

**O MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS E  
EXPANSÕES EM AUTO-FUNÇÕES**

**Rafael José Iorio Jr.**

COPYRIGHT © - 1981 - by RAFAEL JOSÉ IORIO, JR.

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida, por qualquer processo, sem a permissão do autor.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Rua Luiz de Camões, 68 - 20.060 - Rio de Janeiro - RJ

There is a theory which states that if ever anyone discovers exactly what the universe is for and why it is here, it will instantly disappear and be replaced by something even more bizarre and inexplicable.

There is another theory which states that this has already happened.

Douglas Adams [1]



Este livro originou-se de uma parte do curso de métodos matemáticos da física, ministrado por mim na escola de verão do Departamento de Matemática da Universidade Nacional de Brasília. Meu objetivo neste trabalho é ilustrar a riqueza e utilidade do método de separação de variáveis e expansões em auto-funções na solução dos problemas (lineares) da física matemática. Isto é no entanto uma tarefa difícil, pois o método pode ser utilizado numa grande variedade de situações cujas características são muito diferentes. Por esta razão, é conveniente e mesmo necessário estudar problemas específicos ao invés de tentar formulações gerais.

O texto consiste de três capítulos e um apêndice. O primeiro capítulo é quase inteiramente formal e é uma tentativa de expor as idéias envolvidas sem complicações técnicas. Os dois capítulos seguintes são um estudo detalhado dos métodos em questão, no caso específico do problema de condução de calor em um sólido em contato com um reservatório térmico a temperatura zero, enquanto que o apêndice é uma coletânea de definições e resultados de análise funcional e integração, necessários ao tratamento descrito nos capítulos II e III. Uma coleção de problemas foi incluída no texto e deve ser encarada como parte integrante do mesmo.

Aproveito a oportunidade para agradecer a hospitalidade do Departamento de Matemática da Universidade Nacional de Brasília e especialmente aos professores Djairo G. Figueiredo e David G. Costa, pela oportunidade de participar da escola de verão em 1980..

Além disso, agradeço às professoras Valéria Iório e Márcia Scialom, do Departamento de Matemática da PUC/RJ, pela leitura de partes do texto, por terem apontado vários erros e feito numerosas sugestões. Finalmente, é preciso mencionar meu débito à paciência e ao excelente trabalho de datilografia de Carlos Araújo.

Rafael José Iório, Jr.

Rio de Janeiro, 1/6/81



## ÍNDICE

	pg.
CAPÍTULO I.	
1. O problema de condução de calor e o método de separação de variáveis.....	1
2. O caso $n = 1$ .....	4
3. O caso $n > 1$ .....	9
4. Generalizações e comentários.....	15
CAPÍTULO II.	
1. Preliminares.....	28
2. As identidades de Green.....	30
3. O princípio do máximo para funções harmônicas.....	34
4. A função de Green.....	37
5. Propriedades da função de Green.....	40
6. O problema de auto-valores.....	48
CAPÍTULO III.	
1. Introdução.....	62
2. Propriedades dos potenciais de camada simples e dupla..	64
3. A solução do problema de Dirichlet clássico.....	73
APÊNDICE.	
1. Operadores limitados e operadores compactos.....	84
2. Os espaços $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ .....	92
3. A alternativa de Fredholm.....	105
4. O teorema espectral para operadores compactos auto-adjuntos..	107
REFERÊNCIAS.....	114





## Capítulo I.

### 1. O problema de condução de calor e o método de separação de variáveis.

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio (i.e., aberto e conexo), limitado com fronteira  $\partial\Omega$ . Estamos interessados em estudar o seguinte problema: obter  $u(x,t)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$  (o fecho de  $\Omega$ ) e  $t \geq 0$  tal que;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \bar{\Omega}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0$$

onde  $f$  é uma função dada,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

é o operador laplaciano e  $\alpha$  é uma constante. No caso  $n = 3$  (no qual nos fixaremos durante a maior parte do curso), a função  $u(x,t)$  procurada é a temperatura no ponto  $x$ , no instante  $t$  do corpo  $\Omega$ , feito de material homogêneo com constante de difusividade térmica  $\alpha^2$ , colocado em contato com um reservatório térmico à temperatura zero ( $u|_{\partial\Omega} = 0, t \geq 0$ ) e com temperatura inicial dada ( $u(x,0) = f(x), x \in \bar{\Omega}$ ). A constante  $\alpha^2$  depende apenas do material de que é feito o sólido  $\bar{\Omega}$  e por simplicidade tomaremos  $\alpha^2 = 1$  daqui por diante. A função  $u(x,t)$  deve ser solução da equação diferencial parcial acima (chamada a equação do calor) e deve portanto ser diferenciável em algum sentido (existem muitas interpretações possíveis do conceito de "solução": Veja [18] capítulo 1). É conveniente especificar condições de suavidade às quais  $u(x,t)$  deve satisfazer, isto é, especificar uma classe de funções onde a solu-

ção  $u(x,t)$  deve ser procurada. Tendo em vista a interpretação física do caso  $n = 3$ , é natural tentar resolver o problema

$$(1.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u \in C^2(\Omega \times \{t > 0\}) \cap C(\bar{\Omega} \times \{t \geq 0\}) \\ \text{ii) } \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \text{iii) } u(x,0) = f(x) \in C(\bar{\Omega}) \\ \text{iv) } u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0 \end{array} \right.$$

onde  $C^k(U)$  denota a coleção das funções de classe  $C^k$ , tomando valores complexos, definidas em  $U = \mathfrak{R}$  ou  $\overline{\mathfrak{R}}$ ,  $\mathfrak{R}$  aberto em  $\mathbb{R}^m$ . Note que iii) e iv) chamadas respectivamente condições inicial e de contorno não são independentes: elas devem satisfazer a condição de compatibilidade  $f(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$ . Finalmente, deve-se notar que a equação do calor é obtida dos axiomas da teoria de condução de calor e sua dedução pode ser encontrada, por exemplo, em [10], [17], [39].

O primeiro passo na direção da solução do problema (1.1) é notar que

$$(1.2) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u \in C^2(\Omega \times \{t > 0\}) \cap C(\bar{\Omega} \times \{t \geq 0\}) \\ \text{ii) } \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \text{iii) } u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0 \end{array} \right.$$

é um problema linear e homogêneo para o qual vale portanto o princípio de superposição de soluções. Mais precisamente, se  $u_1, u_2, \dots, u_m$  são soluções de (1.2) e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  são constantes (em geral complexas), então a superposição

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i(x,t)$$

também é solução. Mais geralmente, se  $\{u_i(x,t)\}_{i=1}^{\infty}$  é um conjunto de soluções,  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$  uma coleção de constantes e se conseguirmos resolver os problemas de convergência envolvidos, então,

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i(x,t)$$

também é solução de (1.2). A idéia é procurar determinar constantes  $\alpha_i$  tais que a condição inicial de (1.1) seja satisfeita, isto é,

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i(x,0) .$$

Note que esta expressão indica que precisamos encontrar uma coleção "suficientemente grande" de  $u_i$ 's de modo que uma função contínua possa ser representada por uma série da forma acima! Esta observação justifica, pelo menos parcialmente, a tentativa de obter a solução na forma de uma "superposição infinita". Esta idéia ficará mais clara ao considerarmos o caso  $n=1$  mais adiante.

Para obter as soluções  $u_i$ , utiliza-se o método de separação de variáveis que consiste em procurar soluções de (1.2) da forma  $u(x,t) = \phi(x)T(t)$ . Isto é feito impondo que o produto  $\phi T$  seja solução de (1.2) e resolvendo os problemas resultantes. Em primeiro lugar, como a solução de (1.2) deve pertencer a  $C^2(\Omega \times \{t > 0\}) \cap C(\bar{\Omega} \times \{t \geq 0\})$  é razoável procurar  $\phi \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e  $T \in C^2(\{t > 0\}) \cap C(\{t \geq 0\})$ . Em seguida, se  $\phi(x)T(t)$  satisfaz a condição de contorno de (1.2) devemos ter,  $\phi(x)T(t) = 0$ ,  $\forall x \in \partial\Omega, \forall t \geq 0$ . Conseqüentemente, se  $\phi(x) \neq 0$  para algum  $x \in \partial\Omega$ , segue que  $T(t) = 0, t \geq 0$  e portanto  $\phi(x)T(t) = 0, x \in \bar{\Omega}, t \geq 0$ . Em outras palavras, é preciso exigir  $\phi(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$  se quisermos obter soluções não triviais de (1.2) da forma  $\phi(x)T(t)$ .

Finalmente, substituindo  $\phi(x)T(t)$  na equação diferencial, segue que  $\phi T' = T\Delta\phi$ , onde  $T'$  é derivada de  $T(t)$  em relação a  $t$ . Dividindo esta última equação pelo produto  $\phi T$  obtém-se  $T^{-1} T' = \phi^{-1} \Delta\phi$ . Como o lado direito desta igualdade depende apenas de  $x$  e o lado esquerdo apenas de  $t$ , ambos devem ser constantes, i.e.,  $T^{-1} T' = \phi^{-1} \Delta\phi = -\lambda$  onde  $\lambda$  é uma constante chamada constante de separação. Conseqüentemente, as funções  $\phi(x)$  e  $T(t)$  devem satisfazer

$$(1.3) \begin{cases} T \in C^2(\{t > 0\}) \cap C(\{t \geq 0\}) \\ T' = -\lambda T, \quad t > 0 \end{cases}$$

$$(1.4) \begin{cases} \phi \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ -\Delta\phi = \lambda\phi, \quad x \in \Omega \\ \phi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Um valor de  $\lambda$  para o qual (1.4) tem soluções não triviais (i.e., não identicamente nulas) é chamado um auto-valor do problema (1.4), enquanto que as soluções não triviais correspondentes são chamadas as auto-funções pertencentes ao auto-valor  $\lambda$ .

## 2. O caso $n = 1$ .

Antes de prosseguir com a análise de (1.3) e (1.4) é conveniente descrever alguns casos particulares que esclareçam as observações da seção anterior e indiquem o que deve ser esperado no caso geral. Nesta seção vamos considerar o caso  $n=1$  com  $\Omega = (0, \ell)$ . Neste caso, (1.4) toma a forma

$$(2.1) \quad \begin{cases} \phi \in C^2((0, \ell)) \cap C([0, \ell]) \\ -\phi'' = \lambda \phi, \quad x \in (0, \ell) \\ \phi(0) = \phi(\ell) = 0 \end{cases}$$

A primeira coisa a notar sobre (2.1), e de fato, sobre (1.4) (veja o lema II-(6.4)), é que os auto-valores (se existirem) são reais e positivos. Para provar esta afirmação, introduza o produto interno

$$(2.2) \quad (f|g) = \int_0^{\ell} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in C([0, \ell])$$

e observe que, utilizando a equação diferencial, as condições de contorno e integrando por partes duas vezes, obtém-se

$$(2.3) \quad \lambda(\phi|\phi) = (-\phi''|\phi) = (\phi'|\phi') = (\phi|-\phi'') = \bar{\lambda}(\phi|\phi)$$

onde  $\phi$  é auto-função do problema (2.1) pertencente ao auto-valor  $\lambda$ . Agora, (2.3) prova a afirmação feita acima. De fato, como  $(\phi|\phi) > 0$ , (por que?), segue que  $\lambda = \bar{\lambda}$ , ou seja, os auto-valores (se existirem) devem ser reais. Mais ainda, se  $\lambda < 0$  a igualdade  $\lambda(\phi|\phi) = (\phi'|\phi')$  é uma contradição, pois  $(\phi|\phi)$  e  $(\phi'|\phi')$  são números reais positivos, (por quê?). Finalmente, se  $\lambda = 0$ , segue que  $(\phi'|\phi') = 0$  e portanto  $\phi(x)$  é constante em  $[0, \ell]$ . Como  $\phi(0) = \phi(\ell) = 0$  segue que  $\phi(x) = 0 \quad x \in [0, \ell]$ , uma contradição, pois  $\phi$  é, por hipótese, uma solução não trivial.

É interessante notar também que se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são auto-funções correspondentes a auto-valores distintos,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , então  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são ortogonais em relação ao produto interno (2.2), i.e.,  $(\phi_1|\phi_2) = 0$ . De fato, integrando por partes duas vezes e usando

(2.1), temos

$$(2.4) \quad \lambda_1(\phi_1 | \phi_2) = (-\phi_1'' | \phi_2) = (\phi_1 | -\phi_2'') = \lambda_2(\phi_1 | \phi_2) .$$

Como  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  a nossa afirmação está provada.

Vamos agora considerar a existência de auto-funções de (2.1). Tendo em vista as observações acima, basta considerar  $\lambda > 0$ , e, neste caso, é um fato bem conhecido que a solução geral da equação diferencial em (2.1) é da forma  $\phi(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$ , onde A e B são constantes arbitrárias. Impondo as condições de contorno, temos

$$(2.5) \quad \begin{cases} \phi(0) = 0 = A \\ \phi(\ell) = 0 = B \sin \sqrt{\lambda} \ell \end{cases}$$

Portanto, para obter soluções não triviais (i.e., poder escolher  $B \neq 0$ ), é preciso que  $\sin \sqrt{\lambda} \ell = 0$  ou seja,  $\sqrt{\lambda} \ell = k\pi$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Em outras palavras, as únicas soluções não triviais de (2.1) são as funções  $\phi_k(x) = B_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}$  onde  $B_k$  é uma constante arbitrária diferente de zero. Note que  $\phi_k$  é auto-função de (2.1) pertencente ao valor  $\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2}$ . Substituindo estes valores na equação diferencial para  $T(t)$ , obtém-se  $T_k(t) = C_k \exp(-\frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} t)$  onde  $C_k$  é uma constante arbitrária. Agora, para obter a solução do problema (1.1) no caso  $n=1$  com  $\Omega = (0, \ell)$ , forma-se a superposição

$$(2.6) \quad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \exp(-\frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} t) ,$$

e impõe-se a condição inicial

$$(2.7) \quad f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} .$$

Conseqüentemente, é preciso obter uma seqüência  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  de modo que  $f(x)$  seja representada pela série no lado direito de (2.7). Em outras palavras, queremos expandir  $f$  em uma série de Fourier em senos no intervalo  $[0, \ell]$ . Agora, é natural perguntar: como calcular os coeficientes de Fourier  $b_k$ ? Note que as funções  $\text{sen } \frac{k\pi x}{\ell}$  satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade. (Prove!)

$$(2.8) \quad \int_0^{\ell} \text{sen } \frac{k\pi x}{\ell} \text{sen } \frac{m\pi x}{\ell} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq m \\ \ell/2, & \text{se } k = m \end{cases} .$$

Então, multiplicando (2.7) por  $\text{sen } \frac{m\pi x}{\ell}$ , integrando em  $[0, \ell]$  e supondo que é possível trocar a integral com a série, obtém-se

$$(2.9) \quad \int_0^{\ell} f(x) \text{sen } \frac{m\pi x}{\ell} dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{\ell} \text{sen } \frac{m\pi x}{\ell} \text{sen } \frac{k\pi x}{\ell} dx$$

e portanto, usando (2.8), tem-se

$$(2.10) \quad b_m = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \text{sen } \frac{m\pi x}{\ell} dx .$$

Resumindo, espera-se que a solução do problema (1.1) com  $n = 1$ ,  $\Omega = (0, \ell)$  seja dada por (2.6) com os coeficientes  $b_k$  definidos por (2.10). Até agora, nossas considerações foram quase que inteiramente formais e é preciso provar que a solução formal dada por (2.6) e (2.10) é de fato solução do problema em consideração. O primeiro passo nesta direção é estabelecer condições sobre  $f$  para que valha a representação (2.7). Este é um problema não trivial cuja discussão não cabe no presente texto. No entanto, deve-se notar que é possível provar a existência de uma função contínua cuja série de Fourier em senos diverge em pelo menos um ponto (veja [25], página 51). Portanto, é preciso impor condições mais fortes do que

[17], [25], [27] e o problema 3 deste capítulo). Infelizmente, a convergência pontual não é suficiente para resolver o problema em consideração. Para provar que (2.6) é solução é preciso, em princípio, trocar a derivada com o sinal de soma e os teoremas usuais que garantem a validade desta operação requerem a convergência uniforme da série das derivadas (assim como a convergência pontual da série a ser diferenciada em pelo menos um ponto; problema  $\Delta$ ). É possível provar no entanto (problema 2), que se  $f \in C^2([0, \ell])$ ,  $f(0) = f(\ell) = 0$ , então a série em (2.7) (com os coeficientes (2.10)), converge uniformemente a  $f$  em  $[0, \ell]$  e que neste caso (2.6) também converge uniformemente e é solução de (1.1). Mesmo assim, este resultado não é satisfatório se insistirmos em resolver o problema supondo apenas  $f \in C([0, \ell])$ ,  $f(0) = f(\ell) = 0$ . Para contornar esta dificuldade, note que, substituindo (2.10) em (2.6) e trocando o somatório com a integral, a solução  $u(x, t)$  pode ser reescrita na forma

$$(2.11) \quad u(x, t) = \int_0^{\ell} K(x, y; t) f(y) dy$$

$$(2.12) \quad K(x, y, t) = \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi y}{\ell} \exp\left(-k^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} t\right) .$$

Um estudo cuidadoso de (2.11) e (2.12) permite mostrar que (2.11) é de fato a solução do problema (1.1) com  $n = 1$  e  $\Omega = (0, \ell)$ . Deve-se notar que a condição inicial é satisfeita no sentido que  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t)$ , uniformemente em  $x \in [0, \ell]$ . Para uma demonstração destes resultados, veja o capítulo V de [43] (especialmente o teorema 10).



### 3. O caso $n > 1$ .

Se  $n > 1$  a situação se torna muito mais complicada, pois há uma infinidade de "geometrias" possíveis para um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . É claro que muitas propriedades das soluções podem ser obtidas a priori, i.e., supondo sua existência e analisando as conseqüências das condições que constituem o problema (1.4) (uma vez que (1.4) foi resolvido, (1.3) é trivial!). Por exemplo, um argumento análogo ao utilizado na seção anterior mostra que os auto-valores de (1.4) (se existirem) devem ser reais e positivos (veja o lema II-(6.4)). A existência de soluções não triviais de (1.4) é muito mais difícil. Caso  $\Omega$  seja suficientemente simples, (1.4) pode também ser resolvido por separação de variáveis. Deve-se notar que esta utilização do método tem objetivos diferentes da feita anteriormente. Antes separamos a variável temporal das variáveis espaciais e obtivemos um problema de auto-valores para o laplaciano munido da condição de contorno de Dirichlet  $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ . Agora, deseja-se utilizar separação para resolver este problema de auto-valores. Por exemplo, se  $n = 2$  e  $\Omega = (0, \ell) \times (0, \ell)$ , vamos procurar soluções de (1.4) da forma  $\phi(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$ . Substituindo na equação diferencial e dividindo pelo produto  $gh$  obtêm-se  $g^{-1} g'' = -h^{-1} h'' - \lambda = -\eta$  é uma nova constante de separação. Impondo as condições de contorno e diferenciabilidade chega-se, então aos problemas

$$(3.1) \begin{cases} g \in C^2((0, \ell)) \cap C([0, \ell]) \\ g'' + \eta g = 0, & x_1 \in (0, \ell) \\ g(0) = g(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$(3.2) \begin{cases} h \in C^2((0, \ell)) \cap C([0, \ell]) \\ h'' + (\lambda - \eta) h = 0, \quad x_2 \in (0, \ell) \\ h(0) = h(\ell) = 0 \end{cases}$$

As únicas soluções não triviais de (3.1) e (3.2) ocorrem para  $\eta = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}$ ,

$$(\lambda - \eta) = \frac{m^2 \pi^2}{\ell^2}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e são}$$

$$(3.3) \quad g_n(x_1) = A \operatorname{sen} \frac{n\pi x_1}{\ell}, \quad h_m(x_2) = B \operatorname{sen} \frac{m\pi x_2}{\ell}$$

onde A e B são constantes arbitrárias (não-nulas). Conseqüentemente, os números  $\lambda_{m,n} = \frac{\pi^2}{\ell^2} (m^2 + n^2)$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$  são auto-valores de (1.4) e  $\psi_{m,n}(x_1, x_2) = g_n(x_1) g_m(x_2)$  são as auto-funções correspondentes. Para obter a solução de (1.1), neste caso, forma-se a superposição

$$u(x_1, x_2, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{m,n} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_2}{\ell} \exp\left(-\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{\ell^2} t\right)$$

e impõe-se a condição inicial  $u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2)$ . Os coeficientes  $C_{m,n}$  são então determinados utilizando as relações de ortogonalidade (2.8). Um exemplo mais complicado é  $n = 2$  com  $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ . Neste caso, é conveniente introduzir coordenadas polares  $(x_1, x_2) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$  e reescrever (1.4) na forma

$$(3.4) \begin{cases} \psi \in C^2((0, 1) \times [0, 2\pi]) \cap C([0, 1] \times [0, 2\pi]) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\lambda \psi, \quad (r, \theta) \in (0, 1) \times (0, 2\pi) \\ \psi(1, \theta) = 0, \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

onde  $\psi(r, \theta) = \phi(x_1, x_2)$  e a expressão no lado esquerdo da equação diferencial parcial é o laplaciano em coordenadas polares. Procuram-se, então, soluções da forma  $\psi(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta)$ . As condições de diferenciabilidade implicam imediatamente que devemos ter  $\Theta \in C^2([0, 2\pi])$  e  $R \in C^2((0, 1) \cap C([0, 1])$ . Além disso, é claro que  $\Theta(\theta)$  deve satisfazer condições de contorno periódicas, i.e.,  $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$  e  $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$  e que para obter soluções não triviais é preciso impor  $R(1) = 0$ . Chega-se então aos seguintes problemas

$$(3.5) \quad \begin{cases} \Theta \in C^2([0, 2\pi]) \\ \Theta'' + \eta \Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$$

$$(3.6) \quad \begin{cases} R \in C^2((0, 1)) \cap C([0, 1]) \\ r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + (\lambda r^2 - \eta) R = 0 \\ R(1) = 0 \end{cases}$$

onde  $\eta$  é a nova constante de separação obtida ao separar as variáveis da equação em (3.4). O problema (3.5) tem soluções não triviais apenas se  $\eta = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  e, neste caso, as soluções correspondentes têm a forma  $\Theta(\theta) = A \cos n \theta + B \sin n \theta$ . Substituindo  $\eta = n^2$  na equação em (3.6), lembrando que  $\lambda$  deve ser real positivo e introduzindo a mudança de variável  $\rho = \sqrt{\lambda} r$ , obtém-se a equação de Bessel de ordem  $n$ . Portanto, a solução geral da equação do problema (3.6) é

$$(3.7) \quad R(r) = C J_n(\sqrt{\lambda} r) + D Y_n(\sqrt{\lambda} r)$$

$$(3.8) \quad J_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-in \theta + \rho \operatorname{sen} \theta) d\theta$$

$$(3.9) \quad Y_n(\rho) = \frac{2}{\pi} J_n(\rho) \ln \frac{\rho}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-2m} - \\ - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_{m,n}}{m!(m+n)!} \left(\frac{-\rho^2}{4}\right)^m$$

$$(3.10) \quad \gamma_{m,n} = \frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} + \frac{\Gamma'(m+n+1)}{\Gamma(m+n+1)}$$

onde  $\Gamma(\cdot)$  denota a função gama. É claro que a função  $Y_n(\sqrt{\lambda} r)$  diverge quando  $r$  tende a zero e portanto deve ser descartada (i.e., toma-se  $D = 0!$ ). Impondo a condição de contorno de (3.6) sobre o que resta, obtém-se  $R(1) = C J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$ . Conseqüentemente,  $\sqrt{\lambda}$  deve ser um zero positivo da função  $J_n$ . Esta função possui uma infinidade enumerável  $\alpha_{m,n}$ ,  $m = 1, 2, \dots$  de tais zeros. Segue, portanto, que os números  $\lambda_{m,n} = (\alpha_{m,n})^2$  são auto-valores de (1.4) e as auto-funções correspondentes têm a forma geral  $\psi_{m,n}(r, \theta) = (A_{m,n} \cos n \theta + B_{m,n} \sin n \theta) J_n(\alpha_{m,n} r)$ . A solução de (1.1) neste caso, deve, então, ter a forma

$$(3.11) \quad u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{m,n}(r, \theta) \exp(-(\alpha_{m,n})^2 t)$$

Os coeficientes  $A_{m,n}$  e  $B_{m,n}$  são então determinados utilizando as relações de ortogonalidade das funções  $1, \sin n \theta, \cos n \theta$ ,  $n = 1, \dots$  e das funções  $J_n(\alpha_{m,n} r)$ . Para maiores detalhes, veja o capítulo 8 de [10] ou de [13].

