = b.$$

10.8 PROPOSIÇÃO: Se $f:K \longrightarrow K$ é uma função tal que

$$f_*: \pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(K)$$

é do tipo 1, então $N(f) = |1 - 2q|$.

Demonstração:

Como

$$f_*(\beta) = \alpha^p \beta^{2q}$$

temos que φ definida na proposição (10.6) é o homomorfismo constante. Podemos ver que um levantamento f_1 de f induz o seguinte homomorfismo

$$f_{1*}(a) = 1 \quad \text{e} \quad f_{1*}(b) = a^p b^{2q} .$$

Logo pelo parágrafo (10.3) temos

$$N(f_1) = |\Lambda(f_1)| = |1 - 2q|.$$

Pela proposição (10.6) segue que

$$N(f) = |1 - 2q|.$$

10.9 PROPOSIÇÃO: Se $f:K \longrightarrow K$ é uma aplicação contínua tal que

$$f_* : \pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(K)$$

é do Tipo 2, então

$$N(f) = |2rq|.$$

Demonstração:

Seja $f_1 : T \longrightarrow T$ o levantamento tal que

$$f_{1*}(a) = a^r \quad \text{e} \quad f_{1*}(b) = a^p b^{2q+1}.$$

Portanto o outro levantamento $f_2 = \theta f_1$ pela proposição (10.7) induz o seguinte homomorfismo

$$f_{2*}(a) = a^{-r} \quad \text{e} \quad f_{2*}(b) = a^{-p} b^{2q+1}$$

Pelo parágrafo (10.3) temos

$$N(f_1) = |\Lambda(f_1)| =$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} r-1 & 0 \\ p & 2q \end{pmatrix} \right| = |2q(r-1)|$$

e

$$N(f_2) = \Lambda(f_2) =$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} -r-1 & 0 \\ -p & 2q \end{pmatrix} \right| = \left| 2q(r-1) \right|$$

donde segue que

$$\frac{N(f_1) + N(f_2)}{2} = \left| 2qr \right|$$

Para f do Tipo 2 temos que a aplicação φ definida na proposição (10.6) é a identidade. Logo pela proposição (10.6) segue que $N(f) = \left| 2qr \right|$.

Finalmente vamos construir para cada função f uma função na classe de homotopia da f que tem exatamente $N(f)$ pontos fixos.

10.10 CONSTRUÇÃO DA FUNÇÃO:

Seja f do Tipo 1, respectivamente do Tipo 2. Considere

$$T_f : R^2 \longrightarrow R^2$$

a transformação linear dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 2p \\ 0 & 2q \end{pmatrix} \qquad \text{se } f \text{ é do tipo 1}$$

respectivamente

$$\begin{pmatrix} r & 2p \\ 0 & 2q \end{pmatrix} \qquad \text{se } f \text{ é do Tipo 2.}$$

Observe que se dois pontos P_1 e P_2 de R^2 são equivalentes segundo a relação que define K então $T_f(P_1)$ e $T_f(P_2)$ são equivalentes. Seja $\overline{T}_f$ a função induzida de K em K. Podemos mostrar que

$$\overline{T}_f : K \longrightarrow K$$

induz o mesmo homomorfismo que f em $\pi_1(K)$. Logo $\overline{T}_f$ e f são homotópicas.

10.11 <u>CÁLCULO DE FIX($\overline{T}_f$)</u> (onde f é do Tipo 1)

Para calcularmos os pontos fixos de $\overline{T}_f$ basta calcularmos todos os pares $(x,y) \in R^2$ tais que $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1/2$, e que satisfaçam a um dos sistemas abaixo

$$\begin{cases} 2\,p\,y \equiv x & \text{mod } (Z) \\ 2\,q\,y \equiv y & \text{mod } (Z) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 2\,p\,y + x \equiv 0 & \text{mod } (Z) \\ 2\,q\,y - y \equiv 1/2 & \text{mod } (Z) \end{cases}$$

que podem ser re-escritos na forma

$$\begin{cases} 2\,p\,y - x = k_1 & \text{para algum } k_1 \in Z \\ 2\,q\,y - y = k_2 & \text{para algum } k_2 \in Z \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 2py + x = k_1 & \text{para algum } k_1 \in Z \\ 4qy + 2y = 1 + 2k_2 & \text{para algum } k_2 \in Z \end{cases}$$

O primeiro sistema nos dá as seguintes soluções:

$$y_0 = 0 \;,\; y_1 = \frac{1}{2q-1} \;,\; y_2 = \frac{2}{2q-1} \;, \dots, \; y_{q-1} = \frac{q-1}{2q-1}$$

Para cada y_i temos exatamente um x_i que satisfaz à primeira equação para algum k_1.

