Tópicos em Matemática Aplicada

Carlos A. de Moura
Maurício V. Kritz
Marco A. Raupp

COPYRIGHT © by CARLOS A. DE MOURA, MAURÍCIO V. KRITZ,
MARCO A. RAUPP

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida, por qualquer processo, sem a permissão dos autores.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Rua Luiz de Camões, 68
20.060 - Rio de Janeiro - RJ

PREFÁCIO

Este volume foi escrito para servir como texto aos participantes do Seminário de Matemática Aplicada, que é uma das atividades previstas no calendário do 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, a realizar-se em Poços de Caldas, MG, durante o mês de julho do corrente ano. Em sua preparação tivemos em mente uma audiência ao nível de "dois anos de pós-graduação" em Matemática. Mas concedemos que um pouco de "coragem para pensar informalmente" também é necessária, pois algumas vezes lançamos mão de argumentos e conceitos mais específicos de EDP.

Críticas são altamente desejadas.

Agradecimentos são devidos, em primeiro lugar, à Comissão Organizadora do Colóquio, especialmente ao seu coordenador, prof. Adilson Gonçalves, pelo interesse demonstrado na realização do Seminário e conseqüente estímulo e incentivo ao nosso trabalho. Em segundo lugar, à Université de Nantes, França, onde um dos autores redigiu e expôs uma parte do texto no curso "Mathematiques Appliquées" do D.E.A. da Ecole Nationale Superieure de Mecanique.

Rio de Janeiro, 20 de março de 1979

Carlos A. de Moura
Maurício V. Kritz
Marco A. Raupp

"As Henri Poincaré once remarked, "solution of a mathematical problem" is a phrase of indefinite meaning. Pure mathematicians sometimes are satisfied with showing that the non-existence of a solution implies a logical contradiction, while engineers might consider a numerical result as the only reasonable goal. Such one sided views seem to reflect human limitations rather than objective values. In itself mathematics is an indivisible organism uniting theoretical contemplation and active application".

R. Courant

em "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations". Aula ministrada no encontro da AMS em 3 de maio de 1941.

ÍNDICE

		Pág.
	Introdução	1
Capítulo I	Formulação do Modelo	
1.	Introdução	3
2.	O modelo físico	5
3.	Coordenadas lagrangeanas	5
4.	Os postulados do modelo.....	7
5.	O princípio das potências virtuais	11
6.	Observações finais	14
7.	Apêndice	16
Capítulo II	Propriedades Básicas do Modelo	
1.	Espaços de Sobolev de funções reais.....	18
2.	Espaços de Sobolev de funções vetoriais.....	21
3.	Características Matemáticas da inequação....	24
4.	Estabilidade e unicidade	26
Capítulo III	Uma Primeira Abordagem: regularização	
1.	Introdução	30
2.	A solução com um ponto de mínimo	31
3.	Regularização	32
4.	O erro na regularização	35
5.	Uma estimativa a priori	38
6.	Existência da solução da (IVE)	40

Pág.

Capítulo IV — Semi-discretização: passagem à dimensão finita

1. Introdução 48
2. A equação aproximada 48
3. Um sistema diferencial em $\mathbb{R}^{N_h}$ - método de Faedo-Galerkin 51
4. Construção dos espaços de elementos finitos 54
5. Propriedades da aproximação por elementos finitos 64

Capítulo V — Discretização no Tempo: passagem ao nível do computador

1. Introdução 67
2. Um algorítmo não-linear 71
3. Um algorítmo linear 73
4. Resultados numéricos 77
5. Resultados teóricos-estabilidade do algorítmo 82
6. Resultados teóricos - convergência 88
7. Apêndice - exercícios propostos 93

Capítulo VI — Uma Segunda Abordagem: otimização

1. Definição do algorítmo 98
2. Propriedades do algorítmo - o conceito de estabilidade condicional 103
3. Discussão do algorítmo de otimização 106

Capítulo VII — Uma Terceira Abordagem: método de ponto fixo

1. Discretização direta: um problema de ponto fixo 111
2. Um algorítmo para o cálculo de um ponto fixo aproximado 118

Introdução

Três tipos de técnicas são básicas e de amplo uso na Matemática Aplicada Moderna: o método dos elementos finitos, algoritmos de otimização, e algorítmos de pesquisa de pontos fixos. O objetivo desta monografia é exatamente discutir as idéias que sustentam estes três métodos. Não via uma teoria completa e sistematizada, mas sim através da sua utilização em problemas concretos. Na verdade discutiremos somente um problema, o da dinâmica da penetração de uma estaca de fundação no solo. Este é um problema originário da Engenharia de Fundações que foi analisado em toda a sua extensão, desde a proposição do modelo até a simulação numérica, por um grupo de trabalho no Laboratório de Cálculo do CBPF, Rio de Janeiro. Seguindo este caminho nós acreditamos estarmos contribuindo para a formação de uma atitude por parte dos estudantes na linha de Matemática Aplicada, qual seja, a atitude onde o objetivo básico a perseguir é encontrar efetivamente uma solução que explique os dados e satisfaça os vínculos existentes, a teoria necessária sendo estudada ou desenvolvida em consequência. A fixação em um único problema modelo contribuirá também para a unidade do material exposto. As relações matemáticas globais existentes entre os vários métodos aparecerão ao natural neste contexto.

Colocados os objetivos e a filosofia, o material é apresentado em sete capítulos. No primeiro, o problema é apresentado e um modelo é estabelecido, em termos de uma inequação variacional. No segundo introduz-se notação matemática e checa-se a consistên-

cia do modelo, no sentido Hadamardiano. Nos Capítulos III à V o problema é analisado pelo método dos elementos finitos, mais discretizações alternativas para o variável tempo. No Capítulo VI o problema é analisado introduzindo-se uma função Lagrangeana que leva a um algorítmo de otmização (Uzawa), e no Capítulo VII a análise é feita com base na caracterização da solução do problema como o ponto fixo de um operador atuando em determinado espaço funcional.

CAPÍTULO I

FORMULAÇÃO DO MODELO

1. Introdução

A formulação de um modelo matemático envolve inicialmente a escolha das variáveis que consideraremos relevantes para o fenômeno em estudo e, em seguida, das leis que suporemos obedecidas por aquelas variáveis. Uma questão se coloca sempre: a de decidir qual o grau de generalidade que admitiremos. É importante ter em mente que nem toda hipótese simplificadora facilita necessariamente o tratamento posterior do modelo, quer seja do ponto de vista teórico, quer seja do ponto de vista computacional.

Vale notar também que o advento dos computadores eletrônicos de grande porte e o conseqüente aperfeiçoamento das atuais técnicas numéricas levou a modelagem matemática, em algumas situações, a suplantar outros métodos, como o de experimentos em laboratórios com modelos miniaturizados, por exemplo, segundo os critérios de exatidão, economia, factibilidade, etc.