Para um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  qualquer, é evidente que não é possível empregar os métodos diretos descritos acima para obter as auto-funções do problema (1.4). É preciso então utilizar "métodos indiretos" para provar a existência das soluções desejadas. Isto será

feito nos próximos capítulos no caso  $n = 3$  (por simplicidade) Em linhas gerais, a idéia é a seguinte: caso  $\partial\Omega$  seja suficientemente bem comportada, é possível construir uma função  $G(x,y), (x,y) \in \Omega \times \bar{\Omega}$  chamada a função de Green de  $(-\Delta)$  (com condição de contorno de Dirichlet) em  $\Omega$ , tal que a única solução do problema

$$(3.12) \quad \begin{cases} v \in C^2 \cap C(\bar{\Omega}) \\ -\Delta v = h \in C^1(\Omega), \text{ limitada} \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

é dada pela fórmula

$$(3.13) \quad v(x) = - \int_{\Omega} G(x,y)h(y)dy .$$

Conseqüentemente, o problema (1.4) é equivalente à equação integral

$$(3.14) \quad \phi(x) = \lambda \int_{\Omega} G(x,y) \phi(y)dy .$$

Utilizando, então, as propriedades de  $G(x,y)$  e a teoria dos operadores compactos auto-adjuntos (veja capítulo II e o apêndice) pode-se mostrar que

i) o problema (1.4) tem apenas um número enumerável de auto-valores reais e positivos  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ , com  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} < \infty$ .

A coleção das auto-funções correspondentes pode ser ortonormalizada em relação ao produto interno de  $L^2(\Omega)$  (veja a seção 2 do apêndice), i.e., podemos escolher a coleção de auto-funções satisfazendo

$$(3.15) \quad (\phi_k | \phi_j) = \int_{\Omega} \phi_k(x) \overline{\phi_j(x)} dx = \delta_{k,j} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$$

$j, k = 1, 2, \dots$

ii) A coleção  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  forma um conjunto ortonormal completo em  $L^2(\Omega)$ , i.e., toda função  $f \in L^2(\Omega)$  pode ser representada na forma

$$(3.16) \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \phi_k.$$

onde

$$(3.17) \quad C_k = (f | \phi_k) = \int_{\Omega} f(x) \overline{\phi_k(x)} dx$$

são os coeficientes de Fourier de  $f$  em relação ao conjunto  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  e a série converge na topologia da norma de  $L^2(\Omega)$ . Além disso, se  $f \in C^2(\overline{\Omega})$  e  $f|_{\partial\Omega} = 0$ , então a convergência da série em (3.16) é uniforme.

Usando estes resultados, é possível provar que a solução de (1.1) é dada por

$$(3.18) \quad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \phi_k(x) \exp(-\lambda_k t)$$

caso a condição inicial  $f$  pertença a  $C^2(\overline{\Omega})$  e se anule em  $\partial\Omega$ . Para resolver o problema supondo apenas a continuidade de  $f$  reescreve-se a solução (como no caso  $n = 1!$ ) na forma

$$(3.19) \quad u(x,t) = \int_{\Omega} K(x,y;t) f(y) dy$$

$$(3.20) \quad K(x,y;t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \overline{\phi_k(y)} \exp(-\lambda_k t) .$$

A demonstração de que (3.19) é a solução do problema pode ser feita adaptando os métodos do capítulo 8 de [16], ou pode ser encontrada em um contexto muito mais geral que o aqui abordado no capítulo 3 de [20].

#### 4. Generalizações e comentários

As idéias e métodos descritos nas seções anteriores podem ser generalizadas e exploradas em muitas direções. Em primeiro lugar é possível, e de fato necessário, considerar operadores diferenciais mais gerais do que o laplaciano. Por exemplo, ao estudar a condução de calor em um sólido  $\bar{\Omega}$  cujas características (i.e., densidade, calor específico, etc.) variam com a posição, somos levados (veja [39], capítulo 1 ou [29], capítulos 9 e 20) a considerar uma equação da forma

$$(4.1) \quad r(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + q(x)u(x,t) + f(x,t)$$

onde  $x \in \Omega$ , todos os coeficientes da equação são funções com valores reais e a matriz  $A(x) = [a_{ij}(x)]$  é simétrica. No caso  $n=3$ ,  $u(x,t)$ , é a temperatura no ponto  $x \in \Omega$  no instante  $t$ . O termo  $q(x)u(x,t) + f(x,t)$  representa uma distribuição volumétrica (i.e., em  $\Omega$ ) de fontes de calor, enquanto as funções  $r(x)$  e  $a_{ij}(x)$  refletem as características do meio. Note que o somatório do lado direito de (4.1) pode ser escrito na forma  $\text{div}(A(x)\nabla u(x,t))$ , onde  $\nabla$  denota o gradiente em relação às variáveis espaciais e  $\text{div}$  a divergência em relação a estas mesmas variáveis. A equação (4.1) ocorre em ge-

ral acompanhada de condições de contorno da forma

$$(4.2) \quad \alpha(x,t) (A(x) \nabla u(x,t)) \cdot \nu(x) + \beta(x,t) u(x,t) = \gamma(x,t)$$

onde  $x \in \partial\Omega$ ,  $\nu(x)$  denota a normal externa a  $\partial\Omega$  no ponto  $x$  e  $\alpha, \beta, \gamma$  são funções dadas. As interpretações físicas da condição (4.2) podem ser encontradas no capítulo 20 de [29] e nas referências aí contidas. Finalmente, é preciso adicionar a (4.1) e (4.2) a condição inicial

$$(4.3) \quad u(x,0) = f(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

O problema formado por (4.1), (4.2), (4.3) e às condições de compatibilidade decorrentes de (4.2) e (4.3) é chamado o problema de valor inicial com condições de contorno para a equação (4.1). Se (4.1) e (4.2) são homogêneas (i.e.,  $f$  e  $\gamma$  são identicamente nulas) e as funções  $\alpha$  e  $\beta$  dependem apenas de  $x \in \partial\Omega$ , o método de separação de variáveis pode ser usado como antes para obter os problemas

$$(4.4) \quad T' = -\lambda T,$$

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial X}{\partial x_j} \right) + q(x)X(x) = \lambda r(x)X(x) \\ \alpha(x) A(x) \nabla X(x) \cdot \nu(x) + \beta(x)X(x) = 0 \end{array} \right.$$

O problema (4.5) é um exemplo dos chamados problemas de Sturm-Liouville. Uma excelente exposição elementar no caso  $n=1$  (ao qual o nome acima é geralmente associado) pode ser encontrada no capítulo 11 de [8]. Para tratamentos mais completos e rigorosos



referimos o leitor a [ 7 ], [ 11 ], [ 32 ], [ 40 ]. Note que os problemas (3.5) e (3.6) deste capítulo são exemplos típicos dos casos regular e singular em que os problemas de Sturm-Liouville podem ser classificados. O caso  $n > 1$  é bastante mais complexo e para ele indicamos [ 3 ] e [ 6 ] .

Outro tipo de extensão consiste em considerar o caso em que  $\Omega$  não é limitado. Nesta situação ocorre um fenômeno novo: ao invés de uma coleção enumerável de auto-valores com auto-vetores em  $L^2(\Omega)$ , temos em geral um contínuo de auto-valores e as auto-funções correspondentes não pertencem mais em geral ao espaço  $L^2(\Omega)$  (e por essa razão são chamadas de auto-funções generalizadas. Uma formulação rigorosa destas idéias pode ser encontrada no volume IV de [ 21 ] ). Talvez a situação mais simples onde este fenômeno ocorre é no caso do problema de valor inicial para a equação do calor a uma dimensão espacial. Mais precisamente, deseja-se obter  $u(x,t)$  tal que

$$(4.6) \quad \begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, \infty)), & \text{limitada} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) \in C(\mathbb{R}) \end{cases}$$

A condição "u limitada" (que é suficiente para garantir a unicidade; veja [18], capítulo 4, onde a unicidade é provada sob condições menos restritivas) é uma condição de contorno no infinito e impõe a condição de compatibilidade  $f$  limitada. Escrevendo  $u(x,t) = X(x)T(t)$  e separando as variáveis na equação diferencial parcial em (4.6), obtém-se as equações ordinárias  $T' = -\lambda T$  e  $X'' = -\lambda X$ , cujas soluções gerais são

$$(4.7) \quad \begin{cases} T(t) = C_1 \exp(-\lambda t) \\ X(x) = C_2 \exp(i\sqrt{\lambda} x) + C_3 \exp(-i\sqrt{\lambda} x) \end{cases}$$

onde  $C_1, C_2, C_3$  são constantes arbitrárias. Utilizando a condição  $u$  limitada, segue que  $\lambda$  deve ser real e não negativo. Escrevendo  $\lambda = \xi^2$  com  $\xi \geq 0$  (por enquanto) e formando a superposição

$$(4.8) \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g_1(\xi) e^{+ix\xi} e^{-\xi^2 t} d\xi + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g_2(\xi) e^{-ix\xi} e^{-\xi^2 t} d\xi$$

obtêm-se uma solução formal para a equação diferencial em (4.6) como pode ser verificado derivando formalmente sob o sinal de integral (o fator  $(2\pi)^{-1/2}$  foi colocado puramente por "questão de gosto": ele faz com que certas fórmulas sejam agradavelmente simétricas!). Antes de impor a condição inicial, é conveniente fazer uma mudança  $\xi \rightarrow (-\xi)$  na segunda integral do lado direito de (4.8), de modo que esta equação pode ser reescrita na forma

$$(4.9) \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \exp(ix\xi) \exp(-\xi^2 t) d\xi$$

Impondo agora a condição inicial, segue que

$$(4.10) \quad u(x,0) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \exp(ix\xi) d\xi$$

Isto significa que é importante procurar condições sob as quais é possível representar a função  $f$  na forma (4.10). Note que (4.10) pode ser interpretada como uma expansão em auto-funções (general-

zadas) do operador  $\frac{-d^2}{dx^2}$  com auto-valor  $\xi^2$  uma vez que se  $\phi_\xi(x) = \exp(i\xi x)$ , então  $\phi_\xi'' = \xi^2 \phi_\xi$ . Esta observação dá a idéia de como responder à seguinte pergunta natural: Quem são os coeficientes  $g(\xi)$  da expansão (4.10)? Calculando o "produto interno" de  $f$  com a auto-função  $\phi_\xi(x)$  e prosseguindo formalmente (i.e., como se todas as operações abaixo fossem válidas), temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\phi_\xi(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-ix\xi} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) e^{i\eta x} d\eta \right) dx =$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) \left( \int_{-a}^a \exp(-ix(\xi-\eta)) dx \right) d\eta$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) \frac{\exp(-ix(\xi-\eta))}{\xi-\eta} \Big|_{-a}^a d\eta =$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) \frac{\text{sen } a(\xi-\eta)}{\xi-\eta} d\eta =$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\xi + \frac{y}{a}\right) \frac{\text{sen } y}{y} dy =$$

$$= g(\xi) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } y}{y} dy = g(\xi)$$

pois  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } y}{y} dy = \pi$  como integral imprópria de Riemann (veja

[10], seção 39). Em outras palavras, os coeficientes da expansão

(4.10) devem ser dados por

$$(4.11) \quad g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i\xi x) dx .$$

Substituindo (4.11) em (4.9) e trocando a ordem de integração (de maneira análoga ao utilizado na obtenção da equação (2.11) deste capítulo), temos

$$(4.12) \quad u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi(x-y)} d\xi \right) dy .$$

A integral na variável  $\xi$  pode ser calculada (problema 5) fornecendo

$$(4.13) \quad u(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) f(y) dy .$$

Agora é possível esquecer o processo formal que nos levou a (4.13) e provar diretamente que a função  $u(x,t)$  aí definida é de fato solução do problema (4.6). O mesmo processo pode ser efetuado em  $\mathbb{R}^n$ , substituindo (4.10) e (4.11) por

$$(4.14) \quad f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp(i x \cdot \xi) d\xi ,$$

$$(4.15) \quad g(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-i x \cdot \xi) dx$$

onde  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$  e  $x \cdot \xi$  é o produto interno usual do  $\mathbb{R}^n$ . Pode-se mostrar então que

]

$$(4.16) \quad u(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) f(y) dy$$

é a única solução do problema de valor inicial

$$(4.17) \quad \begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)), \text{ limitada} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) \in C(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Deve-se notar que a condição inicial é satisfeita no seguinte sentido:  $u(x,t) \rightarrow f(x)$  quando  $t \downarrow 0$  uniformemente  $x$  pertencente a subconjuntos compactos do  $\mathbb{R}^n$ . Para uma demonstração rigorosa destes resultados veja [ 16 ], capítulo 8 (onde o caso  $n = 1$  é tratado. O caso geral é inteiramente análogo).

A função  $g(\xi)$  definida em (4.15) é chamada a transformada de Fourier de  $f$ , e usualmente denotada por  $\hat{f}$  ou  $Ff$ . A idéia envolvida é que  $f$  pode ser recuperada de  $\hat{f}$  através da fórmula de inversão (4.14). Note que  $\hat{f}$  certamente existe se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e neste caso não é difícil provar que  $\hat{f}$  é contínua, limitada e tende a zero quando  $|\xi| \rightarrow \infty$  (esta última propriedade é conhecida como o lema de Riemann-Lebesgue). O estudo da transformada de Fourier, a justificação da fórmula de inversão (que vale em vários contextos) e suas ramificações é bastante complexo (e fascinante!) e não cabe aqui descrevê-los. A fórmula de inversão é válida, por exemplo, em  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , com uma interpretação adequada para (4.15), pois nesse caso a integral que ali ocorre pode não existir. É possível no entanto provar que  $f \rightarrow \hat{f}$  é uma bijeção no espaço de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e que  $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Como  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  é denso

em  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , é possível então estender a transformada de Fourier a  $L^2(\mathbb{R}^n)$  como um operador unitário (i.e., um operador linear contínuo sobre que preserva a norma). Tratamentos elementares da teoria podem ser encontrados em [10], [27]. Para exposições mais sofisticadas, veja [14], [31], por exemplo.

Várias combinações das situações descritas acima são possíveis: operadores diferenciais mais complicados que  $(-\Delta)$ , domínios ilimitados com partes da fronteira em regiões finitas do espaço (por exemplo, problemas em semi-retas) e etc. Para exemplos relativamente elementares, veja [10], [17], [40]. Um texto bem mais avançado e dedicado inteiramente aos métodos acima é [6]. Cabe também indicar ao leitor os artigos [2], [4], [36], [37], onde os métodos descritos no presente texto (devidamente sofisticados) forneceram a solução de problemas extremamente importantes e interessantes nos últimos dez anos!

### Problemas.

1) Seja  $C^k([a,b])$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , a coleção das  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$  com derivadas contínuas em  $[a,b]$  até ordem  $k$ . Se  $k=0$ , escreve-se simplesmente  $C([a,b])$ .

a) Para  $f \in C([a,b])$ , defina  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ . Prove que  $f \rightarrow \|f\|_\infty$  define uma norma e que munido dela,  $C([a,b])$  é um espaço de Banach (veja a seção 1 do apêndice). A convergência de seqüências nesta norma é chamada convergência uniforme.

b) Suponha que  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  converge uniforme a  $f$ . Então

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx .$$

c) Seja  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C^1([a,b])$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0)$  existe para algum  $x_0 \in [a,b]$  e suponha que a seqüência de derivadas  $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge uniformemente a uma função  $g$ . Prove que  $f_n$  converge uniformemente a uma função  $f \in C([a,b])$  e que  $f' = g$ .

(Sugestão. Use b) e o teorema fundamental do cálculo).

d) Enuncie e prove resultados análogos aos de b) e c) para o caso de uma série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

e) Seja  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([a,b])$  e suponha que existe uma seqüência numérica  $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ , tal que  $\|f_n\|_{\infty} \leq M_n \forall n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  converge. Prove que a série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniformemente em  $[a,b]$

(este resultado é conhecido como o teste  $M$  de Weierstrass).

2) a) Seja  $f \in C^2([0,\ell])$ ,  $f(0) = f(\ell) = 0$ . Prove que a série em I-(2.7) com coeficientes dados por I-(2.10) converge uniformemente em  $[0,\ell]$ .

(Sugestão. Prove que  $|b_k| \leq C k^{-2} \forall k$  onde  $C$  é uma constante positiva integrando  $\int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx$  duas vezes e use e) do exercício anterior.)

b) Use a) deste problema e os resultados do exercício anterior para provar que se  $f$  é como a), então a série I-(2.6) é solução do problema I-(1.1), com  $n=1$  e  $\Omega = (0,\ell)$ .

3) O objetivo deste problema é dar condições suficientes para a convergência pontual da série de Fourier na forma exponencial. Por

Por simplicidade, vamos esquematizar a demonstração para a classe  $C_{\text{per}}^1 = \{f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \mid f(x+2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ . Como veremos no item g), a convergência neste caso é uniforme. O método para provar a convergência pontual descrito nos itens d)-f) abaixo, é devido a P.R.Chernoff e pode ser utilizado em condições muito mais gerais, (veja [ 9 ]).

a) Seja  $\mathbb{Z}$  a coleção dos números inteiros e  $\phi_n(x) = \exp(inx)$ . Prove as relações de ortogonalidade

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x) \overline{\phi_m(x)} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n \end{cases} .$$

b) Seja  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  contínua e defina a transformada de Fourier de f em relação ao conjunto  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  como sendo a função  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx .$$

Use o resultado de a) para provar formalmente que se  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(inx)$ , então  $C_n = \hat{f}(n)$  .

Observação. Note que a transformada de Fourier está bem definida se  $f \in L^1([-\pi, \pi])$ . O problema que se coloca é recuperar  $f$  a partir de sua transformada. Este é o problema análogo ao descrito na seção 4 acima para a transformada de Fourier de funções definidas em  $\mathbb{R}^n$ . Uma boa referência para ele é [25] .

c) Seja  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. Prove a desigualdade de



Bessel:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx .$$

Em particular,  $\hat{f}(n) \rightarrow 0$  quando  $|n| \rightarrow \infty$  .

(Sugestão. Mostre que  $2\pi \sum_{-N}^N |\hat{f}(n)|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \quad \forall N = 0, 1, 2, \dots$

calculando  $0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{-N}^N \hat{f}(n) \exp(inx)|^2 dx$  .)

Observação. O resultado  $\hat{f}(n) \rightarrow 0$  , quando  $|n| \rightarrow \infty$  , vale para  $f \in L^1([-\pi, \pi])$  (ele pode ser obtido do que provamos acima por um argumento de aproximação) e é conhecido como o lema de Riemann-Lebesgue.

Seja  $f \in C^1$  per. Os próximos itens mostram que

$$f(x_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) \exp(inx_0)$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$  .

d) Mostre que sem perda de generalidade podemos supor que  $x_0 = 0$  ,  $f(x_0) = 0$  .

e) Seja  $f$  como em d) e defina

$$g(x) = \begin{cases} (e^{ix} - 1)^{-1} f(x) , & x \neq 0 \\ -i f'(0) , & x = 0 \end{cases} .$$

Prove que  $g$  é contínua e periódica. Além disso, mostre que

$$\hat{f}(k) = \hat{g}(k-1) - \hat{g}(k) , \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$$

f) Calcule  $\sum_{-M}^N \hat{f}(n)$  e use o lema de Riemann-Lebesgue para provar que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

g) Prove que se  $f \in C^1_{\text{per}}$ , então a convergência estabelecida acima é uniforme.

(Sugestão. Integre  $f'(x) \exp(-inx)$  por partes para provar que  $|\hat{f}(n)| \leq \frac{|(f')^\wedge(n)|}{2\pi n}$  e use a desigualdade de Cauchy-Schwartz e a desigualdade de Bessel para concluir o resultado.)

4) O objetivo deste exercício é obter uma solução formal para o problema de Dirichlet no disco unitário em  $\mathbb{R}^2$ , i.e.

$$\begin{cases} \text{i) } u \in C^2(D) \cap C(\bar{D}) \\ \text{ii) } \Delta u = 0 \text{ em } D \\ \text{iii) } u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

onde  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ , usando o método de separação de variáveis. Para maiores informações (inclusive a demonstração de que a função  $u$  obtida é de fato uma solução), veja o problema 1) do capítulo III.

a) Use coordenadas polares e o método de separação de variáveis para mostrar que devemos esperar uma solução para i) e ii) da forma

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta)$$

onde  $A_0, A_n, B_n$  são constantes.

b) Imponha a condição de contorno para obter os coeficientes  $A_0, A_n, B_n$  em termos de  $f$ .

(Sugestão. Obtenha as relações de ortogonalidade para as funções 1,

sen  $n x$ ,  $\cos n x$ ,  $n = 1, 2, \dots$  usando a) do problema 3) e utilize-as para obter os coeficientes).

c) Mostre que a série obtida com os coeficientes calculados em b) pode ser reescrita na forma

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \theta') \right] d\theta' .$$

d) Prove que  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \theta') = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos(\theta - \theta') + r^2)}$  .

(Sugestão.  $r^n \cos n(\theta - \theta')$  é a parte real de  $r \exp(in(\theta - \theta'))$ .)

Observação. A fórmula obtida acima é chamada a fórmula de Poisson para o disco unitário e a função  $P(r, \theta, \theta') = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \theta') + r^2} \right)$

é conhecida como o núcleo de Poisson do disco. Para mais informações sobre a fórmula de Poisson, veja a seção 4 do capítulo II e os problemas do capítulo III.

5) a) Seja  $\gamma(x) = \exp(-|x|^2/2)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Prove que  $\hat{\gamma} = \gamma$  onde  $\hat{\gamma}$  denota a transformada de Fourier definida em I-(4.15).

(Sugestão. Considere primeiro  $n = 1$ . Mostre que neste  $\hat{\gamma}$  satisfaz o problema de valor inicial  $\gamma'(\xi) = -\xi \hat{\gamma}(\xi)$ ,  $\gamma(0) = 1$ .)

b) Use os resultados de a) para obter a fórmula (4.16) deste capítulo.

1. Preliminares.

Nesta seção vamos estabelecer algumas notações e definições e também enunciar alguns resultados básicos de cálculo avançado. Vamos nos restringir ao caso  $\mathbb{R}^3$ . No entanto é fácil verificar que o que se segue vale em  $\mathbb{R}^n$  com as modificações apropriadas. Se  $a \in \mathbb{R}^3$  e  $R > 0$ , a bola aberta de centro a e raio R é o conjunto  $B(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x-a| < R\}$  onde  $|\cdot|$  denota a distância euclídeana usual. A esfera de centro a e raio R será denotada por  $\partial B(a,R)$  ou  $S(a,R)$ . Se  $\mathcal{U}$  é um aberto de  $\mathbb{R}^3$  e  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  é de classe  $C^1$ , o gradiente de f é a função  $\nabla f = \text{grad} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$ . Uma função  $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^3$  é chamada um campo vetorial (complexo). F é de classe  $C^1$  se e só se cada uma de suas componentes  $F_i: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2, 3$  é de classe  $C^1$ . Neste caso, a divergência de F é a função  $\nabla \cdot F = \text{div} F = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ . Se  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  é de classe  $C^2$ , o laplaciano de f é a função  $\Delta f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ . Note que  $\Delta f = \text{div}(\text{grad} f)$ . Definições idênticas valem em  $\overline{\mathcal{U}}$ .

Nosso objetivo agora é enunciar o teorema da divergência, que será usado na seção seguinte para obter três identidades fundamentais no estudo do problema I-(1.4). Uma superfície de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$  é um subconjunto S do  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\forall x_0 \in S$  existe uma vizinhança aberta de  $x_0$ ,  $V(x_0) \subset \mathbb{R}^3$  e uma função  $\phi$  real de classe  $C^k$  em  $V(x_0)$  tal que  $\nabla \phi \neq 0$  em  $S \cap V$  e  $S \cap V(x_0) = \{x \in V(x_0) \mid \phi(x) = 0\}$ . Neste caso, utilizando o teorema da função implícita (e uma mudança de coordenadas conveniente) S pode ser representada localmente como o gráfico de uma função de classe  $C^k$ .

Com esta definição temos a seguinte forma do teorema da divergência

Teorema (1.1). Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$  e  $F$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em  $\bar{\Omega}$ . Então

$$\int_{\partial\Omega} F(y) \cdot \nu(y) d\sigma(y) = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx$$

onde  $\nu(y)$  denota a normal exterior a  $\partial\Omega$  no ponto  $y$  e  $d\sigma(y)$  é a medida geométrica natural sobre  $\partial\Omega$ .

Observação. A construção da medida  $d\sigma(y)$  pode ser encontrada na seção 2 do apêndice, no caso em que  $\partial\Omega$  é de classe  $C^2$ . A construção, no caso geral, é análoga.

## 2. As identidades de Green.

Nesta seção vamos obter três identidades fundamentais que serão usadas em todo o restante do curso. As duas primeiras são consequências imediatas do teorema da divergência.

Proposição 2.1. Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio limitado, onde vale o teorema da divergência e  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ . Então

$$(2.1) \quad \int_{\Omega} (v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma$$

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} (v \frac{\partial v}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}) d\sigma$$

onde  $\nu$  denota a normal externa em  $\partial\Omega$  e  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \nu}$  são as derivadas direcionais de  $u$  e  $v$  na direção normal.

Demonstração. Para provar (2.1) note que  $\text{div}(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla v \cdot \nabla u$  e aplique o teorema da divergência, lembrando que  $\nabla v \cdot \nu = \frac{\partial v}{\partial \nu}$ . Para provar (2.2), troque  $u$  por  $v$  na primeira identidade e subtraia a identidade resultante de (2.1).

C.Q.D.

Observações. 1) Se  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  e  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ , então a proposição acima mostra que

$$(2.3) \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma$$

$$(2.4) \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0$$

2) As identidades (2.1), (2.2) são conhecidas como a primeira e a segunda identidades de Green respectivamente. Para algumas aplicações simples de (2.3) e (2.4) veja o exercício 1) deste capítulo.

