

# **TÓPICOS EM TEORIA DAS PROBABILIDADES**

Editado por  
**ALOISIO ARAUJO**

COPYRIGHT © - 1981 - by ALOISIO ARAUJO (Editor)  
ENRIQUE DANIEL ANDJEL  
CHANG C.Y. DOREA  
ANTONIO GALVES  
MARIA EULÁLIA VARES  
ARNALDO C.R. NOGUEIRA

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida, por  
qualquer processo, sem a permissão dos autores.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA  
Rua Luiz de Camões, 68  
20.060 - Rio de Janeiro - RJ

## INTRODUÇÃO

O presente texto é dirigido aos professores e estudantes de Matemática e Estatística. Seu objetivo é despertar o interesse dos mesmos para a área de Teoria das Probabilidades. Para tal, em nome da Comissão Organizadora do Colóquio, convidamos os pesquisadores, trabalhando em Teoria das Probabilidades no Brasil, e pedimos que escrevessem em área de seu interesse imediato um artigo que embora elementar, acessível aos estudantes, desse uma idéia, na medida do possível, de pesquisa recente. Assim é que os artigos não são bastante independentes entre si. Convém lembrar, contudo, que existem algumas conexões óbvias entre eles.

Os artigos dos Professores A.Galves e E.Andjel tratam do estudo dos campos markovianos. O artigo do Professor A.Nogueira trata de uma aplicação de probabilidade à Física, e nele utiliza algumas noções como campo markoviano também utilizadas em outros artigos do texto. A Professora C.Dorea, trata de convergência de campos aleatórios para o movimento Browniano, tendo portanto ligações com os artigos acima mencionados bem como com o do Professor A.Araujo por tratar-se de convergência de processos estocásticos. Por fim o artigo da Professora M.E.Vares, estuda Propriedades de Processos Estocásticos, entre eles o movimento Browniano, que também é objeto de estudo, sob ângulo diferente da Professora C.Dorea e é o ponto de partida do trabalho do Professor A.Araujo.

Para terminar gostaria de agradecer, em nome da Comissão Organizadora, aos autores deste texto, sua colaboração ao 13º Colóquio.

Aloisio Araujo

Rio, Julho de 1981



Í N D I C E

	<u>Página</u>
Introdução .....	i
Enrique Daniel Andjel Modelo Markoviano de Propagação de uma Infecção .....	1
A. Araujo O Teorema Central do Limite em Espaços de Banach, Medidas de Lévy e Processos Estáveis com Trajetórias Contínuas ..	9
Chang C. Y. Dorea Campos Aleatórios .....	25
Antonio Galves Um Modelo Estocástico para o Fluxo de Calor .....	35
Arnaldo C. R. Nogueira Análise Assintótica de Evoluções Aleatórias com uma Aplicação à Mecânica Quântica .....	67
Maria Eulália Vares Tempo Locais .....	111



MODELO MARKOVIANO DE PROPAGAÇÃO DE UMA INFECÇÃO

Enrique Daniel Andjel

(IME-USP)





MODELO MARKOVIANO DE PROPAGAÇÃO DE UMA INFECÇÃO

*Enrique Daniel Andjel*  
(IME-USP)

O objetivo desta exposição é estudar um modelo de propagação de uma infecção. Pode-se descrever o processo da seguinte maneira: cada elemento de  $N$  (o conjunto dos inteiros não negativos) representa um indivíduo. Esses indivíduos podem estar sãos ou afetados por uma doença contagiosa determinada.

No primeiro caso o indivíduo pode-se contagiar, numa unidade de tempo, do seu vizinho da esquerda, se este estiver doente, com probabilidade  $\theta$ . No segundo caso, o indivíduo fica curado numa unidade de tempo, com probabilidade  $1-\theta$ . O espaço dentro do qual o processo se desenvolve é  $X=\{0,1\}^N$ , sendo  $\theta$  o parâmetro do processo.

Dado um elemento  $\eta \in X$  é conveniente interpretá-lo do seguinte jeito:  $\eta(a)=1$  significa que o indivíduo  $a$  está infetado;  $\eta(a)=0$  que está são.

Para construir o processo formalmente consideramos variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas

$$a_m \quad a \in N \quad m \in N^* = N - \{0\}$$

A distribuição de  $a_m$  é dada por  $P(a_m=1)=\theta$ ,  $P(a_m=0)=1-\theta$ . Se  $\eta_n$  é o estado do processo no instante  $n$ , definimos o estado do

processo no instante  $n+1$  com a seguinte fórmula:

$$\eta_{n+1}(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } \eta_n(a) = \eta_n(a-1) = 0 \\ 0 & \text{se } a_{n+1} = 0 \\ 1 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Por convenção  $\eta_n(-1) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Fica assim construída uma cadeia de Markov a qual serve de modelo para o processo de infecção antes descrito.

Chamaremos  $P_n(\theta)$  a probabilidade que  $\eta_n \neq 0$  quando o estado inicial é

$$\eta_0(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

É claro que  $P_n(\theta)$  decresce com  $n$  e definimos  $P_\infty(\theta)$  como o  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\theta)$ .

O resultado seguinte é muito intuitivo; nós o demonstraremos rigorosamente pois a técnica empregada é muito útil em situações mais complexas.

Lema 1: Se  $0 < \theta < \theta' < 1$  então  $P_n(\theta) \leq P_n(\theta')$ ,  $\forall n$ .

Demonstração: Depois de construir o processo com parâmetro  $\theta$ , ou seja depois de dar o conjunto de variáveis aleatórias  $a_n$ , consideramos um novo conjunto de variáveis aleatórias  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $b \in \mathbb{N}$ , sen

do que as suas distribuições são:

$$P(b_n=1) = \frac{\theta' - \theta}{1 - \theta} \quad P(b_n=0) = \frac{1 - \theta'}{1 - \theta}$$

e tais que as variáveis aleatórias  $a_n, b_n \quad n \in \mathbb{N}^*$   $a, b \in \mathbb{N}$  são independentes.

Definimos  $a'_n$  como  $\inf(\{a_n + b_n, 1\})$ . Se deduz rapidamente que estas novas variáveis aleatórias satisfazem:

- 1)  $a'_n \quad a \in \mathbb{N} \quad n \in \mathbb{N}^*$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.
- 2)  $P(a'_n=1) = \theta' \quad P(a'_n=0) = 1 - \theta' \quad \forall a \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- 3)  $a'_n \geq a_n \quad \forall a \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

As propriedades 1 e 2 mostram que as variáveis  $a'_n$  permitem construir o processo com parâmetro  $\theta'$  da mesma maneira que as  $a_n$  permitem construir o processo com parâmetro  $\theta$ .

A propriedade 3 mostra que se começamos os processos de parâmetro  $\theta$  e  $\theta'$ , construídos por meio das variáveis aleatórias  $a_n$  e  $a'_n$  respectivamente, com o mesmo estado inicial  $\eta \in X$  e nomeamos  $\eta_n$  e  $\eta'_n$  as respectivas configurações (aleatórias) no instante  $n$ , verifica-se  $P(\eta_n \leq \eta'_n) = 1$  onde  $\eta \leq \xi$  deve se interpretar coordenada por coordenada.

Considerando como estado inicial

$$\eta_0(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

deduzimos o lema.

Corolário 1:  $P_\infty(\theta) \leq P_\infty(\theta')$  se  $\theta < \theta'$ .

Corolário 2: Existe  $\theta_c \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \theta_c \leq 1$  tal que  $P_\infty(\theta) = 0$  se  $\theta < \theta_c$  e  $P_\infty(\theta) > 0$  se  $\theta > \theta_c$ . Nosso objetivo principal é demonstrar o seguinte:

Teorema:  $0 < \theta_c < 1$

Dividimos a demonstração em duas partes

Parte I:  $\frac{1}{2} \leq \theta_c$

Demonstração: Sejam

$$\eta_0(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

$$D_n = \begin{cases} \max\{a: \eta_n(a) = 1\} & \text{se } \eta_n \neq 0 \\ 0 & \text{se } \eta_n = 0 \end{cases}$$

$$I_n = \begin{cases} \min\{a: \eta_n(a) = 1\} & \text{se } \eta_n \neq 0 \\ 1 & \text{se } \eta_n = 0 \end{cases}$$

É claro que  $P_\infty(\theta) = P(D_n - I_n \geq 0, \forall_n)$

Ora,  $P(D_{n+1} - I_{n+1} = D_n - I_n + 1) = \theta^2$

$P(D_{n+1} - I_{n+1} \leq D_n - I_n - 1) \geq (1-\theta)^2$

Portanto,  $P(D_n - I_n \geq 0, \forall_n) \leq P(z_n \geq 0, \forall_n)$  onde  $z_n$  é um passeio aleatório simple que começa em 0 e dá um passo à direita com

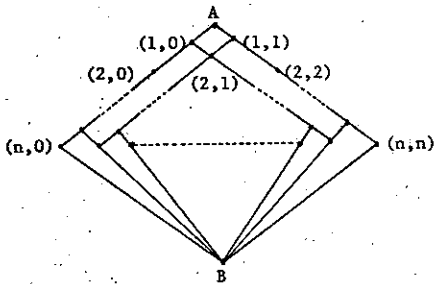
probabilidade  $\theta^2$ , e um  $\bar{a}$  esquerda com probabilidade  $(1-\theta)^2$ .

Este passeio aleatório chegará, com probabilidade 1, ao ponto  $-1$  sempre que  $\theta^2 \leq (1-\theta)^2$ , ou seja  $\theta \leq \frac{1}{2}$ . Portanto, se  $\theta \leq \frac{1}{2}$   $P(D_n - I_n \geq 0 | V_n) = 0$ . A primeira parte está demonstrada.

Parte II:  $\theta_c \leq \frac{53}{54}$  (\*)

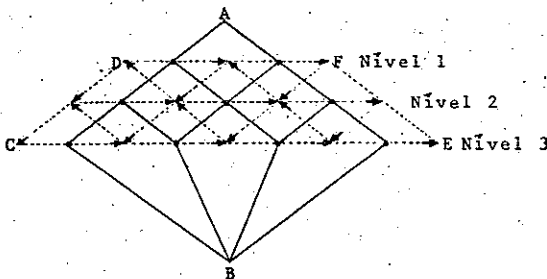
Para demonstrar esta parte, a mais difícil, calcularemos uma minoração de  $P_n(\theta)$  que é independente de  $n$  e, portanto, válida para  $P_\infty(\theta)$ .

Consideremos o seguinte diagrama:



Neste diagrama o ponto  $(i,j)$  pode ser atravessado se, e somente se  $a_{ij} = 1$ . Obviamente  $P_n(\theta)$  é a probabilidade de poder chegar de A a B.

Para estimar  $P_n(\theta)$  construímos um segundo diagrama tracejando pontos sobre o primeiro. Para fazer mais simples o desenho, consideramos o caso  $n=3$ .



Neste segundo diagrama sempre pode-se ir na direção das flechas diagonais e pela flecha horizontal que atravessa o

ponto  $(i, j)$  se  $a_{ij} = 0$ .

Lema 3: Não se pode ir pelo segundo diagrama de D a EF se, e somente se, pode-se ir pelo primeiro de A a B.

Demonstração: Por indução em relação ao número de níveis. Os detalhes não são difíceis mas um pouco cansativos e ficam como exercício para o leitor.

Demonstração de (\*): Seja  $P'_n(\theta)$  a probabilidade de poder passar de D a EF no segundo diagrama. Obviamente  $P'_n(\theta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} N_k (1-\theta)^k$  onde  $N_k$  é o número de caminhos de D a EF com k passos à direita. Esses caminhos têm, no máximo,  $3k$  passos. A cada passo têm-se duas ou três opções, logo  $N_k \leq 3^{3k} = 27^k$

$$P'_n(\theta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [27(1-\theta)]^k = \frac{27(1-\theta)}{1-27(1-\theta)}$$

está independente de n e menor que 1 se  $1-\theta < \frac{1}{54}$ , ou seja se  $\theta > \frac{53}{54}$ .

Usando o lema 3, temos que  $\theta_c \leq \frac{53}{54}$ .

Nota: É possível melhorar tanto a estimativa inferior quanto a superior de  $\theta_c$ . A primeira tomando em conta que se  $D_n - I_n \geq 2$  então  $P(D_{n+1} - I_{n+1} < D_n - I_n - 2) > 0$ . Para a segunda ver a referência [1], que é a base desta exposição.

O valor de  $\theta_c$  não é conhecido, e tampouco se sabe se  $P_{\infty}(\theta_c) = 0$ . Para um problema semelhante deu-se, recentemente, o valor

exato de  $\theta_c$  (ver [2]) e demonstrou-se que  $P_\infty(\theta_c) = 0$ .

Também têm-se estudado modelos nos quais a infecção pode se propagar tanto à esquerda quanto à direita e modelos nos quais a variável tempo é contínua. A referência [3] contém vários teoremas demonstrados para estes últimos modelos.

### Referências

- [1] A.L. Toom (1968) - A family of uniform nets of formal Neurons. Soviet Mathematics 9 - 1338-1341.
- [2] H. Kesten (1980) - The critical probability of bond percolation on the square lattice equals 1/2 - Communications in Mathematical Physics 74 - 41-59.
- [3] David Griffeath (1979) - Additive and Cancellative interacting particle systems - Lecture Notes in Mathematics 724 - Springer-Verlag.





O TEOREMA CENTRAL DO LIMITE EM ESPAÇOS DE BANACH,  
MEDIDAS DE LÉVY E PROCESSOS ESTÁVEIS  
COM TRAJETÓRIAS CONTÍNUAS

A. Araujo

Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA



## 1. INTRODUÇÃO

O objetivo destas notas é de apenas introduzir o leitor aos temas acima mencionados. Com o objetivo de fazê-las acessível a um público amplo, procurou-se manter a exposição em uma linguagem simples e por êste motivo os teoremas não são apresentados em sua maior generalidade. Para um tratamento mais completo dos temas aqui tratados recomendamos ao leitor o livro de Araujo-Guiné (1980), bem como as referências nele contidas.

Na seção 2 introduzimos o princípio da invariância e algumas de suas importantes aplicações à probabilidade e à estatística.

Na seção 3 definimos alguns conceitos e enunciamos algumas propriedades de geometria de espaços de Banach a serem utilizados posteriormente. Na seção 4 caracterizamos as medidas de Lévy e ressaltamos sua importância no estudo do teorema central do limite.

Na seção 5 estudamos a continuidade das trajetórias de processos estocásticos estáveis; provamos um teorema que nos dá uma condição suficiente para tal; utilizando um teorema de medidas de Lévy provado na seção 4. Finalmente damos como aplicação o estudo de séries aleatórias com termos estáveis.

## 2. O PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA

O primeiro teorema central do limite em espaços de Banach, importante, é o também chamado princípio de invariância de Kolmogorov e Donsker, que a seguir passamos a descrever: Sejam

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  uma seqüência de variáveis aleatórias reais (funções mensuráveis de espaço de probabilidade na reta) independentes e idênticamente distribuídas (i.i.d.) com  $E \xi_1 = 0$  e,  $E \xi_1^2 = 1$ .

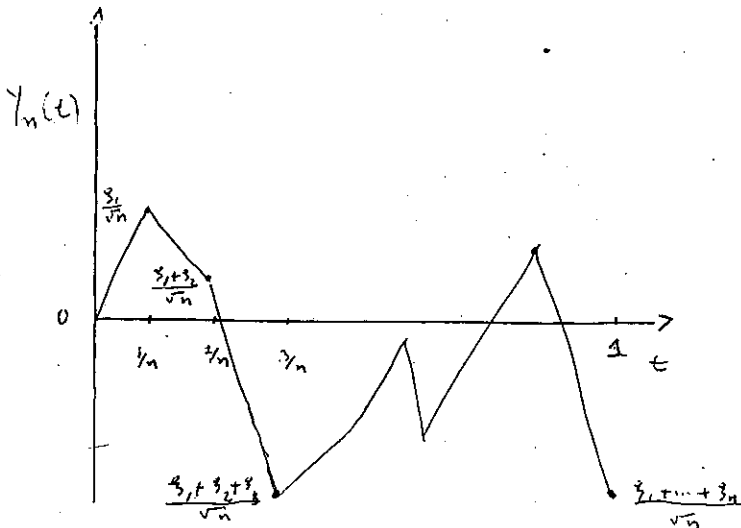
Formemos as somas parciais:

$$S_{n,0} = 0; \quad S_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^k \xi_i, \quad k=1, \dots, n.$$

$$\text{Seja } Y_n(t) = S_{n,k-1} + \sqrt{n} \left( t - \frac{k-1}{n} \right) \xi_k, \quad \frac{k-1}{n} \leq t \leq \frac{k}{n}.$$

isto é:  $Y_n$  é uma variável aleatória (v.a.) com valores em  $C[0,1]$  (espaço de Banach das funções reais, contínuas, definidas em  $[0,1]$ , munido com a norma do supremo).

$Y_n$  nada mais é que a v.a. que vale zero no ponto zero,  $S_{n,k}$  no ponto  $\frac{k}{n}$  e interpolação linear no meio. Uma realização típica de  $Y_n$  é a seguinte:



Qualquer formulação simples do teorema central do limite para v.a.'s reais nos fornece que a lei de  $S_{n,n} = Y_n(1)$  converge em distribuição (i.e. a função de distribuição de  $Y_n(1)$  converge pontualmente para a distribuição normal de média zero e variância  $1:N(0,1)$ ).

N. Kolmogorov, já havia notado em 1933, que esta convergência era muito modesta, e que na realidade se poderia provar que toda a linha poligonal convergia para a solução da equação do calor. Este fato, que só veio a ser formalizado muito posteriormente (e de forma independente) por Donsker (1951), é o princípio da invariância, e a lei limite é o chamado movimento Browniano (M.B.). Mais formalmente, o M.B. é uma v.a.  $Y(t)$  com valores em  $C[0,1]$ , tal que:

$Y(0) = 0$ , por quase toda parte (q.t.p.), para todo  $0 \leq s \leq t \leq 1$ , distribuição de  $(Y(t)) - Y(s) = \mathcal{L}(Y(t) - Y(s)) = N(0, t-s)$ ; e para  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots, t_n \leq 1$ :  $Y(t_1); Y(t_2) - Y(t_1), \dots, Y(t_n) - Y(t_{n-1})$

são v.a. independentes (isto é:  $Y$  tem incrementos independentes).

A noção correta que queria Kolmogorov é a da convergência fraca ou em lei em  $C[0,1]$ .

Definição. Sejam  $\mu, \mu_n$  probabilidades em  $B$ , espaço de Banach.

Dizemos que  $\mu_n$  converge fracamente, ou em lei, para  $\mu$ , se, para toda função,  $f$ , real, contínua, limitada, em  $B$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu_n = \int f d\mu .$$

Escrevemos então:  $\mu_n \xrightarrow{F} \mu$ .

Observemos que seria mais consistente com a terminologia de análise funcional chamarmos convergência fraca estrela, na definição. A nossa opção foi por seguir a denominação mais corrente

entre probabilistas.

A formulação precisa do princípio de invariância é:

Teorema 2.1.  $\mathcal{L}(Y_n) \Rightarrow_F \mathcal{L}(Y)$ , para alguma v.a.  $Y$  com valores em  $C[0,1]$ .

Como é fácil verificar: Se  $\mathcal{L}(Y)$  é o limite fraco de  $\mathcal{L}(Y_n)$  então  $Y$  tem as propriedades do M.B. Assim, o teorema acima prova, em particular a existência do M.B.

O princípio da invariância é uma generalização do teorema central do limite. Com efeito, basta tomar o funcional em  $C[0,1]$ ,  $f(x) = x(1)$ , no teorema acima. O princípio da invariância assim o é chamado porque o limite (M.B.) não depende da particular v.a.  $\xi$ , tomada. Este fato é de fundamental importância como veremos a seguir.

#### Aplicação 1. (Distribuição do máximo)

Inicialmente, computamos o limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\max_{n,k} S_{n,k} \leq a\}, \text{ para } S_{n,k} \text{ provinda de } \xi, \text{ com:}$$

$P\{\xi_1 = 1\} = P\{\xi_1 = -1\} = 1/2$ , o que facilita a computação. Pelo teorema acima, e utilizando-se o funcional  $f(x) = \sup_{0 \leq s \leq 1} x(s)$ , ob-

$$\text{tem-se } \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\max_{n,k} S_{n,k} \leq a\} = P\{\sup_{0 \leq s \leq 1} Y(s) \leq a\}.$$

O que nos fornece a distribuição de  $\sup_{0 \leq s \leq 1} Y(s)$ . Prova-

se, na verdade, que:  $P\{\sup_{0 \leq s \leq 1} Y(s) \leq a\} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-b/2} db. \text{ Finalmente, utilizando-se o teorema acima}$$

de forma análoga podemos obter a distribuição assintótica de  $\max_k S_{n,k}$ , para qualquer  $S_{n,k}$  (desde que  $E \xi_1 = 0$ ,  $E \xi_1^2 < \infty$ ).

Aplicação 2. (Funções de distribuições empíricas).

Sejam  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , como antes, a função de distribuição empírica de  $\xi$ , é definida por:

$$F_n(a) = \frac{1}{n} \# \{k \leq n, \xi_k \leq a\}$$

a estatística de Kolmogorov é definida por:  $K_n = \sup_a |F_n(a) - F(a)|$  a "Brownian Bridge" e definida por  $Y_0(t) = Y(t) - tY(1)$ : ela nada mais é que o M.B. condicionado a que seja zero no um. Com uma aplicação do princípio da invariância e argumentos combinatórios não triviais pode-se provar que:

$$P\{\sup_s |Y_0(s)| \leq a\} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 a^2}.$$

Com outra aplicação do princípio da invariância e outros argumentos não triviais pode-se mostrar que:

$$\mathbb{L}(n^{1/2} K_n) =_F \mathbb{L}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |Y_0(t)|\right)$$

reunidos estes fatos nos permitem fazer testes sobre ou estimar uma função de distribuição de uma v.a. arbitrária, a partir de sua função de distribuição empírica.

Para outras aplicações e prova dos fatos acima mencionados o leitor é referido a Billingsley (1968).

### 3. ALGUMAS NOÇÕES E FATOS BÁSICOS.

O objetivo desta seção é o de apenas introduzir algumas noções e fatos a serem usados nas seções seguintes. Para provas e desenvolvimento mais completo das idéias apresentadas aqui ver Araujo-Giné (1980).

Em todo este trabalho os espaços de Banach,  $B$ , são separáveis, e as medidas consideradas são borelianas. As v.a.'s,  $X$ , são funções mensuráveis de um espaço de probabilidade em  $B$ , i.e.  $X: (\Omega, \mathcal{G}, P) \rightarrow B$ , tal que para todo boreliano  $A$ ,  $X^{-1}(A) \in \mathcal{G}$ . Quando alguma integral de alguma função com valores em  $B$  for mencionada estamos nos referindo a integral no sentido de Bochner, i.e. limites definindo a integral são no sentido da norma.

Definição. Uma,  $i: B_1 \rightarrow B_2$ , transformação linear contínua de um Banach em um outro é chamada de tipo  $p$ ,  $p \in [1, 2]$ . Se para toda sequência  $\{x_i\} \subset B_1$ , tal que  $\sum \|x_i\|^p < \infty$ , então,  $\sum \varepsilon_i i(x_i)$  convergir q.t.p. onde  $\{\varepsilon_i\}$  é uma sequência de Rademacher, i.e., são v.a.'s i.i.d com  $P\{\varepsilon_1 = 1\} = P\{\varepsilon_1 = -1\} = 1/2$ .

Observação: No caso  $i: B \rightarrow B$ ,  $i =$  identidade, dizemos  $B$  de tipo 1

Exemplos:  $L^p$ ,  $p \geq 2$ ; todo Hilbert é de tipo 2; todo Banach é de tipo 1.

Definição  $B$  é chamado de cotipo 2, se para toda  $\{x_i\} \subset B$  e sequência de Rademacher  $\{\varepsilon_i\}$ ,  $\sum \varepsilon_i x_i$  convergir q.t.p. implicar

$$\sum \|x_i\|^2 < \infty$$



Exemplos:  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq 2$ ; todo Hilbert.

Teorema 3.1. Seja  $i: B_1 \rightarrow B_2$ , transformação linear contínua. As seguintes proposições são equivalentes:

(a)  $i$  é de tipo 2

(b) existe  $c > 0$ , tal que para toda sequência de v.a.'s  $\{X_i\}_{i=1}^n$  independentes com  $E X_i = 0$  e  $E \|X_i\|^p < \infty$

$$E \left\| i \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \right\|^p \leq c \sum_{i=1}^n E \|X_i\|^p .$$

(c) Existe sequência de v.a. independentes  $\{\phi_i\}$  com  $E \phi_i = 0$ ,  $0 < C_1 \leq E |\phi_i|^p \leq C_2 < \infty$ , tal que se  $\{x_i\} \subset B$ , e  $\sum \|x_i\|^p < \infty$  então  $\sum u(x_i) \phi_i$  convergir q.t.p.

Teorema 3.2 As seguintes proposições são equivalentes:

(a)  $B$  é de cotipo 2

(b) existe  $c > 0$  tal que para toda sequência  $\{X_i\}_{i=1}^n$  de v.a.'s independentes com  $E X_i = 0$  e  $E \|X_i\|^2 < \infty$

$$E \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|^2 \geq c \sum_{i=1}^n E \|X_i\|^2 .$$

#### 4. MEDIDAS DE LÉVY

Nesta seção e na próxima,  $M$  sempre denota uma medida de Borel em  $B$ , positiva, simétrica ( $M(A) = M(-A)$ , para todo Boreliano  $A$ ), com  $M\{0\} = 0$  e tal que:

$$M\{x, \|x\| > 1\} < \infty .$$

Definição. Chamamos  $M$  medida de Lévy se existir medida de probabilidade  $\mu$  em  $B$  tal que:

$$\hat{\mu}(t) = \int_B e^{i t(x)} d\mu(x) = e^{-\int_B (e^{i t(x)} - 1) dM(x)},$$

para todo  $t$  em  $B'$  (dual topológico de  $B$ ).

Exemplo. Suponha  $M(B) = \|M\| < \infty$ .

Então  $M$  é medida de Lévy com  $\mu = \text{Pois}(M)$ ,

$$\text{onde } \text{Pois}(M) = e^{-\|M\|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{*k}}{k!}$$

$M^{*k}$  denota a convolução de ordem  $k$  de  $M$  i.e.,  $M$   $*$  (kvezes)  $*$   $M$ .

Em um espaço de Hilbert temos o seguinte teorema:

Teorema 4.1.  $M$  é medida de Lévy  $\Leftrightarrow \int \min\{1, \|x\|^2\} dM(x) < \infty$ .

Em um espaço de Banach arbitrário o teorema acima deixa de ser verdadeiro na realidade o teorema acima caracteriza os espaços de Hilbert entre os espaços de Banach. Mais precisamente.

Teorema 4.2.  $\{B$  é tal que:  $M$  é medida de Lévy

$$\Leftrightarrow \int \min\{1, \|x\|^2\} dM(x) < \infty \Leftrightarrow$$

$B$  é isomorfo a um espaço de Hilbert.

Este teorema decorre dos teoremas 4.3, 4.4 e 4.5 abaixo.

Teorema 4.3:  $B$  é um espaço de tipo  $p$

$$(p \in [1, 2]) \Leftrightarrow \left\{ \int \min\{1, \|x\|^p\} dM(x) < \infty \Rightarrow M \text{ é medida de Lévy} \right\}.$$

Teorema 4.4:  $B$  é um espaço de cotipo 2  $\Leftrightarrow \{M$  medida de Lévy

$$\Rightarrow \int \min\{1, \|x\|^2\} dM(x) < \infty \}.$$

Teorema 4.5  $B$  é isomorfo a um espaço de Hilbert  $\Leftrightarrow B$  é de tipo 2 e de cotipo 2.

Para a prova do Teorema 4.5 ver Kwapien(1972). Para a prova do teorema 4.4 ver Araujo-Giné(1980) notemos aqui apenas que para a parte direta basta usar a propriedade de cotipo 2 e a desigualdade conver-sa de Kolmogorov:

$$P\{\|X_1 + \dots + X_n\| > a\} \geq 2^{-p}\{1 - ((a+c)^p + a^p(1-2^{1-p}))\}/E\|X_1 + \dots + X_n\|^p,$$

válida para v.a.'s independentes, com  $EX_i = 0$ , e  $\|X_i\| \leq c$  aqui  $a > 0$ ,  $p \geq 1$ .

Prova do Teorema 4.3. Suponha  $B$  de tipo  $p$  e seja  $M$  tal que

$$\int \min\{1, \|x\|^p\} dM(x) < \infty.$$

Seja  $X_j$ ,  $j=0,1,\dots$  v.a. independentes com distribuição Pois ( $M_j$ ); onde, para todo Boreliano  $A$ ,  $M_0(A) = M(\{x, \|x\| > 1\} \cap A)$  e, para  $j \geq 1$ ,  $M_j(A) = M(\{x, \frac{1}{j+1} < \|x\| \leq \frac{1}{j}\} \cap A)$ .

Sendo  $B$  de tipo 2 é fácil comprovar que para toda medida finita e positiva  $\nu$ :

$$\begin{aligned} \int \|x\|^p d \text{Pois}(\nu) &= e^{-\|\nu\|} \int \sum_{k=0}^{\infty} \|\nu\|^k \frac{\|x\|^p}{k!} d(\frac{\nu}{\|\nu\|})^{*k}(x) \\ &\leq c e^{-\|\nu\|} \sum_{k=0}^{\infty} \|\nu\|^k k \int \frac{\|x\|^p}{k!} d(\frac{\nu}{\|\nu\|})(x) = \\ &= c \int \|x\|^p d\nu(x). \end{aligned}$$

Então,

$$E\left\| \sum_{j=r}^s X_j \right\|^p \leq c \int_{\{x, \frac{1}{s+1} < \|x\| \leq \frac{1}{r}\}} \|x\|^p M(dx) \rightarrow 0$$

Quando  $r, s \rightarrow \infty$

Segue-se que  $\sum_{j=1}^{\infty} X_j$  converge em probabilidade e que  $M$  é de Lévy.

Suponha agora a hipótese da recíproca. Segue-se que, se  $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty$ , a medida  $\Sigma(\delta_{-x_i} + \delta_{x_i})$  é de Lévy, onde  $\delta_x$  é a medida de massa um em  $x$ . Então,  $\Sigma(\xi_i - \xi'_i)x_i$  converge q.t.p., onde  $\xi_i, \xi'_i$  são v.a.'s i.i.d. com  $L(\xi_1) = \text{Pois } \delta_1$ . Daí, segue-se que  $\Sigma \varepsilon_i x_i$  converge q.t.p., onde  $\{\varepsilon_i\}$  é sequência de Rademacher. Temos portanto que  $B$  é de tipo p. (Ver também Araujo-Giné(1980), Capítulo III, Teoremas 2.10 e 7.2).