O segundo sistema nos dá as seguintes soluções

$$y_0 = \frac{1}{4q-2} \;,\; y_1 = \frac{3}{4q-2} \;, \quad \dots\dots\dots\dots \quad , \; y_{q-2} = \frac{2q-3}{4q-2}$$

A cada y_i corresponde exatamente um x_i.

Portanto $Fix(T_f)$ tem $|1 - 2q|$ pontos.

10.12 <u>CÁLCULO DE FIX($\overline{T}_f$)</u> (onde f é do Tipo 2)

Usando os mesmos argumentos de (9.11) vamos calcular as soluções dos sistemas:

$$\begin{cases} rx + 2py \equiv x & \mod (Z) \\ (2q+1)\,y \equiv y & \mod (Z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} rx + 2py + x \equiv 0 & \mod (Z) \\ (2q+1)\,y - y \equiv 1/2 & \mod (Z) \end{cases}$$

êstes sistemas podem ser re-escritos na forma:

$$\begin{cases} (r-1)\,x + 2\,p\,y = k_1 & \text{para algum } k_1 \in Z \\ 2\,q\,y = k_2 & \text{para algum } k_2 \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} (r+1)\,x + 2\,p\,y = k_1 & \text{para algum } k_1 \in Z \\ 4\,q\,y = 1 + 2k_2 & \text{para algum } k_2 \in Z \end{cases}$$

Do primeiro sistema temos as seguintes soluções para y:

$$y_0 = 0 \;,\quad y_1 = \frac{1}{2\,q} \;,\quad \ldots\ldots \;,\quad y_{q-1} = \frac{q-1}{2\,q}$$

Para cada valor de y_i temos exatamente $|r-1|$ valores de para $0 \leqslant x < 1$ que satisfazem a alguma equação da forma

$$(r-1)\,x + 2\,p\,y = k_1$$

k_1 variando em Z. Logo o primeiro sistema nos fornece $|q|\,|r-1|$ soluções.

Do segundo sistema temos as seguintes soluções para y:

$$y_0 = \frac{1}{4\,q} \;,\quad y_1 = \frac{3}{4\,q} \;,\quad \ldots\ldots\ldots \;,\quad y_{q-1} = \frac{2q-1}{4\,q}$$

De modo análogo ao caso discutido acima, para cada valor de y_i existem $|r+1|$ valores de x que satisfazem à primeira equação. Logo temos $|q|\,|r+1|$ soluções, isto é, $|q|\,|r+1|$ pontos fixos.

Dêste modo concluimos que

$$\begin{aligned} \#\mathrm{Fix}(T_f) &= |q|\,|r-1| + |q|\,|r+1| \\ &= |2\,q\,r| \end{aligned}$$

Observamos que os argumentos acima valem se $q \neq 0$. Se $q = 0$ então $N(f) = 0$. Logo devemos encontrar uma aplicação g, tal que $g \simeq f$ e g não tem pontos fixos. Deixamos êste caso como exercício (veja exercício (10.14)).

Fianlmente, reunindo tôdas as proposições acima temos:

10.13 TEOREMA: A garrafa de Klein K é um espaço de Wecken.

E X E R C Í C I O S

10.1 Prove que se $N(f) = 0$ então $\Lambda(f) = 0$.

10.2 Prove que a função $f_n : R^2 \longrightarrow R^2$ definida no parágrafo (10.2) se extende contínuamente em $R^2 \cup \{\infty\}$.

10.3 Considere H_1^- o semi-plano aberto abaixo da reta $y = 0$ e H_1^+ o complementar de H_1^- em R^2. De modo análogo H_2^- o semi-plano aberto abaixo da reta $y = 1$ e H_2^+ o complementar de H_2^- em R^2. Mostre que temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H_2(R^2 \cup \{\infty\}) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "(f_n)_*"'] & H_2(R^2 \cup \{\infty\}, H_1^-) \arrow[r, "exc"] \arrow[d, "(f_n)_*"'] & H_2(H_1^+, A_1) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "(f_n)_*"'] & H_1(A_1) \arrow[d, "(g_n)_*"'] \\
H_2(R^2 \cup \{\infty\}) \arrow[r, "j_*"] & H_2(R^2 \cup \{\infty\}, H_2^-) \arrow[r, "exc"] & H_2(H_2^+, A_2) \arrow[r, "\partial"] & H_1(A_2)
\end{tikzcd}$$

onde as flexas horizontais são isomorfismos e as verticais são os homorfismos induzidos pelas funções f_n e g_n dadas no parágrafo (10.2). Conclua que $\deg(f_n) = \deg(g_n)$.

10.4 Mostre que a função g definida na 1ª Parte do parágrafo (10.3) induz uma função $\overline{g}$ de T em T.

10.5 Mostre que a função $\overline{g}$ definida no exercício (10.4) induz em $\pi_1(T)$ o mesmo homomorfismo que a f induz, onde f é a função definida na 1ª Parte do parágrafo (10.3). Conclua que f e g são homotópicas.