Teorema 2.2. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio limitado, onde vale o teorema da divergência e  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ . Então,  $\forall x \in \Omega$

$$(2.5) \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} (u(y) \frac{\partial F}{\partial \nu_y}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu_y} F(x-y)) d\sigma(y) + \int_{\Omega} F(x-y) \Delta u(y) dy$$

onde  $F(\xi) = -(4\pi|\xi|)^{-1}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  e  $\frac{\partial}{\partial \nu_y}$  denota a derivada direcional em relação à normal no ponto  $y \in \partial\Omega$ .

Observação: A função  $F$  é muitas vezes chamada uma solução fundamental de  $\Delta$  em  $\mathbb{R}^n$ . Note que  $\Delta_y F(x-y) = 0 \quad \forall y \neq x$ , onde  $\Delta_y$  indica o laplaciano na variável  $y$ . A equação (2.5) é conhecida como a terceira identidade de Green.

Antes de provar o teorema (2.2), é necessário fazer alguns comentários e estabelecer alguns resultados técnicos. Em primeiro lugar, qual é o significado das integrais que ocorrem em (2.5)? Como na integral de superfície  $x \in \Omega$  e  $y \in \partial\Omega$ , é fácil verificar que o integrando é uma função contínua, pois  $x$  está sempre "longe" de  $\partial\Omega$ . Na integral sobre  $\Omega$  isto não ocorre. No entanto, a integral em questão existe, pois  $F$  é localmente integrável em  $\mathbb{R}^3$  e  $\Delta u$  é limitada, pois por hipótese,  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ . Mais precisamente, note que se  $\epsilon > 0$  e se introduzirmos coordenadas esféricas,  $y = x + r w$ ,  $0 \leq r < \epsilon$ ,  $|w| = 1$  então  $dy = r^2 dr dw$  onde  $dw$  denota o elemento de área em  $S(0,1)$  e, portanto

$$\int_{B(x,\epsilon)} |F(x-y)| dy = (4\pi)^{-1} \int_{S(0,1)} dw \int_0^\epsilon \frac{r^2}{r} dr = \frac{\epsilon^2}{2} < \infty.$$

Então, se  $\epsilon > 0$  é tal que  $\overline{B(x, \epsilon)} \subset \Omega$  e  $M = \frac{\sup}{\overline{\Omega}} |\Delta u|$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\overline{\Omega}} F(x-y) \Delta u(y) dy \right| &\leq M \int_{\overline{\Omega}} |F(x-y)| dy = \\ &= M \left( \int_{\overline{\Omega} \setminus B(x, \epsilon)} |F(x-y)| dy + \int_{\overline{B(x, \epsilon)}} |F(x-y)| dy \right) < \infty \end{aligned}$$

pois  $F(x-y)$  é uma função contínua em  $\overline{\Omega} \setminus B(x, \epsilon)$ . Portanto, a integral sobre  $\overline{\Omega}$  existe no sentido de Lebesgue. Em particular, segue que

$$\int_{\overline{\Omega}} F(x-y) \Delta u(y) dy = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\overline{\Omega} \setminus B(x, \epsilon)} F(x-y) \Delta u(y) dy$$

onde as integrais sobre  $\overline{\Omega} \setminus B(x, \epsilon)$  podem ser interpretadas como integrais de Riemann, uma vez que os integrandos são funções contínuas definidas nos compactos  $\overline{\Omega} \setminus B(x, \epsilon)$ .

Lema 2.3. Seja  $g \in C(\overline{B(x, R)})$ . Então

$$(2.6) \quad \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{S(x, \epsilon)} F(x-y) g(y) d\sigma(y) = 0$$

$$(2.7) \quad \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{S(x, \epsilon)} \frac{\partial F}{\partial \nu_y}(x-y) g(y) d\sigma(y) = g(x)$$

onde  $\nu_y$  denota a normal externa a  $S(x, \epsilon)$  no ponto  $y$ .

Demonstração. Para provar (2.6) note que

$$\int_{S(x, \epsilon)} F(x-y) g(y) d\sigma(y) = - \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S(x, \epsilon)} g(y) d\sigma(y)$$



Portanto,

$$\left| \int_{S(x, \epsilon)} F(x-y) g(y) d\sigma(y) \right| \leq \frac{1}{4\pi\epsilon} \sup_{\overline{B}(x, R)} |g(y)| \int_{S(x, \epsilon)} d\sigma(y) =$$
$$= \frac{4\pi \epsilon^2}{4\pi\epsilon} \sup_{\overline{B}(x, R)} |g(y)| = \epsilon \sup_{\overline{B}(x, R)} |g(y)| \rightarrow 0$$

quando  $\epsilon \downarrow 0$ . Para (2.7), note primeiro que  $\frac{\partial F}{\partial v_y}(x-y) = (4\pi|x-y|)^{-2}$  (prove!) e, portanto

$$\int_{S(x, \epsilon)} \frac{\partial F}{\partial v_y}(x-y) g(y) d\sigma(y) = \frac{1}{4\pi \epsilon^2} \int_{S(x, \epsilon)} g(y) d\sigma(y) .$$

Note que o lado direito desta igualdade é precisamente o valor médio da função  $g(y)$  sobre a esfera  $S(x, \epsilon)$ . O resultado segue imediatamente, pois  $g$  é contínua. De fato, como  $g$  é uniformemente contínua, dado  $\delta > 0$ , existe  $\gamma = \gamma(\delta)$  tal que, se  $y, y' \in \overline{B}(x, R)$ ,  $|y-y'| < \gamma$  então  $|g(y) - g(y')| < \delta$ . Portanto, tomando  $\epsilon < \gamma$  temos

$$\left| \frac{1}{4\pi \epsilon^2} \int_{S(x, \epsilon)} g(y) d\sigma(y) - g(x) \right| = \left| \frac{1}{4\pi \epsilon^2} \int_{S(x, \epsilon)} (g(y) - g(x)) d\sigma(y) \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{4\pi \epsilon^2} \int_{S(x, \epsilon)} |g(y) - g(x)| d\sigma(y) < \frac{\delta}{4\pi \epsilon^2} \int_{S(x, \epsilon)} d\sigma(y) = \delta .$$

C.Q.D.

Demonstração do teorema 2.2. Fixe  $x \in \Omega$  e seja  $\epsilon > 0$  tal que  $\overline{B}(x, \epsilon) \subset \Omega$ . Defina  $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{B}(x, \epsilon)$  e aplique a segunda identidade de Green com  $v(y) = F(x-y)$  para obter

$$\int_{\overline{\Omega}_\varepsilon} F(x-y) \Delta u(y) dy = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left( F(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - u(y) \frac{\partial F}{\partial \nu_y}(x-y) \right) d\sigma(y) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left( F(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - u(y) \frac{\partial F}{\partial \nu_y}(x-y) \right) d\sigma(y) + \int_{S(x,\varepsilon)} \left( F(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - u(y) \frac{\partial F}{\partial \nu_y}(x-y) \right) d\sigma(y).$$

Para completar a demonstração basta tomar o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  utilizando o lema (2.3) e lembrando que a normal externa a  $\partial\Omega$  aponta para dentro da bola  $B(x,\varepsilon)$ .

C.Q.D.

### 3. O princípio do máximo para funções harmônicas.

Definição. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um aberto. Uma função  $u \in C^2(\Omega)$  é dita harmônica em  $\Omega$  se e só se  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ .

Teorema (3.1). Seja  $u$  como na definição acima. Então  $\forall x \in \Omega$ ,  $\forall B(x,R) \subset \Omega$  temos

$$(3.1) \quad u(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(x,R)} u(y) d\sigma(y)$$

Observação. Em outras palavras,  $u(x)$  é o valor médio de  $u$  sobre qualquer esfera centrada em  $x$  e inteiramente contida em  $\Omega$ . Por esta razão, o resultado acima é conhecido como o teorema do valor médio para funções harmônicas.

Demonstração. Aplicando o teorema (2.2) a  $\overline{B(x,R)}$ , temos

$$u(x) = \int_{S(x,R)} u(y) \frac{\partial F}{\partial v_y}(x-y) d\sigma(y) - \int_{S(x,R)} \frac{\partial u}{\partial v_y} F(x,y) d\sigma(y)$$

pois  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ . Mas em  $S(x,R)$  temos  $|x-y| = R$  e, portanto

$$F(x-y) = \frac{-1}{4\pi R^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial v_y}(x-y) = \frac{1}{4\pi R^2}$$

Logo

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(x,R)} u(y) d\sigma(y) + \frac{1}{4\pi R} \int_{S(x,R)} \frac{\partial u}{\partial v_y} d\sigma(y) .$$

Mas, pela equação (2.4), a integral contendo  $\frac{\partial u}{\partial v_y}$  é zero e o teorema está provado.

C.Q.D.

Observação. O teorema (3.1) tem a seguinte recíproca: suponha que  $u \in C(\Omega)$  e que a relação (3.1) vale  $\forall x \in \Omega, \forall \overline{B(x,R)} \subset \Omega$ . Então  $u$  é harmônica em  $\Omega$ . Este é um fato notável, pois é possível provar que toda função harmônica é  $C^\infty$  (e, de fato, analítica! Veja [23], página 96). Para a demonstração deste fato, veja o problema 3) deste capítulo.

Teorema (3.2). Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio limitado e  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  tal que  $u$  toma valores reais e é harmônica em  $\Omega$ . Então, se  $u$  atinge seu máximo (ou mínimo) em  $\Omega$ ,  $u$  é constante em  $\overline{\Omega}$ .

Demonstração. Vamos provar o teorema no caso do máximo. Para o mínimo, use demonstração análoga ou aplique o princípio do máximo à função  $(-u)$ . Seja  $M = \max_{\overline{\Omega}} u$ . Se  $u$  atinge seu máximo em  $\Omega$ , en-

tão  $S = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$  é não vazio e é fechado, pois  $u$  é contínua. Basta, portanto, provar que  $S$  é aberto em  $\Omega$ , pois como  $\Omega$  é conexo, segue que  $S = \Omega$  e, pela continuidade de  $u$ , temos  $u(x) = M \quad \forall x \in \bar{\Omega}$ . Para provar que  $S$  é aberto, seja  $x_0 \in S$ . Então existe  $\overline{B(x_0, r_0)} \subset \Omega$  tal que  $u(x_0) \geq u(x)$ ,  $\forall x \in B(x_0, r_0)$ . Pelo teorema (3.1)

$$M = u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(x_0, R)} u(y) d\sigma(y), \quad 0 < R < r_0.$$

Como  $u$  é contínua, segue que  $u(y) = M \quad \forall y \in S(x_0, R)$ ,  $0 < R < r_0$ . De fato, caso contrário, existem  $R_0 \in (0, r_0)$  e  $y_0 \in S(x_0, R_0)$  tal que  $u(y_0) < M$  (note que este é o único caso possível, uma vez que  $u(x) \leq M \quad \forall x \in B(x_0, r_0)$ ). Então, pela continuidade de  $u$ , existe vizinhança  $N(y_0) \subset S(x_0, R_0)$  do ponto  $y_0$ , onde  $u(y) \leq M$ . Portanto

$$M = u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \left[ \int_{S(x_0, R_0) \setminus N(y_0)} u(y) d\sigma(y) + \int_{N(y_0)} u(y) d\sigma(y) \right] <$$

$$< \frac{1}{4\pi R^2} \left[ M \int_{S(x_0, R_0) \setminus N(y_0)} d\sigma(y) + M \int_{N(y_0)} d\sigma(y) \right] = M$$

uma contradição. Segue, portanto, que  $u(x) = M, \forall x \in B(x_0, r_0)$  e o teorema está provado.

C.Q.D.

Observação. Se  $\Omega$  e  $u$  são como no teorema (3.2) e  $u$  não é constante em  $\Omega$ , seu máximo (e mínimo) são atingidos apenas em  $\partial\Omega$ .

Corolário 3.3. Existe, no máximo, uma solução do problema

- i)  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$
- ii)  $\Delta u = f \in C(\Omega)$
- iii)  $u|_{\partial\Omega} = g \in C(\partial\Omega)$

Demonstração. Se  $u_1$  e  $u_2$  são soluções, então as partes real e imaginária de  $w = u_1 - u_2$  satisfazem

- i)  $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$
- ii)  $\Delta v = 0$  em  $\Omega$
- iii)  $v|_{\partial\Omega} = 0$ .

Portanto, pelo teorema (3.2), segue que  $\text{Re}w = \text{Im}w = 0$ .

C.Q.D.

#### 4. A função de Green.

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio limitado, onde vale o teorema da divergência. Para motivar a introdução da função de Green, suponha que o problema

- i)  $u \in C^2(\bar{\Omega})$
- ii)  $\Delta u = f \in C(\bar{\Omega})$
- iii)  $u|_{\partial\Omega} = g \in C(\partial\Omega)$

tem a solução (e portanto apenas esta pelo corolário (3.3)). Então, a terceira identidade de Green implica

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left( g(y) \frac{\partial F}{\partial \nu_y}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) F(x-y) \right) d\sigma(y) + \int_{\Omega} F(x-y)f(y)dy$$

$\forall x \in \Omega$ . Esta representação da solução tem um defeito: ela contém  $\frac{\partial u}{\partial \nu_y}$ , que não é um dado do problema em questão e que, de fato, deve ser determinada pelos dados  $f$  e  $g$ , uma vez que estes definem unicamente a solução. É conveniente, portanto, obter uma representação da solução  $u(x)$  que contenha apenas  $f = \Delta u$  e  $g = u|_{\partial\Omega}$ . A idéia básica é, então, substituir  $F(x-y)$  por uma função  $G(x,y)$ , com propriedades semelhantes às de  $F$ ; mas tal que  $G(x,y) = 0$  se  $x \in \Omega$  e  $y \in \partial\Omega$ , de modo que o termo contendo  $\frac{\partial u}{\partial \nu_y}$  não ocorra na relação correspondente à terceira identidade de Green. Mais precisamente

Definição. Seja  $\Omega$  um domínio limitado. A função de Green do operador  $\Delta$  em  $\Omega$  é uma função da forma

$$(4.1) \quad G(x,y) = -F(x-y) + H(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \times \bar{\Omega}$$

tal que para cada  $x \in \Omega$  fixo

- a)  $H(x, \cdot) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$
- b)  $\Delta_y H(x,y) = 0$  em  $\Omega$
- c)  $H(x,y) = F(x,y)$ ,  $y \in \partial\Omega$ .

Aplicando o corolário (3.3), vê-se imediatamente que existe no máximo uma função  $H(x,y)$  satisfazendo a definição acima. Conseqüentemente, a função de Green, se existir, é única. A existência é muito mais difícil e será provada no próximo capítulo, supondo que  $\partial\Omega$  é de classe  $C^2$ . Além disso, é possível provar ([39], ca-

pítulo 21) que para cada  $x \in \Omega$  fixo,  $G(x,y)$  tem derivada normal interior, i.e.,  $\frac{\partial G}{\partial v_-}(x,y) = \lim_{t \rightarrow 0} \nabla G(x,y + tv_y) \cdot v_y$  existe uniformemente em  $y$ , onde o gradiente é calculado em relação à segunda variável. Então, uma demonstração análoga à da terceira identidade de Green mostra que

$$(4.2) \quad u(x) = - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial v_-}(x,y) d\sigma(y) - \int_{\Omega} G(x,y) \Delta u(y) dy$$

$\forall x \in \Omega$ . Note que a integral sobre  $\Omega$  existe no sentido de Lebesgue pela mesma razão que o termo correspondente na terceira identidade de Green, uma vez que a função  $y \in \bar{\Omega} \rightarrow H(x,y)$ ,  $x \in \Omega$  fixo é contínua.

É interessante notar que se  $u$  é uma função harmônica, então (4.2) se reduz a

$$(4.3) \quad u(x) = - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial v_-}(x,y) d\sigma(y)$$

$\forall x \in \Omega$ . A equação (4.3) é conhecida como a fórmula de Poisson em  $\Omega$ , enquanto a função  $-\frac{\partial G}{\partial v_-}(x,y)$  é chamada o núcleo de Poisson de  $\Omega$ . Por exemplo, se  $\Omega = B(0,1)$ , a função de Green e o núcleo de Poisson são dados por

$$(4.4) \quad G(x,y) = \frac{+1}{4\pi} \left[ \frac{1}{|x-y|} + \frac{|x|}{|x - |x|^2 y|} \right]$$

$$(4.5) \quad - \frac{\partial G}{\partial v_-}(x,y) = \frac{1 - |x|^2}{4\pi |x-y|^3}$$

Para a obtenção de (4.4) veja, por exemplo, [18]. As funções

$G$  e  $-\frac{\partial G}{\partial \nu}$  para bolas arbitrárias  $B(a,R)$  pode ser obtida de (4.4) e (4.5) por meio da mudança  $(x,y) \rightarrow (a+Rx, a+Ry)$ . Aplicações interessantes podem ser encontradas nos problemas do capítulo III.

### 5. Propriedades da função de Green.

Nesta seção vamos descrever as propriedades da função  $G(x,y)$  que utilizaremos para estabelecer a existência das soluções do problema (1.4) do capítulo I. Daqui por diante vamos supor sempre que  $\Omega$  é um domínio regular, i.e., um domínio limitado com fronteira de classe  $C^2$  (como definido na seção II-1). Sob estas condições provaremos, no próximo capítulo, que a função  $H(x,y)$  existe, toma valores reais e pertence a  $C(\bar{\Omega})$  na variável  $y$  para cada  $x \in \Omega$  fixo (veja o corolário (3.4) do capítulo III). Conseqüentemente,  $G(x,y)$  existe e pertence a  $C(\bar{\Omega} \setminus \{x\})$  para cada  $x \in \Omega$ .

Lema (5.1). Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio regular. Então

- a)  $G(x,y) > 0$ ,  $\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$
- b)  $G(x,y) = G(y,x)$ ,  $\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$
- c)  $G \in L^2(\Omega \times \Omega)$ .

Demonstração. Para provar a) fixe  $x \in \Omega$  e note que  $G(x,y) \rightarrow \infty$  quando  $y \rightarrow x$ , pois  $(-F(x-y))$  tem esta propriedade e  $H(x,y)$  é limitada em vizinhança de  $x$ . Portanto,  $\forall \varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, temos  $\overline{B(x,\varepsilon)} \subset \Omega$  e  $G(x,y) > 0$  em  $\partial B(x,\varepsilon)$ . Seja  $\Omega_\varepsilon$  o complementar de  $\overline{B(x,\varepsilon)}$  em  $\Omega$ . Então  $G(x,y)$  é harmônica em  $\Omega_\varepsilon$ , pertence a  $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e satisfaz  $G(x,y) = 0$  em  $\partial\Omega$ ,  $G(x,y) > 0$  em  $\partial B(x,\varepsilon)$ . O teorema II-(3.2) mostra então que  $G(x,y) > 0$  em  $\Omega_\varepsilon$  (por quê?). Como  $\varepsilon$  pode ser feito arbitrariamente pequeno, o resultado está provado.



Para provar b) note que se  $x = y$ , então  $G(x, y) = G(y, x) = \infty$ . Se  $x \neq y$ , seja  $\epsilon > 0$  tal que  $\overline{B(x, \epsilon)} \cup \overline{B(y, \epsilon)} \subset \Omega$ ,  $\overline{B(x, \epsilon)} \cap \overline{B(y, \epsilon)} = \emptyset$ , aplique a segunda identidade de Green (proposição 2.1 deste capítulo) às funções  $u(z) = G(x, z)$ ,  $v(z) = G(y, z)$  em  $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus (\overline{B(x, \epsilon)} \cup \overline{B(y, \epsilon)})$  e tome o limite quando  $\epsilon$  tende a zero (utilizando o lema (2.3)). O resultado então segue. Os detalhes são deixados como exercício.

Considere agora c). Como  $G(x, y) > 0$  em  $\Omega \times \Omega$  temos  $H(x, y) > F(x-y) \forall (x, y) \in \Omega \times \Omega$ . Agora, aplicando o princípio do máximo para funções harmônicas (veja a observação antes do corolário II-(3.3)) a  $y \in \overline{\Omega} \rightarrow H(x, y)$ ,  $x \in \Omega$  fixo temos,  $H(x, y) \leq \max_{y \in \partial\Omega} H(x, y) = \max_{y \in \partial\Omega} \left( \frac{-1}{4\pi |x-y|} \right) < \min_{y \in \partial\Omega} \left( \frac{1}{4\pi |x-y|} \right) \leq \frac{1}{4\pi |x-y|} \forall y \in \overline{\Omega}$ . Portanto

$$(5.1) \quad 0 < G(x, y) = -F(x-y) + H(x, y) < \frac{1}{2\pi |x-y|} \quad \forall (x, y) \in \Omega \times \Omega.$$

Mas a função  $(x, y) \rightarrow |x-y|^{-1}$  pertence a  $L^2(\Omega \times \Omega)$ . De fato, primeiro fixe  $x \in \Omega$  e seja  $R$  tal que  $B(x, R) \supset \overline{\Omega}$ . Então

$$(5.2) \quad \int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^2} \leq \int_{B(x, R)} \frac{dy}{|x-y|^2} = \int_{B(0, R)} \frac{dz}{|z|^2} = 4\pi R < \infty$$

onde usamos  $z = x - y$  e calculamos a integral resultante em coordenadas esféricas. A afirmação segue então integrando em  $x$  pois  $\Omega$  é limitado. Conseqüentemente  $G(x, y)$  (que é mensurável) pertence a  $L^2(\Omega \times \Omega)$ , pois é limitada superior e inferiormente por funções desta classe.

C.Q.D.

Observações. 1) Por definição, a função  $G(x,y)$  é harmônica na segunda variável e se anula quando esta pertence a  $\partial\Omega$ . A propriedade b) provada acima mostra que estas afirmações também são verdadeiras para a primeira variável.

2) As propriedades b) e c) mostram que o operador integral em  $L^2(\Omega)$  com núcleo  $G(x,y)$  é um operador compacto (de fato, Hilbert-Schmidt) e auto-adjunto (veja os teoremas (2.6) e (2.7) do apêndice).

Nosso próximo objetivo é provar que a solução do problema

$$(5.3) \quad \begin{cases} v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ -\Delta v = f \in C^1(\Omega), \quad \text{limitada} \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

é dada por (compare com (4.2)!)

$$(5.4) \quad v(x) = - \int_{\Omega} G(x,y) f(y) dy .$$

Este resultado será utilizado na próxima seção para obter uma equação integral equivalente ao problema (1.4) do capítulo I (com  $n=3$  e  $\Omega$  domínio regular). A demonstração em questão é longa e técnica, e é conveniente dividi-la em uma série de lemas e teoremas. O primeiro deles é um caso particular de um resultado técnico de medida e integração e sua demonstração será deixada como exercício (problema 5).

Lema (5.2). Seja  $F(x) = (-4\pi|x|)^{-1}$ ,  $x \neq 0$ . Então

$$(5.5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{|y| \leq h} \int_{\Omega} |F(x+y) - F(x)|^p dx = 0, \quad p \in [1,3),$$

$$(5.6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{|y| \leq h} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial F}{\partial x_i}(x+y) - \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \right|^p dx, \quad p \in [1, 3/2),$$

$$i = 1, 2, 3 \quad .$$

O próximo passo é estudar a contribuição da solução fundamental  $F(x)$  em (5.4). Mais precisamente

Teorema (5.3). a) Seja  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Então a função

$$(5.7) \quad g(x) = \int_{\Omega} F(x-y)f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

pertence a  $C^1(\mathbb{R}^3) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$  e satisfaz  $\Delta g = 0$  em  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ .

b) Suponha que  $f \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . Então  $g \in C^2(\Omega)$  e satisfaz  $\Delta g = f$  em  $\Omega$ .