Para finalizar esta seção gostaríamos de frisar que tanto para o caso de Banach quanto da reta o estudo de medidas de Lévy é importante para o estudo do teorema central do limite. Isto se deve em primeiro lugar pela fórmula de Lévy-Khintchine, que nos diz quais os limites possíveis  $\mu$  de soma de variáveis aleatórias simétricas, infinitesimais, em termos de sua transformada de Fourier. Se  $\mu$  é tal limite então:

$$(4.1) \quad \forall t \in B' \quad \hat{\mu}(t) = \int e^{it(x)} d\mu(x) = \\ = \exp \left\{ \int t^2(x) d\gamma(x) + \int (e^{it(x)} - 1) dM(x) \right\}$$

para alguma distribuição gaussiana  $\gamma$  é medida de Lévy  $M$ . Em segundo lugar porque, condições suficientes para compacidade relativa (fraca) de medidas de Lévy (muito semelhantes a condições suficientes para medidas de Lévy) traduzem-se de imediato em condições para compacidade (fraca) de soma de v.a.'s independentes; um dos objetivos mais importantes do estudo do teorema central do limite. Para estes pontos ver Araujo-Giné (1980).

## 5. PROCESSOS ESTÁVEIS COM TRAJETÓRIAS CONTÍNUAS

O objetivo desta seção é o de apresentar uma outra aplicação dos teoremas obtidos na seção anterior. Desta feita ao estudo da continuidade das trajetórias dos processos estáveis. Como na reta, uma v.a. simétrica  $X$  com valores em  $B$  é dita estável, se para todo  $n$  existe  $a_n \in \mathbb{R}$  tal que

$$\mathcal{L}(X)^{*n} = \mathcal{L}(a_n X)$$

pode-se provar (ver Araujo-Giné(1980) Capítulo III Seção 6) que  $\mu$  é simétrica estável se e somente se:  $\forall t \in B'$   $\mu \circ t^{-1}$  é simétrica e estável na reta.

Ademais, o índice  $\alpha$  de  $\mu \circ t^{-1}$ , independe de  $t$ . Lembremos ao leitor que se  $\xi$  é v.a. real, simétrica, estável, então o índice de  $\xi$  é o número 2 e  $\xi$  é gaussiana ou é o  $\alpha \in (0,2)$  tal que:

$$P\{|\xi| > a\} \sim \frac{\text{constante}}{a^\alpha}, \text{ para } a \text{ suficientemente grande.}$$

Outro fato que se pode provar é que se  $\mu$  é estável de índice  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0,2)$ , então a transformada de Fourier de  $\mu$  é da forma (4-1) e a medida de Lévy de  $\mu$  é da forma;

$$(5-1) \quad c \, dr^{-\alpha} \, x \, dN(u)$$

Onde  $c$  é uma constante e  $N$  é uma medida de Borel, finita, em  $\{x, \|x\| = 1\}$ .

Como é sabido do caso real a importância das v.a. estáveis decorrem de serem elas as únicas que são limites de somas normalizadas de v.a.'s i.i.d. Este fato bem como a teoria de domínios de atração (i.e., a determinação em termos de peso nas caudas de quais v.a.'s convergem para quais v.a.'s estáveis) de maneira geral, seguem bastante de perto o caso real e para isso referimos o leitor

novamente a Araujo-Giné (1980) Capítulo III Seção 6.

Gostaríamos de apresentar aqui uma condição suficientes em  $N$ . para que a fórmula (5.1), que vimos ser necessária, nos dê um processo estocástico (que tem que ser estável) com trajetórias contínuas. Para tal, necessitamos de uma versão um pouco distinta do teorema 4.3.

Seja  $\tau$  uma métrica (ou pseudo-métrica) contínua em  $[0,1]$ .

Seja

$$\text{Lip}(\tau) = \{x \in C[0,1], \sup_{s \neq t} \frac{|x(s) - x(t)|}{\tau(s,t)} < \infty\}$$

e, para  $t_0 \in [0,1]$  fixo, a norma em  $\text{Lip}(\tau)$  :

$$\|x\|_{\tau} = |x(t_0)| + \sup_{s \neq t} \frac{|x(s) - x(t)|}{\tau(s,t)}$$

seja  $N_{\tau}(\epsilon)$ , a entropia de raio  $\epsilon$  (em  $\tau$ ), i.e., o número mínimo de  $\tau$ -bolas de raio  $\epsilon$  necessário para cobrir  $[0,1]$ .

Vamos, também necessitar da hipótese:

$$(5.2) \quad \int_0^1 (\log N_{\tau}(\epsilon))^{1/2} d\epsilon < \infty.$$

Antes de darmos a prova do teorema que nos interessa vamos enunciar uma versão um pouco generalizada do Teorema 4.3. O leitor poderá dar facilmente uma prova do teorema abaixo, a partir da prova do Teorema 4.3.

**Teorema 5.1.** Sejam  $B_1$  e  $B_2$  dois espaços de Banach. Seja  $i: B_1 \rightarrow B_2$  um operador linear contínuo de tipo 2.

$$\text{Se } \int \min\{1, \|x\|^2\} dM(x) < \infty$$

Então,  $M \circ i^{-1}$  é uma medida de Lévy em  $B_2$ .

Teorema 5.2. Seja  $M$  uma medida em  $C[0,1]$ , da forma (5.1). Suponha que (5.2) é verdadeiro e,

$$\int \|u\|_{\tau}^{\alpha} N(du) < \infty$$

Então,  $M$  é a medida de Lévy de uma v.a., estável, de índice  $\alpha$ , com valores em  $C[0,1]$ .

Prova (idéia geral, para detalhes ver Araujo-Giné(1980)).

Dado  $\tau$  satisfazendo (5.2) pode-se encontrar  $\tau'$  satisfazendo também (5.2) e tal que:

$$\lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \neq t}} \frac{\tau(s,t)}{\tau'(s,t)} = 0.$$

Segue-se que  $\text{Lip}(\tau')$  é espaço de Banach separável. Em seguida mostra-se, usando-se (5.2) que

$$i : \text{Lip}(\tau') \rightarrow C[0,1]$$

é de tipo 2. Pelo teorema acima resta mostrar que:

$$M \{x, \|x\|_{\tau} > 1\} < \infty$$

e,

$$\int_{\{x, \|x\|_{\tau} \leq 1\}} \|x\|_{\tau} dM(x) < \infty.$$

Mas, com a transformação de variáveis  $r = \|x\|_{\infty}$  e  $u = \frac{x}{\|x\|_{\infty}}$ ,  $x \neq 0$ ,

é fácil ver que:

$$\int_{\{x, \|x\|_{\tau} \leq 1\}} \|x\|_{\tau}^2, dM(x) = c \int \left( r^2 \|u\|_{\tau}^2, \frac{dr}{r^{1+\alpha}} dN(u) \right)$$

$$= c \int_0^1 \left( \frac{1}{\|u\|_{\tau}}, r^2 \|u\|_{\tau}^2, \frac{dr}{r^{1+\alpha}} dN(u) \right) =$$

$$= \frac{c}{2-\alpha} \int \|u\|_{\tau}^{\alpha}, dN(u) < \infty .$$

A prova de que  $M\{x, \|x\|_{\tau} > 1\} < \infty$  é feita de forma análoga e a deixamos para que o leitor a faça.

Vamos terminar esta seção com uma aplicação do teorema que acabamos de demonstrar ao estudo da continuidade de alguns processos estocásticos estáveis, definidos por séries.

Considere  $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i x_i$  com  $\phi_i$  v.a.'s independentes, simétricas, estáveis de ordem  $\alpha \in (0, 2)$  e,  $\{x_i\} \subset C[0, 1]$ . Então, com o uso de transformadas de Fourier, por exemplo, é fácil ver que a esta série corresponde uma medida de Lévy do tipo (5.1) onde

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_{\tau}^{\alpha} (\delta_{x_i/\|x_i\|} + \delta_{-x_i/\|x_i\|}) \text{ e, portanto,}$$

se  $\sum \|x_i\|_{\tau}^{\alpha} < \infty$  com  $\tau$  satisfazendo a (4.2) temos a série definindo um processo estocástico estável de índice  $\alpha$ , com trajetórias contínuas.

Devemos lembrar aqui ao leitor que se supusermos que um processo é estável e tem incrementos independentes, então, se êle tem trajetórias contínuas, êle é necessariamente gaussiano. E que portanto os processos considerados acima não devem ter incrementos independentes.



As mesmas técnicas acima também podem ser usadas para provar (veja Araujo-Giné (1980) página 186) também, que se

$$X(t) = \sum a_k \phi_k e^{itk} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$\{\phi_k\}$  i.i.d. estáveis com índice  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 2)$ , simétricas, com

$$a_k = \frac{1}{k^{1/\alpha}} (\log k)^\beta, \quad k \geq 2.$$

Então, a série é convergente (i.e.  $X$  é processo estocástico com trajetórias contínuas) se  $\beta > \frac{1}{\alpha} + 1/2$  e divergente se  $\beta \leq 1$ .

(Tal fato melhora o resultado original de Paley-Zygmund).

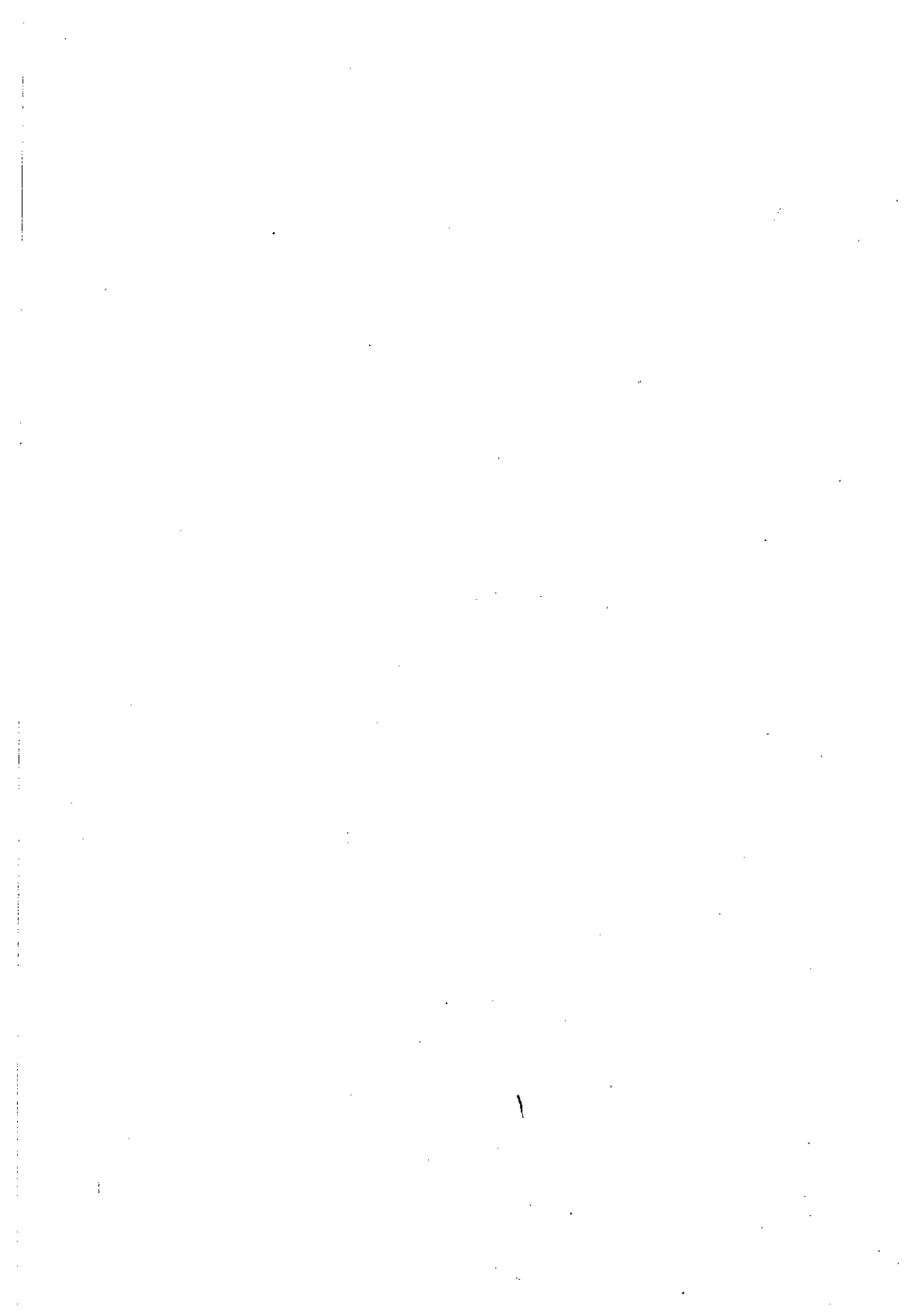
REFERÊNCIAS

- ARAUJO, A., e E. GINÉ (1980) "The central limit theorem for real and Banach valued random variables". Wiley, New York.
- BILLINGSLEY, P. (1968) Convergence of Probability measures. Wiley, New York.
- KWAPIÉN, S. (1972) Isomorphic characterization of inner product spaces by orthogonal séries with vector valued coefficients. Studia Math. 58, 49-50.

CAMPOS ALEATÓRIOS

Chang C. Y. Dorea

Universidade de Brasília



CAMPOS ALEATÓRIOS<sup>(\*)</sup>

por

Chang C. Y. Dorea  
Depto de Matemática-IE  
Universidade de Brasília  
70910 - Brasília-DF

1. Introdução

Os primeiros estudos sobre campos aleatórios (c.a.), feitos na década de 50, se desenvolveram em dois distintos contextos : um deles baseado no estudo das configurações de equilíbrio em Estadística Mecânica, os chamados campos aleatórios de Gibbs (c.a. de Gibbs); e outro iniciado por P. Levy ao mostrar a aplicabilidade do movimento Browniano a mais de um parâmetro (c.a.).

Enquanto os campos aleatórios introduzidos por Levy constituem uma generalização natural de processos estocásticos  $\{X(t), t \geq 0\}$  para mais de um parâmetro  $\{X(t_1, \dots, t_k), t_j \geq 0\}$ , a formulação de c.a. de Gibbs era bem mais complexa e consistia na procura dos estados de Gibbs (configuração de equilíbrio) que satisfazia determinadas especificações do problema. O conceito moderno de c.a. de Gibbs foi dado em 68-69 por Dobrushin-Lanford-Ruelle e

---

(\*) Trabalho apresentado no 13º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1981, Poços de Caldas, MG.

foi em 71 que Spitzer mostrou a equivalência de c.a. de Gibbs e campos aleatórios que possuem certa propriedade de Markov, os chamamos campos Markovianos.

O objetivo deste trabalho é discutir:

- (a) como os conceitos clássicos de processos estocásticos foram entendidos para c.a.
- (b) os princípios de invariância que podemos obter para os c.a.
- (c) a conveniência de se introduzir uma nova noção para campos Markovianos.

## 2. Campos Aleatórios

A fim de evitar a complexidade de notação concentraremos em c.a. a dois parâmetros:

$$X = \{X_{n_1 n_2} : \underline{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}, \quad \mathbb{Z} \text{ inteiros}$$

$$Y = \{Y(t_1, t_2) : t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\}$$

onde  $X_{n_1 n_2}$  e  $Y(t_1, t_2)$  são variáveis aleatórias (v.a.).

(2.1) Estacionaridade. Dizemos que  $X$  é estacionário se dado  $\underline{m}$  temos  $\{X_{\underline{n}+\underline{m}} : \underline{n} \in S^{\text{finito}} \subset \mathbb{Z}^2\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{X_{\underline{n}} : \underline{n} \in S\}$ . Onde  $\underline{n}+\underline{m} = (n_1+m_1, n_2+m_2)$  e  $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$  indica a mesma distribuição.

(2.2) Incrementos Independentes (Wichura - 73). Dizemos que  $X$  possui incrementos independentes se dado blocos disjuntos  $B_1, B_2, \dots, B_k$

os incrementos  $X(B_1), \dots, X(B_k)$  são v.a.'s independentes. Onde por bloco entendemos um subconjunto de  $Z^2$  do tipo  $B = (\underline{n}, \underline{m}]$ ,  $n_1 < m_1$ ,  $n_2 < m_2$ , e o incremento é definido por

$$X(B) = X_{m_1 m_2} - X_{m_1 n_2} - X_{n_1 m_2} + X_{n_1 n_2}$$

(2.3) Markov (Dobrushin - 68) - Seja  $D$  conexo  $\subset Z^2$  e seja  $\partial D = \{\underline{n} \in Z^{2-D} : \exists \underline{m} \in D \text{ e } |\underline{n} - \underline{m}| = 1\}$  a fronteira de  $D$ . Seja  $\mathcal{J}_D = \sigma(X_{\underline{n}} : \underline{n} \in D)$ , similarmente  $\mathcal{J}_{Z^2-D}$  e  $\mathcal{J}_{\partial D}$ . Dizemos que  $X$  é um campo Markoviano se  $\mathcal{J}_D$  e  $\mathcal{J}_{Z^2-D}$  são condicionalmente independentes dado  $\mathcal{J}_{\partial D}$ .

(2.4) Martingales (Cairoli-Walsh - 75) - Seja  $\{\mathcal{J}_{\underline{n}}\}$  uma família de  $\sigma$ -algebras não decrescentes  $\mathcal{J}_{\underline{n}} \subset \mathcal{J}_{\underline{m}}$  se  $n_1 \leq m_1$  e  $n_2 \leq m_2$  aos quais  $X_{\underline{n}}$  estão adaptadas. Seja  $B = (\underline{n}, \underline{m}]$  um bloco então:

- (i)  $X$  é uma martingale se  $E(X_{\underline{m}} | \mathcal{J}_{\underline{n}}) = X_{\underline{n}}$
  - ii)  $X$  é uma martingale fraca se  $E(X(B) | \mathcal{J}_{\underline{n}}) = 0$
  - iii)  $X$  é uma martingale forte se  $E(X(B) | \mathcal{J}_{n_1, \infty} \vee \mathcal{J}_{\infty, n_2}) = 0$
- (a existência das expectâncias condicionais é assumida e

$$\mathcal{J}_{n, \infty} = \bigvee_{n_2} \mathcal{J}_{n, n_2}, \text{ similarmente } \mathcal{J}_{\infty, n_2} = \bigvee_{n_1} \mathcal{J}_{n_1, n_2}.$$

Similarmente os conceitos acima são definidos para o caso contínuo  $Y(t_1, t_2)$ . Resta acrescentar que c.a. com propriedade " $\phi$ -mixing" foram formuladas por Deo - 75. Quanto ao importante capítulo de campos Gaussianos, foi iniciado por L. Levy ao estudar o movimento Browniano a mais de um parâmetro e seguiram-se inúmeros trabalhos

na área (McKean - 63, Wong - 69, Molcan - 71, Pitt - 71 e muitos outros).

É curioso notar que o conceito de campos Markovianos surgiu antes de c.a. com incrementos independentes. Este fato se explica por terem sido introduzidas com intuito de resolver problemas relativos a c.a. de Gibbs e associadas aos campos Gaussianos. Enquanto os demais conceitos surgiram com o objetivo de se obter os principais teoremas de convergência de processos estocásticos.

### 3. Princípios de Invariança para Campos Aleatórios

O primeiro problema aqui é encontrar um espaço adequado para se estudar a convergência fraca. O espaço de funções contínuas a dois parâmetros ( $C[0, T]^2$ ) e o espaço de Skorohod ( $D[0, T]^2$ ) foram desenvolvidos por Straf - 70 e incrementados por Bickel-Wichura - 71 e Deo - 75.

Podemos agora definir o processo Wiener em  $D[0, T]^2$ . Dizemos que  $W$  é o processo Wiener se:

(a)  $P(W \in C[0, T]^2) = 1$

(b) Se  $B_1, \dots, B_k$  são blocos disjuntos então  $W(B_1), \dots, W(B_k)$  são v.a.'s independentes com distribuição normal e  $EW(B_j) = 0$  e  $EW^2(B_j) = |B_j|$  (onde  $|\cdot|$ : medida Lebesgue).

Os princípios de invariança que passaremos a enunciar foram originalmente provados num contexto mais geral.

Seja  $\{\xi_n, n \in Z^2$  v.a.'s de média zero e segundo momento finito. Seja



$$S_{\underline{n}} = \sum_{j_1 \leq \underline{n}} \xi_{j_1} \quad (j_1 \leq \underline{n} \iff j_1 \leq n_1 \text{ e } j_2 \leq n_2)$$

$$X_{\underline{n}}(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{n_1 n_2}} S_{[n_1 t_1][n_2 t_2]}, \quad t \in [0, T]^2$$

onde  $\sigma > 0$  e  $[.]$  indica o maior inteiro contido.

(3.1) Teorema (Bickel-Wichura - 71) - Se  $\{\xi_{\underline{n}}\}_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^2}$  são v.a.'s independentes e identicamente distribuidas com  $E\xi_{\underline{n}}^2 = \sigma^2$  então  $X_{\underline{n}} \implies W$ . ( $\implies$  convergência fraca em  $D[0, T]^2$ ).

(3.2) Teorema (Deo - 75) - Se  $\{\xi_{\underline{n}}\}$  é estacionário e " $\phi$ -mixing" satisfazendo

$$\sum_r r \phi^{1/2}(r) < \infty \quad \text{e} \quad \lim_{\underline{n} \rightarrow \infty} \frac{1}{n_1 n_2} E(S_{\underline{n}}^2) = \sigma^2$$

então  $X_{\underline{n}} \implies W$ .

(para definição de " $\phi$ -mixing" ver Deo - 75, pg. 708).

(3.3) Teorema (Basu-Dorea - 79) - Se  $\{\xi_{\underline{n}}\}$  estacionário, ergódica,  $E\xi_{\underline{n}}^2 = \sigma^2$  e satisfazendo a propriedade de martingale forte então  $X_{\underline{n}} \implies W$ .

Algumas versões da Lei do logaritmo iterado do tipo Strassen foram obtidas por Wichura - 73. Porém ressaltamos que o princípio geral de invariância de Strassen - 64 não tem similar para campos aleatórios. Isto se deve ao fato de não possuímos uma versão do teorema de representação de Skorohod para mais de um parâmetro (Pyke - 72). A principal dificuldade é a falta duma definição apro

pré-ada para tempos de parada a mais de um parâmetro. Walsh - 79 e Wong-Zakai - 79 introduziram o conceito de domínios de parada que foram utilizados com sucesso não só na obtenção de importantes desigualdades para campos de martingales como também para o entendimento das integrais estocásticas no plano. Interessantes também são os resultados de Neaderhouse - 81 sobre princípios de invariância para c.a. de Gibbs.

#### 4. Comentários Finais

Quanto aos campos markovianos discutidos na secção 2, apesar de terem sido introduzidas em 68, pouco entendemos deles até o presente momento (exceto para o caso Gaussiano). A propriedade Markoviana para campos Gaussianos pode ser traduzida em termos de sua função de correlação, requerendo que a mesma seja solução fundamental de certos operadores diferenciais (Wong - 69). Sabe-se também que o movimento Browniano com número par de parâmetro não são campos Markovianos (McKean - 63). Isto nos leva a uma situação bastante distinta do caso de processos estocásticos:

incrementos independentes  $\implies$  Markoviano

Num trabalho recente de Dorea - 81 introduziu-se uma nova noção de campo Markoviano para a qual a implicação acima é satisfeita. Mais ainda possibilita o estudo dos campos Markovianos através de semigrupos associados e função transição de probabilidade. Nesse caso dado uma família de  $\sigma$ -álgebras  $\{ \mathcal{F}_{t_1, t_2} \}$  não decrescente, diremos que  $\{Y(t_1, t_2)\}$  é um campo Markoviano se para  $k = 1, 2, \dots$  e

$f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  mensurável temos para  $0 \leq t^{(1)} < \dots < t^{(k)}, h > 0$

$$E\{f(Y(t^{(1)}, s+h), \dots, Y(t^{(k)}, s+h)) \mid \mathcal{F}_{\infty}^s\} =$$

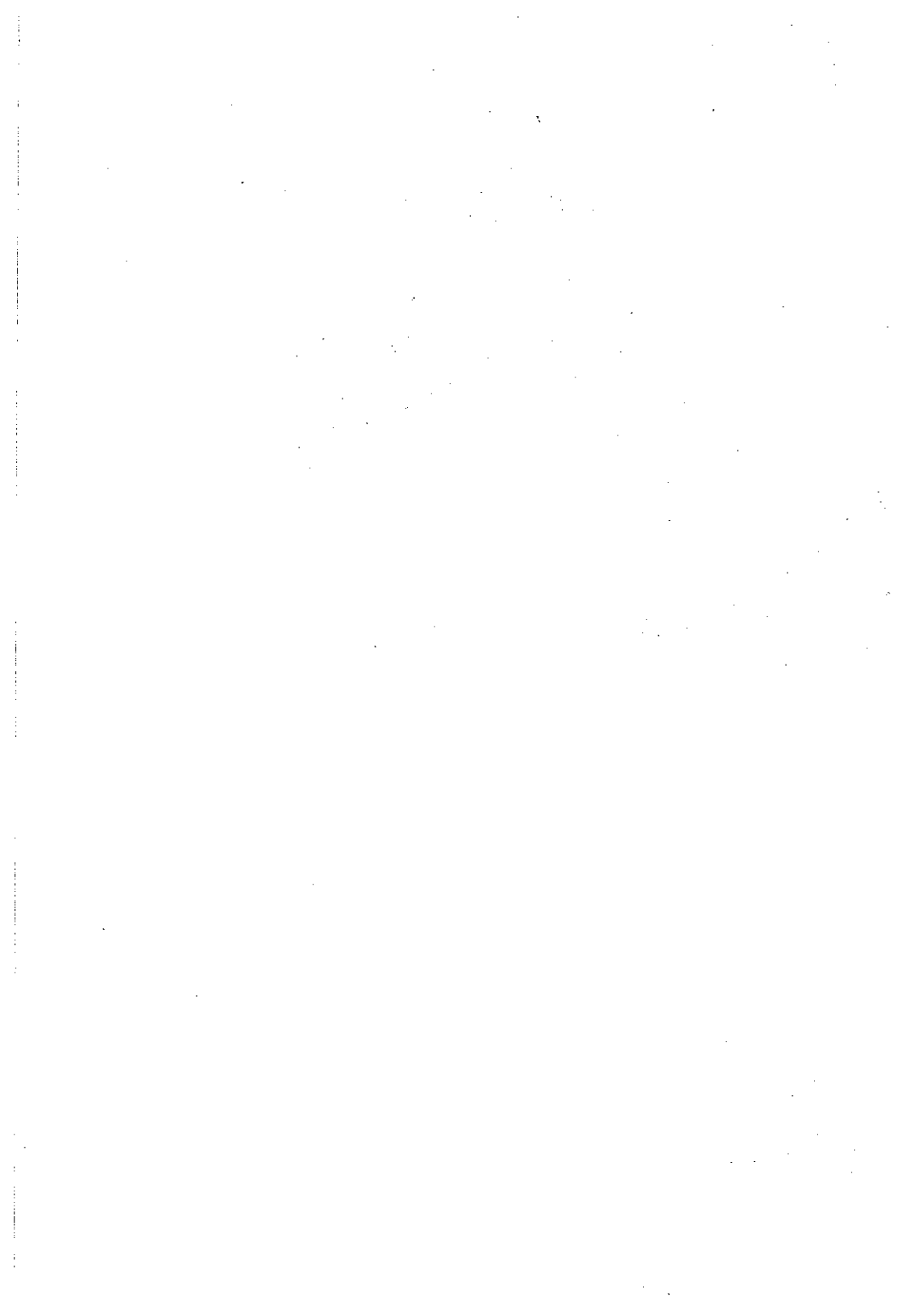
$$E\{f(Y(t^{(1)}, s+h), \dots, Y(t^{(k)}, s+h)) \mid Y(t^{(1)}, s), \dots, Y(t^{(k)}, s)\}$$

o mesmo valendo quando os papéis das duas coordenadas são permutadas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Basu, A.K., Dorea, C.C.Y. (1979) - On functional central limit theorem for stationary martingale random fields. Acta Math., vol. 33, 307-316.
- [2] Bickel, P.J., Wichura, M.J. (1971) - Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications. The Annals of Math. Stat., vol. 42, 1656-1670.
- [3] Cairoli, R., Walsh, J.B. (1975) - Stochastic integrals in the plane. Acta Math., 134, 111-183.
- [4] Deo, C.M. (1975) - A functional central limit theorem for stationary random fields - The Annals of Prob., vol 3, 708-715.
- [5] Dobrushin, R.L. (1968) - Description of a random field by means of conditional probabilities and the conditions governing its regularity. Theory of Prob. and its appl., vol. 13, 197-224.
- [6] Dorea, C.C.Y. (1981) - Transition probability functions for random fields. Trabalho de Matemática nº 179, Universidade de Brasília (a aparecer).
- [7] Levy, P. (1956) - A special problem of Brownian motion and a general theory of Gaussian random functions. Proc. of the third Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., 133-175.
- [8] McKean Jr., H.P. (1963) - Brownian motion with several dimension time. Theory of Prob. and its appl., vol. 8, 335-354.
- [9] Molcan, G.M. (1971) - Characterization of Gaussian fields with Markovian property. Soviet Math. Dokl., vol. 12, 563-662.
- [10] Neaderhouse, C.C. (1981) - An almost sure invariance principle for partial sums associated with a random field Stoch. Proc. and Appl., 11, 1-10.

- [11] Preston, C. (1976) - Random fields. Lectures notes in Mathematics, n<sup>o</sup> 534, Springer-Verlag, New York.
- [12] Spitzer, F. (1971) - Markov random fields and Gibbs ensembles. Amer. Math. Monthly, vol. 78, 142-154.
- [13] Straf, M.L. (1970) - Weak convergence of stochastic processes with several parameters. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., 187-221.
- [14] Walsh, J.B. (1979) - Convergence and regularity of multiparameter strong martingales. Zeit. Wahrs., vol. 46, 177-192.
- [15] Wichura, M.J. (1973) - Some Strassen type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increments. The Annals of Prob., vol. 1, 272-296.
- [16] Wong, E., Zakai, M. (1976) - Weak martingales and stochastic integrals in the plane. The Annals of Prob., vol. 4, 570-586.



UM MODELO ESTOCÁSTICO PARA O FLUXO DE CALOR

Antonio Galves

(IME-USP)



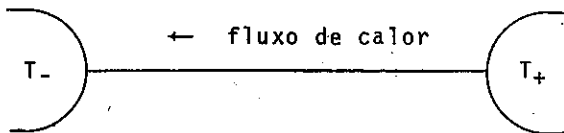


UM MODELO ESTOCÁSTICO PARA O FLUXO DE CALOR

*Antonio Galves*  
(IME-USP)

O objetivo inicial deste texto é a apresentação de um modelo estocástico para o fluxo de calor entre duas fontes térmicas mantidas a temperaturas diferentes. Um segundo objetivo do texto é servir de motivação e introdução a um ramo recente da Teoria das Probabilidades: os Sistemas Markovianos com uma infinidade de componentes interagindo entre si.

