

Funções de Morse e Classificação de Superfícies

Geovan Tavares

COPYRIGHT © by GEOVAN TAVARES (1979)

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,
por qualquer processo, sem a permissão do autor.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Rua Luiz de Camões, 68

20.060 - Rio de Janeiro - RJ

INTRODUÇÃO

O objetivo destas notas é dar a classificação das superfícies (dimensão 2) compactas. Para atingir tal objetivo fazemos uso de um conceito muito importante em Topologia Diferencial: as funções de Morse. Assim, o teorema de classificação mostra o profundo envolvimento entre as funções de Morse e as "formas" das superfícies.

Exceto pelo teorema de classificação tudo o que fizemos para superfícies se generaliza para dimensões superiores v. [L4] e [Mi2]. Para uma visão geral sobre problemas de classificação v. [BCL] pg. 427-441.

A classificação das superfícies de um ponto de vista diferente do apresentado aqui pode ser encontrado em [Ma] para superfícies compactas (v. também [Z]) e em [R] para superfícies não-compactas. Em [P], pg. 88, se encontra uma boa introdução à história da gênese da classificação das superfícies compactas.

Dividimos estas notas em três capítulos. No primeiro damos uma revisão de continuidade e diferenciabilidade no \mathbb{R}^n . No segundo tratamos de superfícies diferenciáveis e vários conceitos nelas definidos: orientabilidade, equações diferenciais e soma conexa. Enquanto que no terceiro capítulo introduzimos as funções de Morse e fazemos a classificação das superfícies compactas.

Estas notas surgiram de um curso regular que é dado no Departamento de Matemática da PUC-RJ para alunos do último semestre do bacharelado. Quero agradecer a todos os meus alunos do

ano de 1978 pela cooperação, em especial a Elaine Ramos Jubé e Suzana Pessoa de Queiroz Falcão que fizeram redações preliminares.

Agradeço também a Carlos Frederico Borges Palmeira que insistiu para que eu escrevesse estas notas, a Jacob Palis Junior que deu várias sugestões para melhorá-las e a Welington de Melo que, pacientemente, leu o manuscrito, corrigindo vários erros e sugerindo várias modificações.

Agradeço ainda a Giodana Holanda que, dedicadamente, fez todas as figuras. A Wilson Góes agradeço o excelente trabalho de datilografia.

Rio de Janeiro, Junho de 1979

Geovan Tavares

ÍNDICE

	pag.
Capítulo 1: Topologia do R^n	1
Capítulo 2: Topologia das superfícies do R^n	
§1 - Curvas e superfícies	25
§2 - Orientabilidade	40
§3 - Equações diferenciais	46
§4 - Soma conexa e modelos de superfícies	54
Capítulo 3: Funções de Morse e classificação de superfícies	
§1 - Funções de Morse	61
§2 - Níveis regulares e críticos	74
§3 - Cancelamento de pontos críticos	83
§4 - Classificação das superfícies	93
Apêndice	105
Referências	109

CAPÍTULO 1

TOPOLOGIA DO \mathbb{R}^n

Neste capítulo daremos uma revisão daquilo que consideramos essencial saber da topologia do \mathbb{R}^n para compreensão da classificação das superfícies. Para maiores detalhes v. [L2] e [S].

\mathbb{R}^n = $\{p = (x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ é um espaço vetorial real com as operações $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ e $\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Podemos tornar \mathbb{R}^n um espaço euclidiano definindo o produto interno $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. A partir deste produto interno definimos a norma $|p| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$.

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \{T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n; T \text{ é linear}\}$ é também um espaço vetorial real com as operações $(T+S) \cdot p = T \cdot p + S \cdot p$ e $(\lambda \cdot T) \cdot p = \lambda \cdot (T \cdot p)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (usaremos para transformações lineares a notação $T \cdot p$ em vez de $T(p)$). Podemos definir uma norma em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ pondo

$$\|T\| = \sup \{ |T \cdot p|; |p| = 1 \}.$$

Sendo e_1, \dots, e_m a base canônica do \mathbb{R}^m e e_1, \dots, e_n a de \mathbb{R}^n , podemos escrever $T(e_j) = \sum_{i=1}^n t_j^i e_i$, $j = 1, \dots, m$. Assim, fixadas as bases canônicas de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , podemos associar a cada transformação linear $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ a nm -upla (t_j^i) (que também pode ser pensada como a matriz (t_j^i)). Portanto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é isomorfo a \mathbb{R}^{nm} , ou seja, a aplicação

$$\Omega: \mathcal{L}(R^m, R^n) \rightarrow R^{nm}$$
$$T \longrightarrow \Omega(T) = (t_j^i)$$

é linear e bijetiva.

A partir da norma $|\quad|$ de R^n , podemos definir uma distância em R^n pondo $d(p,q) = |p-q|$. Uma bola aberta de raio r e centro $p \in R^n$ é o conjunto

$$B(p,r) = \{q \in R^n; d(q,p) < r\}.$$

Quando $p = (0, \dots, 0)$ usaremos a notação $B(r)$ em vez de $B(p,r)$.

Uma seqüência em R^n é uma aplicação $f: \mathbb{N} \rightarrow R^n$, $n \mapsto f(n) = p_n$, onde \mathbb{N} é o conjunto dos números naturais. Usaremos para seqüência f as notações $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (p_n) ou, por abuso de linguagem, diremos, a seqüência p_n .

Diremos que uma seqüência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente para $p \in R^n$ se, dado $\epsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in B(p, \epsilon)$ para $n > n_0$. Por exemplo, as seqüências reais $p_n = \frac{1}{n}$ e $q_n = \frac{\text{sen } n}{n}$ convergem para zero.

Uma seqüência (p_n) é de Cauchy, se dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(p_n, p_m) < \epsilon$ para todo $m, n > n_0$. E (p_n) é dita limitada se existe $r > 0$ tal que $\{p_1, \dots, p_n, \dots\} \subset B(r)$.

A próxima proposição dá algumas propriedades das seqüências de R^n .

Proposição 1.1 - Sendo (p_n) uma seqüência em R^n , temos que

- a. Se (p_n) converge, é para um único ponto.
- b. (p_n) é convergente se e só se (p_n) é de Cauchy.
- c. (p_n) convergente implica (p_n) limitada.

Demonstração:

a) Suponhamos que (p_n) tenha dois limites diferentes p e q .

Tome $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \cap B(q, \epsilon) = \emptyset$ (basta tomar $\epsilon < \frac{1}{3} d(p, q)$). Existe então n_0 tal que $p_n \in B(p, \epsilon)$ e $p_n \in B(q, \epsilon)$ para todo $n > n_0$, o que dá uma contradição.

b) Seja (p_n) convergindo para p , então dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $d(p_n, p) < \frac{\epsilon}{2}$ para $n > n_0$. Assim $d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p_m, p) < \epsilon$ se $m, n > n_0$, e portanto (p_n) é de Cauchy. Que (p_n) de Cauchy implica (p_n) convergente, é decorrência de que em \mathbb{R} tal fato é verdadeiro.

c) Se (p_n) converge para p , então existe n_0 tal que $p_n \in B(p, 1)$ para $n > n_0$. Seja $M = \max\{|p_1|, \dots, |p_{n_0}|, |p| + 1\}$. Se tomarmos $r > M$, temos que $\{p_1, \dots, p_n, \dots\} \subset B(r)$.

Quando (p_n) converge para p usaremos a notação $p_n \rightarrow p$ ou $\lim p_n = p$.

Seja $f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$ uma função e $b \in \mathbb{R}^n$. Diremos que b é o limite de $f(p)$ quando p tende para p_0 , se para toda sequência $p_n \rightarrow p_0$ tivermos $f(p_n) \rightarrow b$.

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se para todo $p \in A$ existe $r = r(p) > 0$ tal que $B(p, r) \subset A$. Daí podemos escrever $A = \bigcup_{p \in A} B(p, r(p))$. Uma vizinhança de um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ será simplesmente um aberto contendo p .

Exemplos de conjunto abertos são $\mathbb{R}^{++} = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$, que é aberto em \mathbb{R} , e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ aberto em \mathbb{R}^2 .

A coleção \mathcal{G} dos subconjuntos abertos do \mathbb{R}^n satisfazem as seguintes propriedades:

- a) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{G}$
- b) Se $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$, é uma família qualquer de elementos de \mathcal{G} , então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{G}$.
- c) Se $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{G}$ então $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{G}$.

Por satisfazerem as propriedades a), b) e c) dizemos que a coleção \mathcal{G} dos subconjuntos abertos do \mathbb{R}^n definem uma topologia em \mathbb{R}^n .

Observamos aqui que se em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ definirmos a distância $d_1(T, S) = \|T - S\|$ e considerarmos as bolas abertas e os abertos de \mathcal{L}_1 de maneira análoga à que foi feita para \mathbb{R}^n , a coleção \mathcal{G}_1 de abertos de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ satisfará as propriedades a), b) e c). Diremos também que \mathcal{G}_1 é uma topologia em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Diremos que $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se $A = \mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto. Por exemplo: $\{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$ são subconjuntos fechados de \mathbb{R}^2 .

A coleção \mathcal{F} dos subconjuntos fechados de \mathbb{R}^n satisfazem propriedades duais daquelas satisfeitas pelos abertos, ou seja:

- a₁) $\mathbb{R}^n, \emptyset \in \mathcal{F}$
- b₁) Se $F_\mu, \mu \in \mathbb{M}$, é uma família arbitrária de fechados, então $\bigcap_{\mu \in \mathbb{M}} F_\mu \in \mathcal{F}$
- c₁) $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ implica $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$.

Uma caracterização dos subconjuntos fechados do \mathbb{R}^n em

termos de sequências é a seguinte:

Proposição 1.2 - $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, se e somente se, dada uma sequência $p_n \in F$ com $p_n \rightarrow p$ então $p \in F$.

Demonstração: Suponha que F é fechado e que existe uma sequência $p_n \in F$ tal que $p_n \rightarrow p$ com $p \notin F$. Então $p \in \text{Int} F$ e este é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset F$, ou seja $B(p, \epsilon) \cap F = \emptyset$, o que dá uma contradição com o fato de que $p_n \rightarrow p$.

Por outro lado se F não é fechado então existe $p \in \text{Ext} F$ tal que para todo $\epsilon > 0$ temos que $B(p, \epsilon) \cap F \neq \emptyset$. Seja $\epsilon = \frac{1}{n}$ e escolha $p_n \in B(p, \frac{1}{n})$. A sequência p_n converge para $p \notin F$, o que dá uma contradição e termina a prova da proposição.

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, chamamos ao conjunto $\bar{X} = \{p \in \mathbb{R}^n; \exists p_n \in X \text{ com } p_n \rightarrow p\}$ de fecho de X . É fácil verificar que F é fechado se e só se $\bar{F} = F$. Se $X \subset Y$, dizemos que X é denso em Y se $\bar{X} = Y$. Por exemplo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ é denso em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$ e $X = \mathbb{Q}^n$ (\mathbb{Q} o conjunto dos números racionais) é denso em \mathbb{R}^n .

O interior de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dado por $\overset{\circ}{X} = \{p \in X; \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } B(p, \epsilon) \subset X\}$. Como exemplos, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ e se $X = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } |x| < 1\}$ então $\overset{\circ}{X} = B(1)$.

Uma coleção importante de subconjuntos de \mathbb{R}^n é aquela dos compactos. Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se é fechado e limitado $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ é compacto. É fácil verificar que se K_1 e K_2 são compactos então $K_1 \times K_2$

também é.

Uma cobertura aberta de $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma coleção de abertos $A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Lambda$, tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Por exemplo se $X = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, a coleção $A_n = (n, n + \frac{3}{2})$, $n = 0, 1, \dots$ é uma cobertura aberta de X ; esta cobertura tem a propriedade de que retirado qualquer A_n da coleção não teremos mais uma cobertura de $(0, +\infty)$.

Uma das propriedades mais importantes dos conjuntos compactos é o teorema a seguir:

Teorema 1.1 (Heine-Borel) - $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, se e somente se, toda cobertura aberta de K tem uma subcobertura finita, isto é, se A_λ , $\lambda \in \Lambda$, é uma cobertura de K então existem $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^r A_{\lambda_i}$.

Para uma demonstração deste teorema v. [L5] ou [Mu].

Proposição 1.2 - Se K é compacto e $F \subset K$ é fechado então F é compacto.

Demonstração: K sendo compacto é limitado e portanto F é limitado; como, por hipótese, ele é fechado segue que é compacto.

Uma outra noção importante é a de conjunto conexo. $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se não existem abertos não vazios $A, B \subset \mathbb{R}^n$ com $A \cap B = \emptyset$ e tais que $A \cap X \neq \emptyset$, $B \cap X \neq \emptyset$ e $X = (A \cap X) \cup (B \cap X)$. Quando X é desconexo, o par A, B é chamado uma desconexão de X . $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ é conexo, enquanto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$ é desconexo, uma desconexão para X é

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$.

Proposição 1.3 - Seja X desconexo e A, B uma desconexão de X .

Se $Y \subset X$ é conexo, então $Y \subset A$ ou $Y \subset B$.

Demonstração: Suponhamos que $Y \cap A \neq \emptyset$ e $Y \cap B \neq \emptyset$. Como

$$Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) \text{ e } (Y \cap A) \cap (Y \cap B) = \emptyset \text{ teríamos}$$

uma contradição com o fato de Y ser conexo, o que prova a proposição.

Proposição 1.4 - Se $X \subset Y \subset \bar{X}$ e X é conexo então Y é conexo.

Demonstração: Suponha que Y não é conexo e seja A, B uma des-

conexão de Y . Como X é conexo segue-se da propo-

sição anterior que $X \subset A$ ou $X \subset B$. Supondo que $X \subset A$ temos

$\bar{X} \subset \bar{A}$ e como $\bar{A} \cap B = \emptyset$ segue-se que $\bar{X} \cap B = \emptyset$. Daí $Y \cap B = \emptyset$.

E portanto $Y \cap B = \emptyset$ pois $Y \subset \bar{X}$, contrariando o fato de A, B

ser uma desconexão de Y e provando a proposição.

Como aplicação da proposição anterior é fácil mostrar que

$Y = \{(x,y); y = \sin \frac{1}{x}, x > 0\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$, é conexo bastando para isto tomar $X = \{(x,y); y = \sin \frac{1}{x}, x > 0\}$.

Proposição 1.5 - Se X_λ , $\lambda \in \Lambda$ é uma família de subconjuntos

conexos de \mathbb{R}^n e $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ é

conexo.

Demonstração: Seja $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ e $p_0 \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Suponhamos que

X não é conexo e seja A, B uma desconexão de X .

Como X_λ é conexo para todo $\lambda \in \Lambda$ segue-se da Proposição 1.3

que $X_\lambda \subset A$ ou $X_\lambda \subset B$. Se $X_\lambda \subset A$ para algum $\lambda \in \Lambda$ então

$X_\lambda \subset A$ para todo $\lambda \in \Lambda$, isto porque $\mathbb{E}p_0 \in X_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$.
Daí $X \subset A$, o que dá uma contradição e prova a proposição.

Observamos que tudo o que foi feito até agora depende somente da noção de aberto em \mathbb{R}^n e portanto podemos transportar todas as definições e proposições para $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ cujos abertos foram definidos em termos da distância d_1 .

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, os subconjuntos abertos de X são, por definição, aqueles da forma $A \cap X$ onde A é aberto em \mathbb{R}^n ; da mesma forma como antes os fechados de X são os complementares de seus abertos.

Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f: X \rightarrow Y$ é contínua se $f^{-1}(A)$ é aberto em X , quando A é aberto em Y .

Nesta definição que acabamos de dar podemos substituir X ou Y , ou ambos por subconjuntos de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ que teremos as noções de continuidade correspondentes a estes casos.

As funções $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x+y$ e $m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ são funções contínuas. Vamos mostrar que m é contínua. Se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto, então dado $z_0 \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(z_0 - \epsilon, z_0 + \epsilon) \subset A$. Seja (x_0, y_0) com $m(x_0, y_0) = z_0$ e tome \underline{a} tal que $|x_0|, |y_0| < a$. Como $|m(x, y) - m(x_0, y_0)| \leq |y||x - x_0| + |x_0||y - y_0|$ temos que $(x, y) \in B((x_0, y_0), \frac{\epsilon}{2a}) \cap \{(x, y); |y| < a\}$ implica $m(x, y) \in (z_0 - \epsilon, z_0 + \epsilon)$. Logo $m^{-1}(A)$ é aberto se A é aberto, donde m é contínua.

As projeções $\pi_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i$ são aplicações contínuas porque $\pi_i^{-1}(A) = \mathbb{R}^{i-1} \times A \times \mathbb{R}^{m-(i+1)}$ é aberto em \mathbb{R}^m se A é aberto em \mathbb{R} .

Proposição 1.6 - Se $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ são contínuas então $f \circ g: X \rightarrow Z$ é contínua.

Demonstração: $(f \circ g)^{-1}(A) = g^{-1}(f^{-1}(A)).$

Proposição 1.7 - $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p \mapsto (f_1(p), \dots, f_n(p))$ é contínua se e somente se cada $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $i = 1, 2, \dots, n.$

Demonstração: Se f é contínua então $f_i = \pi_i \circ f$ é contínua, por ser composta de funções contínuas. Por outro lado, como $f^{-1}(A_1 \times \dots \times A_n) = f_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(A_n)$ segue-se que se os f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são contínuas então f é contínua.

Se $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, então $f+g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto f(p)+g(p)$ e $f \cdot g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto f(p) \cdot g(p)$ também são. Com efeito $f+g$ e $f \cdot g$ podem ser escritas como compostas de funções contínuas

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(f, g)} & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{s} \mathbb{R} \\ \downarrow & & \uparrow \\ & & f+g = s \circ (f, g) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(f, g)} & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{m} \mathbb{R} \\ \downarrow & & \uparrow \\ & & f \cdot g = m \circ (f, g) \end{array}$$

Podemos deduzir então que um polinômio a n variáveis $p(x_1, \dots, x_m) = \sum_{0 \leq i_1 + i_2 + \dots + i_m \leq k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_m^{i_m}$ é uma função contínua por ser produto e soma de funções contínuas.

Se considerarmos $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ teremos que as projeções $\pi_{ll'}: \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, $(a_{ij}) \mapsto a_{ll'}$ são funções contínuas. Assim o determinante $\det: \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \det A$, é, por sua própria

definição uma função contínua. Uma consequência interessante deste fato é que o conjunto das aplicações lineares injetivas $\mathfrak{J} \subset \mathcal{L}(R^m, R^n)$ é aberto. Basta considerar o caso em que $m \leq n$, pois se $m > n$ tem-se $\mathfrak{J} = \emptyset$. Se $A_0 = (a_{ij}) \in \mathfrak{J}$ então existe uma submatriz, $m \times m$ B_0 de A_0 tal que $\det B_0 \neq 0$ e portanto existe $\epsilon > 0$ tal que $\det(B_0 + \epsilon I) \neq 0$ (onde I é a matriz identidade $m \times m$), o que mostra que \mathfrak{J} é aberto.

Proposição 1.8 - Seja $f: X \subset R^m \rightarrow Y \subset R^n$ uma função contínua.

- a) A continuidade de f é equivalente a $F \subset Y$ fechado implicar $f^{-1}(F)$ fechado, para todo fechado F .
- b) $K \subset X$ compacto implica $f(K)$ compacto.
- c) $C \subset X$ conexo implica $f(C)$ conexo.

Demonstração:

- a) Seja $A = \bigcup F$, então $f^{-1}(A) = f^{-1}(\bigcup F) = \bigcup f^{-1}(F)$. Daí a equivalência entre a continuidade e a afirmação feita.
- b) Se $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$, é uma cobertura aberta de $f(K)$, então $f^{-1}(A_\lambda), \lambda \in \Lambda$, é uma cobertura aberta de K e portanto existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ tais que $K \subset f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{\lambda_r})$ e por conseguinte $f(K) \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_r}$, o que mostra que K é compacto.
- c) Suponha que $f(C)$ é desconexo e seja A, B uma desconexão. Como f é contínua, $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ é uma desconexão de C , o que contraria o fato de C ser conexo.

A esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é compacta e

conexa. Para ver que S^2 é compacta, considere a função $f: R^3 \rightarrow R$ $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. f é contínua e portanto $S^2 = f^{-1}(A)$ é fechada; como S^2 é limitada segue-se que ela é compacta. Para ver que S^2 é conexa, seja

$D^2 = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 1\}$ e consideremos as aplicações $\varphi, \psi: D^2 \rightarrow S^2$ definidas por $\varphi(x,y) = (x,y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ e $\psi(x,y) = (x,y, -\sqrt{1-x^2-y^2})$. D^2 sendo conexo e φ e ψ sendo contínuas, segue-se que $\varphi(D^2) = \{(x,y,z) \in S^2; z \geq 0\}$ e $\psi(D^2) = \{(x,y,z) \in S^2; z \leq 0\}$ são conexos. Como $\varphi(D^2) \cap \psi(D^2) \neq \emptyset$ temos que $S^2 = \varphi(D^2) \cup \psi(D^2)$ é conexa.

Uma aplicação $f: X \subset R^m \rightarrow Y \subset R^n$ é aberta se $f(A)$ é aberto em Y , quando A é aberto em X . Por exemplo, a projeção $\pi_1: R^2 \rightarrow R$, $(x,y) \mapsto x$ é uma aplicação aberta. Com efeito seja A aberto em R^2 e $x_0 \in \pi_1(A)$. Seja y_0 tal que $(x_0, y_0) \in A$, então existe $\epsilon > 0$ tal que o retângulo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \times (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \subset A$ e portanto $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset \pi_1(A)$, o que mostra que π_1 é aberta.

Uma das noções mais importantes em topologia é a de homeomorfismo: $f: X \subset R^m \rightarrow Y \subset R^n$ é um homeomorfismo se f é bijetiva, contínua e f^{-1} é contínua; dizemos então que X e Y são homeomorfos; usaremos a notação $X \approx Y$.

Exemplo 1 - Seja $p = (0,0,1)$, $S^2 - \{p\}$ é homeomorfa a R^2 . O homeomorfismo é dado pela projeção estereográfica em relação ao plano $z = -1$ (que é identificado a R^2), v. fig. 1.1.

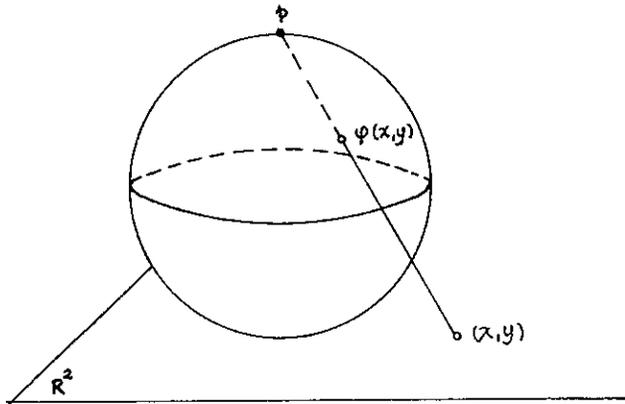


FIGURA 1.1

$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{p\}$ é a aplicação definida por

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+4}, \frac{2y}{x^2+y^2+4}, \frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4} \right).$$

Exemplo 2 - $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e $S^1 \times \mathbb{R}$ são homeomorfos, v. fig. 1.2.

$f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}, p \rightarrow \left(\frac{p}{|p|}, \log |p| \right)$ é um homeomorfismo

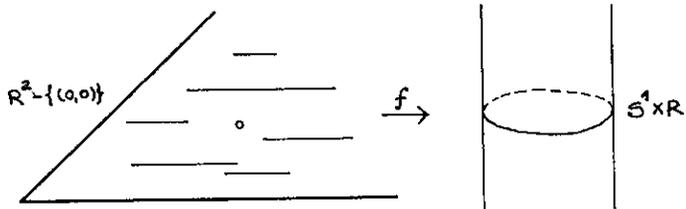


FIGURA 1.2

Proposição 1.9 - Se $f: X \rightarrow Y$ é contínua, bijetiva e X é compacto então f é um homeomorfismo.

Demonstração: Basta mostrar que f é aberta já que ela é contínua e bijetiva. Se A é aberto em X então $X-A$ é um fechado contido no compacto X e portanto $X-A$ é compacto. Daí $f(X-A)$ é compacto, logo fechado, donde concluímos que $f(A)$ é aberto, o que demonstra a proposição.

Dada uma relação de equivalência \sim em um conjunto S , podemos considerar o conjunto quociente S/\sim das classes de equivalência. Se $S \subset \mathbb{R}^m$ é conveniente construir modelos de S/\sim em \mathbb{R}^n , embora este não esteja contido em nenhum \mathbb{R}^n . Mostraremos depois que definindo adequadamente a noção de aberto em S/\sim é possível em muitos casos definir um homeomorfismo entre S/\sim e o seu modelo euclidiano.

Exemplo 3 - Seja $I = [0,1]$ e defina a relação de equivalência \sim da seguinte maneira: a) se $x, x' \neq 0,1$, $x \sim x'$ se e só se $x = x'$; b) $1 \sim 0$. Um modelo de I/\sim em \mathbb{R}^2 é dado pelo círculo da fig. 1.3 (b).