Demonstração. Para provar a) note primeiro que

$$(5.8) \quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x-y) = - \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3}, \quad i = 1, 2, 3$$

de modo que  $\left| \frac{\partial F}{\partial x_i}(x-y) \right| \leq \frac{1}{4\pi |x-y|^2}$ . É fácil verificar que as

condições do problema 6 deste capítulo são satisfeitas e portanto

$g$  é diferenciável e

$$(5.9) \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x-y) f(y) dy, \quad i = 1, 2, 3 \quad .$$

A continuidade desta função segue de (5.6) com  $p=1$ . Agora se  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ , o processo de derivação sob o sinal de integral pode ser repetido indefinidamente pois  $x$  está "longe" de  $y \in \Omega$  e não

existem singularidades a considerar. Em particular  $\Delta g(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  pois  $\Delta_x F(x-y) = 0$  para  $x \neq y$ . Se  $x \in \Omega$ , é fácil verificar que as derivadas  $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)$ ,  $i, j=1, 2, 3$ ,

não são localmente integráveis e portanto não é possível aplicar o problema 6 para derivar duas vezes sob o sinal de integral para  $x \in \Omega$ . O remédio é supor  $f \in C^1(\Omega)$  e integrar por partes! Mais precisamente, fixe  $x_0 \in \Omega$  e seja  $B = B(x_0, R)$  tal que  $\bar{B} \subset \Omega$ . Então

$$(5.10) \quad g(x) = \int_B F(x-y) f(y) dy + \int_{\Omega \setminus B} F(x-y) f(y) dy$$

e se  $x \in B(x_0, R)$ , é fácil demonstrar por argumentos análogos aos anteriores que a integral sobre  $\Omega \setminus B$  define uma função  $C^\infty$ . O problema é a integral sobre  $B$ . Seja  $\tilde{g}(x)$  esta integral. Então, pela parte a)

$$(5.11) \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_i}(x) = \int_B \frac{\partial F}{\partial x_i}(x-y) f(y) dy, \quad i = 1, 2, 3.$$

Por um cálculo direto  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x-y) = -\frac{\partial F}{\partial y_i}(x-y)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , de modo que

$$(5.12) \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_i}(x) = - \int_B \frac{\partial F}{\partial y_i}(x-y) f(y) dy, \quad i = 1, 2, 3.$$

Mas  $\frac{\partial}{\partial y_i}(F(x-y) f(y)) = \frac{\partial F}{\partial y_i}(x-y) f(y) + F(x-y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(y)$ . Então

$$(5.13) \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_i}(x) = - \int_B \frac{\partial}{\partial y_i} (F(x-y) f(y)) dy + \int_B F(x-y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) dy .$$

Aplicando o teorema da divergência à primeira integral do lado direito de (5.13), obtêm-se

$$(5.14) \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_i}(x) = - \int_{\partial B} F(x-y) f(y) v_i(y) dy + \int_B F(x-y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) dy$$

onde  $v_i(y)$  é a  $i$ -ésima componente da normal  $v(y)$  a  $\partial B$  no ponto  $y$ . Pelo problema 6 e a parte a) segue que  $g(x)$  é de classe  $C^2$  em  $B(x_0, R)$ . Como  $x_0$  é arbitrário, segue que  $g$  pertence a  $C^2(\Omega)$ . Resta provar que  $\Delta g(x) = f(x)$  em  $\Omega$ . Para isso, basta mostrar  $\Delta \tilde{g}(x) = f(x) \forall x \in B(x_0, R), \forall x_0 \in \Omega$ . É então suficiente provar que

$$(5.15) \quad (\Delta \tilde{g} | \phi) = (f | \phi) , \quad \forall \phi \in C_0^\infty(B(x_0, R))$$

onde  $(\cdot | \cdot)$  é o produto interno usual em  $L^2(B(x_0, R))$  e  $C_0^\infty(B(x_0, R))$  denota a coleção das funções  $C^\infty$  com suporte compacto contido em  $B(x_0, R)$ . Como  $\phi \equiv 0$  em vizinhança aberta de  $\partial \bar{B}$ , a segunda identidade de Green (equação II-(2.2)) mostra que

$$(5.16) \quad (\Delta \tilde{g} | \phi) = \int_B \Delta g(x) \overline{\phi(x)} dx = \int_B g(x) \overline{\Delta \phi(x)} dx .$$

Levando (5.7) em (5.16) e aplicando o teorema de Fubini (seção 2 do apêndice)

$$(5.17) \quad (\Delta \tilde{g} | \phi) = \int_B f(y) \left( \int_B F(x-y) \overline{\Delta \phi(x)} dx \right) dy .$$

Para calcular a integral na variável  $x$ , fixe  $y \in B$  e seja  $\varepsilon > 0$  tal que o fecho de  $B_\varepsilon = B(y, \varepsilon)$  está contido em  $B$ . Então

$$(5.18) \quad \int_B F(x-y) \overline{\Delta\phi(x)} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B \setminus B_\varepsilon} F(x-y) \overline{\Delta\phi(x)} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{B \setminus B_\varepsilon} \Delta F(x-y) \overline{\phi(x)} dx + \int_{\partial(B \setminus B_\varepsilon)} \left( F(x-y) \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \nu_x}(x) - \overline{\phi(x)} \frac{\partial F}{\partial \nu_x}(x-y) \right) d\sigma(x) \right]$$

onde utilizamos a segunda identidade de Green a  $B \setminus B_\varepsilon$ . Como  $\Delta F(x-y) = 0$  para  $x \neq y$ , o limite acima pode ser calculado utilizando o lema II-(2.3)

$$(5.19) \quad \int_B F(x-y) \overline{\Delta\phi(x)} dx = \phi(y) .$$

Combinando (5.17) e (5.19) temos (5.15) e o resultado está provado.

C.Q.D.

Observação. Seja  $C^\alpha(\Omega)$ ,  $\alpha \in (0,1)$ , a coleção das  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfazem uma condição de Holder local de ordem  $\alpha$ , i.e.,  $\forall x \in \Omega$  existe vizinhança aberta  $V(x) \subset \Omega$  tal que  $|f(x+y) - f(y)| \leq C|y|^\alpha \forall y \in V(x)$ . Defina também  $C^{k+\alpha}(\Omega)$ ,  $k = 0,1,2,\dots$  como sendo o conjunto das  $f \in C^k(\Omega)$  tais que  $f$  e suas derivadas parciais até ordem  $k$  pertencem a  $C^\alpha(\Omega)$ . Com esta notação, argumentos mais delicados do que os usados acima mostram que se  $f \in C^{\alpha+k}(\Omega)$ , então  $g \in C^{k+2}$ . Veja [18], páginas 97-102.

Vamos considerar agora a contribuição de  $H(x,y)$  para (5.4). De

finis

$$(5.20) \quad w(x) = \int_{\Omega} H(x,y) f(y) dy$$

para  $f \in L^{\infty}(\Omega)$ , de modo que (5.4) pode ser escrita na forma  $v(x) = g(x) - w(x)$ . Tendo em vista o teorema (5.3), para provar que (5.4) é solução de (5.1) basta demonstrar que  $w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e  $\Delta w(x) = 0$  em  $\Omega$ . (A condição  $f \in L^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$  é necessária apenas para provar  $\Delta g = f$  em  $\Omega$ ; para as propriedades de  $w$  discutidas abaixo, usaremos apenas  $f \in L^{\infty}(\Omega)$ ). A continuidade de  $w(x)$  em  $\bar{\Omega}$  segue da estimativa  $|H(x,y)| \leq (4\pi|x-y|)^{-1}$  provada na demonstração da parte c) do lema (5.1) desta seção e do teorema da convergência dominada (generalizado; veja a seção 2 do apêndice). A dificuldade é provar que  $w \in C^2(\Omega)$  e  $\Delta w = 0$  em  $\Omega$ . Note que formalmente  $\Delta w = 0$  pois  $H(x,y) = H(y,x)$  para  $x \neq y$  e  $H(x,y)$  é harmônica em relação à primeira variável. O problema é como usar isto para obter o que queremos. Mais uma vez, a resposta é integrar por partes! Mais precisamente, seja  $C_0^{\infty}(\Omega)$  a coleção das  $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\phi$  é  $C^{\infty}$  e tem suporte compacto contido em  $\Omega$ . Usando o teorema de Fubini e a segunda identidade de Green é fácil ver que

$$(5.21) \quad (w|\Delta\phi) = 0 \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

isto é,  $w$  é harmônica no sentido fraco como explicado na definição abaixo

Definição. Uma função mensurável  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita localmente integrável em  $\Omega$  se e só se  $\int_K |u(x)| dx < \infty \quad \forall$  compacto  $K \subset \Omega$ . Nes

te caso, escreve-se  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  (note que  $C(\bar{\Omega}) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ ). Uma função  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  é dita harmônica em  $\Omega$  no sentido fraco se e só se  $(u|\Delta\phi) = 0 \quad \forall \phi \in C^\infty_0(\Omega)$ .

É claro que se  $u$  é harmônica em  $\Omega$  no sentido usual, então  $u$  é harmônica no sentido fraco. O próximo teorema, conhecido como o lema de Weyl diz que a recíproca é verdadeira.

Teorema (5.4). Suponha que  $u$  é harmônica no sentido fraco em  $\Omega$ . Então  $u \in C^\infty(\Omega)$  e  $\Delta u = 0$  no sentido usual.

Observação. A demonstração deste resultado é relativamente técnica e está esquematizada no problema 7 deste capítulo. Note que a hipótese " $\Omega$  domínio regular" não tem a menor importância no teorema (5.4) assim como na definição que o precede (a final de contas, estamos estudando propriedades locais da função  $u$ !). Em outras palavras, basta supor que  $\Omega$  é um aberto. Para uma formulação mais geral do teorema acima veja, por exemplo, [31], seção IX.6 e as notas correspondentes (página 112).

Combinando então os resultados e observações acima, obtém-se facilmente

Corolário (5.5). A única solução de (5.1) é dada por (5.4).

## 6. O problema de auto-valores.

Nesta seção, vamos discutir o problema de auto-valores para  $(-\Delta)$  em  $\Omega$  com condições de contorno de Dirichlet. Mais precisamente, vamos considerar

$$(6.1) \quad \begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ -\Delta u = \lambda u \quad \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} .$$



Como mencionado na seção anterior, o operador integral

$$(6.2) \quad (K_G f)(x) = \int_{\Omega} G(x,y) f(y) dy, \quad f \in L^2(\Omega)$$

é um operador compacto (de fato, Hilbert-Schmidt) e auto-adjunto em  $L^2(\Omega)$ . É conveniente antes de mais nada, estabelecer certas propriedades de  $K_G$ , necessárias ao estudo de (6.1).

Lema (6.1). Se  $f \in L^2(\Omega)$  então  $K_G f \in C(\bar{\Omega})$  e  $K_G f|_{\partial\Omega} = 0$ .

Demonstração. Note, antes de mais nada, que a igualdade em (6.2) vale apenas em quase toda parte. O que vamos fazer é provar que o lado direito de (6.2) define uma função contínua em  $\bar{\Omega}$  e portanto a classe de equivalência de  $K_G f$  contém uma função contínua. Com esta interpretação em mente, note que pela desigualdade de Hölder, com  $p = q = 2$ , temos

$$(6.3) \quad \left| \int_{\Omega} G(x,y) f(y) dy \right| \leq \left[ \int_{\Omega} G(x,y)^2 dy \right]^{1/2} \|f\|_2$$

$\forall x \in \bar{\Omega}$  pois  $0 < G(x,y) < (2\pi|x-y|)^{-1}$  em  $\Omega \times \bar{\Omega}$  e  $G(x,y) = G(y,x)$ , (como provado no lema II-(5.1)). Seja então  $h(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$  a função definida pela integral do lado esquerdo de (6.3). Então,  $\forall x, x' \in \bar{\Omega}$

$$(6.4) \quad |h(x) - h(x')| \leq \int_{\Omega} |G(x,y) - G(x',y)| |f(y)| dy.$$

Então o integrando tende a zero quando  $x'$  tende a  $x$ ,  $y$ -qtp. e é limitado por  $\frac{|f(y)|}{2\pi} (|x-y|^{-1} + |x'-y|^{-1}) \in L^1(\Omega, dy)$  (novamente pela desigualdade de Hölder). O resultado segue então pelo teorema da convergência dominada (generalizado, como na seção 2 do apêndice) e

do lema II-(5.2)

C.Q.D.

Lema (6.2). O operador  $K_G$  é injetivo.

Demonstração. Vamos provar que se  $f \in L^2(\Omega)$  e  $K_G f = 0$ , então  $f = 0$ . Como  $K_G = K_G^*$ , temos

$$(6.5) \quad 0 = (K_G f | \phi) = (f | K_G \phi) \quad \forall \phi \in L^2(\Omega).$$

Conseqüentemente,  $f$  é ortogonal à imagem de  $L^2(\Omega)$  por  $K_G$ .

Basta então provar que  $K_G(L^2(\Omega))$  é denso em  $L^2(\Omega)$ . Para isso, vamos mostrar que  $C_0^\infty(\Omega) \subset K_G(L^2(\Omega))$ . Seja  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  e defina  $\psi = -\Delta\phi$ . Então  $\phi$  satisfaz

$$(6.6) \quad \begin{cases} \phi \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ \Delta\phi = -\psi \in C^1(\bar{\Omega}) \\ \phi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

trivialmente, pois  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Pelo teorema (5.5) da seção anterior temos, então

$$(6.7) \quad \phi(x) = - \int G(x,y) (-\psi(y)) dy = (K_G \psi)(x)$$

C.Q.D.

Teorema (6.3). O problema (6.1) é equivalente à equação  $u = \lambda K_G u$  em  $L^2(\Omega)$ .

Demonstração. Se  $u$  é solução de (6.1), então  $u \in L^2(\Omega)$  e pelo corolário (5.5) da seção anterior, temos

$$(6.8) \quad u(x) = \lambda \int_{\Omega} G(x,y) u(y) dy$$

e portanto  $u = \lambda K_G u$  em  $L^2(\Omega)$ . Reciprocamente, suponha que  $u \in L^2(\Omega)$  é solução de  $u = \lambda K_G u$ . Vamos provar que  $u$  é solução de (6.1). Em primeiro lugar, note que pelo lema (6.1) podemos supor que  $u \in C(\Omega)$  e temos  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Em particular  $u \in L^\infty(\bar{\Omega})$ . Então  $K_G u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  pelos teoremas (5.3) e (5.4) da seção anterior. Mas então  $u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , pois  $u = \lambda K_G u$ . Aplicando novamente os teoremas (5.3) e (5.4) segue que  $u = \lambda K_G u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e pelo corolário (5.5), é solução do problema (6.1).

C.Q.D.

Lema (6.4). Seja  $u$  uma solução não trivial (i.e., uma auto-função) de (6.1). Então  $\lambda > 0$ .

Demonstração. Suponha que  $u$  é uma solução não trivial e  $\lambda \leq 0$ . Então, utilizando a primeira identidade de Green (proposição (2.1) deste capítulo) e o problema (6.1), obtém-se

$$(6.9) \quad 0 \leq -\lambda(u|u) = (\Delta u|u) = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq 0.$$

Conseqüentemente,  $u$  é constante em  $\bar{\Omega}$  (por que?) e como  $u|_{\partial\Omega} = 0$  segue  $u = 0$ , uma contradição.

C.Q.D.

Combinando os resultados acima com o teorema espectral para operadores compactos auto-adjuntos (seção 4 do apêndice), temos, finalmente,

Teorema (6.5). O problema (6.1) tem soluções não triviais apenas para uma coleção enumerável  $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  satisfazendo

$$(6.10) \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-2} < \infty$$

onde os números  $\lambda_j^{-1}$  são os auto-valores do operador  $K_G$  (e têm, portanto, multiplicidade finita). Além disso, a coleção  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  das auto-funções normalizadas correspondentes forma um conjunto ortonormal completo em  $L^2(\Omega)$ .

Vamos agora fazer alguns comentários sobre a aplicação do teorema acima ao problema de condução de calor. Seja  $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$  a coleção das seqüências complexas  $\alpha = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  tais que  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ . Então  $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$  é um espaço de Hilbert com produto interno  $(\alpha | \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$ . A função

$$(6.11) \quad k \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow \hat{f}(k) = \int_{\Omega} f(x) \overline{\phi_k(x)} dx$$

é chamada a transformada de Fourier de f em relação a  $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Note que os valores desta função são precisamente os coeficientes de Fourier de f que aparecem na equação I-(3.16). Se  $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z}^+)$ , defina a transformada inversa pela fórmula

$$(6.12) \quad \check{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k.$$

Note que  $\check{\alpha} \in L^2(\Omega)$ . O teorema acima mostra então que vale a identidade de Parseval

$$(6.13) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

e mais ainda, qualquer  $f \in L^2(\Omega)$  pode ser recuperada de sua transformada utilizando a fórmula de inversão

$$(6.14) \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) \phi_k = (\hat{f})^\vee.$$

Portanto, a aplicação  $f \rightarrow \hat{f}$  é uma isometria (i.e., linear, contínua e preserva norma) de  $L^2(\Omega)$  sobre  $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ . Agora, se  $f \in L^2(\Omega)$ , é fácil verificar que a série

$$(6.15) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) \phi_k(x) \exp(-\lambda_k t)$$

converge uniformemente (em relação a  $t$ ) na topologia de  $L^2(\Omega)$ , i.e.

$$(6.16) \quad \sup_{t \geq 0} \|u(\cdot, t) - u_N(\cdot, t)\|_2 \rightarrow 0$$

quando  $N \rightarrow \infty$ . Também não é difícil provar que  $\|u(\cdot, t) - f(\cdot)\|_2 \rightarrow 0$  quando  $t \downarrow 0$ , e além disso (6.18) é a única solução do problema de valor inicial para a equação do calor no sentido descrito no problema 8) deste capítulo. Caso  $f \in C^2(\bar{\Omega})$  e  $f|_{\partial\Omega} = 0$  é possível provar que as séries em (6.13) e (6.14) convergem uniformemente a  $f$ , e uma solução clássica do problema I-(1.1) com  $n=3$  e  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$  (i.e., a função  $u(x, t)$ , assim definida, é continuamente diferenciável, uma vez em relação a  $t$ , duas vezes em relação às variáveis espaciais em  $\Omega \times (0, \infty)$ , a equação do calor é satisfeita aí, e  $u(x, t)$  converge uniformemente a  $f$  quando  $t \downarrow 0$ ). A demonstração destes últimos fatos pode ser encontrada no capítulo 25 de [39].

Observação. Uma grande parte dos resultados deste capítulo vale em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , substituindo a solução fundamental  $F(x)$  por

$$(6.17) \quad F(x) = \begin{cases} (2\pi)^{-1} \ln |x|, & n = 2 \\ \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)w_n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

onde  $w_n = 2\pi^{n/2} \Gamma(n/2)^{-1}$  é a área da esfera unitária em  $\mathbb{R}^n$  e  $\Gamma$  denota a função gama. A dificuldade no caso  $n > 3$  é que o operador  $K_G$  não é compacto e é preciso iterar a equação  $u = \lambda K_G u$ , o que se torna rapidamente muito complicado. Para essas técnicas, veja o capítulo 6 de [12].

Problemas.

1) a) Use (2.3) para provar que existe no máximo uma solução do problema

$$\begin{cases} u \in C^2(\bar{\Omega}) \\ \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \in C^2(\partial\Omega) \end{cases}$$

b) Use (2.3) e (2.4) para provar que o problema

$$\begin{cases} u \in C^2(\bar{\Omega}) \\ \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \in C^1(\partial\Omega) \end{cases}$$

não tem solução, exceto se  $\int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma(x) = 0$  e que se esta condição é satisfeita, então qualquer par de soluções difere por uma constante.

Observação. Um resultado de unicidade mais geral que o de a) está demonstrado no corolário II-(3.3). O problema em a) com  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e  $g \in C(\partial\Omega)$  é conhecido como o problema de Dirichlet interior clássico. Ele é tratado no capítulo III. O problema em b) com  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  e  $g \in C(\partial\Omega)$  é conhecido como o problema de Neumann interior. Ele não será tratado no presente trabalho. Para maiores informações referimos o leitor a [18] e [29].

2) Seja  $u(x)$  harmônica em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $n \geq 2$ , e esfericamente simétrica (i.e.,  $u(x) = g(r) \forall x \neq 0$ , onde  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}$  é uma função e  $r = |x|$ ). Prove que

$$u(x) = \begin{cases} A \ln r + B, & \text{se } n = 2 \\ A r^{2-n} + B, & \text{se } n \geq 3 \end{cases} .$$

(Sugestão. Use a regra da cadeia para escrever  $\Delta f$  em termos de  $g(r)$ .)

3) O objetivo deste problema é provar a recíproca do teorema do valor médio (descrito na observação que segue o teorema II-(3.1)) e apresentar uma aplicação simples. Neste problema  $\Omega$  é um aberto em  $\mathbb{R}^n$ .

a) Seja  $\phi \in C_0^\infty(B(0,1))$  esfericamente simétrica (i.e.,  $\phi(x) = \psi(r)$  para alguma  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $r = |x|$ ) e tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$ . Defina

$\phi_r(x) = \frac{1}{r^3} \phi\left(\frac{x}{r}\right)$  e  $\Omega_r = \{x \in \Omega \mid \overline{B(x,r)} \subset \Omega\}$ . Prove que  $\Omega_r \neq \emptyset \forall r > 0$  suficientemente pequeno e que  $y \rightarrow \phi_r(x-y)$  tem suporte em  $\Omega \forall x \in \Omega_r$ .

b) Suponha que  $u \in C(\Omega)$  e tem a propriedade do valor médio, i.e.

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S(x,r)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{S(0,1)} u(x+ry) d\sigma(y)$$

$\forall \overline{B(x,r)} \subset \Omega$ . Prove que se  $\phi$  é como em a), então

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_r(x-y) u(y) dy$$

e conclua que  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

(Sugestão. Calcule o lado direito usando a mudança  $y \rightarrow \frac{x-y}{r}$  e em seguida, coordenadas esféricas.)

c) Use o teorema da divergência e coordenadas esféricas para provar que  $\int_{B(x,r)} \Delta u dx = 0 \forall r$  suficientemente pequeno e conclua que



$\Delta u = 0$  em  $\Omega$ .

d) Como aplicação, demonstre o seguinte teorema de convergência: seja  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma seqüência de funções harmônicas convergindo uniformemente a  $u$  em subconjuntos compactos de  $\Omega$ . Então  $u$  é harmônica em  $\Omega$ .

4) Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  um domínio. Uma função  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita sub-harmônica em  $\Omega$  se e só se  $u \in C(\Omega)$  e  $\forall a \in \Omega$  e toda bola  $B(a, R)$ , tal que  $B(a, R) \subset \Omega$  vale a desigualdade:

$$u(a) \leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(a, R)} u(y) d\sigma(y).$$

Observe que o lado direito é simplesmente o valor médio de  $u$  sobre a esfera de centro  $a \in \mathbb{R}^3$  e raio  $R$ . Uma função  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita super-harmônica em  $\Omega$  se e só se  $(-v)$  é sub-harmônica em  $\Omega$ .

a) Prove que se  $u \in C(\bar{\Omega})$  é sub-harmônica em  $\Omega$  e atinge seu máximo aí, então  $u$  é constante em  $\bar{\Omega}$ .

b) Seja  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Então  $u$  é sub-harmônica em  $\Omega$  se e só se  $\Delta u \geq 0$  em  $\Omega$ .

c) Enuncie e prove os resultados correspondentes a a) e b) no caso de funções super-harmônicas.

(Sugestão. Em a), imite a demonstração do teorema II-(3.1). Para provar o resultado em b), use a terceira identidade de Green para mostrar

$$\int_{B(a, R)} \left( -\frac{1}{4\pi R} - F(x-y) \right) \Delta u(y) dy = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B(a, R)} u(y) d\sigma(y) - u(a)$$

e conclua daí o resultado).

5) Seja  $g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$  (i.e.,  $g \in L^p(K)$  em relação à medida de Lebesgue  $\forall$  compacto  $K$  contido em  $\mathbb{R}^n$ ).

a) Prove que se  $E \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto mensurável limitado, então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{|y| \leq h} \int_E |g(x+y) - g(x)|^p dx = 0.$$

b) Prove o lema II-(5.2).

(Sugestão. Para provar a), basta mostrar o resultado em bolas fechadas centradas na origem. Nesta situação, demonstre primeiro para funções contínuas e em seguida use um argumento de aproximação. Você vai precisar da desigualdade  $(a+b)^p \leq \gamma_p (a^p + b^p) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$  não-negativos e  $\gamma_p = \max\{1, 2^p\}$ .)

b) Sejam  $(E, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço com medida,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e  $f: [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

a)  $t \in [a, b] \rightarrow f(t, y)$  é absolutamente contínua para  $y \in E$   $\mu$ -q.t.p.

b)  $f(t, \cdot) \in L^1(E) \quad \forall t \in [a, b]$

c)  $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^1([a, b] \times E)$ .

Então a função

$$t \in [a, b] \rightarrow g(t) = \int_E f(t, y) d\mu(y)$$

é diferenciável em  $[a, b]$  e sua derivada é dada por

$$g'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) d\mu(y).$$

(Sugestão. A condição em a) significa que

$$f(t,y) = f(a,y) + \int_a^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,y) ds \quad , \quad y - \mu - qtp.$$

Use esta fórmula e as condições em b) e c) para demonstrar que

$$\int_E f(t,y) d\mu(y) = \int_E f(a,y) d\mu(y) + \int_a^t \left( \int \frac{\partial f}{\partial t}(s,y) d\mu(y) \right) ds$$

e daí concluir o resultado.)

7) O objetivo deste problema é demonstrar o lema de Weyl: se  $\Omega$  é aberto em  $\mathbb{R}^3$  e  $u$  é harmônica no sentido fraco, então  $u \in C^\infty(\Omega)$  e é harmônica no sentido usual. Note que o teorema é válido em  $\mathbb{R}^n$  e que a demonstração abaixo pode ser traduzida sem dificuldades para o caso geral.

a) Seja  $\phi \in C_0^\infty(B(0,1))$ , com  $\int_{\mathbb{R}^3} \phi(x) dx = 1$ . Se  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  de-

fina

$$u_r(x) = \frac{1}{r^3} \int_{\Omega} dy \phi\left(\frac{x-y}{r}\right) u(y) \quad , \quad x \in \Omega \quad .$$

Prove que  $u_r \in C^\infty(\Omega)$  e que  $u_r + u$  em  $L^1(\Omega')$   $\forall \Omega'$  com fecho compacto contido em  $\Omega$ .

b) Sejam  $\Omega_r = \{x \in \Omega \mid \overline{B(x,r)} \subset \Omega\}$  e  $\psi \in C_0^\infty(\Omega_r)$ . Mostre que  $\Omega_r$  é não vazio para todo  $r > 0$  suficientemente pequeno e que  $\psi_r \in C_0^\infty(\Omega_r)$ .

c) Suponha que  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  é harmônica no sentido fraco. Prove que  $(\Delta u_r | \phi) = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega_r)$ . Conclua que  $\Delta u_r = 0$  em  $\Omega_r$ .

d) Como  $u_r$  é harmônica no sentido usual, vale a propriedade do valor médio. Usa-a para provar que

$$u_r(x) = \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \int_{B(x,R)} u(y) d\sigma(y)$$

$\forall x \in \Omega_r$   $\forall \epsilon$  suficientemente pequeno.