Certas propriedades são naturalmente exigidas de um sistema matemático que pretende representar um dado fenômeno físico:

(i) Existência da solução - que traduz o fato de o fenômeno representado poder efetivamente ocorrer dentro das condições estudadas;

(ii) Unicidade da solução - que traduz a hipótese determinísta, qual seja, dadas as mesmas condições, o comportamento do sistema físico sempre se repetirá;

(iii) Estabilidade da solução (ou dependência contínua da solução com relação aos dados) - que traduz o fato de pequenas modificações introduzidas no sistema físico não acarretarem grandes modificações no fenômeno.

Um sistema matemático que satisfaça as três condições acima é dito bem posto, no sentido de Hadamard.

À medida em que estamos interessados em aplicações - no cálculo de números, em última análise - uma outra condição requeremos seja satisfeita:

(iv) Computabilidade da solução - que significa haver um meio de calcularmos os valores da solução com a margem de precisão que se fizer necessária.

Não é ousadia afirmar que as técnicas matemáticas e computacionais atualmente disponíveis nos permitem sempre encontrar um método para satisfazer (iv), desde que se trate de um problema bem posto.

Por fim devemos ressaltar que determinados fenômenos não se prestam a modelos que obedeçam o esquema acima, por exemplo, fenômenos aleatórios, ou com bifurcação, ou estudados com a teoria da catástrofe.

2. O modelo físico

O problema que iremos discutir é um problema de mecânica dos solos que têm sua origem em Engenharia de Fundações: trata-se de formular e estudar um modelo matemático para o comportamento dinâmico de uma estaca sendo fincada verticalmente no solo, sob a ação de um martelo bate-estacas. Considera-se a estaca como fincada quando for capaz de suportar em repouso uma determinada carga. Visa-se com isto a construção de um leito sólido, estável, sobre o qual repousará a estrutura a ser erguida-edifício, ponte, viaduto, etc.

No presente caso, devemos observar que conhecemos parcialmente o comportamento qualitativo do fenômeno físico em estudo, estando interessados nas informações quantitativas que nos podem fornecer as relações a que chegarmos. Contrariamente, em outras situações, é o próprio desconhecimento de propriedades qualitativas, às vezes assintóticas - isto é, para grandes valores de uma das variáveis consideradas - que exige a simulação numérica.

3. Coordenadas Lagrangeanas

É prática comum o emprego de estacas cilíndricas, com a altura bem maior que o raio da seção. Podemos pois, no nosso modelo, considerar uma só dimensão da estaca, todas as grandezas envolvidas dependendo apenas desta dimensão, a altura. A estaca, quando não deformada, ocupará no espaço um cilindro de altura ℓ.

Observe-se de início que consideraremos a estaca passível

de sofrer deformações, de modo que não a admitiremos como um corpo rígido.

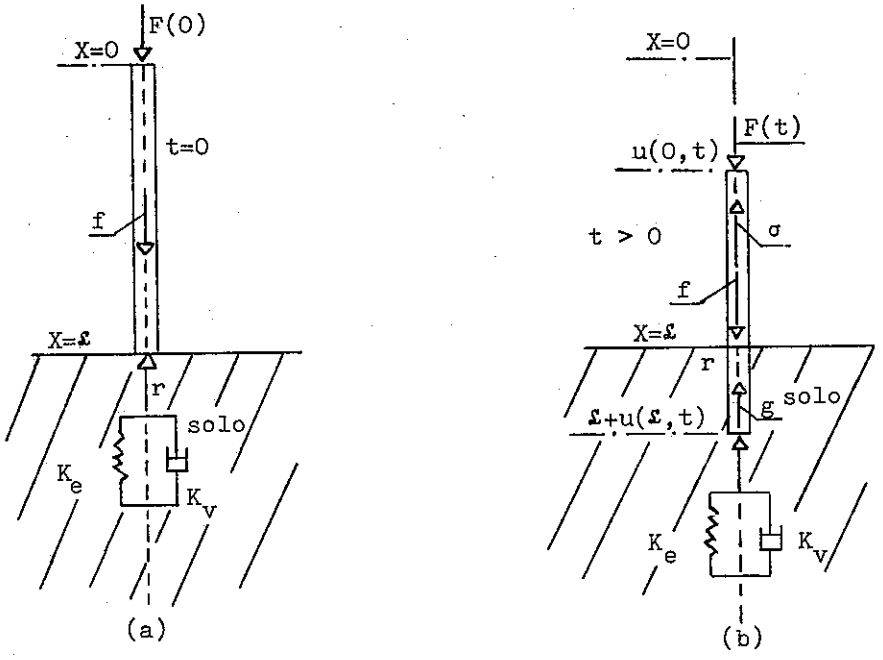


Fig. 1

Tomamos, no instante inicial $t = 0$, a estaca apoiada no solo e escolhemos o sistema de coordenadas como na Figura 1. Cada partícula da estaca é então identificada com um ponto x do intervalo $[0,\ell]$, a saber, sua posição no instante $t = 0$.

O movimento da estaca será descrito caracterizando-se o campo de deslocamentos u de cada partícula x, para cada instante t. Com isto queremos dizer: a partícula que no instante inicial ocupava a posição x, passa a ocupar, no instante t, a

posição $x+u(x,t)$. (Compare as Figuras 1a e 1b). Esta é a chamada descrição Lagrangeana do movimento.

Em outras palavras, o conhecimento da função

$$u: [0,\ell] \times [0,T] \to \mathbb{R}$$

nos permite descrever a configuração da estaca a qualquer instante no intervalo de tempo $[0,T]$, sendo o movimento de cada partícula descrito pela transformação

$$\pi_t: [0,\ell] \longrightarrow [u(0,t), \ell + u(\ell,t)]$$

$$x \longrightarrow x + u(x,t) \ .$$

Exercício 1. Procure o leitor se convencer que a função π_t, para bem representar a posição da estaca no instante t, deve ser não decrescente. Explique também o que significaria fisicamente π_t ser descontínua num dado ponto $x \in [0,\ell]$.

4. Os postulados do modelo

Suporemos que as forças atuantes no nosso sistema são as seguintes (ver Fig. 16):

a) a ação do martelo, que golpeia a extremidade $x = 0$ da estaca, representada por $F = F(t)$;

b) O peso da estaca, denotado por $f = f(x,t)$;

c) a resistência do solo à penetração, agindo na extremidade $x = \ell$ da estaca e denotada por r;

d) o atrito exercido sobre a porção da estaca que já penetrou no solo, denotado por g;

e) a tensão interna gerada na estaca em função dos esforços a que é submetida, denotada por σ.