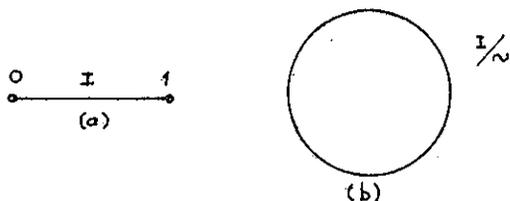


FIGURA 1.3

Exemplo 4 - Em $Q = [0,1] \times [0,1]$ defina a seguinte relação de equivalência: a) se $x \neq 0$ e $x' \neq 1$ defina

$(x,y) \sim (x',y')$ se e só se $x = x'$ e $y = y'$; b) $(0,y) \sim (1,y)$ se e só se $y = y'$. As setas na fig. 1.4 (a) indicam como identificamos os lados do quadrado Q .



FIGURA 1.4.

Exemplo 5 - Em $Q = [0,1] \times [0,1]$ defina outra relação de equivalência: a) se $x \neq 0$ e $x' \neq 1$ então $(x,y) \sim (x',y')$ se e só se $x = x'$ e $y = y'$; b) $(0,y) \sim (1,y')$ se e só se $y + y' = 1$. Ou seja, as classes de equivalência dos pontos interiores a Q só contém o próprio ponto e os pontos da forma $(0,y)$ são identificados a $(1,1-y)$. O modelo de Q/\sim em \mathbb{R}^3 é a faixa de Moebius, v. fig. 1.5.

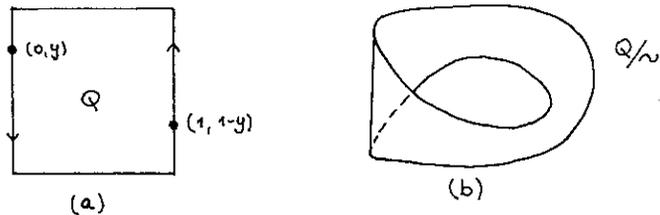


FIGURA 1.5

Exemplo 6 - Ainda em $Q = [0,1] \times [0,1]$ defina a seguinte relação de equivalência: a) se $x, x' \neq 0,1$ e $y, y' \neq (0,1)$ defina $(x,y) \sim (x',y')$ se $x = x'$ e $y = y'$; b) $(x,0) \sim (x,1)$; c) $(0,y) \sim (1,y)$. O modelo de Q/\sim em R^3 é o toro T_1 , v. fig. 1.6.

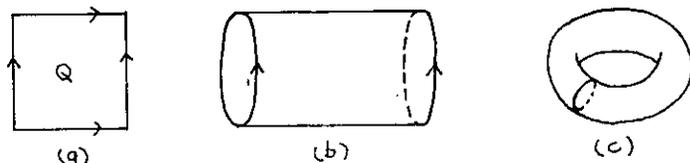


FIGURA 1.6

Exemplo 7 - Novamente em $Q = [0,1] \times [0,1]$ a relação de equivalência é definida por: a) se $x, x' \neq 0,1$ e $y, y' \neq 0,1$ então $(x,y) \sim (x',y')$ se $x = x'$ e $y = y'$; b) $(x,0) \sim (x',1)$ se $x = x'$; c) $(0,y) \sim (1,y')$ se $y + y' = 1$. Um modelo de Q/\sim em R^3 é dado na fig. 1.7 (c). A Q/\sim chamamos garrafa de Klein.

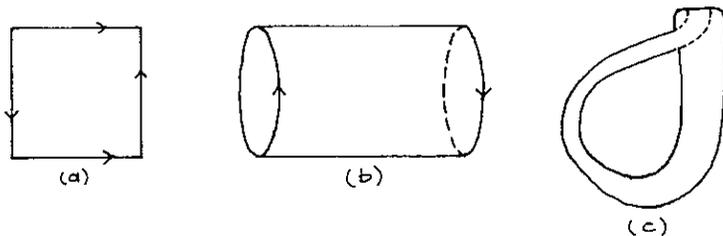


FIGURA 1.7

Observamos que P_2 é a união de duas faixas de Möbius identificadas pelo bordo. Para ver isto basta notar que na fig. 1.8 S_1 e S_2 vão dar faixas de Moebius em P_2 .

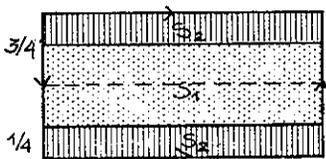


FIGURA 1.8

Exemplo 8 - Em $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1\}$ defina

$(x,y,z) \sim (x',y',z')$ se e só se $x = x', y = y', z = z'$ ou $x = -x', y = -y', z = -z'$. Ou seja, a relação de equivalência consiste em identificar pontos antípodas de S^2 . Geometricamente as figuras 1.9 (a), (b), (c) e (d) dão as sucessivas transformações de S^2 para um modelo de S^2/\sim em \mathbb{R}^3 . S^2/\sim é chamado plano projetivo.

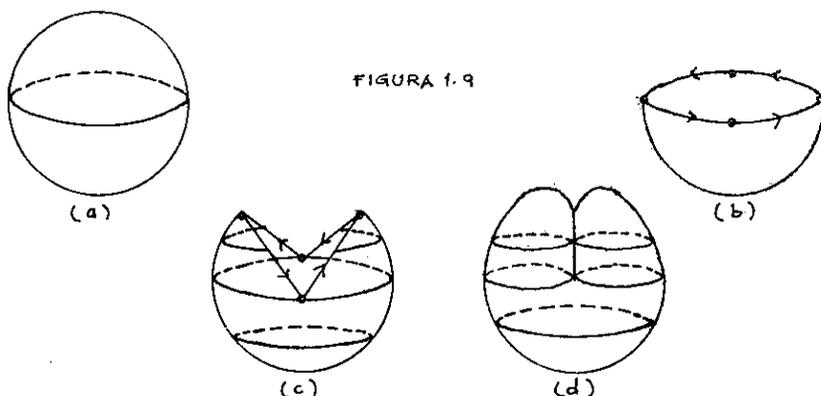


FIGURA 1.9

Se \sim é uma relação de equivalência em $S \subset \mathbb{R}^n$, denotamos $[p] = \{q \in S; q \sim p\}$. A aplicação $\tau: S \rightarrow S/\sim$, $p \mapsto [p]$, chamamos de projeção. Um subconjunto $A \subset S/\sim$ é dito aberto se $\tau^{-1}(A)$ é aberto em S ; ou seja, definimos os abertos de S/\sim impondo a condição de que a projeção τ seja contínua. No Exemplo 6, $A = \tau(B(\frac{1}{4}) \cap Q)$ é aberto porque $\tau^{-1}(A)$ é aberto em Q , hachuramos $\tau^{-1}(A)$ na fig. 1.10.

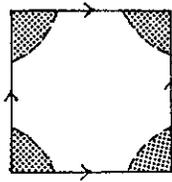


FIGURA 1.10

Uma vez que temos a noção de subconjuntos abertos de S/\sim podemos definir o que significa uma função contínua definida ou tomando valores em S/\sim , do mesmo modo que definimos em \mathbb{R}^n ou $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.10 - $f: S/\sim \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua se e somente se $f \circ \tau: S \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ é contínua.

Demonstração: Se f é contínua então $f \circ \tau$ é contínua, por ser a composta de funções contínuas.

Se, por outro lado, $f \circ \tau$ é contínua então A aberto em X implica $(f \circ \tau)^{-1}(A)$ aberto em S . Mas $(f \circ \tau)^{-1}(A) = \tau^{-1}(f^{-1}(A))$ e portanto $f^{-1}(A)$, é aberto por definição de aberto em S/\sim , o que termina a demonstração.

Exemplo 9 - Em R defina a seguinte relação de equivalência:

$x \sim x'$ se e somente se $x-x' \in Z$ (Z é o conjunto dos inteiros). Vamos chamar o conjunto quociente de R/Z (em vez de R/\sim). Seja $S^1 = \{(x,y) \in R^2; x^2+y^2 = 1\}$ e defina $f: R/Z \rightarrow S^1$ por $f([x]) = e^{2\pi i x} = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$. f está bem definida porque se $x-x' \in Z$ então $e^{2\pi i x} = e^{2\pi i x'}$. f é sobrejetiva por sua própria definição e injetiva porque $f([x]) = f([x'])$ se e só se $e^{2\pi i x} = e^{2\pi i x'}$, isto é, $x-x' \in Z$ e portanto $[x] = [x']$. f é contínua porque $g = f \circ \tau: R \rightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ é contínua. g é uma aplicação aberta pois por definição um aberto é a reunião de intervalos e $g(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, $\epsilon < \frac{1}{2}$, é um aberto em S^1 . g sendo aberta e τ sendo contínua decorre que f^{-1} é contínua. Conclusão: R/Z é homeomorfo a S^1 .

Agora vamos definir a noção de diferenciabilidade para funções de R^m em R^n .

Sejam $U \subset R^m$ e $V \subset R^n$ subconjuntos abertos. Uma aplicação $f: U \rightarrow V$ é diferenciável (ou derivável) em $p \in U$ se existe uma aplicação linear $L: R^m \rightarrow R^n$ tal que

$$f(p+h) = f(p) + L \cdot h + r(h) \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

L é chamada a diferencial (ou derivada) de f em p e denotada $f'(p)$.

Se $t \in R$ é pequeno podemos escrever

$$\frac{f(p+th) - f(p)}{t} = f'(p) \cdot h + \frac{r(th)}{t},$$

e portanto

$$f'(p) \cdot h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+th) - f(p)}{t}$$

A matriz de $f'(p)$ nas bases canônicas de R^m e R^n é $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

No conjunto $\mathcal{L}_k(R^m, R^n)$ das aplicações k-lineares $T: R^m \times \dots \times R^m \rightarrow R^n$ definimos $\|T\| = \sup\{|T(v_1, \dots, v_k)|; |v_1| = \dots = |v_k| = 1\}$. $\mathcal{L}_k(R^m, R^n)$ é isomorfo a $\mathcal{L}(R^m, \mathcal{L}_{k-1}(R^m, R^n))$.

Quando $f: U \subset R^m \rightarrow V \subset R^n$ é derivável em todos os pontos de U , fica definida a aplicação derivada $f': U \rightarrow \mathcal{L}(R^m, R^n)$. Se f' é contínua dizemos que f é de classe C^1 . É fácil verificar que f' é contínua se todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)$ são funções contínuas em U . Se f' é derivável em todos os pontos podemos definir $f'': U \rightarrow \mathcal{L}_2(R^m, R^n)$. Assim, por indução, definimos a derivada de ordem k , $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$. Quando f possui derivadas contínuas de todas as ordens, dizemos que f é de classe C^∞ .

Proposição 1.11 - Seja $f: U \subset R^m \rightarrow V \subset R^n$ e $g: V \rightarrow R^s$. Se f é derivável em p e g é derivável em $f(p)$ então $g \circ f: U \rightarrow R^s$ é derivável em p e $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$.

Dada $f: U \subset R^m \rightarrow Y \subset R^n$, dizemos que f é um difeomorfismo local de classe C^r em torno de $p \in U$ se existem abertos $U_1 \ni p$ e $V_1 \ni f(p)$ tal que $f|_{U_1}: U_1 \rightarrow V_1$ é bijetiva, de classe C^r e $(f|_{U_1})^{-1}$ é de classe C^r .

Teorema 1.2 (da função inversa) - Se $f: U \rightarrow V$ é de classe C^r e $f'(p): R^m \rightarrow R^n$ é um isomorfismo então f é um difeomorfismo local C^r em torno de p .

Para demonstrações da Proposição 1.11 e do Teorema 1.2

v. [L2].

Uma sequência de funções $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, converge uniformemente para $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ se em todo subconjunto compacto de $K \subset U$ $f_i \rightarrow f$ uniformemente, i.e., $\sup\{|f_i(p) - f(p)|; p \in K\}$ converge para zero.

A demonstração da próxima proposição pode ser encontrada em [L2].

Proposição 1.12 - Seja $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, U aberto e conexo em \mathbb{R}^m , uma sequência de aplicações C^1 que converge em um ponto $p_0 \in U$, cuja sequência das derivadas $f'_i: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ converge uniformemente para $g: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Então existe uma aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 , tal que $f_i \rightarrow f$ e $g = f'$.

A função que construiremos na próxima proposição será usada várias vezes neste livro. Uma parte da demonstração é o Exercício 17.

Proposição 1.13 - Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Existe uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que é C^∞ e tal que $K = f^{-1}(0)$.

Demonstração: Seja $U_i = \{p \in \mathbb{R}^n; d(p, K) < \frac{1}{i}\}$. Cada U_i é aberto, $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ e $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$. Usando o Exercício 17 existe uma função $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ tal que $f_i(K) = 0$ e $f_i(\mathbb{R}^n - U_i) = 1$. Assim para cada $f_i^{(j)}$ existe $M_{i,j}$ tal que $|f_i^{(j)}(p)| < M_{i,j}$, onde convencionamos que $f_i^{(0)} = f_i$ e $M_{i,0} = 1$. Consideremos o conjunto de números $\{\alpha_{i,j}\}$ definidos da seguinte maneira: $\alpha_{i,0} = \frac{1}{2^i}$ e, por indução, colocamos

$\alpha_{i,j+1} = \min \left\{ \alpha_{ij}, \frac{1}{2^{iM_{i,j+1}}} \right\}$. Os α_{ij} satisfazem o seguinte

$$0 < \alpha_{ij} \leq \frac{1}{2^{iM_{ij}}} \text{ e } \alpha_{i,j+1} \leq \alpha_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Consideremos, para cada $j > 0$ fixo, a série $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij} f_i^{(j)}$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij} f_i^{(j)}$ é dominada pela série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ ela é uniformemente convergente.

Pondo $c_i = \alpha_{ii}$ temos que $i > j$ implica $c_i \leq \alpha_{ij}$ e portanto as séries $\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i^{(j)}$ convergem uniformemente em \mathbb{R}^n .

A função $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$ satisfaz as condições da proposição anterior. Agora é fácil ver que $f(p) = 0$ se e só se $p \in K$, o que conclui a demonstração da proposição.

A função $\frac{f}{\sum c_i}$ é igual a 1 numa vizinhança de K .

Corolário - Dados $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ compactos com $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ existe uma função C^∞ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) = K_1$ e $f^{-1}(1) = K_2$.

Demonstração: Sejam V_1 e V_2 tais que $K_1 \subset V_1$, $K_2 \subset V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Consideremos as funções $g_1, g_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes condições: $g_i^{-1}(0) = K_i$ e $g_i^{-1}(1) = \mathbb{R}^n - V_i$. A função $f = g_1 + g_2$ é a que queremos e fica terminada a demonstração.

EXERCÍCIOS

1. A partir do fato de que \mathbb{R} é conexo, mostre que $D^2 = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 1\}$ é conexo.
2. $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos se dados $p, q \in X$ existe $f: [0,1] \rightarrow X$ contínua tal que $f(0) = p$ e $f(1) = q$. Se X é conexo por caminhos prove que X é conexo.
3. Seja $GL(n)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ cujo determinante é diferente de zero. Mostre que $GL(n)$ é desconexo.
4. Seja $O(n)$ o grupo das matrizes ortogonais $n \times n$. Mostre que $O_1(n) = \{A \in O(n); \det A = 1\}$ é conexo por caminhos. Sugestão: Use a forma canônica das matrizes ortogonais.
5. Mostre que $\{(x,y); y = \frac{1}{x}, x > 0\} \cup \{0\} \times [-1,1]$ não é conexo por caminhos.
6. Se $n \geq 2$, mostre que:
 - a) $\mathbb{R}^n - A_1$ é conexo, onde $A_1 = \{p \in \mathbb{R}^n; \text{todas as coordenadas de } p \text{ são racionais}\}$.
 - b) $A_2 = \{p \in \mathbb{R}^n; \text{todas as coordenadas de } p \text{ são irracionais}\}$ não é conexo.
7. Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é enumerável, mostre que $\mathbb{R}^2 - E$ é conexo.
8. Em \mathbb{R}^2 defina a seguinte relação de equivalência $(x,y) \sim (x',y')$ se e somente se $x-x', y-y' \in \mathbb{Z}$. Mostre que \mathbb{R}^2/\sim é homeomorfo a $S^1 \times S^1$.
9. Seja $D^2 = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 1\}$ e $\partial D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1\}$. Defina $(x,y) \sim (x',y')$ se e só se $(x,y), (x',y') \in \partial D^2$ ou

se $(x,y),(x',y') \in D^2 - \partial D^2$ então $(x,y) = (x',y')$. Faça um modelo para D^2/\sim .

10. Seja $K = S^1 \times [0,1] = \{(x,t) \in R^3; |z| = 1, 0 \leq t \leq 1\}$. Em K defina a seguinte relação de equivalência: $(z,t) \sim (z',t')$ se e só se $z = z', t = t'$ com $t,t' < 1$ e ponha $(z,1) \sim (z',1)$ para todo $z,z' \in S^1$. Encontre em R^n um modelo homeomorfo a K/\sim .

11. Seja

$$\Theta = A_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}; \theta \in R.$$

Temos que $A_\theta(S^2) = S^2$, $\theta \in R$. Em S^2 defina a seguinte relação de equivalência: $p \sim q$ se e só se existe $A_\theta \in \Theta$ tal que $A_\theta(p) = q$. Mostre que S^2/\sim é homeomorfo a $[0,1]$.

12. Em S^1 defina $p \sim q$ se e só se $p = q$ ou $p = -q$. Mostre que S^1/\sim é homeomorfo a S^1 .

13. Mostre que $E: [0,1) \rightarrow 1, x \mapsto E(x) = e^{2\pi i x}$ não é um homeomorfismo.

14. Intuitivamente agrupe as letras maiúsculas do alfabeto português naquelas que são homeomorfas.

15. Se $r = \{(0,0,z) \in R^3; z > 0\}$, mostre que $R^3 - r$ é homeomorfo a R^3 . Em geral mostre que se r_1, \dots, r_s são semi-retas (não incluindo seus pontos extremos) disjuntas de R^3 então $R^3 - \bigcup_{i=1}^s r_i$ é homeomorfo a R^3 .

16. Se $p,q \in S^2$ mostre que $S^2 - \{p\}$ é homeomorfo a $S^2 - \{q\}$.

Mostre também que $S^2 - \{p,q\}, p \neq q$, é homeomorfo ao cilindro $S^1 \times R$.

17. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-(x-1)^2}$, $e^{-(x+1)^2}$ se $x \in (-1, 1)$ e $f(x) = 0$ se $x \notin (-1, 1)$.

a) Mostre que f é C^∞ e trace seu gráfico.

b) Mostre que existe uma função C^∞ $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que $g(x) = 0$ se $x \leq 0$ e $g(x) = 1$ se $x \geq \epsilon$.

Sugestão: Se f é C^∞ , positiva em $(0, \epsilon)$ e zero fora de

$$(0, \epsilon), \text{ defina } g(x) = \frac{\int_0^x f}{\int_0^\epsilon f}.$$

c) Sendo $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, defina $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(p) = f\left(\frac{x_1 - a_1}{\epsilon}\right) \dots f\left(\frac{x_n - a_n}{\epsilon}\right) \text{ onde } p = (x_1, \dots, x_n).$$

Mostre que g é C^∞ , positiva no cubo aberto

$$(a_1 - \epsilon, a_1 + \epsilon) \times \dots \times (a_n - \epsilon, a_n + \epsilon) \text{ e zero fora dele.}$$

d) Se A é aberto e $K \subset A$ é compacto, mostre que existe uma função C^∞ não-negativa $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(p) > 0$ se $p \in K$ e $F = 0$ fora de um aberto contido em A .

e) Mostre que podemos escolher a função F do item anterior tal que $F(K) = 1$.

Sugestão: Se a função F do item d) satisfaz $F(p) \geq \epsilon$,

$p \in K$, considere $g \circ F$, onde g é a função do item b).

18. Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e satisfaz $f(tp) = t^m f(p)$,

mostre que $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = mf(p)$.

19. Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e $f(0) = 0$, prove que existe

$\xi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(p) = \sum_{i=1}^n x_i^i \xi_i(p)$, $p = (x_1, \dots, x_n)$.

Sugestão: Se $h(p, t) = f(tp)$ então $f(p) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t} dt$.

CAPÍTULO 2

TOPOLOGIA DAS SUPERFÍCIES DO \mathbb{R}^n

Neste capítulo estudamos as superfícies diferenciáveis do \mathbb{R}^n e vários conceitos relacionados com elas: orientabilidade, equações diferenciais e soma conexa.

Os pré-requisitos principais para a leitura deste capítulo são o teorema da função inversa e os teoremas básicos de equações diferenciais (existência, unicidade e diferenciabilidade em relação às condições iniciais).

§1. Curvas e Superfícies

Discutiremos primeiro superfícies por ser esta a ênfase deste capítulo.

Definição - $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície se:

- $M = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} V_{\alpha}$, onde V_{α} é aberto em M^2 ,
- Para cada α , existe $\varphi_{\alpha}: U_{\alpha} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_{\alpha} \subset M^2$ com U_{α} aberto em \mathbb{R}^2 e φ_{α} um homeomorfismo diferenciável de posto 2.

Nesta definição, diferenciável de posto 2 significa que φ_{α} é de classe C^{∞} e que $\varphi'_{\alpha}(x,y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação li-

near de posto 2, para todo $(x,y) \in U_\alpha$. Os φ_α são chamados parametrizações, os φ_α^{-1} sistemas de coordenadas e os V_α vizinhanças coordenadas.

Exemplos

1. A esfera $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$

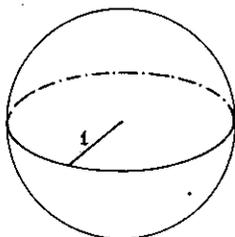


FIGURA 2.1.

Considere os seguintes abertos de S^2 :

$$V_1 = \{(x,y,z) \in S^2 : z > 0\}, \quad V_2 = \{(x,y,z) \in S^2 : z < 0\}$$

$$V_3 = \{(x,y,z) \in S^2 : y > 0\}, \quad V_4 = \{(x,y,z) \in S^2 : y < 0\}$$

$$V_5 = \{(x,y,z) \in S^2 : x > 0\}, \quad V_6 = \{(x,y,z) \in S^2 : x < 0\}$$

Tome $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ e as seguintes aplicações:

$$f_1: U \longrightarrow V_1 \quad (x,y) \longmapsto (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) \quad f_2: U \longrightarrow V_2 \quad (x,y) \longmapsto (x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2})$$

$$f_3: U \longrightarrow V_3 \quad (x,y) \longmapsto (x,\sqrt{1-x^2-y^2},y) \quad f_4: U \longrightarrow V_4 \quad (x,y) \longmapsto (x,-\sqrt{1-x^2-y^2},y)$$

$$f_5: U \longrightarrow V_5 \quad (x,y) \longmapsto (\sqrt{1-x^2-y^2},x,y) \quad f_6: U \longrightarrow V_6 \quad (x,y) \longmapsto (-\sqrt{1-x^2-y^2},x,y)$$

É fácil verificar que $S^2 = \bigcup_{i=1}^6 V_i$ e que $(f_i)'(x,y)$ tem posto 2, $(x,y) \in U$, $i = 1, \dots, 6$. Por exemplo

$$(f_1)'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}, \text{ que tem posto 2.}$$

2. O toro $T_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x^2+y^2+z^2-10)^2 + 36z^2 = 36\}$.

Este consiste em girar o círculo de raio 1 em torno do círculo de raio 3 conforme figura 2.2.

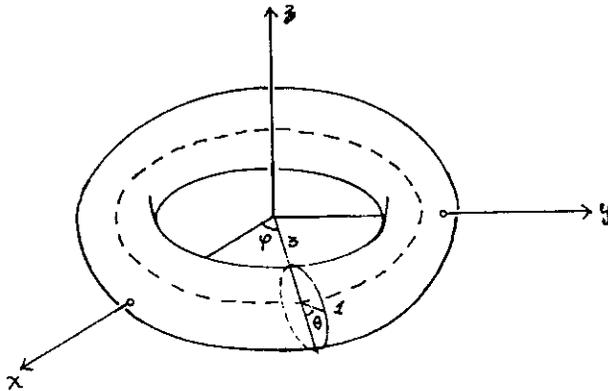


FIGURA 2.2.

Seja $g_1: (0,2\pi) \times (0,2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $g_1(\varphi, \theta) = ((3+\cos \theta)\cos \varphi, (3+\cos \theta)\sin \varphi, \sin \theta)$. Se $g_2: (\epsilon, 2\pi+\epsilon) \times (0,2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $g_3: (0,2\pi) \times (\epsilon, 2\pi+\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$, ϵ pequeno, tem as mesmas coordenadas que g_1 , não é difícil ver que $T^2 = g_1((0,2\pi) \times (0,2\pi)) \cup g_2((\epsilon, 2\pi+\epsilon) \times (0,2\pi)) \cup g_3((0,2\pi) \times (\epsilon, 2\pi+\epsilon))$ e que os g_i são homeomorfismos (sobre suas imagens) diferenciáveis de posto 2, o que mostra que T_1 é uma superfície.

3. Gráfico de uma função diferenciável.

Se $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, U aberto, é uma função diferenciável,

o gráfico de f , $G(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x,y)\}$ é uma superfície. Para ver isto basta tomar sua única parametrização

$$g: U \longrightarrow G(f) \\ (x,y) \longmapsto (x,y,f(x,y)).$$

5. Faixa de Moebius

Seja $f: \mathbb{R} \times (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação dada por $f(t,s) = \gamma(t) + s\delta(t)$, onde $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ e $\delta(t) = \cos \frac{t}{2} \cdot \gamma(t) + \sin \frac{t}{2} \cdot (0,0,1)$.