(Sugestão. Como  $u_r$  é harmônica em  $\Omega_r$ , vale a propriedade do valor médio, i.e.

$$u_r(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(x,R)} u_r(y) d\sigma(y) .$$

Integre esta identidade em  $R$  de  $0$  a  $\epsilon$ .)

e) Use a convergência provada em a) e a igualdade provada em c) para concluir que  $u_r$  converge a  $u$  uniformemente em subconjuntos compactos  $\Omega$ . Segue portanto que  $u$  é contínua em  $\Omega$  e vale a igualdade

$$u(x) = \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \int_{B(x,R)} u(y) d\sigma(y)$$

$\forall x \in \Omega$   $\forall \epsilon > 0$  suficientemente pequeno.

e) Use a igualdade em d) para concluir que  $u$  tem a propriedade do valor médio e terminar a demonstração do lema de Weyl usando o problema 3.

8) Sejam  $\Omega$ ,  $\phi_k$ ,  $\lambda_k$ , como no teorema II-(6.5) e  $\hat{f}$ ,  $\check{\alpha}$ , como em (6.14) e (6.15).

a) Se  $f \in C_0^\infty(\Omega)$ , use a segunda identidade de Green para provar que  $(-\Delta f)^\wedge(k) = \lambda_k \hat{f}(k)$ . Em outras palavras, quando restrito a

tais funções, o laplaciano é transformado em multiplicação pela função  $k \in \mathbb{Z} \rightarrow \lambda_k$  no espaço  $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$  (note que  $\{\lambda_k \hat{f}(k)\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^+)$  neste caso!).

b) Estenda o operador  $(-\Delta)$  para  $L^2(\Omega)$  definindo um operador  $T_0$  com domínio  $D(T_0)$  pelas fórmulas

$$D(T_0) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \{\lambda_k \hat{f}(k)\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z}^+)\}$$

$$T_0 f = (\lambda_k \hat{f}(k))^{\vee} .$$

Prove que  $D(T_0)$  é um subespaço denso de  $L^2(\Omega)$  e que  $T_0$  é um operador linear.

c) Seja  $v(t) = u(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$ , a função definida em II-(6.18).

Prove que  $v$  satisfaz

$$\begin{cases} w(t) \in L^2(\Omega) \quad \forall t \geq 0 \\ \frac{dw}{dt} = -T_0 w(t), \quad t \geq 0 \\ w(0) = f \in D(T_0) \end{cases}$$

onde a derivada é por definição o limite em  $L^2(\Omega)$  do quociente usual. O que acontece se retirarmos a restrição  $f \in D(T_0)$ ?

(Sugestão. Use a identidade de Parseval para calcular

$$\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} + T_0 v(t) \| .)$$

d) Prove que a solução do problema de valor inicial em c) é única.

(Sugestão. Use a transformada de Fourier).

### Capítulo III.

#### 1. Introdução.

O objetivo deste capítulo é provar a existência da função  $G(x,y)$  utilizada no capítulo anterior para demonstrar o teorema de expansão em auto-funções para o problema I-(1.4). Mais geralmente, vamos provar a existência de solução para o problema de Dirichlet clássico, i.e.,

$$(1.1) \quad \begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

onde, como no capítulo anterior,  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  é um domínio regular (aberto, conexo, limitado com fronteira de classe  $C^2$ ). Existem muitos métodos pelos quais é possível resolver o problema (1.1), cada um deles apresentando vantagens e desvantagens (veja o capítulo 7 de [16]). Dentre estes, adotaremos o que nos parece mais coerente com a filosofia do capítulo anterior: (1.1) será reduzido ao estudo de uma equação integral no espaço de Hilbert  $L^2(\partial\Omega)$ . A motivação para o método vem da terceira identidade de Green (teorema II-(2.2)). Então, se  $u$  é harmônica em  $\Omega$  e pertence a  $C^2(\bar{\Omega})$ , temos

$$(1.2) \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} \left( u(y) \frac{\partial F}{\partial \nu_y}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) F(x-y) \right) d\sigma(y)$$

para todo  $x \in \Omega$ . Pelo corolário II-(3.3), a função  $u$  é inteiramente determinada pelos valores de  $u$  em  $\partial\Omega$ , e portanto (1.2) não é uma boa representação de  $u(x)$ . A idéia é então desprezar o

termo contendo  $\frac{\partial u}{\partial v_y}(y)$  e procurar uma solução da forma

$$(1.3) \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} \phi(y) \frac{\partial F}{\partial v_y}(x-y) d\sigma(y)$$

onde  $\phi$  é uma função a determinar. Como veremos, será necessário estudar não só as propriedades da função definida por (1.3), chamada um potencial da camada dupla, assim como as da função

$$(1.4) \quad w(x) = \int_{\partial\Omega} \psi(y) F(x-y) d\sigma(y)$$

denominada um potencial de camada simples. A terminologia introduzida acima provém do estado da eletrostática: a função (1.3) é o potencial eletrostático determinado por uma distribuição superficial (i.e., sobre  $\partial\Omega$ ) de dipolos elétricos com densidade  $\phi(y)$  enquanto que (1.4) é o potencial eletrostático gerado por uma distribuição superficial de cargas com densidade  $\psi(y)$ . Para maiores detalhes sobre as interpretações físicas de (1.3) e (1.4), veja por exemplo [24] ou [42]. Além disso, é preciso notar que o método escolhido envolve uma grande quantidade de detalhes técnicos, cuja exposição em totalidade tende a obscurecer as idéias básicas envolvidas. Por esta razão, vamos no que se segue, substituir certas demonstrações especialmente técnicas por argumentos intuitivos que são normalmente apresentados em cursos de eletromagnetismo e que, na nossa opinião, ilustram claramente as idéias em jogo. As demonstrações completas podem ser encontradas, por exemplo, em [18] e [29].

Finalmente, deve-se observar que os resultados deste capítulo valem em  $\mathbb{R}^n$  com  $n \geq 2$  se  $F(x)$  é a função definida em II-(6.20).

Para generalizações, outros usos do método aqui descrito, e outros pontos de vista sobre o problema de Dirichlet veja, por exemplo, [ 6 ], [ 16 ], [ 19 ], [ 36 ], [ 38 ].

## 2. Propriedades dos potenciais de camada simples e dupla.

Nesta seção vamos estabelecer algumas propriedades das funções definidas pelas equações (1.3) e (1.4) da seção anterior. Os resultados que se seguem serão usados adiante para provar a existência de solução para o problema de Dirichlet clássico.

Teorema (2.1). Seja  $\psi \in L^\infty(\partial\Omega)$  e  $w(x)$  o potencial de camada simples correspondente. Então

- a)  $w(x)$  é harmônica em  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$  e tende a zero quando  $|x| \rightarrow \infty$ .
- b)  $w(x)$  está bem definida para  $x \in \partial\Omega$  e de fato  $w \in C(\mathbb{R}^3)$ .

Demonstração. A demonstração de a) é muito simples. Em primeiro lugar, utilizando o problema 6 do capítulo II, é fácil mostrar que podemos derivar sob o sinal de integral tanto quanto quisermos. Portanto,  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$  e em particular  $\Delta w = 0$  pois  $\Delta_x F(x-y) = 0$ . A segunda afirmação segue imediatamente do teorema da convergência dominada (prove!). A demonstração de b) é mais delicada. Vamos mostrar em primeiro lugar que  $w(x_0)$  está bem definida  $\forall x_0 \in \partial\Omega$ . Como  $\psi \in L^\infty(\partial\Omega)$  basta provar que

$$(2.1) \quad \int_{\partial\Omega} \frac{d\sigma(y)}{|x_0 - y|} < \infty$$

para cada  $x_0$  fixo em  $\partial\Omega$ . Sejam  $r > 0$ ,  $S_r = \partial\Omega \cap B(x_0, r)$  e  $\cos \theta = v_{x_0} \cdot v_y$  como na seção 3 do apêndice e  $\xi \in \Gamma(x_0) \rightarrow (\xi, h(\xi))$  a parametrização de  $S_r$  aí introduzida. A integral (2.1) pode en-



tão ser dividida na soma das integrais sobre  $S_r$  e  $\partial\Omega \setminus S_r$ . Agora, existe  $\alpha > 0$  tal que  $|x_0 - y| \geq \alpha \quad \forall y \in \partial\Omega \setminus S_r$  e portanto a integral sobre  $\partial\Omega \setminus S_r$  é finita. O problema é controlar a integral sobre  $S_r$ . Não há no entanto problema algum, pois  $\partial\Omega$  é "localmente um  $\mathbb{R}^2$ " e a singularidade em (2.1) é do tipo  $|\xi|^{-1}$  que é localmente integrável em  $\mathbb{R}^2$ . Mais precisamente

$$(2.2) \quad \int_{S_r} \frac{d\sigma(y)}{|x_0 - y|} = \int_{\Gamma(x_0)} \frac{d\xi}{\cos \theta} \frac{1}{(|\xi|^2 + |h(\xi)|^2)^{1/2}} \leq$$

$$\leq 2 \int_{\Gamma(x_0)} \frac{d\xi}{|\xi|} = 2 \int_0^a \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{\rho} = 4\pi a < 4\pi r < \infty$$

onde introduzimos coordenadas polares  $\xi_1 = \rho \cos \gamma$ ,  $\xi_2 = \rho \sin \gamma$  em  $\Gamma(x_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| < a\}$ . Portanto  $w(x)$  está bem definida em  $\partial\Omega$ . Para provar que  $w \in C(\mathbb{R}^3)$ , basta mostrar que  $w$  é contínua em cada  $x_0 \in \partial\Omega$  e para isso é suficiente que

$$(2.3) \quad I(x, x_0) = \int_{\partial\Omega} \left| \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x_0-y|} \right| d\sigma(y) \rightarrow 0$$

quando  $x \rightarrow x_0$ . Sejam  $r' \in (0, r)$  e  $S' = \partial\Omega \cap B(x_0, r')$ . Então, um cálculo explícito em coordenadas polares (como o de (2.2)) mostra que

$$(2.4) \quad \int_{S'} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|} < Cr' \quad \forall x \in B(x_0, r')$$

onde  $C > 0$  é uma constante independente de  $x \in B(x_0, r')$ . Agora

$$(2.5) \quad I(x, x_0) \leq \int_S \frac{d\sigma(y)}{|x-y|} + \int_S \frac{d\sigma(y)}{|x_0-y|} + \\ + \int_{\partial\Omega \setminus S'} \left| \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x_0-y|} \right| d\sigma(y)$$

e portanto, dado  $\epsilon > 0$  podemos escolher  $r'$  tal que cada uma das integrais sobre  $S'$  pode ser feita menor que  $\epsilon/3$ . A terceira integral também pode ser estimada por  $\epsilon/3$  tomando  $x$  suficientemente próximo de  $x_0$  pois pelo teorema da convergência dominada, segue que

$$(2.6) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\partial\Omega \setminus S'} \left| \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x_0-y|} \right| d\sigma(y) = 0.$$

C.Q.D.

O próximo passo é provar um teorema análogo ao anterior para potenciais de camada dupla. Para isso é conveniente, primeiro, introduzir a notação  $K(x, y) = \frac{\partial F}{\partial \nu_y}(x-y)$  e fazer alguns comentários preliminares. Note que  $K(x, y)$  pode ser escrito na forma

$$(2.7) \quad K(x, y) = \frac{\cos(x-y, \nu_y)}{|x-y|^2}$$

onde  $\cos(x-y, \nu_y) = \frac{(x-y) \cdot \nu_y}{|x-y|}$  é o cosseno do ângulo entre os vetores  $(x-y)$  e  $\nu_y$ .

Lema (2.2). A função  $(x, y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega \rightarrow \frac{\cos(x-y, \nu_y)}{|x-y|}$  é limitada

Demonstração. Seja  $x_0 \in \partial\Omega$ . Vamos provar que existe vizinhança aberta de  $x_0$  em  $\partial\Omega$  onde  $\frac{\cos(x-y, \nu_y)}{|x-y|}$  é limitada. Usando, então, o

fato de que  $\partial\Omega$  é compacta, obtém-se o resultado. Sejam  $r > 0$ ,  $S_r = \partial\Omega \cap B(x_0, r)$ ,  $\cos \theta = v_{x_0} \cdot v_y$ ,  $\xi \in \Gamma(x_0) \rightarrow (\xi, h(\xi))$  como na seção 3 do apêndice. Fixe um disco fechado  $D$  centrado na origem (i.e. em  $x_0$ ) e contido em  $\Gamma(x_0)$ . Então se  $x = (\xi, h(\xi))$  e  $y = (\eta, h(\eta))$  com  $\xi, \eta \in D$ , a fórmula de Taylor, ([27] capítulo XV) mostra que

$$(2.8) \quad h(\xi) = h(\eta) + \nabla h(\eta) \cdot (\xi - \eta) + R(\xi, \eta)$$

onde  $|R(\xi, \eta)| \leq \frac{KC}{2!} |\xi - \eta|^2 \leq \frac{KC}{2!} |x - y|^2$ ,  $K > 0$  é uma constante positiva independente de  $x$  e  $y \in C$  é o máximo dos supremos dos módulos das derivadas de  $h$  até segunda ordem em  $D$ . Agora, a normal  $v_y$  é dada por

$$(2.9) \quad \begin{cases} v_y = \Lambda(\eta) \left( -\frac{\partial h}{\partial \xi_1}(\eta), -\frac{\partial h}{\partial \xi_2}(\eta), 1 \right) \\ \Lambda(\eta) = \left( 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial \xi_1}(\eta) \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \xi_2}(\eta) \right)^2 \right)^{-1/2} \end{cases}$$

portanto, usando (2.8) e (2.9), obtém-se

$$(2.10) \quad \frac{\cos(x-y, v_y)}{|x-y|} = \Lambda(y) \frac{h(\xi) - h(\eta) - \nabla h(\eta) \cdot (\xi - \eta)}{|x-y|^2}$$

Portanto,  $\left| \frac{\cos(x-y, v_y)}{|y-x|} \right| \leq \frac{KC}{2!} \quad \forall x = (\xi, h(\xi)), \quad \forall y = (\eta, h(\eta))$  com  $\xi, \eta \in D$  e o lema está provado.

C.Q.D

O lema (2.2) é crucial para a demonstração do seguinte resultado.

Teorema (2.3). Seja  $\phi \in L^1(\partial\Omega)$  e  $u(x)$  o potencial de camada dupla correspondente. Então

a)  $u(x)$  é harmônica em  $\mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$  e tende a zero quando  $|x| \rightarrow \infty$

b) se  $\phi \in L^\infty(\partial\Omega)$  então  $u(x)$  está bem definida para  $x \in \partial\Omega$  e pertence a  $C(\partial\Omega)$ .

Demonstração. A demonstração de a) é idêntica à da primeira parte do teorema (2.1) e será deixada como exercício. Quanto a b), vamos provar em primeiro lugar que  $u(x)$  está bem definida. Como  $\phi \in L^\infty(\partial\Omega)$ , basta provar que

$$(2.11) \quad \int_{\partial\Omega} \frac{|\cos(x_0-y, \nu_y)|}{|x_0-y|^2} d\sigma(y) < \infty \quad \forall x_0 \in \partial\Omega .$$

Mas, pelo lema (2.2),  $\exists M > 0$  tal que  $\frac{|\cos(x-y, \nu_y)|}{|x-y|} \leq$

$\leq M \quad \forall (x,y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega$  e portanto, a integral em (2.11) é limitada por

$$(2.12) \quad M \int_{\partial\Omega} \frac{d\sigma(y)}{|x_0-y|} < \infty$$

pois como vimos na demonstração do teorema (2.1), a integral em (2.12) é finita. A continuidade segue se provarmos que

$$(2.13) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\partial\Omega} |K(x,y) - K(x_0,y)| d\sigma(y) = 0$$

quando  $x \in \partial\Omega$  tende a  $x_0 \in \partial\Omega$ . Com a mesma notação que no teorema (2.1) desta seção, a integral em (2.18) pode ser dividida na soma das integrais sobre  $S'$  e  $\partial\Omega \setminus S'$  e esta soma pode então ser estimada por

$$(2.14) \quad M \left( \int_{S'} \left( \frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{|x_0-y|} \right) d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega \setminus S'} |K(x,y) - K(x_0,y)| d\sigma(y) \right).$$

O resultado segue então por um argumento análogo ao utilizado na demonstração da continuidade no teorema (2.1).

C.Q.D.

O teorema acima mostra que se  $\phi \in L^\infty(\partial\Omega)$ , então o potencial de camada dupla está bem definido em  $\mathbb{R}^3$  e pertence a  $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ . É natural perguntar se ele é contínuo em  $\mathbb{R}^3$ . A resposta é: não! De fato considere, por exemplo, o caso  $\phi(x) = 1$   $\forall x \in \partial\Omega$  e seja

$$(2.15) \quad u_1(x) = \int_{\partial\Omega} K(x,y) d\sigma(y) , \quad x \in \mathbb{R}^3 .$$

Note primeiro que se  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ , a função  $y \in \bar{\Omega} \rightarrow F(x-y)$  é harmônica em  $\Omega$  e de classe  $C^2$  em  $\bar{\Omega}$ . Portanto, pela primeira observação que segue a demonstração da proposição II-(2.1), temos  $u_1(x) = 0$  se  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ . Por outro lado, aplicando a terceira identidade de Green (teorema II-(2.2)) à função  $u(x) = 1 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$  conclui-se que  $u_1(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$ . Portanto, a função  $u_1(x)$  definida em (2.15) apresenta uma descontinuidade quando se atravessa  $\partial\Omega$ . Mais geralmente

Teorema (2.4). Seja  $\phi \in L^\infty(\partial\Omega)$  e  $u(x)$  o potencial de camada dupla correspondente. Então, para todo  $x_0 \in \partial\Omega$  onde  $\phi$  é contínua, temos

$$(2.16) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) = \frac{\phi(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} K(x_0, y) \phi(y) d\sigma(y)$$

$$(2.17) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}}} u(x) = -\frac{\phi(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} K(x_0, y) \phi(y) d\sigma(y) .$$

Além disso, se  $\phi \in C(\partial\Omega)$ , então os limites acima são uniformes em  $x_0 \in \partial\Omega$ .

A demonstração deste resultado é longa e muito técnica, utilizando ferramentas do tipo empregado nas demonstrações dos teoremas (2.1) e (2.3) acima. Vamos agora nos limitar a um argumento intuitivo, referindo o leitor a [18] ou [29] para uma demonstração rigorosa. A idéia fundamental envolvida é que se  $r > 0$  é suficientemente pequeno, então  $S_r \cong \Gamma(x_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| < a\}$ ,  $\phi(y) \cong \phi(\xi, 0)$

$\forall y \in S_r$  e

$$(2.18) \quad \int_{S_r} K(x, y) \phi(y) d\sigma(y) \cong \int_{|\xi| < a} K(x, (\xi, 0)) \phi(\xi, 0) d\xi .$$

Considere agora o que acontece ao longo da normal  $v_{x_0}$ . Mais precisamente, seja  $I(t)$  a integral do lado direito de (2.18) calculada no ponto  $x = -t v_{x_0}$ ,  $t > 0$ . Vamos tomar o limite quando  $t \downarrow 0$ . Para isso, note primeiro que

$$(2.19) \quad K(-t v_{x_0}, (\xi, 0)) = \frac{t(t^2 + |\xi|^2)^{-3/2}}{4\pi} .$$

Introduzindo então coordenadas polares  $\xi_1 = \rho \cos \gamma$ ,  $\xi_2 = \rho \sin \gamma$  no disco aberto  $\{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| < a\}$  obtém-se

$$(2.20) \quad I(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} d\gamma \rho t (t^2 + |\xi|^2)^{-3/2} \phi(\rho \cos \gamma, \rho \sin \gamma, 0) .$$

Introduzindo a mudança de variáveis  $st = \rho$ , segue que

$$(2.21) \quad I(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{a/t} ds \frac{s}{(1+s^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\gamma \phi(st \cos \gamma, st \sin \gamma, 0) .$$

Portanto, tomando o limite quando  $t \downarrow 0$  tem-se

$$(2.22) \quad \lim_{t \downarrow 0} I(t) = \frac{\phi(0,0,0)}{2} \int_0^{\infty} s(1+s^2)^{-3/2} ds .$$

Mas  $\frac{d}{ds} \left( (1+s^2)^{-1/2} \right) = -s(1+s^2)^{-3/2}$  de modo que a integral em

(2.22) é igual a 1. Como no sistema de coordenadas que estamos usando,  $x_0 = (0,0,0)$ , a equação acima diz que

$$(2.23) \quad \lim_{t \downarrow 0} I(t) = \frac{\phi(x_0)}{2} .$$

Agora, divida a integral que define o potencial de camada dupla  $u(x)$  na soma das integrais sobre  $S_r$  e  $\partial\Omega \setminus S_r$ . Como em  $\partial\Omega \setminus S_r$   $y$  está "longe" de  $x_0$ , podemos tomar o limite quando  $x \in \Omega$  tende a  $x_0 \in \partial\Omega$  sem problema

$$(2.24) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} \int_{\partial\Omega \setminus S_r} K(x,y) \phi(y) d\sigma(y) = \int_{\partial\Omega \setminus S_r} K(x_0,y) \phi(y) d\sigma(y) .$$

Se  $r$  é "muito pequeno" (no sentido pouco rigoroso utilizado acima), a contribuição da integral em  $S_r$  é dada por (2.23), enquanto que a integral do lado direito de (2.24) é a integral sobre toda a fronteira. Portanto, pelo menos se o limite for tomado ao longo da normal por dentro de  $\Omega$ , obtém-se a relação (2.16). A relação (2.17) segue intuitivamente por um argumento análogo.

Observação. Note que, usando (2.16), (2.17) e os comentários que seguem (2.15) temos

$$(2.25) \quad \int_{\partial\Omega} K(x,y) d\sigma(y) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 1/2, & x \in \partial\Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \end{cases}.$$

A demonstraçāo rigorosa de (2.25) é na verdade o primeiro passo na prova do teorema (2.4). O segundo passo é mostrar que existe constante  $C > 0$  tal que

$$(2.26) \quad \int_{\partial\Omega} |K(x,y)| d\sigma(y) \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

O terceiro e último ingrediente consiste em provar que se  $\phi \in L^\infty(\partial\Omega)$  é contínua em  $x_0 \in \partial\Omega$  e  $\phi(x_0) = 0$ , então o potencial de camada dupla correspondente é contínuo (note que esta informação está essencialmente contida em (2.16) e (2.17)!). O teorema segue então para uma  $\phi \in L^\infty(\partial\Omega)$ , contínua em  $x_0 \in \partial\Omega$ , escrevendo

$$(2.27) \quad u(x) = \phi(x_0) \int_{\partial\Omega} K(x,y) d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega} K(x,y) (\phi(y) - \phi(x_0)) d\sigma(y)$$

e tomando o limite quando  $x \rightarrow x_0$  por dentro e por fora de  $\Omega$ .

Finalmente, é preciso estudar o comportamento da derivada normal de um potencial de camada simples sobre  $\partial\Omega$ . Para isso, se  $v \in C^1(\Omega) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$ , introduza

$$(2.28) \quad \frac{\partial v}{\partial v_+}(x_0) = \lim_{t \downarrow 0} v_{x_0} \cdot \nabla v(x_0 + t v_{x_0}),$$

$$(2.29) \quad \frac{\partial v}{\partial v_-}(x_0) = \lim_{t \uparrow 0} v_{x_0} \cdot \nabla v(x_0 + t v_{x_0}).$$

Definição. Se o limite (2.28) (resp. (2.29)) existir uniformemente em  $x_0 \in \partial\Omega$ , diremos que  $v$  tem derivada normal exterior (resp. in



terior) em  $\partial\Omega$ .

Utilizando então o mesmo tipo de técnica usada nas demonstrações dos teoremas desta seção é possível provar ([18], [29])

Teorema (2.5). Seja  $\psi \in C(\partial\Omega)$  e  $w(x)$  o potencial de camada simples correspondente. Então,  $w(x)$  tem derivada normal exterior e interior dadas por

$$(2.30) \quad \frac{\partial w}{\partial v_+}(x_0) = \frac{\psi(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} K(y, x_0) \psi(y) d\sigma(y) \quad ,$$

$$(2.31) \quad \frac{\partial w}{\partial v_-}(x_0) = -\frac{\psi(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} K(y, x_0) \psi(y) d\sigma(y) \quad .$$

Em particular,  $\frac{\partial w}{\partial v_+}(x_0) - \frac{\partial w}{\partial v_-}(x_0) = \psi(x_0) \quad \forall x \in \partial\Omega$  .