Observe que tanto σ como g podem ter o sentido oposto ao que aparece na Fig. 16.

Examinemos agora as hipóteses que aceitaremos válidas para as forças descritas acima. São os postulados do nosso modelo.

a,b) As forças F e f são devidas a agentes externos ao sistema estaca-solo. Peculiaridades do seu comportamento não alteram as deduções que seguem e, portanto, simplesmente as consideraremos como dadas.

c) Suporemos que a força com que o solo se opõe à penetração da extremidade $x = \ell$ da estaca depende linearmente da profundidade atingida, isto é, tem um caráter elástico, semelhante ao de u'a mola (lei de Hooke); e, ao mesmo tempo, é proporcional à velocidade de penetração ou, em outras palavras, tem também um caráter viscoso. Este postulado é expresso na fórmula

$$r = -k_e u(\ell,t) - k_v \dot{u}(\ell,t), \tag{1.1}$$

onde k_e e k_v são respectivamente os coeficientes de elasticidade e viscosidade do solo (dados do problema), e a derivada $\partial u/\partial t$ foi denotada por $\dot{u}$, notação que adotaremos a seguir.

A hipótese (1.1) representa realmente uma simulação do comportamento do solo, já que leis gerais e bem estabelecidas so-

bre o assunto não existem.

d) Sobre a força de atrito g, sabemos que ela se opõe ao movimento; ademais, admitiremos a lei de Coulomb que descreve seu comportamento em termos da força normal $\mathfrak{F}_N$ que o solo exerce lateralmente sobre a estaca, da forma abaixo:

"Sendo $\mathcal{C}$ o coeficiente de atrito solo-estaca, em cada ponto da região de contato temos, a cada instante, que

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \text{a) se } |g| < \mathcal{C}|\mathfrak{F}_N| \text{ então } \dot{u} = 0 \ , \\ \text{b) se } |g| = \mathcal{C}|\mathfrak{F}_N| \text{ então } \dot{u} = -\lambda g, \text{ para algum } \lambda \geq 0". \end{cases}$$

Esta é uma lei empírica, com evidência experimental bem firmada.

Resta a força $\mathfrak{F}_N$. Suporemos que o solo comprime lateralmente a estaca de modo a exercer em cada partícula x uma pressão do tipo hidrotástico, ou seja, proporcional à profundidade em que a partícula se encontra. Tal profundidade é $x+u-\ell$, uma quantidade positiva se a partícula já penetrou no solo. Esta suposição corresponde a uma lei experimental da mecânica dos solos, chamada lei de Rankine, isto é,

$$(1.3)\qquad |\mathfrak{F}_N| = R\omega\ell[(x+u-\ell)H(x+u-\ell)] \ ,$$

sendo R o chamado coeficiente de Rankine (que depende da composição do solo), ω o peso específico do solo, ℓ o perímetro

da seção da estaca e H a função de Heaviside

$$H(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < 0 \\ 1 & \text{se } s \geq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

e) Observemos que

$$\varepsilon = \partial u/\partial x = u_x \tag{1.5}$$

é uma grandeza associada com a deformação da estaca. Podemos, a grosso modo, dizer que "tanto maior $|\varepsilon(x_o)|$, tanto mais afastadas estão de x_o partículas que anteriormente estavam próximas". Suporemos que a tensão interna na estaca é proporcional a esta taxa de deformação e também à velocidade com que ela ocorre:

$$\sigma(x) = a_e \varepsilon(x) + a_v \dot{\varepsilon}(x) \quad , \tag{1.6}$$

sendo a_e o coeficiente de elasticidade do material e a_v o seu coeficiente de viscosidade. A relação (1.6) é chamada de lei constitutiva ou de comportamento do material que compõe a estaca. Observe que, neste caso, σ só depende das deformações presentes ou que sucederam num passado bem próximo. Por isso um tal material é dito visco-elástico de memória curta. Para um material de memória longa, a lei constitutiva envolveria um operador integral atuando sobre ε (ver Ref. [15]).

As leis expressas em (1.1) e (1.6) são lineares. Significa, em termos matemáticos, que truncamos a expansão de Taylor das funções envolvidas, desprezando termos de ordem maior que 1.

Fisicamente, estamos fazendo a hipótese de pequenas deformações, apesar de grandes deslocamentos ocorrerem.

5. O princípio das potências virtuais

Uma vez descrita a cinemática do sistema, bem como as forças que nele atuam, devemos agora quantificar a interação mecânica entre estes elementos através de uma lei de balanço. Como a lei de Coulomb não fornece o atrito como uma força distribuída, é inviável a utilização neste problema de leis de balanço de caráter local, o equilíbrio sendo satisfeito em cada ponto. Devemos então lançar mão de condições de equilíbrio globais, tais como o princípio das potências virtuais (PPV).

Este princípio diz o seguinte:

"para todo deslocamento virtual de um sistema S ,a potência virtual associada às forças de inércia (aceleração) deste sistema é sempre igual à potência gerada por todas as forças aplicadas ao sistema, tanto internas como externas".

Por deslocamento virtual entendemos a diferença entre u, o deslocamento que efetivamente ocorre, e um deslocamento admissível, isto é, que poderia ocorrer, que respeita os vínculos do sistema. A notação corrente para um deslocamento virtual é δu , sendo

$$\delta \dot{u} = v - \dot{u} \tag{1.7}$$

a notação para uma velocidade virtual arbitrária.

A fim de que o leitor não perca o encadeamento da exposição,

descreveremos na seção final deste capítulo como o PPV conduz, no caso em estudo, à seguinte expressão:

$$S\int_0^{\ell}(\delta\dot{u})\,\rho\,\ddot{u}\,dx = \{-S\int_0^{\ell}(\delta\dot{u})_x\,\sigma\,dx\} +$$

$$+\{[(\delta\dot{u})r]_{x=\ell} + F(t)[\delta\dot{u}]_{x=0} + S\int_0^{\ell}(\delta\dot{u})\,f\,dx +$$

$$+\int_0^{\ell}(\delta\dot{u})\,g\,dx\}\,, \qquad \forall\,(\delta\dot{u}). \tag{1.8}$$

Em (1.8), ρ denota a massa específica da estaca, S a área de sua seção (ambas serão tomadas constantes e doravante $S = 1$), e separamos por chaves os termos correspondentes à potência gerada pelas forças internas e externas. Tal expressão é uma equação nas variáveis u, σ, g, r, que deve ser satisfeita, em cada instante t, para qualquer velocidade virtual $\delta\dot{u}$. Ela é dita uma <u>equação variacional</u>.