$M = f(\mathbb{R} \times (-1,1))$ é uma superfície. Com efeito se

$f_0: (0, 2\pi) \times (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $f_1: (\epsilon, 2\pi + \epsilon) \times (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}^3$, ϵ pequeno, tem as mesmas coordenadas que f , pode-se ver que eles são homeomorfismos de posto 2 sobre $V_0 = f_0((0, 2\pi) \times (-1,1))$ e

$V_1 = f_1((\epsilon, 2\pi + \epsilon) \times (-1,1))$, respectivamente; além disso $M = V_0 \cup V_1$.

Vamos mostrar que M é a faixa de Moebius. Como f é periódica de período 2π na variável t , temos que $M = f([0, 2\pi] \times (-1,1))$. Como $f|_{(0, 2\pi) \times (-1,1)} = f_0$ (que é um homeomorfismo sobre sua imagem), basta examinar o comportamento de $f|_{\{0\} \times (-1,1)}$ e $f|_{\{2\pi\} \times (-1,1)}$. É de verificação simples que $f(0,s) = f(2\pi, -s)$, donde concluímos que M é a faixa de Moebius.

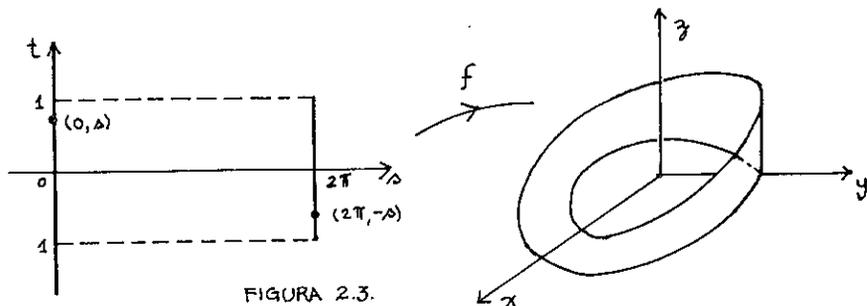


FIGURA 2.3.

Definimos então uma superfície como um subconjunto do R^n que é localmente (i.e. a menos de um homeomorfismo diferenciável) o R^2 . Um dos motivos para tal definição é que sabemos tratar de muitos conceitos no R^2 . Assim o modo natural de transportarmos um conceito do R^2 para uma superfície é primeiro escolher parametrizações para definí-lo e em seguida mostrar que independe da escolha.

Uma ferramenta essencial para o que foi dito acima é a proposição seguinte.

Proposição 2.1 - Seja $M \subset R^n$ uma superfície e $\varphi: U \subset R^2 \rightarrow V \subset M$ $\varphi(0) = p$, uma parametrização em torno de p . Existem abertos $Z, W \subset R^n$ contendo 0 e p respectivamente tais que $Z \cap R^2 \subset U$, $W \cap M^2 \subset V$ e um difeomorfismo $\psi: Z \rightarrow W$ que é uma extensão de φ , i.e. $\psi|Z \cap R^2 = \varphi|Z \cap R^2$.

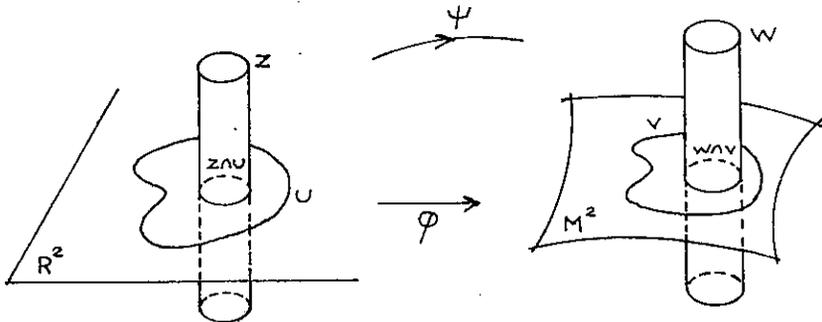


FIGURA 2.4.

Demonstração:

Seja $\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M^2 \subset \mathbb{R}^n$

$$(x_1, x_2) \mapsto (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2), \dots, \varphi_n(x_1, x_2)).$$

$$\varphi'(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(0) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(0) & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}(0) \end{pmatrix}$$

tem posto 2, logo podemos supor (modificando a ordem das coordenadas se necessário) que $\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0)\right)_{i,j=1,2} \neq 0$.

Definamos $\psi: U \times \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2), x_3 + \varphi_3(x_1, x_2), \dots, x_n + \varphi_n(x_1, x_2))$.

$$\psi'(0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0)\right)_{i,j=1,2} & 0 \\ * & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

onde I_{n-2} é a identidade de \mathbb{R}^{n-2} . Daí $\det \psi'(0) =$

$= \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0)\right)_{i,j=1,2} \neq 0$. Aplicando o teorema da função inversa encontramos abertos $Z, W \subset \mathbb{R}^n$, em torno de $\underline{0}$ e p , respectivamente, tais que $\psi: Z \rightarrow W$ é um difeomorfismo. Como

$\psi(x_1, x_2, 0, \dots, 0) = \varphi(x_1, x_2)$ temos que $\psi|_{Z \cap \mathbb{R}^2} = \varphi|_{Z \cap \mathbb{R}^2}$, o que conclui a demonstração.

A escolha de $\varphi(0) = p$ na proposição anterior não implica em nenhuma restrição porque podemos sempre compor φ com uma

translação que leve $\varphi^{-1}(p)$ em $\underline{0}$.

Corolário - Se $\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$ e $\varphi_1: U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_1 \subset M$,
 $V \cap V_1 \neq \emptyset$, são parametrizações em M^2 então
 $\varphi_1^{-1} \circ \varphi: \varphi^{-1}(V \cap V_1) \rightarrow \varphi_1^{-1}(V \cap V_1)$ é um difeomorfismo.

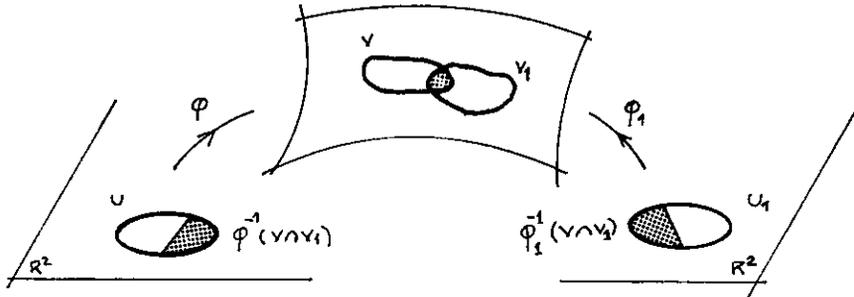


FIGURA 2.5.

Demonstração: Seja $x \in \varphi^{-1}(V \cap V_1)$ e $\varphi(x) = p \in V \cap V_1$. Da pro-
 posição anterior existem abertos Z_1 e W_1 em tor-
 no de $y = \varphi_1^{-1}(p)$ e p e um difeomorfismo $\psi_1: Z_1 \rightarrow W_1$ tal que
 $\psi_1|_{Z_1 \cap \mathbb{R}^2} = \varphi_1|_{Z_1 \cap \mathbb{R}^2}$. Tomando $U_1 = W_1 \cap V \cap V_1$ temos que
 $\varphi_1^{-1} \circ \varphi|_{U_1} = \psi_1^{-1} \circ \varphi|_{U_1}$ pois φ_1^{-1} e ψ_1^{-1} coincidem na superfície.
 Como ψ_1^{-1} e φ são diferenciáveis segue-se que $\varphi_1^{-1} \circ \varphi|_{U_1}$ é di-
 ferenciável. De modo análogo mostraríamos que $\varphi \circ \varphi_1^{-1}$ (a inversa
 de $\varphi_1^{-1} \circ \varphi$) é diferenciável em torno de y . Assim $\varphi_1^{-1} \circ \varphi|_{U_1}$ é
 um difeomorfismo. Como $x \in \varphi^{-1}(V \cap V_1)$ é arbitrário, $\varphi_1^{-1} \circ \varphi$ é
 um difeomorfismo em $\varphi^{-1}(V \cap V_1)$ o que conclui a demonstração.

O difeomorfismo $\varphi_1^{-1} \circ \varphi$ do corolário anterior é chamado
 mudança de coordenadas.

O que queremos agora é introduzir o conceito de derivada de uma aplicação entre duas superfícies que seja análogo ao que já conhecemos em R^n .

Em primeiro lugar vamos dar a definição de diferenciabilidade para aplicações definidas em superfícies e tomando valores em R^s .

Definição - $f: M \rightarrow R^s$ é diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização $\varphi: U \rightarrow V$, $p \in V$, a aplicação $f \circ \varphi: U \rightarrow R^s$ é diferenciável (C^∞).

Esta definição independe da parametrização em torno de p . Se $\psi: U' \rightarrow V'$, $p \in V'$, à outra parametrização podemos escrever $f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$; como pelo corolário anterior $\varphi^{-1} \circ \psi$ é diferenciável e $f \circ \varphi$ também é, por definição, segue-se que $f \circ \psi$ é diferenciável.

Quando $f: M \rightarrow R^s$ é diferenciável em todo $p \in M$, dizemos que f é diferenciável em M .

Exemplo 6 - Seja $f: S^2 \rightarrow R$. Nas parametrizações de S^2
 $(x, y, z) \mapsto z$

dadas no Exemplo 1 temos que $f \circ f_i: U \rightarrow V_i$ $i=1, \dots, 6$ são dadas por:

$$f \circ f_1(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad f \circ f_2(x, y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\text{e } f \circ f_i(x, y) = y, \quad i = 3, 4, 5, 6.$$

Portanto f é uma função diferenciável em S^2 .

Definição - Seja $p \in M$ e $\varphi: U \rightarrow V$ uma parametrização em torno de p com $\varphi(x_0, y_0) = p$. O plano tangente a M , em

p é definido como $TM_p = \varphi'(x_0, y_0) \cdot R^2$ (a imagem de R^2 por $\varphi'(x_0, y_0)$).

A definição de plano tangente em p , independe da parametrização. Com efeito, se $\psi: U' \rightarrow V'$ é outra parametrização com $\psi(x_1, y_1) = p$, então, em $\psi^{-1}(V \cap V')$, temos que $\psi = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \psi$ e portanto $\psi'(x_1, y_1) = \varphi'(\varphi^{-1} \circ \psi(x_1, y_1)) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)'(x_1, y_1)$.

$(\varphi^{-1} \circ \psi)'(x_1, y_1) \cdot R^2 = R^2$ porque $\varphi^{-1} \circ \psi$ é um difeomorfismo. Daí $\psi'(x_1, y_1) \cdot R^2 = \varphi'(x_0, y_0) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)'(x_1, y_1) \cdot R^2 = \varphi'(x_0, y_0) \cdot R^2$, o que mostra que TM_p é bem definido.

Observamos que como foi definido o plano tangente passa na origem, sendo paralelo ao "plano afim" $p + TM_p = \{p + v; v \in TM_p\}$. Uma outra observação é que TM_p tem dimensão 2 pois $\varphi'(x_0, y_0)$ tem posto 2. Nas interpretações geométricas é comum identificar os planos afim e tangente.

Se $M \subset R^n$ e $N \subset R^s$ são superfícies e $i: N \rightarrow R^s$, $i(p) = p$, dizemos que $f: M \rightarrow N$ é diferenciável se $f \circ i: M \rightarrow R^s$ é diferenciável.

Agora estamos em condições de dar a definição de derivada de uma aplicação entre duas superfícies.

Definição - Sejam $M \subset R^n$ e $N \subset R^s$ duas superfícies e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dado $p \in M$ e $v \in TM_p$, tome $\varphi: U \rightarrow V$ uma parametrização em torno de p com $\varphi(x_0, y_0) = p$ e $u \in R^2$ tal que $\varphi'(x_0, y_0) \cdot u = v$. Definimos $f'(p): TM_p \rightarrow TM_{f(p)}$ por $f'(x) \cdot v = (f \circ \varphi)'(x_0, y_0) \cdot u$.

Esta definição independe da parametrização em torno de p . Se $\psi: U' \rightarrow V'$, $\psi(x_1, y_1) = p$ é outra parametrização com

$\psi'(x_1, y_1) \cdot u_1 = v$ então $f \circ \varphi: f \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi$ em $\varphi^{-1}(V \cap V')$. Portanto $(f \circ \varphi)'(x_0, y_0) \cdot u = (f \circ \psi)'(x_1, y_1) \circ (\psi^{-1} \circ \varphi)'(x_0, y_0) \cdot u = (f \circ \psi)'(x_1, y_1) \cdot u_1$, o que mostra que a derivada é um conceito bem definido.

Observamos que $f'(p) \cdot TM_p \subset TN_{f(p)}$ e que $f'(p)$ é linear. De fato, se $\varphi: U \rightarrow V$, $\varphi(x_0, y_0) = p$ e $\theta: U_1 \rightarrow V_1$, $\theta(x_1, y_1) = f(p)$ são parametrizações em torno de p e $f(p)$ então $\theta^{-1} \circ f \circ \varphi: U \rightarrow U_1$ satisfaz $(\theta^{-1} \circ f \circ \varphi)'(x_0, y_0) \cdot R^2 \subset R^2$ e portanto $\theta'(x_1, y_1) \circ (\theta^{-1} \circ f \circ \varphi)'(x_0, y_0) \cdot R^2 \subset \theta'(x_1, y_1) \cdot R^2$ donde pela regra da cadeia $(f \circ \varphi)'(x_0, y_0) \cdot R^2 \subset \theta'(x_1, y_1) \cdot R^2$, isto é, $f'(p) \cdot TM_p \subset TN_{f(p)}$.

$f'(p)$ é linear pois, por definição, $TM_p = \varphi'(x_0, y_0) \cdot R^2$ e $(f \circ \varphi)'(x_0, y_0): R^2 \rightarrow R^p$ é linear.

É importante observar que do ponto de vista computacional se φ e θ são parametrizações em torno de p e $f(p)$, respectivamente, então a matriz de $f'(p)$ nas bases $\{\varphi'(x_0, y_0) \cdot e_1, \varphi'(x_0, y_0) \cdot e_2\}$ de TM_p e $\{\theta'(x_1, y_1) \cdot e_1, \theta'(x_1, y_1) \cdot e_2\}$ de $TN_{f(p)}$ é a mesma matriz de $(\theta^{-1} \circ f \circ \varphi)'(x_0, y_0)$ na base canônica $\{e_1, e_2\}$ de R^2 .

Se M e N são superfícies e $X \subset M$, $Y \subset N$ são abertos, um difeomorfismo $f: X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo diferenciável,

cujo inverso é diferenciável. Usaremos a notação $X \approx Y$ se existir um difeomorfismo entre X e Y . Por exemplo, uma parametrização $\varphi: U \subset R^2 \rightarrow V \subset M$ é um difeomorfismo.

Os vários conceitos introduzidos até agora nos permitem mostrar que o plano projetivo, definido no capítulo anterior, é uma superfície contida em R^4 .

Exemplo 7 - O plano projetivo.

Seja $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$

Vamos mostrar primeiro que $P_1 = f(S^2)$. Para isto basta ver que $f(p) = f(q)$ se e somente se $p = \pm q$.

É claro que $f(p) = f(-p)$. Assim, sejam $p = (x, y, z)$ e $q = (u, v, w)$ com $f(p) = f(q)$. Temos então que

1) $a = x^2 - y^2 = u^2 - v^2$ 2) $b = xy = uv$
3) $c = xz = uw$ 4) $d = yz = vw$.

Suponhamos que $x, y, z \neq 0$. De 2) temos $x = \frac{uv}{y}$ que substituindo em 3) dá 5) $z = \frac{wy}{v}$. Como de 4) temos $z = \frac{wv}{y}$ segue-se que $\frac{wv}{y} = \frac{wy}{v}$ e portanto $y = \pm v$. De 2) temos que $x = \pm u$. Segue-se então de 3) que $z = \pm w$. Concluimos portanto que $p = \pm q$.

Suponhamos agora que $x \neq 0$ e $y = 0$. Daí x e $-x$ são soluções de $x^2 = a$ e portanto z e $-z$ são soluções de $xz = c$. Novamente a igualdade $f(p) = f(q)$ implica em $p = \pm q$. Os outros casos $x = 0$, $y \neq 0$, etc. são tratados de forma inteiramente análoga.

Agora vamos mostrar que para todo $(x, y, z) \in S^2$, $f'(x, y, z) \cdot TS_{(x, y, z)}^2$ tem dimensão 2.

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\det \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix} = 2x(x^2+y^2)$$

$$\det \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix} = -2xyz$$

$$\det \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix} = 2y(x^2+y^2)$$

$$\det \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix} = 2z(x^2+y^2).$$

Assim $f'(x,y,z)$ tem posto 3 exceto quando $x = y = 0$. Daí se $(x,y,z) \neq (0,0,\pm 1)$, $(x,y,z) \in S^2$ temos que $f'(x,y,z) \cdot TS_{(x,y,z)}^2$ tem dimensão 2.

Agora

$$f'(0,0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$f'(0,0,\pm 1) \cdot e_1 = \pm e_3$$

$$f'(0,0,\pm 1) \cdot e_2 = \pm e_4.$$

Por conseguinte $f'(0,0,\pm 1) \cdot TS_{(0,0,\pm 1)}^2$ tem dimensão 2.

Mostremos agora que f é uma aplicação aberta de S^2 sobre P_1 .

Suponhamos que f não é aberta e seja $A \subset S^2$ um conjun-

to aberto tal que existem $q \in f(A)$, $q_n \in P_1$ com $q_n \notin f(A)$ e $q_n \rightarrow q$. Sejam p_n , $p \in S^2$ tais que $f(p_n) = q_n$ e $f(p) = q$. Como S^2 é compacto, isto implica que existe uma subsequência convergente, denotada ainda por p_n . Como $f(p) \in f(A)$ então $p \in A \cup (-A)$, onde $-A = \{-p; p \in A\}$. $A \cup (-A)$ sendo aberto (a aplicação antípoda é um difeomorfismo de S^2), temos $p_n \in A \cup (-A)$ a partir de um certo n . Então $f(p_n) \in f(A) (= f(-A))$ a partir de um certo n , o que dá uma contradição.

Enfim vamos mostrar que P_1 é uma superfície.

Sejam $f_i: U \rightarrow V_i$, $i=1,3,5$ as parametrizações do Exemplo 1 e $W_i = f(V_i)$. Afirmamos que $f \circ f_i: U \rightarrow W_i$ $i=1,3,5$ são parametrizações de P_1 . Com efeito, $P_1 = W_1 \cup W_3 \cup W_5$ e como V_i não contém pontos antípodas e f é uma aplicação aberta $f|_{V_i}: V_i \rightarrow W_i$ é um homeomorfismo. Segue-se daí que $f \circ f_i: U \rightarrow W_i$ é um homeomorfismo (diferenciável, pela sua própria expressão). Que $f \circ f_i$ tem posto 2 decorre do fato de que os f_i tem posto 2 e de que $\dim f'(x,y,z) \cdot TS^2_{(x,y,z)} = 2$.

Daremos agora a definição de curva que, de resto, é inteiramente análoga à de superfície.

Definição - $L \subset \mathbb{R}^n$ é uma curva se

a)
$$L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$$

b) Para cada i , existe $\lambda_i: (a_i, b_i) \rightarrow L_i$ que é um homeomorfismo C^∞ de posto 1.

Todas as proposições demonstradas para superfícies até aqui são válidas para curvas com as devidas modificações; deixamos a

cargo do leitor redemonstrá-las.

Exemplo 8 - O círculo $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1\}$ é uma curva.

Para isto tome $L_1 = \{(x,y) \in S^1; y \neq 1\}$ e $L_2 = \{(x,y) \in S^1; y \neq -1\}$ como vizinhanças coordenadas.

$$\lambda_1: \mathbb{R} \longrightarrow L_1 \quad \text{e} \quad \lambda_2: \mathbb{R} \longrightarrow L_2 \quad \text{são as para-}$$

$$t \mapsto \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right) \quad t \mapsto \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{-t^2+1}{t^2+1} \right)$$

metrizações. Observamos que λ_1 e λ_2 são as inversas das projeções estereográficas em relação aos pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$, respectivamente.

Exemplo 9 - A hélice $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x=a \cos t, y=a \sin t, z=bt, a,b \neq 0\}$ é uma curva cuja única parametrização é

$$\lambda: \mathbb{R} \longrightarrow H$$

$$t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$$

Exemplo 10 - A lemniscata (fig. 2.6), que em coordenadas polares é dada por $\rho = \cos \theta$, não é uma curva no sentido que definimos. Isto porque se existe um homeomorfismo $\varphi: (a,b) \rightarrow V$,

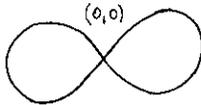


FIGURA 2.6.

onde V é uma vizinhança de $(0,0)$, então $\varphi|_{(a,b) - \varphi^{-1}(0,0)} \rightarrow V - (0,0)$ leva duas componentes conexas em quatro componentes conexas, o que dá uma contradição (lembramos que os abertos da lemniscata são interseções dos abertos do plano com a lemniscata).

Finalizamos este parágrafo com o conceito de superfície com bordo.

Definição - Dizemos que $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é diferenciável se existe um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ com $X \subset A$ e $\tilde{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciável tal que $\tilde{f}|X = f$.

Seja $H^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ o semi-plano superior.

Definição - $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície com bordo se

a) $M = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} V_{\alpha}$, onde V_{α} é aberto em M .

b) Para cada α , existe $\varphi_{\alpha}: U_{\alpha} \subset H^+ \rightarrow V_{\alpha}$ um homeomorfismo diferenciável de posto 2.

O bordo de M é a imagem dos pontos sobre o eixo dos x por alguma parametrização. A notação para o bordo de M é ∂M . Não é difícil mostrar que ∂M é uma curva.

Novamente aqui observamos que, com as modificações convenientes, valem todas as proposições e definições dadas para superfícies sem bordo.

Exemplo 11 - O disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 1\}$ é uma superfície com bordo.

Sejam $V_1 = \{(x,y) \in D^2; x > 0\}$, $V_2 = \{(x,y) \in D^2; x < 0\}$, $V_3 = \{(x,y) \in D^2; y > 0\}$ e $V_4 = \{(x,y) \in D^2; y < 0\}$ (fig. 2.7)

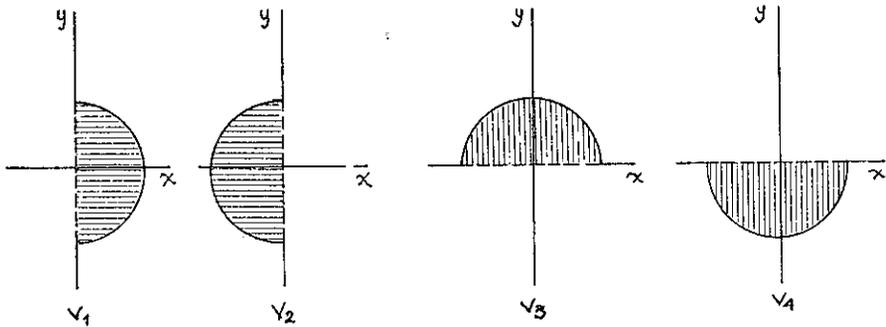


FIGURA 2.7.

É claro que $D = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$.

$$\begin{aligned} \varphi: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 1] &\longrightarrow V_1 & e \\ (x, y) &\longmapsto (y \cos x, y \operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 1] &\longrightarrow H^+ \\ (x, y) &\longmapsto \left(\operatorname{tg} x, \frac{1-x}{x}\right) \end{aligned}$$

são difeomorfismos. $\theta = \varphi \circ \psi^{-1}: H^+ \rightarrow V_1$ dá uma parametrização de V_1 .

As parametrizações de V_2 , V_3 e V_4 são construídas de modo análogo à de V_1 .

§2. Orientabilidade.

Antes de dar o conceito de orientabilidade em uma superfície qualquer, vamos revê-lo em \mathbb{R}^2 .

Usualmente encontramos dois conceitos de orientabilidade no plano: um, intrínseco, isto é, que não faz uso do fato de que R^2 está contido no espaço R^3 e outro que o faz. O primeiro consiste em orientar o círculo unitário (convencionou-se que a orientação positiva é a anti-horária), enquanto que no segundo tomamos o plano como sendo $z = 0$ e dizemos que a orientação positiva do plano é dada pela escolha do vetor $(0,0,1)$ perpendicular ao plano. A ligação entre os dois conceitos é dada pela "regra da mão direita".

Mais precisamente, seja $SL(2,R)$ o conjunto das matrizes 2×2 ortogonais de determinante 1 (lembramos que se $A \in SL(2,R)$ então $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $\theta \in R$). Denotemos por \mathcal{B} o conjunto das bases ortonormais do plano. Duas tais bases $\{e_1, e_2\}$ e $\{f_1, f_2\}$ são equivalentes se existe $A \in SL(2,R)$ tal que $Ae_1 = f_1$, $Ae_2 = f_2$, isto é, se é possível fazê-las coincidir após uma rotação. Esta relação de equivalência divide \mathcal{B} em duas classes de equivalência. É usual chamar de positiva àquela que contém a base canônica (ou seja, escolhemos como positivo o sentido anti-horário). Sendo a origem de R^2 completamente arbitrária, podemos definir uma orientação em cada ponto do plano. Tendo sido escolhidas todas positivas, dizemos que o plano está orientado positivamente.