### 3. A solução do problema de Dirichlet clássico.

Vamos agora descrever a demonstração de existência de solução para o problema (1.1) deste capítulo. Como mencionado na introdução, a idéia é procurar uma solução da forma

$$(3.1) \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} K(x, y) \phi(y) d\sigma(y)$$

onde  $\phi$  é a determinar. Tendo em vista o teorema (2.4) e a condição de contorno  $u|_{\partial\Omega} = g$ , espera-se que  $\phi$  satisfaça a equação integral

$$(3.2) \quad g(x_0) = \frac{\phi(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} K(x_0, y) \phi(y) d\sigma(y)$$

com  $x_0 \in \partial\Omega$ . É conveniente então considerar a equação (3.2) no espaço de Hilbert  $L^2(\partial\Omega)$ . Defina então

$$(3.3) \quad T\phi(x) = \int_{\partial\Omega} K(x,y)\phi(y) d\sigma(y) , \quad x \in \partial\Omega$$

para  $\phi \in L^2(\partial\Omega)$ . Como veremos abaixo, (3.3) define um operador completo em  $L^2(\partial\Omega)$  de modo que a equação (3.2) pode ser escrita na forma

$$(3.4) \quad g = \left( \frac{1}{2} + T \right) \phi .$$

Mostraremos também que  $(1/2)$  não é auto-valor de  $T$ , e portanto, pela alternativa de Fredholm (seção 4 do apêndice), a equação (3.4) tem uma única solução para cada  $g \in L^2(\partial\Omega)$ . Além disso, se  $g \in C(\partial\Omega)$  então  $\phi \in C(\partial\Omega)$  e portanto, aplicando os teoremas (2.3) e (2.4) da seção anterior, segue que o potencial da camada dupla (3.1) (onde  $\phi$  é a solução de (3.4)), é a única solução do problema de Dirichlet clássico. Passemos agora à demonstração detalhada destas afirmações, lembrando que os resultados de medida e integração e teoria de operadores em espaços de Hilbert utilizados abaixo estão enunciados nas seções 1, 2, 3, 4 do apêndice.

Teorema (3.1). A equação (3.3) define um operador compacto em  $L^2(\partial\Omega)$ .

Demonstração. Em primeiro lugar, note que a função  $v_1(x) =$

$$= \int_{\partial\Omega} |K(x,y)| d\sigma(y) , \quad x \in \partial\Omega \text{ é contínua. De fato}$$

$$(3.5) \quad |v_1(x) - v_1(x_0)| \leq \int_{\partial\Omega} |K(x,y) - K(x_0,y)| d\sigma(y)$$

é o lado direito de (3.5) tende a zero quando  $x \in \partial\Omega \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$  (veja a parte final da demonstração do teorema (2.3)). Argumentos análogos mostram que  $v_2(y) = \int_{\partial\Omega} |K(x,y)| d\sigma(x)$ ,  $y \in \partial\Omega$  também pertence a  $C(\partial\Omega)$  (verifique!). Como  $\partial\Omega$  é compacta,  $v_1$  e  $v_2$  pertencem a  $L^\infty(\partial\Omega)$ . Seja  $C = \max\{\|v_1\|_\infty, \|v_2\|_\infty\}$ . Escrevendo  $|K(x,y)| = |K(x,y)|^{1/2} |K(x,y)|^{1/2}$  e aplicando a desigualdade de Holder com  $p = q = 2$ , temos

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad |T\phi(x)| &\leq \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) |K(x,y)|^{1/2} |K(x,y)|^{1/2} |\phi(y)| \leq \\
 &\leq \left[ \int_{\partial\Omega} |K(x,y)| d\sigma(y) \right]^{1/2} \left[ \int_{\partial\Omega} |K(x,y)| |\phi(y)|^2 d\sigma(y) \right]^{1/2} \leq \\
 &\leq C^{1/2} \left[ \int_{\partial\Omega} |K(x,y)| |\phi(y)|^2 d\sigma(y) \right]^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado, integrando em relação a  $d\sigma(x)$  e aplicando o teorema de Fubini obtém-se

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad \|T\phi\|_2^2 &= \int_{\partial\Omega} |T\phi(x)|^2 d\sigma(x) \leq C \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) |\phi(y)|^2 \int_{\partial\Omega} d\sigma(x) |K(x,y)| \leq \\
 &\leq C^2 \|\phi\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Esta estimativa mostra portanto que  $T$  é um operador limitado em  $L^2(\partial\Omega)$ , satisfazendo  $\|T\| \leq C$ . Para provar que  $T$  é compacto vamos utilizar um argumento de aproximação. Para  $n = 1, 2, \dots$  defina

$$(3.8) \quad K_n(x,y) = \begin{cases} K(x,y), & |x-y| > 1/n \\ 0, & |x-y| \leq 1/n \end{cases}$$

com  $(x,y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega$ . Então é claro que  $K_n \in L^2(\partial\Omega \times \partial\Omega)$  e portanto os operadores definidos por

$$(3.9) \quad (T_n \phi)(x) = \int_{\partial\Omega} K_n(x,y) \phi(y) d\sigma(y), \quad \phi \in L^2(\partial\Omega)$$

são Hilbert-Schmidt, e em particular, compactos. Seja  $\gamma(x,y) = \frac{\cos(x-y, \nu_y)}{|x-y|}$  de modo que por (2.7) da seção anterior, temos

$K(x,y) = \frac{\gamma(x,y)}{|x-y|}$ . Aplicando o lema III-(2.2), segue que

$$(3.10) \quad |T \phi(x) - T_n \phi(x)| \leq \|\gamma\|_\infty \int_{|x-y| < 1/n} \frac{|\phi(y)|}{|x-y|} d\sigma(y).$$

Agora, integrando em coordenadas polares, é fácil verificar que  $\forall x \in \partial\Omega, \forall n$  suficientemente grande

$$(3.11) \quad \int_{|x-y| < 1/n} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|} \leq \frac{K}{n}$$

onde  $K$  é uma constante positiva independente de  $x$  e  $n$ . Procedendo então como na demonstração de (3.7) (i.e., escrevendo  $|x-y|^{-1} = |x-y|^{-1/2} |x-y|^{-1/2}$ , aplicando a desigualdade de Holder etc.), obtêm-se

$$(3.12) \quad \|T\phi - T_n \phi\|_2 \leq \frac{K}{n} \|\phi\|_2$$

$\forall \phi \in L^2(\partial\Omega)$  ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| = 0$  e portanto  $T$  é compacto.  
C.Q.D.

O próximo teorema é um resultado técnico que permite conectar os resultados obtidos em  $L^2(\partial\Omega)$  com o caso em que estamos realmente interessados, i.e.,  $g \in C(\partial\Omega)$ . Sua demonstração está esquematizada no problema 7 deste capítulo.

Teorema (3.2). Seja  $\phi \in L^2(\partial\Omega)$  tal que  $\frac{\phi}{2} + T\phi \in C(\partial\Omega)$ . Então  $\phi \in C(\partial\Omega)$ . O mesmo vale para  $T^*$  (veja (3.14)).

Agora estamos em posição de provar que a equação  $g = \frac{\phi}{2} + T\phi$  tem uma única solução para cada  $g \in L^2(\partial\Omega)$  dada. Pela alternativa de Fredholm basta provar que

$$(3.13) \quad \left(\frac{1}{2} + T^*\right) f = 0 \implies f = 0$$

onde  $T^*$ , a adjunta de  $T$  em  $L^2(\partial\Omega)$ , é dada por

$$(3.14) \quad (T^* \phi)(x) = \int_{\partial\Omega} K(y,x) \phi(y) d\sigma(y), \quad \phi \in L^2(\partial\Omega).$$

Se  $f \in L^2(\partial\Omega)$  satisfaz  $(\frac{1}{2} + T^*) f = 0$ , então pelo teorema (3.2) temos  $f \in C(\partial\Omega)$ . Seja  $w(x)$  o potencial de camada simples com densidade  $f$ , i.e.,

$$(3.15) \quad w(x) = \int_{\partial\Omega} f(y) F(x-y) d\sigma(y).$$

Pelo teorema (2.5) da seção anterior temos

$$(3.16) \quad \frac{\partial w}{\partial \nu_+}(x) = \frac{f(x)}{2} + (T^* f)(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Agora, para  $t > 0$  suficientemente pequeno, defina

$$(3.17) \quad \partial\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + tv_y, \quad y \in \partial\Omega\}$$

e sejam  $R > 0$  tal que  $\partial\Omega_t \subset B(0, R)$  e  $\Omega_{t, R}$  o domínio compreendido entre  $\partial\Omega_t$  e  $\partial B(0, R)$ . Aplicando então a equação II-(2.3) a  $w$  e  $\Omega_{t, R}$  e tomando o limite quando  $t \downarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$ , conclui-se que  $\nabla w = 0$  em  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  e portanto  $w(x)$  é constante em  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ . Aplicando o teorema (2.1) da seção anterior, conclui-se que  $w(x) = 0$  em  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ . Mas então, em  $\bar{\Omega}$  temos

$$(3.18) \quad \begin{cases} w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ \Delta w = 0 \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

e portanto, pelo princípio do máximo, conclui-se que  $w(x) = 0$   $\forall x \in \bar{\Omega}$ . Em particular,  $\frac{\partial w}{\partial v_-}(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$ . Aplicando então

(3.16) e a última afirmação do teorema III-(2.5), segue que

$$(3.19) \quad f(x) = \frac{\partial w}{\partial v_+}(x) - \frac{\partial w}{\partial v_-}(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Em resumo, acabamos de provar

Teorema (3.3). A equação  $g = \frac{\phi}{2} + T\phi$  tem uma única solução para cada  $g \in L^2(\partial\Omega)$ .

Corolário (3.4). Sejam  $g \in C(\partial\Omega)$  e  $\phi \in L^2(\partial\Omega)$  a única solução da equação  $g = \frac{\phi}{2} + T\phi$ . Então  $\phi \in C(\partial\Omega)$  e a única solução do problema de Dirichlet clássico é dada por

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial v_y} (x-y)\phi(y) d\sigma(y) .$$

Demonstração. A função  $\phi$  é contínua pelo teorema (3.2). Pela primeira parte do teorema III-(2.3),  $u(x)$  é harmônica em  $\Omega$ , enquanto que pelo teorema III-(2.4)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \partial\Omega}} u(x) = \frac{\phi(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial v_y} (x_0 - y)\phi(y) d\sigma(y)$$

uniformemente, e o corolário está provado.

C.Q.D.

Observação. É natural perguntar quais são as propriedades de diferenciabilidade da solução  $u(x)$  em  $\bar{\Omega}$ . É claro que a resposta a esta questão é determinada pelas propriedades de diferenciabilidade de  $\partial\Omega$  e do dado  $f$ . É possível provar, por exemplo, (veja a seção 17 da parte 1 de [19]), que se  $\partial\Omega \in C^{2m+k}$ ,  $g \in C^k(\partial\Omega)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , então a solução  $u(x)$  pertence a  $C^{2m+k-2}(\bar{\Omega})$ . Em particular, se  $\partial\Omega$  e  $g$  são de classe  $C^\infty$ , a solução pertence a  $C^\infty(\bar{\Omega})$ .

Problemas.

1) Seja  $B = B(a, R)$  a bola de centro  $a \in \mathbb{R}^3$  e raio  $R$ . É possível provar que se  $u \in C^2(\bar{B})$  então vale a fórmula de Poisson.

$$u(x) = \int_{\partial B} P_{a,R}(x,y) u(y) d\sigma(y) \quad , \quad x \in B$$

onde  $P_{a,R}(x,y) = \frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - |x-y|^2}{|x-y|}$  é o núcleo de Poisson de  $B(x,R)$ .

Note que

- i)  $\forall y$  fixo,  $P_{a,R}(x,y)$  é harmônica em  $x \neq y$
- ii)  $P_{a,R}(x,y) > 0$  se  $x \in B$
- iii)  $\int_{\partial B} P_{a,R}(x,y) d\sigma(y) = 1 \quad \forall x \in B$ .

Resultados análogos valem em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  (veja [18] páginas 124 e 134, e [41], página 145).

a) Seja  $f \in L^1(\partial B)$  e defina  $v(x) = \int_{\partial B} P_{a,R}(x,y) f(y) d\sigma(y)$ ,  $x \notin \partial B$ .

Prove que  $v$  é harmônica.

b) Suponha que  $f$  é contínua em  $x_0 \in \partial B$ . Prove que  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in B}} v(x) =$

$= f(x_0)$ . Além disso, se  $f \in C(\partial \Omega)$  prove que a convergência a  $f$  é uniforme. Conclua que se  $f \in C(\partial \Omega)$  então  $v(x)$  é a solução do problema de Dirichlet clássico em  $B(a,R)$ .

(Sugestão. Usando iii) acima, note que  $v(x) - f(x_0) =$

$$= \int_{\Omega B} P_{a,R}(x,y) (f(y) - f(x_0)) d\sigma(y)$$
. Divida esta integral em duas par-



tes: uma "perto" de  $x_0$  e a outra "longe" de  $x_0$ .)

2) Suponha que  $u$  é harmônica no aberto  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ . Use a fórmula de Poisson para provar que  $u \in C^\infty(A)$  e também para demonstrar o teorema II-(3.1).

3) Seja  $u$  harmônica no aberto  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  e não negativa,  $a \in A$ ,  $b \in B(a, R) \subset A$  e  $\rho = |b - a|$ . Use a fórmula de Poisson para provar a desigualdade de Harnack

$$\left(\frac{R}{R+\rho}\right) \left(\frac{R-\rho}{R+\rho}\right) u(a) \leq u(b) \leq \left(\frac{R}{R-\rho}\right) \left(\frac{R+\rho}{R-\rho}\right) u(a)$$

4) Prove o teorema de Liouville para funções harmônicas: se  $u$  é harmônica em  $\mathbb{R}^3$  e limitada inferiormente, então  $u$  é constante.

(Sugestão. Adicionando uma constante conveniente, podemos supor  $u \geq 0$ . Agora aplique a desigualdade de Harnack e tome o limite quando  $R \rightarrow \infty$ ).

5) Suponha que  $u$  é harmônica em  $\Omega \setminus \{x_0\}$  e que  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| u(x) = 0$ .

Então  $u$  pode ser definida em  $x_0$  de modo que a função assim obtida é harmônica em  $\Omega$ . O ponto  $x_0$  é chamado uma singularidade removível.

(Sugestão. Sem perda de generalidade podemos supor  $x_0 = 0$ . Seja  $R > 0$  tal que  $\bar{B} = \bar{B}(0, R) \subset \Omega$  e seja  $v$  tal que  $\Delta v = 0$  em  $B$ ,  $v = u$  em  $\partial B$ . A idéia é provar que  $v = u$  em  $\bar{B} \setminus \{0\}$  e portanto definir  $u(0) = v(0)$ . Para isso, dado  $\varepsilon > 0$ , considere a função  $g(x) = u(x) - v(x) - \varepsilon(|x|^{-1} - R)$  em  $\bar{B} \setminus B(0, \delta)$ ,  $0 < \delta < R$ . Use o princípio do máximo e a hipótese sobre  $u$  para concluir que  $g(x) \leq 0$   $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\forall \delta$  suficientemente pequeno. Tome o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$

para concluir  $u - v \leq 0$  em  $\bar{B} \setminus \{0\}$ . Use argumento análogo para obter  $v - u \leq 0$  em  $\bar{B} \setminus \{0\}$ .)

6) Seja  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a < |x| < b\}$ ,  $n \geq 2$ . Resolva o problema de Dirichlet em  $\Omega$  com condições de contorno  $u \Big|_{|x|=a} = A$ ,  $u \Big|_{|x|=b} = B$  onde  $A$  e  $B$  são constantes.

(Sugestão. Em vista da simetria do problema, procure solução esfericamente simétrica. Use os resultados do problema 2) do capítulo anterior.)

7) O objetivo deste problema é esquematizar a demonstração do teorema III-(3.2). Vamos considerar o operador  $T$ . A demonstração é precisamente igual para  $T^*$  (na verdade, o método descrito abaixo se aplica a uma grande classe de operadores chamados operadores com singularidades fracas; veja o capítulo 3 de [18]). Dado  $\epsilon > 0$  escolha  $\psi \in C(\partial\Omega \times \partial\Omega)$  tal que  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi(x,y) = 1$  em  $|x-y| < \epsilon/2$ ;  $\psi(x,y) = 0$  em  $|x-y| > \epsilon$ . Defina  $K_0 = K\psi$  e  $K_1 = (1-\psi)K$  e sejam  $T_0$  e  $T_1$  os operadores integrais correspondentes.

a) Use a desigualdade de Hölder com  $p=q=2$  para mostrar que se  $u \in L^2(\partial\Omega)$  então  $T_1 u \in C(\partial\Omega)$ .

b) Prove que o operador  $T_0$  é limitado em  $L^p(\partial\Omega)$ ,  $p=2$  e  $p=\infty$ . Mais ainda, tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeno, podemos fazer a norma de  $T_0$  como operador em  $L^p(\partial\Omega)$ ,  $p=2$ ,  $p=\infty$ , menor que  $1/2$ .

c) Seja  $\phi \in L^2(\partial\Omega)$  tal que  $\frac{\phi}{2} + T\phi \in C(\partial\Omega)$ . Defina  $g = \frac{\phi}{2} + T_0\phi$ . Prove que  $g$  é contínua e que tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeno, temos  $\frac{\phi}{2} = (1 + 2T_0)^{-1}g = \sum_{k=0}^{\infty} (-2T_0)^k g$ , (veja o teorema (1.2) da seção 1 do apêndice).

d) Prove que cada um dos termos da série é uma função contínua e que a série converge uniformemente (i.e., na norma de  $L^\infty(\partial\Omega)$ ). Isto termina a demonstração.

Apêndice.

O objetivo deste apêndice é apenas coletar notações, definições e resultados utilizados nos capítulos anteriores, de modo a tornar este texto razoavelmente auto-suficiente. No que se segue, apresentaremos apenas algumas demonstrações, na sua maioria de maneira esquemática. As referências para detalhes e resultados não demonstrados serão dadas no fim de cada seção.

1. Operadores limitados e operadores compactos

Seja  $(E, \|\cdot\|)$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{C}$ . Uma seqüência  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  em  $E$  converge a  $x \in E$  se e só se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ . Uma seqüência  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  é dita de Cauchy se e só se  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$ .

É claro que toda seqüência convergente é de Cauchy. A recíproca é, em geral, falsa. Um espaço vetorial normado no qual toda seqüência de Cauchy converge a um elemento deste espaço é dito um espaço completo ou de Banach. Um espaço de Banach cuja norma provém de um produto interno  $(\cdot | \cdot)$  (que convencionaremos como sendo linear na primeira variável) é chamado um espaço de Hilbert.

Exemplos. 1) O espaço  $\mathbb{C}^n$  munido do produto interno usual é um espaço de Hilbert.

2) O espaço  $C([0,1])$  das funções contínuas de  $[0,1]$  em  $\mathbb{C}$  munido da norma do sup, i.e.,  $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ , é um espaço de Banach, mas não de Hilbert.

3) O espaço  $C([0,1])$  do exemplo anterior, munido do produto interno  $(f|g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ , não é completo. Seu completamento em

relação à norma proveniente deste produto interno é o espaço  $L^2([0,1])$  descrito na próxima seção.

4) Seja  $\mathbb{Z}$  a coleção dos números inteiros e defina  $\ell^p(\mathbb{Z})$  como sendo a coleção das seqüências complexas  $a = \{a_n \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{Z}\}$  tais que

$$(1.1) \quad \|a\|_p^p = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^p < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$(1.2) \quad \|a\|_{\infty} = \sup_n |a_n| < \infty, \quad p = \infty.$$

Então,  $\ell^p(\mathbb{Z})$  munido da norma  $\|\cdot\|_p$  definida acima, é um espaço de Banach. Mais ainda,  $\ell^p(\mathbb{Z})$  é de Hilbert se e só se  $p = 2$  e, neste caso, o produto interno correspondente é

$$(1.3) \quad (a|b) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Os espaços  $\ell^p(\mathbb{Z})$  são casos particulares dos espaços  $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ , definidos na seção 2.

Um operador linear em  $E$  é uma função  $T: E \rightarrow E$  tal que  $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad \forall x, y \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .  $T$  é dito limitado se e só se existe  $C > 0$  tal que

$$(1.4) \quad \|Tx\| \leq C \|x\| \quad \forall x \in E.$$

É fácil provar que

Teorema (1.1). Seja  $T: E \rightarrow E$  linear. Então as afirmações abaixo são equivalentes:

- a)  $T$  é limitado,
- b)  $T$  é contínuo na origem,
- c)  $T$  é contínuo.

Seja  $B(E)$  a coleção de todos os operadores limitados de  $E$  em

E e defina

$$(1.5) \quad \|T\| = \inf \{ C > 0 \mid \|Tx\| \leq C \|x\| \quad \forall x \in E \}$$

para  $T \in B(E)$ . Não é difícil mostrar que  $T \in B(E) \rightarrow \|T\|$  define uma norma em  $B(E)$  e que, se  $E$  é de Banach, então  $B(E)$  munido desta norma, também é de Banach. É possível provar que

$$(1.6) \quad \|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \\ = \sup_{0 < \|x\| \leq 1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} .$$

Note que  $T_1, T_2 \in B(E)$ , então o operador  $T = T_1 T_2$ , definido por  $Tx = T_1(T_2(x))$ , também pertence a  $B(E)$  e sua norma satisfaz

$$(1.7) \quad \|T\| \leq \|T_1\| \|T_2\| .$$

Exemplo. Considere  $C([0,1])$  munido da norma do sup e seja  $k(x,y) \in C([0,1] \times [0,1])$ . Defina o operador integral com núcleo  $k(x,y)$  (em  $C([0,1])$ ) pela fórmula

$$(1.8) \quad (K\phi)(x) = \int_0^1 k(x,y)\phi(y)dy , \quad \phi \in C([0,1]) .$$

Como  $[0,1] \times [0,1]$  é compacto, segue que  $k(x,y)$  é uniformemente contínua e limitada. Usando estes fatos, é fácil ver que  $K\phi \in C([0,1]) \forall \phi \in C([0,1])$  e satisfaz

$$(1.9) \quad \|K\phi\|_\infty \leq \|k\|_\infty \|\phi\|_\infty$$

onde  $\|k\|_\infty = \sup_{[0,1] \times [0,1]} |k(x,y)|$ . Portanto  $k \in B(C[0,1])$  e satisfaz  $\|K\| \leq \|k\|_\infty$ . Cabe perguntar se  $\|K\| = \|k\|_\infty$ . A resposta é não, em geral. Tome, por exemplo,  $k(x,y) = y$ . Então  $\|k\|_\infty = 1$ . No entanto

$$(1.10) \quad |K\phi(x)| \leq \|\phi\|_\infty \int_0^1 y \, dy = \frac{1}{2} \|\phi\|_\infty$$

$\forall \phi \in C([0,1])$  e portanto  $\|K\| \leq 1/2$ . De fato,  $\|K\| = 1/2$ , pois tomando  $\phi_0(x) = 1$ ,  $x \in [0,1]$ , segue que  $(K\phi_0)(x) = \frac{1}{2} \forall x \in [0,1]$ , e como  $\|K\| = \sup_{\|\phi\|=1} \|K\phi\|$ , temos

$$(1.11) \quad \frac{1}{2} = \|K\phi_0\|_\infty \leq \sup_{\|\phi\|=1} \|K\phi\|_\infty = \|K\| \leq \frac{1}{2} .$$

Um operador  $T \in B(E)$  é dito inversível (em  $B(E)$ ) se e só se existe  $S \in B(E)$  tal que

$$(1.12) \quad TS = ST = I$$

onde  $I$  denota a identidade em  $E$ . Neste caso, escreveremos  $S = T^{-1}$ . Um fato extremamente importante e útil é

Teorema (1.2). Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T \in B(E)$  tal que  $\|T\| < 1$ . Então  $(I - T)$  é inversível e seu inverso é dado pela série de Neumann

$$(1.13) \quad (I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

onde a convergência vale na norma de  $B(E)$ . Além disso

$$(1.14) \quad \|(I-T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}.$$

Demonstração. Usando a desigualdade triangular e (1.7) desta seção, obtém-se

$$(1.15) \quad \left\| \sum_{n=N}^M T^n \right\| \leq \sum_{n=N}^M \|T\|^n \rightarrow 0$$

quando  $M, N \rightarrow \infty$ . Portanto  $S_N = \sum_{n=0}^N T^n$  é uma seqüência de Cauchy em  $B(E)$ . Como  $E$  é de Banach,  $B(E)$  também o é, e portanto existe  $S \in B(E)$  tal que  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$  na norma de  $B(E)$ . Agora, note que  $\forall N$  inteiro positivo, temos

$$(1.16) \quad S_N(I-T) = (I-T)S_N = I - T^{N+1}.$$

Tomando o limite quando  $N \rightarrow \infty$ , obtém-se (1.13), pois  $\|T\| < 1$  e portanto  $0 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|T^{N+1}\| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|T\|^{N+1} = 0$ . Quanto a (1.14)

$$(1.17) \quad \|(I-T)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = (1 - \|T\|)^{-1}$$

C.Q.D.

Seja  $E$  um espaço de Banach. Um operador linear  $T: E \rightarrow E$  é dito compacto (ou completamente contínuo) se e só se  $\forall S$  limitado contido em  $E$ , a imagem  $T(S) \subset E$  tem fecho compacto. Equivalentemente,  $T$  é compacto se e só se qualquer que seja  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  limitada, a seqüência  $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  contém uma subseqüência convergente. A coleção de todos os operadores compactos de  $E$  em  $E$  será denotada por  $B_0(E)$ . É fácil ver que se  $T \in B_0(E)$ , então  $T \in B(E)$ . Se  $\dim E < \infty$ , a recíproca é verdadeira. Caso  $\dim E = \infty$ , este resultado falha: a identidade é certamente limitada, mas não é com-



pacta.