Usando (1.1), (1.5)-(1.7) em (1.8), bem como a notação de Dirac

$$\delta_s[h] = h(s)\,, \tag{1.9}$$

obtemos

$$\rho\int_0^{\ell}(v-\dot{u})\,\ddot{u}\,dx + a_e\int_0^{\ell}(v_x-\dot{u}_x)u_x\,dx + a_v\int_0^{\ell}(v_x-\dot{u}_x)\dot{u}_x dx$$

$$+ k_e\delta_{\ell}[v-\dot{u}]\,\delta_{\ell}[u] + k_v\delta_{\ell}[v-\dot{u}]\,\delta_{\ell}[\dot{u}] - \int_0^{\ell}(v-\dot{u})\,g\,dx =$$

$$= \int_0^{\ell}(v-\dot{u})\,f\,dx + F(t)\,\delta_0[v-\dot{u}], \quad \forall\, v \tag{1.8'}$$

Reduzimos assim a equação (1.8) a uma equação em duas variáveis, u e g, que deve ser satisfeita juntamente com as leis de Coulomb e Rankine, (1.2) e (1.3).

Como já observamos anteriormente, (1.2) não define a função g pontualmente. Mas, note que, qualquer que seja g,

$$-g(v-\dot{u}) \leq \mathcal{C}|F_N|(|v|-|\dot{u}|) \ . \tag{1.18}$$

Pois, se $|g| < \mathcal{C}|\mathcal{F}_N|$, de (1.2a) segue que

$$-(v-\dot{u})g = -vg \leq \mathcal{C}|\mathcal{F}_N||v| = \mathcal{C}|\mathcal{F}_N|(|v|-|\dot{u}|) \ . \tag{1.10a}$$

Por outro lado, quando $g = \mathcal{C}|\mathcal{F}_N|$, conclui-se de (1.26) que

$$-(v-\dot{u})g = -gv-|g||\lambda g| \leq |g|(|v|-|\dot{u}|) = \mathcal{C}|\mathcal{F}_N|(|v|-|\dot{u}|). \tag{1.10b}$$

A desigualdade (1.10), juntamente com (1.3), nos permite eliminar a variável g do problema, reescrevendo (1.8') na forma

$$\begin{aligned} &\rho \int_0^{\ell} (v-\dot{u})\ddot{u}dx + a_e \int_0^{\ell}(v_x-\dot{u}_x)u_x dx + k_e \delta_{\ell}[v-\dot{u}]\ \delta_{\ell}[u] + \\ &+ a_v \int_0^{\ell} (v_x-\dot{u}_x)\ \dot{u}_x dx + k_e \delta_{\ell}[v-\dot{u}]\ \delta_{\ell}[\dot{u}] \\ &+ c \int_0^{\ell}(x+u-\ell)\ H(x+u-\ell)(|v|-|\dot{u}|)dx \geq \\ &\geq \int_0^{\ell}(v-\dot{u})f\ dx + F(t)\ \delta_0[v-\dot{u}], \quad \forall\ v \ , \end{aligned} \tag{1.11}$$

onde tomamos

$$c = \mathcal{C}\ R\ \omega\ \ell \ .$$

A relação (1.11), base do nosso modelo, é uma inequação variacional de evolução. Para a eventual determinação da solução u, as condições iniciais do sistema devem ser conhecidas:

(1.12a) $$u(x,0) = u_o(x) \quad ,$$

(1.12b) $$\dot{u}(x,0) = v_o(x) \quad .$$

6. Observações finais

A solução que buscamos, e que descreve completamente o movimento da estaca até o instante T, é pois uma função

$$u: [0,T] \to \mathcal{A} \quad ,$$

onde $\mathcal{A}$ é um espaço de funções reais sobre o intervalo $[0,\ell]$, espaço a ser caracterizado mais adiante. A mera observação de (1.11) - (1.12) já nos indica alguma das condições que devem ser satisfeitas pelo espaço $\mathcal{A}$, bem como pelo conjunto de aplicações de $[0,T]$ em $\mathcal{A}$ onde vamos buscar a solução u:

(i) toda função d de $\mathcal{A}$ deve ser integrável em $[0,\ell]$; ademais ela deve ser derivável e d_x também integrável;

(ii) o operador δ_ℓ deve estar bem definido sobre $\mathcal{A}$ (veremos mais tarde que ele precisa mesmo ser contínuo);

assim, funções definidas em quase toda parte (qtp) de $[0,\ell]$ e sobre as quais não tenhamos nenhuma informação adicional não podem satisfazer (1.11);

(iii) u deve ser duas vezes derivável com relação a t, sendo sua segunda derivada integrável em $[0,\ell]$, para cada t; por outro lado, sua primeira derivada deve satisfazer as mesmas condições (i) e (ii) acima;

(iv) devem ser bem definidos os valores de u e $\dot{u}$ no instante $t = 0$, conforme exigido por (1.12):

(v) finalmente, como já foi observado no Exercício 1, o campo de deslocamentos u, como função de x, deve ser contínuo em cada instante t. Ou por outra, $\mathcal{D}$ deve ser, no mínimo, um espaço de funções contínuas, com derivada de quadrado integrável.

O objetivo do próximo capítulo é expor o contexto funcional que satisfaz os requisitos (i) a (v).

Colocam-se naturalmente agora as questões:

É o sistema (1-11) - (1-12) um problema matemático bem posto, no sentido de Hadamard?

Em caso afirmativo, como obter na prática sua solução?

Retém efetivamente o sistema matemático (1.11)-(1.12) as propriedades do sistema físico que se propõe a representar?

Tais pontos serão discutidos e respondidos ao longo dos demais capítulos.

7. Apêndice

Devemos obter uma expressão para a potência gerada pelas forças internas $\mathcal{P}_{(i)}$. O caminho que seguiremos é escrever o PPV na forma

$$\mathcal{P}_{(i)} = S \int_0^{\ell} (\delta\dot{u})\rho\, \ddot{u}\, dx - \mathcal{P}_{(e)} \tag{1.15}$$

Em (1.15), $\mathcal{P}_{(e)}$ é a potência gerada pelas forças externas,

$$\mathcal{P}_{(e)} = S \int_0^{\ell} (\delta\dot{u})\, F_{ext}^{(1)}\, dx + S\{[\delta\dot{u}]_{x=0}\, F(t) + [\delta\dot{u}]_{x=\ell}\, r(t)\}, \tag{1.16}$$

sendo que $F_{ext}^{(1)}$ engloba as duas forças externas que atuam em todo o corpo da estaca, g e f.

Ora, a eventual substituição de (1.16) em (1.15) não fornece uma definição satisfatória de $\mathcal{P}_{(i)}$, que ficaria expressa em termos das forças externas, e não da tensão interna.