10.6 Mostre que qualquer elemento de $\pi_1(K)$ pode ser representado por uma palavra da forma $\alpha^r\beta^s$ onde α, β são os geradores mencionados no parágrafo (10.4).

10.7 Mostre que dois elementos $w_1, w_2 \in \pi_1(K)$ satisfazem a relação $w_1w_2w_1w_2^{-1} = 1$ se, e sòmente se, (w_1, w_2) é da forma $w_1 = 1$ e $w_2 = \alpha^p\beta^{2q}$, ou $w_1 = \alpha^r$ e $w_2 = \alpha^p\beta^{2q+1}$.

10.8 Mostre que se $\varphi : \pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(K)$ é um homomorfismo então φ é da forma

$$\begin{cases} \varphi(\alpha) = 1 \\ \varphi(\beta) = \alpha^p\beta^{2q} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \varphi(\alpha) = \alpha^r \\ \varphi(\beta) = \alpha^p\beta^{2q+1} \end{cases}$$

10.9 Mostre que $p_{2*}(\pi_1(T))$ é um subgrupo normal de $\pi_1(K)$ de índice 2. (Veja o parágrafo (10.5)).

10.10 Se $f_*(\beta) = \beta$ onde $f: K \longrightarrow K$ é uma função contínua, mostre que $N(f) = N(f_1) + N(f_2)$, onde f_1 e f_2 são definidas no parágrafo (10.7).

10.11 Prove a proposição (10.8).

10.12 Mostre que T_f definida no parágrafo (10.10) preserva a relação de equivalência definida.

10.13 Mostre que f e $\overline{T}_f$ definem os mesmos homomorfismos em $\pi_1(K)$, onde $\overline{T}_f$ foi definida no parágrafo (10.10).

10.14 Se $q = 0$ e f_* é do Tipo 2, construa uma função g homotópica a f tal que $\mathrm{Fix}(g) = \emptyset$.(Sugestão: compare com a 1ª Parte de (10.3)).

10.15 Mostre que a relação de equivalência definida em R^2 no parágrafo (10.4) é a mesma que: $(x,y) \sim (a,b)$ se, e sòmente se, $(x-a, y-b) \in Z \times Z$ ou $(x+a, y-b-1/2) \in Z \times Z$.

R E F E R Ê N C I A S

1. Alexandroff, P. and Hopf, H. : Topologie, Springer, Berlin, 1935.

2. Borsuk, K. : Theory of Retracts, PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1967.

3. Browder, F.E. : On the fixed point index for continuous mappings of locally connected spaces, Summa Brasil. Math. (1960), 253-293.

4. Browder, F.E. : On continuity of fixed points under deformations of continuous mappings, Summa Brasil. Math. 4, (1960), 183-191.

5. Brown, R.F. : The Lefschetz Fixed Point Theorem, Scott, Foresman and Co., Glenview-London (1971).

6. Croom, F.H. : Basic Concepts of Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York, (1978).

7. Deleanu, A. : Théorie des points fixes: Sur le retractes de voisinage des espaces convexoides, Bull. Soc. Math. Fr. 87 (1959), 235-248.

8. Dold, A. : Fixed point index and fixed point theorem for euclidean neighborhood retracts, Topology, 4, (1965), 1-8.

9. Dold, A. : Lectures on Algebraic Topology, Springer, Heidelberg- New-York (1972).

10. Dold, A. : Eine geometrische Beschreibung des Fixpunktindexes Arch. der Math. XXV, 3, (1974), 297-302.

11. Fadell, E. : Recent results in the fixed point theory of continuous maps, Bull. Math. A. M. S., 76 (1970), 10-29.

12. Hu, S.-T. : Theory of Retracts, Wayne State University Press, Detroit, Michigan, (1965).

13. Lang, S. : Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, (1965).

14. Lefschetz, S. : Algebraic Topology, Am. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 27, New-York (1942).

15. Leray, J. : Sur les équations et les transformations, J. Math. Pures Appl. 24 (1945), 201-248.

16. Leray, J. : La théorie des points fixes et ses applications en analyse, Proc. Int. Math. Congress, Cambridge 1950, vol. 2, 202-208.

17. Leray, J. : Théorie des points fixes: indice total et nombre de Lefschetz, Bull. Soc. Math. Fr. 87 (1959), 221-233.

18. Lima, E.L. : Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (1977).

19. McCord, D. : An estimate of the Nielsen number and an example concerning the Lefschetz fixed point theorem, Pac. J. Math. 66 (1976), 195-203.

20. Spanier, E.H. : Algebraic Topology, McGraw-Hill Book Co., New-York, (1966).

21. Wecken, F. : Fixpunktklassen, I, II, III, Math. Ann. 117 (1941), 659-671; 181 (1942) 216-234 e 544-577.