Antes de mais nada, vamos descrever o fenômeno físico pelo qual nos interessamos. Imaginemos uma haste metálica homogênea cujas extremidades estejam em contacto com dois banhos térmicos mantidos a temperaturas diferentes  $T_-$  e  $T_+$



Como  $T_- \leq T_+$ , um fluxo de calor se estabelecerá entre as duas extremidades da haste, levando calor da parte mais quente à

parte mais fria. A presença dos banhos térmicos mantendo fixas as temperaturas das duas extremidades, a haste se estabilizará, ao final de um tempo suficientemente longo, num estado estacionário que não é de equilíbrio térmico, no qual a temperatura de cada ponto dependerá da posição relativa do ponto em relação às extremidades. Essa dependência é uma função monótona: um ponto terá temperatura tanto mais próxima de  $T_+$  ou de  $T_-$ , quanto mais próximo estiver o ponto da extremidade direita ou esquerda da haste.

Em 1811, Jean Joseph Fourier recebeu o prêmio da Academia de Ciências da França pelo seu estudo da propagação de calor nos sólidos. A lei que ele então enunciou diz que "o fluxo de calor entre dois corpos é proporcional ao gradiente de temperatura entre esses dois corpos" ("gradiente de temperatura" significa o quociente entre a diferença de temperaturas e a distância dos dois corpos).

A lei de Fourier é o primeiro passo em direção ao estudo teórico de sistemas termodinâmicos fora do equilíbrio. Trata-se de uma lei fenomenológica, descrevendo dentro de certos limites, situações nas quais determinadas condições externas impostas ao sistema (como, por exemplo, os banhos térmicos nas extremidades da haste) mantem-no num estado estacionário que não é de equilíbrio e no qual, portanto, um fluxo (de calor, de energia ou de partículas, etc) se estabelece.

Não vamos discutir aqui os limites de validade da lei de Fourier. Sublinhemos apenas o fato de que se trata de uma lei fenomenológica, isto é, de um enunciado obtido a partir da observação direta do fenômeno físico, sem demonstração matemática rigorosa.

O objetivo da Mecânica Estatística é demonstrar matematicamente que as leis da Termodinâmica efetivamente descrevem o comportamento de sistemas microscópicos, isto é, de sistemas com um número  $N$  muito grande (fisicamente  $N$  é da ordem de  $10^{23}$ , matematicamente, isso significa fazer  $N \rightarrow +\infty$ ) de componentes (partículas, spins, etc) que interagem entre si e que evoluem ao longo do tempo de maneira determinística, segundo certas equações de movimento. Nos últimos cem anos, de Gibbs [1] a Ruelle [2], esse objetivo foi atingido em grande parte, no que diz respeito à Termodinâmica de sistemas em equilíbrio.

"Para sistemas que não estão em equilíbrio, a situação é atualmente muito menos satisfatória. Nós não temos ainda nenhum modelo (dinâmico) de sistema no qual mesmo as "leis" cinéticas mais simples, por exemplo, a lei de Fourier para a condução de calor, possam ser demonstradas. De fato, os modelos nos quais propriedades de não equilíbrio podem ser calculadas, por exemplo, o gás sem interação e o cristal harmônico perfeito correspondendo a um fluxo ideal ou a um sólido ideal, não obedecem nenhuma lei cinética macroscópica" (estou citando um trecho da introdução de um artigo de

H. Spohn e J.L. Lebowitz (3)). Os modelos aos quais o texto acima citado se refere são essencialmente determinísticos, com evoluções definidas por equações de movimento, aos quais se sobrepõe uma com ponente estocástica apenas para expressar as condições de contorno. Para tais modelos, até agora, a lei de Fourier não pode ser verifi cada, ou porque o modelo não a satisfazia, já que a interação entre os componentes era demasiado fraca [3], ou porque não se conseguiu obter expressões explícitas para o estado de não equilíbrio obtido [4].

Isso sugeriu a C.Kipnis, C.Marchioro, E.Presutti e a mim mesmo a idéia de definir um modelo permanente estocástico, verificando algumas condições fisicamente razoáveis, com a esperança de caracterizar completamente o estado estacionário e verificar que ele satisfaz a lei de Fourier. Essa esperança tendo se concretizado, o que vou expor em seguida tem como base o artigo [5] resultante dessa pesquisa.

#### Um Processo de Exclusão com Condições na Fronteira

Nosso modelo pode ser descrito de maneira bastante simples. Vamos supor que partículas estão dispostas no conjunto  $\{-L, -L+1, \dots, L-1, L\}$ , onde  $L$  é um número inteiro positivo, sendo que cada ponto do conjunto pode estar ocupado por no máximo uma partícula. Essas partículas evoluem no tempo, mudando de posição da seguin

te maneira: a partícula situada no ponto  $x$  espera um certo tempo aleatório antes de decidir-se a saltar sobre a posição  $x-1$  ou  $x+1$ , que ela escolherá com probabilidades  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ . No entanto, o salto só se realizará se a posição escolhida estiver desocupada. Em caso contrário, ela recomeça a sua espera durante um novo tempo aleatório, antes de fazer nova escolha. Isto se  $x \neq L$  e  $x \neq -L$ .

Se a partícula estiver situada num dos extremos,  $L$  ou  $-L$ , ela não tem escolha e só poderá saltar para a posição vizinha dentro do conjunto, isto é,  $L-1$  ou  $-L+1$ . As leis dos tempos aleatórios de espera de cada partícula não têm muita importância. A única coisa que realmente importa é que a probabilidade de duas ou mais mudanças ocorrerem ao mesmo tempo deve ser zero. Para evitar problemas técnicos nós só nos interessaremos pela sequência de configurações aleatórias descritas pelo conjunto das partículas. As partículas representarão quanta de energia, num modelo discretizado da haste metálica. Para representar os banhos térmicos, nós introziremos uma regra suplementar, possibilitando a criação e a destruição de partículas nas extremidades. Isto será feito da seguinte maneira: na extremidade  $L$ , ao cabo de um certo tempo aleatório, é criada uma nova partícula com probabilidade  $p_+$  ou destruída uma partícula já existente com probabilidade  $1-p_+$ . No entanto, a criação só se efetivará se naquele instante, a posição  $L$  já não estiver ocupada por uma partícula. Ao contrário, a destruição só ocorrerá se houver naquele momento uma partícula parada

no ponto  $L$  a ser destruída. Idem em relação à extremidade  $-L$ , mas com probabilidades  $p_-$  e  $1-p_-$ .

Vamos supor que os tempos aleatórios esperados em  $-L$  e em  $L$  tenham a mesma lei e que  $p_+ > p_-$ . Isso significa que há mais criação de partículas à direita do que à esquerda e que, inversamente, há mais destruição à esquerda do que à direita. Isso provoca um fluxo de partículas da direita para a esquerda. É esse fenômeno que nós estudaremos.

Na verdade, o processo que acabamos de descrever informalmente é a tradução em linguagem de sistemas de partículas de um processo cuja descrição certamente seria mais do agrado de um físico-matemático. Essa descrição será dada num apêndice.

### Construção do Processo

A notação  $[-L, L]$ , onde  $L$  é um número inteiro positivo, designará o conjunto  $\{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq L\}$ .

Estamos interessados em configurações de partículas no conjunto  $[-L, L]$ . Supomos que em cada ponto de  $[-L, L]$  possa haver no máximo uma partícula e que estas são indistinguíveis entre si. Nessas condições, uma configuração é representada biunivocamente por uma aplicação  $\eta: [-L, L] \rightarrow \{0, 1\}$  com a convenção que, para todo  $x \in [-L, L]$ ,  $\eta(x) = 1$  se o ponto  $x$  estiver ocupado por uma partícula e

$\eta(x)=0$ , em caso contrário. Chamaremos de  $E_L$  o conjunto de todas as aplicações de  $[-L, L]$  em  $\{0, 1\}$ .

Seja  $\eta$  um elemento qualquer fixado de  $E_L$ . Ao cabo de um certo tempo alguma das modificações descritas na sessão anterior deverá ocorrer: ou uma partícula tentará mudar de posição, ou uma das fronteiras tentará criar ou destruir uma partícula. Cada uma dessas alterações pode ser descrita por uma aplicação de  $E_L$  em  $E_L$ . Vamos defini-las.

Se  $x \in [-L, L-1]$ , seja  $\pi_x: E_L \rightarrow E_L$  a aplicação que a cada configuração faz corresponder uma configuração  $\pi_x \eta$  tal que:

$$\pi_x \eta(y) = \eta(y), \quad \text{se } y \neq x \text{ e } y \neq x+1$$

$$\pi_x \eta(x) = \eta(x+1)$$

$$\pi_x \eta(x+1) = \eta(x).$$

É fácil ver que  $\pi_x(\eta)$  é a configuração que se obtém a partir de  $\eta$ , fazendo-se a partícula em  $x$  saltar para a posição  $x+1$ , se isso for possível (isto é, se  $\eta(x)=1$  e  $\eta(x+1)=0$ ) ou saltar de  $x+1$  para  $x$ , se isso for possível. Se nenhuma dessas alterações for possível (isto é, se  $\eta(x)=\eta(x+1)$ ), então  $\pi_x(\eta)=\eta$ .

As aplicações  $\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \beta_0$  darão conta respectivamente, da criação e da destruição de partículas nas fronteiras  $-L$  e  $L$ , isto é:

$$\alpha_1 \eta(x) = \eta(x), \quad \text{se } x \neq -L,$$

$$\alpha_1 \eta(-L) = x_1, \text{ e}$$

$$\beta_1 \eta(X) = \eta(X), \text{ se } x \neq L$$

$$\beta_1 \eta(L) = i, \text{ onde } i=0,1.$$

Vamos definir um Processo Estocástico assumindo valores em  $E_L$ , descrevendo a sequência de configurações assumidas pelas partículas, supondo que no instante inicial o sistema esteja na configuração  $\eta_0$ . Para isso, seja  $\theta_1, \theta_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias assumindo valores no conjunto das aplicações acima definidas  $\{\pi_x : x \in [-L, L-1] \cup \{0, \beta_1, \beta_0\}\}$ .

Essas variáveis aleatórias estão definidas num espaço de probabilidades  $(\Omega_L, \mathcal{L}, P_L)$  e nós vamos supor que elas são independentes, identicamente distribuídas e que:

$$P_L\{\omega \in \Omega : \theta_n(\omega) = \pi_x\} = \frac{1}{2L+2}, \text{ para todo } x \in [-L, L-1]$$

$$P_L\{\omega \in \Omega : \theta_n(\omega) = \alpha_1\} = \frac{p_-}{2L+2}$$

$$P_L\{\omega \in \Omega : \theta_n(\omega) = \alpha_0\} = \frac{1-p_-}{2L+2}$$

$$P_L\{\omega \in \Omega : \theta_n(\omega) = \beta_1\} = \frac{p_+}{2L+2}$$

$$P_L\{\omega \in \Omega : \theta_n(\omega) = \beta_0\} = \frac{1-p_+}{2L+2}$$



onde  $p_+$  e  $p_-$  são dois números compreendidos entre 0 e 1 e  $p_+ \geq p_-$ .

Os leitores não familiarizados com as bases da Teoria das Probabilidades encontrarão num apêndice a construção da sequência  $\theta_1, \theta_2, \dots$ .

O processo  $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$  será definido sobre o mesmo espaço de probabilidades  $(\Omega_L, \mathcal{L}, P_L)$  da seguinte maneira:

$\eta_0$  é um elemento fixado de  $E_L$

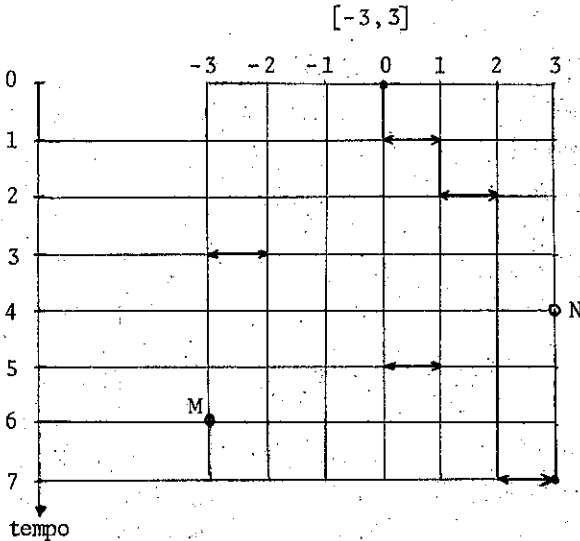
e se  $n > 1$ ,  $\eta_n = \theta_n \dots \theta_1(\eta_0)$ .

Mostrar que essa construção do processo corresponde à descrição intuitiva da evolução dada anteriormente é deixado como exercício ao leitor. O essencial é notar que as aplicações definidas no espaço das configurações correspondem exatamente às possibilidades de mudança antes descritas. Convém notar mais uma vez que a permutação  $\pi_x$  representa a mudança de uma configuração resultante do salto de uma partícula de  $x$  para  $x+1$ , ou de  $x+1$  para  $x$ . A proibição de realizar o salto caso o lugar escolhido já esteja ocupado é garantida automaticamente pelo fato que  $\pi_x(\eta) = \eta$ , para toda configuração  $\eta$  tal que  $\eta(x) = \eta(x+1)$ .

### Representação Gráfica da Construção

A construção do processo pode ser representada graficamen

te no espaço produto  $[-L, L] \times N$ . Para cada  $\omega \in \Omega$  fixado, nós indicaremos o valor de  $\theta_n(\omega)$  através de um segmento unindo os pontos  $(n, x)$  e  $(n, x+1)$  se  $\theta_n(\omega) = \pi_x$ . Se  $\theta_n(\omega) = \alpha_0$  (ou  $\alpha_1$ ), faremos uma marca M ou N, respectivamente, no ponto  $(-L, n)$ . Da mesma maneira a marca M ou N no ponto  $(L, n)$  indicará que  $\theta_n(\omega) = \beta_0$  (ou  $\beta_1$ , respectivamente).



No desenho  $L=3$  e o  $\omega \in \Omega$  escolhido é tal que:

$$\theta_1(\omega) = \pi_0$$

$$\theta_2(\omega) = \pi_1$$

$$\theta_3(\omega) = \pi_{-3}$$

$$\theta_4(\omega) = \pi_1$$

$$\theta_5(\omega) = \pi_0$$

$$\theta_6(\omega) = \pi_0$$

$$\theta_7(\omega) = \pi_2$$

Para este desenho uma partícula que no instante inicial está na origem, no instante 7 estará no ponto 3. Uma partícula que no instante inicial está no ponto 1, no instante seguinte estará no ponto 0, voltando ao ponto 1 no instante 5. Se nós nos interessarmos pela configuração inicial tendo partículas apenas nos pontos 0 e 1, no instante 1 a configuração não se terá modificado: os únicos pontos ocupados continuarão sendo o 0 e o 1.

No instante 4, por causa da marca N, o ponto 3 estará ocupado, seja qual for a configuração inicial. Essa partícula permanecerá ali até o instante 7 pulando em seguida para a posição 2.

No outro extremo -3, a marca M destrói qualquer partícula que ali esteja. Isso faz com que no instante 6 o ponto -3 esteja desocupado, qualquer que seja a configuração inicial.

### CARACTERIZAÇÃO PROBABILÍSTICA DO ESTADO ESTACIONÁRIO

O sistema físico descrito na introdução converge para um estado estacionário que satisfaz a lei de Fourier. Como isso se traduz em nosso modelo? O processo estocástico que acabamos de definir não deixa nenhuma configuração inalterada indefinidamente. Assim sendo, não se pode esperar que a ida do sistema físico para um estado estacionário se traduza pela fixação do processo estocástico em alguma configuração. Há, no entanto, um outro sentido no qual se pode falar de convergência em nosso modelo: a probabilidade de encontrar o processo numa determinada configuração converge para um limite com o decorrer do tempo. Mais precisamente:

Proposição: Qualquer que seja  $\xi \in E_L$ , o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_L(\omega: \eta_n(\omega) = \xi)$  existe e não depende da configuração inicial  $\eta_0$ .

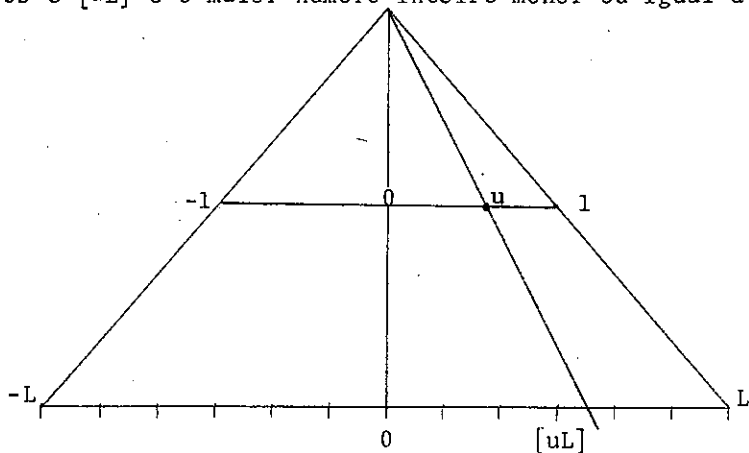
Chamemos de  $\mu_L(\xi)$  esse limite. Observemos que

$0 \leq \mu_L(\xi) \leq 1$  e  $\sum_{\xi \in E_L} \mu_L(\xi) = 1$ , ou seja,  $\mu_L$  define uma medida de probabilidade no espaço (finito)  $E_L$ . O estado estacionário do sistema físico será representado pelo limite de  $\mu_L$ , quando  $L \rightarrow \infty$ .

(Os leitores familiarizados com a teoria básica de Cadeias de Markov já perceberam que o processo que estamos estudando é uma Cadeia de Markov irreduzível, recorrente positiva, não periódica. Isso garante a sua convergência em distribuição para uma medida de probabilidade bem determinada, a saber, a única medida de probabilidade invariante com respeito ao processo. No entanto, os demais leitores não serão prejudicados pela ignorância desses fatos básicos, de vez que os métodos elementares serão de pouca serventia no estudo de  $\mu_L$ , no limite, quando  $L \rightarrow \infty$ . A técnica nova que utilizaremos nesse estudo dará também uma demonstração ad hoc da proposição acima enunciada).

Antes de enunciar nosso teorema, vamos tentar esclarecer o significado da passagem ao limite em  $L$ . Estamos interessados no estudo do fluxo de energia através de uma haste contínua que será representada pelo intervalo  $[-1, 1]$ . Inicialmente consideramos uma aproximação discreta da haste, dividindo-a em  $2L+1$  segmentos iguais e estudando o fluxo de um segmento a outro. É isso que nos leva a considerar o processo em  $E_L$ . Nesta aproximação cada ponto  $u \in [-1, 1]$  é representado pelos subconjuntos finitos de  $[-L, L]$  da forma  $\{x_1 + [uL], \dots, x_n + [uL]\}$  onde  $x_1, \dots, x_n$  são números

inteiros e  $[uL]$  é o maior número inteiro menor ou igual a  $uL$ .



Assim o estado estacionário da haste no ponto  $u$  será obtido considerando-se a medida  $\mu_L$  aplicada ao conjunto  $\{\eta = \eta(x_i + [uL]) = 1, i = 1, \dots, n\}$  e passando-se ao limite em  $L$ .

Nosso objetivo é mostrar que cada ponto  $u$  da haste  $[-1, 1]$  estará numa situação de equilíbrio térmico que dependerá de  $u$ . Por situação de equilíbrio entendemos aqui um estado estacionário homogêneo no espaço. É o que obteríamos, por exemplo, em nosso modelo discreto, se  $p_+ = p_-$ . Neste caso,  $\mu_L$  seria a medida produto de Bernoulli tendo como parâmetro  $p_+ (= p_-)$ . Quando  $p_- \neq p_+$ , a medida  $\mu_L$  não é homogênea no espaço (por exemplo, a probabilidade  $\mu_L\{\eta \in E_L: \eta(x) = 1\}$  será uma função de  $x$  não constante). No entanto, no limite, quando  $L \rightarrow \infty$ , obtém-se uma situação de equilíbrio térmico em torno de cada ponto  $u$  da haste  $[1-, 1]$ . Mais precisamente:

Teorema: Quaisquer que sejam  $u \in [-1, 1]$ ,  $n$  inteiro positivo,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  elementos de  $Z$ , temos que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mu_L \{ \eta \in H_L = \eta(x_i + [uL]) = 1, i=1, \dots, n \} = p(u)^n, \text{ onde}$$

$$p(u) = \left(\frac{1-u}{2}\right) p_- + \left(\frac{1+u}{2}\right) p_+.$$

Observemos, à guisa de corolário, que  $\frac{dp(u)}{du} = \frac{p_+ - p_-}{2}$  o que seria o equivalente da lei de Fourier para o "perfil de energia"  $p(u)$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ . A lei de Fourier para o "perfil de temperatura" é obtida fazendo-se a tradução de nosso modelo em termos do modelo de Ising. Isso será feito num dos apêndices.

### RESUMO DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Indicaremos apenas as etapas centrais da demonstração, deixando de lado os detalhes técnicos que o leitor encontrará esmiuçados nos artigos (5) e (6).

Vamos inicialmente demonstrar a existência de limites do tipo  $\lim_{L \rightarrow \infty} P_L \{ \omega : \eta_n(\omega)(x_i) = 1, i=1, \dots, k \}$ , onde  $x_1, x_2, \dots, x_k$  são elementos quaisquer fixados de  $[-L, L]$ . Para isso, lembremos que a configuração  $\eta_n$  é obtida pela aplicação de  $\theta_n$  à configuração  $\eta_{n-1}$ . Assim sendo o valor de  $\eta_n(x)$ , para cada ponto  $x$  fixado, depende de  $\theta_n$  e de  $\eta_{n-1}$ . Mais precisamente, se  $x \neq L$  e  $x \neq -L$  então  $\eta_n(x) = \eta_{n-1}(x+1)$ , se  $\theta_n = \pi_x$  e  $\eta_n(x) = \eta_{n-1}(x-1)$ , se  $\theta_n = \pi_{x-1}$ . Se  $x=L$  e se  $H_n = \theta_{L-1}$ , então

$\eta_{n-1}(L-1)$ ; já se  $\theta_n = \beta_i$ , então  $\eta_n(L) = i$ , onde  $i = 0, 1$ . Finalmente, se  $x = -L$  e se  $\theta_n = \pi_{-L}$ , então  $\eta_n(-L) = \eta_{n-1}(-L+1)$ ; já se  $\theta_n = \alpha_i$ , então  $\eta_n(-L) = i$ , onde  $i = 0, 1$ . Em todos os demais casos  $\eta_n(x) = \eta_{n-1}(x)$ . Em outras palavras, se  $x \neq L$  e  $x \neq -L$ , para saber o valor de  $\eta_n$  no ponto  $x$  devemos olhar para o valor de  $\eta_{n-1}$  num dos pontos  $x$ ,  $x-1$  ou  $x+1$ , dependendo de quem seja  $\theta_n$ . Por sua vez, a determinação do valor de  $\eta_{n-1}$  no ponto que nos interessar, leva-nos a examinar o valor de  $\eta_{n-2}$  num certo ponto e assim por diante. Este retrocesso pelas configurações seguindo os "ancestrais" do ponto e vai até chegarmos à configuração inicial  $\eta_0$  ou, até chegarmos pela primeira vez numa das extremidades e nela ocorrer uma aplicação criando ou destruindo partículas. A ocorrência de um caso ou outro determinará o valor de  $\eta_n(x)$ . Talvez uma pequena formalização ajude a entender este passeio em marcha a ré.

Para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$  e  $x \in [-L, L]$  definimos o processo estocástico  ${}_n Y_j^x$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  da seguinte maneira:  ${}_n Y_0^x = x$ . Em seguida, se  $1 \leq j < n$ ,  ${}_n Y_{j+1}^x$  é definido a partir de  ${}_n Y_j^x$  da seguinte maneira:

se  ${}_n Y_j^x = y$ , onde  $-L < y < L$ ,

$$\text{então } {}_n Y_{j+1}^x = \begin{cases} y+1, & \text{se } \theta_{n-j} = \pi_y, \\ y-1, & \text{se } \theta_{n-j} = \pi_{y-1}, \\ y, & \text{se em caso contrário;} \end{cases}$$

se  ${}_n Y_j^X = L$ ,

então  ${}_n Y_{j+1}^Y = \begin{cases} L+1, & \text{se } \theta_{n-1} = \beta_i \\ L-1, & \text{se } \theta_{n-j} = \pi_{L-1} \\ L, & \text{em caso contrário;} \end{cases}$

se  ${}_n Y_j^X = -L$

então  ${}_n Y_{j+1}^X = \begin{cases} -L-1, & \text{se } \theta_{n-j} = \alpha_i \\ -L+1, & \text{se } \theta_{n-j} = \pi_{-L} \\ -L, & \text{em caso contrário;} \end{cases}$

se  $|{}_n Y_j^X| = L+1$ , então  ${}_n Y_{j+1}^X = {}_n Y_j^X$ .

O processo que acabamos de definir é um passeio aleatório simples simétrico no conjunto  $[-L-1, L+1]$  com barreiras absorventes nas extremidades  $-L-1$  e  $L+1$ .

É fácil ver que, trajetória por trajetória, valem as igualdades:

$$\eta_n(x) = \eta_0({}_n Y_n^X), \text{ se } |{}_n Y_n^X| \leq L$$

$$\eta_n(x) = I, \text{ se } |{}_n Y_n^X| = L+1,$$

sendo  $I$  definido da seguinte maneira:

$$I = i \text{ (} i=0,1 \text{) se } \theta_{n-k} = \alpha_i \text{ ou } \beta_i \text{ e}$$

$$K+1 = \min\{j=1,2,\dots,n: |{}_n Y_j^X| = L+1\}$$

(em outras palavras,  $I=1$ , se a aplicação que leva o passeio a ser



absorvido pela fronteira, for  $\alpha_1$  ou  $\beta_1$ ;  $I=0$ , em caso contrário)

Portanto

$$\mathbb{P}_L\{\eta_n(x)=1\} = \mathbb{P}_L\{|Y_n^X|=L+1 \text{ e } I=1\} + \mathbb{P}_L\{|Y_n^X|\leq L \text{ e } \eta_0(Y_n^X)=1\}.$$

Ora é fácil ver que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_L\{|Y_n^X|\leq L\} = 0$ .

(de fato, esta é a probabilidade de que um passeio aleatório simétrico simples no intervalo  $[-L-1, L+1]$  não toque nunca nenhum dos extremos).

É também fácil ver que

$$\mathbb{P}_L\{|Y_n^X|=L+1 \text{ e } I=1\} = p_+ \mathbb{P}_L\{|Y_n^X|=L+1\} + p_- \mathbb{P}_L\{|Y_n^X|=L-1\}$$

$$\begin{aligned} \text{Finalmente é um resultado clássico que } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_L\{Y_n^X=L+1\} = \\ = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_L\{Y_n^X=-L-1\} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{L+1}\right) \end{aligned}$$

(este cálculo é feito, por exemplo, na secção XIV.2 do livro do Feller [7]).

Mostramos assim a existência do limite

$$\lim_n \mathbb{P}_L\{\eta_n(x)=1\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L+1}\right) p_- + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{L+1}\right) p_+.$$

Demos um primeiro passo na demonstração da existência da medida  $\mu_L$  anunciada e obtivemos mesmo uma expressão explícita para  $\mu_L(\eta; \eta(x)=1)$ .

Se  $x = [uL] + y$ , então

$$\mu_L \{n \in E_L : \eta([uL] + y) = 1\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{[uL] + y}{L+1}\right) p_- + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{[uL] + y}{L+1}\right) p_+$$

e esta última expressão converge para  $p(u) = \left(\frac{1-u}{2}\right) p_- + \left(\frac{1+u}{2}\right) p_+$ , quando  $L \rightarrow \infty$ .

Para completar a demonstração, teremos que estudar o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_L \{\eta_n(x_\ell) = 1, \ell = 1, \dots, k\}$ . Isso nos leva a considerar a evolução conjunta dos passeios aleatórios  ${}_n Y_j^{x_1}, {}_n Y_j^{x_2}, \dots, {}_n Y_j^{x_k}$ , introduzidos na primeira parte da demonstração e repetindo o que lá foi feito. Fazendo isso, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_L \{\eta_n(x_\ell) = 1, \ell = 1, \dots, k\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_L \{|{}_n Y_n^{x_\ell}| = L+1 \text{ e } I^\ell = 1, \ell = 1, \dots, k\},$$

onde  $I^\ell$  é definido em relação ao passeio  ${}_n Y_j^{x_\ell}$  como foi definido  $I$  com respeito ao passeio  ${}_n Y_j^x$ .

Se os passeios  ${}_n Y_j^{x_1}, \dots, {}_n Y_j^{x_k}$  fossem independentes entre si, a demonstração estaria terminada. Com efeito, neste caso, a probabilidade conjunta aparecendo no lado direito da expressão seria igual a  $\prod_{\ell=1}^k \mathbb{P}_L \{|{}_n Y_n^{x_\ell}| = L+1 \text{ e } I^\ell = 1\}$ . Bastaria então calcular o limite, quando  $n \rightarrow \infty$ , de cada um dos fatores do produto, o que já foi feito na primeira parte da demonstração.

A dificuldade toda está no fato que esses passeios não são independentes entre si. Com efeito, sempre que dois desses passeios ocupam posições vizinhas, existe a possibilidade de ambos

se moverem simultaneamente em direções opostas por efeito de uma mesma permutação. Mais precisamente

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{Y_{j+1}^{x_1}=a, Y_{j+1}^{x_2}=a+1 | Y_j^{x_1}=a+1, Y_j^{x_2}=a\} = \\ & = \mathbb{P}\{O_{n-j}=\pi_a\} = \frac{1}{2L+2} \neq \\ & \neq \mathbb{P}\{Y_{j+1}^{x_1}=a | Y_j^{x_1}=a+1\} \cdot \mathbb{P}\{Y_{j+1}^{x_2}=a+1 | Y_j^{x_2}=a\} = \left(\frac{1}{2L+2}\right)^2. \end{aligned}$$

Esta dependência, no entanto, só se manifesta quando dois dos passeios são vizinhos. Quando estão separados, eles se comportam como passeios independentes. Por outro lado,  $k$  passeios aleatórios independentes entre si, evoluindo em  $Z$ , passam a maior parte do tempo muito longe um dos outros. Dois quaisquer desses passeios sempre voltam a se encontrar, no entanto o tempo médio necessário a cada um desses encontros é infinito (ver, por exemplo, seção XIV. 4 do livro do Feller [7]).