No que segue, necessitaremos admitir as relações (1.17) e (1.18). O leitor pouco familiarizado não terá contudo dificuldade em aceitá-las e entender seu uso em casos simples. Por exemplo, (1.18) - a lei fundamental da Dinâmica - se reduz à equação de uma corda vibrante para $k_v = 0$.

O primeiro passo para a obtenção de $\mathcal{P}_{(i)}$ é notar que nos extremos $x = 0$ ou ℓ, tem-se

$$\sigma(x)\, n(x) = F_{ext}^{(2)}(x) \tag{1.17}$$

onde n é a normal exterior, $n(0) = -1$, $n(1) = +1$, e $F_{ext}^{(2)}$

engloba as forças externas aplicadas nas extremidades, F e r. Reescrevemos (1.17) com as fórmulas

(1.17a) $$-\sigma(0) = F(t),$$

(1.17b) $$\sigma(1) = r(t),$$

e as usamos, juntamente com (1.16) e

(1.18) $$\rho\,\ddot{u} = \sigma_x + F^{(1)}_{ext}$$

em (1.15), para obter

$$\mathcal{P}_{(i)} = S\int_0^{\ell} (\delta\dot{u})\{\sigma_x + F^{(1)}_{ext}\}dx - S\int_0^{\ell}(\delta\dot{u})\,F^{(1)}_{ext}\,dx$$

$$- S\{-[\delta\dot{u}]_{x=0}\,\sigma(0) + [\delta\dot{u}]_{x=\ell}\,\sigma(1)\}$$

(1.19) $$= -S\int_0^{\ell} (\delta\dot{u})_x\,\sigma\,dx\ ,$$

que é precisamente a expressão para $\mathcal{P}_{(i)}$ usada em (1.8).

CAPÍTULO II

PROPRIEDADES BÁSICAS DO MODELO

1. Espaços de Sobolev de funções reais

Nesta seção e na seguinte, introduzimos os espaços funcionais e a notação que usaremos, assim como enunciamos alguns resultados de que vamos necessitar.

Denotando por Ω o intervalo $(0,\ell)$, consideramos o espaço vetorial das funções reais sobre Ω, mensuráveis no sentido de Lebesgue e de quadrado integrável. Munido do produto interno

$$(v,w)_o = \int_\Omega v(x)w(x)dx \tag{2.1}$$

e da norma associada

$$|w|_o = (w,w)_o^{1/2} , \tag{2.2}$$

tal espaço é completo, sendo usualmente denotado por $L^2(\Omega)$. Contudo, usaremos eventualmente a notação $H^o(\Omega)$.

Consideremos agora no espaço $\dot{C}^1_*(\Omega)$, das funções reais continuamente deriváveis para as quais o produto interno

$$(v,w)_1 = (v,w)_o + (v_x,w_x)_o \tag{2.3}$$

é finito. A norma correspondente é

$$|w|_1 = \{(w,w) + (w_x,w_x)\}^{1/2} , \tag{2.4}$$

onde usamos a notação usual

$$w_x = dw/dx .$$

Tal espaço não é completo, como pode ser verificado, por exemplo, tomando para $\varepsilon \to 0$, as funções

$$\varphi_\varepsilon(s) = \begin{cases} |s| - \varepsilon/3 , & \text{se } |s| \geq \varepsilon , \\ s^2/\varepsilon - |s|^3/\varepsilon^2 , & \text{se } |s| \leq \varepsilon , \end{cases} \tag{2.5}$$

convenientemente transladadas para obter a configuração da Fig. 2.

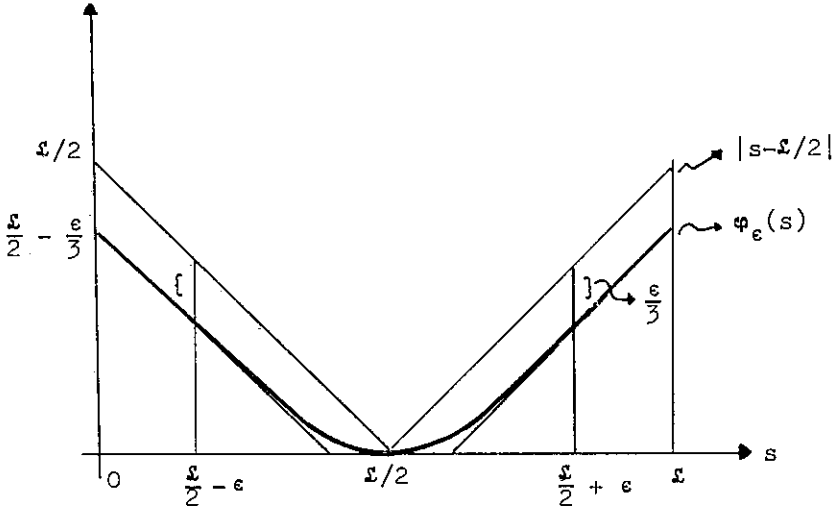


Fig. 2

Denotaremos por $H^1(\Omega)$ o completamento de $C^1_*(\Omega)$ no sentido da norma (2.4). Este é o espaço de Sobolev de ordem 1. Pode-se pensar em $H^1(\Omega)$ como um sub-espaço de $L^2(\Omega)$, e é esta

cômoda identificação que faremos sempre. (É mais fácil trabalhar com funções qtp que com classes de equivalência de funções!).

Em $H^1(\Omega)$ está definida a diferenciação da seguinte forma: o operador

$$D: C^1_*(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$
$$w \longrightarrow w_x$$

é linear e contínuo, logo uniformemente contínuo. Admite portanto uma (única) extensão contínua a todo $H^1(\Omega)$.

É neste sentido que, em geral, se introduz $H^1(\Omega)$ como o sub-conjunto de $L^2(\Omega)$ composto pelas funções cuja derivada também está em $L^2(\Omega)$. (Tal definição permanece vaga até se precisar o que seja a derivada de uma função definida qtp.)

Da mesma forma, é possível introduzir em $H^1(\Omega)$ o funcional de Dirac δ_x, para qualquer $x \in \Omega$: a desigualdade

$$(2.6) \qquad |w(x)| = \left|\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} w(s)ds + \int_{\xi}^{x} w_x(s)ds\right| \leq$$

$$\leq \ell^{-1/2}|w|_0 + \ell^{1/2}|w_x|_0 \leq \sqrt{2}\,\max\{\ell^{-1/2}, \ell^{1/2}\}|w|_1,$$

é válida para $w \in C^1_*(\Omega)$, sendo obtida através dos teoremas do valor intermediário e fundamental do cálculo, bem como da desigualdade de Schwarz. Assim, existe uma maneira inequívoca de atribuir um valor a w no ponto x, qualquer que seja $w \in H^1(\Omega)$ e $x \in \Omega$.