Para o outro conceito, dar a orientação positiva do plano é dar a função $n: R^2 \longrightarrow R^3$
 $(x,y) \mapsto n(x,y) = (0,0,1)$.

A ligação entre os dois conceitos acima é dada pelo produto vetorial do R^3 .

Daremos agora a definição de orientação numa superfície que é a extensão da noção intrínseca acima definida.

Definição - Uma superfície $M \subset \mathbb{R}^n$ é orientável se é possível cobrir M com vizinhanças coordenadas $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ tais que o conjunto das parametrizações $\mathcal{P} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i, i=1, \dots, \infty\}$ satisfaz a seguinte condição: se $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$ e $\varphi_j: U_j \rightarrow V_j$ pertencem a \mathcal{P} com $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ então $\det(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)'(x, y) > 0$, para todo $(x, y) \in \varphi_j^{-1}(V_i \cap V_j)$.

Fixado \mathcal{P} nessa definição dizemos que M está orientada e que \mathcal{P} é uma orientação de M .

Sejam $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$ e $\varphi_j: U_j \rightarrow V_j$ tais que $\varphi_i(x, y) = \varphi_j(\bar{x}, \bar{y}) = p$. Então $\{\varphi_i'(x, y) \cdot e_1, \varphi_i'(x, y) \cdot e_2\}$ e $\{\varphi_j'(\bar{x}, \bar{y}) \cdot e_1, \varphi_j'(\bar{x}, \bar{y}) \cdot e_2\}$ são bases de TM_p e portanto

$$\varphi_j'(\bar{x}, \bar{y}) \cdot e_1 = a_{11} \varphi_i'(x, y) \cdot e_1 + a_{12} \varphi_i'(x, y) \cdot e_2$$

$$\varphi_j'(\bar{x}, \bar{y}) \cdot e_2 = a_{21} \varphi_i'(x, y) \cdot e_1 + a_{22} \varphi_i'(x, y) \cdot e_2.$$

Usando a regra da cadeia temos que

$$(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)'(\bar{x}, \bar{y}) \cdot e_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2$$

$$(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)'(\bar{x}, \bar{y}) \cdot e_2 = a_{21} e_1 + a_{22} e_2$$

e então

$$\det(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)'(\bar{x}, \bar{y}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Assim, de fato o conceito de orientação acima definido é uma generalização daquele do plano, já que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é a matriz de mudança de bases.

Observamos ainda que a definição dada não depende do particular R^n onde M está contida. Entretanto para superfícies em R^3 é possível dar uma caracterização de orientabilidade fazendo uso do espaço exterior.

Definição - Um campo de vetores normal a uma superfície $M \subset R^S$ é uma aplicação $n: M \rightarrow R^S$, C^∞ , tal que $\langle n(p), v \rangle = 0$, para todo $v \in TM_p$ e todo $p \in M$.

Proposição 2.2 - Uma superfície $M \subset R^3$ é orientável se, e somente se, existe um campo de vetores normal a M e não-nulo.

Demonstração: Se M é orientável, seja ρ uma orientação. Se $p \in M$ e $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$, $\varphi_i(x, y) = p$, é uma parametrização de ρ , definimos

$$n(p) = \frac{\varphi'_1(x, y) \cdot e_1 \wedge \varphi'_1(x, y) \cdot e_2}{|\varphi'_1(x, y) \cdot e_1 \wedge \varphi'_1(x, y) \cdot e_2|}$$

onde \wedge é o produto vetorial de R^3 . Vejamos que $n(p)$ independe da particular parametrização φ_i de ρ . Seja $\varphi_j: U_j \rightarrow V_j$ outra parametrização de ρ com $\varphi_j(\bar{x}, \bar{y}) = p$. Temos que $\varphi'_j(\bar{x}, \bar{y}) \cdot e_1 \wedge \varphi'_j(\bar{x}, \bar{y}) \cdot e_2 = \lambda \varphi'_1(x, y) \cdot e_1 \wedge \varphi'_1(x, y) \cdot e_2$ onde $\lambda = \det(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)'(\bar{x}, \bar{y})$. Como $\lambda > 0$ segue-se que $n(p)$ está bem definido.

Suponha agora que $n(p)$ é um campo de vetores normal a M e não-nulo. Construímos ρ como o conjunto das parametrizações $\varphi: U \rightarrow V$ cuja união dos contradomínios cobrem M , U é conexo e $\det[\varphi'(x, y) \cdot e_1, \varphi'(x, y) \cdot e_2, n(p)] > 0$, $\varphi(x, y) = p$, para todo $(x, y) \in U$. Tal ρ pode sempre ser construído porque se $\xi: U' \rightarrow V'$

não está em p definimos $\psi(x,y) = \xi(-x,y)$ que agora está em ρ .
 Vejamos agora que de fato ρ define uma orientação em M . Se
 $\varphi: V \rightarrow V$ e $\psi: U_1 \rightarrow V_1$ estão em ρ com $\varphi(x,y) = \psi(\bar{x},\bar{y}) = p$,
 temos que se

$$\varphi'(x,y) \cdot e_1 = a_{11} \psi'(\bar{x},\bar{y}) \cdot e_1 + a_{12} \psi'(\bar{x},\bar{y}) \cdot e_2$$

$$\varphi'(x,y) \cdot e_2 = a_{21} \psi'(\bar{x},\bar{y}) \cdot e_1 + a_{22} \psi'(\bar{x},\bar{y}) \cdot e_2$$

então

$$\begin{aligned} & \det[\varphi'(x,y) \cdot e_1, \varphi'(x,y) \cdot e_2, n(p)] = \\ & = \det[\psi'(\bar{x},\bar{y}) \cdot e_1, \psi'(\bar{x},\bar{y}) \cdot e_2, n(p)] \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ & = \det[\psi'(\bar{x},\bar{y}) \cdot e_1, \psi'(\bar{x},\bar{y}) \cdot e_2, n(p)] \cdot \det(\varphi^{-1} \circ \psi)'(\bar{x},\bar{y}), \end{aligned}$$

e portanto $\det(\varphi^{-1} \circ \psi)'(\bar{x},\bar{y}) > 0$, o que termina a demonstração.

Corolário - Se $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que

$$f'(x,y,z) \neq 0 \text{ para todo } (x,y,z) \in f^{-1}(0) \text{ então}$$

$M = f^{-1}(0)$ é uma superfície orientável.

Demonstração: M é uma superfície pelo teorema das funções implícitas.

$$n(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right), \quad (x,y,z) \in M$$

define um campo normal a M e não nulo. Com efeito se $v \in TM_p$,

seja $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) =$

(x,y,z) e $\alpha'(0) = v$. Então $f \circ \alpha(t) = 0$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Assim $f'(x,y,z) \cdot v = 0$, e portanto $\langle n(x,y,z), v \rangle = 0$, o que demonstra o corolário.

Exemplo 12 - A esfera $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1\}$ é orientável: $n(x,y,z) = (x,y,z)$ é um campo de vetores normal a S^2 não nulo.

Exemplo 13 - A faixa de Moebius (Exemplo 5) não é orientável.

Com efeito, se existisse um campo de vetores normal a M e não nulo e o restringíssemos ao círculo central $S^1 = \{(\cos t, \sin t, 0); 0 \leq t \leq 2\pi\}$, teríamos que a restrição $n(t) = n(\cos t, \sin t, 0)$ satisfaria $n(0) = -n(2\pi)$, ou seja $n(1,0,0) = 0$, o que dá uma contradição.

Decorre desse exemplo que se uma superfície contém uma faixa de Moebius então ela é não orientável. Isto porque se cobrirmos a superfície com vizinhanças coordenadas e restringirmos suas parametrizações à faixa de Moebius, o determinante das mudanças de coordenadas destas restrições será negativo em algum ponto, o mesmo acontecendo então com as parametrizações originais.

Exemplo 14 - O plano projetivo P_1 não é orientável, pois a faixa de S^2 da figura abaixo é levada na faixa de Moebius em P_1 pela função f do Exemplo 7.

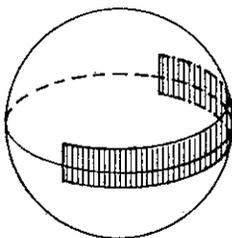
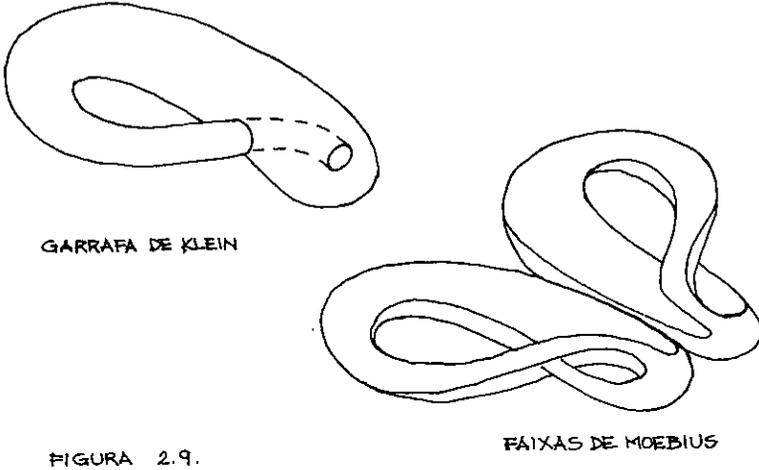


FIGURA 2.8.

Exemplo 15 - A garrafa de Klein é uma superfície (veremos isto no §4) não-orientável, já que ela é a união de duas faixas de Moebius identificadas pelo bordo, figura 2.9.



§3. Equações Diferenciais.

Neste parágrafo trataremos de equações diferenciais no plano e em superfícies, e daremos os resultados necessários numa forma conveniente ao seu uso posterior.

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_1(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= v_2(x,y) \end{aligned}$$

uma equação diferencial em U com v_1 e v_2 funções diferen-

ciáveis. Nos interessaremos somente por equações diferenciais onde v_1 e v_2 não dependem da variável t (é comum, motivado pela Física, nos referirmos a t como sendo o tempo).

Uma solução da equação diferencial (1) com condição inicial $(x_0, y_0) \in U$ é uma aplicação $\varphi: (-a, a) \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ tal que $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ satisfaz as seguintes condições:

1. $\varphi(0) = (x_0, y_0)$

2. $\frac{d\varphi_1}{dt}(t) = v_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$

$$\frac{d\varphi_2}{dt}(t) = v_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \quad t \in (-a, a).$$

Para indicar que $\varphi(t)$ passa em (x_0, y_0) para $t = 0$ usa-se a notação $\varphi(t, (x_0, y_0))$.

A aplicação $v: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto v(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$

é o campo de vetores associado a equação diferencial (1). Assim uma solução da equação com condição inicial (x_0, y_0) é uma curva em U que passa em (x_0, y_0) e cujo vetor tangente em cada ponto é o campo v aplicado neste ponto. É também usual chamar $\varphi(t, (x_0, y_0))$ de curva integral ou órbita do campo v que passa em (x_0, y_0) .

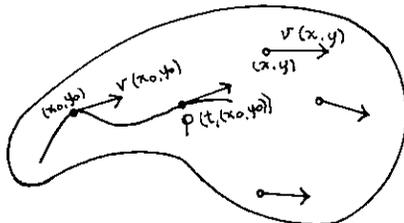


FIGURA 2.10.

Se em vizinhanças $(-a, a)$ e Q' de U' de (x_0, y_0) as curvas integrais $\varphi(t, (x, y))$, $t \in (-a, a)$ e $(x, y) \in U'$, variam continuamente (diferenciavelmente), com (x, y) , dizemos que as soluções da equação diferencial - ou, o que é a mesma coisa, as curvas integrais do campo v - variam continuamente (diferenciavelmente) com as condições iniciais.

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [C-L], é fundamental na teoria das equações diferenciais. Vamos enunciá-lo em termos de campos de vetores.

Teorema 2.1 - Seja $v: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores diferenciável. Para cada $(x_0, y_0) \in U$ existem um aberto $U' \ni (x_0, y_0)$, $\epsilon > 0$ e uma única aplicação $\varphi: (-\epsilon, \epsilon) \times U' \rightarrow U$ que para cada $(x, y) \in U'$ $\varphi(t, (x, y))$ é a curva integral do campo v que passa por (x, y) . Mais ainda φ é diferenciável.

Decorre desse teorema que a aplicação

$\varphi_t: U' \rightarrow \varphi_t(U')$ é diferenciável e satisfaz ao
 $(x, y) \mapsto \varphi_t(x, y) = \varphi(t, (x, y))$

seguinte:

a) $\varphi_0(x, y) = (x, y)$, para todo $(x, y) \in U'$

b) Se $|t|, |s|, |t+s| < \epsilon$, então $\varphi_{t+s}(x, y) = \varphi_t \circ \varphi_s(x, y)$,
 $(x, y) \in U'$.

a) é imediato pois (x, y) é condição inicial, enquanto que para mostrar b) é suficiente notar que, fixado s , tanto

$\varphi_{t+s}(x, y) = \varphi(t+s, (x, y))$ quanto $\varphi_t(\varphi_s(x, y)) = \varphi(t, \varphi(s, (x, y)))$

são curvas integrais do campo v com a mesma condição inicial $\varphi(s, (x, y))$ e, portanto, coincidem pelo Teorema 2.1. É consequên

cia de b) que as aplicações φ_t são difeomorfismos, pois

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t}(x, y) = (x, y), \quad (x, y) \in \varphi_t(U')$$

$$\varphi_{-t} \circ \varphi_t(x, y) = (x, y), \quad (x, y) \in U'.$$

Geometricamente φ_t corresponde a transladar os pontos de U' de um tempo t ao longo das curvas integrais de v .

$\{\varphi_t, |t| < \epsilon\}$ é chamado grupo a 1-parâmetro local ou fluxo local do campo v .

Exemplo 16 - Seja $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = (\lambda x, \mu y)$ uma equação diferencial em \mathbb{R}^2 . Do Teorema 2.1 decorre que $\varphi(t, (x, y)) = (e^{\lambda t} \cdot x, e^{\mu t} \cdot y)$ é a única solução que passa por (x, y) . Para ver como é no plano as curvas integrais do campo $v(x, y) = (\lambda x, \mu y)$ consideramos 3 casos: $\lambda < 0$ e $\mu > 0$, $\lambda < 0$ e $\mu < 0$, $\lambda > 0$ e $\mu > 0$. E temos então os seguintes diagramas:

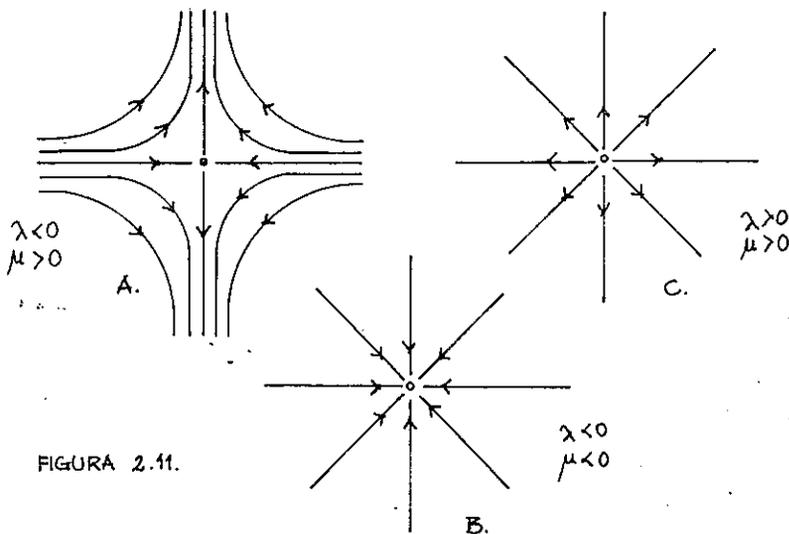


FIGURA 2.11.

Vamos transportar para superfícies o que vimos até agora.

Definição - Um campo de vetores tangentes a uma superfície $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação C^∞ , $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $v(p) \in TM_p$, para todo $p \in M$.

Novamente aqui uma curva integral de v com condição inicial $p_0 \in M$ é uma aplicação $\psi: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que

$$t \longmapsto \psi(t, p_0)$$

1'. $\psi(0, p_0) = p_0$

2'. $\frac{d\psi}{dt}(t, p_0) = v(\psi(t, p_0))$.

Tem-se agora uma versão análoga ao Teorema 2.1, no caso de superfícies.

Teorema 2.1' - Seja $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores tangentes a M .

Para todo $p_0 \in M$ existem um aberto $V \ni p_0$, um $\epsilon > 0$ e uma única aplicação C^∞ $\psi: (-\epsilon, \epsilon) \times V \rightarrow M$ que, para cada $p \in V$, é curva integral de v com condição inicial p .

O Teorema 2.1' é consequência natural do Teorema 2.1. Com efeito, seja $U_1 \subset \mathbb{R}^2$ contendo $(0,0)$ e $\xi: U_1 \rightarrow V_1$, $\xi(0,0) = p$, uma parametrização. Definimos o campo de vetores $u: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\xi'(x,y) \cdot u(x,y) = v(\xi(x,y))$ (que é bem definido porque $\xi'(x,y)$ é injetiva). Aplicando o Teorema 2.1 ao campo de vetores u , temos $(0,0) \in U' \subset U_1$, $\epsilon > 0$ e $\varphi: (-\epsilon, \epsilon) \times U' \rightarrow U_1$ diferenciável, que para cada $(x,y) \in U'$ é a única curva integral de u que passa por (x,y) . É fácil verificar que pondo $V = \xi(U')$, a aplicação $\psi: (-\epsilon, \epsilon) \times V \rightarrow M$ definida por $\psi(t,p) = \xi \circ \varphi(t, \xi^{-1}(p))$ ($= \xi \circ \varphi_t \circ \xi^{-1}(p)$) tem as condições do teorema.

Analogamente a fluxo local no plano, temos que $\psi_t(p) = \psi(t, p)$ satisfaz:

a'. $\psi_0(p) = p$, para todo $p \in V$.

b'. Se $|s|, |t|, |s+t| < \epsilon$, temos $\psi_{s+t}(p) = \psi_s \circ \psi_t(p)$, $p \in V$.

Uma das consequências do Teorema 2.1' é o corolário que segue, o qual nos será de grande utilidade.

Corolário - Se M é uma superfície compacta e v é um campo de vetores tangentes a M então existe uma única aplicação $\psi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, C^∞ , que para cada $p \in M$ é curva integral de v . As aplicações $\psi_t: M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$, satisfazem $p \mapsto \psi_t(p) = \psi(t, p)$, $\psi_0 = \text{id}$, $\psi_{s+t} = \psi_s \circ \psi_t$, $s, t \in \mathbb{R}$.

Para provar este corolário, cobre-se M com vizinhanças coordenadas que satisfazem o Teorema 2.1'. Como M é compacta existe um número finito de tais vizinhanças que ainda cobrem M ; seja α o menor dos ϵ , dados pelo Teorema 2.1', correspondendo a estas vizinhanças. Temos assim uma aplicação $\psi: (-\alpha, \alpha) \times M \rightarrow M$ que queremos estender a $\psi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. Para isto, dado $t \in \mathbb{R}$, seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $t = n \frac{\alpha}{2} + \delta$ com $0 < \delta < \frac{\alpha}{2}$; definimos então $\psi_t = \underbrace{\psi_{\alpha/2} \circ \psi_{\alpha/2} \circ \dots \circ \psi_{\alpha/2}}_{n \text{ vezes}} \circ \psi_\delta$. Não é difícil verificar que os ψ_t assim definidos satisfazem as condições do corolário.

O conjunto de difeomorfismos $\{\psi_t, t \in \mathbb{R}\}$ do corolário anterior é chamado grupo a 1-parâmetro ou fluxo do campo v .

Exemplo 17 - Os vetores tangentes aos círculos que geram o toro,

fig. 2.12, dá um campo de vetores tangentes a T_1 .

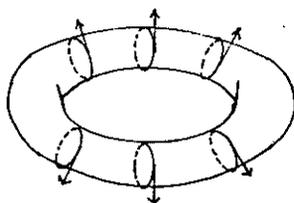


FIGURA 2.12.

Exemplo 18 - $v(x,y,z) = (y,-x,0)$, $(x,y,z) \in S^2$ é um campo de vetores tangentes a S^2 (fig. 2.13), cujo fluxo é dado pelas matrizes

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

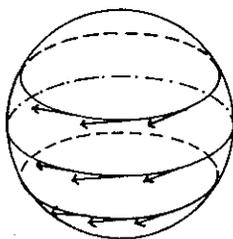


FIGURA 2.13.

Tudo o que foi feito nesta seção pode ser adaptado para su perfícies com bordo. A diferença essencial é que as curvas inte-

grais de um campo de vetores em M , compacta, não está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto porque se $p \in \partial M$, então a curva integral $\psi_t(p)$ de v está definida somente para $t \in [0, \epsilon)$ ou $t \in (-\epsilon, 0]$, conforme $v(p)$ aponta para o interior de M ou para o exterior.

A seguir damos as curvas integrais de dois campos, definidos no toro T^2 menos um pequeno disco, onde em um deles $\psi_t(\tilde{p})$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\tilde{p} \in M$, enquanto que no outro depende de onde está o ponto p .

Exemplo 19

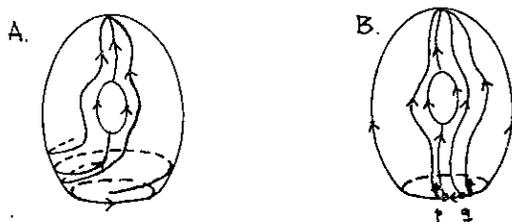


FIGURA 2.14.

Em A. a curva integral $\psi_t(p)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $p \in M$. Enquanto que em B. qualquer curva integral que comece num ponto de ∂M fora do segmento $[p, q]$ só está definida para $t \in [0, +\infty)$.

Dado um campo de vetores v numa superfície M , uma órbita γ de v é fechada se dado $p \in \gamma$, o fluxo φ_t de v satisfaz a condição $\varphi_t(p) = p$ com $t \neq 0$. No Exemplo 17 todas as órbitas são fechadas, enquanto no Exemplo 18 somente os polos norte e sul não são órbitas fechadas.

§4. Soma conexa e modelos de superfícies.

Seja M uma superfície e $p \in M$, se $\delta > 0$ é pequeno, definimos uma bola em M de centro p e raio δ , $B_M(p, \delta)$, como sendo a interseção $B(p, \delta) \cap M$; denotaremos $S_M(p, \delta) = \{q \in B_M(p, \delta); d(p, q) = \delta\}$.

Neste parágrafo mostraremos que dadas duas superfícies M_1 e M_2 em R^n , é possível encontrar M'_1 e M'_2 com $M_1 \approx M'_1$ e $M_2 \approx M'_2$ de tal forma que

$$M = (M'_1 - B_{M'_1}(p_1, \delta)) \cup T \cup (M'_2 - B_{M'_2}(p_2, \delta)),$$

onde $T \approx S^1 \times [0, 1]$ e $\partial T = S_{M'_1}(p_1, \delta) \cup S_{M'_2}(p_2, \delta)$, é uma superfície, v. fig. 2.15

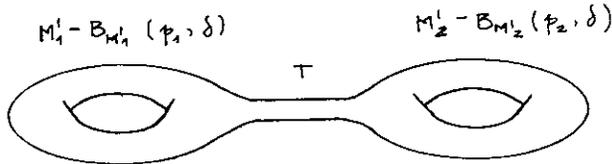


FIGURA 2.15

M é chamado a soma conexa de M_1 e M_2 e denotado $M_1 \# M_2$.

Exemplo 20 - $R^2 \# R^2$ (dada na figura 2.16) é difeomorfa ao cilindro

dro $S^1 \times \mathbb{R}$ que por sua vez é difeomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

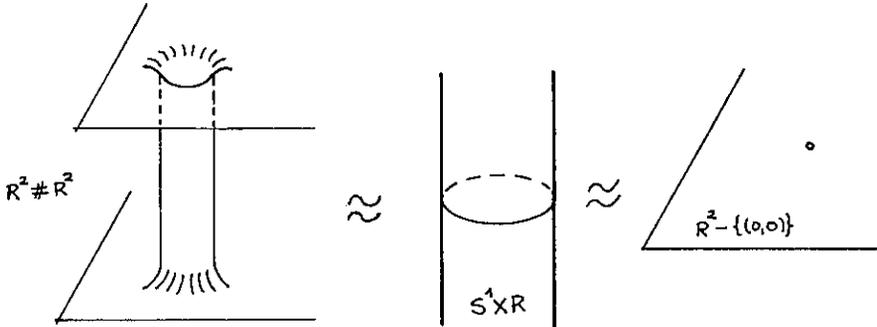


FIGURA 2.16.

Exemplo 21 - $(S^1 \times \mathbb{R}) \# (S^1 \times \mathbb{R})$ é difeomorfa ao plano menos três pontos. A Figura 2.17 descreve geometricamente o difeomorfismo.