Usando este tipo de idéia é possível mostrar que  $k$  passeios aleatórios em  $Z$  que interagem entre si como acabamos de descrever, têm o mesmo comportamento assintótico que  $k$  passeios independentes. Este fato foi demonstrado pela primeira vez em [8] para um sistema com 2 passeios simples. Em [6] o resultado é generalizado para um número finito qualquer de passeios simples simétrico em  $Z$ . Finalmente em [9] o resultado é generalizado para

passeios aleatórios simétricos com saltos não necessariamente unitários mas com uma certa restrição sobre seus valores médios. Todos esses resultados foram demonstrados em  $Z$ . Por ora, não se sabe demonstrar nenhum desses resultados para passeios em  $Z^2$ . A questão torna-se trivial em dimensão maior ou igual a 3, já que neste caso os passeios acabam por se afastar definitivamente uns dos outros.

Voltemos à nossa demonstração. Restritos a um intervalo  $[-L, L]$  fixado, os passeios interagem fortemente entre si, chocando-se uns com os outros até que cada seja absorvido nas fronteiras. Com isso consegue-se demonstrar a existência de  $\mu_L$  e dar-lhe uma representação explícita (e complicada), levando em conta os diversos casos possíveis de absorção de cada um dos passeios na fronteira  $-L-1$  ou  $L+1$ . Note que isso significa, em particular, que  $\mu_L$  não é uma medida produto. No entanto, quando fazemos o limite para  $L \rightarrow \infty$ , nós abrimos o espaço para os passeios se afastarem uns dos outros e se comportarem assintoticamente como passeios independentes. O leitor interessado encontrará demonstrações cabais deste fato nos artigos [5] e [6].

### OUTROS MODELOS ESTOCÁSTICOS

A partir do modelo que acabamos de descrever, outros foram estudados. Vamos descrevê-los sumariamente.

Na segunda parte do artigo [5] consideramos um sistema com uma infinidade de partículas evoluindo em  $Z$ . Nele cada partícula espera um tempo aleatório, antes de decidir saltar para uma posição vizinha à sua, escolhida ao acaso com probabilidades  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ . No entanto, o salto só se realizará efetivamente se a posição escolhida estiver vazia. Em caso contrário, a partícula recomeça a sua espera por um novo tempo aleatório. Este é um caso particular do chamado Processo de Exclusão Simples Simétrico introduzido por Spitzer [10] e estudado exaustivamente por ele e por Liggett [11]. Eles demonstraram, em particular, o seguinte resultado de convergência em lei do processo: se inicialmente todos os pontos de  $Z$  à direita do 0 estiverem ocupados por partículas e todos os demais pontos estiverem vazios, então a evolução do sistema faz com que no limite cada ponto de  $Z$  esteja ocupado com probabilidade  $\frac{1}{2}$  e isso independentemente da ocupação ou não dos pontos à sua volta. Formalmente isso se escreve da seguinte maneira: seja  $\eta_t(x)$  uma variável aleatória que vale 1, se no instante  $t$  a posição  $x$  estiver ocupada por uma partícula, e vale 0 em caso contrário. Então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\eta_t(x_\ell) = 1, \ell = 1, \dots, k\} = \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

quaisquer que sejam os pontos

$x_1, \dots, x_k$  considerados e qualquer que seja o número  $k$  de pontos.

Este resultado descreve o comportamento assintótico local do sistema. Em outras palavras, ele mostra o que acontece assintoticamente com a ocupação de um conjunto finito de pontos fixado. Se quisermos descrever o fluxo de partículas da direita para a esquerda no decorrer do tempo, precisaremos descrever globalmente o sistema. É o que fazemos na segunda parte do artigo [5], demonstrando que para todo  $u \in [-1, 1]$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\eta_t(\lfloor u\sqrt{t} \rfloor + y_\ell) = 1, \ell = 1, 2, \dots, k\} = \left(\frac{1+u}{2}\right)^k.$$

Isso mostra que, visto globalmente, o sistema converge para um estado formado por um contínuo de subsistemas em estados de equilíbrio entre si.

Um resultado análogo foi obtido por Rost [10], no caso em que as partículas apenas se deslocam para a esquerda. Note-se que este caso exige uma técnica totalmente diferente da utilizada no artigo [5]. Com efeito, a demonstração que fizemos baseia-se essencialmente em igualdades do tipo  $\eta_n(x) = \eta_0(\mathbb{Y}_n^x)$  (estamos usando a mesma notação que no resumo de demonstração falta na seção anterior). Ora, este tipo de relação de dualidade não ocorre se o passeio das partículas não for simétrico. Isso obriga Rost a utilizar um caminho extremamente tortuoso.

Outros modelos foram criados em seguida, com a seguinte

receita: são sistemas formados por componentes determinísticas que interagem entre si de maneira estocástica e com condições estocásticas na fronteira representando os banhos térmicos que mantêm o sistema num estado de não equilíbrio.

No artigo [11] considera-se que em cada ponto do conjunto de números inteiros  $[-L, L]$  há um oscilador harmônico. Sucessivamente vai-se escolhendo ao acaso um desses osciladores, com probabilidade  $\frac{1}{2L+1}$ . O oscilador escolhido troca energia com seu vizinho da direita, de tal maneira que a soma da sua energia e da energia do seu vizinho permaneça constante. Os osciladores situados nas extremidades têm energia distribuídas segundo medidas de gibbs a temperaturas diferentes. Por um caminho análogo ao que descrevemos na seção anterior estuda-se o fluxo de energia no sistema.

Finalmente, em [12] considera-se um sistema enumerável de bolas situadas sobre a reta real (o raio de cada bola é desprezível). Cada bola pode ser branca ou preta. Cada bola tem velocidade inicial igual a +1 ou a -1 com probabilidades  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ . Quando duas bolas se encontram, elas se cruzam com probabilidade  $q$ , ou elas se refletem com probabilidade  $1-q$ . Vamos supor que inicialmente as bolas estejam distribuídas de maneira homogênea na reta real (mais precisamente distribuídas segundo um Processo Pontual de Poisson homogêneo). Suponhamos também que todas as bolas situadas à

direita da origem sejam pretas e todas as demais sejam brancas. Trata-se aqui de descrever globalmente como este sistema converge, do ponto de vista das cores, para um estado estacionário. Uma de suas características é a correlação entre as cores de duas bolas vizinhas, mesmo quando o sistema já está em equilíbrio local. Isso destoa, do que acontecia nos demais exemplos mencionados nos quais duas componentes vizinhas eram sempre assintoticamente independentes.



## APÊNDICES

### I - ESTADOS ESTACIONÁRIOS PARA SISTEMAS QUE NÃO ESTÃO EM EQUILÍBRIO TÉRMICO

Habitualmente, em Mecânica Estatística, estados de equilíbrio à temperatura  $T$  são caracterizados pela condição que cada subsistema finito está em equilíbrio local definido pela medida de Gibbs à temperatura  $T$ . As medidas de probabilidade assim obtidas são as chamadas Medidas de Dobrushin, Lanford e Ruelle. Assim, se quisermos descrever sistemas em contacto térmico com reservatórios a temperaturas diferentes, nós devemos supor que o equilíbrio nas fronteiras é descrito por distribuições de Gibbs parametrizadas pelas temperaturas dos reservatórios. O problema que se coloca aqui é o da definição do equilíbrio local dos subsistemas internos. A presença dos reservatórios faz com que cada um desses subsistemas tenha uma temperatura diferente, e o objetivo do estudo é exatamente, calcular essas temperaturas. Assim sendo nós não podemos simplesmente dizer que o equilíbrio local de cada subsistema é dado por um estado de Gibbs a uma certa temperatura, coerente com um "perfil de temperatura" dada a priori, de vez que nosso objetivo é exatamente calcular este "perfil de temperatura". A questão é como definir o equilíbrio local de um sistema que não está em equilíbrio térmico.

Tentemos usar a seguinte definição: diremos que um sub sistema, partindo de uma configuração inicial dada, atingiu o equilíbrio local quando todas as configurações tendo a mesma energia forem equiprováveis. O inconveniente desta definição é que uma medida de probabilidades não pode manter simultaneamente todos os subsistemas finitos em equilíbrio local, se as temperaturas nas fron teiras não forem todos iguais entre si. Somos então levados a enfraquecer nossas exigências, pedindo apenas que cada subsistema tente ao longo do tempo alcançar a situação de equilíbrio descrita na definição inicial. Isso é feito pela introdução de um Processo de Markov da seguinte maneira: em cada instante, um subsistema (com um tamanho fixado) é escolhido aleatoriamente e posto na situação de equilíbrio local definida anteriormente. Isto significa que nós lhe damos uma configuração escolhida ao acaso, uniformemente, no conjunto de todas as configuração tendo a mesma energia que sua configuração inicial. Se o subsistema escolhido estiver na fronteira, a sua nova configuração será escolhida segundo uma distribuição de Gibbs à temperatura da fronteira. Uma medida de probabilidade invariante com respeito a este processo de Markov será dita um estado estacionário do sistema.

No artigo [5] estudamos as consequências desta definição no Modelo de Ising unidimensional com interação com os vizinhos mais próximos. Vamos agora definir a cadeia de Markov lá

considerada.

Sejam  $[-L, L+1] = \{z \in \mathbb{Z} : -L \leq z \leq L+1\}$

e  $C_L = \{-1, 1\}^{\{-L, L+1\}}$

Dados  $S \in C_L$  e  $x \in [-L, L+1]$  definimos uma nova configuração  $S_x \in C_L$  da seguinte maneira:

$$S_x(y) = S(y), \text{ se } y \neq x, y \in [-L, L+1]$$

$$S_x(x) = -S(x).$$

Para cada  $x \in [-L+1, L]$  definimos uma aplicação  $U_x : C_L \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte maneira:

$$U_x(S) = S(x)S(x-1) + S(x)S(x+1).$$

Podemos agora definir uma probabilidade de transição  $Q$  em  $C_L$  da seguinte maneira:

0, se  $S' \neq S$  e  $S' \neq S_x$ , qualquer que seja  $x \in [-L, L+1]$ ,

$$Q(S, S') = \begin{cases} \frac{1}{2L+2} \cdot \frac{e^{\beta_+ S(L)S(L-1)}}{e^{\beta_+} + e^{-\beta_+}} & , \text{ se } S' = S_{L+1} \\ \frac{1}{2L+2} \cdot \frac{e^{\beta_- S(-L)S(-L+1)}}{e^{\beta_-} + e^{-\beta_-}} & , \text{ se } S' = S_{-L} \\ \frac{1}{2L+2} \cdot \frac{1}{2}, \text{ se } S' = S_x \text{ e } U_x(S) = U_x(S'), \text{ onde } -L+1 \leq x \leq L, \end{cases}$$

$$Q(S, S') = \begin{cases} 0, & \text{se } S' = S_x \text{ e } U_x(S) \neq U_x(S'), \text{ onde } -L+1 \leq x \leq L, \\ 1 - \sum_{-L \leq x \leq L+1} Q(S, S'_x), & \text{se } S' = S. \end{cases}$$

Notemos que as fórmulas aparecendo na segunda e terceira linhas da definição de  $Q$  correspondem às probabilidades de mudança de spin dadas pelas distribuições de Gibbs com parâmetros  $\beta_+$  e  $\beta_-$  respectivamente.

Vamos chamar de  $X_n$ ,  $n=0,1,2,\dots$  uma cadeia de Markov cuja probabilidade de transição é  $Q$ . Terminaremos este apêndice, relacionando  $(X_n: n=0,1,2,\dots)$  com o sistema de partículas  $(\eta_n: n=0,1,2,\dots)$ .

Seja  $h: C_L \rightarrow E_L$  a aplicação que a cada configuração de spins  $S$  faz corresponder uma configuração de partículas  $h(S)$  definida da seguinte maneira:

$$h(S)(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } S(x) \neq S(x+1) \\ 0, & \text{em caso contrario,} \end{cases}$$

onde  $x \in [-L, L]$ .

Deixamos a cargo do leitor a verificação de que  $(h(x_n), n=0,1,2,\dots)$  é uma cadeia de Markov em  $E_L$  tendo a mesma lei  $(\eta_n: n=0,1,2,\dots)$ , desde que

$$p_+ = \frac{e^{-\beta_+}}{e^{\beta_+} + e^{-\beta_+}} \text{ e } p_- = \frac{e^{-\beta_-}}{e^{\beta_-} + e^{-\beta_-}}$$

II - CONSTRUÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES CUJAS LEIS SÃO DADAS.

Vamos supor que  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  seja um espaço de probabilidades e  $(E, \mathcal{E})$  um espaço mensurável.

Definições:

1) Chamaremos de variável aleatória definida em  $\Omega$  assumindo valores em  $E$ , qualquer aplicação mensurável de  $\Omega$  em  $E$ .

2) Seja  $X$  uma variável aleatória de  $\Omega$  em  $E$ . Chamaremos de lei de  $X$  a imagem de  $\mathbb{P}$  por  $X$ . Em outras palavras, trata-se de uma medida de probabilidade  $\mu$  definida em  $(E, \mathcal{E})$  tal que  $\mu(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$  qualquer que seja  $B \in \mathcal{E}$ .

3) As variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de  $\Omega$  em  $E$  são ditas independentes se a lei da  $n$ -upla  $(X_1, \dots, X_n)$  definida no espaço produto  $E^n$  for o produto das leis de  $X_1, \dots, X_n$ .

4) Uma sequência de variáveis aleatórias  $X_0, X_1, X_2, \dots$  de  $E$  é dita independente se para qualquer subconjunto finito de índices  $i_1, \dots, i_n$  as variáveis aleatórias  $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$  forem independentes.

Problema: Dada uma sequência de medidas de probabilidade  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$  definidas no espaço mensurável  $(E, \mathcal{E})$  é possível construir

um espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  e nele definir uma sequência de variáveis aleatórias  $X_0, X_1, X_2, \dots$  independentes e tendo como leis respectivamente  $\mu_1, \mu_2, \dots$ ?

A resposta é quase imediata a partir da própria definição de independência. Basta tomarmos:  $\Omega = E^{\mathbb{N}}$

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$$

$\mathbb{P} = \mathbb{P}$  é a medida produto  $\mu_1 \times \mu_2 \dots$

$X_n$  = n-ésima projeção de  $\Omega$  em  $E$ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] - J.W.Gibbs: Elementary principles in Statistical Mechanics developed with especial reference to the rational foundation of Thermodynamics, Yale University Press, 1902.
- [2] - D.Ruelle: Statistical Mechanics. Rigorous results W.A. Benjamin, New York, 1969.
- [3] - H.Spohn, J.L.Lebowitz: Stationary non-equilibrium states of infinite harmonic systems, Commun. Math.Phys. 54, 97-120, 1977.
- [4] - S.Goldstein, J.L.Lebowitz, E.Presutti: Ergodic properties of dynamical systems coupled to thermal reservoirs, Fifth International Conference and Symposium on Information Theory, 1979.
- [5] - A.Galves, C.Kipnis, C.Marchioro, E.Presutti: Non-equilibrium measures which exhibit a temperature gradient: Study of a model, Comm.Math.Physics, em fase de publicação, 1981.
- [6] - P.Ferrari, A.Galves, E.Presutti: Closeness between a simple independent random walks. Applications Università dell' Aquila preprint, 1981.
- [7] - W.Feller: An introduction to Probability Theory and its applications, 3ª edição, Wiley, 1968.

- [8] - F.Bertein,A.Galves: Comportement asymptotique de deux promenades aléatoires simples sur  $Z$  qui interagissent par exclusion, CRAS, tome 285, n°10, 1977.
- [9] - A.De Masi,E.Presutti: Probability estimates for symmetric simple exclusion random walks, Università dell'Aquila preprint, 1981.
- [10] - H.Rost: Non-equilibrium behaviour of a many particle process: density profile and local equilibria. Universität Heidelberg preprint 1980.
- [11] - C.Kipnis,C.Marchioro,E.Presutti: Heat flow in an exactly solvable model, IHES. preprint, 1981.
- [12] - C.Kipnis,E.Presutti,H.Spohn, em fase de redação 1981.



"ANÁLISE ASSINTÓTICA DE EVOLUÇÕES ALEATÓRIAS COM  
UMA APLICAÇÃO À MECÂNICA QUÂNTICA"

Por

Arnaldo C. R. Nogueira

Universidade Federal do Rio de Janeiro

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

PHYSICS 435

LECTURE 10

## §1. Introdução

Existe atualmente um grande interesse em conhecer o comportamento a longo prazo de certos sistemas com estrutura aleatória. Por isto vem sendo desenvolvida uma teoria matemática para analisar o comportamento assintótico de evoluções aleatórias. Chamamos de evolução aleatória um operador  $M(t,s)$ ,  $s \leq t$ , que satisfaz uma equação diferencial aleatória.

É nossa intenção neste artigo estabelecer o teorema central do limite para certas evoluções aleatórias que satisfazem equações da forma

$$\frac{dM^{(\lambda)}(t,s)}{dt} = \lambda V(t) M^{(\lambda)}(t,s) .$$

O operador  $V(t)$  é uma abreviação para  $V(t,\omega)$ , onde  $\omega$  é um ponto no espaço amostral  $\Omega$ .  $\lambda$  é um parâmetro que toma valores reais e através do qual condicionamos a variação (ou distúrbio) aleatória a ser pequena.

Estamos interessados no limite do valor médio da evolução aleatória dada pela equação (1.1), precisamente queremos avaliar o seguinte limite para  $\tau \geq 0$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle M^{(\lambda)}(\tau/\lambda^2, 0) \rangle \quad (1.2)$$

( $\langle \cdot \rangle$  representa a esperança com respeito à probabilidade em questão). Resultados sobre este tipo de limite podem ser encontrados nos seguintes artigos: Cogburn e Hersh 1973, Papanicolaou e

Varadhan 1973, Hersh 1974, Spohn 1980, Davies 1974 e Kurtz 1972 e 1973. Para garantir a existência do limite (1.2) impõem-se certas restrições à estrutura aleatória do problema. Uma delas é que num futuro remoto os valores de  $V$  sejam quase independentes de seus valores no passado. Tal condição é chamada "condição de mistura" e é uma imposição natural para a obtenção do limite.

Para se ter uma idéia das dificuldades envolvendo o problema proposto em (1.2) apresentaremos heurísticamente certos estágios de sua solução.

Suponhamos que certa equação da forma (1.1) tenha solução, que por sua vez seria dada por

$$M^{(\lambda)}(t,s) = e^{-\lambda \int_s^t V(r) dr} \quad (1.3)$$

(isto em geral é falso). Além disso, digamos que os operadores  $V(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , formem uma família Gaussiana e satisfaçam as seguintes condições para  $s, t \in \mathbb{R}$ :

$$\langle V(t) \rangle = 0 \quad (1.4)$$

$$\langle V(t) V(s) \rangle = U(|t-s|) .$$

Pelo que mencionamos sobre a tal "condição de mistura",  $U(t)$  é praticamente nulo para  $t$  suficientemente grande.

Expandimos heurísticamente a exponencial dada em (1.3)

$$M^{(\lambda)}(t,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\lambda \int_s^t V(r) dr)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_s^t dr_1 \dots \int_s^t dr_k V(r_1) \dots V(r_k) \quad (1.5)$$

Tomando o valor médio de ambos os lados de (1.5) e omitindo as considerações usuais de uma situação como esta, obtemos que

$$\langle M^{(\lambda)}(t,s) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_s^t dr_1 \dots \int_s^t dr_k \langle V(r_1) \dots V(r_k) \rangle \quad (1.6)$$

De (1.4) conclui-se que

$$\langle V(r_1) \dots V(r_k) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ \Sigma \pi U(|r_i - r_j|), & \text{se } k \text{ é par,} \end{cases} \quad (1.7)$$

onde omitimos como variam os índices  $i$  e  $j$ . Usando (1.7) em (1.6)

$$\langle M^{(\lambda)}(t,s) \rangle = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2\ell}}{(2\ell)!} \int_s^t dr_1 \dots \int_s^t dr_{2\ell} \Sigma \pi U(|r_i - r_j|) \quad (1.8)$$

Logo para resolvermos o problema proposto em (1.2), impomos condições aos operadores  $U(t)$ ,  $t \geq 0$ , não só para a série (1.8) convergir, como também para o limite existir.

A nossa motivação para estabelecer um teorema abstrato tratando do problema esboçado em (1.2) pode ser descrita sucintamente da seguinte maneira: o potencial de interação é definido

por operadores agindo num certo espaço de Hilbert

$$V(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} v_n(t) P_n,$$

onde os  $P_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^3$ , formam uma família de projeções ortogonais e  $\{v_n(t) : n \in \mathbb{Z}^3, t \in \mathbb{R}\}$  é um processo estocástico Gaussiano da do pela sua variância

$$\begin{aligned} \langle v_n(t) \rangle &= 0 \\ \langle v_n(t) v_m(s) \rangle &= \rho(|t-s|) g_{n-m} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Neste caso  $\rho(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Esta estrutura matemática re apresenta um modelo em mecânica quântica inspirado num trabalho de Martin e Emch 1975. O chamado modelo de Martin e Emch consiste de um elétron movendo-se num cristal onde impurezas estão espalha das de um tal maneira que o efeito da interação elétron-impureza corresponde ao processo estocástico dado por (1.9). O valor  $v_n(t)$  para um certo ponto no espaço amostral pode ser relacionado com o impulso dado ao elétron no instante  $t$  após se chocar com a impu reza situada no ponto  $n$ . A projeção  $P_n$  é o operador que repre senta o ponto  $n$  do cristal representado por  $\mathbb{Z}^3$ . Na presente si tuação podemos dizer por alto que o limite (1.2) prevê o que acon tecerá a longo prazo ao sistema quando as interações entre elétron e impurezas são enfraquecidas com o decorrer do tempo.

## §2. A Condição de Mistura

Definimos aqui a condição de mistura que usaremos no teorema enunciado na Seção 3. Além disto a relaciona-

remos com a condição imposta por Cogburn e Hearsh 1973, Papanicolaou e Varadhan 1973 e Papanicolaou e Kohler 1974. Nosso primeiro passo é obter uma desigualdade válida para variáveis aleatórias com valores num espaço de Hilbert através do uso de um coeficiente de mistura.

Seja  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  um espaço de probabilidade. Denotamos por  $E\{\cdot\}$ , ou somente  $E$ , a esperança correspondente a  $P$  e

$$L^2(\Omega, \mathcal{G}, P) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é } \mathcal{G}\text{-mensurável} \right. \\ \left. E\{|f|^2\} < \infty \right\}$$

Definição 2.1: Uma medida da mistura de duas sub- $\sigma$ -álgebras,  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ , de  $\mathcal{G}$  é dada pelo chamado coeficiente de correlação maximal

$$\text{Sup} \left\{ \frac{|E\{(f_1 - Ef_1)(\overline{f_2 - Ef_2})\}|}{E^{1/2}|f_1 - Ef_1|^2 E^{1/2}|f_2 - Ef_2|^2} : f_j \in L^2(\Omega, \mathcal{G}_j, P) \right\}$$

denotado por  $\alpha(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ .

Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert separável e  $\{e_k: k \in \mathbb{Z}_+\}$  uma base ortonormal de  $\mathcal{H}$ . Sejam  $\xi$  e  $\eta$  duas variáveis aleatórias com valores em  $\mathcal{H}$ , respectivamente,  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  mensuráveis fracamente. As noções de mensurabilidades fraca e forte que empregamos neste artigo são definidas por Hille e Phillips 1957. Além disso supomos que  $\xi, \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P; \mathcal{H})$ , i.e.

$$\left\{ f: \Omega \rightarrow \mathcal{H} \mid f \text{ é fortemente } \mathcal{G}\text{-mensurável} \right. \\ \left. E\{\|f\|^2\} < \infty \right\},$$

onde  $\|\cdot\|$  representa a norma em  $\mathcal{H}$ . As noções de mensurabilidade

des fraca e forte são equivalentes num espaço separável (ver Hille e Phillips 1957). Escrevemos então que

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \quad \text{e} \quad \eta = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k, \quad (2.2)$$

onde  $a_k = (\xi, e_k)$  e  $b_k = (\eta, e_k)$  são variáveis aleatórias com valores complexos, respectivamente,  $G_1$  e  $G_2$  mensuráveis para todo  $k \in \mathbb{Z}_+$  e  $(\cdot, \cdot)$  denota o produto interno em  $\mathcal{H}$ . Consequentemente  $E|a_k|^2$  e  $E|b_k|^2$  são finitas para todo  $k \in \mathbb{Z}_+$ .

Chamaremos abreviadamente de  $\alpha$  o coeficiente de correlação maximal  $\alpha(G_1, G_2)$ . Então segue-se que para cada  $k \in \mathbb{Z}_+$

$$|E\{(a_k - Ea_k)(\overline{b_k - Eb_k})\}| \leq \alpha E^{1/2}|a_k - Ea_k|^2 E^{1/2}|b_k - Eb_k|^2. \quad (2.3)$$

Esta desigualdade nos permite provar o seguinte resultado.

Lema 2.1: Para  $\xi$  e  $\eta$  definidos acima, a seguinte desigualdade vale:

$$|E(\xi - E\xi, \eta)| \leq \alpha E^{1/2}\|\xi\|^2 E^{1/2}\|\eta\|^2.$$

Demonstração:

Observamos que

$$E(\xi - E\xi, \eta - E\eta) = E(\xi - E\xi, \eta).$$

Então, usando (2.2), obtemos que

$$\begin{aligned} |E(\xi - E\xi, \eta)| &= \left| E\left( \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - Ea_k) e_k, \sum_{\ell=1}^{\infty} (b_{\ell} - Eb_{\ell}) e_{\ell} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} E\{(a_n - Ea_n)(\overline{b_n - Eb_n})\} \right| \end{aligned}$$



$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |E\{(a_k - Ea_k)(\bar{b}_k - \overline{Eb}_k)\}| .$$

Por (2.3) segue-se que

$$\begin{aligned} |E(\xi - E\xi, \eta)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha E^{1/2} |a_k - Ea_k|^2 E^{1/2} |b_k - Eb_k|^2 \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (E|a_k - Ea_k|^2)^{1/2} (E|b_k - Eb_k|^2)^{1/2} \\ &\leq \alpha \left( \sum_{k=1}^{\infty} E|a_k - Ea_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{\ell=1}^{\infty} E|b_{\ell} - Eb_{\ell}|^2 \right)^{1/2} \\ &= \alpha E^{1/2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - Ea_k|^2 \right\} E^{1/2} \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} |b_{\ell} - Eb_{\ell}|^2 \right\} \\ &= \alpha E^{1/2} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - Ea_k) e_k \right\|^2 E^{1/2} \left\| \sum_{\ell=1}^{\infty} (b_{\ell} - Eb_{\ell}) e_{\ell} \right\|^2 \\ &= \alpha E^{1/2} \|\xi - E\xi\|^2 E^{1/2} \|\eta - E\eta\|^2 . \end{aligned}$$

Notamos que

$$\begin{aligned} E\|\xi - E\xi\|^2 &= E(\xi - E\xi, \xi - E\xi) \\ &= E(\xi - E\xi, \xi) \\ &= E\|\xi\|^2 - \|E\xi\|^2 \\ &\leq E\|\xi\|^2 . \end{aligned}$$

Concluimos que

$$|E(\xi - E\xi, \eta)| \leq E^{1/2} \|\xi\|^2 E^{1/2} \|\eta\|^2 . \quad \square$$

A próxima definição envolve o espaço de probabilidade

$(\Omega, \mathcal{G}, P)$ . Introduziremos uma condição de mistura forte para famílias de  $\sigma$ -álgebras. Definiremos [ver (2.4)] o nosso coeficiente forte de mistura através do chamado coeficiente de correlação maximal dado pela Definição 2.1.

Seja  $\{\mathcal{G}_s^t : 0 \leq s \leq t \leq \infty\}$  uma família de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{G}$  que satisfaz as seguintes condições:

(1a)  $\mathcal{G}_{s_1}^{t_1} \subset \mathcal{G}_s^t$ , para todo  $0 \leq s \leq s_1 \leq t_1 \leq t \leq \infty$ ,

(1b) o coeficiente definido para todo  $\tau \geq 0$  por

$$\alpha(\tau) = \sup_{r \geq 0} \alpha(\mathcal{G}_0^r, \mathcal{G}_{r+\tau}^\infty) \quad (2.4)$$

é uma medida da mistura entre as  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{G}_s^t$ , e

$$\int_0^\infty \alpha(\tau) d\tau < \infty. \quad (2.5)$$

Veremos logo adiante que, em geral, para as  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{G}_s^t$  satisfazerem a condição forte de mistura, é suficiente que  $\alpha(\tau) \rightarrow 0$ , quando  $\tau \rightarrow \infty$ . Escrevemos a condição (2.5) por ela ser uma hipótese necessária do nosso resultado sobre limite assintótico.

Sejam  $\xi$  e  $\eta$  variáveis aleatórias, respectivamente,  $\mathcal{G}_0^t$  e  $\mathcal{G}_{t+\tau}^\infty$  mensuráveis fracamente, onde  $t \geq 0$  e  $\tau \geq 0$ . Do Lema 2.1 e da definição do coeficiente  $\alpha$  (2.1) segue-se que

$$|E(\xi - E\xi, \eta)| \leq \alpha(\tau) E^{1/2} \|\xi\|^2 E^{1/2} \|\eta\|^2.$$

Por Ibragimov e Linnik 1971, as  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{G}_s^t$  definidas acima satisfazem a condição forte de mistura se, para  $\tau \geq 0$ ,

$$\beta(\tau) = \sup_{t \geq 0} \sup_{\substack{A \in G_0^t \\ B \in G_{t+\tau}^\infty}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \rightarrow 0, \quad (2.6)$$

quando  $\tau \rightarrow \infty$ . Este coeficiente foi introduzido por Rosenblatt 1956.

A condição imposta por Cogburn e Hersh 1973, Papanicolaou e Varadhan 1973 e Papanicolaou e Kohler 1974, para garantir a existência do limite é chamada por Ibragimov e Linnik 1971, condição uniforme de mistura. As  $\sigma$ -álgebras  $G_s^t$  satisfazem tal condição se para  $\tau \geq 0$

$$\rho(\tau) = \sup_{t \geq 0} \sup_{\substack{A \in G_0^t \\ B \in G_{t+\tau}^\infty}} |P(B|A) - P(B)| \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

quando  $\tau \rightarrow \infty$ . Esta condição é mais restrita que a chamada condição forte de mistura (2.6).