Uma outra conclusão: dados $x, y \in \Omega$ e $w \in C^1_*(\Omega)$, tem-se

$$(2.7)\qquad |w(x) - w(y)| = \left|\int_y^x w_x(s)ds\right| \le |x-y|^{1/2}|w_x|_o \le$$

$$\le |x-y|^{1/2}|w|_1 \ .$$

Portanto, $C_*^1(\Omega)$ é um espaço de funções uniformemente contínuas, conclusão, que se estende para $H^1(\Omega)$. Destacamos este fato, enunciando-o no

Teorema 1 (de Imersão) - Dada $w \in H^1(\Omega)$, é possível determinar (univocamente) $z \in C^o(\Omega)$, tal que $z = w$ qtp. Além disso, a aplicação $w \to z$ é contínua de $H^1(\Omega)$ em $C^o(\Omega)$ pois, para $C_\ell = \sqrt{2}\ \max\{\ell^{-1/2}, \ell^{1/2}\}$ vale

$$(2.6')\qquad \sup_{x\in\Omega} |z(x)| \le C_\ell |w|_1 \ .$$

As funções de $H^1(\Omega)$, definidas inicialmente no aberto Ω, podem ser estendidas para $\overline{\Omega}$, graças à continuidade uniforme, verificando-se (2.6) também para $x = 0$ ou L. Em outras palavras, vale o

Teorema 2 (do Traço) - É possível estender para $H^1(\Omega)$ os funcionais de Dirac δ_o e δ_ℓ definidos em $C^o(\overline{\Omega})$, sendo a extensão contínua, pois

$$(2.6'')\qquad |\delta_x[w]| \le C_\ell |w|_1 \ , \qquad x = 0 \ \text{ou} \ \ell, w \in H^1(\Omega) \ .$$

2. Espaços de Sobolev de funções vetoriais

Necessitamos também considerar espaços de funções definidas em $I = (0,T)$ e tomando valores vetoriais, do tipo

$$v:\ I \to H^p(\Omega)\ , \qquad p = 0 \quad \text{ou} \quad 1\ ,$$

que sejam mensuráveis, e para as quais

$$|v|_{L^2(I;H^p(\Omega))} = \left\{ \int_0^T |v(t)|_p^2\, dt \right\}^{1/2} < \infty\ , \tag{2.7}$$

ou

$$|v|_{L^\infty(I;H^p(\Omega))} = \sup_{0<t<T} \operatorname{ess}\ |v(t)|_p < \infty \tag{2.8}$$

Denotamos por $L^2(I;H^p(\Omega))$ e $L^\infty(I;H^p(\Omega))$ os espaços compostos das funções que satisfazem respectivamente (2.7) e (2.8). É precisamente através das expressões (2.7) e (2.8) que se definem as normas desses espaços. São eles também espaços completos, podendo a introdução do conceito da derivada $\dot{v}$ ser feita seguindo o mesmo caminho acima. E da mesma forma pode-se obter um teorema de imersão semelhante ao anterior.

Teorema 3 (de Imersão) - Se ambas $v, \dot{v} \in L^2(I;H^p(\Omega))$, existe uma função uniformemente contínua $w \in L^2(I;H^p(\Omega))$ que coincide com v qtp, valendo ainda

$$|v(t)|_{H^p(\Omega)} \le \left\{ |v|^2_{L^2(I;H^p(\Omega))} + |\dot{v}|^2_{L^2(I;H^p(\Omega))} \right\}^{1/2}\ , \quad t \in \bar{I}\ . \tag{2.9}$$

Fica claro, portanto, a possibilidade de, para uma função v que satisfaça as hipóteses do Teorema 3, determinar os "valores" $v(0)$, $v(T) \in H^p(\Omega)$.

É nesse contexto que a inequação (1.11) será estudada. Enfatizamos que os espaços envolvidos são escolhidos de forma consistente com as observações feitas na Seção I.6.

Dadas $u_o, v_o \in H^1(\Omega)$, f e F em espaços a ser especificados, buscamos uma função

$$u \in L^2(I; H^1(\Omega)) , \tag{2.10}$$

tal que

$$\dot{u} \in L^2(I; H^1(\Omega)) , \tag{2.11}$$

$$\ddot{u} \in L^2(I; H^1(\Omega)) , \tag{2.12}$$

e que satisfaça

$$u(0) = u_o , \tag{2.13}$$

$$\dot{u}(0) = v_o , \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \rho(\ddot{u}, v-\dot{u})_o + a_e(u_x, v_x-u_x)_o + k_e \delta_{\ell}[u]\ \delta_{\ell}[v-\dot{u}] \\ + a_v(\dot{u}_x, v_x-u_x)_o + k_v \delta_{\ell}[\dot{u}]\ \delta_{\ell}[v-\dot{u}] \\ + (\psi(u), |v|-|\dot{u}|)_o \geq (f, v-u)_o + \\ + F(t)\ \delta_o[v-\dot{u}] , \quad \forall\ v \in H^1(\Omega), \quad \forall\ t \in I , \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde

$$\psi(u) = cH(x+u-\ell)(x+u-\ell) = \tilde{\psi}(x+u-\ell) . \tag{2.16}$$

3. Características matemáticas da inequação

Introduzimos agora uma notação que é ao mesmo tempo mais compacta e serve para enfatizar certas propriedades dos diferentes termos de (2.15).

i) Suponhamos que, para cada $t \in I$, $f(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$. Então, por (2.6"), a aplicação $w \to (f,w)_o + F(t)\delta_o[w]$ é um funcional contínuo sobre $H^1(\Omega)$, ou seja pertence a $H^1(\Omega)^*$, o dual topológico de $H^1(\Omega)$. Denotamos então

$$\langle E|w\rangle_1 = (f(t),w)_o + F(t)\,\delta_o[w] \tag{2.17}$$

e, por abuso de notação, $E = E(t)$ denotará também o vetor de $H^1(\Omega)$ que satisfaz

$$(E,w)_1 = (f(t),w)_o + F(t)\,\delta_o[w], \quad \forall\, w \in H^1(\Omega), \tag{2.17'}$$

ii) A desigualdade de Schwarz juntamente com (2.6") nos permite deduzir a continuidade em $H^1(\Omega)$ da forma bilinear simétrica

$$A_e(z;w) = a_e(z_x,w_x)_o + k_e\delta_{\xi}[z]\,\delta_{\xi}[w] \ , \tag{2.18}$$

já que

$$|A_e(z;w)| \le a_e|z_x|_o|w_x|_o + k_e c_{\xi}^2|z|_1|w|_1 \le \beta_e|z|_1|w|_1 \ . \tag{2.19}$$