Exemplo. Seja  $K$  o operador integral com núcleo  $k(x,y)$  definido em (1.8). Então  $K \in B_0(C([0,1]))$ . De fato, pelo teorema de Arzela-Ascoli ([26] capítulo 3) basta provar que se  $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$  é limitada, então  $\{K\phi_n\}_{n=1}^\infty$  é uniformemente limitada e equicontínua. Mas estes fatos seguem das estimativas.

$$(1.18) \quad \|K\phi_n\|_\infty \leq \|k\|_\infty \|\phi_n\|_\infty \leq M\|k\|_\infty,$$

$$(1.19) \quad |K\phi(x) - K\phi(x')| \leq M \sup |k(x,y) - k(x',y)|$$

onde  $\|\phi_n\|_\infty \leq M \forall n$ , lembrando que  $k(x,y)$  é limitada e uniformemente contínua em  $[0,1] \times [0,1]$ .

Algumas propriedades importantes dos operadores compactos são

Teorema (1.3). a) Se  $T, S \in B_0(E)$ , então  $\alpha T + \beta S \in B_0(E) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

b) Se  $T \in B_0(E)$  e  $S \in B(E)$ , então  $TS$  e  $ST$  são operadores compactos.

c) Se  $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset B_0(E)$ ,  $T \in B(E)$  e  $T_n$  tende a  $T$  na norma de  $B(E)$ , então  $T$  é compacto.

As partes a) e b) do teorema acima são conseqüências imediatas da definição de operador compacto. A terceira afirmação segue da definição combinada com a desigualdade triangular e o método da seqüência diagonal (veja [30], capítulo VI). Deve-se notar que c) é uma ferramenta poderosa para provar que certos operadores são compactos. Este método foi usado na demonstração do teorema III-(3.1).

De agora em diante, até o fim desta seção, vamos considerar apenas o caso em que  $E = H$  é um espaço de Hilbert com produto interno  $(\cdot | \cdot)$ . Muitos dos resultados e definições que se seguem podem

ser generalizados para espaços de Banach. Vamos nos limitar a espaços de Hilbert por simplicidade, uma vez que todas as aplicações que fizemos no texto acima foram em espaços deste tipo. É conveniente, antes de mais nada, descrever algumas definições e resultados básicos. Um funcional linear contínuo é uma função  $\ell: H \rightarrow \mathbb{C}$  linear e contínua. É fácil ver que  $\|\ell\| = \sup\{|\ell(\phi)| : \phi \in H, \|\phi\| = 1\} < \infty$  e que  $\ell \rightarrow \|\ell\|$  define uma norma na coleção  $H^*$  de todos os funcionais lineares contínuos em  $H$ . O lema da representação de Riezs mostra então que  $H$  e  $H^*$  são essencialmente o mesmo espaço. Mais precisamente

Teorema (1.4). Seja  $\psi \in H$  fixo. Então  $\ell_\psi(\phi) = (\phi|\psi)$  é um funcional linear contínuo. Reciprocamente, se  $\ell: H \rightarrow \mathbb{C}$  é um funcional linear contínuo, então existe um único  $\psi \in H$  tal que  $\ell = \ell_\psi$ , i.e.,  $\ell(\phi) = (\phi|\psi) \quad \forall \phi \in H$ . Além disso,  $\|\ell\| = \|\psi\|$ .

Agora, se  $T \in B(H)$ , vamos definir a adjunta  $T^*$  do operador  $T$ . Note que para cada  $\psi \in H$ , a aplicação  $\phi \in H \rightarrow (T\phi|\psi)$  define um funcional linear contínuo. Portanto, para cada  $\psi \in H$ , existe um único  $\eta \in H$  tal que  $(T\phi|\psi) = (\phi|\eta) \quad \forall \phi \in H$ . Defina, então,  $T^*\psi = \eta$ . É fácil mostrar que a função  $\psi \in H \rightarrow T^*\psi \in H$  é um operador linear contínuo em  $H$  e  $\|T\| = \|T^*\|$ . Observe que  $T^*$  satisfaz  $(T\phi|\psi) = (\phi|T^*\psi) \quad \forall \phi, \psi \in H$ . Um operador  $T \in B(H)$  é dito auto-adjunto se e só se  $T = T^*$ . Note que  $(T+S)^* = T^* + S^*$ ,  $(TS)^* = S^*T^*$ ,  $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^* \quad \forall S, T \in B(H), \forall \alpha \in \mathbb{C}$  e que se  $T$  é inversível, então  $T^*$  também o é, e  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .

Finalmente, um operador  $T \in B(H)$  é dito de posto finito se e só se existem  $\phi_j, \psi_j, j = 1, 2, \dots, k$  tais que

$$(1.20) \quad T\phi = \sum_{j=1}^k (\phi|\psi_j)\phi_j \quad \forall \phi \in H.$$

É fácil ver que neste caso  $T \in B_o(H)$ . Os operadores de posto finito têm um papel muito importante na teoria dos operadores compactos em espaços de Hilbert: eles fornecem uma recíproca para o teorema (1.3), neste caso. Temos

Teorema (1.5). Seja  $T \in B_o(H)$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $T_\epsilon$  de posto finito tal que  $\|T - T_\epsilon\| \leq \epsilon$ .

Demonstração. Seja  $S = \{\phi \in H \mid \|\phi\| = 1\}$ . Como  $T(S)$  tem fecho compacto, existem  $\psi_1, \dots, \psi_n$  em  $T(S)$  com a seguinte propriedade: dados  $\epsilon > 0$  e  $\phi \in S$ , existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\|T\phi - \psi_j\| < \epsilon$ . Seja  $V$  o espaço gerado por  $\{\psi_1, \dots, \psi_j\}$ ,  $\{e_1, \dots, e_k\}$  uma base ortonormal para  $V$  e  $P_\epsilon$  a projeção ortogonal sobre  $V$ , i.e.

$$(1.21) \quad P_\epsilon \phi = \sum_{j=1}^k (\phi|e_j)e_j.$$

Então  $T_\epsilon = P_\epsilon T$  é de posto finito pois  $\forall \phi \in H$  temos

$$(1.22) \quad T_\epsilon \phi = \sum_{j=1}^k (\phi|T^*e_j)e_j.$$

Como  $P_\epsilon$  é a projeção ortogonal sobre  $V$ ,  $T_\epsilon \phi = P_\epsilon T\phi$  é o elemento de  $V = P_\epsilon(H)$  mais próximo de  $T\phi$ , (verifique!). Mas  $\psi_j \in V \forall j$  e portanto

$$(1.23) \quad \|T\phi - T_\epsilon \phi\| \leq \|T\phi - \psi_j\| < \epsilon \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \forall \phi \in S.$$

Tomando o sup sobre  $\phi \in S$ , obtém-se o resultado.

Observação. O resultado acima é falso em espaços de Banach. Em 1973, P. Enflo [15] deu um contra-exemplo em um espaço de Banach separável e reflexivo!

Finalmente, deve-se notar

Teorema (1.6).  $T \in B_0(H)$  se e só se  $T^* \in B_0(H)$ .

Demonstração. Suponha que  $T \in B_0(H)$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $T_\epsilon$  de posto finito tal que  $\|T - T_\epsilon\| < \epsilon$ . Agora, é fácil ver que se  $S$  é de posto finito, então  $S^*$  também o é. Mas então  $\|T^* - T_\epsilon^*\| = \|(T - T_\epsilon)^*\| = \|T - T_\epsilon\| < \epsilon$ , e portanto  $T^*$  é compacto pelo teorema (1.3) desta seção. A demonstração da recíproca é a mesma, uma vez que é fácil verificar a igualdade  $T^{**} = T$ .

C.Q.D.

Os resultados desta seção, assim como generalizações e maiores informações sobre operadores limitados e compactos podem ser encontrados em [18], [29], [30], [33].

## 2. Os espaços $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ .

Sejam  $\phi$  o conjunto vazio,  $X \neq \phi$  um conjunto qualquer e  $\mathcal{P}(X)$  o conjunto das partes de  $X$  (i.e., a coleção de todos os subconjuntos de  $X$ ). Uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$  é uma coleção  $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$  tal que

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \phi \in \mathfrak{M} \\ \text{ii) } S \in \mathfrak{M} \implies X \setminus S \in \mathfrak{M} \\ \text{iii) } \{S_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \mathfrak{M}. \end{array} \right.$$

O par  $(X, \mathfrak{M})$  é chamado um espaço mensurável. É claro que  $\mathcal{P}(X)$  é uma  $\sigma$ -álgebra. Se  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ , a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{S}$  é a inter

seção de todas as  $\sigma$ -álgebras que contêm  $\mathcal{J}$  (existe pelo menos uma, a saber  $\mathcal{O}(X)$ ). Note que a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{J}$  é em sentido óbvio a menor  $\sigma$ -álgebra que contêm  $\mathcal{J}$ . Se  $X$  é um espaço topológico, a  $\sigma$ -álgebra gerada pela coleção dos abertos de  $X$  é chamada a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$ . Esta  $\sigma$ -álgebra será denotada por  $\mathcal{B}(X)$  e seus elementos são chamados os conjuntos borelianos de  $X$ . Além dos exemplos de  $\sigma$ -álgebras descritos acima, é interessante notar

Lema (2.1). Seja  $(X, \mathcal{M})$  um espaço mensurável. a) Se  $Y \neq \emptyset$  é um conjunto qualquer e  $f: X \rightarrow Y$  é uma função, então a  $\mathcal{M}_f = \{S \subset Y \mid f^{-1}(S) \in \mathcal{M}\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $Y$ . b) Se  $Y \subset X$ , então  $\mathcal{M}_Y = \{S \cap Y \mid S \in \mathcal{M}\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $Y$ .

Nosso próximo objetivo é introduzir o conceito de medida. Para isso é preciso, em primeiro lugar, introduzir o intervalo  $[0, \infty]$ . Isto se deve basicamente ao fato que queremos integrar sobre conjuntos de "medida" infinita (afinal de contas, a reta tem comprimento infinito!). Além disso, é conveniente poder considerar funções que têm "descontinuidades infinitas". Seja então  $\infty$  um símbolo que satisfaça as seguintes condições

$$(2.2) \quad \begin{cases} x < \infty & , \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ x + \infty = \infty + x = \infty & , \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad x = \infty \\ x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty & , \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \\ 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0 & . \end{cases}$$

O intervalo  $[0, \infty]$  consiste do intervalo  $[0, \infty)$  acrescido do símbolo  $\infty$  com as propriedades (2.2) e munido da ordem usual estendida pela relação  $x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Uma medida positiva no espaço men

surável  $(X, \mathcal{M})$  é uma função  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ , tal que

$$(2.3) \quad \mu(\emptyset) = 0,$$

$$(2.4) \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

✓ coleção  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ , tal que  $S_n \cap S_m = \emptyset$  se  $m \neq n$ . A tripla  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  é chamada um espaço com medida. Se  $S \in \mathcal{M}$  e  $\mu(S) = 0$ , diz-se que  $S$  tem medida nula. Se uma propriedade  $P$  vale  $\forall x$  fora de um conjunto de medida nula, diz-se que  $P$  vale em quase toda parte e escreve-se  $P$   $\mu$ -q.t.p. Assim, por exemplo, se  $f$  e  $g$  são funções de  $X$  em um conjunto  $Y$  e  $\mu\{x \mid f(x) \neq g(x)\} = 0$ , diz-se que  $f$  e  $g$  são iguais em quase toda parte e escreve-se  $f = g$   $\mu$ -q.t.p.

Exemplos:

1) Seja  $\mathbb{Z}$  a coleção dos números inteiros, e considere  $(\mathbb{Z}, \mathcal{O}(\mathbb{Z}))$ . Defina a medida de contagem por

$$(2.5) \quad \mu(S) = \begin{cases} \#(S), & \text{se } S \text{ é finito} \\ \infty, & \text{se } S \text{ é infinito} \end{cases}$$

onde  $\#(S)$  é o número de elementos de  $S$ .

2) Considere  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}(\mathbb{R}^n))$ . Vamos definir a medida de Lebesgue na  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ . Para isso seja, em primeiro lugar, um conjunto da forma

$$(2.6) \quad I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

onde qualquer dos intervalos  $(a_i, b_i)$  pode ser infinito e defina

$$(2.7) \quad \mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) \quad .$$

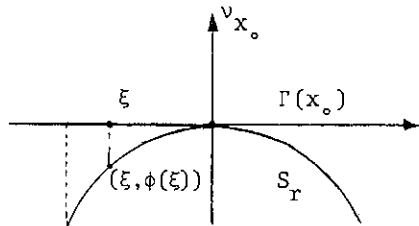
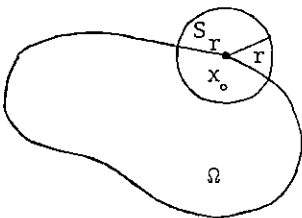
Agora, seja  $\mathcal{J}$  a coleção de todas as uniões disjuntas de conjuntos da forma (2.7). Se  $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathcal{J}$ , introduza

$$(2.8) \quad \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) .$$

Finalmente, se  $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , defina a medida de Lebesgue de  $S$  pela fórmula

$$(2.9) \quad \mu(S) = \inf \left\{ \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) \mid S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathcal{J} \right\}$$

3) Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio regular, i.e., aberto conexo, limitado com fronteira de classe  $C^2$ . Vamos agora definir a medida  $d\sigma(y)$ , utilizada nos capítulos II e III do texto. A condição  $\partial\Omega \in C^2$  garante que  $\forall x_0 \in \partial\Omega$  podemos escolher  $r > 0$ , tal que  $S_r = \partial\Omega \cap B(x_0, r)$  pode ser parametrizada, após uma mudança de coordenadas conveniente, como o gráfico de uma função de classe  $C^2$ . Além disso, é claro que podemos escolher  $r > 0$ , de modo que  $\cos \theta = v_{x_0} \cdot v_y \geq 1/2 \quad \forall y \in S_r$ . Isto é ilustrado nas figuras abaixo

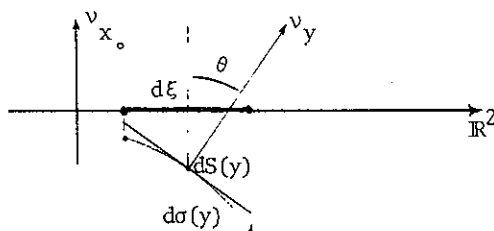


Mais precisamente,  $S_r$  é representada na forma  $\xi \in \Gamma(x_0) \rightarrow (\xi, \phi(\xi))$ , onde  $\phi$  é uma função de classe  $C^2$  definida na projeção  $\Gamma(x_0) =$

$= \{ \xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| < a \}$  de  $S_r$  sobre o plano tangente a  $\partial\Omega$  no ponto  $x_0$ . Podemos agora introduzir uma medida em  $S_r$  a partir das seguintes considerações intuitivas. Seja  $y \in S_r$  e  $d\sigma(y)$  um "elemento de superfície" em torno de  $y$ . Projetando  $d\sigma(y)$  sobre o plano tangente a  $\partial\Omega$  no ponto  $x_0$ , vemos que

$$(2.10) \quad d\sigma(y) \cong dS(y) = \frac{d\xi}{\cos \theta}$$

onde  $dS(y)$  é o "elemento de superfície" do plano tangente a  $\partial\Omega$  no ponto determinado pela projeção de  $d\sigma(y)$  e  $d\xi$  é a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^2$  desta projeção. Esta situação é descrita na figura abaixo.



Então, se  $A$  é um conjunto de Borel em  $S_r$ , podemos definir

$$(2.11) \quad \sigma(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} \frac{d\xi}{\cos \theta}$$

Como  $\partial\Omega$  é compacto, podemos cobri-la por uma coleção finita de conjuntos do tipo  $S_r$ , e é possível verificar que as medidas assim introduzidas coincidem nas interseções de tais conjuntos. Agora é fácil estender as medidas definidas nos conjuntos da cobertura finita a uma única medida  $\sigma$  definida em  $\mathcal{B}(\partial\Omega)$ . Na verdade esta me-



dida também não depende da cobertura escolhida e é muitas vezes chamada a medida geométrica natural sobre  $\partial\Omega$ . A construção acima pode ser repetida sem dificuldades para um domínio regular  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , utilizando a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Para maiores detalhes sobre medida e integração em espaços topológicos de Hausdorff localmente compactos, veja por exemplo [28], capítulo XII (em conexão com a construção discutida acima, veja especialmente o teorema da seção 5 e seu corolário).

Resta introduzir a definição de integral. Para isso é preciso, em primeiro lugar, dizer que funções vamos integrar. Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço com medida. Uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita mensurável em relação a  $\mathcal{M}$  se e só se  $f^{-1}(S) \in \mathcal{M} \quad \forall S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  é mensurável em relação a  $\mathcal{M}$  se e só se suas partes real e imaginária são mensuráveis em relação a  $\mathcal{M}$ . Uma classe de função mensurável extremamente importante são as funções simples. Elas são funções da forma

$$(2.12) \quad s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x)$$

onde  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ,  $A_i \in \mathcal{M}$ ,  $i=1, \dots, n$  e  $\chi_A$  denota a função característica do conjunto  $A$ , i.e.

$$(2.13) \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Agora, se  $S \in \mathcal{M}$ , a integral de uma função simples sobre  $S$  é definida por

$$(2.14) \quad \int_S s(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap S)$$

Se  $f: X \rightarrow [0, \infty]$ , define-se a integral de  $f$  sobre  $S$  como sendo

$$(2.15) \quad \int_S f(x) d\mu(x) = \sup \int_S s(x) d\mu(x)$$

onde o supremo é tomado sobre todas as funções simples tais que  $0 \leq s \leq f$ . A função  $f$  é dita integrável sobre  $S$  em relação a  $\mu$  no sentido de Lebesgue se e só se

$$(2.16) \quad \int_S f(x) d\mu(x) < \infty .$$

Se  $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$  (onde  $(-\infty)$  é definido analogamente a  $(+\infty)$ ), introduza  $f^+ = \max \{f, 0\}$  e  $f^- = \max \{-f, 0\}$  de modo que  $f = f^+ - f^-$ . É possível provar que  $f$  é mensurável em relação a  $\mathcal{M}$  se e só se  $f^+$  e  $f^-$  o são. Diz-se então que  $f$  é integrável em relação a  $\mu$  sobre  $S$  se e só se  $f^+$  e  $f^-$  o são, e define-se

$$(2.17) \quad \int_S f(x) d\mu(x) = \int_S f^+(x) d\mu(x) - \int_S f^-(x) d\mu(x) .$$

Finalmente, uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  é integrável em relação a  $\mu$  sobre  $S$  se e só se suas partes real e imaginária o são, e introduz-se

$$(2.18) \quad \int_S f(x) d\mu(x) = \int_S \operatorname{Re} f(x) d\mu(x) + i \int_S \operatorname{Im} f(x) d\mu(x) .$$

Deve-se notar que para  $f$  em qualquer das classes de funções consideradas acima, vale o seguinte resultado:  $f$  é integrável se e só se  $|f|$  é integrável. Agora, seja  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$  a coleção das  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  mensuráveis em relação a  $\mathcal{M}$ , tais que

$$(2.19) \quad \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

É relativamente fácil verificar que os conjuntos assim definidos são espaços vetoriais. No entanto não é possível usar a integral do lado esquerdo para definir uma norma, pois duas funções que diferem em um conjunto de medida nula tem a mesma integral. A solução da dificuldade é simples: passa-se ao quociente pela relação de equivalência  $f \sim g$  se e só se  $f = g$   $\mu$ -q.t.p. A coleção de classes de equivalência assim obtida forma um espaço vetorial com a norma

$$(2.20) \quad \|\{f\}\|_p = \left[ \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right]^{1/p}$$

onde  $f$  é um representante da classe de equivalência  $\{f\}$ . Os espaços vetoriais normados assim definidos são denotados por  $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Todos são espaços de Banach. Além disso,  $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$  é de Hilbert se e só se  $p = 2$ . Como na verdade não há possibilidade de confusão, é usual escrever  $f \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$  e  $\|f\|_p$  para denotar os elementos e a norma em  $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$  onde  $f$  é um representante qualquer da classe de equivalências em questão. Finalmente, para definir  $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$  é preciso generalizar a idéia de supremo. Uma função mensurável  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  é dita essencialmente limitada se e só se existe  $g: X \rightarrow \mathbb{C}$  limitada, tal que  $f \sim g$ . A coleção das classes de equivalência de funções essencialmente limitadas (pela relação  $f \sim h$  se e só se  $f = h$   $\mu$ -q.t.p.) é denotada por  $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Se  $f \in L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ , podemos definir

$$(2.21) \quad \|f\|_\infty = \inf\{\sup |g(x)| \mid g \sim f\}.$$

O lado direito de (2.21) é muitas vezes chamado o supremo essencial de  $f$ . A aplicação  $f \rightarrow \|f\|$  torna  $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de Banach (mas não de Hilbert).

Exemplos. 1) Os espaços  $L^p(\mathbb{Z}, \mathcal{O}(\mathbb{Z}), \mu)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , onde  $\mu$  é a medida da contagem definida em (2.5) são precisamente os espaços  $\ell^p(\mathbb{Z})$ , definidos em (1.1) e (1.2) da seção anterior.

2) Os espaços  $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$  onde  $\mu$  é a medida de Lebesgue, são os espaços  $L^p$  usuais em  $\mathbb{R}^n$ . Neste caso, escreve-se por simplicidade,  $dx$  ao invés de  $d\mu(x)$ . Esta notação foi utilizada nos capítulos I, II, III, assim como na definição da medida geométrica natural dada acima.

3) Os espaços  $L^p(\partial\Omega, \mathcal{B}(\partial\Omega), \sigma)$  são os espaços  $L^p$  definidos em  $\partial\Omega$ . O espaço  $L^2(\partial\Omega) = L^2(\partial\Omega, \mathcal{B}(\partial\Omega), \sigma)$  foi utilizado na solução do problema de Dirichlet no capítulo III.

De volta à situação abstrata, seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço com medida. Daqui por diante, quando não houver possibilidade de confusão, escreveremos simplesmente  $L^p(X) = L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ .

Teorema (2.2). (A desigualdade de Hölder). Sejam  $f \in L^p(X), g \in L^q(X)$ , onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então o produto  $fg \in L^1(X)$  e

$$(2.22) \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Teorema (2.3). (O teorema da convergência dominada). Seja  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$  uma seqüência de funções não negativas e integráveis convergindo  $\mu$ -q.t.p. a uma função integrável  $g$ . Seja  $\{f_n\}$  uma seqüência de funções mensuráveis tais que  $|f_n| \leq g_n$  e  $f_n$  converge a  $f$   $\mu$ -q.t.p. Suponha que  $\int_S g(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S g_n(x) d\mu(x)$ , onde

$S \in \mathcal{M}$ . Então

$$\int_S f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n(x) d\mu(x) .$$

Observação. O teorema (2.3) é uma generalização do teorema da convergência dominada usual. Na sua forma mais simples e mais conhecida temos  $g_n = g \ \forall n$ . Para a demonstração, veja [35] (teorema 16 do capítulo 4, para o caso da medida de Lebesgue na reta e proposição 18 do capítulo 11, para o caso geral).

Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  como acima. A medida  $\mu$  é dita finita se  $\mu(X) < \infty$ . Ela é dita  $\sigma$ -finita se  $X$  pode ser escrito como união enumerável de conjuntos mensuráveis (i.e., elementos de  $\mathcal{M}$ ) com medida finita. Se  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  são espaços com medida, seja  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos conjuntos da forma  $M \times N$ ,  $M \in \mathcal{M}$ ,  $N \in \mathcal{N}$ . É possível provar: se  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  é mensurável em relação a  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ , então para cada  $x \in X$ , a função  $y \in Y \rightarrow f(x, y)$  é mensurável em relação a  $\mathcal{N}$ . Afirmação análoga vale para  $x \in X \rightarrow f(x, y)$  com  $y$  fixo. Pode-se então provar

Teorema (2.4). (O teorema de Fubini). Suponha que  $\mu$  e  $\nu$  são medidas  $\sigma$ -finitas e que  $f$  é mensurável em relação a  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ . Então

$$(2.23) \quad \int_X \left( \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty$$

se e só se

$$(2.24) \quad \int_Y \left( \int_X |f(x,y)| d\mu(x) \right) dv(y) < \infty$$

e neste caso as integrais repetidas acima são iguais.

Observação. É possível provar que existe uma única medida produto usualmente denotada por  $\mu \otimes \nu$ , definida em  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  tal que  $\mu \otimes \nu (M \times N) = \mu(M)\nu(N)$ ,  $\forall M \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}$ . Neste caso, (2.23) e (2.24) são equivalentes à integrabilidade de  $f$  em relação a  $\mu \otimes \nu$  e vale a fórmula

$$(2.26) \quad \int_{X \times Y} f(x,y) d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \left( \int_Y f(x,y) dv(y) \right) d\mu(x) = \\ = \int_Y \left( \int_X f(x,y) d\mu(x) \right) dv(y)$$

Finalmente, vamos considerar alguns operadores integrais em  $L^2(X)$ . Suponha que  $\mu$  é  $\sigma$ -finita e seja  $k(x,y) \in L^2(X \times X) = L^2(X \times X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}, \mu \otimes \mu)$  e defina o operador integral com núcleo  $k(x,y)$  em  $L^2(X \times X)$  pela fórmula

$$(2.27) \quad (K \phi)(x) = \int_X k(x,y) \phi(y) d\mu(y)$$

$\forall \phi \in L^2(X)$ . Temos

Teorema (2.6).  $K \in B(L^2(X \times X))$ . Além disso,  $K^*$  é o operador integral com núcleo  $\overline{k(y,x)}$ . Em particular,  $K = K^*$  se e só se  $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$ ,  $\mu \otimes \mu$ -q.t.p.