Ibragimov e Linnik 1971, provaram que um sistema Gaussiano não satisfaz a condição uniforme de mistura se, e somente se as  $\sigma$ -álgebras  $G_0^t$ ,  $G_{t+n}^\infty$  são independentes para todos os  $n$ 's suficientemente grandes. Logo um resultado que exija a condição forte de mistura (2.6) em vez da condição uniforme de mistura (2.7) tem aplicação a uma classe maior de sistemas aleatórios. O exemplo que construímos na Seção 4 tem uma estrutura aleatória que não satisfaz a condição uniforme de mistura (2.7) mas satisfaz a condição forte de mistura. Na Seção 5 damos um resultado que relaciona os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  definidos por (2.4) e (2.6), respectivamente, para certos sistemas Gaussianos.

### §3. Teorema Principal

Apresentamos agora um teorema abstrato que estuda o comportamento assintótico de evoluções aleatórias. A sua demonstração será, entretanto, omitida. Para permitir uma leitura mais amena de seu enunciado, optamos por uma versão do resultado com hipóteses mais fortes que as necessárias. Isto, contudo, sem descaracterizar o seu conteúdo, tendo em vista a sua aplicação ao exemplo apresentado na Seção 4. Nos resultados provados por Cogburn e Hersh 1973 e Papanicolaou e Varadhan 1973, o leitor encontra hipóteses mais completas para um resultado como o nosso. Esta seção está organizada da seguinte maneira: primeiro, simultaneamente, definimos todos os termos usados no teorema, apresentamos todas as suas hipóteses e estabelecemos o problema em que estamos interessados.

Sejam  $V(t)$ ,  $t \geq 0$ , operadores aleatórios definidos no espaço de Hilbert separável  $\mathfrak{H}$ . O nosso problema consiste em estudar o comportamento assintótico da esperança da solução do problema de valor-inicial

$$\frac{dy_\lambda(t)}{dt} = \lambda V(t) y_\lambda(t), \quad y_\lambda(0) = \phi, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

onde  $\phi \in \mathfrak{H}$  e  $\lambda$  é um parâmetro que toma valores reais positivos.

Usamos aqui o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  e supomos que as condições (1a) e (1b) estabelecidas na seção anterior são válidas.

Impomos aos operadores  $V(t)$  as seguintes condições:

- (2a) Existe  $\Omega_0 \in G$ , com  $P(\Omega_0) = 1$ , tal que  $V(t_1, \omega)\phi$ ,  $V(t_2, \omega)V(t_1, \omega)\phi$  e  $V(t_3, \omega)V(t_2, \omega)V(t_1, \omega)\phi$  pertencem a  $\mathcal{H}$ , para todo  $\phi \in \mathcal{H}$ ,  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$  e  $\omega \in \Omega_0$ .
- (2b) Os operadores  $V(t_1, \cdot)$  são mensuráveis fracamente com respeito à  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{B} \times G$ , onde  $\mathcal{B}$  representa a álgebra dos conjuntos de Borel em  $[0, \infty)$ .
- (2c) Para todo  $\phi \in \mathcal{H}$  e  $0 \leq t < \infty$   $V(t)\phi$  é  $G_t^t$ -mensurável fracamente.
- (2d) Existe uma constante  $c > 0$  tal que para todo  $\phi \in \mathcal{H}$  e  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$ ,

$$(i) E^{1/2} \|V(t_1)\phi\|^2 \leq c \|\phi\|^2$$

$$(ii) E^{1/2} \|V(t_2)V(t_1)\phi\|^2 \leq c \|\phi\|^2$$

$$(iii) E^{1/2} \|V(t_3)V(t_2)V(t_1)\phi\|^2 \leq c \|\phi\|^2$$

$$(iv) E^{1/2} \left\| \int_{t_1}^{t_2} ds V(s)\phi \right\|^2 \leq c^2 (t_2 - t_1) \|\phi\|^2$$

- (2e) Para todo  $\phi \in \mathcal{H}$  e  $t \geq 0$

$$E\{V(t)\phi\} = 0.$$

Todas as integrais de funções com valores em  $\mathcal{H}$  que aparecem nesta seção, são no sentido de Bochner (ver Hille e Phillips 1957).

Com respeito à solução do problema de valor-inicial

- (3.1) supomos o seguinte para todo  $\phi \in \mathcal{H}$  e  $0 \leq r \leq s \leq t$ :

(3a) O problema tem uma única solução e existem operadores propagadores  $M^{(\lambda)}(t,s)$  tais que

$$y_\lambda(t) = M^{(\lambda)}(t,s) y_\lambda(s) .$$

Além disso, os operadores  $M^{(\lambda)}(t,s)$  satisfazem as seguintes condições:

(3b)  $M^{(\lambda)}(t,s) \phi$  é  $G_S^t$ -mensurável fracamente.

(3c) Existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$(i) \quad \|M^{(\lambda)}(t,s)\phi\| \leq C \|\phi\|$$

$$(ii) \quad E^{1/2} \|(M^{(\lambda)}(t,s) - I)^* \phi\|^2 \leq C E^{1/2} \|(M^{(\lambda)}(t,s) - I)\phi\|^2$$

(3d) A propriedade finita do propagador

$$M^{(\lambda)}(t,t) = I$$

$$M^{(\lambda)}(t,s) M^{(\lambda)}(s,r) = M^{(\lambda)}(t,r) .$$

(3e) A propriedade regressiva do propagador

$$M^{(\lambda)}(t,s) \phi = \phi + \lambda \int_s^t du M^{(\lambda)}(t,u) V(u) \phi .$$

Há uma vasta literatura sobre equações diferenciais (não aleatórias) da forma (3.1) em contexto que abrange a presente situação. Citamos entre outros: Kato 1970, apresenta condições para a existência de propagadores  $M^{(\lambda)}(t,s)$  e Lions e Magenes 1968, provam um teorema de existência e unicidade de solução.

Damos agora a definição do gerador do semi-grupo não aleatório limite da esperança da solução do problema de valor-inicial (3.1).

A aplicação

$$\phi \in \mathbb{H} \rightarrow s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_0^s dr E\{V(s) V(r) \phi\} \in \mathbb{H}$$

define um operador que chamamos  $\bar{V}$  e possui as seguintes propriedades:

(4a)  $\bar{V}$  gera um semi-grupo contrativo

$$\{S(\tau) = \exp(\tau \bar{V}) : \tau \geq 0\} .$$

(4b) Para todo  $\phi \in \mathbb{H}$  e  $\tau \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{t_0 \geq 0 \\ 0 \leq \sigma \leq \tau}} \left\| \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} ds \int_{t_0}^s dr E\{V(s) V(r) S(\sigma)\phi\} - \bar{V}S(\sigma)\phi \right\| = 0 .$$

Enunciamos agora o teorema principal.

Teorema 3.1: Se as condições (1)-(4) são satisfeitas, temos, então, que para todo  $\tau \geq 0$

$$\omega\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E\{M^{(\lambda)}(\tau/\lambda^2, 0)\} = S(\tau) .$$

#### §4. Um Modelo Quântico

Nesta seção construímos um modelo abstrato em matemática-física ao qual aplicaremos o teorema central do limite enunciado na Seção 3. A justificativa para a construção de tal modelo encontra-se em mecânica quântica e falaremos brevemente sobre sua motivação.

Van Hove 1955 e 1957 observou em vários sistemas quânticos com muitos corpos, certos fenômenos responsáveis pela convergência destes sistemas a um estado de equilíbrio. Sistemas com Hamiltonianas da forma  $H_0 + \lambda V$  são o seu objeto de interesse e ele propôs evitar a hipótese de uma fase aleatória ad hoc repetida para garantir a convergência desses sistemas. Para tanto ele considerou dois limites: primeiro o limite do volume infinito quando o espectro da Hamiltoniana livre  $H_0$  se torna contínuo e segundo, o limite do acoplamento fraco quando o parâmetro  $\lambda \rightarrow 0$  e o tempo é escalado novamente de tal maneira que  $\tau = \lambda^2 t$  permanece constante ao longo do limite. Adiante comentaremos esta condição.

Martin e Emch 1975 construíram o primeiro exemplo não trivial onde são observados todos os procedimentos propostos por van Hove e foram capazes de controlar os dois limites sugeridos por este. O chamado modelo de Martin-Emch consiste de um elétron movendo-se num cristal representado pelo reticulado  $\mathbb{Z}^3 = \{(n_1, n_2, n_3) : n_i = \dots, -1, 0, 1, \dots \text{ para } i = 1, 2, 3\}$  onde impurezas estão espalhadas de tal maneira que a interação é descrita por um campo aleatório estático em  $\mathbb{Z}^3$ . Devido ao método empregado para se controlar o limite de acoplamento fraco, uma expansão em função da perturbação  $\lambda V$ , a existência do limite ficou inesperadamente restrita a um raio de convergência finito. Apresentamos aqui uma solução do problema que evita esta restrição e torna desnecessária certas hipóteses impostas à estrutura do modelo original. Entretanto omitiremos uma análise dos aper-



feixamentos obtidos por nossa solução.

Há um aspecto da nossa análise, apontado por Davies 1976, para o qual gostaríamos de chamar a atenção. Martin e Emch 1975 estudaram um semi-grupo dinâmico, num certo espaço de Hilbert, associado a uma evolução Hamiltoniana num espaço de Hilbert maior. Pretendemos aqui, abordar o problema de outra maneira: primeiro definimos modelos quânticos para o sistema (livre) e o reservatório, depois damos a Hamiltoniana que representa a interação entre os dois e, finalmente, estudamos a evolução do sistema determinado pela Hamiltoniana. Ou seja, definimos uma Hamiltoniana global para o nosso modelo. Davies 1976 apresenta o mesmo tratamento para sistemas quânticos abertos com estrutura algébrica.

Adiantamos que a origem aleatória do nosso sistema é formalmente dada pela descrição Hamiltoniana do reservatório. Evitaremos, desta maneira supor que a interação elétron-impureza é aleatória per se. Na representação de Schrödinger do sistema em questão obtemos que a Hamiltoniana projetada depende do tempo o que é de certo modo uma situação fisicamente mais realista.

Nosso sistema consiste, em termos de mecânica quântica, de um elétron movendo-se num cristal acoplado fracamente a um reservatório que tem o efeito de espalhar dinâmica e aleatoriamente impurezas no cristal. Em termos de mecânica Hamiltoniana o sistema é representado pelo espaço de Hilbert

$\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{Z}^3) = \{[\phi : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |\phi_n|^2 < \infty]\}$ , o reservatório dado pelo espaço de Hilbert

$$\mathfrak{F} = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P) = \left\{ \begin{array}{l} f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é } \mathcal{G}\text{-mensurável} \\ \int_{\Omega} |f(\omega)|^2 P(d\omega) < \infty \end{array} \right\},$$

onde  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  é um espaço de probabilidade, e o sistema mais reservatório é descrito por  $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{F}$ . A Hamiltoniana do modelo é

$$H_{\lambda} = H_{\mathfrak{H}} \otimes I + I \otimes H_{\mathfrak{F}} + \lambda H_I, \quad (4.1)$$

onde  $H_{\mathfrak{H}}$  é a Hamiltoniana livre,  $H_{\mathfrak{F}}$  é a Hamiltoniana do reservatório,  $H_I$  é o potencial de interação e  $\lambda$  é o parâmetro de acoplamento que não possui dimensão.

O espaço de Hilbert

$$L^2(B) = \{f: B \rightarrow \mathbb{C} : \int_B |f(\theta)|^2 d\theta < \infty\}$$

onde  $B = [-\pi, \pi]^3 = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) : -\pi \leq \theta_j \leq \pi, \text{ para } j=1, 2, 3\}$ , é o espaço dual de  $L^2(\mathbb{Z}^3)$ . O operador auto-adjunto  $H_{\mathfrak{H}}$  é definido através de sua representação do momentum para todo  $\hat{\phi} \in L^2(B)$ , por

$$(H_{\mathfrak{H}} \hat{\phi})(\theta) = \theta^2 \hat{\phi}(\theta),$$

onde  $\hat{\phi}$  é a transformada de Fourier de  $\phi \in \mathfrak{H}$  e  $\theta^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2$ , para todo  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in B$ .

Escrevemos que

$$\hat{\phi}(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \phi_n e^{in\theta}$$

A transformada inversa é dada por

$$\phi_n = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_B d\theta e^{in\theta} \hat{\phi}(\theta).$$

A evolução do sistema livre é descrita pelo grupo unitário fortemente contínuo de operadores gerado por  $H_H$ ,

$$U_H(t) = \exp(it H_H), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

O operador auto-adjunto  $H_X$  é obtido através da dinâmica que impomos ao espaço de probabilidade. Seja  $T(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , um grupo de transformações em  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  que preservam a medida [ver Doob 1953], i.e.

$$P(T(t)[A]) = P(A),$$

para todo  $A \in \mathcal{G}$  e  $t \in \mathbb{R}$ . A evolução do reservatório é definida por  $U_X(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , o grupo unitário fortemente contínuo de operadores definido em  $\mathcal{F}$  por

$$(U_X(t)f)[\omega] = f(T(t)[\omega]),$$

para todo  $f \in \mathcal{F}$  e  $\omega \in \Omega$ .  $U_X(t)$  é claramente um operador unitária e o Teorema de Stone [ver Hille e Phillips 1957] garante a existência de um gerador, no caso o operador auto-adjunto  $H_X$ ,  $U_X(t) = \exp(it H_X)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Notamos que o operador  $H_X$  não é necessariamente limitado.

Na ausência de interação a dinâmica do sistema no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é dada por

$$U^{(0)}(t) = \exp(it(H_H \otimes I + I \otimes H_X)) = U_H(t) \otimes U_X(t).$$

Observamos que o operador  $H_H \otimes I + I \otimes H_X$  é essencialmente auto-adjunto porque  $H_H$  é limitado.

Para cada  $n \in \mathbb{Z}^3$ , seja  $P_n$  a projeção ortogonal defi

nida em  $\mathcal{H}$  por

$$(P_n \phi)_m = \delta_{n,m} \phi_m ,$$

para todo  $\phi \in \mathcal{H}$  e  $m \in \mathbb{Z}^3$ , onde  $\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, n=m \\ 0, n \neq m \end{cases}$

Seja  $\{v_n \in \mathfrak{F} : n \in \mathbb{Z}^2\}$  uma família de variáveis aleatórias com valores reais. Definimos em  $\mathfrak{F}$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}^3$ , o operador multiplicativo

$$(V_n f)(\omega) = v_n(\omega) f(\omega) ,$$

para todo  $f \in \mathfrak{F}$  e  $\omega \in \Omega$ .

A interação é dada pelo potencial

$$H_I = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} P_n \otimes V_n \quad (4.2)$$

Obviamente estamos omitindo certas condições impostas aos  $v_n$ 's de modo que a expressão (4.2) seja bem definida.

É possível mostrar que o operador  $H_\lambda$  (4.1) é essencialmente auto-adjunto. A evolução do sistema mais reservatório é então descrita pelo grupo unitário de operadores

$$U_\lambda(t) = \exp(i t H_\lambda) .$$

Seja  $l_{\mathfrak{F}}$  o elemento de  $\mathfrak{F}$  definido por

$$l_{\mathfrak{F}}(\omega) = 1,$$

para todo  $\omega \in \Omega$ , e  $E$  a projeção definida por

$$E: \sum_k \phi^{(k)} \otimes f^{(k)} \in \mathcal{H} \otimes \mathfrak{F} \rightarrow \sum_k (f^{(k)}, l_{\mathfrak{F}}) \phi^{(k)} \in \mathcal{H}$$

O chamado limite de van Hove analisa o comportamento assintótico da evolução no sistema  $\mathcal{H}$ . Para o atual modelo ele é

colocado com o estudo da convergência do seguinte limite para todo estado inicial  $\phi \in \mathfrak{H}$ :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \lambda^2 t = \tau}} E U_0(-t) U_\lambda(t) (\phi \otimes l_{\mathfrak{F}}), \quad (4.3)$$

para cada  $\tau \geq 0$  fixo. Consideramos  $U_0(-t) U_\lambda(t)$  porque estamos interessados no efeito de espalhamento do sistema acoplado.

Pela nossa escolha particular do espaço  $\mathfrak{F} = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ , o espaço  $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{F}$  é isomorfo a

$$L^2(\Omega, \mathcal{G}, P; \mathfrak{H}) = \left\{ \Psi: \Omega \rightarrow \mathfrak{H} \mid \int_{\Omega} \|\Psi(\omega)\|_{\mathfrak{H}}^2 P(d\omega) < \infty \right\}.$$

Logo a cada  $\phi \in \mathfrak{H}$  está associado um processo estocástico com valores em  $\mathfrak{H}$  dado por

$$\phi_\lambda(t, \omega) = U_0(-t) U_\lambda(t) (\phi \otimes l_{\mathfrak{F}}),$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $\omega \in \Omega$ . Pela definição do grupo  $U_0(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , segue-se que este processo estocástico satisfaz o problema de valor-inicial.

$$\frac{d\phi_\lambda(t, \cdot)}{dt} = i \lambda V_{\mathfrak{H}}(t, \cdot) \phi_\lambda(t, \cdot), \quad \phi_\lambda(0, \cdot) = \phi \in \mathfrak{H}, \quad (4.4)$$

onde  $V_{\mathfrak{H}}(t, \cdot) = U_{\mathfrak{H}}(-t) \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} v_n(T(t)[\cdot]) P_n U_{\mathfrak{H}}(t)$ , que na representação reduzida da interação corresponde à equação de Schrödinger relativa à Hamiltoniana aleatória

$$H_\lambda(t, \cdot) = H_{\mathfrak{H}} + \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} v_n(T(t)[\cdot]) P_n.$$

Devido à redução do espaço em que o sistema atua o operador  $E$  se transforma na esperança definida pelo espaço de pro-

babilidade  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ , i.e.

$$E\{f\} = \int_{\Omega} f(\omega) P(d\omega).$$

Observamos agora a similaridade existente entre o problema proposto aqui (4.3) e o resultado provado na Seção 3.

Concluimos a construção do nosso exemplo definido explicitamente sua descrição estatística. O campo aleatório  $\{v_n : n \in \mathbb{Z}^3\}$  é Gaussiano e invariante a translações e tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} (i) \quad E\{v_n\} &= 0, \\ (ii) \quad E\{v_n v_m\} &= g_{n-m}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

para todo  $n, m \in \mathbb{Z}^3$ . O conjunto  $\{g_n : n \in \mathbb{Z}^3\}$  satisfaz as seguintes condições:

$$(G1) \quad g_n = g_{-n}, \quad \text{para todo } n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3, \text{ onde } -n = (-n_1, -n_2, -n_3)$$

$$(G2) \quad \|g\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |g_n| < \infty,$$

$$(G3) \quad g(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} g_n e^{in\theta}, \quad \text{para todo } \theta \in B.$$

Para simplificar definimos para todo  $n \in \mathbb{Z}^3$  e  $t \in \mathbb{R}$  a variável aleatória

$$v_n(t) : \omega \in \Omega \mapsto v_n(T(t)[\omega]) \in \mathbb{R}.$$

O grupo de transformações  $T(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é definido através das seguintes condições:

$$(i) E \{v_n(t)\} = 0$$

$$(ii) E \{v_n(t) v_m(s)\} = g_{n-m} \rho(|t-s|),$$

para todo  $n, m \in \mathbb{Z}^3$  e  $t, s \in \mathbb{R}$ .  $\rho$  é uma função positiva e decrescente e  $\int_0^\infty \rho(r) dr$  é finita.

Propomos a seguir uma interpretação da condição " $\lambda^2 t$  permanece inalterado ao longo do limite  $t \rightarrow \infty$  e  $\lambda \rightarrow 0$ ". Seja  $\tau > 0$  um determinado tempo. Só nos interessam pequenos valores de  $\lambda$  e por isso podemos considerar  $0 < \lambda < 1$ . Supomos que  $\lambda$  seja a probabilidade de ocorrer uma colisão elétron-impureza durante qualquer período de tempo  $\tau$ . Devido à estrutura Gaussiana do nosso modelo, mais precisamente de seu potencial de interação, podemos supor que a probabilidade de ocorrerem duas colisões elétron-impureza durante qualquer período de tempo  $\tau$  seja  $\lambda^2$ .

Se recordarmos a estrutura de nosso modelo, vemos que o potencial da interação é dado através de um campo aleatório Gaussiano  $\{v_n : n \in \mathbb{Z}^3\}$  definido pelas seguintes propriedades:

$$\langle v_n \rangle = 0,$$

$$\langle v_n v_m \rangle = g_{n-m},$$

para todo  $n, m \in \mathbb{Z}^3$ . Isto nos diz que a memória do sistema não é afetada por uma colisão isolada ou quando ocorrem um número ímpar de colisões. Portanto, nada mais natural que considerar a probabilidade de duas colisões elétron-impureza ocorrerem durante um período de tempo  $\tau$ .

Para concluirmos falta apenas dar o significado do tem-

po.  $t$ . Definimos  $t$  como sendo o tempo esperado para que ocorram duas colisões elétron-impureza, já que a ocorrência de um número par destas colisões é o único efeito que colabora para a memória do sistema. Logo temos que  $\lambda^2 t = \tau$ .

No presente contexto o tempo  $t$  é chamado em física o tempo de relaxamento. O tempo que o sistema demora para retornar ao seu estado de equilíbrio estatístico.

Estamos considerando o limite do acoplamento fraco  $\lambda \rightarrow 0$ , mas levando-se em conta a relação  $\lambda^2 t = \tau$ .

Antes de continuarmos a nossa tarefa de estudar o comportamento assintótico do valor esperado da solução do problema de valor inicial (4.4), faremos algumas observações.

Na Seção 5 nos dedicamos a descrever a estrutura aleatória do modelo. Nela apresentaremos uma realização do campo aleatório que satisfaz as condições G1-G3 (4.6) e definiremos transformações  $T(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , correspondente à condição (4.7). Como veremos adiante os operadores  $V_{\mathbb{H}}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , são ilimitados, isto requer uma certa cautela na definição da equação diferencial aleatória (4.4). Por ora, isto será omitido. A maneira encontrada por Martin e Emch 1975 e Spohn 1977 para não trabalharem com operadores ilimitados foi considerar um corte no reticulado  $\mathbb{Z}^3$  e, consequentemente, restringir a interação a um volume finito. Tomando a seguir o limite do volume infinito da esperança da evolução.

Mostraremos agora que o modelo definido aqui satisfaz



as hipóteses do teorema enunciado na Seção 3.

Lema 4.1: Existe uma consante  $A > 0$  tal que para todo  $\phi \in \mathbb{H}$  e  $0 \leq r \leq s \leq t$ :

- (i)  $E^{1/2} \|V_{\mathbb{H}}(t) \phi\|^2 \leq A \|\phi\|$ ,
- (ii)  $E^{1/2} \|V_{\mathbb{H}}(t) V_{\mathbb{H}}(s) \phi\|^2 \leq A \|\phi\|$ ,
- (iii)  $E^{1/2} \|V_{\mathbb{H}}(t) V_{\mathbb{H}}(s) V_{\mathbb{H}}(r) \phi\|^2 \leq A \|\phi\|$ ,
- (iv)  $E \left\| \int_s^t dq V_{\mathbb{H}}(q) \phi \right\|^2 \leq A^2 (t-s) \|\phi\|^2$ .

Por serem as demonstrações dos itens extensas, provaremos apenas as partes (i) e (iv).

Demonstração:

Obviamente, para provar (i) é suficiente considerar  $t=0$ . Neste caso

$$\begin{aligned} E \|V_{\mathbb{H}}(0) \phi\|^2 &= E \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} v_n P_n \phi, \sum_{m \in \mathbb{Z}^3} v_m P_m \phi \right) \\ &= E \sum_{n, m \in \mathbb{Z}^3} v_n v_m (P_n \phi, P_m \phi) \\ &= E \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} v_n^2 \|P_n \phi\|^2, \end{aligned}$$

por (4.5)

$$\begin{aligned} E \|V_{\mathbb{H}}(0) \phi\|^2 &= g_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \|P_n \phi\|^2 \\ &= g_0 \|\phi\|^2, \end{aligned}$$

para todo  $\phi \in \mathfrak{H}$ .

O que prova parte (i).

Sejam  $0 \leq s \leq t$  e  $\phi \in \mathfrak{H}$ , temos que

$$\begin{aligned} \left\| \int_s^t dq V_{\mathfrak{H}}(q) \phi \right\|^2 &= \int_s^t dq \int_s^t dp (V_{\mathfrak{H}}(q) \phi, V_{\mathfrak{H}}(p) \phi) \\ &= \int_s^t dq \int_s^t dp (U_{\mathfrak{H}}(-q) \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} v_n(q) P_n U_{\mathfrak{H}}(q) \phi, \\ &\quad U_{\mathfrak{H}}(-p) \sum_{m \in \mathbb{Z}^3} v_m(p) P_m U_{\mathfrak{H}}(p) \phi) \\ &= \int_s^t dq \int_s^t dp \sum_{n, m \in \mathbb{Z}^3} v_n(q) v_m(p) (U_{\mathfrak{H}}(-q) P_n U_{\mathfrak{H}}(q) \phi, \\ &\quad U_{\mathfrak{H}}(-p) P_m U_{\mathfrak{H}}(p) \phi) . \end{aligned}$$

Logo tomando a esperança obtemos que

$$\begin{aligned} E \left\| \int_s^t dq V_{\mathfrak{H}}(q) \phi \right\|^2 &= \int_s^t dq \int_s^t dp \sum_{n, m \in \mathbb{Z}^3} g_{n-m} \rho(|q-p|) (U_{\mathfrak{H}}(-q) P_n U_{\mathfrak{H}}(q) \phi, \\ &\quad U_{\mathfrak{H}}(p) P_m U_{\mathfrak{H}}(p) \phi) \\ &\leq \int_s^t dq \int_s^t dp \rho(|q-p|) \sum_{n, m \in \mathbb{Z}^3} |g_{n-m}| \|P_n U_{\mathfrak{H}}(q) \phi\| \\ &\quad \|P_m U_{\mathfrak{H}}(p) \phi\| \\ &= \int_s^t dq \int_s^t dp \rho(|q-p|) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^3} |g_{\ell}| \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \|P_n U_{\mathfrak{H}}(q) \phi\| \|P_{n+\ell} U_{\mathfrak{H}}(p) \phi\| . \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Holder e a propriedade G2

(5.6), temos que

$$\begin{aligned} E \left\| \int_s^t dq V_{\mathbb{H}}(q) \phi \right\|^2 &\leq \int_s^t dq \int_s^t dp \rho(|q-p|) \|\phi\|_1 \|\phi\|^2 \\ &\leq (t-s) \int_0^\infty dp \rho(p) \|g\|_1 \|\phi\|^2 \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração do item (iv). □

Definimos agora o gerador do semi-grupo limite da evolução dada pela equação diferencial aleatória (4.4).

Definição 4.1: Seja  $\bar{V} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  o operador definido por

$$\begin{aligned} &(\bar{V} \cdot \phi)(\theta) \\ &= \left[ - \int_0^\infty ds \rho(s) \int_B d\theta e^{-is(\theta^2 - \theta_1^2)} g(\theta - \theta_1) \right] \phi(\theta), \end{aligned}$$

para todo  $\phi \in \mathbb{H}$  e  $\theta \in B$ .

Antes de apresentar o resultado que relaciona certas propriedades do operador  $\bar{V}$ , mostraremos como o operador  $\bar{V}$  é obtido.

Lema 4.2: Para cada  $\phi \in \mathbb{H}$ , o limite no sentido forte

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_s^t ds \int_0^s dr E[V_{\mathbb{H}}(s) V_{\mathbb{H}}(r) \phi]$$

existe e é igual a  $\bar{V} \phi$ .

Demonstração:

Sejam  $0 \leq r \leq s$  e  $\phi \in \mathbb{H}$ . Temos que

$$E\{V_H(s) V_H(r)\phi\} = - \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^3} g_{n-m} \rho(s-r) U_H(-s) P_n U_H(s-r) P_m U_H(r) \phi.$$

Logo para todo  $\theta \in B$

$$\begin{aligned} E\{V_H(s) V_H(r) \phi\}(\theta) &= \\ &= - \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^3} g_{n-m} \rho(s-r) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_B d\theta_1 \int_B d\theta_2 e^{-is\theta^2} e^{i(s-r)\theta_1^2} e^{ir\theta_2^2} \\ &\quad \cdot \phi(\theta_2) e^{in(\theta-\theta_1)} e^{im(\theta_1-\theta_2)}. \end{aligned}$$

Notamos que

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{in\theta} = \delta(\theta),$$

consequentemente

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^3} g_{n-m} e^{in(\theta-\theta_1)} e^{im(\theta_1-\theta_2)} = g(\theta-\theta_1) \delta(\theta-\theta_2)$$

Concluimos que

$$E\{V_H(s) V_H(r)\phi\}(\theta) = -\rho(s-r) \int_B d\theta_1 e^{-i(s-r)(\theta^2-\theta_1^2)} g(\theta-\theta_1) \phi(\theta).$$

Então para todo  $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_0^s dr E\{V_H(s) V_H(r) \phi\}(\theta) \\ = \left[ -\frac{1}{t} \int_0^t ds \int_0^s dr \rho(s-r) \int_B d\theta_1 e^{-i(s-r)(\theta^2-\theta_1^2)} g(\theta-\theta_1) \right] \phi(\theta), \end{aligned}$$

e, tomando o limite  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_0^s dr E\{V_H(s) V_H(r) \phi\}(\theta) \\ &= \left[ - \int_0^\infty ds \rho(s) \int_B d\theta_1 e^{-is(\theta^2 - \theta_1^2)} g(\theta - \theta_1) \right] \phi(\theta). \end{aligned}$$

Usando a condição (5.6), obtemos que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_0^s dr E\{V_H(s) V_H(r) \phi\}(\theta) \right| \leq \\ & \leq (2\pi)^{3/2} \|g\|_1 \int_0^\infty dr \rho(r) |\phi(\theta)|. \end{aligned}$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [ver Bartle 1966] e a Definição 4.1, para todo  $\phi \in \mathfrak{H}$ ,

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_0^s dr E\{V_H(s) V_H(r) \phi\} = \bar{V} \phi. \quad \square$$

Com o próximo teorema concluímos que para resolver o problema colocado no início desta seção podemos empregar o Teorema 2.1.

Lema 4.3: O operador  $\bar{V}$  possui as seguintes propriedades

- (i)  $\bar{V}$  é limitado,
- (ii) o semi-grupo  $\{S(\tau) = \exp(\tau \bar{V}) : \tau \geq 0\}$  é contrativo, i.e.  $\|S(\tau)\phi\| \leq \|\phi\|$ , para todo  $\phi \in \mathfrak{H}$ ,

(iii) existe uma constante  $A > 0$  tal que para todo  $t > 0$  e  $\phi \in \mathcal{H}$

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_0^s dr E\{V_{\mathcal{H}}(s) V_{\mathcal{H}}(r) \phi\} - \bar{V} \phi \right\| \leq \frac{A}{t} \|\phi\| .$$

Demonstração:

Provaremos somente o item (iii).