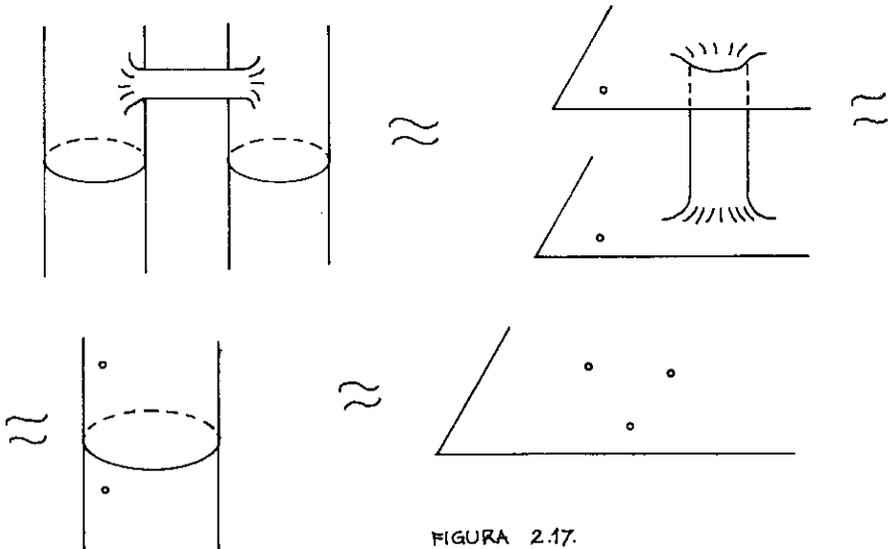


FIGURA 2.17.

Dada uma superfície $M \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto $p \in M$ vamos, por uma mudança de coordenadas em \mathbb{R}^n , considerar que $p = (0, 0, \dots, 0)$ e que $TM_p = \{(x_1, x_2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n\}$. Assim dada uma parametrização $\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto (\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_n(x, y))$ com $\varphi(0, 0) = p$, temos que $\varphi'(0, 0) \cdot e_1 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(0, 0), \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(0, 0)\right)$ e $\varphi'(0, 0) \cdot e_2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(0, 0), \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}(0, 0)\right)$ pertencem a TM_p e portanto $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(0, 0) = 0$, $i = 3, 4, \dots, n$. Identificando $TM_p (= \varphi'(0, 0) \cdot \mathbb{R}^2)$ e \mathbb{R}^2 , podemos considerar $\varphi: U \subset TM_p \rightarrow M$, $\varphi(0) = 0$. A partir desta parametrização vamos demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.3 - Existe um aberto $U_1 \subset TM_p$ tal que M é, numa vizinhança de p , o gráfico de uma aplicação diferenciável $f: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$.

Demonstração: Sendo $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$, temos que $\psi'(0, 0): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo. Logo, pelo teorema da função inversa, existem abertos U_1, U_2 com $U_2 \subset U$ tais que $\psi|_{U_2}: U_2 \rightarrow U_1$ é um difeomorfismo. Pondo $\theta = (\psi|_{U_2})^{-1}$ temos que $\varphi \circ \theta(x, y) = (x, y, \varphi_3 \circ \theta(x, y), \dots, \varphi_n \circ \theta(x, y))$, $(x, y) \in U_1$, e portanto basta tomar $f: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ definida por $f(x, y) = (\varphi_3 \circ \theta(x, y), \dots, \varphi_n \circ \theta(x, y))$.

Proposição 2.4 - Dadas as superfícies M_1 e M_2 existe uma superfície que é a soma conexa $M_1 \# M_2$.

Demonstração: Sejam $p_1 \in M_1$ e $f: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ a aplicação da proposição anterior. Tomemos $\delta > 0$ tal que $\overline{B(2\delta)} \subset U_1$ e seja $\lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $0 \leq \lambda(x, y) \leq 1$, $\lambda^{-1}(0) =$

$= \overline{B(\delta)}$ e $\lambda^{-1}(1) = \mathbb{R}^2 - B(2\delta)$. Consideremos $g: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ definida por $g(x,y) = \lambda(x,y) \cdot f(x,y)$. As parametrizações $\xi: U_1 \rightarrow V_1$, $\xi(x,y) = (x,y,f(x,y))$ e $\eta: U_1 \rightarrow V'_1$, $\eta(x,y) = (x,y,g(x,y))$ satisfazem as seguintes propriedades: a) $\xi(x,y) = \eta(x,y)$ se $(x,y) \in U_1 - B(2\delta)$; b) $\eta(x,y) = (x,y,0,\dots,0)$ se $(x,y) \in B(\delta)$. A aplicação $\zeta: V \rightarrow V'_1$, $(x,y,f(x,y)) \mapsto (x,y,g(x,y))$ é um difeomorfismo, pois $\eta^{-1} \circ \zeta \circ \xi = \text{id}$. Segue-se daí que as superfícies M_1 e $M'_1 = (M - V_1) \cup V'_1$ são difeomorfas, v. fig. 2.18, onde $V'_1 \cap TM_{1p_1} = B_{M_1}(p,\delta)$.

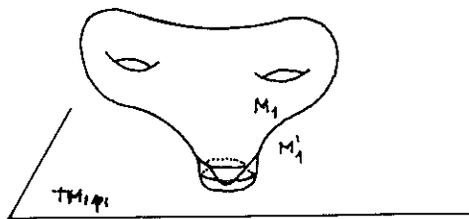


FIGURA 2.18

Agora traslademos M_2 de tal forma que $M'_1 \cap M_2 = \emptyset$ (para isto basta supor que M_1 e M'_1 estão contidas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$). Tomando $p_2 \in M_2$ repetimos o mesmo que foi feito para M_1 . Obtemos assim $M'_2 \approx M_2$ onde $M'_2 = (M_2 - V_2) \cup V'_2$ com $V'_2 \cap TM_{2p_2} = B_{M_2}(p,\delta)$.

Consideremos então um tubo T cujo bordo $\partial T = S_{M'_1}(p_1,\delta) \cup S_{M'_2}(p_2,\delta)$ e que é tangente a TM_{1p_1} e a TM_{2p_2} em todos os pontos de ∂T . Assim $M = (M'_1 - B_{M'_1}(p_1,\delta)) \cup T \cup (M'_2 - B_{M'_2}(p_2,\delta))$ é

uma superfície e fica demonstrada a proposição.

Observamos que se M_1 e M_2 , na proposição anterior são compactas e estão em R^4 então $M_1 \# M_2$ está em R^4 .

Sejam T_1 e P_1 , o toro de revolução (Exemplo 2) e o plano projetivo (Exemplo 7), respectivamente. Vamos definir os nossos modelos de superfícies compactas e conexas do seguinte modo:

1. $T_0 = S^2$, $T_1 = T_1$, $T_2 = T_1 \# T_1$ e, por indução, $T_p = T_1 \# T_{p-1}$.

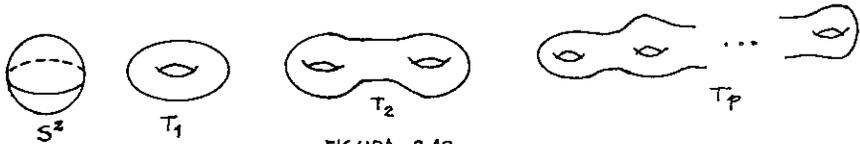


FIGURA 2.19.

2. $P_1 = P_1$, $P_2 = P_1 \# P_1, \dots, P_n = P_1 \# P_{n-1}$.

Em geral chamaremos T_p de p -toro e P_n de n -plano projetivo. Observamos que o 2-plano projetivo é a garrafa de Klein.

Os p -toros são orientáveis e os n -planos projetivos são não-orientáveis, todas compactas.

EXERCÍCIOS

1. Mostre que $S^1 \times S^1$, $S^1 \times R$ e $H = \{(x,y,z) \in R^3; x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$ são superfícies.
2. Mostre que $T = \{(x,y,z) \in R^3; (x^2 + y^2 - 4)^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ e $A = \{(x,y) \in R^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ são superfícies com bordo.

3. Sejam $A = \{(x,y); y = \sin \frac{1}{x}, x > 0\}$ e $B = \{0\} \times [0,1]$. É $(A \cup B) \times \mathbb{R}$ uma superfície?
4. Se M é uma superfície com bordo mostre que ∂M é uma curva.
5. Dê os planos tangentes às superfícies abaixo nos pontos indicados:
- S^2 em $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$
 - A faixa de Moebius (Exemplo 5) em $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.
 - P_1 em $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4})$.
6. Sendo TM_p o plano tangente em p a uma superfície M , mostre que $TM_p = \{v \in \mathbb{R}^n; \text{ existe } \alpha: (-a,a) \rightarrow M \text{ } C^\infty, \alpha(0) = p, \alpha'(0) = v\}$.
7. Escolha bases e dê as derivadas das aplicações abaixo nos pontos indicados:
- $f: S^2 - \{(0,0,1), (0,0,-1)\} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ é a projeção indicada na figura abaixo e o ponto é $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

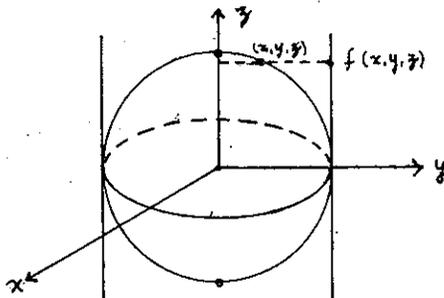


FIGURA 2.20.

- $g: S^2 \rightarrow D^2, (x,y,z) \mapsto (x,y)$, no ponto $(1,0,0)$.

8. Se M, N e P são superfícies e $f: M \rightarrow N$ e $g: N \rightarrow P$ são aplicações diferenciáveis, mostre que $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \circ f'(p)$.
9. Mostre que o toro T_1 é orientável.
10. Usando a definição de orientabilidade, mostre que a faixa de Moebius não é orientável.
11. Seja M uma superfície e $K \subset M$ compacto, mostre que existe $\alpha: M \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^\infty$, tal que $0 \leq \alpha(p) \leq 1$ e $\alpha^{-1}(0) = 1$.
12. Construa difeomorfismos entre as seguintes superfícies:
- a) T_1 e $S^1 \times S^1$
 - b) $T_1 - \{p\}$ e $P_1 - \{q\}$
 - c) $P_1 - \{p\}$ e $P_1 - \{q\}$
13. Seja $r^2 = x^2 + y^2$. Mostre que:
- a) $\{(x, y, z); z^2 = (1-r^2)(r^2 - c^2)\}$, c constante, é o toro T_1
 - b) $\{(x, y, z); z^2 = (1-r^2)[(x-a)^2 + y^2 - \alpha^2][(x-b)^2 + y^2 - \beta^2]\}$, $0 < a < a+\alpha < b-\beta < b+\beta < 1$ é o 2-toro T_2 .
14. Generalize o exercício anterior e encontre explicitamente $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^\infty$ tal que $\{(x, y, z); F(x, y, z) = 0\}$ é o p -toro T_p .
15. Mostre que a soma conexa de duas superfícies independe do ponto de onde se retira o disco.

CAPÍTULO 3

FUNÇÕES DE MORSE E CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES

Neste capítulo daremos a classificação das superfícies compactas. Por classificação entendemos a exibição de uma coleção enumerável de modelos de superfícies compactas de tal forma que dada uma superfície compacta arbitrária, esta é homeomorfa a um dos modelos.

§1. Funções de Morse.

Discutiremos neste parágrafo funções reais definidas em superfícies cujas derivadas tem certas propriedades que nos permitirão dar "formas canônicas" locais para tais funções.

Definição - Seja M uma superfície e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. $p_0 \in M$ é um ponto crítico de f se $f'(p_0) = 0$.

Quando $M \subset \mathbb{R}^3$ e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$ (a função altura), então os pontos críticos de f são aqueles onde o plano tangente é perpendicular ao eixo dos z (o que, de resto, é geometricamente claro). Seja então $p_0 \in M$ um ponto crítico de f e $\varphi: U \rightarrow M$, $(x, y) \mapsto (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y))$, $\varphi(x_0, y_0) = p_0$, uma parametrização em torno de p_0 . $f \circ \varphi(x, y) = \varphi_3(x, y)$, $(x, y) \in U$,

e portanto a condição de p_0 ser ponto crítico de f implica

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \text{ Daí}$$

$$\begin{aligned} TM_{p_0} = \varphi'(x_0, y_0) \cdot \mathbb{R}^2 &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \{(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, 0) ; \bar{\lambda}, \bar{\mu} \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

que é o que queríamos mostrar.

Exemplo 1 - Na Figura 3.1 a função altura definida no toro T_1 tem A, B, C e D como pontos críticos.

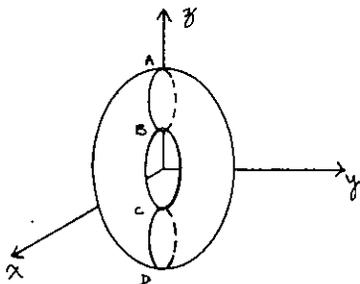


FIGURA 3.1

Definição - Consideremos $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e

$p_0 \in M$ um ponto crítico de f . Seja $\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$ uma parametrização com $\varphi(x_0, y_0) = p_0$. O hessiano de f em p_0 é a forma bilinear $f''(p_0): TM_{p_0} \times TM_{p_0} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f''(p_0)(\varphi'(x_0, y_0) \cdot u, \varphi'(x_0, y_0) \cdot v) = (f \circ \varphi)''(x_0, y_0)(u, v)$.

Em termos da parametrização φ o hessiano de f é representado pela matriz

$$H(f)(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Vamos mostrar que a definição de hessiano não depende da parametrização φ . Seja $\psi: U' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V'$, $\psi(x_1, y_1) = p_0$, outra parametrização em torno de p_0 e $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi$ a mudança de coordenadas; devemos mostrar que $(f \circ \varphi)''(x_0, y_0)(u, v) = (f \circ \psi)''(x_1, y_1)(u_1, v_1)$, onde $u_1 = \theta'(x_0, y_0) \cdot u$ e $v_1 = \theta'(x_0, y_0) \cdot v$.

Como $f \circ \varphi = f \circ \psi \circ \theta$ temos usando a regra da cadeia que $(f \circ \varphi)''(x_0, y_0)(u, v) = (f \circ \psi)''(x_1, y_1) \circ \theta''(x_0, y_0)(u, v) + (f \circ \psi)''(x_1, y_1)(\theta'(x_0, y_0) \cdot u, \theta'(x_0, y_0) \cdot v)$.

p_0 sendo um ponto crítico de f temos $(f \circ \psi)'(x_1, y_1) = f'(p_0) = 0$, donde segue que a definição de hessiano de f em p_0 não depende da parametrização.

Definição - Um ponto crítico $p_0 \in M$ de uma função diferenciável $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é não-degenerado se $\det H(f)(p_0) \neq 0$.

Proposição 3.1 - Se M é uma superfície compacta e todos os pontos críticos da função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ são não-degenerados então eles são em número finito.

Demonstração: Como M é compacta, basta mostrar que os pontos

críticos de f são isolados. Para isto seja $p_0 \in M$ um ponto crítico de f e $\varphi: U \rightarrow V$, $\varphi(x_0, y_0) = p_0$, uma parametrização $(f \circ \varphi)': U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, onde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^2)^*$ é o conjunto das aplicações lineares de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} . $(f \circ \varphi)''(x_0, y_0): \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ é um isomorfismo, pois p_0 é não-degenerado. Daí pelo teorema da função inversa existem abertos, $U_1 \subset U$, em torno de (x_0, y_0) e $V_1 \subset (\mathbb{R}^2)^*$ de $(f \circ \varphi)'(x_0, y_0) = 0$, tais que $(f \circ \varphi)': U_1 \rightarrow V_1$ é um difeomorfismo e portanto (x_0, y_0) é o único ponto de U_1 com $(f \circ \varphi)'(x_0, y_0) = 0$, donde segue-se que $p_0 \in M$ é um ponto crítico isolado de f .

Exemplo 2 - Vamos determinar os pontos críticos da função

$f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z^2 + z$. Utilizando as parametrizações do Exemplo 1, encontramos os pontos críticos: $A = (0, 0, 1)$, $B = (0, 0, -1)$ e todo o círculo $S = \{(x, y, z) \in S^2; x^2 + y^2 = \frac{3}{4}, z = -\frac{1}{2}\}$, sendo A e B não-degenerados. Se considerarmos os conjuntos $f^{-1}(c) = \{(x, y, z); f(x, y, z) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, teremos a seguinte situação:

$$c < -\frac{1}{4}, \quad f^{-1}(c) = \emptyset$$

$$c = -\frac{1}{4}, \quad f^{-1}(c) \text{ é um círculo}$$

$$-\frac{1}{4} < c < 0, \quad f^{-1}(c) \text{ é a união de dois círculos disjuntos}$$

$$c = 0, \quad f^{-1}(c) = \{B\} \cup S$$

$$0 < c < 2, \quad f^{-1}(c) \text{ é um círculo}$$

$$c = 2, \quad f^{-1}(c) = A$$

$$c > 2, \quad f^{-1}(c) = \emptyset.$$

Exemplo 3 - Sendo $f: S^2 \rightarrow P^2$ a aplicação do Exemplo 7 do Capítulo 2, vamos examinar os pontos críticos de $g: P^2 \rightarrow R$ definida por $g(f(x,y,z)) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $(x,y,z) \in S^2$. Para isto, usando o sistema de coordenadas daquele exemplo, obtemos que $g(f \circ f_1(x,y)) = 3 - 2x^2 - 2y^2$, $g(f \circ f_3(x,y)) = 2 - x^2 + y^2$ e $g(f \circ f_5(x,y)) = 1 + x^2 + y^2$. Assim $(0,0,0,0)$, $(-1,0,0,0)$ e $(1,0,0,0)$ são os pontos críticos de g , todos não-degenerados.

No exemplo acima exibimos sistemas de coordenadas nos quais foi possível expressar a função dada como uma forma quadrática (a menos de uma constante). O lema que segue mostra que na realidade essa situação é bastante usual.

Lema de Morse - Seja $f: M \rightarrow R$ diferenciável e $p_0 \in M$ um ponto crítico não-degenerado de f . Existe uma parametrização $\varphi: U \subset R^2 \rightarrow V \subset M$, $\varphi(0,0) = p_0$, tal que $f \circ \varphi: U \rightarrow R$ tem uma das seguintes formas.

a) $f \circ \varphi(x,y) = f(p_0) + x^2 + y^2$

b) $f \circ \varphi(x,y) = f(p_0) - x^2 - y^2$

c) $f \circ \varphi(x,y) = f(p_0) + x^2 - y^2$.

Demonstração: Seja $\psi: U_1 \subset R^2 \rightarrow V_1 \subset M$, $\psi(0,0) = p_0$, uma parametrização qualquer em p_0 e $g: U_1 \rightarrow R$, $g = f \circ \psi$.

Para demonstrar o lema basta encontrar um difeomorfismo

$\theta: U \subset R^2 \rightarrow U_2 \subset U_1$, $\theta(0,0) = (0,0)$ tal que $g \circ \theta(x,y) - g \circ \theta(0,0)$ é igual a $x^2 + y^2$, $-x^2 - y^2$ ou $x^2 - y^2$ e colocarmos $V = \varphi(U)$ com $\varphi = \psi \circ \theta$.

O desenvolvimento de Taylor da função g até 2ª ordem nos

dá

$$g(x,y) = g(0,0) + g'(0,0)(x,y) + H(x,y)$$

com $H(x,y) = A(x,y)x^2 + 2B(x,y)xy + C(x,y)y^2$, onde

$$A(x,y) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(tx, ty) dt$$

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(tx, ty) dt$$

$$C(x,y) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(tx, ty) dt.$$

Denotando por $a = A(0,0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0)$, $b = B(0,0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$

e $c = C(0,0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0)$, temos que

$$H(g)(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ ab & ac \end{pmatrix}$$

e portanto $\det H(g)(0,0) = 4(ac-b^2)$. Como, por hipótese, $p_0 \in M$ é ponto crítico não-degenerado de f temos que $ac-b^2 \neq 0$.

Suponhamos que $ac-b^2 > 0$, $a > 0$, $c > 0$. Seja $\tilde{U}_1 \subset U_1$ uma vizinhança de $(0,0)$ onde $A(x,y)C(x,y) - B^2(x,y) > 0$ e $A(x,y) > 0$. Podemos então, nesta vizinhança, escrever $g(x,y) - g(0,0) = (\sqrt{A} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A}} y)^2 + (\frac{\sqrt{AC-B^2}}{A} \cdot y)^2$ ($g'(0,0) = 0$, pois p_0 é ponto crítico de f). Seja $\tilde{\theta}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\theta}(x,y) = (\tilde{\theta}_1(x,y), \tilde{\theta}_2(x,y))$ definida por $\theta_1(x,y) = \sqrt{A} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A}} \cdot y$,

$\tilde{\theta}_2(x,y) = \sqrt{\frac{AC-B^2}{A}} \cdot y$. Como $\frac{\partial \tilde{\theta}_1}{\partial x}(0,0) = \sqrt{a}$, $\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial x}(0,0) = 0$ e

$\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial y}(0,0) = \sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}$, então $\det \tilde{\theta}'(0,0) = \sqrt{ac-b^2} > 0$. Pelo teorema da função inversa, existem abertos $U \subset \mathbb{R}^2$ e $U_2 \subset \tilde{U}$ tais que $\tilde{\theta}: U_2 \rightarrow U$ é um difeomorfismo. Tomando $\theta = \tilde{\theta}^{-1}$ temos que $g \circ \theta(u,v) = g \circ \theta(0,0) + u^2 + v^2$.

No caso em que $ac-b^2 > 0$, $a < 0$, $c < 0$, substitui-se g por $-g$ e procede-se como no caso anterior.

Se $ac-b^2 < 0$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ procede-se de modo análogo ao que fizemos; entretanto se $a = c = 0$, faz-se a mudança $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ antes de repetir o processo. Fica assim concluída a demonstração do lema.

A parametrização φ do lema de Morse será chamada parametrização de Morse.

As expressões de f , numa vizinhança de p_0 , dadas pelo lema anterior são chamadas formas canônicas de f . O número de sinais negativos destas formas é chamado o índice do ponto p_0 ; assim p_0 tem índice 0, 1, ou 2 conforme $f \circ \varphi(x,y) - f \circ \varphi(x_0, y_0)$ seja igual a $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$ ou $-x^2 - y^2$, respectivamente.

Chamaremos de mínimo, sela e máximo os pontos críticos de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ de índices 0, 1 e 2, respectivamente.

O lema de Morse nos diz então que escolhendo uma parametrização φ conveniente, em torno de p_0 , o gráfico de $f \circ \varphi$ tem um dos aspectos a seguir, conforme o índice de p_0 .

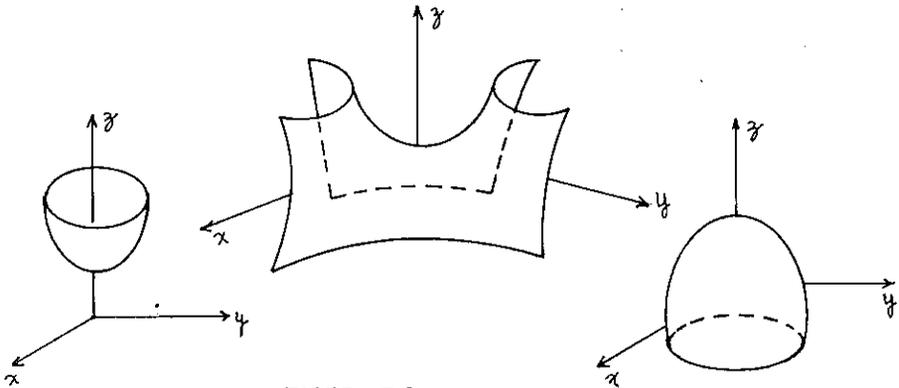


FIGURA 3.2.

A Proposição 2.3 pode ser redemonstrada usando o Lema de Morse; com efeito, os pontos críticos de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ não-degenerados são isolados já que $f \circ \varphi$ tem, na vizinhança U dada pelo lema, apenas $(0,0)$ como único ponto crítico.

Definição - Uma função diferenciável $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma função de Morse se todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

Assim a função do Exemplo 2 não é de Morse enquanto que aquela do Exemplo 3 é.

As funções de Morse têm sua existência assegurada por um teorema cuja demonstração faremos no Apêndice.

Vamos agora demonstrar duas proposições que dizem de que maneira é possível modificar uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ na vizinhança de um ponto crítico não-degenerado $p_0 \in M$ de tal forma a alterar o nível deste ponto crítico mantendo-o não-degenerado.

Seja p_0 um ponto crítico de índice 0 da função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

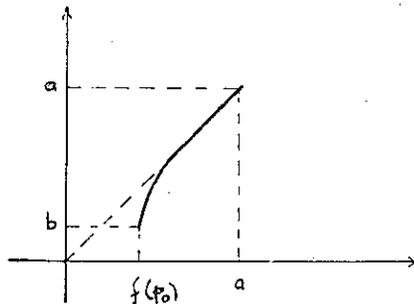
e $\varphi: U \rightarrow V$, $\varphi(0,0) = p_0$, a parametrização dada pelo lema de Morse. Suporemos que o disco aberto $U(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + f(p_0) < a, a > f(p_0)\}$ está contido em U e denotaremos $V(a) = \varphi(U(a))$. Com esta notação temos a proposição seguinte:

Proposição 3.2 - Para todo $b < a$, existe uma função diferenciável $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ tendo os mesmos pontos críticos que f e tal que $g(p_0) = b$.

Demonstração: Construiremos a função g satisfazendo as seguintes condições:

1. $g(p_0) = b$ e p_0 é o único ponto crítico de g em $V(a)$
2. $g|_{M-V(a)} = f|_{M-V(a)}$.