Por outro lado, para $w \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$|w(x)| = |w(\xi) - \int_x^{\xi} w_x(s)ds| \le |w(\xi)| + |w_x|_o|x-\xi|^{1/2},$$

conduz a

$$\int_0^{\ell} w(x)^2 dx \le 2 \int_0^{\ell} \{w(L)^2 + |w_x|_0^2 |x-\ell|\} dx \le 2\ell w(\ell)^2 + \ell^2 |w_x|_0^2 \quad .$$

Desta relação e de (2.18), decorre a existência de constantes positivas α_e, β_e , tais que

$$\alpha_e |w|_1^2 \le A_e(w;w) \le \beta_e |w|_1^2 \; ; \quad \forall \; w \in H^1(\Omega) \; . \tag{2.20}$$

De maneira análoga, se obtém para a forma bilinear simétrica

$$A_v(z,w) = a_v(z_x, w_x)_0 + k_v \delta_{\ell}[z] \; \delta_{\ell}[w] \tag{2.21}$$

a desigualdade

$$\alpha_v |w|_1^2 \le A_v(w;w) \le \beta_v |w|_1^2 \quad , \tag{2.22}$$

com $0 < \alpha_v < \beta_v$.

iii) O único termo não-linear da inequação é o funcional

$$J(z;w) = (\psi(z), |w|)_0 \; , \quad z,w \in L^2(\Omega) \quad , \tag{2.23}$$

cujas propriedades mais importantes enunciamos a seguir.

<u>Positividade</u>: $\forall \; z,w \in L^2(\Omega)$,

$$J(z;w) \ge 0 \; ; \tag{2.24}$$

<u>Continuidade</u>: $\forall \; z,v,w \in L^2(\Omega)$,

$$|J(z;v) - J(z;w)| \le J(z;v-w) \le c|z+\ell|_0 \; |v-w|_0 \quad , \tag{2.25a}$$

$$|J(v;z) - J(w;z)| \le (\tilde{\psi}(|v-w|), |z|)_0 \le c|z|_0 |v-w|_0 \; ; \tag{2.25b}$$

Convexidade direcional: $\forall\, z,v,w \in L^2(\Omega)$, $\forall\, \lambda \in [0,1]$,

$$\mu = 1-\lambda \ ,$$

$$J(z;\lambda w + \mu v) \leq \lambda J(z;w) + \mu J(z;v) \quad , \tag{2.26a}$$

$$J(\lambda z + \mu v;\ w) \leq \lambda J(z;w) + \mu J(v;w) \quad . \tag{2.26b}$$

Passamos então a escrever a inequação (2.15) na forma

$$\rho(\ddot{u},v-\dot{u})_0 + A_e(u;v-\dot{u}) + A_v(\dot{u};v-\dot{u}) + J(u;v) - J(u;\dot{u}) \geq (E,v-\dot{u})_1 \quad , \quad \forall\, v \in H^1(\Omega), \text{ qtp em } I. \tag{2.27}$$

No decorrer da exposição, tornar-se-á clara a necessidade de obter (2.20)-(2.26). Doravante, ao nos referirmos ao problema formado pelas hipóteses (2.10)-(2.12), pelas condições iniciais (2.13)-(2.14) e pela inequação variacional de evolução (2.27), mencionaremos apenas a (IVE). Não havendo possibilidade de confusão, deixaremos subentendido que o parâmetro t varia em I, ao menos qtp e, salvo menção explícita, suporemos $T < \infty$. (O caso $T = +\infty$ oferece interesse apenas didático, uma vez que as hipóteses que possibilitam seu exame não são compatíveis com o significado prático das variáveis envolvidas.)

4. Estabilidade e unicidade

Com as informações de que dispomos já podemos dar um primeiro passo na direção de justificar o nosso modelo: demonstrar

que a solução depende continuamente dos dados iniciais.

Com efeito, suponhamos que u_1 e u_2 satisfazem a (IVE) para os dados iniciais $\{u_o^{(1)}, v_o^{(1)}\}$ e $\{u_o^{(2)}, v_o^{(2)}\}$, respectivamente, isto é, para $i = 1,2$

$$u_i(0) = u_o^{(i)} \quad , \tag{2.28a}$$

$$\dot{u}_i(0) = v_o^{(i)} \tag{2.28b}$$

Portanto, qualquer que seja $v \in H^1(\Omega)$, se verificam as desigualdades

$$\rho(\ddot{u}_1,\dot{u}_1-v)_o + A_e(u_1;\dot{u}_1-v) + A_v(\dot{u}_1;\dot{u}_1-v) \leq \leq (E,v-\dot{u}_1)_1 + J(u_1;v) - J(u_1;\dot{u}_1) \quad , \tag{2.29a}$$

$$\rho(-\ddot{u}_2,v-\dot{u}_2)_o + A_e(-u_2;v-\dot{u}_2) + A_v(-\dot{u}_2;v-\dot{u}_2) \leq \leq (E,u_2-v)_1 - J(u_2;\dot{u}_2) + J(u_2;v) \; . \tag{2.29b}$$

Denotemos

$$z = u_1-u_2 \quad , \tag{2.30a}$$

$$z_o = u_o^{(1)}-u_o^{(2)} \quad , \tag{2.30b}$$

$$\dot{z}_o = v_o^{(1)}-v_o^{(2)} \; . \tag{2.30c}$$

É natural tomar nas desigualdades (2.29a) e (2.29b), $v = \dot{u}_2$ e $v = \dot{u}_1$, respectivamente, e adicioná-las para obter

$$\rho(\ddot{z},\dot{z})_o + A_e(z,\dot{z}) + A_v(\dot{z};\dot{z}) \le (\psi(u_1) - \psi(u_2), |\dot{u}_2| - |\dot{u}_1|)_o$$

$$\le (|\psi(u_1) - \psi(u_2)|, |\dot{z}|)_o \le c|z|_o|\dot{z}|_o \ ,$$

ou seja

$$(2.31) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\rho(\dot{z},\dot{z})_o + A_e(z;z)\} + A_v(\dot{z};\dot{z}) \le c|z|_o|\dot{z}|_o, \quad \forall\, t \in I.$$