Tomamos  $\theta \in B$  e  $t > 0$ , então

$$\begin{aligned} (\bar{V} \phi)(\theta) &= \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_0^s dr E\{V_{\mathcal{H}}(s) V_{\mathcal{H}}(r) \phi\}(\theta) \\ &= \left\{ - \int_0^{\infty} dq \rho(q) \int_B d\theta_1 e^{-iq(\theta^2 - \theta_1^2)} g(\theta - \theta_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_0^s dr \rho(s-r) \int_B d\theta_1 e^{-i(s-r)(\theta^2 - \theta_1^2)} g(\theta - \theta_1) \right\} \phi(\theta). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Observamos que

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} dq \rho(q) \int_B d\theta_1 e^{-iq(\theta^2 - \theta_1^2)} g(\theta - \theta_1) \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_0^s dr \rho(s-r) \int_B d\theta_1 e^{-i(s-r)(\theta^2 - \theta_1^2)} g(\theta - \theta_1) \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_s^{\infty} dr e^{-c(s-r)^2} \int_B d\theta_1 e^{-ir(\theta^2 - \theta_1^2)} g(\theta - \theta_1) . \end{aligned}$$

Substituindo a expressão acima em (4.7), e usando (4.5),

obtemos que

$$\begin{aligned}
 & |(\bar{V} \phi)(\theta) - \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_0^s dr E\{V_H(s) V_H(r) \phi\}(\theta)| \\
 &= \left| \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_0^s dr \rho(s-r) \int_B d\theta_1 e^{-i(s-r)(\theta^2 - \theta_1^2)} g(\theta - \theta_1) \right| |\phi(\theta)| \\
 &\leq (2\pi)^{3/2} \|g\|_1 \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_s^\infty dr \rho(r) |\phi(\theta)| \\
 &\leq \frac{A}{t} |\phi(\theta)|,
 \end{aligned}$$

onde  $A$  é uma constante que depende apenas de  $\|g\|_1$  e  $\int_0^\infty dr \rho(r)$ .

Mais claramente, a última desigualdade segue do seguinte fato: seja

$$f : t \in (0, \infty) \mapsto \int_0^t ds \int_s^\infty dr \rho(r)$$

Como para todo  $t > 0$

$$f'(t) = \int_t^\infty dr \rho(r) > 0,$$

$f$  é estritamente crescente, e  $\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = 0$ , ou seja,  $f$  é limitada.

Logo

$$\int_0^\infty ds \int_s^\infty dr e^{-cr^2}$$

é finita.

Isto conclui a demonstração do Lema 4.3. □

O semi-grupo dissipativo  $S(\tau)$ ,  $\tau \geq 0$ , é o limite proposto pela expressão (4.3).

§5. O Campo Aleatório Gaussiano  $\{v_n(t)\}$ :

Nesta seção usamos a teoria estabelecida por Minlos 1962, para construir um campo aleatório  $\{v_n(t): n \in \mathbb{Z}^3, t \in \mathbb{R}\}$  satisfazendo as condições dadas por (4.7).

Definição 5.1: Seja  $k \in \mathbb{Z}_+$ .  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$  é o espaço nuclear formado por todas as funções com valores reais definidas no  $\mathbb{R}^k$  que são infinitamente diferenciáveis e rapidamente decrescentes e  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$  o seu dual.

[Ver Gelfand e Vilenkin 1964; Horváth 1966].

Por Tréves 1967,  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$  é também um espaço nuclear.

Definição 5.2: Uma aplicação

$$C : \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \mapsto C(\xi) \in \mathbb{C}$$

é uma função característica em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$  se, ela satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $C$  é contínua em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ ,
- (ii)  $C$  é definida positiva,
- (iii)  $C(o) = 1$ .

Teorema 5.1: Seja  $\mathcal{G}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos conjuntos Borelianos de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ , i.e. as imagens inversas das aplicações  $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k) \mapsto \langle w, \xi \rangle$ ,  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ .



Seja  $C$  uma função característica em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ . Então existe uma única medida de probabilidade  $P$  agindo no par  $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k), \mathcal{G})$  que satisfaz a equação

$$C(\xi) = \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)} \exp(i \langle \omega, \xi \rangle) p(d\omega), \quad (5.1)$$

para todo  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ .

(Para a demonstração deste resultado ver Hida 1970 ou Simon 1979).

O teorema acima é chamado o Teorema de Bochner-Minlos.

No caso acima a variável aleatória

$$\omega \mapsto \langle \omega, \xi \rangle$$

tem a seguinte função característica:

$$t \in \mathbb{R} \mapsto C(t\xi) = \exp \left( tm(\xi) - \frac{1}{2} t^2 V(\xi, \xi) \right);$$

onde  $m(\xi)$  e  $V(\xi, \xi)$  são, respectivamente, a média e a variância de  $\omega \mapsto \langle \omega, \xi \rangle$  (ver Doob 53, p.37).

Para definir a função característica  $C$ , recordamos que as variáveis aleatórias  $v_n(t)$  e  $v_n(t) v_m(t)$  têm esperanças, respectivamente, zero e  $\delta_{n-m}$ .

Seja  $\mathfrak{H}$  o espaço de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $\{\xi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) : n \in \mathbb{Z}^3\}$  uma base ortonormal de  $\mathfrak{H}$  e  $\|\cdot\|_2$  e  $(\cdot, \cdot)_2$ , respectivamente, a norma e o produto interno de  $\mathfrak{H}$ . Pretendemos construir um espaço de Hilbert, digamos  $\mathfrak{H}_G$ , contendo o conjunto  $\mathfrak{H}$  e tal que para todo  $n, m \in \mathbb{Z}^3$

$$(\xi_n, \xi_m)_G = \xi_{n-m} ,$$

onde  $(\dots)_G$  denota o produto interno em  $\mathfrak{D}_G$ . Assim definimos um operador  $G$  agindo em  $\mathfrak{S}$  satisfazendo a seguinte equação:

$$(G \xi_n, \xi_m)_2 = \xi_{n-m} ,$$

para todo  $n, m \in \mathbb{Z}^3$ . Neste caso

$$(\dots)_G = (G \dots)_2 \tag{5.2}$$

Definição 5.3: Seja  $G$  o operador auto-adjunto positivo limitado em  $\mathfrak{S}$  dado por

$$\xi_n \mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}^3} \xi_{n-m} \xi_m ,$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}^3$ .

O fato de  $G$  ser limitado segue da condição (4.6), ou seja  $\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |g_n| < \infty$ .

Observe que se  $f \in \mathfrak{X} = L^2(\mathbb{R}^4)$ ,

$$f: (s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mapsto f(s, x) ,$$

as funções

$$f_s: x \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(s, x)$$

pertencem a  $\mathfrak{S}$  para quase todo  $s \in \mathbb{R}$ .

Definição 5.4: Chamamos de  $(\dots)_T$  o produto interno dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds (f_s^{(1)}, f_s^{(2)})_G \tag{5.3}$$

para todo  $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathfrak{S}$ , onde  $(\dots)_G$  é definido por (5.2).

Seja  $\mathfrak{S}_T$  o espaço de Hilbert definido pelo completamento do espaço linear  $\mathfrak{S}$  com respeito ao produto interno  $(\dots)_T$  e  $\|\cdot\|_T$  a norma neste espaço.

Seja  $C$  a função característica

$$\gamma \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^4) \mapsto \exp(-\|\gamma\|_T^2/2).$$

Seja  $P$  a medida de probabilidade em  $(\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^4), \mathcal{G})$  obtida através do Teorema de Bochner-Minlos usando esta função característica  $C$  na equação (5.1).

Logo, com  $\Omega = \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^4)$ ,  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  é um espaço de probabilidade.

O próximo resultado é uma consequência direta da maneira que definimos o espaço de probabilidade.

Lema 5.1: (i)  $E\{\langle \cdot, \gamma \rangle\} = 0$ ,  
(ii)  $E\{\langle \cdot, \gamma \rangle \langle \cdot, \xi \rangle\} = (\gamma, \xi)_T$ ,  
para todo  $\gamma, \xi \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^4)$ .

Chamamos de  $S(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , a transformação em  $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$  definida por

$$S(t) : \gamma(\dots) \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^4) \mapsto \gamma(\dots - t, \dots) \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^4).$$

Seja  $T(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , a transformação em

$(\Omega, \mathcal{G}, P)$  que preserva a medida dada pela seguinte relação válida para todo  $\omega \in \Omega$  e  $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ :

$$\langle T(t)[\omega], \gamma \rangle = \langle \omega, S(t)\gamma \rangle .$$

Observamos que as transformações  $T(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , formam um grupo.

Definimos agora as variáveis aleatórias  $v_n, n \in \mathbb{Z}^3$ . Para isto, escolhemos  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  com valores reais positivos e definimos para todo  $n \in \mathbb{Z}^3$

$$v_n : (s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mapsto h(s) \xi_n(x) \in \mathbb{R} .$$

Por Tréves 1967,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  e já que  $\xi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ,  $v_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ .

Chamamos  $v_n$  e  $v_n(t)$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}^3$  e  $t \in \mathbb{R}$ , as variáveis aleatórias, respectivamente,

$$\omega \in \Omega \mapsto \langle \omega, v_n \rangle$$

e

$$\omega \in \Omega \mapsto \langle T(t)[\omega], v_n \rangle .$$

Com respeito a estas variáveis aleatórias obtemos o seguinte corolário do Lema 5.1.

Teorema 5.2: (i)  $E\{v_n(t)\} = 0$

$$(ii) E\{v_n(t) v_m(s)\} = g_{n-m} \rho(|t-s|),$$

para todo  $n, m \in \mathbb{Z}^3$  e  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Este último teorema conclui a construção de um campo aleatório satisfazendo as condições dadas em (4.7).

Devido à hipótese (1b) do Teorema 3.1 é necessário que a função

$$\rho : S \in [0, \infty) \mapsto \rho(s)$$

Seja decrescente,  $\rho(0) = 1$  e

$$\int_0^{\infty} \rho(s) ds < \infty$$

De modo que a função  $h$  precisa ser convenientemente escolhida.

A função

$$h : S \in \mathbb{R} \mapsto a e^{-bs^2},$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes estritamente positivas, satisfaz esses requisitos.

Para terminar, mostraremos que o modelo construído na Seção 4 satisfaz a condição de mensurabilidade imposta pelo Teorema 3.1.

Definimos primeiro as sub- $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{G}_s^t$ ,  $0 \leq s \leq t \leq \infty$ , de  $\mathcal{G}$ .

Definição 5.5: Sejam  $0 \leq s \leq t \leq \infty$ . Para todo  $s \leq \sigma \leq t$ ,  $n \in \mathbb{Z}^3$  e  $B \in \{\text{conjuntos de Borel em } \mathbb{R}\}$ , defina

$$Z(n, \sigma, B) = \{\omega \in \Omega : v_n(\sigma) \in B\}. \quad (5.3)$$

Chamamos  $\mathcal{G}_s^t$  a  $\sigma$ -álgebra gerada por todos os conjuntos pertencentes às  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{G}_s^u$ , onde  $s \leq u < \infty$ .

As  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{G}_s^t$ ,  $0 \leq s \leq t \leq \infty$ , satisfazem à hipótese (1a) do Teorema 3.1.

Para definir o coeficiente de mistura imposto pelo Teorema 3.1, precisamos enunciar um teorema que pode ser encontrado em Kolmogorov e Rozanov 1960.

Seja  $(\Lambda, \mathfrak{M}, u)$  um espaço de probabilidade e

$$\mathfrak{S} = L^2(\Lambda, \mathfrak{M}, P)$$

$$= \{f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é } \mathfrak{M}\text{-mensurável}\} \\ \int_{\Lambda} f(\omega)^2 P(d\omega)$$

Sejam  $\{f'\}$  e  $\{f''\}$  duas famílias de elementos de  $\mathfrak{S}$ . Sejam  $\mathfrak{M}'$  e  $\mathfrak{M}''$  as  $\sigma$ -álgebras geradas, respectivamente, pelos conjuntos  $\{f' \in B\}$  e  $\{f'' \in B\}$ , para todo conjunto de Borel  $B$  em  $\mathbb{R}$ . Para o caso Gaussiano o cálculo do coeficiente de correlação maximal entre  $\mathfrak{M}'$  e  $\mathfrak{M}''$ , definido na Seção 2 por (2.1), pode ser simplificado da seguinte maneira:

Teorema 5.3: Suponhamos que as famílias de variáveis aleatórias  $\{f'\}$  e  $\{f''\}$  sejam conjuntamente Gaussianas. Sejam  $\mathfrak{S}'$  e  $\mathfrak{S}''$  os subespaços formados por todas as combinações lineares dos elementos de  $\{f'\}$  e  $\{f''\}$ , respectivamente. Seja  $\alpha(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'')$  o coeficiente dado por (2.1). Obtemos, então, que

$$\alpha(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'') = \text{Sup} \left\{ \frac{|E\{(f_1 - E f_1)(f_2 - E f_2)\}|}{E^{1/2} |f_1 - E f_1|^2 E^{1/2} |f_2 - E f_2|^2} : \begin{matrix} f_1 \in \mathfrak{S}' \\ f_2 \in \mathfrak{S}'' \end{matrix} \right\}. \quad (5.4)$$

Seja  $\alpha$  o coeficiente definido na hipótese (1.b) do Teorema 3.1 com  $\alpha_s^t$  dado pela Definição 5.5. Como consequência do resultado acima podemos provar que

$$\alpha(\tau) = \rho(\tau),$$

para todo  $\tau \geq 0$ .

No atual contexto o coeficiente forte de mistura  $\beta$  da do por (2.6) e o coeficiente de correlação maximal  $\alpha$  definido por (2.1), ou (6.4), estão relacionados da seguinte maneira:

$$\beta(\mathbb{M}', \mathbb{M}'') \leq \alpha(\mathbb{M}', \mathbb{M}'') \leq 2\pi \beta(\mathbb{M}', \mathbb{M}'') .$$

Estas desigualdades provêm de um teorema provado por Kolmogorov e Rozanov 1960.

### §6. Conclusões:

O teorema abstrato que provamos na Seção 3 segue a teoria desenvolvida principalmente por Cogburn e Hersh 1973 e Papanicolaou e Varadhan 1973. Nossa meta é aperfeiçoar certos aspectos dos resultados já obtidos, assim como extendê-los a uma classe mais ampla de equações.

Spohn 1977, seguindo o método desenvolvido por Martin e Emch, generalizou o exemplo criado por estes, introduzindo inclusive um campo elétrico externo constante no modelo. Isto lhe permitiu a derivação de uma equação de transporte para a distribuição da velocidade do elétron. No citado artigo há uma grande preocupação em justificar em termos da física o aparecimento de qualquer hipótese abstrata. Mencionamos também o artigo de Spohn 1980, onde há uma análise de resultados que lidam com o que ele denomina "Limites Markovianos". Nesse artigo ele descreve uma variedade de situações em física que exigem o estudo do comportamento assintótico de sistemas sob a ação de perturbações aleatórias (ou

que imitam um comportamento aleatório): Observamos que Davies 1974(ou em seu texto sobre sistemas abertos, Davies 1976) nota a similaridade entre o método desenvolvido por Cogburn e Hersh 1973 e Papanicolaou e Varadhan 1973, o que se encontra neste artigo, e a análise feita por Davies 1974. Spohn 1977 propõe que se estude a possibilidade de se modificar o método de Davies de modo a aplicá-lo ao sistema construído em seu artigo. Logo a atual conexão que formulamos com uma teoria abstrata de análise assintótica já havia sido notada por outros autores. Papanicolaou 1975 revê resultados sobre limite assintótico de soluções de problemas de valor-inicial. Há, um pouco fora da nossa área de interesse, um trabalho de van Kampen 1976 que consiste de uma coletânea de exemplos em física onde são usadas equações diferenciais estocásticas. O texto se fixa na utilidade física das aplicações, deixando de lado o rigor matemático. Van Kampen não faz distinção entre equações diferenciais aleatória e estocástica, em geral a última é a que corresponde ao cálculo de Itô [ver Gihman e Skorohod 1972, Friedman 1975 e 1976]. Schuss 1980 também faz uma revisão de situações onde ocorrem equações diferenciais estocásticas em matemática-física. Mas o principal valor do seu trabalho está na apresentação de métodos desenvolvidos recentemente para resolver problemas de primeira passagem. Vale lembrar que Papanicolaou e Kohler 1974 aperfeiçoando a análise desenvolvida por Cogburn e Hersh 1973 e Papanicolaou e Varadhan 1973, mostraram que certos processos definidos por equações diferenciais aleatórias convergem assintoticamente para processos de difusão e Markov.



Devido à análise assintótica desenvolvida por Martin e Emch para provar a convergência de seu modelo pioneiro a um estado de equilíbrio, e também empregada por Spohn, o resultado obtido tem certas restrições inesperadas. Para melhorar suas conclusões, foi que construímos um novo modelo, cuja dinâmica é descrita por uma equação diferencial aleatória.

Uma hipótese que conseguimos evitar na construção de nosso exemplo é a do potencial de interação ser aleatório per se. Como mencionamos acima, no chamado modelo de Martin e Emch esta condição parece ter sido colocada, apesar da motivação para fazê-lo. Nosso modelo é completamente definido como: sistema livre mais reservatório. E a sua interação aleatória segue diretamente da interação do sistema com o assim chamado "mundo exterior".

Isto nos leva a obter um modelo de estrutura aleatória com dinâmica própria, o que aproxima o nosso exemplo ainda mais de um modelo mais realista, como é o caso do modelo de Frölich 1954, analisado por Kohn e Luttinger 1957 e 1958. Suscintamente o modelo consiste de um sólido ideal que interage com o elétron condutor por um processo fônon-elétron. Nesse caso a média sobre a medida Gaussiana é substituída pela média sobre o estado de equilíbrio térmico do cristal (harmônico) que se comporta como uma estrutura Gaussiana.

BIBLIOGRAFIA

- BARTLE, R.G., 1966, The Elements of Integration, John Wiley & Sons.
- COGBURN, R., and HERSH, R., 1973, Two Limit Theorems for Random Differential Equations, Indiana Univ. Math. J., Vol. 22, N° 11, pp. 1067-1089.
- DAVIES, E.B., 1974, Markovian Master Equations, Comm. Math. Phys. 39, pp.91-110.
- DAVIES, E.B., 1976, Quantum Theory of Open Systems, Academic Press.
- DOOB, J.L., 1953, Stochastic Processes, John Wiley & Sons.
- FRIEDMAN, A., 1975 e 1976, Stochastic Differential Equations and Applications, Vols. 1 e 2, Academic Press.
- FROHLICH, H., 1954, Advances in Physics, Vol. 3, N.F. Mott, ed. (Taylor & Francis, pp. 325-361.
- GELFAND, I.M., e VILENKIN, N.Ya. 1964, Generalized Functions Vol. IV, Academic Press.
- GIHMAN, I.I., e SKOROHOD, A.V., 1972, Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag.
- HERSH, R., 1974, Random Evolutions: A Survey of Results and Problems, The Rocky Mountain J. of Math., Vol. 4, N° 3, pp. 443-477.

- HIDA, T., 1970, Stationary Stochastic Processes, Princeton University Press.
- HILLE, E., e PHILLIPS, R.S., 1957, Functional Analysis and Semi-Groups, Am. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. XXXI.
- HORVÁTH, J., 1966, Topological Vector Spaces and Distributions, Vol. I, Addison-Wesley.
- VAN HOVE, L., 1955 e 1957, Quantum Mechanical Perturbations Giving Rise to a Statistical Transport Equation, Physica XXI, pp. 517-540; The Approach to Equilibrium in Quantum Statistics, Physica XXIII, pp. 441-480.
- IBRAGIMOV, I.A., e LINNIK, Yu.V., 1971, Independent and Stationary Sequences of Random Variables, Wolters-Noordhoff.
- VAN KAMPEN, N.G., 1976, Stochastic, Differential Equations, Physics Reports 24, N° 3, pp. 171-228.
- KATO, T., 1970, Linear Evolution Equations of "Hyperbolic" Type, J. Fac. of Sci., Sec.1, XVII, Part 1 and 2, pp. 241-258.
- KOHN, W., e LUTTINGER, J.M., 1957, Quantum Theory of Electrical Transport Phenomena, Physical Review 108, N° 3, pp. 590-611; ver Luttinger, J.M., e Kohn, W., 1958, Quantum Theory of Electrical Transport Phenomena II, Physical Review 109, N° 6, pp. 1892-1909.

- KOLMOGOROV, A.N., e ROZANOV, Yu.A., 1960, On Strong Mixing Conditions for Stationary Gaussian Processes, Theory Prob. Appl., Vol. V, N° 2, pp. 204-208.
- KURTZ, T.G., 1972, A Random Trotter Product Formula, Proc. Am. Math. Soc. 35, pp. 147-154.
- KURTZ, T.G., 1973, A Limit Theorem for Perturbed Operator Semigroups with Applications to Random Evolutions, J. of Functional Analysis, Vol. 12, N° 1, pp. 55-67.
- LIONS, J.L., e MAGENES, E., 1968, Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications, Vol. 1, Dunod.
- MARTIN, Ph.A., e EMCH, G.G., 1975, A Rigorous Model Sustaining van Hove's Phenomenon, Helvetica Physica Acta, Vol. 48, pp. 59-78.
- MINLOS, R.A., 1962, Generalized Random Processes and their Extension to a Measure, Selected Translation in Mathematical Statistics and Probability, Vol. 3, pp. 291-314.
- PAPANICOLAOU, G.C., 1975, Introduction to Asymptotic Analysis of Stochastic Equations, Lecture Notes, AMS Seminar, Rensselaer Polytechnic Inst., Troy, N.Y..
- PAPANICOLAOU, G.C., e KOHLER, W., 1974, Asymptotic Theory of Mixing Stochastic Ordinary Differential Equations, Comm. Pure Appl. Math., Vol. XXVII, pp. 641-668.
- PAPANICOLAOU, G.C., e VARADHAN, S.R.S., 1973, A Limit Theorem with Strong Mixing in Banach Space and Two Applications to Stochastic Differential Equations, Vol. XXVI, pp. 497-524.

- ROSENBLATT, M., 1956, A Central Limit Theorem and a Strong Mixing Condition, Proc. Nat. Acad. Sci., Washington 42, 1, pp. 43-48.
- SCHUSS, Z., 1980, Singular Perturbation Methods in Stochastic Differential Equations of Mathematical Physics, SIAM J. Review, Vol. 22, N° 2, pp. 119-155.
- SIMON, B., 1979, Functional Integration and Quantum Physics, Academic Press.
- SPOHN, H., 1977, Derivation of the Transport Equations for Electrons Moving Through Random Impurities, J. of Statistical Phys., Vol. 17, N° 6, pp. 385-412.
- SPOHN, H., 1980, Kinetic Equations from Hamiltonian Dynamics: Markovian Limits, Reviews of Modern Physics, Vol. 53, N° 3, pp. 569-615.
- TRÉVES, F., 1967, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press.



TEMPOS LOCAIS

Por

Maria Eulália Vares

Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA





## INTRODUÇÃO

O objetivo destas notas é bem singelo: apresentar a participantes do Colóquio alguns dos resultados (mais ou menos) recentes relativos à Teoria dos Tempos Locais. Não tem a mínima pretensão de ser um "survey" completo do assunto, mas espera-se que possa dar uma idéia dos possíveis enfoques da Teoria e que possa facilitar ao leitor o acesso à literatura especializada.

Sem dúvida, o estudo de "tempos locais" para processos estocásticos a parâmetro contínuo teve início com Paul Lévy (1940's) cujas brilhantes idéias estão ainda a "iluminar" muitos desenvolvimentos. Sua motivação inicial foi a de "medir" o conjunto dos tempos de visitas a  $\{0\}$  por um Movimento Browniano  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Dois importantes aspectos se depreendem de seu trabalho:

(i) "medir" o conjunto  $\{t : X_t = x\}$ , para um dado  $x$ ;

(ii) achar uma densidade para a "medida ocupacional"

$$\mu(B, t) = \int_0^t I_B(X_s) ds, \quad B \text{ conjunto de Borel em } \mathbb{R};$$

Começamos, na Seção 1, expondo os principais resultados sobre o caso Browniano — hoje já bem conhecidos — que foram a "pedra fundamental", bem como alguns dos desenvolvimentos que se seguiram (para processos de Markov, "martingales", etc.). Algumas das "aplicações" importantes são ao estudo de processos de difusão em  $\mathbb{R}$  e, bem mais recentemente, à "Teoria das Excursões". Infelizmente, o tempo e o espaço são curtos para que possamos en

trar nestes tópicos.

Na Seção 3 apresentamos alguns resultados para processos com "incrementos independentes e estacionários" e indexados por  $[0, +\infty)^2$ , que chamamos de "processos de Lévy a dois parâmetros". A apresentação é sucinta e as provas são omitidas (elas devem aparecer na literatura [26]). Citaremos então algumas das aplicações ao estudo das trajetórias do processo (cujas provas também devem estar em [26]).

A Seção 2 serve apenas para introduzir os processos considerados na seção seguinte, embora sem detalhes (que serviriam para ter uma melhor idéia dos processos considerados).

Finalmente, referente ao assunto da Seção 3 há ainda muito por ser feito; alguns dos problemas em aberto serão explicitamente mencionados.

### §1. A idéia básica associada a "tempos locais" - Caso Browniano

Antes de mais nada precisamos recordar ao leitor a definição de Movimento Browniano (ou Processo de Wiener) em  $\mathbb{R}$ .

Definição 1.1. Por  $MB(0)$  (i.e. Movimento Browniano iniciando na posição 0) entende-se qualquer processo estocástico — em algum espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — tal que:

(a)  $P(X_0 = 0) = 1$

(b) Se  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n < +\infty$ , ( $n \geq 1$ ), os incrementos

$X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  são independentes; sendo  $s > 0, t \geq 0$ ,  $X_{t+s} - X_t$  tem distribuição normal com média 0 e variância  $s$ .

(c) Com probabilidade 1, as trajetórias  $t \mapsto X_t(\omega)$  são contínuas.

Observações:

(1) É evidente que (a) e (b) acima definem uma família consistente de distribuições finito-dimensionais.

(2) (a) e (b) podem ser descritos de modo mais sucinto como: os vetores  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  têm distribuição Gaussiana ( $\forall n \geq 1, 0 \leq t_1 < \dots < t_n < +\infty$ ) e  $EX_t = 0, EX_t X_s = t \wedge s, \forall s, t \geq 0$

(3) Heuristicamente, se  $X_t, t \geq 0$ , descreve o movimento de uma "partícula" em  $\mathbb{R}$ , e sendo

$$p(t; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right),$$

então, dado que no instante  $t$  a posição é  $x$ , i.e. dado que  $X_t = x$ , o movimento posterior é completamente independente do passado (anterior ao instante  $t$ ) e a probabilidade de que no instante  $t+h$  ( $h > 0$ ) a partícula esteja em um intervalo  $I$  é dada por

$$\int_I p(h; x, y) dy. \text{ Em particular vale a propriedade de Markov:}$$

"independência entre o futuro e o passado, dado o presente".

(4) Não é trivial que exista um MB(0). O que está envolvido aqui é a construção de uma medida de probabilidade no espaço  $C_{\text{Def}}([0, +\infty), \mathbb{R})$  das funções contínuas de  $[0, +\infty)$  em  $\mathbb{R}$ .

Algumas datas são sugestivas: entre as observações do botanista R. Brown (1828) sobre o movimento de grãos de pólen em suspensão na água, e a primeira construção matematicamente formal do Movimento Browniano decorreram 95 anos. Tal construção foi obtida por Wiener, após o aparecimento das idéias de Borel (1909), bem como dos trabalhos de Lebesgue e Daniell, sobre integração.

Seja  $C = C([0, +\infty), \mathbb{R})$  e para  $t \geq 0$  sejam  $X_t(\omega) = \omega(t)$ ,  $\omega \in C$ . Seja ainda  $C^0 = \sigma(X_t : t \geq 0)$ . O resultado de Wiener pode ser assim enunciado:

Teorema (1923)

Existe uma única probabilidade  $P^0$  no espaço  $(C, C^0)$ , tal que para todo  $n \geq 1$ , todo  $B \in \beta^n$  ( $\beta^n = \sigma$ -álgebra de Borel em  $\mathbb{R}^n$ ) e  $\forall 0 < t_1 < \dots < t_n < +\infty$

$$P^0 \{ \omega : (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega)) \in B \} = \int_B P(t_1; 0, x_1) P(t_2 - t_1; x_1, x_2) \dots P(t_n - t_{n-1}; x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

e tem-se  $P^0(X_0 = 0) = 1$ .

Observação. Atualmente várias são as maneiras em que se sabe provar tal teorema; uma referência para o leitor seria o livro de Breiman [8], entre outras tantas, que pode consultar, se precisar. Uma outra construção do MB(0) pode também ser encontrada em Breiman.

De modo completamente análogo, definimos MB(x) — Movi

mento Browniano começando em  $x$ , no instante 0, substituindo (a) na Definição 1.1 por  $P(X_0=x) = 1$ . Obviamente, a partir do Teorema de Wiener podemos definir, em  $(C, C^0)$ , família de probabilidades  $(P^x, x \in \mathbb{R})$  tal que sob  $P^x$ ,  $(X_t; t \geq 0)$  é um MB(x) onde  $X_t(\omega) = \omega(t)$ ,  $\omega \in C$ . Tal sistema  $(C, C^0, (X_t), \{P^x\})$  é, em geral, chamado de Movimento Browniano "canônico" ou ainda de "representação canônica". Não nos preocupamos em discutir tal terminologia.

Obviamente, se  $(X_t; t \geq 0)$  é MB(0) em algum espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , então vale a propriedade de Markov com relação às  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_t^0 = \sigma(X_s; s \leq t)$ ; na verdade é imediato que  $(X_{t+h} - X_t; h \geq 0)$  é MB(0) completamente independente de  $\mathfrak{F}_t^0$ . Vale mesmo bem mais do que isto (não-trivial): em cada "tempo de parada" finito  $T$  com relação a  $(\mathfrak{F}_t^0)$  [ou pode mesmo tomar certas  $\sigma$ -álgebras  $(\mathfrak{F}_t)$  um pouco maiores] tudo recomeça como no início e completamente independente do "passado até  $T$ ". Para a definição precisa dos termos envolvidos aqui, o leitor pode consultar o apêndice, se quiser. Mas, por hora, basta pensar heurísticamente, supondo o tempo (aleatório)  $T$  seja "honesto" no sentido de que o evento  $\{\omega: T(\omega) \leq t\} \in \mathfrak{F}_t^{0(*)}$ . Ver o apêndice, ou ainda, para mais informações, consultar D. Williams (1979).