Seja $\alpha: [f(p_0), a] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ definida por $\alpha(f(p_0)) = b$, $\alpha(t) = t$ para t perto de a e $\alpha'(t) > 0$ para $t \in [f(p_0), a]$ como no gráfico seguinte



Definimos a função g da seguinte maneira:

$$\begin{cases} g(p) = \alpha(f(p)) & \text{se } p \in V(a) \\ g(p) = f(p) & \text{se } p \in M - V(a) \end{cases}$$

$g(p_0) = \alpha(f(p_0)) = b$; $g'(p_0) = \alpha'(f(p_0)) \cdot f'(p_0)$ se $p \in V(a)$ e, portanto como $\alpha' > 0$ temos que p_0 é o único ponto crítico de f ; mais ainda, se p está próximo a $\partial V(a)$ ($= \varphi(\partial U(a))$) então $f(p)$ está próximo a C e, pela definição de α segue-se que $g(p) = \alpha(f(p)) = f(p)$. Assim g está bem definida, é C^∞ e satisfaz as condições requeridas, o que termina a demonstração.

Se p_0 for um ponto crítico não-degenerado de índice 2 de f e considerarmos $U(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2-f(p_0) < -a, a < f(p_0)\}$, obtemos a seguinte proposição.

Proposição 3.2' - Para todo $b > a$, existe uma função diferenciável $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ que possui os mesmos pontos críticos de f e tal que $g(p) = b$.

A demonstração desta proposição é inteiramente análoga à anterior, bastando substituir f por $-f$.

Suponhamos agora que $p_0 \in M$ é um ponto crítico não-degenerado de f de índice 1. Novamente, pelo lema de Morse, existe uma parametrização $\varphi: U \rightarrow V$, $\varphi(0,0) = p_0$, tal que $f_1(x,y) = f \circ \varphi(x,y) - f \circ \varphi(0,0) = x^2 - y^2$. Se $p_1, p_2 \in V$, sejam $f(p_1) = a$ e $f(p_2) = b$. Suporemos que $U(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x^2 - y^2| < |a| \text{ e } |xy| < b\}$ está contido em U (fig. 3.3).

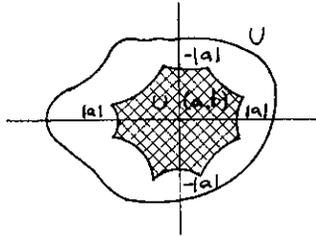


FIGURA 3.3.

Com esta notação temos a proposição que segue:

Proposição 3.3 - Para todo $c \in (a, b)$, existe uma função diferenciável $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ tendo os mesmos pontos críticos de f e tal que $g(p_0) = c$.

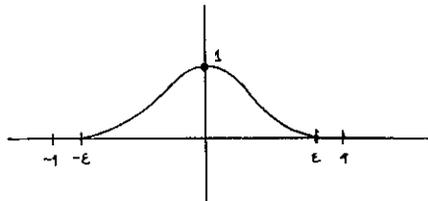
Demonstração: Vamos supor que $c < 0$.

Necessitaremos de duas funções auxiliares

$w, \lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tem os seguintes gráficos e propriedades:

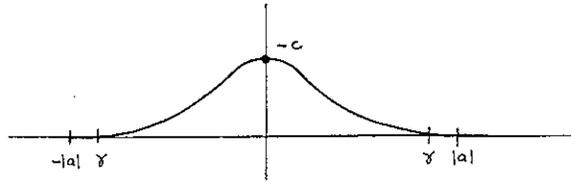
função w

1. $w(x) > 0$ e $w(0) = 1$;
2. $w'(x) \leq 0$



função λ

1. $\lambda(x) > 0$ se $x \in (-\gamma, \gamma)$, $0 < \gamma < |a|$ e $\lambda(0) = -c$;
2. $\lambda'(y) + 2y > 0$ se $y > 0$ e $\lambda'(y) + 2y < 0$ se $y < 0$.



Consideremos ϵ tão pequeno que $[-\epsilon, \epsilon] \times [-\gamma, \gamma] \subset U(a, b)$.

Definamos a função $g_1: U \rightarrow \mathbb{R}$ por $g_1(x, y) = x^2 - y^2 - w(x) \cdot \lambda(y)$.

Temos então que $g_1(0, 0) = c$, e como $\frac{\partial g_1}{\partial x} = 2x - w'(x) \cdot \lambda(y)$,

$\frac{\partial g_1}{\partial y} = 2y - w(x) \cdot \lambda'(y)$ segue-se das propriedades de w e λ que

$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial y} = 0$ se e somente se $x = y = 0$.

Assim $(0, 0)$ é o único ponto crítico de g_1 em $U(a, b)$ e se (x, y) está próximo de $\partial U(a, b)$ então $g_1(x, y) = 0$, pois $w(x)$ e $\lambda(y)$ são zeros para x e y próximos a 1 e $|a|$, respectivamente.

A função $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(p) = g_1 \circ \varphi^{-1}(p)$ se $p \in V$ e $g(p) = f(p)$ se $p \in M - V$ satisfaz as condições da proposição.

No caso em que $c > 0$, consideremos a translação $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau(x) = x + k$, com o k escolhido de tal modo que $\tau(c) = \tilde{c} < 0$ e tomemos a função $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{f} = \tau \circ f$. Temos então que existe $\tilde{g}: M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável com $g(p_0) = \tilde{c}$. A função $g = \tau^{-1} \circ \tilde{g}$ satisfaz o que foi pedido na proposição, o que termina a demonstração.

Seja $U(a, b, c, d, e) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < x^2 - y^2 < b, c < y^2 - x^2 < d, |xy| < e\}$ contendo a origem. Supondo que $U(a, b, c, d, e) \subset U$ (domínio da parametrização de Morse), a propo-

sição seguinte é demonstrada de maneira análoga à Proposição 3.3.

Proposição 3.3' - Para todo $t \in (a, d)$ existe uma função diferenciável $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ tendo os mesmos pontos críticos que f e tal que $g(p_0) = t$.

Se $p \in M$ é um ponto crítico de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, chamamos $f(p)$ de valor crítico de f .

Uma função de Morse é dita ordenada se os valores críticos são todos diferentes e os que correspondem aos pontos críticos de índice 0 são menores que àqueles que correspondem aos de índice 1, que por sua vez são menores que àqueles correspondentes aos de índice 2.

Supondo que na Figura 3.4 a função altura é de Morse, temos que ela é ordenada.

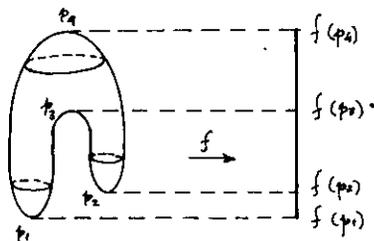


FIGURA 3.4.

Uma consequência das proposições deste parágrafo é o teorema que segue.

Teorema 3.1 - Em toda superfície compacta M existe uma função de Morse ordenada $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

§2. Níveis regulares e críticos.

De agora em diante M será uma superfície compacta e conexa, a menos de menção explícita em contrário.

Para funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o gradiente é definido como sendo o campo de vetores $\text{grad } f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right)$, ou o que é a mesma coisa, podemos defini-lo por

$$\langle \text{grad } f(x_1, \dots, x_n), v \rangle = f'(x_1, \dots, x_n) \cdot v,$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual do \mathbb{R}^n .

Se $M \subset \mathbb{R}^n$ e $p \in M$ observamos que a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $TM_p \subset \mathbb{R}^n$ é um produto interno em TM_p . Logo dada uma transformação linear $L: TM_p \rightarrow \mathbb{R}$ existe um único vetor $v \in TM_p$ tal que $L \cdot \omega = \langle v, \omega \rangle$ para todo $\omega \in TM_p$.

Isto nos motiva a definição de gradiente para funções reais definidas em superfícies.

Definição - O gradiente de uma função real diferenciável

$f: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo de vetores a M definido

por

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle = f'(p) \cdot v$$

para todo $v \in TM_p$ e para todo $p \in M$.

Observamos que $p \in M$ é ponto crítico de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ se e somente se $\text{grad } f(p) = 0$. Assim, se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é de Morse, $\text{grad } f$ tem somente um número finito de zeros.

Como $f'(p) \cdot \text{grad } f(p) = |\text{grad } f(p)|^2$ então f cresce ao longo das trajetórias do gradiente. Em particular, isto implica

que o gradiente não tem órbitas fechadas.

Definição - $q \in R$ é um valor regular de $f: M \rightarrow R$ se para todo $p \in f^{-1}(q)$ a derivada $f'(p): TM_p \rightarrow R$ é sobrejetiva.

Duas outras maneiras equivalentes de definir valor regular é dizer que $f'(p) \neq 0$ ou que $\text{grad } f(p) \neq 0$, para todo $p \in f^{-1}(q)$.

Um ponto $p \in M$ é dito regular para $f: M \rightarrow R$ se $f'(p) \neq 0$. Portanto $q \in R$ é valor regular de f se todos os pontos de $f^{-1}(q)$ são regulares. Observamos que se q não é valor regular, $f^{-1}(q)$ pode conter pontos críticos e regulares. Um exemplo disso é $c = 0$ na função do Exemplo 2.

Proposição 3.4 - O conjunto dos pontos regulares de $f^{-1}(q)$ (suposto não vazio) é uma curva.

Demonstração: Seja $p \in f^{-1}(q)$ um ponto regular de f e

$\varphi: U \rightarrow V$, $\varphi(0,0) = p$, uma parametrização em torno de p . Assim $(f \circ \varphi)'(0,0) = f'(p) \neq 0$ e portanto $\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial y}(0,0) \neq 0$, por exemplo. Daí pelo teorema das funções implícitas podemos dizer que existe $\mu: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow R$, $\mu(0) = 0$, que é diferenciável e tal que $C = \{(x, \mu(x)); x \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ está contido em $(f \circ \varphi)^{-1}(q)$. Daí como $\eta: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow C$, $\eta(x) = (x, \mu(x))$ é uma parametrização da curva C temos que $\varphi \circ \eta: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \varphi(C)$, $\varphi(C) \subset V$, é uma parametrização da curva $\varphi(C) \subset f^{-1}(q)$, o que termina a demonstração.

Corolário - Se q é um valor regular de $f: M \rightarrow R$ então $f^{-1}(q)$ é uma curva.

Observações: 1) Uma consequência imediata deste corolário é que se $f: M \rightarrow R$ tem um número finito de pontos críticos (em particular se f é de Morse), então, para todo $q \in R$, $f^{-1}(q)$ menos um número finito de pontos é uma curva.

2) Uma outra consequência do corolário é que o gradiente de f é perpendicular a $f^{-1}(q)$ em seus pontos regulares. Com efeito se $p \in f^{-1}(q)$ é um ponto regular existe, pelo corolário, uma parametrização $\xi: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V_p$, $\xi(0) = p$, $V_p \subset f^{-1}(q)$ e portanto $f \circ \xi(t) = q$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Temos então que $f'(p) \cdot \xi'(0) = 0$ e portanto $\langle \text{grad } f(p), \xi'(0) \rangle = 0$ que é o que queríamos (v. fig. 3.5 com f sendo a função altura no toro T_1).

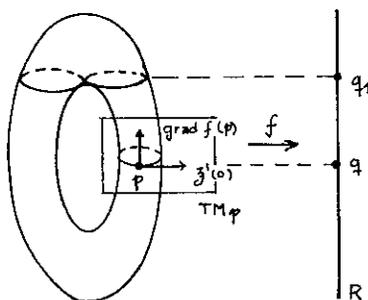


FIGURA 3.5.

3) Da observação anterior pode-se descrever geometricamente a estrutura de órbitas do campo $\text{grad } f$, quando f é de Morse ordenada. Por exemplo quando f é a função altura no toro ou esfera as órbitas do gradiente são dadas nas figuras 3.6 e 3.7.

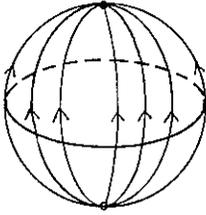


FIGURA 3.6.

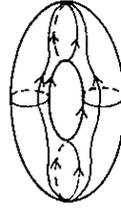


FIGURA 3.7.

Quando $q \in \mathbb{R}$ é um valor regular (crítico) de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ chamamos $f^{-1}(q)$ de curva de nível regular ou nível regular (curva de nível crítica ou nível crítico) de f . No Exemplo 2, $f^{-1}(c)$, $0 < c < 2$, é um nível regular e $f^{-1}(0)$ é crítico.

Estudaremos agora o que acontece quando mudamos de um nível regular a outro de uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Constataremos que tudo depende da existência e dos índices dos pontos críticos entre os níveis regulares.

Seja K uma componente conexa de $f^{-1}([a, b])$ constituída só de pontos regulares. Pondo $K_a = f^{-1}(a) \cap K$, $K_b = f^{-1}(b) \cap K$ e $K_{(-\infty, b)} = f^{-1}(-\infty, a) \cup K$.

Proposição 3.5 - $K_a \approx K_b$, $K \approx K_a \times [a, b]$ e $f^{-1}(-\infty, a) \approx K_{(-\infty, b)}$

Demonstração: Consideremos o aberto $U \supset K$ que não contém pontos críticos de f e seja $\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$ a função auxiliar C^∞ tal que, $0 \leq \alpha(p) \leq 1$ e com $\alpha(p) = 1$ se e só se $p \in K$ e $\alpha(p) = 0$ se e só se $p \in M - U$. Seja X um campo de vetores em M definido por

$$X(p) = 0 \text{ se } p \in M-U$$

$$X(p) = \alpha(p) \frac{\text{grad } f(p)}{\|\text{grad } f(p)\|^2} \text{ se } p \in U.$$

Sendo φ_t o fluxo de X definamos $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\xi(t) = f(\varphi_t(p))$ com $p \in M$ fixo. Se $\varphi_t(p) \in U$ temos que $\xi'(t) = f'(\varphi_t(p)) \cdot X(\varphi_t(p)) = \alpha(\varphi_t(p))$. Portanto $\xi'(t) = 1$ se $\varphi_t(p) \in K$. Daí $\xi(t) = t + k(p)$ com t escolhido de tal forma que $\varphi_t(p) \in K$. Agora se $p \in K_a$ temos que $\xi(0) = f(\varphi_0(p)) = f(p) = a$ e então $\xi(t) = t+a$ desde que $\varphi_t(p) \in K$. O difeomorfismo $\varphi_{b-a}: M \rightarrow M$ satisfaz a $f(\varphi_{b-a}(p)) = b-a+a = b$ se $p \in K_a$. Portanto $\varphi_{b-a}|_{K_a}: K_a \rightarrow K_b$ e $\varphi_{b-a}|_{f^{-1}(-\infty, a)}: f^{-1}(-\infty, a) \rightarrow K(-\infty, b)$ são difeomorfismos.

$\psi: K_a \times [a, b] \rightarrow K$, $\psi(p, t) = \varphi_{t-a}(p)$, é um difeomorfismo cujo inverso é $\psi^{-1}: K \rightarrow K_a \times [a, b]$, $\psi^{-1}(p) = (\varphi_{a-f(p)}(p), f(p))$, o que termina a demonstração.

A proposição seguinte é demonstrada de maneira inteiramente análoga à Proposição 3.5, bastando para isto tomar U como vizinhança de $f^{-1}([a, b])$.

Proposição 3.5' - Suponha que $f^{-1}([a, b])$ só contém pontos regulares. Então $f^{-1}(a) \approx f^{-1}(b)$, $f^{-1}([a, b]) \approx f^{-1}(a) \times [a, b]$ e $f^{-1}(-\infty, a) \approx f^{-1}(-\infty, b)$.

Tomemos agora $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse ordenada e sejam p_1, \dots, p_t seus mínimos, com os índices escolhidos tais que $f(p_i) < f(p_j)$ se $i < j$. Denotemos $c_i = f(p_i)$.

Seja $\varphi: U \rightarrow V$, $\varphi(0,0) = p_1$, a parametrização dada pelo

lema de Morse. Se c está suficientemente próximo a c_1 , então $f^{-1}(c)$ é difeomorfo, via φ , ao círculo $(f \circ \varphi)^{-1}(c)$. E, usando a Proposição 3.5, temos que $f^{-1}(c) \approx S^1$, $c_1 < c < c_2$ e que $f^{-1}(-\infty, c) \approx \mathring{D}^2$ ($= \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$). Usando ainda a mesma proposição temos que $f^{-1}(c_2) = \Sigma^1 \cup \{p_2\}$ com $\Sigma^1 \approx S^1$ e $f^{-1}(-\infty, c_2] = \Delta^1 \cup \{p_2\}$ com $\Delta^1 \approx D^2$. Agora, usando de novo o lema de Morse e a Proposição 3.5, temos que $f^{-1}(-\infty, c) \approx \mathring{D}^2 \cup \mathring{D}^2$ (união disjunta de dois discos) e $f^{-1}(c) \approx S^1 \cup S^1$ (união disjunta de dois círculos) se $c_2 < c < c_3$.

Sendo $p_{\ell+1}$ a sela de nível mais baixo teremos, repetindo o processo que acabamos de descrever, o corolário seguinte.

Corolário - Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c_i < c < c_{i+1}$, $1 \leq i \leq \ell$ então $f^{-1}(c) \approx S^1 \cup S^1 \cup \dots \cup S^1$ (i círculos disjuntos) e $f^{-1}(-\infty, c) \approx \mathring{D}^2 \cup \dots \cup \mathring{D}^2$ (i discos abertos disjuntos).

V. fig. 3.8.

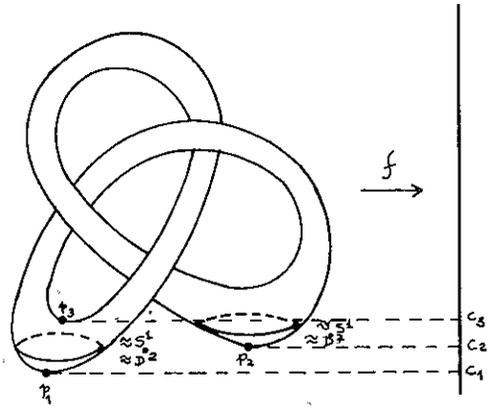


FIGURA 3.8.

Seja agora p_0 um ponto crítico de índice 1 da função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi: U \rightarrow V$, $\varphi(0,0) = p_0$ a parametrização do lema de Morse. Denotemos $c_0 = f(p_0)$, $U(\epsilon) = U(c_0 - \epsilon, c_0 + \epsilon)$, $U(\epsilon, 2\epsilon) = U(c_0 - \epsilon, c_0 + 2\epsilon)$ (v. Proposição 2.5) e tomemos $\epsilon > 0$ tal que ambos estejam contidos em U .

Sejam p_1, p_2, \dots, p_m os outros pontos críticos de f , consideremos V_1, \dots, V_m vizinhanças desses pontos tais que $V_i \cap V_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e, tomando W uma vizinhança de $f^{-1}[c_0 - \epsilon, c_0 + \epsilon]$, supomos também que $V_i \cap W = \emptyset$, $i=1, 2, \dots, m$. Consideremos ainda a função auxiliar $\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , tal que $0 \leq \alpha(p) \leq 1$, $\alpha^{-1}(1) = M - V$ e $\alpha^{-1}(0) = K(\epsilon) \cup \{p_1, \dots, p_m\}$, onde $V = W \cup V_1 \cup \dots \cup V_m$ e $K(\epsilon) = \text{fecho de } U(\epsilon)$.

Com estas notações demonstraremos a seguinte proposição.

Proposição 3.5 - Sendo $c' < c_0 < c$ e $f^{-1}[c, c']$ só contendo p_0 como ponto crítico temos que $f^{-1}(-\infty, c] \approx f^{-1}(-\infty, c') \cup H$, onde $H \approx D^2$ e $f^{-1}(-\infty, c'] \cap H = I \cup J$, sendo I e J disjuntos e difeomorfos a $[0, 1]$.

Demonstração: Em virtude da Proposição 3.5 basta demonstrar a proposição no caso em que $c = c_0 + \epsilon$ e $c' = c_0 - \epsilon$.

Consideremos o campo de vetores $C^\infty X$ em M definido

por:

$$X(p) = 0 \quad \text{se } p \in K_\epsilon \cup \{p_1, \dots, p_m\}$$

$$X(p) = \alpha(p) \cdot \frac{\text{grad } f(p)}{\|\text{grad } f(p)\|^2} \quad \text{se } p \notin K(\epsilon) \cup \{p_1, \dots, p_m\}.$$

Se $p \in M - V$ temos que $f'(p) \cdot X(p) = 1$. Segue-se então, por um argumento análogo ao da Proposição 3.5, que $f^{-1}(-\infty, C_0 + \epsilon) \approx$

$\approx f^{-1}(-\infty, c_0 - \epsilon) \cup H$, onde H tem as propriedades requeridas, v. Figura 3.9.

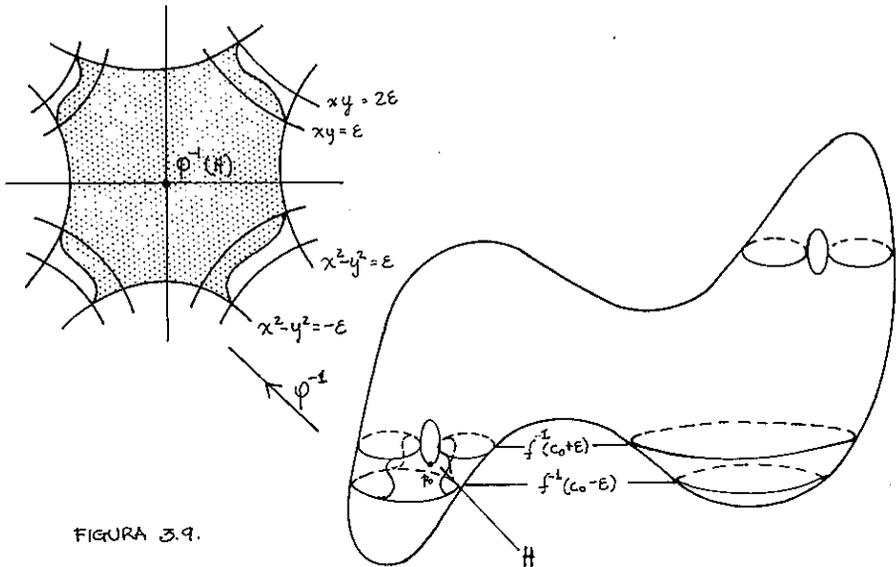


FIGURA 3.9.

O diffeomorfismo entre $f^{-1}(-\infty, c_0 + \epsilon)$ e $f^{-1}(-\infty, c_0 - \epsilon) \cup H$ é dado por $\eta_{-2\epsilon}$, onde η_t é o fluxo de X . Terminamos assim a demonstração.

Uma das consequências da proposição anterior, que será de grande importância é o seguinte corolário.

Corolário - Sejam p_0, p_1, \dots, p_r as selas da função de Morse ordenada $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e pondo $c_i = f(p_i)$, $c_{i-1} < c_i$, $i = 1, 2, \dots, r$ temos que, se $c_0 < c < c_r$ é valor regular de f ($c \neq c_i$) então $f^{-1}(c)$ é difeomorfa à união disjunta de círculos. Mais ainda se $f^{-1}[c, c']$ só contém p_i como ponto crítico então o número de círculos difeomorfos a $f^{-1}(c')$ difere do

de $f^{-1}(c)$ de 1, -1 ou 0.

Demonstração: Vamos tomar $\epsilon > 0$, pequeno, de tal modo que

$f^{-1}[c_0 - \epsilon, c']$ só contenha p_0 como ponto crítico.

Sabemos (como decorrência da Proposição 3.5) que $f^{-1}(c_0 - \epsilon)$ é difeomorfa a uma união disjunta de círculos. Usando a proposição anterior, temos que uma das figuras seguintes são difeomorfas a componente de $f^{-1}[c_0 - \epsilon, c']$ que contém p_0 .

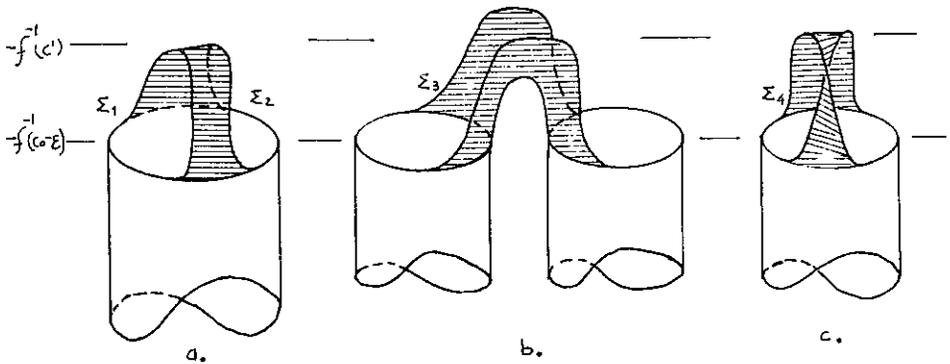


FIGURA 3.10.

Portanto $f^{-1}(c')$ é difeomorfa a união disjunta de círculos, cujo número difere dos de $f^{-1}(c_0 - \epsilon)$ de +1, -1, 0 conforme se dê a, b ou c, na fig. 3.10.

Repetindo o argumento para c_i $i=1,2,\dots,m$, temos o corolário.