Demonstração. Note que aplicando o teorema (2.2) desta seção com  $p = q = 2$ , obtêm-se

$$(2.28) \quad |K\phi(x)| \leq \int_X |k(x,y)| |\phi(y)| d\mu(y) \leq \left[ \int_X |k(x,y)|^2 d\mu(y) \right]^{1/2} \|\phi\|_2.$$

Elevando ao quadrado, integrando em relação a  $x$  e aplicando o teorema de Fubini obtêm-se

$$(2.29) \quad \|K\phi\|_2^2 \leq \|\phi\|_2^2 \int_X |k(x,y)|^2 d(\mu \otimes \mu)(x,y).$$

Mas a integral do lado direito é precisamente a norma  $L^2(X \times X)$  de  $k(x,y)$  e a primeira parte está provada. Para as afirmações restantes, combine a definição de adjunta com o teorema de Fubini.

C.Q.D.

Observação. Note que o teorema acima mostra que  $\|K\| \leq \|k\|_2$ . O operador integral aqui definido é chamado um operador de Hilbert-Schmidt. A função  $K \rightarrow \|K\|_{H.S.} = \|k\|_2$  é chamada a norma Hilbert-Schmidt de  $K$ .

Um espaço de Hilbert  $H$  é dito separável se e só se existe um conjunto ortonormal completo, i.e., existe uma coleção  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  de elementos de  $H$  tais que

$$(2.30) \quad (\phi_j | \phi_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

e toda  $\phi \in H$  pode ser escrita na forma  $\phi = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi | \phi_n) \phi_n$ , onde a série converge na norma de  $H$ .

Uma condição necessária e suficiente para que uma coleção  $\{\phi_j\}_{j=1}^n$  seja um conjunto ortonormal completo em  $H$ , é que  $(\phi | \phi_j) = 0 \quad \forall j$

$$\Rightarrow \phi = 0 .$$

Os espaços  $L^2(X, \mathcal{B}(X), \mu)$  e  $L^2(\partial\Omega, \mathcal{B}(\partial\Omega), \sigma)$  onde  $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  e  $\mu$  é a restrição da medida de Lebesgue a  $\mathcal{B}(X)$  são separáveis. Deve-se notar no entanto que existem espaços  $L^2$  não-separáveis (veja o problema 25 do capítulo II de [30]).

Teorema (2.7). Suponha que  $L^2(X)$  é separável. Então o operador integral definido em (2.27) é compacto.

Demonstração. Seja  $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$  um conjunto ortonormal completo em  $L^2(X)$ . Então é fácil verificar que a coleção de funções  $\phi_{j,k}(x,y) = \phi_j(x) \overline{\phi_k(y)}$  forma um conjunto ortonormal completo em  $L^2(X \times X)$ . Conseqüentemente, o núcleo  $k(x,y)$  pode ser escrito na forma

$$(2.31) \quad k = \sum_{j,k=1}^{\infty} (k|\phi_j, k) \phi_{jk}$$

onde a série converge em  $L^2(X \times X)$ . Seja

$$(2.32) \quad k_N = \sum_{j,k=1}^N (k|\phi_j, k) \phi_{jk} \quad , \quad N = 1, 2, \dots$$

Então  $k_N$  é de posto finito  $\forall N$ , e é fácil ver que  $\|k - k_N\| \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Portanto  $k$  é compacto pela parte c) do teorema (1.3) da seção anterior.

C.Q.D.

Observação. É importante observar que se  $X$  é um espaço de Hausdorff localmente compacto e  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço mensurável, então a coleção  $C_0(X)$  das funções contínuas de  $X$  em  $\mathbb{C}$ , com suporte compacto, é densa em  $L^p(X)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , i.e., dados  $\epsilon > 0$



e  $f \in L^p(X)$ , existe  $g \in C_0(X)$  tal que  $\|f-g\|_p < \epsilon$ . O resultado é falso em  $L^\infty(X)$ . Neste caso, o fecho de  $C_0(X)$  é a coleção  $C_\infty(X)$  das funções contínuas que tendem a zero no infinito (i.e.,  $f \in C_\infty(X)$  se e só se  $f$  é contínua e dado  $\epsilon > 0$ , existe um compacto  $K_\epsilon$  tal que  $|f(x)| \leq \epsilon$  fora de  $K_\epsilon$ ). Para estes resultados, assim como para a maior parte desta seção, veja [34]. Outras referências de interesse são [5], [22], [28], [35].

### 3. A alternativa de Fredholm.

O objetivo desta seção é enunciar e dar um esquema da demonstração do teorema abaixo conhecido como a alternativa de Fredholm em espaços de Hilbert.

Teorema (3.1). Seja  $T \in B_0(H)$ . Então os espaços de soluções das equações

$$(3.1) \quad \begin{cases} (I-T)\phi = 0 & (a) \\ (I-T^*)\psi = 0 & (b) \end{cases}$$

têm a mesma dimensão finita  $d$ . Se  $d = 0$ , então as equações

$$(3.2) \quad \begin{cases} (I-T)\phi = f & (a) \\ (I-T^*)\psi = g & (b) \end{cases}$$

têm uma única solução para cada  $f, g \in H$  dadas. Se  $d \neq 0$ , então (3.2)(a) tem solução se e só se  $f$  é ortogonal a toda solução de (3.1)(b). Neste caso a solução não é única, pois a qualquer solução podemos adicionar a solução geral de (3.1)(a).

Observação. O resultado acima, e na verdade o conceito de operador compacto, originou-se no estudo das equações integrais. Para ter uma idéia intuitiva, considere a equação integral

$$(3.3) \quad \phi(x) = f(x) + \int_0^1 k(x,y)\phi(y) dy, \quad x \in [0,1]$$

onde por simplicidade suponha  $k(x,y)$  contínua em  $[0,1] \times [0,1]$ . Discretize o problema dividindo  $[0,1]$  em  $n$  intervalos de comprimento  $\Delta x = \Delta y = 1/n$  e introduza

$$(3.4) \quad \begin{cases} k_{ij} = k(i\Delta x, j\Delta y) \\ \phi_i = \phi(i\Delta x) \\ f_i = f(i\Delta x) \end{cases}$$

onde  $i, j=1, 2, \dots, n$ , e substitua então (3.3) pelo sistema algébrico

$$(3.5) \quad \phi_i = f_i + \sum_{j=1}^n k_{ij} \phi_j \Delta y, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

A alternativa de Fredholm é um resultado padrão de álgebra linear no caso de dimensão finita. Para resolver (3.3), resolve-se primeiro (3.5) e toma-se "limites apropriados".

Demonstração. O resultado é bem conhecido se  $\dim H < \infty$ . Suponha agora que  $T$  é um operador de posto finito, i.e.

$$(3.6) \quad T\phi = \sum_{i=1}^n (\phi | \psi_i) \phi_i.$$

Note que sem perda de generalidade podemos supor que o conjunto  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  é linearmente independente. Caso contrário, uma delas pode ser escrita como combinação linear das outras e (3.6) pode ser reescrita utilizando  $(n-1)$  termos. Considere então a equação  $f = (1-T)\phi$ . Utilizando (3.6), ela pode ser escrita na forma

$$(3.7) \quad \phi = f + \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j, \quad \alpha_j = (\phi | \psi_j)$$

e portanto, para resolvê-la, é preciso calcular os coeficientes  $\alpha_i$ . Mas para  $i=1,2,\dots, n$  temos

$$(3.8) \quad \alpha_i = (\phi | \psi_i) = (f | \psi_i) + \sum_{j=1}^n \alpha_j (\phi_j | \psi_i)$$

para  $i=1,2,\dots, n$ . Note que (3.8) é um sistema algébrico de  $n$  equações a  $n$  incógnitas. A alternativa de Fredholm segue então para operadores de posto finito aplicando a alternativa em dimensão finita a (3.8).

Finalmente, se  $T \in B_0(H)$  é qualquer escolha  $\tilde{T}$  de posto finito tal que  $\|T - \tilde{T}\| < 1$ . Seja  $S = T - \tilde{T}$  e note que a equação  $\phi = f + T\phi$  pode ser escrita

$$(3.9) \quad \phi = f + \tilde{T}\phi + S\phi.$$

Como  $\|S\| < 1$ , o teorema (1.2) da seção 1 deste apêndice mostra que  $(1-S)^{-1}$  existe. Portanto,

$$(3.10) \quad \phi = (1-S)^{-1} f + (1-S)^{-1} \tilde{T}\phi.$$

Como  $(1-S)^{-1} \tilde{T}$  é de posto finito, podemos aplicar o caso anterior para obter a alternativa em geral.

C.Q.D.

Para detalhes, maiores informações e o teorema no caso de espaços de Banach, veja por exemplo [16], [29], [33].

#### 4. O teorema espectral para operadores compactos auto-adjuntos.

Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $T \in B(H)$ . Um vetor não nulo

$\phi \in H$  é dito um auto-vetor de  $T$  pertencente ao auto-valor  $\lambda \in \mathbb{C}$  se e só se  $T\phi = \lambda\phi$ . É fácil provar

Lema (4.1). Seja  $T = T^* \in B(H)$ . Então

- a) os auto-valores de  $T$  (se existirem) são reais;
- b) auto-vetores correspondentes a auto-valores distintos são ortogonais;

c)  $\|T\| = \sup \{ |(T\phi|\phi)| \mid \|\phi\| = 1 \}$ .

O resultado crucial necessário à demonstração do teorema espectral é:

Lema (4.2). Seja  $T = T^* \in B_0(H)$ ,  $T \neq 0$ . Então  $T$  tem pelo menos um auto-valor não nulo.

Demonstração. Pelo lema (4.1)c), existe uma seqüência  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset H$  tal que  $|(Tf_n|f_n)| \rightarrow \|T\|$  quando  $n \rightarrow \infty$  com  $\|f_n\| = 1 \quad \forall n$ . Existe portanto uma subseqüência  $\{f_{n_k}\}$ , tal que  $(Tf_{n_k}|f_{n_k}) \rightarrow \mu_1$  onde  $\mu_1 = \|T\|$  ou  $(-\|T\|)$ . Vamos provar que  $\mu_1$  é auto-valor de  $T$ . Em primeiro lugar, note que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Tf_{n_k} - \mu_1 f_{n_k}\| = 0$ . De fato

$$(4.1) \quad \|(T - \mu_1)f_{n_k}\|^2 = \|Tf_{n_k}\|^2 - 2\mu_1(Tf_{n_k}|f_{n_k}) + \mu_1^2 \leq \\ \leq \|T\|^2 - 2\mu_1(Tf_{n_k}|f_{n_k}) + \mu_1^2 = 2\mu_1^2 - 2\mu_1(Tf_{n_k}|f_{n_k})$$

Portanto  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|(T - \mu_1)f_{n_k}\|^2 \leq 0$ . Como  $\|(T - \mu_1)f_{n_k}\| \geq 0 \quad \forall k$ , a afirmação segue. Para concluir o lema vamos utilizar (pela primeira vez!) a compacidade de  $T$ . A seqüência  $\{f_{n_k}\}$  é limitada e portanto existe subseqüência  $\{g_j\}$  de  $f_{n_k}$  tal que  $Tg_j$  converge a

algum  $\psi \in H$ . Como  $\|g_j\| = 1$  e  $Tg_j - \mu_1 g_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ , segue que  $\psi \neq 0$  e que  $g_j \rightarrow \phi_1 = \frac{\psi}{\mu}$ . Como  $Tg_j - \mu_1 g_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$  e  $T \in B(H)$ , obtém-se  $T\phi_1 = \mu_1 \phi_1$  com  $\phi_1 \neq 0$  e o lema está provado.

C.Q.D.

Teorema (4.3). (O teorema espectral). Seja  $T \in B_0(H)$ ,  $T = T^* \neq 0$ . Então existem seqüências  $\{\mu_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{R}$  e  $\{\phi_j\}_{j=1}^N \subset H$  onde  $N$  pode ser infinito, tais que

$$(4.2) \quad T\phi_j = \mu_j \phi_j, \quad (\phi_j | \phi_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases},$$

$$(4.3) \quad T\phi = \sum_{k=1}^N \mu_k (\phi | \phi_k) \phi_k \quad \forall \phi \in H$$

onde os números reais  $\mu_j$  são ordenados de modo que  $|\mu_j| \geq |\mu_{j+1}| > 0$   $\forall j$ . Caso  $N = \infty$ , a série em (4.3) converge na norma de  $H$  e  $\lim_{j \rightarrow \infty} |\mu_j| = 0$ . Além disso, se  $M$  é o fecho do espaço gerado pelo conjunto  $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ , então  $T|_{M^\perp} = 0$ .

Observação. Se  $V$  é um subespaço de  $H$ , o subespaço ortogonal a  $V$  é definido por

$$(4.4) \quad V^\perp = \{\psi \in H \mid (\phi | \psi) = 0 \quad \forall \phi \in V\}.$$

Note que  $V^\perp$  é sempre um subespaço fechado e que se  $\bar{V}$  denota o fecho de  $V$ , temos  $V^{\perp\perp} = \bar{V}$  e  $H = \bar{V} \oplus V^\perp$ .

Demonstração. Pelo lema (4.2) existem  $\mu_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_1 \in H$  tais que,  $T\phi_1 = \mu_1 \phi_1$ ,  $\|\phi_1\| = 1$ . Sejam  $H_1$  o espaço gerado por  $\phi_1$ . Então  $H = H_1 \oplus H_1^\perp$ , e se  $\psi \in H_1^\perp$  temos

$$(4.5) \quad (T\psi | \phi_1) = (\psi | T\phi_1) = \mu_1(\psi | \phi_1) = 0$$

ou seja  $T(H_1^\perp) \subset H_1^\perp$ . Defina  $T_1 = T \Big|_{H_1^\perp}$ . Então é claro que  $T_1$  é um operador compacto auto-adjunto em  $H_1$ . Se  $T_1 = 0$ , o teorema está provado, pois neste caso

$$(4.6) \quad Tf = T(f_1 + f_1^\perp) = Tf_1 = T((f | \phi_1)\phi_1) = \\ = (f | \phi_1)T\phi_1 = \mu_1(f | \phi_1)\phi_1$$

$\forall f = f_1 + f_1^\perp \in H = H_1 \oplus H_1^\perp$ . Se  $T_1 \neq 0$ , o lema (4.2) mostra que existem  $\mu_2, \phi_2$  tais que  $T\phi_2 = T_1\phi_2 = \mu_2\phi_2$ ,  $\|\phi_2\| = 1$ . Seja  $H_2$  o espaço gerado por  $\{\phi_1, \phi_2\}$ . Então  $H = H_2 \oplus H_2^\perp$ ,  $T(H_2^\perp) \subset H_2^\perp$  e o operador  $T_2 = T \Big|_{H_2^\perp}$  é compacto e auto-adjunto em  $H_2^\perp$ . Se  $T_2 = 0$ , o teorema está provado. Caso contrário, aplique o lema (4.2) como antes, para definir um  $T_3$  e assim por diante. Se o processo termina após um número finito  $N$  de passos, obtêm-se a fórmula

$$(4.7) \quad Tf = \sum_{k=1}^N \mu_k (f | \phi_k) \phi_k, \quad \forall f \in H.$$

Caso contrário, constroem-se seqüências  $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ ,  $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$  tais que  $T\phi_k = \mu_k \phi_k$ ,  $\|\phi_k\| = 1$  e  $(\phi_k | \phi_j) = 0$ ,  $k \neq j$ . Agora, pelo lema (4.2), temos

$$(4.8) \quad |\mu_k| = \|T_{k-1}\| = \sup \{ |(Tf | f)| \mid f \in H_k^\perp, \|f\| = 1 \}$$

para  $k = 1, 2, \dots$  onde  $T_0 = T$  e  $H_0 = H$ . Então é claro que

$|\mu_j| \geq |\mu_{j+1}| > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots$ . Agora, se  $N = \infty$ , temos  $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_j| \geq \dots \geq 0$  e portanto  $\lim_{j \rightarrow \infty} |\mu_j| = \delta \geq 0$  existe.

Mas é fácil ver que  $\|T\phi_k - T\phi_j\|^2 = \mu_j^2 + \mu_k^2 \geq 2\delta^2$ . Como  $T$  é compacto e  $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$  é uma seqüência limitada,  $\{T\phi_n\}$  tem subsequência convergente e portanto se  $\delta > 0$ , a última desigualdade acima é uma contradição. Portanto  $\lim_{j \rightarrow \infty} |\mu_j| = 0$ .

Finalmente, seja  $M$  o fecho do espaço gerado por  $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$ . Então, se  $f = f_M + f_M^\perp \in H = M \oplus M^\perp$

$$(4.9) \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} (f|\phi_k) \phi_k + f_M^\perp.$$

Como  $T$  é um operador linear contínuo:

$$(4.10) \quad T_f = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (f|\phi_k) \phi_k + T(f_M^\perp).$$

Resta provar portanto que  $T|_{M^\perp} = 0$ . Se  $g \in M^\perp$ , então  $g$  é ortogonal a todos os espaços  $H_k$  construídos acima. Então

$$(4.11) \quad |(Tg|g)| = |(T_k g|g)| \leq \|T_k\| \|g\|^2 = |\mu_k| \|g\|^2$$

$\forall k = 1, 2, \dots$ . Portanto tomando limite quando  $k \rightarrow \infty$  obtém-se  $(Tg|g) = 0 \quad \forall g \in M^\perp$ . Mas  $T|_{M^\perp}$  é compacto e auto-adjunto de modo que pelo lema (4.1) c)

$$(4.12) \quad \|T|_{M^\perp}\| = \sup\{|(Tg|g)| \mid g \in M^\perp, \|g\| = 1\} = 0$$

e o teorema está provado.

\*C.Q.D.

Observações. 1) Note que pela alternativa de Fredholm, todos os auto-valores  $\mu_k$  são de multiplicidade finita.

2) O conjunto  $\{\phi_k\}_{k=1}^N$  forma um conjunto ortonormal completo em  $H$  se e só se  $T$  é injetivo (i.e., zero não é auto-valor de  $T$ ).

Sejam  $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  e  $k(x,y) \in L^2(X \times X) = L^2(X \times X, \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X), \mu \otimes \mu)$ , onde  $\mu$  é a medida de Lebesgue restrita a  $\mathcal{B}(X)$ . Se  $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$   $\mu \otimes \mu$ -q.t.p., sabemos que o operador  $K$  com núcleo  $k$  é compacto e auto-adjunto. Se  $K$  é injetivo, então  $N = \infty$  no teorema acima e  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$  forma um conjunto ortonormal completo em  $L^2(X)$ . Note que este é precisamente o caso do operador integral cujo núcleo é a função de Green do laplaciano em  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  (veja o lema II-(6.2)). Conseqüentemente, a coleção  $\phi_{j,n}(x,y) = \phi_j(x) \overline{\phi_n(y)}$  forma um conjunto ortonormal completo em  $L^2(X \times X)$  e portanto

$$(4.13) \quad k = \sum_{j,n=1}^{\infty} (k | \phi_{j,n}) \phi_{j,n}$$

onde a série converge na norma de  $L^2(X \times X)$  e

$$(4.14) \quad (k | \phi_{j,n}) = \int_{X \times X} k(x,y) \overline{\phi_{j,n}(x,y)} dx dy .$$

Usando o teorema de Fubini, a definição de  $K$  e as propriedades das auto-funções

$$(4.15) \quad (k | \phi_{j,n}) = \begin{cases} \mu_n & ; \quad j = n \\ 0 & ; \quad j \neq n \end{cases}$$

de modo que (4.13) se reduz a

$$(4.16) \quad k = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \phi_n \overline{\phi_n} .$$



Além disso, é fácil ver que

$$(4.17) \quad \|K\|_{H.S.} = \|k\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu_n\|^2 .$$

Finalmente, sobre a teoria apresentada nesta seção, referimos o leitor a [16], [30], [33] .

REFERÊNCIAS

- [1] Adams, D. - "The Restaurant at the end of the Universe", Pan Books Ltd., 1980.
- [2] Agmon, S. - "Spectral Properties of Schrödinger Operators and Scattering Theory", Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, Classe di Scienze, Serie IV, vol. II (1975) 151-218.
- [3] Aleksandrjan, R.A.; Berezanskii, Ju.M.; Il'in, V.A. e Kostjučenko, A.G. - "Some Questions in Spectral Theory for Partial Differential Equations", Amer.Math.Soc. Translations, Series 2, 105(1976) 1-53.
- [4] Alsholm, P. e Schmidt, G. - "Spectral and Scattering Theory for Schrödinger Operators", Arch.Rational Mech.Anal.40(1971) 281-311.
- [5] Bartle, R.G. - "The Elements of Integration", John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- [6] Berezanskii, Ju.M. - "Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators", Translation of Mathematical Monographs, vol. 17, Amer. Math. Soc., 1968.
- [7] Birkoff, G. e Rota, G.C. - "Ordinary Differential Equations", Blaisdell Publishing Company, 2<sup>a</sup> ed., 1969.
- [8] Boyce, W.E. e DiPrima, R.C. - "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems", John Wiley & Sons, Inc., 3<sup>a</sup> ed., 1977.
- [9] Chernoff, P.R. - "Pointwise Convergence of Fourier Series", Amer. Math. Monthly, vol. 87, n° 5 (1980) 399-400.
- [10] Churchill, R.V. - "Fourier Series and Boundary Value Problems", McGraw-Hill Book Company, Inc., 2<sup>a</sup> ed., 1963.
- [11] Coddington, E.A. e Levinson, N. - "Theory of Ordinary Differential Equations", McGraw-Hill Book Company, 1955.
- [12] Duff, G.F.D. - "Partial Differential Equations", University of Toronto Press, 1967.

- [13] Duff, G.F.D. e Naylor, D. - "Differential Equations of Applied Mathematics", John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- [14] Dym, H. e McKean, H.P. - "Fourier Series and Integrals", Academic Press, 1972.
- [15] Enflo, P. - "A Counterexample to the approximation problem in Banach Spaces", Acta Math., 130(1973) 309-317.
- [16] Epstein, B. - "Partial Differential Equations, an Introduction", McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.
- [17] Figueiredo, D.G. - "Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais", Projeto Euclides, IMPA, 1977.
- [18] Folland, G.B. - "Introduction to Partial Differential Equations", Princeton University Press, 1976.
- [19] Friedman, A. - "Partial Differential Equations", Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- [20] Friedman, A. - "Partial Differential of Parabolic Type", Prentice-Hall, Inc., 1964.
- [21] Gel'fanf, I.M. e Vilenkin, N.Ya. - "Generalized Functions", vol. 4, Academic Press, 1964 (traduzido do russo).
- [22] Halmos, P.R. - "Measure Theory", Van Nostrand Reinhold Company, 1950.
- [23] Hellwig, G. - "Partial Differential Equations, An Introduction", Blaisdell Publishing Company, 1964 (traduzido do original alemão).
- [24] Jackson, J.D. - "Classical Eletrodynamics", John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- [25] Katznelson, Y. - "An Introduction to Harmonic Analysis", John Wiley & Sons, Inc., 1968.
- [26] Kolmogorov, A.N. e Fomin, S.V. - "Introductory Real Analysis", Dover Publications, Inc., 1970 (traduzido da 2.<sup>a</sup> ed. russa).
- [27] Lang, S. - "Analysis I", Addison-Wesley Publishing Company, 1968.

- [28] Lang, S. - "Analysis II", Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [29] Mikhlin, S.G. - "Mathematical Physics, an Advanced Course", North-Holland Publishing Company, 1970.
- [30] Reed, M. e Simon, B. - "Methods of Modern Mathematical Physics", vol. I, Academic Press, 1972.
- [31] Reed, M. e Simon, B. - "Methods of Modern Mathematical Physics", vol. II, Academic Press, 1975.
- [32] Richtmyer, R.D. - "Principles of Advanced Mathematical Physics", vol. I, Springer-Verlag, 1978.
- [33] Riesz, F. e Sz.-Nagy, B. - "Functional Analysis", Frederick Ungar Publishing Co., 1955 (traduzido da 2.<sup>a</sup> ed. francesa).
- [34] Rudin, W. - "Real and Complex Analysis", McGraw-Hill Book Company, 2.<sup>a</sup> ed., 1974.
- [35] Royden, H.L. - "Real Analysis", The Macmillan Company, 2.<sup>a</sup> ed., 1968.
- [36] Shenk, N. e Thoe, D. - "Eigenfunction Expansions and Scattering Theory for perturbations of  $-\Delta$ ", Rocky Mountain J. of Math. 1 (1971) 89-125.
- [37] Sigal, I.M. - "Mathematical Foundations of quantum scattering theory for multiparticle", Mem. Amer. Math. Soc. n° 209 (1978).
- [38] Simader, C.G. - "On Dirichlet's Boundary Value Problem", Lecture Notes in Math. 268, Springer-Verlag, 1972.
- [39] Sobolev, S.L. - "Partial Differential Equations of Mathematical Physics", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1964 (traduzido da 3.<sup>a</sup> ed. russa).
- [40] Stakgold, Ivar - "Green's Functions and Boundary Value Problems", John Wiley & Sons, 1979.
- [41] Stein, E.M. e Weiss, G. - "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces", Princeton University Press, 1971.
- [42] Stratton, J.A. - "Electromagnetic Theory", McGraw-Hill Book Co., Inc., 1941.
- [43] Widder, D.V. - "The Heat Equation", Academic Press, 1975.