Consideremos novamente  $(C, C^0, (X_t), \{P^x\})$  o Movimento Browniano "canônico"; convém ressaltar que neste caso o espaço de probabilidade  $C$  está dotado de operadores de translação  $\theta_t, t \geq 0$  definidos por  $(\theta_t \omega)(s) = \omega(s+t)$

$(\theta_t: C \rightarrow C; \theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s})$ . Temos pois:  $X_{t+s}(\omega) = X_t(\theta_s \omega)$ ,  $s, t \geq 0$

(\*) Se, ademais  $T < +\infty$  q.c., então  $\{X_{T+h} - X_T; h \geq 0\}$  é MB(0), independente do "passado até  $T$ ".

e a propriedade de Markov (simples) pode ser expressa por:

se  $B \in \mathcal{C}^0$ ,  $t \geq 0$

$$P^X(\theta_t^{-1}(B) \mid \mathcal{F}_t^0) = P^{X_t}(B) \quad \text{q.c.}(P^X)$$

$$(\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s : s \leq t))$$

Até afirmação em contrário, seja  $(X_t : t \geq 0)$  um MB(0) definido em certo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , espaço de probabilidade completo (sem perda de generalidade). Como parte de seu profundo trabalho sobre Movimento Browniano, P. Lévy (1948) considerou o problema de "medir" o tempo que o processo tem gasto na posição zero. Sendo  $V(\omega) = \{s \geq 0 : X_s(\omega) = 0\}$  ( $\omega \in \Omega$ ), o conjunto de visitação a  $\{0\}$ , e  $V_t = V \cap [0, t]$  ( $t > 0$ ), é bem sabido que, com  $P$ -probabilidade 1: para todo  $t > 0$

i)  $V_t$  é fechado, sem pontos isolados, e portanto não-contável;

ii)  $V_t$  tem medida de Lebesgue nula.

Assim sendo,  $\#V_t$  e  $\lambda(V_t)$  não servem como medida do tempo gasto em 0. (\*) Lévy mostrou ser possível construir outra escala temporal.  $(L_t^0(\omega) : t \geq 0)$  — o tempo local em 0 — que desempenha a função de "medir"  $V_t$ . Para um tal  $(L_t^0)$ , as seguintes propriedades seriam desejadas:

(1)  $L_0^0 = 0$ ,  $t \rightsquigarrow L_t^0$  é crescente, contínua e  $L_t^0 < +\infty$  q.c.(P);

(2) Com probabilidade 1, o suporte da medida determina-

---

(\*)  $\lambda$  denota medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}$ .

da por  $L^0$  é idêntico a  $V$  (i.e. os "pontos de crescimento estrito correspondem às visitas a  $\{0\}$ ).

Ademais, se (como na representação canônica) o espaço  $\Omega$  estiver munido de uma família de operadores  $(\theta_t)$ , de modo que  $X_{t+s}(w) = X_t(\theta_s w)$ , seria também razoável requerer:

(3) com probabilidade 1,  $L_{t+s}^0(w) = L_t^0(w) + L_s^0(\theta_t w)$ ,  $s, t \geq 0$  ("homogeneidade" de  $L^0$ ).

(1) e (3) definem o que se chama "Funcional Aditivo contínuo (Perfeito)". (Notação: F.A.C.)

Observação: Na verdade (1), (2) e (3) determinam  $(L_t^0)$  univocamente, a menos de constante multiplicativa. (Por enquanto o leitor não precisa se preocupar com isto).

Lévy deu várias definições para o tempo local Browniano. Uma observação crucial para suas construções foi a de que, sob  $P$ , os processos

$$(|X_t| : t \geq 0) \quad \text{e} \quad (\bar{X}_t : t \geq 0)$$

induzem a mesma lei em  $(C, C^0)$ , onde

$$\bar{X}_t \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0 \leq s \leq t} X_s - X_t, \quad t \geq 0.$$

É a isto que se costuma chamar "apresentação de Lévy do Movimento Browniano refletido em  $[0, +\infty)$ ".

Consequentemente, os conjuntos aleatórios (fechados)

$$V(w) = \{t : |X_t| = 0\} \quad \text{e} \quad \bar{V}(w) = \{t : \bar{X}_t = 0\}$$

têm a mesma lei (sob P). Por outro lado, o processo M, definido por  $M_t = \max_{s \leq t} X_s$ ,  $t \geq 0$  tem as propriedades que queremos, com  $\bar{V}$  no lugar de V. O que permite, a partir daí, a obtenção de  $(L_t^0)$  como desejado, é um importantíssimo resultado de Lévy mostrando que  $(M_t)_t$  pode ser reconstruído a partir de  $\bar{X}$ , i.e. é mensurável em  $\sigma(\bar{X}_t; t \geq 0)$ . É o que está contido em (1.1) abaixo - resultado, já clássico, de Lévy, onde ele mostra que M é intrínseco a  $\bar{V}$ . Pode-se dizer que foi isto que deu o impulso inicial ao estudo de tempos locais.

O resultado baseia-se na seguinte observação relativa aos tempos de passagem

$$E_a \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{t > 0 : X_t = a\} \quad , \quad a \geq 0 \quad ,$$

que constituem (como função de "a") a inversa contínua à esquerda de  $t \rightsquigarrow M_t$ . Se  $(D_a)$  denota a inversa contínua à direita, i.e.  $D_a = \inf \{t > 0 : M_t > a\}$ ,  $a \geq 0$  então  $E_a = D_{a-}$ ,  $a \geq 0$  e  $(D_a; a \geq 0)$  define, sob P, um subordinador estritamente estável, com índice 1/2.

Aqui, estamos usando a seguinte definição usual:

Definição 1.2. Um subordinador é um processo com incrementos independentes e estacionários e com trajetórias crescentes e contínuas à direita.

O caso estritamente estável com índice 1/2 corresponde ao caso em que a medida de Lévy do processo é

$$\begin{aligned} \nu(dx) &= c x^{-3/2} dx \quad \text{em } (0, +\infty) \\ &= 0 \quad \text{em } (-\infty, 0] \quad , \quad \text{algum } c > 0 \end{aligned}$$



e que não há "drift" i.e.

$$E e^{-\lambda D_a} = \exp \left\{ -a \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \nu(dx) \right\}, \quad a \geq 0,$$

$\lambda > 0$ . No caso, o leitor pode verificar que  $c = 1/\sqrt{2\pi}$ . (Isto pode ser verificado facilmente com o auxílio das "martingales"  $\exp(\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2} t, t \geq 0)$ ).

Voltemos pois, ao argumento de Lévy: se  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots$  são os intervalos abertos e disjuntos (dependem de  $\omega \in \Omega$ ) tais que

$$[0, +\infty) \setminus \bar{V} = \bigcup_{n \geq 1} \bar{e}_n, \quad \text{observe que}$$

"os saltos de  $(T_a)$  (ou  $(D_a)$ ) correspondem a estes intervalos contíguos a  $\bar{V}$ , i.e. aos intervalos onde  $M_t$  não cresce". Pode-se então obter: ( $|\bar{e}_n|$  = comprimento de  $\bar{e}_n$ )

$$(1.1) \quad \sqrt{\frac{\pi \epsilon}{2}} \# \{n: \bar{e}_n \subseteq (0, t], |\bar{e}_n| > \epsilon\} \xrightarrow[\epsilon \downarrow 0]{} M_t, \quad \forall t \geq 0,$$

q.c.(P).

Para verificar (1.1) note o seguinte: sendo  $(E_a)_{a \geq 0}$  como acima

$$E_a = \int_0^a y N([0, a] \times dy) \quad (E_a = D_{a-})$$

onde  $N(daxdy)$  é processo pontual de Poisson em  $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R} \setminus 0)$  com intensidade  $\lambda \times \nu$  ( $\lambda$ =Lebesgue). Deste modo, as variáveis aleatórias

$$N([0, b] \times (\epsilon, +\infty)) = \# \{a: 0 < a < b, D_a - D_{a-} > \epsilon\}$$

tem a distribuição de Poisson com média  $b \cdot \nu(\epsilon, +\infty)$ . Usando a lei forte dos grandes números: com probabilidade 1,

$$\frac{N([0, b] \times (\epsilon, +\infty))}{v(\epsilon, +\infty)} \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} b, \text{ para } b \geq 0$$

Tomando  $M_t^0$  no lugar de  $b$  e notando que

$$|N[0, b] \times (\epsilon, +\infty) - \# \{n: \bar{e}_n \subseteq (0, t], |\bar{e}_n| > \epsilon\}| \leq 1$$

o resultado se segue, uma vez que  $v(\epsilon, +\infty) = \sqrt{2/\pi\epsilon}$ .

Segue-se então que  $(L_t^0)$  pode ser definido através de:

$$(1.2) \quad P \left[ \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{2}} \# \{n: e_n \subseteq (0, t], |e_n| > \epsilon\} \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} L_t^0, \text{ para todo } t \geq 0 \right] = 1,$$

onde  $e_n, n \geq 1$  são os intervalos abertos e disjuntos tais que

$$[0, +\infty) \setminus v = \bigcup_n e_n.$$

Nomenclatura:  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} L_t^0$  é o que Lévy chamou "mesure de voisinage".

Definições equivalentes são obtidas através de:

((1.4) e (1.5) são as mais difíceis de se provar).

$$(1.3) \quad P \left[ \lim_{\epsilon \downarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{2\epsilon}} \sum \{ |e_n| : e_n \subseteq (0, t], |e_n| < \epsilon \} = L_t^0, t \geq 0 \right] = 1$$

$$(1.4) \quad P \left[ \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \lambda \{ s \leq t : |X_s| \leq \epsilon \} = L_t^0, t \geq 0 \right] = 1$$

ou ainda (Ito e Mc Kean) :

$$(1.5) \quad P \left[ \lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon d_\epsilon(t) = L_t^0, t \geq 0 \right] = 1$$

onde  $d_\epsilon(t) = \# \{ \text{"downcrossings" de } (0, \epsilon], \text{ por } (|X_s|, s \leq t) \}$ .

i.e. o nº de vezes que  $|X_s|, s \leq t$  desce de  $\epsilon > 0$  a 0.

Observações. (1) Outras caracterizações semelhantes são possíveis.

H.M. Taylor colocou-as sob um "aparato geral".

(2) Em cada item acima [(1.1) - (1.5)], tem-se, na verdade, convergência uniforme nos compactos devido a argumento tipo Glivenko - Cantelli, que é bem conhecido.

Seja  $x \in \mathbb{R}$ . Considerando que sob  $P, (|X_t - x|, t \geq 0)$  é um Movimento Browniano refletido em  $[0, +\infty)$  (iniciando em  $|x|$ ) podemos definir  $(L_t^x)$  em função deste processo do mesmo modo que  $(L_t^0)$  foi definido em função de  $(|X_s| : s \leq t), t \geq 0$ . Por exemplo, via:

$$(1.6) \quad P \left[ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon d_\varepsilon^x = L_t^x, t \geq 0 \right] = 1, \text{ onde}$$

$d_\varepsilon^x = \#$  {"downcrossings" de  $(0, \varepsilon]$  pelo processo  $(|X_s - x|, s \leq t)$ .  
[o fato de começar em  $|x|$  não é problema].

Deste modo, obteríamos um processo  $(L_t^x)_t$  tal que

(1)  $L_0^x = 0, t \rightarrow L_t^x$  é crescente, contínua e  $L_t^x \leq +\infty$  q.c.(P),

(2) Os pontos de "crescimento estrito" correspondem ao conjunto  $\{t : X_t = x\}$ ,

(3) Se  $(X_t)$  for Movimento Browniano "canônico",  $L_t^x$  é F.A.C. .

O problema com tal definição está em que o conjunto  $P$  - nulo envolvido em (1.6) depende de  $x$  - a definição é feita separadamente para cada  $x$ . Trotter resolveu o problema mostrando que o processo estocástico a dois parâmetros  $(L_t^x : x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$  admite uma modificação - que denotaremos por  $(L(x, t))_{x, t}$  - com trajetórias contínuas em  $(x, t)$  e tal que:

$$(i) \lim_{b \downarrow a} \frac{\lambda\{s \leq t : a \leq X_s < b\}}{b-a} = L(a, t), \quad t \geq 0, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \int_0^t I_{[a, b)}(X_s) ds = \int_a^b L(x, t) dx, \quad t \geq 0, \quad a < b \text{ reais},$$

e (iii) se  $(X_t)$  for o Movimento Browniano "canônico", (\*)

$$L(x, t+s, \omega) = L(x, s, \omega) + L(x, t, \theta_s \omega), \quad s, t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

para todo  $\omega$  fora de certo conjunto  $N$  com  $P^0(N) = 0$ .

Observação: O resultado acima é não-trivial.

O tempo local acima é o dobro do usado por muitos autores (e.g. Ito e Mc Kean [13]), que em (1.6) tomariam

$\frac{1}{2} \lim_{s \downarrow 0} s \cdot d_s^x(t)$ ; aliás, aceitando-se (por convenção)  $M_t$  como a normalização "correta" para o tempo local em zero do M.B. refletido do  $(\bar{X}_t)$ , a normalização de Ito e McKean seria a mais "adequada" para o tempo local do Movimento Browniano usual (não-refletido). Isto não tem importância.

Seria conveniente ressaltar que, de fato, o conjunto  $V = \{t \geq 0 : X_t = 0\}$  pode ser recuperado através de  $L_t^0$ . Isto porque, se  $(R_s : s \geq 0)$  é a inversa contínua à direita de  $L_t^0$ , então  $(R_s)_s$  é um subordinador (cuja distribuição já conhecemos) e, com probabilidade 1,

$$\{R_s : s \geq 0\} = V - \{a_n : n \geq 1\},$$

onde  $a_n =$  extremo esquerdo de  $e_n$ ,  $n \geq 1$

Como isto se aplica a qualquer  $(L_t^0)$  verificando (1),

(\*) O que importa é a existência de operadores  $(\theta_t)$  como na representação "canônica" ([6], [7]).

(2) e (3) das páginas 6 e 7, o argumento mostra que de fato um tal  $(L_t^0)$  ficaria determinado a menos de uma constante multiplicativa (com probabilidade 1).

Note-se que o resultado de Trotter mostra um outro papel desempenhado pelo tempo local Browniano: o de densidade ocupacional (cf.(ii) acima). [Isto já fora enunciado por Lévy (1940's), mas a prova rigorosa só apareceu com Trotter (1958)].

No estudo do comportamento local das trajetórias de um processo, a existência de densidade ocupacional contínua tem importantes e imediatas aplicações — um fato notado por Berman (1969). Na seção 3, onde trataremos de processos de Lévy a 2 parâmetros voltaremos ao assunto.

O resultado de Trotter tem-se mostrado uma ferramenta utilíssima no estudo de difusões em  $\mathbb{R}$ . Para exemplos de tais aplicações uma referência básica é o livro de Ito e McKean (1965).\*

Mas, obviamente, o estudo do tempo local Browniano não parou por aí. Profundas propriedades acerca do comportamento de  $L(x,t)$  como função do parâmetro  $x$  têm sido investigadas por vários pesquisadores, destacando-se principalmente Ray (1963), Knight(1963), D.Williams (1969) e Silverstein (1968). Uma propriedade admirável e (talvez) surpreendente é a de que para certos tempos de parada terminais  $T$ (ex.: os tempos de passagem) o

---

(\*) Em dimensão  $\geq 2$  o instrumento mais poderoso para o estudo de difusões é integração estocástica.

processo  $(L(x,T), 0 \leq x \leq 1)$  é Markoviano. Para estes resultados referimos também a Mc.Kean (1975), onde ele expõe os métodos de D. Williams; ou ainda a Walsh (1976).

As idéias iniciais de P. Lévy sobre tempos locais foram (e continuam a ser) vastamente exploradas e desenvolvidas. A partir do caso Browniano, a teoria dos tempos locais para processos  $(X_t)_{t \geq 0}$  desenvolveu-se em pelo menos dois aspectos diferentes:

(I). Para x fixo,  $L^x$  como medida do tempo gasto em x:

$$L_0^x = 0, \quad t \rightsquigarrow L_t^x \uparrow, \quad \text{contínua, } L_t^x < +\infty \text{ e com}$$

$\{t : X_t = x\}$  = suporte da medida determinada por  $L^x$ .

(II).  $\{L(x,t) : x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$  como densidade da medida ocupacional, i.e., com probabilidade 1:

$$\lambda\{s \leq t : X_s \in A\} = \int_A L(x,t) dx, \quad \text{para todo } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{ todo } t \geq 0.$$

O ponto de vista adotado em (I) desenvolveu-se principalmente no contexto de processos de Markov, onde  $L^x$  é definido como um "Funcional Aditivo Contínuo Perfeito" de X, (F.A.C.) cujo suporte seja  $\overline{M_x}$ . ( $M_x = \{t : X_t = x\}$ ) A terminologia aqui usada segue Blumenthal e Gettoor (1964).

Sendo  $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), (\theta_t), (X_t), \{P^x\})$  um processo de Markov "standard" com valores em  $(E, \mathcal{E})^{(*)}$ , Blumenthal e Gettoor

---

(\*) Para simplificar tomamos  $E =$  algum intervalo de  $\mathbb{R}, \mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$

usaram métodos de Teoria do Potencial para construir  $L^X$ .

Definição. Se  $x \in E$  é tal que  $P^X(T_x=0) = 1$ , onde

(1.7)  $T_x = \inf\{t > 0 \mid X_t = x\}$ ,  
dizemos que  $x$  é regular para  $\{x\}$  (ou, apenas, regular).

(1.8) Se  $x$  é regular para  $\{x\}$ ,  $L^X$  pode ser definido como o único "Funcional Aditivo Contínuo Perfeito" de  $X$  tal que

$$E^y \int_0^{+\infty} e^{-t} dL_t^X = E^y e^{-T_x}, \text{ para todo } y \in R. [6]$$

$L^X$  será por nós chamado "o tempo local em  $x$ , à Blumenthal e Gettoor". Que isto tem a ver com (I) e que portanto o nome fica justificado, segue-se do seguinte fato (Blumenthal e Gettoor, [7]): se  $x$  é regular e

$$I_x = \{t : L_{t+\epsilon}^X - L_t^X \geq 0, \forall \epsilon > 0\}$$

$$J_x = \{t : L_{t+\epsilon}^X - L_{t-\epsilon}^X > 0, \forall \epsilon > 0\}$$

então para todo  $w$  fora de um certo conjunto nulo em  $\mathfrak{F}$ ,

$$I_x(w) \subseteq M_x(w) \subseteq J_x(w)$$

(em particular, segue-se que a medida determinada por  $L^X$  está concentrada em  $M_x$ ).

Obs. Se o leitor não tiver qualquer familiaridade com a Teoria dos processos de Markov, aconselho a que apenas dê "uma olhada" nos resultados referentes ao tempo local à Blumenthal e Gettoor. É mais importante que fique com idéias mais precisas sobre o caso browniano e outros casos mais simples do que iniciar logo

com coisas mais gerais.

Caracterizações intrínsecas, análogas a (1.2) e (1.3), para  $(L_t^X)$  foram dadas por Kingman (1973) Maisoneuve (1976). Pitman (1978) dá construção mais direta; usando a generalização de (1.2) para construir o tempo local em 0, ao invés de usar o resultado de Blumenthal e Gettoor i.e., sem assumir a existência do tempo local. Usa aqui a teoria dos conjuntos aleatórios regenerativos (na verdade equivalentes aos "zeros" de um processo de Markov).

Aqui a construção é extremamente simples e intuitiva — o que é uma vantagem enorme sobre os resultados clássicos de Blumenthal e Gettoor. Espero que no Colóquio possa dizer algumas palavras a mais sobre esta construção devida a Pitman.

Na Seção 3 estaremos considerando apenas o aspecto II; daremos, então, alguns resultados recentes sobre a existência de densidade ocupacional com trajetórias conjuntamente contínuas, no caso de certos processos de Lévy a dois parâmetros,  $(X_{s,t}; s \geq 0, t \geq 0)$ . Por isso, deferimos para lá maiores comentários acerca de (II), limitando-nos a mencionar a importante conexão entre o comportamento das trajetórias  $t \rightsquigarrow X_t(\omega)$  e o das  $(x,t) \rightsquigarrow L(x,t)$ . É este um fato geral, notado por Berman, envolvendo funções reais: quanto mais suaves forem as trajetórias  $(x,t) \rightarrow L(x,t)$ , mais irregulares serão as de  $X$ , a grosso modo.

O "approach" de Berman (1970) para construção de densidade ocupacional baseia-se em Análise de Fourier e será utilizado



na Seção 3. Geman e Horowitz usam um método mais direto com base em diferenciação de medidas; há ainda métodos baseados em "martingales". Referências sobre os vários trabalhos são encontradas no "survey" de Geman e Horowitz (1980).

No âmbito de processos de Markov, é interessante saber se — como ocorre no caso Browniano — os tempos locais  $(L_t^X)$  de Blumenthal e Gettoor podem ser escolhidos mensuravelmente em  $(x, t, \omega)$  e se dão origem a densidades ocupacionais. Nesta direção há um importante resultado de Gettoor e Kesten (1972). Seja  $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), (\theta_t), (X_t), \{P^x\})$  um "processo de Markov standard" (i.e., mas "condições usuais"), com valores em  $(E, \mathcal{E})$  como antes.

Seja

$$\psi^1(x, y) = E^x e^{-T_y},$$

com  $T_y$  definido por (1.7),  $x, y \in E$ .

Assumindo que

$(x, y) \rightarrow \psi^1(x, y)$  seja  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ -mensurável, eles provam:

Teorema 1.2 (Gettoor e Kesten). Se para cada  $x \in E$ ,  $x$  é regular para  $\{x\}$  (i.e.  $P^x(T_x=0), \forall x$ ) e se  $\xi(dx)$  é uma medida de referência em  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , então para cada  $x$ , seja  $L^x$  definido por (1.8). Pode-se tomar versão de  $(L_t^x)$  tal que

(i)  $(t, x, \omega) \rightarrow L_t^x(\omega)$  é  $\mathcal{B}([0, s]) \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}_s$ -mensurável, quando considerada em  $[0, s] \times E \times \Omega$ .

(ii)  $t \mapsto L_t^x(\omega)$  é crescente, contínua à esquerda;

(iii)  $L^x$  é F.A.C., para cada  $x$ ;

(iv) Existe  $g: E \rightarrow (0, +\infty)$  mensurável em  $\mathcal{E}$ , tal que  $g(x)L_t^x$  serve como densidade ocupacional com relação a  $\xi$ , i.e., para certo  $N \in \mathfrak{F}$ , com  $P^x(N) = 0$  para todo  $x$ , tem-se

$$\int_A g(x)L_t^x(\omega) \xi(dx) = \mu(A, t, \omega), \text{ se } \omega \notin N,$$

onde 
$$\mu(A, t) = \int_0^t I_A(X_s) ds.$$

Observações.

(1) No caso de processos de Lévy em  $\mathbb{R}$  o teorema se simplifica ( $g$  é constante). É o caso que nos interessa particularmente, na seção seguinte.

(2) O teorema acima tem uma recente extensão (por Geman e Horowitz (1980)), que fornece a decomposição de Lebesgue de  $\mu(\cdot, t)$  com relação a  $\xi$ .

Em  $E$ , consideremos :

$E_p = \{y \in E : E^x \text{ e } {}^{-T}y = 0, \text{ todo } x \in E\}$ , o conjunto dos pontos polares.

$$E_r = \{x \in E : x \text{ é regular para } \{x\}\}$$

$E_i =$  complemento de  $E_r \cup E_p$  em  $E$ . (irregulares, mas não polares).

Sabe-se que se  $x \in E_i$ , então fora de um certo conjunto nulo em  $\mathfrak{F}$ , tem-se que

O nº de visitas a  $\{x\}$  em  $(0, t]$  é finito, para todo  $t > 0$ .

Desta forma, seja  $L(x,t) = \#\{s \leq t : X_s = x\}$ , se  $x \in E_i$ .

Para  $x \in E_r$ , seja  $L(x, \cdot)$  o F.A.C. de  $X$  definido em (1.8).

Para  $x \in E_p$ , seja  $L(x, \cdot) \equiv 0$ .

Geman e Horowitz observam que podemos supor:

$(s, x, \omega) \rightarrow L(x, s, \omega)$  em  $[0, t] \times E \times \Omega$  é mensurável com relação ao completamento universal de  $\mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}_t$ . Ademais, eles provam:

Teorema 1.3 (Geman e Horowitz)

A decomposição de Lebesgue de  $\mu(\cdot, t)$  com relação a  $\xi$  ( $\xi$  = medida de referência finita) é:

$$\mu(\cdot, t) = \mu(\cdot \cap \tilde{E}, t) + \mu(\cdot \cap E_p, t)$$

onde  $\tilde{E} = E_r \cup E_i$ ; ademais

$$\mu(\cdot \cap E_p, t) \perp \xi$$

$$\mu(A \cap \tilde{E}, t) = \int_A g(y) L(y, t) \xi(dy)$$

para certa  $g: E \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $\mathcal{E}$ -mensurável.

(Obs. Está implícito: fora de um conjunto nulo de  $\omega$ 's, a decomposição vale para todo  $t > 0$ , onde dizemos que  $N \in \mathcal{F}$  é "nulo" se  $P^X(N) = 0, \forall x$ .

Observação

Sob condições bem gerais, se  $\mu(\cdot, t) \ll \xi$  para todo  $t > 0$  então  $\xi$  é uma medida de referência. Portanto não há gran-

de perda em supô-la como tal no teorema acima.

Continuação do Teorema 1.2 de Gettoor e Kesten:

No caso de  $(E, \mathcal{E})$  ser um intervalo de  $\mathbb{R}$ , e  $\mathcal{E}$  sua usual  $\sigma$ -álgebra de Borel, Gettoor e Kesten completaram o Teorema 1.1, mostrando que:

se  $\int_0^1 u^{-1} p(u) du < +\infty$  onde

$$(1.9) p(u) = \sup_{\substack{x, y \in E \\ |x-y| \leq u}} [1 - \psi^1(x, y) \psi^1(y, x)]^{1/2}, \text{ então}$$

$L_t^X(w)$  pode ser escolhido de modo que  $(x, t) \rightarrow L_t^X$  é contínua e crescente em  $t$ , com  $P^y$ -probabilidade 1,  $\forall y$ .

[Obs. Tal resultado é uma aplicação importante da conhecida "técnica de Garsia" para estudar continuidade das trajetórias de processos estocásticos a vários parâmetros.]

No caso de processos de Lévy com valores em  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , os resultados são ainda mais completos, fornecendo também uma condição necessária para a continuidade do tempo local — que Millar e Tran mostraram ser também necessária para que  $L_t^X$  seja limitado. Agora, há ainda um difícil problema a resolver: preencher a lacuna entre as condições necessária, e suficiente dadas por Gettoor e Kesten. Note-se ainda que no caso de processos de Lévy,  $\psi^1(x, y) = \psi^1(0, y-x) \stackrel{\text{Df}}{=} \psi^1(y-x)$  e que podemos tomar  $g(y) = u^1(0), \forall y$ , onde  $u^1$  é a densidade do 1-potencial de  $X$ . (Gettoor, Kesten(1972))

O resultado de Gettoor e Kesten para proc. de Lévy (suficiência) será usado na seção 3; aliás não basta "usar seus re-

sultados", mas é preciso reconsiderar o argumento usado.

Comentários. (1) O tempo local Browniano admite ainda uma importante representação via integrais estocásticas de Ito: é a "fórmula de Tanaka" que, aliás permite uma prova simples do resultado de Trotter. A representação é

$$L(x,t) = |X_t - x| - |X_0 - x| - \int_0^t I_{[X_s \neq x]} dX_s$$

com  $(X_t: t \geq 0)$  Movimento Browniano

i.e.,  $L(x, \cdot)$  é o "compensador" da "submartingale"

$(|X_t - x|, t \geq 0)$  - i.e. processo crescente, contínuo, igual a zero em  $t=0$  e tal que  $(|X_t - x| - L(x,t), t \geq 0)$  é "martingale". [Tomar como a def. de "compensador". Ver Meyer (1975)]

Tal idéia tem sido muito generalizada a "semimartingales", constituindo-se em um outro enfoque para "tempos locais". A grosso modo, se  $(X_t)$  é "martingale" de quadrado integrável, tal nos leva à obtenção de densidades ocupacionais relativas à medida  $d_t \langle X^c, X^c \rangle(t, \omega)$ , onde  $X^c$  é a parte contínua de  $X$  e  $\langle X^c, X^c \rangle$  é o processo crescente contínuo associado ("compensador" de  $(X^c)^2$  i.e.,  $\langle X^c, X^c \rangle_0 = 0$ , é crescente, contínuo e  $(X^c)^2 - \langle X^c, X^c \rangle$  é "martingale").

## §2. Processos de Lévy a dois parâmetros.

Daqui em diante a expressão "tempo local" será usada no sentido de densidade ocupacional, apenas (com relação à medida de Lebesgue).

Passemos a considerar processos aleatórios, indexados por  $\mathbb{R}_+^2 = \{(s,t) : s \geq 0, t \geq 0\}$  e com incrementos (sobre retângulos) independentes e estacionários — chamados processos de Lévy a dois parâmetros. Na próxima seção focalizaremos o interesse no problema de existência de tempos locais com trajetórias contínuas.

Mais precisamente, trabalharemos com processos estocásticos  $(X_z : z \in \mathbb{R}_+^2)$  em algum E.P.  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , com valores em  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) e tais que:

(a)  $X_{s,0} = X_{0,t} = 0$ , para todo  $s \geq 0, t \geq 0$  (i.e., tomamos  $X \equiv 0$  nos "eixos").

(b) Se  $A = (s, s'] \times (t, t'] \subseteq \mathbb{R}_+^2$ , colocamos

$$X(A) \stackrel{\text{Df}}{=} X_{s',t'} - X_{s,t'} - X_{s',t} + X_{s,t}.$$

Então, para todo retângulo  $A$  desta forma, e para  $z_0 \in \mathbb{R}_+^2$ ,

$X(A)$  e  $X(A+z_0)$  têm a mesma distribuição

$$(A+z_0 = \{u+z_0 : u \in A\})$$

(c) Se  $n \geq 1$  e  $A_1, \dots, A_n$  são retângulos do tipo acima e disjuntos (2 a 2), então

$X(A_1), \dots, X(A_n)$  são variáveis aleatórias (estocasticamente) independentes. (Com valores em  $\mathbb{R}^d$ ).

O problema de construção (em espaço funcional adequado) e caracterização de tais processos foi resolvido por Straf(1972), pela utilização de  $D[0,1]^2$ , análogo bi-dimensional ao espaço de

Skorohod. Aqui, recordamos apenas os resultados básicos e indispensáveis para o posterior desenvolvimento. Para maiores detalhes (e provas) o leitor pode consultar a referência acima.