As figuras a e b são realizadas concretamente considerando a função altura no toro T_1 como no Exemplo 1 e a figura c no Exemplo 3.

Definição - Aos pontos críticos de índice 1 como nas Figuras 3.10 a e b chamaremos de tipo I e àqueles como na figura 3.10 c chamaremos de tipo II.

Do fato que M é conexa e do corolário anterior decorre que os pontos críticos de tipo I aparecem aos pares.

Uma outra consequência do mesmo corolário é que a existência de um ponto crítico de tipo II faz com que M seja não-orientável pois contém uma faixa de Moebius, v. fig. 3.11.

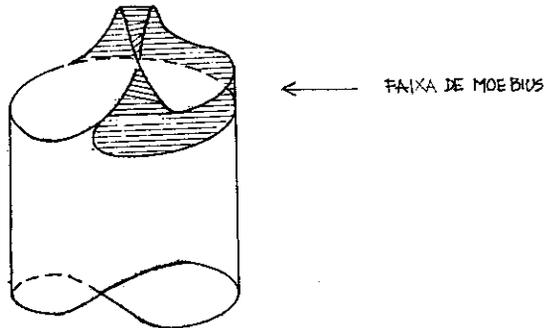


FIGURA 3.11.

§3. Cancelamento de pontos críticos.

O teorema deste parágrafo é fundamental na classificação das superfícies. Ele diz sob que condições é possível cancelar dois pontos críticos de uma função de Morse. Mais precisamente

Teorema do cancelamento - Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse ordenada tendo a e b como valores regulares. Se $f^{-1}([a, b])$ só contém dois pontos críticos p_0 e

p_1 ($a < f(p_0) < f(p_1) < b$) de índices 0 (ou 2) e 1, respectivamente, que estão na mesma componente conexa então $f^{-1}([a,b]) \approx f^{-1}(a) \times [0,1]$.

Geometricamente a figura 3.12 (i), ilustra o que se passa na componente de $f^{-1}([a,b])$ que contém p_0 e p_1 .

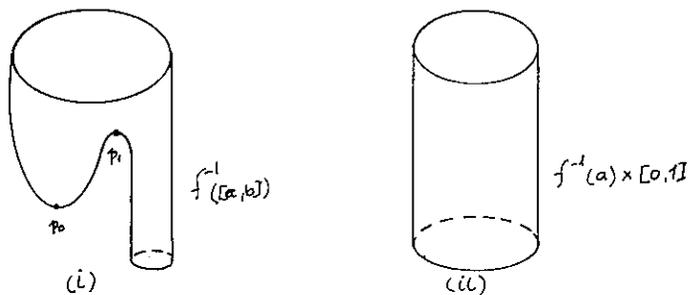


FIGURA 3.12.

Para demonstrar o teorema cancelamento precisamos das proposições que vem a seguir.

Em virtude da Proposição 3.5 vamos supor que $f^{-1}([a,b])$ é conexo.

Dados um campo de vetores v em M e uma singularidade p de v i.e. $v(p) = 0$, dizemos que v é linear em uma vizinhança V de p se existe uma parametrização $\psi: U \rightarrow V$, $\psi(0,0) = p$, e uma aplicação linear $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\psi'(x,y) \cdot A(x,y) = v(\psi(x,y))$, $(x,y) \in U$.

Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e p_1 um ponto crítico de índice 1 de f . Se $\varphi: U \rightarrow V$, $\varphi(0,0) = p_1$, é a parametrização de Morse então $f \circ \varphi(x,y) = x^2 - y^2$ (por translação, podemos

supor que $f(p_1) = 0$). Tomemos $\delta > 0$ tal que $B(2\delta) \subset U$ e $\eta: M \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , tal que $0 \leq \eta(p) \leq 1$, $\eta^{-1}(0) = \overline{\varphi(B(2\delta))}$ e $\eta^{-1}(0) = M - \varphi(B(2\delta))$.

Com estas notações temos a proposição seguinte:

Proposição 3.6 - Existe um campo de vetores tangentes a M , v^f , que satisfaz as seguintes condições:

- a) v^f é linear em $\varphi(B(\delta))$
- b) se p não é ponto crítico de f então $f'(p) \cdot v^f(p) > 0$
- c) v^f e $\text{grad } f$ tem as mesmas singularidades.

Demonstração: Definamos $v^f(p) = \eta(p) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(p)) \cdot \text{grad}(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) + (1 - \eta(p)) \text{grad } f(p)$. Se $p \in M - \varphi(B(2\delta))$ temos que $\eta(p) = 0$ e portanto $v^f(p) = \text{grad } f(p)$, logo $f'(p) \cdot v^f(p) \geq 0$ e é igual a 0 se e só se p é uma singularidade de $\text{grad } f$. Se $p \in \varphi(B(\delta))$ então $v^f(p) = \varphi'(\varphi^{-1}(p)) \cdot \text{grad}(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p))$. Daí se $p = \varphi(x, y)$ temos que $v^f(\varphi(x, y)) = \varphi'(x, y) \cdot \text{grad}(f \circ \varphi)(x, y)$ e portanto $f'(p) \cdot v^f(p) = (f \circ \varphi)'(x, y) \cdot \text{grad}(f \circ \varphi)(x, y) = |\text{grad}(f \circ \varphi)(x, y)|^2$. Assim $f'(p) \cdot v^f(p) \geq 0$ e é igual a zero se e só se $p = p_1$ (i.e. $x = y = 0$). Agora se $p \in \overline{\varphi(B(2\delta))} - B(\delta)$, então, como este é compacto, existe $k > 0$ tal que $|\text{grad}(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p))|^2 > k$ e $|\text{grad } f(p)|^2 > k$. Daí como $f'(p) \cdot v^f(p) = \eta(p) |\text{grad}(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p))|^2 + (1 - \eta(p)) |\text{grad } f(p)|^2$ temos que $f'(p) \cdot v^f(p) > k$.

Observando que se $\varphi(x, y) \in \varphi(B(\delta))$ temos que $v^f(\varphi(x, y)) = \varphi'(x, y) \cdot A(x, y)$, onde $A(x, y) = \text{grad}(f \circ \varphi)(x, y) = (2x, -2y)$, concluimos a demonstração da proposição.

A condição b) da proposição anterior significa que f é crescente ao longo das órbitas de v^f que portanto, não tem órbitas fechadas.

Proposição 3.7 - Sejam $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ funções de Morse ordenadas tais que $f^{-1}([a, b])$ e $g^{-1}([c, d])$ são conexos e tem, cada um, dois pontos críticos não-degenerados de índice 0 (ou 2) e 1. Então existe um homeomorfismo $h: f^{-1}([a, b]) \rightarrow g^{-1}([c, d])$.

Demonstração: Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a = c = 0$ e que os pontos críticos são de índice 0 e 1. Denotaremos $p_0, p_1 \in f^{-1}([a, b])$, $q_0, q_1 \in g^{-1}([c, d])$ esses pontos críticos.

Sejam v^f e v^g os campos construídos a partir de f e g , usando a proposição anterior, e $\{v_t^f\}$ e $\{v_t^g\}$ os seus fluxos. As órbitas de v^f e v^g que passam por $p \in f^{-1}([0, b])$ e $q \in g^{-1}([0, d])$ serão denotadas, respectivamente, $\Theta^f(p)$ e $\Theta^g(q)$. Denotemos ainda $W^{u, f}(p_0) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} v_t^f(B_M(p_0, \delta))$ e se $\varphi: U \rightarrow V$, $\varphi(0, 0) = p_1$ é a parametrização de Morse sejam $W^{u, f}(p_1) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} v_t^f(\varphi(\text{Ix}\{0\}))$ e $W^{s, f}(p_1) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} v_t^f(\varphi(\{0\} \times J))$, onde $(0, 0) \in \text{Ix}J \subset B(\delta)$ (da proposição anterior), v. fig. 3.13.

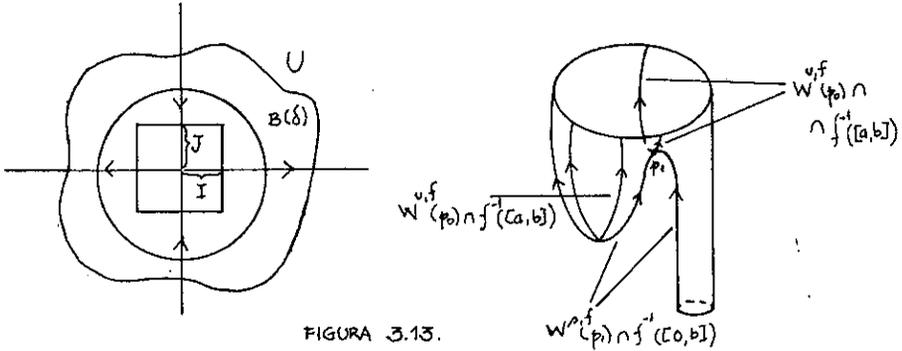


FIGURA 3.13.

Definimos $W^{u,\mathcal{E}}(q_0)$, $W^{u,\mathcal{E}}(p_1)$ e $W^{s,\mathcal{E}}(q_1)$ de modo análogo ao que foi feito para v^f .

Seja $\beta: [0, b] \rightarrow [0, d]$ o homeomorfismo linear por partes dado na Figura 3.14.

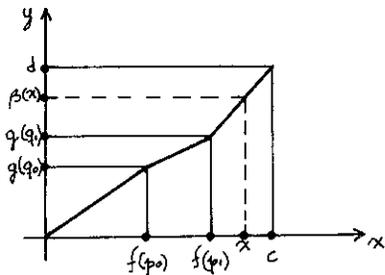


FIGURA 3.14.

Vamos agora definir um homeomorfismo $h: f^{-1}([0, b]) \rightarrow g^{-1}([0, d])$. Sejam $\{\rho_1, \rho_2\} = W^{u,f}(p_1) \cap f^{-1}(b)$ e

$$\{\xi_1, \xi_2\} = W^{u,\mathcal{E}}(q_1) \cap g^{-1}(d).$$

Definimos $h: f^{-1}(b) \rightarrow g^{-1}(d)$ pondo $h(\rho_1) = \xi_1$, $h(\rho_2) = \xi_2$

de tal modo que $h(W^{u,f}(p_0) \cap f^{-1}(b)) = W^{u,g}(q_0) \cap g^{-1}(d)$. Se $p \in W^{s,f}(p_1)$, $f(p) = x$, define $h(p) = W^{s,g}(q_1) \cap g^{-1}(\beta(x))$. Agora ponha $h(p_0) = q_0$ e se $p \notin W^{s,f}(p_1) \cup \{p_0\}$, $f(p) = x$, define $h(p) = \mathcal{O}^g(h(\tilde{p})) \cap g^{-1}(\beta(x))$, onde $\tilde{p} = \mathcal{O}^f(p) \cap f^{-1}(b)$, v. fig. 3.15.

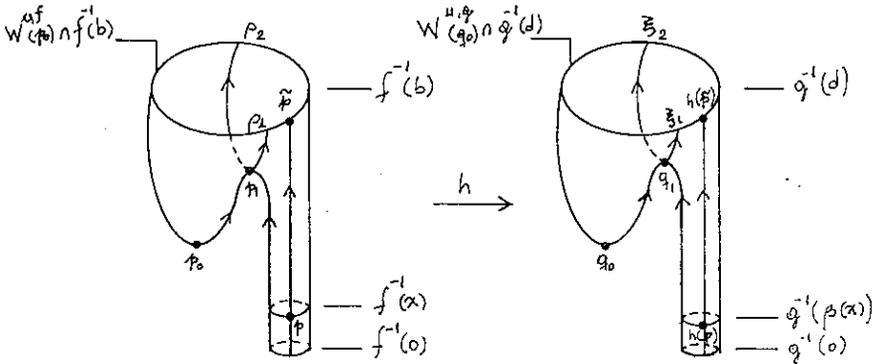


FIGURA 3.15

É claro que em $f^{-1}([0, b] - (W^{s,f}(p_1) \cup \{p_0\}))$ h é contínua. Se $p_n \rightarrow p_0$ seja $f(p_n) = x_n$. Temos então que $d(f^{-1}(x_n) \cap W^{u,f}(p_0), p_0) \rightarrow 0$ e portanto $d(h(p_n), W^{u,g}(q_0) \cap g^{-1}(\beta(p_0))) \rightarrow 0$, como $\beta(p_0) = q_0$ e $W^{u,g}(q_0) \cap g^{-1}(q_0) = q_0$ segue-se que $h(p_n) \rightarrow h(p_0) = q_0$. Se $p_n \rightarrow p$ com $p \in W^{u,f}(p_1)$ temos que $d(f^{-1}(x_n), f^{-1}(x)) \rightarrow 0$ com $f(p_n) = x_n$ e $f(p) = x$. Daí $d(g^{-1}(\beta(x_n)), g^{-1}(\beta(x))) \rightarrow 0$; por outro lado se $\tilde{p}_n = \mathcal{O}^f(p_n) \cap f^{-1}(a)$ temos que $d(\tilde{p}_n, p_1) \rightarrow 0$ ou $d(\tilde{p}_n, \beta) \rightarrow 0$ donde concluímos que $d(h(p_n), h(p)) \rightarrow 0$ e h é contínua.

h^{-1} é contínua, pois é definida da mesma maneira que h trocando os papéis de f e g . Fica assim demonstrada a proposição.

Proposição 3.8 - Existem duas funções diferenciáveis $F, G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- a) F tem uma sela e dois mínimos como pontos críticos.
- b) G tem só um mínimo como ponto crítico.
- c) Existe um intervalo $[-a, a]$ tal que os pontos críticos de F estão em $F^{-1}([-a, a])$ e se $p \notin F^{-1}([-a, a])$ então $F(p) = G(p)$.
- d) Exceto pelos níveis críticos, todos os níveis de F são difeomorfos a um círculo ou, no máximo, dois círculos disjuntos e todos os níveis de G são difeomorfos a um círculo.

Demonstração: Seja $F_0(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + y^2$. F_0 tem dois pontos críticos $(0, 0)$ e $(1, 0)$, onde o primeiro é degenerado e o segundo é um mínimo não-degenerado. O gráfico de F_0 é dado na Figura 3.16

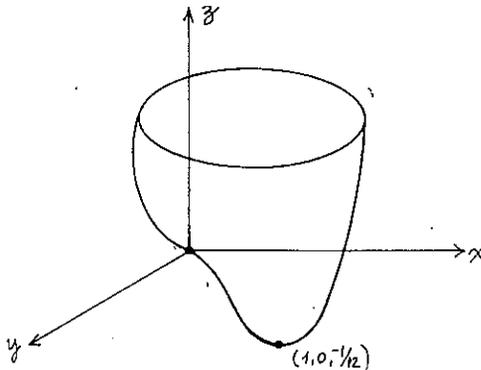


FIGURA 3.16.

Consideremos agora $F_\epsilon(x, y) = F_0(x, y) + \epsilon(x - \frac{x^2}{2})$. Se $\epsilon < 0$, F_ϵ tem somente um mínimo não-degenerado em $(1, 0)$ como ponto

crítico e se $0 < \epsilon < 1$, F_ϵ tem dois mínimos $(-\epsilon, 0)$ e $(1, 0)$ e uma sela $(\epsilon, 0)$, todos não-degenerados. Seja agora $b < a < \frac{1}{12}$, com \underline{a} e \underline{b} próximos a $\frac{1}{12}$.

Tomamos $|\epsilon_0|$ tão pequeno que o plano $z = -a$ intercepte o gráfico de F_ϵ numa curva C (difeomorfa ao círculo S^1). Consideremos então uma função $\lambda: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{C}}$ tal que $0 \leq \lambda(x, y) \leq 1$, $\lambda^{-1}(0) = F_0^{-1}([-b, b])$, $\lambda^{-1}(1) = F_0^{-1}([-a, a])$. Definamos $F_{\epsilon_0}(x, y) = F_0(x, y) + \epsilon_0(1 - \lambda(x, y))(x - \frac{x^2}{2})$. Como $K = \overline{\lambda^{-1}(1) - \lambda^{-1}(0)}$ é compacto e $F'_0(x, y) \neq 0$ em K , podemos supor, diminuindo ϵ_0 se necessário, que $F'_{\epsilon_0}(x, y) \neq 0$ em K .

As funções $F = F_{-\epsilon_0}$ e $G = F_{\epsilon_0}$, v. fig. 3.17, satisfazem as propriedades requeridas. Observamos que a propriedade d é consequência da Proposição 3.5. Terminamos assim a demonstração.

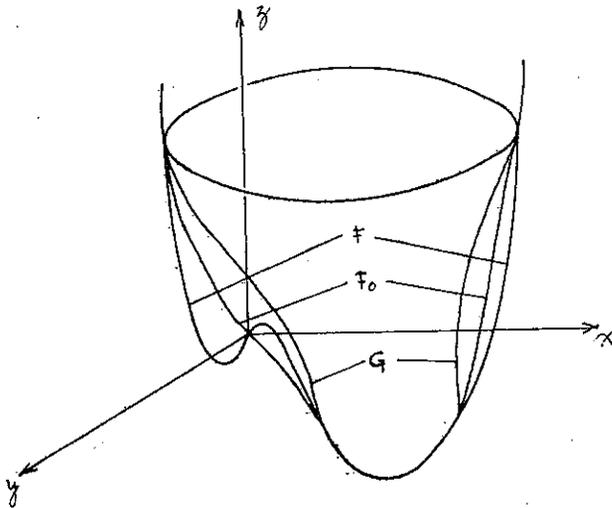


FIGURA 3.17

Corolário - Com a mesma notação da proposição anterior, se

$$D = \{(x,y); (x,y) \in F_0^{-1}([-a,a])\} \text{ e } M(F) = \\ = \{(x,y, F(x,y)); (x,y) \in D\} \text{ então } M(F) \approx S^1 \times [0,1].$$

Demonstração: $M(G) = \{(x,y, G(x,y)); (x,y) \in D\}$ é difeomorfa a $M(F)$ pela aplicação $\pi: M(F) \rightarrow M(G), (x,y, F(x,y)) \mapsto (x,y, G(x,y))$. Como G não possui pontos críticos em $M(G)$ segue-se da Proposição 3.5 que $M(G) \approx G^{-1}(a) \times [0,1] \approx S^1 \times [0,1]$, o que termina a demonstração.

Demonstração do teorema do cancelamento:

Das duas proposições anteriores segue-se que $f^{-1}([a,b]) \approx M(F)$ e que $M(F) \approx M(G) \approx S^1 \times [0,1]$, demonstrando assim o teorema.

A proposição que demonstraremos a seguir é de importância fundamental na classificação das superfícies, para enunciá-la chamemos de n_i , $i = 0,1,2$ o número de pontos críticos de índice i de uma função de Morse ordenada $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposição 3.9 - Dada uma função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ existem dois valores regulares c e d com as seguintes propriedades:

1. $f^{-1}((-\infty, c])$ contém n_0 pontos críticos de índice 0, $n_0 - 1$ pontos críticos de índice 1 e é difeomorfo a D^2 .
2. $f^{-1}([d, +\infty))$ contém n_2 pontos críticos de índice 1, $n_2 - 1$ pontos críticos de índice 0 e é difeomorfo a D^2 .

Demonstração: Seja p_1 o ponto crítico de f de índice 1 e nível mais alto. Tomemos $a > 0$ tal que $p_1 \in \varphi(U(a))$ e

$K_a \approx D^2$ (K_a é o fecho de $\varphi(U(a))$, sendo φ a parametrização de Morse). Supondo $n_0 \geq 2$ (já que para $n_0 = 1$, nada teríamos a provar), existe um ponto crítico de índice 1 e $a', b', c', d', e' \in \mathbb{R}$ tais que:

- i) $U(a', b', c', d', e')$ satisfaz a Proposição 3.3'; portanto $f^{-1}(a') \cap \overline{U(a', b', c', d', e')} = I \cup J$, onde I e J são (difeomorfos a) intervalos.
- ii) p_1 é o único ponto crítico de f na componente de $f^{-1}(-\infty, a']$ que intercepta K_a .
- iii) Somente o segmento I está contido no componente do item ii), v. fig. 3.18.

Já que $f^{-1}(-\infty, a) \approx f^{-1}(-\infty, a')$, podemos supor que $f(\partial K_a) = a'$. Assim pela Proposição 3.3, podemos supor que não existe valores críticos no intervalo $(f(p_1), f(p_2))$. Seja p_3 o ponto crítico de índice 0 que pertence a componente de $f^{-1}(-\infty, a')$ que contém J .

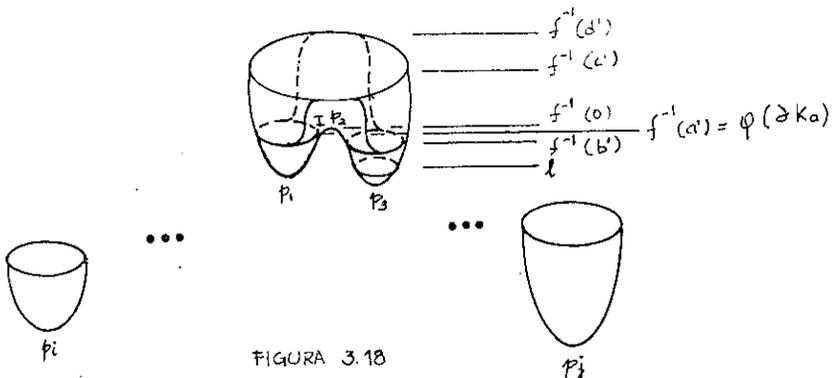


FIGURA 3.18

Tomemos t tal que $f(p_2) < t < f(p_1)$. Daí entre os níveis t e c' só existem os pontos críticos p_1 e p_2 , podemos então aplicar o teorema do cancelamento para concluir que $f^{-1}(-\infty, c')$ é difeomorfo a união de $n_0 - 1$ discos. Por indução temos o item 1. da proposição. Para mostrar o item 2., basta trocar f por $-f$. Fica assim demonstrada a proposição.

§4. Classificação das superfícies.

Neste parágrafo vamos demonstrar o teorema de classificação das superfícies compactas. Para ilustrar a técnica de construção explícita dos homeomorfismos entre as superfícies em questão vamos dar alguns exemplos:

Exemplo 4 - Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$, é uma função de Morse com dois pontos críticos (um máximo e um mínimo) então $M \approx S^2$. Seja $g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$, a função altura que tem $(0, 0, -1)$ e $(0, 0, 1)$ como pontos críticos não degenerados.

Se p_0, p_1 são mínimo e máximo de f , respectivamente, coloquemos $f(p_0) = a$ e $f(p_1) = b$.

Seja $\beta: [a, b] \rightarrow [-1, 1]$, dada por $\beta(x) = \frac{2}{b-a}x + \frac{b+a}{b-a}$.

Passemos agora a definir o homeomorfismo $h: M \rightarrow S^2$. Seja $a < c < b$, sabemos que $f^{-1}(c)$ é difeomorfo a S^1 , definimos $h: f^{-1}(c) \rightarrow S^2 \cap \{z=0\}$ como sendo este difeomorfismo. Ponha $h(p_0) = (0, 0, -1)$ e $h(p_1) = (0, 0, 1)$. Se $p \neq p_0, p_1$, sejam $\Theta^f(p)$ a órbita de $\text{grad } f$ que passa por p e $\tilde{P} = \Theta^f(p) \cap f^{-1}(c)$.

Vamos agora definir o homeomorfismo $h: M \rightarrow P_1$. Ponhamos $h(p_i) = q_i$ e $h: f^{-1}(e) \rightarrow g^{-1}(\frac{5}{2})$ é definido de tal forma que $h(\xi_i) = \rho_i$ e sendo $\eta_1 \in \widehat{\xi_1 \xi_2}$ e $\eta_2 \in \widehat{\xi_2 \xi_1}$, ponhamos $h(\eta_1) = \theta_1$, $h(\eta_2) = \theta_2$ e exigimos que $h(\widehat{\xi_1 \xi_2}) = \widehat{\rho_1 \rho_2}$. Se $p \in W^{u,f}(P_1)$ $f(p) = x$ e $p \in \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \overline{v_t^f(\widehat{\eta_1 \xi_2})}$, definimos $h(p) = q$ onde $q = W^{u,f}(q_1) \cap g^{-1}(Y(x))$, e $q \in \bigcup_t \overline{v_t^g(\widehat{\theta_1 \rho_2})}$, e $\tilde{p} = \theta^f(p) \cap f^{-1}(c)$. Agora se $p \notin W^{u,f}(P_1)$ e $f(p) = x$, defina $h(p) = \theta^g(h(\tilde{p})) \cap g^{-1}(Y(x))$. Que h é um homeomorfismo segue-se por um argumento semelhante ao do exemplo anterior.

Uma das consequências da Proposição 3.9 do parágrafo anterior é que o número de pontos críticos de índice 1 em $f^{-1}([c,d])$ é $n_1 - (n_0 - 1) - (n_2 - 1) = 2 - (n_0 - n_1 + n_2)$. Ao número $\chi(M) = n_0 - n_1 + n_2$, chamamos característica de Euler da superfície M . Uma das consequências do teorema de classificação é que se M e M' são superfícies homeomorfas, então $\chi(M) = \chi(M')$: dizemos que $\chi(M)$ é um invariante topológico da superfície M .

Teorema de classificação - Toda superfície compacta, conexa e sem bordo M é homeomorfa a um n -plano projetivo P_n ou a um p -toro T_p .

Demonstração: Faremos a prova por indução em $n = 2 - \chi(M)$. Vejamos primeiro como funciona o processo para $n = 0, 1, 2$ e 3 .