### Preliminares

(1) Por conveniência, usaremos as seguintes relações de ordem (parciais) em  $\mathbb{R}_+^2$ : para  $z = (s, t)$ ,  $z' = (s', t') \in \mathbb{R}_+^2$  (coordenadas retangulares) definimos

$$z \leq_1 z' \text{ se } s \leq s' \text{ e } t \leq t'$$

$$z \leq_2 z' \text{ se } s \leq s' \text{ e } t > t'$$

$$z \leq_3 z' \text{ se } s > s' \text{ e } t \leq t'$$

$$z \leq_4 z' \text{ se } s > s' \text{ e } t > t'.$$

Notação: Se na definição de  $z \leq_i z'$  todos os " $\leq$ " forem substituídos por " $<$ ", dizemos  $z <_i z'$  ( $i=1, \dots, 4$ ).

Seja ainda  $Q_i(z) = \{z' \in \mathbb{R}_+^2 : z \leq_i z'\}$ ,  $i=1, \dots, 4$ ,  $z \in \mathbb{R}_+^2$ .

(2)  $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}_+^2$ .  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de função "lamp" em E ("limits along monotone paths") se para qualquer sequência  $(z_n)_n \subseteq E$  tal que  $z_n \rightarrow z \in E$  monotonicamente com relação a alguma  $\leq_i$  tem-se que o  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$  existe em  $\mathbb{R}$ . Se  $E = \mathbb{R}_+^2$  dizemos apenas que  $f$  é "lamp". Dizemos que  $f$  é contínua por cima se para todo  $z$ ,  $z_n \rightarrow z$  com  $z_{n+1} \leq_1 z_n$  para todo  $n \geq 1$ , implica  $f(z_n) \rightarrow f(z)$ .

É então fácil ver que se  $f$  é "lamp" e contínua por cima e se  $z_0 \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $Q_i(z_0) \neq \emptyset$  então

$$L_f^i(z_0) \stackrel{\text{Df}}{=} \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in Q_i(z_0)}} f(z) \text{ existe em } \mathbb{R} \quad i=1, \dots, 4$$

$$\text{e } L_f^1(z_0) = f(z_0)$$

(3) Usaremos a seguinte notação:

$$D = D(\mathbb{R}_+^2) = \{f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é "lamp" e contínua por cima}\}$$

$$D_0 = \{f \in D \mid f=0 \text{ nos eixos}\}$$

Usando uma topologia análoga à de Skorohod para o espaço  $D[0,1]^2 \stackrel{\text{Df}}{=} \{f: f \text{ lamp em } [0,1]^2, \text{ contínua por cima restrita a } [0,1]^2\}$ , Straf mostrou:

Teorema 2.1 (Straf) Se  $F$  é distribuição infinitamente divisível em  $\mathbb{R}$  e  $\varphi$  denota sua função característica, podemos definir  $(X_Z: z \in \mathbb{R}_+^2)$  verificando (a), (b) e (c) acima, e contínuo em probabilidade, tal que

$$(2.1) \quad E e^{iu X_{s,t}} = [\varphi(u)]^{st} \quad s, t \geq 0, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Ademais,  $X$  pode ser construído com trajetórias em  $D_0$  (podemos tomar  $\Omega = D_0$  e  $X_Z(\omega) = \omega(z)$ ).

A recíproca é imediata: se  $(X_Z: z \in \mathbb{R}_+^2)$  é contínuo em probabilidade e verifica (a), (b) e (c) acima, então  $X_{s,t}$  e  $X_{st,1}$  tem a mesma distribuição. Portanto a função característica de  $X_{s,t}$  é da forma acima. Em particular,  $X$  pode ser construído com trajetórias em  $D_0$ .

(4) A unicidade em distribuição (sobre  $(D, \mathfrak{F})$ ) é imediata, para cada  $F$  distribuição infinitamente divisível. ( $\mathfrak{F}$  aqui é a



$\sigma$ -álgebra em  $D$  gerada pelas funções coordenadas).

(5) Definição 2.1. O que chamamos de processo de Lévy a dois parâmetros (com valores em  $\mathbb{R}$ ) é exatamente um processo estocástico como descrito pelo Teorema em (3) acima.

A extensão para processos com valores em  $\mathbb{R}^d$  é completamente óbvia. Notações:  $D(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}^d)$ ,  $D_0(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}^d)$ , com óbvios significados.

Uma discussão mais extensa sobre tais processos deverá aparecer em [25],[26].

Uma descrição de Lévy-Ito em termos de medidas aleatórias de Poisson em  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^2$  é válida. Isto dá uma maneira conveniente de "visualizar" tais processos.

(6) Notações.

(i) Se  $z <_1 z'$  em  $\mathbb{R}_+^2$ ,

$$(z, z'] \stackrel{\text{Df}}{=} \{ \tau : z <_1 \tau \leq_1 z' \},$$

$$[z, z'] \stackrel{\text{Df}}{=} \{ \tau : z \leq_1 \tau \leq_1 z' \}.$$

$[0, z]$  será denotado por  $R_z$  ( $0=(0,0)$  aqui).

(ii) Usaremos  $I$  para denotar o quadrado unitário,  $[0,1]^2$ .

(iii) Para  $S = R_{z_0}$ ,  $\mathbb{R}_+^2$ , ou  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{B}(S)$  denotará a  $\sigma$ -álgebra de Borel usual. Quando não for causar confusão  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  será denotado por  $\mathcal{B}$ , apenas.

(iv)  $\lambda_k$  denota a medida de Lebesgue em  $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B})$ .

Às vezes, escrevemos apenas  $\lambda$ , estando clara a dimensão a que nos referimos.

### Medidas de Ocupação

#### Definição 2.2.

Seja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma função boreliana. Para  $z \in I$ , consideremos a medida de ocupação de  $f$  em  $R_z$ , dada por

$$\eta(B, z) = \int_{R_z} I_B(f(\tau)) d\tau .$$

Se  $\eta(\cdot, (1,1)) \ll \lambda_d$ , dizemos que  $f$  tem tempo local em I. Ademais, se  $\varphi: \mathbb{R}^d \times I \rightarrow \mathbb{R}$  por tal que para todo  $z \in I$   $\varphi(\cdot, z)$  seja versão de  $d\eta(\cdot, z)/d\lambda$ , então  $\varphi$  é chamado tempo local para f em I.

Definição 2.3. Seja  $(X(z, \omega): z \in I, \omega \in \Omega)$  um processo estocástico (a valores em  $\mathbb{R}^d$ ) em  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , espaço de probabilidade completo, e tal que

$(z, \omega) \rightarrow X(z, \omega)$  seja  $\mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{F}$ -mensurável.

Se, com probabilidade 1,  $X(\cdot, \omega)$  tem tempo local em I, dizemos que  $X$  tem tempo local (T.L.) em I. Se, além disso  $(\varphi(x, z, \omega))$  for tal que para quase todo  $\omega \in \Omega$ ,  $\varphi(\cdot, \omega)$  é tempo local para  $X(\cdot, \omega)$ , dizemos que  $\varphi$  é um tempo local para X em I. [Equivalentemente: fora de um conjunto de probabilidade zero,

$$\int_B \varphi(x, z, \omega) dx = \int_{R_z} I_B(X(\tau, \omega)) d\tau$$

para todo  $z \in I$ , todo  $B \in \mathfrak{B}$  (simultaneamente).] Da mesma maneira, se tivermos  $R_{z_0}$  em vez de  $I$ . Valendo para todo  $z_0 \in \mathbb{R}_+^2$ , diremos que  $\varphi$  é tempo local para  $X$  (em  $\mathbb{R}_+^2$ ).

### Observações

(1) Um argumento bastante "standard" (Berman (1970) p. ex.) permite-nos dizer que se  $f$  (na Definição 2.2) tiver tempo local em  $I$ , então pode-se encontrar  $(\varphi(x,z))$  t.q.

(i)  $(x,z) \rightarrow \varphi(x,z)$  é mensurável

(ii)  $\forall x, \varphi(x, \cdot)$  pode ser extendida (unicamente) a uma medida  $\geq 0$  em  $\mathfrak{B}(I)$ , de modo que

$\varphi(x, R) = 0$  para todo  $R = (z_1, z_2]$ , com  $z_1 < z_2 \in \mathbb{Q}^2 \cap I$ . Tal  $\varphi$  é dito tempo local regular e mensurável.

Tem-se, então,

$$\int_I g(f(\tau), \tau) d\tau = \int_{\mathbb{R}^d} \int_I g(x, \tau) \varphi(x, d\tau) dx,$$

para toda  $g \geq 0$ , função de Borel em  $\mathbb{R}^d \times I$ .

(2) A observação acima e outros resultados "padrão" sobre derivadas de Radon - Nikodym para uma família de medidas nos permitem dizer que, nas condições da Definição 2.3, se  $X$  tem T.L., então existe  $(\varphi(x,z,\omega))$  conjuntamente mensurável (em  $(x,z,\omega)$ ) e tal que para quase todo  $\omega$ ,  $\varphi(\cdot, \omega)$  é tempo local regular de  $X(\cdot, \omega)$ .

Deixaremos de lado tais generalidades, concentrando-nos, ao invés, no problema de encontrar densidade ocupacional com trajetórias contínuas (em  $(x,z)$ ) para processos de Lévy a dois parâ

metros. Inicialmente usaremos o método de Berman, descrito a seguir.

### §3. Tempos Locais para processos de Lévy a dois parâmetros

#### O Método de Berman

Seja  $X$  como na Definição 2.3, e seja  $\eta(.,z,\omega)$  a medida de ocupação de  $X(.,\omega)$  em  $R_z$ ,  $z \in I$ . Considerando que sua transformada de Fourier-Stieltjes é

$$f_z(u,\omega) = \int_{R_z} e^{i u \cdot X(\tau,\omega)} d\tau, \quad u \in \mathbb{R}^d,$$

segue-se imediatamente que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_I \int_I |E e^{iu \cdot (X_z - X_{z'})}| dz dz' du < +\infty$$

implica a existência de tempo local  $\varphi$  (e que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^2(x, (1,1), \omega) dx < +\infty \text{ a.s.}).$$

A idéia de Berman (obviamente estendida à situação multiparamétrica) consiste em obter uma versão do T.L. via

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{m.q.} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-N,N]^d} e^{-i u \cdot x} f_z(u) du,$$

o que funciona sob certas condições. Estaremos pois, usando o seguinte resultado de Berman (estendido de modo óbvio):

---

(\*) "lim m.q." significa "limite em média quadrática"

Teorema 3.1. Se

$$\int_I \int_I \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |E \exp (i u \cdot X_{z_1} + i v \cdot X_{z_2})| du dv dz_1 dz_2 \text{ for. finita,}$$

existe  $(L(x, z))$  tal que

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ z \in I}} E |L_N(x, z) - L(x, z)|^2 \rightarrow 0 \text{ se } N \rightarrow +\infty .$$

Ademais,  $L$  pode ser tomado de modo que, para cada  $z \in I$ ,

$L(\cdot, z, \omega)$  é densidade de  $\eta(\cdot, z, \omega)$  q.c.,

Por simples cálculo pode-se verificar que o teorema acima é aplicável a  $X = (X_z : z \in \mathbb{R}_+^2)$  processo de Lévy, com valores em  $\mathbb{R}$ , se o índice inferior de  $X$  for maior do que 1, onde usamos a

Definição 3.1. Se a função característica de  $X_{1,1}$  é  $\varphi$ , com

$$\varphi(u) = e^{\Psi(u)} \text{ e}$$

$$(3.1) \quad \Psi(u) = i u \gamma - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus 0} (e^{i u x} - 1 - i u x I_{|x| \leq 1}) \nu(dx)$$

onde  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 \geq 0$  e  $\nu$  é medida de Lévy em  $\mathbb{R} \setminus 0$

$(\int (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < +\infty)$ ; diz-se que  $\Psi$  é o expoente de  $X$ .

O índice inferior de  $X$  é definido como: [Blumenthal, Gettoor (1961)]

$$\sup \{ a \geq 0 : |u|^{-a} \operatorname{Re} \Psi(u) \rightarrow -\infty \text{ quando } |u| \rightarrow +\infty \}$$

Acontece que nosso problema não fica resolvido pela simples aplicação deste resultado. Note-se que, no teorema acima,  $L$  não é necessariamente um tempo local para  $X$ . Para tal precisamos provar a existência de conjunto  $N \in \mathfrak{F}$ ,  $P(N) = 0$  tal que para  $\omega \notin N$ ,  $L(\cdot, z, \omega)$  seja densidade de  $\eta(\cdot, z, \omega)$  para

todo z simultaneamente. Porém, é fácil ver que se provarmos que  $(x,z) \rightarrow L(x,z)$  é contínua (q.c.) então  $L$  é na verdade um tempo local (e portanto um tempo local conjuntamente contínuo e regular).

No caso de um processo de Lévy (a dois parâmetros) em  $\mathbb{R}$ , com índice inferior maior do que 1, podemos provar a continuidade conjunta utilizando um lema clássico de Kolmogorov (para vários parâmetros). Tais resultados estão resumidos no teorema abaixo.

Teorema 3.2. [26] Seja  $X = (X_z : z \in \mathbb{R}_+^2)$  um processo de Lévy a dois parâmetros, com valores em  $\mathbb{R}$  e índice inferior maior do que 1. Para cada  $\epsilon > 0$ , o processo  $X^\epsilon$ , definido por  $X^\epsilon(s,t) = X(s,t+\epsilon)$ ,  $s,t \geq 0$  tem um tempo local conjuntamente contínuo (q.c.). Tal pode ser obtido por qualquer versão separável e mensurável de

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{m.q. } L_N^\epsilon(x,z, \cdot)^{(*)}, \text{ onde}$$

$$(3.1) \quad L_N^\epsilon(x,z,\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{-iux} \left( \int_{\mathbb{R}_z} e^{iu X^\epsilon(\tau,\omega)} d\tau \right) du$$

para  $x \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $\omega \in \Omega$ .

$X$  tem um tempo local  $(\mathcal{L}(x,z,\omega))$ , que é conjuntamente mensurável e, com probabilidade um,  $(x,z) \rightarrow \mathcal{L}(x,z)$  é contínua em  $(\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R}_+^2$ .

---

(\*) lim m.q. significa limite em média quadrática

Prova: Nesta curta apresentação emitiremos a prova, que pode ser encontrada em [26]. Aplica-se, como já foi dito, a clássica condição de Kolmogorov. Para tanto obtêm-se majorações para ( $m \geq 1$ )

$$(i) \quad E |L_N^\epsilon(x, s+h, t) - L_N^\epsilon(x, s, t)|^{2m},$$

$$(ii) \quad E |L_N^\epsilon(x, s, t+h) - L_N^\epsilon(x, s, t)|^{2m}, \quad e$$

$$(iii) \quad E |L_N^\epsilon(x+h, s, t) - L_N^\epsilon(x, s, t)|^{2m}.$$

Observação.

Para (i) e (ii) acima obtemos majorações convenientes que valem para qualquer  $\epsilon \geq 0$  (uniformes em  $\epsilon \geq 0$ ). Um "ponto negativo" da prova está na majoração para (iii), onde tivemos que recorrer às desigualdes análogas que teríamos para o processo

$$\varphi_N^\epsilon(x, s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{-iux} \left( \int_0^s e^{iu X_{r,t}} dr \right) du,$$

correspondente a  $X_{\cdot, t}$ , e integrando em  $(\epsilon, t+\epsilon]$ . O motivo para tomarmos isto como um "ponto negativo" não é a necessidade de considerarmos  $X^\epsilon$ , ao invés de  $X$ , mas sim a limitação que isto nos impõe quando estamos interessados em casos tais que o processo a um parâmetro não tem tempo local. [Bom, também em (i) e (ii) as majorações obtidas só servem para o caso de índice inferior  $> 1$ .] No entanto, se o índice inferior  $\alpha$  é maior que  $1/2$ , o processo de Lévy  $(X_z : z \in \mathbb{R}_+^2)$  em  $\mathbb{R}$  tem tempo local. Isto pode ser visto do seguinte modo: se  $\epsilon > 0$ , e  $Y^\epsilon$  é definido por  $Y^\epsilon(s, t) = X(s+\epsilon, t+\epsilon)$ , e  $f^\epsilon$  denota a transformada de Fourier

da medida ocupacional correspondente a  $(Y_z^{\epsilon} : z \in I)$  então

$$E \int |u|^p |f^{\epsilon}(u)|^2 du < +\infty \text{ para } p+1 < 2\alpha.$$

Outro caso que está a requerer nossos esforços é o caso de  $(X_z : z \in \mathbb{R}_+^2)$ , processo de Wiener a valores em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Para este caso, já tem aparecido, na literatura, tentativa de verificar a continuidade conjunta das trajetórias do tempo local, mas o problema continua em aberto.

### Uma aplicação ao estudo das trajetórias de X

Há uma importante conexão entre tempo local e o comportamento das trajetórias de X.

A seguir, exploramos tal conexão, para processos de Lévy a 2 parâmetros. Seja, então, X um processo como no Teorema 3.2 e denotemos por  $\alpha$  o seu índice inferior; estamos supondo  $\alpha > 1$ . Dos resultados sobre os tempos locais  $L^{\epsilon}$ , anteriormente considerados, seguir-se-á a seguinte proposição.

Proposição 3.1. Seja X nas condições acima. Se  $p > 1/\alpha$ , então para quase todo  $\omega \in \Omega$ :

(3.2)

$$\lim_{\substack{z' \rightarrow z \\ z' \in \mathbb{R}_+^2}} \text{ap} \frac{|X(z, \omega) - X(z', \omega)|}{\|z - z'\|^p} = +\infty \text{ para todo}$$

$$z \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$$

ou, em outras palavras, [tome isto como def. de "lim ap(...) = +∞"



$$\frac{\lambda\{z' \in \mathbb{R}_+^2 : \|z'-z\| \leq \delta, |X(z, w) - X(z', w)| \leq Q\|z'-z\|^p\}}{\lambda\{z' \in \mathbb{R}_+^2 : \|z'-z\| \leq \delta\}} \rightarrow 0$$

quando  $\delta \rightarrow 0$ , para todo  $Q > 0$  e todo  $z \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ .  
 ( $\lambda$  = medida de Lebesgue,  $\|\cdot\|$  = norma euclideana).

Nomenclatura. "lim a p." denota "limite aproximado" (Ver o apêndice de Geman, Horowitz (1980), por exemplo — mas não precisa disso para entender o enunciado do Teorema 3.2).

Observações.

(1) Obviamente (3.2) implica que, com probabilidade 1:

$$\overline{\lim}_{z' \rightarrow z} \frac{|X(z, w) - X(z', w)|}{\|z'-z\|^p} = +\infty \quad \forall z \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(2) Em geral (3.2) não vale em (0,0). Por exemplo: se  $X$  é estável com índice  $\alpha$  ( $\alpha > 1$ )

$$\overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow (0,0) \\ z \in \mathbb{R}_+^2}} \frac{|X_z|}{\|z\|^\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad +\infty \quad \text{q.c., conforme } \alpha < \text{ ou } \geq 2/\alpha.$$

(3) Para a prova da Proposição 3.1 utilizamos majorações para quantidades tais como  $E|L^\epsilon(x, s+h, t) - L^\epsilon(x, s, t)|^{2m}$ , etc. ... Algumas delas já foram diretamente obtidas (e utilizadas) na prova do Teorema 3.2 ("Th.2.1" em [26]); as outras são verificadas de modo semelhante.

Estas coisas possivelmente serão encontradas em [26].

A conexão entre "crescimento local aproximado" e tempos locais foi notado por Berman. O assunto tem sido estudado por vá

rios outros autores, entre os quais Geman e Horowitz. Estes dois autores, no recente artigo (1980) apresentam um excelente "survey" sobre densidades de ocupação.

Obtenção de tempos locais no plano através de tempos locais em retas.

Seja  $(X_z : z \in I)$  um campo aleatório mensurável (em  $(z, \omega)$ ), definido em  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  (um espaço de probabilidade completo) e com valores em  $\mathbb{R}^d$ . "É claro" (?) que se para  $\lambda_1$ -quase todo  $t \in [0, 1]$ , a medida  $\eta_t(B, \omega) = \int_0^1 I_B(X_s(\omega)) ds$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  for absolutamente contínua em relação a  $\lambda_d$ , com probabilidade 1, então (usando Fubini várias vezes) podemos integrar (em  $t$ ) versões convenientes de tempos locais para  $X_{\cdot, t}$ , e obter um tempo local para  $X \dots$

Porém, a questão que nos interessa é a da continuidade conjunta das trajetórias do tempo local; aí, o problema é muito mais delicado.

No caso de processos de Lévy a 2 parâmetros, é possível mostrar — resultado enunciado abaixo — que, sob as condições de Gettoor e Kestem para existência de tempos locais contínuos (ver continuação do Teo.1.2) podemos usar o procedimento acima, e obter um tempo local conjuntamente contínuo para  $(X_z^c : z \in \mathbb{R}_+^2)$ . ( $X^c$  como no Teorema 3.2).

Esta idéia de obter tempos locais no plano via tempos locais nas retas também já foi usada em um artigo de Walsh (1978(a)) onde ele prova a existência de densidade ocupacional

com trajetórias contínuas (em  $(x,z)$ ) para o caso de processo de Wiener (com dois parâmetros e valores em  $\mathbb{R}$ ). Neste caso, a representação do tempo local Browniano dada pela fórmula de Tanaka é particularmente útil, simplificando as coisas. Cairoli e Walsh (1975) tem também outra prova para o caso de  $(X_z : z \in \mathbb{R}_+^2)$  Wiener com valores em  $\mathbb{R}$ , através de integrais estocásticas.

Por conveniência, usamos a representação canônica de um processo de Lévy a 2 parâmetros em  $\Omega = D(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$ . Seja  $\Psi$  o "expoente" de  $X$ ,

$$\Psi(\lambda) = ia\lambda - \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus 0} (e^{i\lambda y} - 1 - i\lambda y I_{[|y| \leq 1]}) \nu(dy),$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ , onde  $\nu$  = medida de Lévy em  $\mathbb{R} \setminus 0$ ,  $\sigma^2 \geq 0$  e  $a \in \mathbb{R}$ .

Para  $X_{\cdot,t}$  podemos usar as construções de tempos locais (baseadas em Teoria do Potencial) de Blumenthal, Gettoor e Kesten. Para obtermos o teorema abaixo, não basta usar o resultado de Gettoor e Kesten para  $X_{\cdot,t}$ ; torna-se necessário "olhar mais de perto" o comportamento em  $t$ . Então integramos entre  $(\epsilon, t + \epsilon]$  os tempos locais nas linhas. A idéia é super-simples, mas os detalhes são bastante técnicos. Por isso, apenas enunciaremos o resultado, referindo a [26] para a prova.

### Teorema 3.3.

Seja  $X$ , como descrito nos últimos parágrafos. Se  $\sigma^2 > 0$  ou  $\nu(\mathbb{R} \setminus 0) = +\infty$  e 0 é regular para  $\{0\}$ , para o processo  $X_{\cdot,1}$  e, ademais, assumimos

$$\int_0^1 u^{-1} p_1(u) du < +\infty, \text{ onde } p_1(\cdot) \text{ é definida como}$$

em (1.9), mas com relação ao processo  $X_{\cdot,1}$ , então: para todo  $\epsilon > 0$ , o processo  $(X_z^\epsilon : z \in \mathbb{R}_+^2)$  em  $(\Omega, \mathfrak{F}, P^0)$  admite tempo local  $(L_\epsilon^x(s,t) : x \in \mathbb{R}, s, t \geq 0)$  t.q. com probabilidade 1,  $(x,s,t) \rightarrow L_\epsilon^x(s,t)$  é contínua.

Observação.

Uma aplicação muito simples da existência de densidade ocupacional é sobre "recorrência" de certos processos de Lévy a 2 parâmetros [26]. Neste tópico há no entanto muitíssimo para ser feito

Apêndice

Algumas definições e propriedades que nos foram necessárias na Seção 1. (Ref D.Williams (1979) Blumenthal e Gettoor (1964) - sendo este último mais pesado para ler).

Seja  $(X_t : t \geq 0)$  um MB(0) em algum Espaço de Probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}^0, P)$ . É trivial que tal processo tem a propriedade de Markov com relação às  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}_t^0 \triangleq \sigma(X_s : s \leq t)$ . No entanto é interessante - e necessário - ter algo bem mais forte. Para isto a seguinte definição:

Def.A.1. Se  $(\mathcal{G}_t)$  é família de  $\sigma$ -álgebras de  $(\Omega, \mathcal{F}^0, P)$  tq.  $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}_t$  se  $s < t$ , então uma função  $T : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$  será dita "tempo de parada" (t.p.) se

$$\forall t \geq 0, [T \leq t] \in \mathcal{G}_t.$$

Sendo  $\mathcal{G}_{t+} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{s>t} \mathcal{G}_s$ , é fácil ver que

$T$  t.p. com rel a  $\{\mathcal{G}_{t+}\}$  se

$$\forall t \geq 0 [T < t] \in \mathcal{G}_t \quad (\text{condição mais fraca})$$

Voltando ao MB(0): Em geral, precisamos trabalhar com tempos aleatórios que não são t.p. com relação a  $\{\mathcal{F}_t^0\}$ , mas sim com relação a  $\{\mathcal{G}_{t+}^0\}$ . Um exemplo são os tempos de passagem  $E_a$ , utilizados na Seção 1. (Para obter  $(E_{a+})_{a \geq 0}$  como um subordinador é preciso que usemos a "Prop. forte de Markov" nestes tempos).

No entanto, uma bela aplicação da Teoria de "martinga-

les" dá o seguintes resultados cruciais:

(A) Seja  $(X_t; t \geq 0)$  MB(0) em representação canônica, digamos

$(P = P^0)$ ; se  $\mathfrak{F}_t^0 = \sigma(X_s; s \leq t)$  e  $T$  é t.p. relativo a

$\{\mathfrak{F}_{t+}^0\}$  e  $P(T < +\infty) = 1$  então

$\{X(T+t) - X(T), t \geq 0\}$  é MB(0) e indep da  $\sigma$ -álgebra

$$\mathfrak{F}_{T+}^0 \stackrel{\text{Def}}{=} \{A \in \mathfrak{F}^0 : A \cap [T \leq t] \in \mathfrak{F}_t^0\}$$

De (A) segue-se um importantíssimo corolário:

Se  $A \in \mathfrak{F}_{0+}^0$ ,  $P(A) = 0$  ou 1

(Lei 0-1 de Blumenthal-Gettoor);

Segue-se daí que, sendo

$\mathfrak{F}$  = completamento de  $\mathfrak{F}_\infty^0$  com relação a  $P$  e  $\mathfrak{F}_t$  = com  
pletamento de  $\mathfrak{F}_t^0$  em  $\mathfrak{F}$ , com relação a

$$P \text{ (i.e. } \mathfrak{F}_t = \sigma(\mathfrak{F}_t^0 \cup \{N \in \mathfrak{F} : P(N) = 0\}) \text{)}$$

Então:

(B) Se  $T$  é t.p. com relação a  $\{\mathfrak{F}_t\}$  e  $P(T < +\infty) = 1$ , então

$\{X(T+t) - X(T), t \geq 0\}$  é MB(0) independente de  $\mathfrak{F}_T$

$$(\mathfrak{F}_T = \{A \in \mathfrak{F} : A \cap [T \leq t] \in \mathfrak{F}_t\})$$

Obs. O mesmo vale para qualquer MB(0) não necessariamente em  
"representação canônica."

Referências

- [1] ADLER, R. (1978) The uniform dimension of level sets of a Brownian sheet. The Annals of Probability 6, 509-515.
- [2] BERMAN, S.M. (1969). Local times and sample function properties of stationary Gaussian processes. Trans. Amer. Math. Soc. 137, 277-299.
- [3] BERMAN, S.M. (1970). Harmonic analysis of local times and sample functions of Gaussian processes. Trans. Amer. Math. Soc. 143, 269-281.
- [4] BERMAN, S.M. (1970) Gaussian processes with stationary increments, local times and sample function properties. The Annals of Math. Stat. 41, 1260-1272.
- [5] BLUMENTHAL, R.M. and GETTOOR, R.K. (1961) Sample functions of stochastic processes with independent increments - Journal Math. Mech. 10, 493-516.
- [6] BLUMENTHAL, R.M. and GETTOOR, R.K. (1964) Local times for Markov processes. Z. Wahrs. Verw. Geb., 3, 50-74.
- [7] BLUMENTHAL, R.M. and GETTOOR, R.K. (1968) Markov Processes and Potential Theory. A.P. New York.
- [8] BREIMAN, L. (1968) Probability. Addison-Wesley.
- [9] CAIROLI, R. and WALSH, J.B. (1975) Stochastic Integrals in the plane. Acta Math. 134, 111-183.
- [10] GEMAN, D. (1976) A note on the continuity of local times. Proceedings of the Amer. Math. Soc. 57, 321-326.

- [11] GEMAN, D. (1977) On the approximate local growth of multidimensional random fields. *Z. Wahrs. Verw. Geb.*, 38, 237-251.
- [12] GEMAN, D. and HOROWITZ, J. (1980) Occupation densities. *The Annals of Probability*, 8, 1-67.
- [13] GETTOOR, R.K. and KESTEN, H. (1972) Continuity of local times for Markov processes. *Compositio Mathematica* 24, 277-303.
- [14] ITO, K. and McKEAN, H.P. (1965) Diffusion process and their sample paths. Springer.
- [15] KINGMAN, J.F.C. (1973) An intrinsic description of local time. *J. London Math. Soc.*, 2, 6, 725-731.
- [16] KNIGHT, F. (1963) Random walks and a sojourn density proc. of Brownian Motion. *Trans. Amer. Math. Soc.* 107, 56-86.
- [17] LÉVY, P. (1948) "Processus Stochastiques et Mouvement Brownien". Paris Gauthier-Villars.
- [18] MAISONNEUVE, B. (1974) Systèmes Régénératifs, Astérisque 15, Soc. Math. de France.
- [19] Mc KEAN, H.P. (1975) Brownian Local times. *Adv. in Math.*, 15, 91-111.
- [20] MEYER, P. (1975) Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Mathematics. Springer
- [21] PITMAN, J. (1978) Notas não publicadas.
- [22] RAY, D.B. (1963) Sojourn times of a diffusion process. *Ill. J. Math.*, 7, 615-630.



- [23] SILVERSTEIN, M. (1968) A new approach to local times. J. Math. Mech. 17, 1023-1054.
- [24] STRAF, M. (1972) Weak convergence of stochastic processes with several parameters. Proc. 6<sup>th</sup> Berkeley Symp. 187-221.
- [25] VARES, M.E. Representation of the square integrable martingales generated by a Two-parameter Lévy process. (Submetido a Z.W.).
- [26] VARES, M.E. "Local times for Two-parameter Lévy processes" (submetido a publicação).
- [27] WALSH, J.B. (1978)a) The local time of the Brownian sheet. Soc. Mathématique de France. Astérisque, 52-53, pp 47-61.
- [28] WALSH, J.B. "Down Crossings and the Markov 1978(b) property of Local time". - pp. 89-115.
- [29] WALSH, S.B. "Excursions and Local Times" 1978 (c) \_\_\_\_\_ pp. 159-192.