Se $n = 0$ temos (Proposição 3.9 do parágrafo anterior) que M é difeomorfa a dois discos identificados pelo bordo e portanto, usando o Exemplo 4, $M \approx S^2$.

Se $n = 1$ então o ponto crítico em $f^{-1}([c,d])$ é de ti-

po II, porque os de tipo I aparecem aos pares. Assim $f^{-1}(-\infty, d]$ é homeomorfa a um disco e uma faixa de Moebius identificados pelo bordo ou seja $M \approx_0 P_1$.

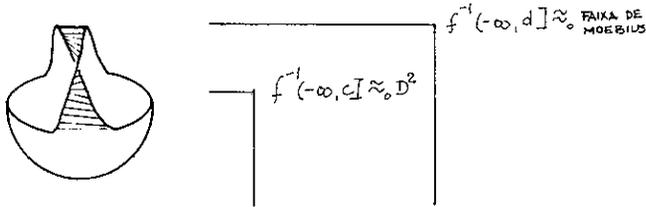


FIGURA 3.22.

Se $n = 2$, os dois pontos críticos em $f^{-1}([c, d])$ são de tipo I, ou ambos são de tipo II. Seja $c < e < d$, tal que $f^{-1}([c, e])$ contém um ponto crítico de índice 1 e $f^{-1}([e, d])$ contém o outro. $f^{-1}(-\infty, e]$ e $f^{-1}([e, +\infty))$ são homeomorfos a dois cilindros ou a duas faixas de Moebius, v. fig. 3.23.

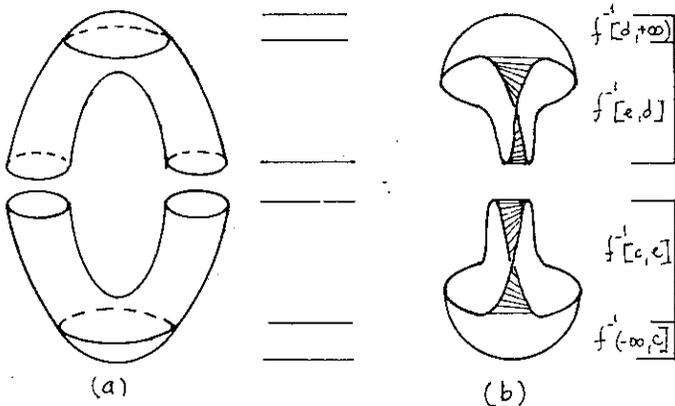


FIGURA 3.23.

No primeiro caso, dependendo da identificação do bordo dos dois cilindros, obtemos M homeomorfa ao toro T_1 ou a garrafa de Klein P_2 , v. fig. 3.24.

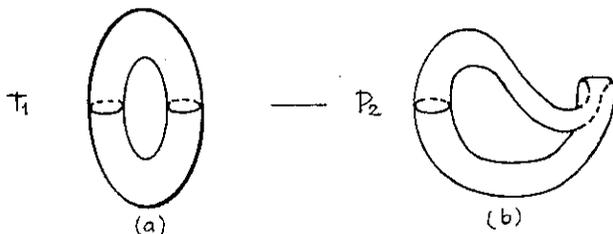


FIGURA 3.24.

Assim, mesmo que os pontos críticos de índice 1 sejam todos de tipo I, a superfície resultante pode ser não-orientável, dependendo das identificações feitas.

Aos pares consecutivos de pontos críticos de índice 1 e tipo I que produzem identificações como na Figura 3.24 (a) chamaremos pares orientáveis e de pares não orientáveis se forem como na Figura 3.24 (b).

No segundo caso, M será homeomorfa à união de duas faixas de Moebius identificadas pelo bordo, ou seja, novamente a garrafa de Klein P_2 .

No caso em que $n = 3$ temos duas possibilidades para os pontos críticos de índice 1 em $f^{-1}([c,d])$: 1) os três pontos críticos são de tipo II; 2) dois dos pontos críticos são de tipo I e o outro é de tipo II. Chamemos p_0, p_1 e p_2 os pontos críticos de f em $f^{-1}([c,d])$ e consideremos $c', d' \in [c,d]$ tais que $c < f(p_0) < c' < f(p_1) < d' < f(p_2) < d$.

Para ver a primeira possibilidade vamos supor que p_0, p_1

e p_2 são de tipo II. Já sabemos do caso $n = 2$ que $f^{-1}((-\infty, d'])$ é homeomorfa a garrafa de Klein P_2 menos um disco e do caso $n = 1$ que $f^{-1}([d', +\infty))$ é homeomorfo à faixa de Moebius. Portanto, pela construção da soma conexa, M seria homeomorfa a P_3 . Vemos geometricamente o que acontece quando cruzamos os pontos críticos p_i , $i = 0, 1, 2$ na Fig. 3.25 (1), (2) e (3) respectivamente.

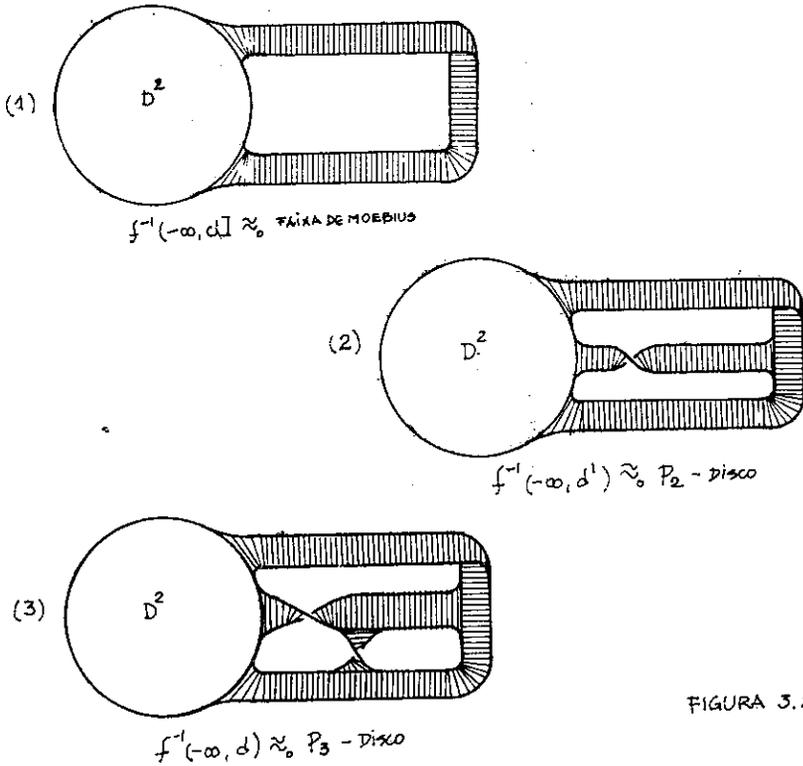


FIGURA 3.25

Suponhamos agora que p_0 e p_1 são de tipo I e que p_3 é de tipo II; o que podemos sempre supor porque se p_0 é de tipo II trocamos f por $-f$, ou então se p_1 é de tipo II podemos usar as Proposições 3.5 e 3.3' para trocar os níveis de p_1 e p_2 . Sabemos do caso $n = 2$ que $f^{-1}((-\infty, d'])$ é homeomorfa ou ao toro T_1 menos um disco ou à garrafa de Klein P_2 menos um disco. Temos então que $M \approx T_1 \# P_1$ ou $M \approx P_3$, pois $f^{-1}([d', +\infty))$ é homeomorfa à faixa de Moebius. Vejamos (geometricamente) que $T_1 \# P_1 \approx P_3$ (fig. 3.26).

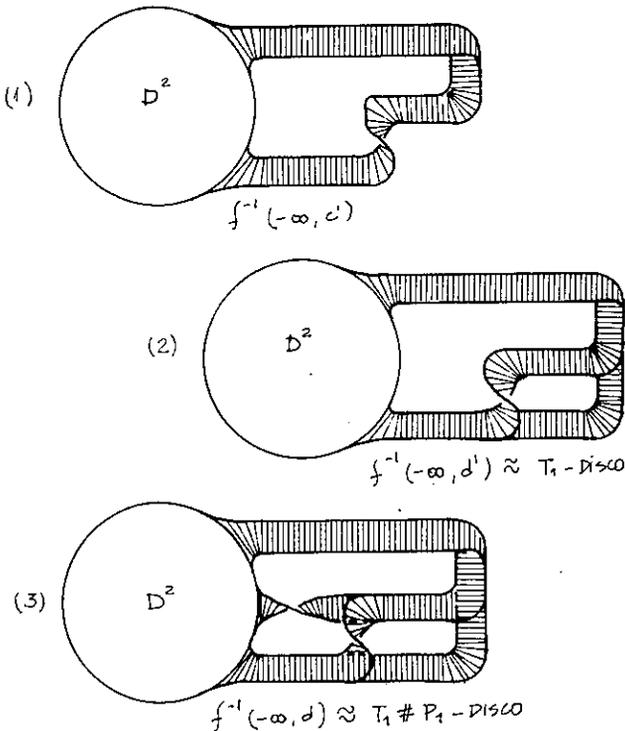


FIGURA 3.26

Observando as figuras 3.25 (3) e 3.26 (3) vemos que

$T_1 \# P_1$ - disco \approx P_3 - disco, e portanto $T_1 \# P_1 \approx P_3$.

Agora vamos demonstrar o caso geral para $n \geq 4$. Suponhamos primeiro que todos os n pontos críticos em $f^{-1}([c,d])$ são de tipo I; portanto $n = 2p$. Temos dois casos a considerar:

1º) todos os pares de pontos críticos em $f^{-1}([c,d])$ são orientáveis e 2º) existem pares não-orientáveis. Para examinar estas duas possibilidades consideremos $p_0, p_1 \in f^{-1}([c,d])$ como sendo os pontos críticos de nível mais baixo e $c' \in [c,d]$ tal que $c < f(p_0) < f(p_1) < c' < d$. Sabemos do caso $n = 2$ que

$f^{-1}(-\infty, c'] \approx T_1$ - disco e, pela hipótese de indução

$f^{-1}([c', +\infty)) \approx T_{p-1}$ - disco, portanto $M \approx T_1 \# T_{p-1} = T_p$.

Para o segundo caso vamos supor p_0 e p_1 formam um par não orientável (podemos sempre fazer esta hipótese pela "associatividade" da soma conexa), donde $f^{-1}((-\infty, c']) \approx P_2$ - disco. Pela hipótese de indução $f^{-1}([c', +\infty)) \approx P_{n-2}$ - disco (se $f^{-1}([c', d])$ tem algum par não-orientável de pontos críticos) ou $f^{-1}((-\infty, c'] \approx T_{p-1}$ - disco. Portanto $M \approx P_2 \# P_{n-2} = P_n$ ou $M \approx P_2 \# T_{p-1}$. Mas $P_2 \# T_{p-1} \approx P_2 \# T_1 \# T_{p-2} \approx P_3 \# T_{p-2}$, utilizando o caso $n = 3$. Como $P_3 = P_1 \# P_2$ e $T_{p-2} = T_1 \# T_{p-3}$ temos então que $P_2 \# T_{p-1} \approx P_n$.

Conclusão: $M \approx T_p$, $2p = n$, no primeiro caso e $M \approx P_n$ no segundo.

Vamos supor agora que existem pontos críticos de tipo II em $f^{-1}([c,d])$. Se todos os pontos críticos em $f^{-1}([c,d])$ são de tipo II, tomemos p_0 aquele de nível mais baixo e $c' \in [c,d]$

tal que $c < f(p_0) < c' < d$. Assim $f^{-1}(-\infty, c'] \approx P_1$ - disco, como no caso $n = 1$, e $f^{-1}([c', +\infty)) \approx P_{n-1}$ - disco, pela hipótese de indução, portanto $M \approx P_1 \# P_{n-1} = P_n$. Se existe algum par de pontos críticos de tipo I podemos, por um processo análogo àquele em que todos são de tipo I mas existem pares não-orientáveis, deduzir que $M \approx P_n$. Fica assim concluída a demonstração do teorema.

Decorre desse teorema que:

1. M é orientável se e só se $M \approx T_p$. Neste caso $\chi(M) = 2-2p$.
2. M é não-orientável se e só se $M \approx P_n$. Aqui $\chi(M) = 2-n$. É claro que $T_p \not\approx P_n$, isto porque P_n contém uma faixa de Moebius (por definição).

Uma outra consequência do teorema é que toda superfície compacta orientável M , sendo homeomorfa a T_p pode ser realizada em R^3 . Quando M é não-orientável podemos realizá-la em R^4 : isto decorre do fato de P_1 poder ser realizado em R^4 (Exemplo 7, Capítulo 2) e da maneira como construímos a soma conexa.

EXERCÍCIOS

1. Construa a função α da Proposição 3.2 e as funções w e λ da Proposição 3.3.
2. Diga se as funções abaixo são de Morse (em caso afirmativo dê os índices de seus pontos críticos) e discuta geometricamente como se dá a mudança de seus níveis.
 - a) $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x+y+z$
 - b) $g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto z^2+z$
 - c) $h: T_2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto z$ onde T_2 é o 2-toro do Exercício 13.b do Capítulo 2.
3. Mesmo que no exercício anterior para as funções seguintes:
 - a) $f: M \rightarrow \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto z$, onde M é a faixa de Moebius do Exemplo 5, Capítulo 2.
 - b) $g: P_1 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y,z,u) \mapsto u$, onde P_1 é o plano projetivo do Exemplo 7, Capítulo 2.
4. Se M é uma superfície, q é valor regular de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in f^{-1}(q)$, $T(f^{-1}(q))_p = \text{Núcleo de } f'(p)$.
5. Se $q \in \mathbb{R}$ é valor regular de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, mostre que $f^{-1}(-\infty, a)$ é uma superfície com bordo.
6. Dê exemplos mostrando que a Proposição 3.5 não é verdade quando a superfície M tem bordo ou não é compacta.
7. Descreva geometricamente o comportamento do campo gradiente das funções dos Exercícios 2 e 3. No caso 3b, use para P_1 o modelo dado no Capítulo 1.

8. Construa explicitamente o homeomorfismo $h: f^{-1}(a) \rightarrow g^{-1}(d)$ da Proposição 3.7.

9. Demonstre usando técnica semelhante à da Proposição 3.7 que se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis e $f^{-1}[a,b]$ e $g^{-1}[c,d]$ são conexos e não tem pontos críticos então $f^{-1}([a,b]) \approx g^{-1}([c,d])$.

10. Sejam M uma curva compacta em \mathbb{R}^n .

- a) Defina o que significa $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ser uma função de Morse.
- b) Mostre que existem funções de Morse definidas em M .
- c) Enuncie e prove um "teorema de cancelamento" de pontos críticos.
- d) Mostre que $M \approx S^1$.

APÊNDICE

Vamos mostrar neste apêndice que dada uma superfície compacta M , existem "muitas" funções de Morse definidas em M . Para mostrar tal resultado precisamos de um teorema clássico de Análise: o teorema de Sard-Brown.

Dada uma função diferenciável $F: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde M é uma superfície, dizemos que $p \in M$ é um ponto regular de F se $F'(p): T_{M,p} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo; $q \in \mathbb{R}^2$ é um valor regular de F se $F^{-1}(q)$ é vazio ou todo $p \in F^{-1}(q)$ é ponto regular. Um ponto $p \in M$ que não é regular é chamado um ponto crítico de F .

Teorema - Dada uma função C^∞ $F: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, o conjunto $A = \{q \in \mathbb{R}^2; q \text{ é valor regular de } F\}$ é aberto e denso em \mathbb{R}^2 .

Este teorema é um caso particular do teorema de Sard-Brown cuja demonstração pode ser encontrada em [Mil].

Para demonstrar o Lema 1 identificaremos $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e \mathbb{R}^2 .

Lema 1 - Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ . Existe um subconjunto aberto e denso $B \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que para todo $L \in B$ temos que $f+L: U \rightarrow \mathbb{R}$ tem todos os pontos críticos não-degenerados.

Demonstração: Tome $M = \{(p, L) \in U \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) : L = -f'(p)\}$. É claro que M (com a identificação $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$) é uma superfície em \mathbb{R}^4 , cuja única parametrização é $\varphi: U \rightarrow M$, $p \mapsto (p, -f'(p))$. Assim $(p, L) \in M$ se e somente se p é ponto

crítico de $f+L: U \rightarrow R$. Sabemos que um ponto $p \in U$ é não-degenerado para $f+L$ se $(f+L)''(p) = f''(p): R^2 \rightarrow R^2$ é um isomorfismo. Consideremos então a aplicação $F: M \rightarrow \mathcal{L}(R^2, R) \cong R^2$, $(p, -f'(p)) \mapsto F(p, -f'(p)) = -f'(p)$. Usando a parametrização $\varphi: U \rightarrow M$ temos que $(F \circ \varphi)'(p) = -f''(p)$ e portanto $p \in M$ é ponto crítico não degenerado de $f+L$ se e somente se $L = -f'(p)$ é valor regular de F . Aplicando agora o teorema anterior concluímos o lema.

Dada $f: U \subset R^2 \rightarrow R$ podemos, na base canônica do R^2 , identificar $f'(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$ e $f''(x,y) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Se f é de classe C^∞ a função $\psi(x,y) = \|f'(x,y)\| + |\det f''(x,y)|$ é uma função contínua. Mais ainda, $\psi(x,y) = 0$, se e somente se, (x,y) é ponto crítico degenerado de f .

Fixada $f: U \rightarrow R$ e dados $\epsilon > 0$ e $C \subset U$ definamos $N_\epsilon(f, C) = \{g: U \rightarrow R; \|f'(x,y) - g'(x,y)\| < \epsilon \text{ e } \|f''(x,y) - g''(x,y)\| < \epsilon, (x,y) \in C\}$.

Com esta notação vamos provar o seguinte lema.

Lema 2 - Seja K um subconjunto compacto do aberto $U \subset R^2$ e

$f: U \rightarrow R$ que tem em K somente pontos críticos não-degenerados. Então existe $\delta > 0$ tal que todo $g \in N_\delta(f, K)$ tem somente pontos críticos não-degenerados em K .

Demonstração: Como $\psi(x,y) = \|f'(x,y)\| + |\det f''(x,y)|$ é contínua,

todos os pontos críticos de f são não-degenerados e K é compacto, existe $m > 0$ tal que $\psi(x,y) > m$ para todo $(x,y) \in K$. Como $\| \cdot \|$ e determinante são funções contínuas, existe $\delta > 0$ tal que se $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $\|f'(x,y) - g'(x,y)\| < \delta$ e $|f''(x,y) - g''(x,y)| < \delta$, $(x,y) \in K$, então $\| \|f'(x,y)\| - \|g'(x,y)\| \| < \frac{m}{2}$ e $||\det f''(x,y)| - |\det g''(x,y)|| < \frac{m}{2}$, $(x,y) \in K$. Ou seja existe $\delta > 0$ tal que se $g \in B_\delta(f, K)$ então $\|g'(x,y)\| > \|f'(x,y)\| - \frac{m}{2}$ e $|\det g''(x,y)| > |\det f''(x,y)| - \frac{m}{2}$. Daí temos que $\|g'(x,y)\| + |\det g''(x,y)| > \|f'(x,y)\| + |\det f''(x,y)| - m = \psi(x,y) - m > 0$. Portanto, todo $g \in B_\delta(f, K)$ tem todos os seus pontos críticos em K não-degenerados, que é o que queríamos provar.

Agora seja M uma superfície compacta. Dada $p \in M$ considere $\varphi_\alpha: B(3) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_p$, $\varphi_\alpha(0) = p$, uma parametrização em torno de p e denotemos $\varphi_\alpha(B(1)) = W_p$ e $\varphi_\alpha(B(2)) = K_p$, onde $B(s) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |(x,y)| < s\}$. $\{W_p; p \in M\}$ é uma cobertura aberta de M que, sendo compacta, possui uma subcobertura finita que denotaremos por W_1, W_2, \dots, W_n ; $\varphi_i: B(3) \rightarrow V_i$ serão as parametrizações correspondentes e poremos $K_i = \varphi_i(B(2))$, $i=1,2,\dots,n$.

Fixemos $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ . Sendo $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ denotemos $g_i = g \circ \varphi_i: B(3) \rightarrow \mathbb{R}$ e, dado $r > 0$, definamos $N_r(f, \Phi) = \{g: M \rightarrow \mathbb{R}; g_i \in N_r(f_i, \overline{B(2)}), i=1,2,\dots,n\}$.

Com essa notação vamos demonstrar o teorema seguinte, que nos garante a existência de "muitas" funções de Morse.

Teorema - a) Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞ então para todo $r > 0$

existe $g \in N_r(f, \Phi)$ que é de Morse.

b) Se $f: M \rightarrow R$ é de Morse, então existe $\delta > 0$ tal que toda função em $N_\delta(f, \Phi)$ é de Morse.

Demonstração: a) Seja $f_1 = f \circ \varphi_1: B(3) \rightarrow R$. Pelo Lema 1 sabemos

que existe $L_1 \in \mathcal{L}(R^2, R)$ tal que $g_1 = f_1 + L_1$:

$B(3) \rightarrow R$ tem todos os pontos críticos não-degenerados e

$g_1 \in N_r(f_1, \overline{B(2)})$. Consideremos a função $\lambda: M \rightarrow R$ C^∞ tal que:

$0 \leq \lambda(p) \leq 1$, $\lambda^{-1}(1) = K_1$ e $\lambda^{-1}(0) = M - V_1$. Definamos a função

$G_1: M \rightarrow R$ por

$$G_1(p) = \begin{cases} f(p) & \text{se } p \in M - V_1 \\ f_1(\varphi_1^{-1}(p)) + \lambda(p) \cdot L(\varphi_1^{-1}(p)) & \text{se } p \in V_1 \end{cases}$$

Como $\lambda(p) = 0$ se $p \in M - V_1$, temos que G_1 é C^∞ . Obtemos

assim $G_1: M \rightarrow R$ C^∞ tendo todos os pontos críticos em K_1 não-degenerados e $g_1 = G_1 \circ \varphi_1 \in N_r(f, B(2))$.

Repetindo com $G_1: M \rightarrow R$ o mesmo processo que fizemos com f , mas agora com respeito a V_2 e K_2 , obtemos uma função

$G_2: M \rightarrow R$ C^∞ que tem todos os pontos críticos em $K_1 \cup K_2$ não-degenerados e tal que $G_2 \circ \varphi_1 \in N_r(f_1, B(2))$ e $G_2 \circ \varphi_2 \in N_r(f_2, \overline{B(2)})$.

Assim, por recorrência, obtemos uma função $g = G_n: M \rightarrow R$ C^∞ que tem todos os pontos críticos não-degenerados em $K_1 \cup \dots \cup K_n =$

$= M$ e $g_i = G \circ \varphi_i \in N_r(f_i, \overline{B(2)})$, ou seja, $g \in N_r(f, \Phi)$ e é de Morse, o que demonstra a parte a) do teorema.

b) Se $f: M \rightarrow R$ é de Morse então, pelo Lema 2, existem $\delta_1, \dots, \delta_n$

> 0 tais que $N_{\delta_i}(f_i, \overline{B(2)})$ só contém funções de Morse. Se

$\delta = \min \{ \delta_1, \dots, \delta_n \}$ temos que $N_\delta(f, \phi)$ satisfaz a parte b) do teorema.

REFERÊNCIAS

- [BCL] Boone, W.W. - Cannonito, F.B. - Lyndon, R.C. (Editores) - Word problems. North Holland, 1973.
- [C-L] Coddington, E.A. - Levinson, N. - Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill, 1955
- [G] Gramain, A. - Topologie des surfaces. Presses Universitaires de France, 1971.
- [H] Hirsch, M.W. - Differential Topology. Springer-Verlag, 1976.
- [H-C] Hilbert D. - Conh-Vossen, S. - Geometry and Imagination. Chelsea Publishing Company, 1962.
- [L1] Lima, E.L. - Grupo fundamental e espaços de recobrimento. 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1977.
- [L2] ----- - Análise no espaço R^n . Editora Edgard Blücher Editora Universidade de Brasília, 1970.
- [L3] ----- - Variedades Diferenciáveis. Monografias de Matemática nº 15, IMPA, 1973.
- [L4] ----- - Introdução à Teoria de Morse. Atas do 2º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1960.
- [L5] ----- - Espaços métricos - Projeto Euclides, 1977.

- [Ma] Massey, W.S. - Algebraic Topology: An introduction.
Harcourt Brace Jovanovitch, New York, 1967.
- [Mi1] Milnor, J.W. - Topology from the differentiable viewpoint.
The University of Virginia Press, 1965.
- [Mi2] Milnor, J. - Lectures on the h-cobordism theorem.
Princeton University Press, 1965.
- [Mu] Munkres, J.R. - Topology, a first course. Prentice-Hall,
1975.
- [P] Pont, J.C. - La topologie algébrique des origines à
Poincaré, Presses Universitaires de France, 1974.
- [P-M] Palis, J. - de Melo, W. - Introdução aos sistemas dinâmicos,
Projeto Euclides, 1977.
- [R] Richards, I. - On the classification of noncompact surfaces.
- [S] Spivak, M. - Calculus on manifolds. Benjamin, 1965.
- [W] Wallace, A. - Differential Topology: first steps.
Benjamin, 1968.
- [Z] Zeeman, C.E. - Uma introdução informal à topologia das su-
perfícies. Monografias de Matemática, IMPA.