Integramos (2.31) entre 0 e $t \le T$, levando em conta (2.30), e chegamos a

$$(2.32) \quad \rho|\dot{z}|_o^2(t) + A_e(z;z)(t) - \{\rho|\dot{z}_o|_o^2 + A_e(z_o;z_o)\} +$$

$$+ 2\int_o^t A_v(\dot{z};\dot{z})(\tau)d\tau \le 2c\int_o^t (|\dot{z}|_o|z|_o)(\tau)d\tau \le$$

$$\le c\int_o^t (|\dot{z}|_o^2 + |z|_o^2)(\tau)d\tau \ .$$

Finalmente, graças a (2.20)-(2.22), podemos concluir de (2.32) que

$$(2.33) \quad (|\dot{z}|_o^2 + |z|_1^2)(t) + \int_o^t |\dot{z}|_1^2(\tau)d\tau \le$$

$$\le \{\rho|\dot{z}_o|_o^2 + \beta_e|z_o|_1^2 + c\int_o^t (|\dot{z}|_o^2 + |z|_1^2(\tau)d\tau\}/\lambda \ ,$$

com $\lambda = \min\{\rho, a_e, a_v\}$. Em particular, vale

$$(2.33') \quad (|\dot{z}|_o^2 + |z|_1^2)(t) + \int_o^t |\dot{z}|_1^2(\tau)d\tau \le \frac{\rho+\beta_e}{\lambda}(|\dot{z}_o|_o^2 + |z_o|_1^2) +$$

$$+ \frac{c}{\lambda}\int_o^t \{(|\dot{z}|_o^2 + |z|_1^2)(\tau) + \int_o^\tau |\dot{z}|_1^2(s)ds\}d\tau, \quad \forall\, t \in I \ ,$$

desigualdade que, pelo lema de Gronwall, implica

$$(2.34)\qquad (|\dot{z}|_0^2 + |z|_1^2)(t) + \int_0^t |\dot{z}|_1^2(\tau) \leq K(|\dot{z}_0|_0^2 + |z_0|_1^2)e^{ct/\lambda}, \qquad t \in I$$

onde denotamos $K = \frac{\rho+\beta_e}{\lambda}$.

Sento $T < \infty$, utilizamos a notação $K' = Ke^{cT/\lambda}$ na seguinte descrição do resultado que acabamos de obter.

Teorema 4 (Estabilidade) - As soluções da (IVE) dependem continuamente (mais ainda, são funções lipschtzianas) dos dados iniciais. De uma forma precisa, supondo que existem soluções u_1 e u_2 da (IVE) sujeitas às condições iniciais (2.28a)-(2.28b), $z = u_1 - u_2$ depende das diferenças z_o e $\dot{z}_o$, definidas em (2.30), através da relação

$$(2.35)\qquad |z|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + |z|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + |\dot{z}|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq$$

$$\leq K'(|z_o|_o + |z_o|_1)\ ,$$

a constante K' dependendo apenas de ρ, α_e, α_v, β_e, c e T.

É evidente que a propriedade expressa no Teorema 4 implica que, existindo uma solução da (IVE), ela é única. Temos portanto o

Teorema 5 (Unicidade) - Existe no máximo uma função $v: I \to H^1(\Omega)$ que satisfaz a (IVE), para $T \leq \infty$.

Exercício 2 - Demonstre que a solução da (IVE) depende continuamente também dos dados f e F.

CAPÍTULO III

UMA PRIMEIRA ABORDAGEM: REGULARIZAÇÃO

1. Introdução

Formulado nosso modelo e deduzidas algumas de suas propriedades básicas, a questão a que nos propomos agora é a de obter a solução da (IVE). Para sermos corretos, propomo-nos a construir algorítmos que forneçam aproximações da solução com a precisão exigida pelo problema. Devemos portanto, além de encontrar o método para calcular estas soluções aproximadas, fazer sua análise teórica: um resultado típico a ser deduzido deve garantir que a diferença entre a solução e as aproximações numéricas - o erro na aproximação - pode ser mantido abaixo de um valor arbitrariamente pequeno, desde que determinadas condições sejam satisfeitas pelos parâmetros envolvidos.

Na prática, a exigência sobre o erro não é que ele seja arbitrariamente pequeno, é bem mais modesta: porque, em primeiro lugar, sabe-se que qualquer cálculo efetuado num computador carrega um erro que não pode ser diminuído abaixo de uma certa cota, é a "maldição do arredondamento"; por outro lado, os próprios dados que fornecemos, já os afetam imprecisões de medições; e, por último, o modelo mesmo foi construído desprezando a influência de alguns termos "pequenos", que certamente deveriam ser levados em conta ao se fazer uma análise mais "fina".

2. A solução como um ponto de mínimo

Reescrevendo a inequação (2.27) na forma

$$(3.1) \qquad \mathcal{B}(u;v) + J(u;v) \geq \mathcal{B}(u;\dot{u}) + J(u;\dot{u}) \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega) ,$$

- cremos a notação se auto-define - fica evidenciado ser o vetor $\dot{u} \in H^1(\Omega)$ um ponto de mínimo do funcional

$$\mathcal{V}_u(\cdot) = \mathcal{B}(u;\cdot) + J(u;\cdot) .$$

Suponhamos seja esse funcional derivável. Tem-se então que sua derivada em $\dot{u}$ é nula:

$$(3.2) \qquad \mathcal{V}_u'(\dot{u}) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\mathcal{B}(u;z) + J(u;z)\right]_{z=\dot{u}} = 0 .$$

Mas esta derivada é o funcional linear definido em $H^1(\Omega)$ por

$$w \to \mathcal{B}(u;w) + \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \left[J(u;z)\right]_{z=\dot{u}} \,\middle|\, w \right\rangle_1$$

e assim, segue de (3.2) que

$$(3.2') \qquad \mathcal{B}(u;w) + \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \left[J(u;z)\right]_{z=\dot{u}} \,\middle|\, w \right\rangle_1 = 0 , \qquad \forall\, w \in H^1(\Omega) .$$

Recordemos agora a convexidade de $J(u;\cdot)$ enunciada em (2.26). Sendo o operador $\mathcal{B}(u;\cdot)$ linear, portanto convexo, tem-se que $\mathcal{V}_u$ é também convexo. Ora, todo ponto estacionário de um funcional convexo é necessariamente um ponto de mínimo. Daí, chega-se à conclusão seguinte: (3.2') também implica (3.1), ou seja, a inequação variacional é equivalente à equação variacional (3.2').

A convexidade de J usada juntamente com fatos básicos sobre a derivada de Frechet em espaços normados nos permite assim trabalhar com uma equação variacional, um ente matemático que nos é certamente mais familiar que uma inequação variacional.

Sucede, porém, que os argumentos usados se baseiam na diferenciabilidade de ψ_u. E tal hipótese é falsa, devido à não diferenciabilidade de

$$\varphi(v) = |v| \ . \tag{3.3}$$

Contudo, o raciocínio exposto acima nos indica um possível caminho a seguir: substituir J por um funcional diferenciável J_ε que aproxime J, conservando, bem entendido, as demais propriedades de J. Espera-se, evidentemente, que a solução u_ε da equação obtida através de J_ε, também aproxime u. Esta é a chamada regularização, descrita na seção seguinte.

3. Regularização

Seja, para cada $\varepsilon > 0$; $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa de classe C^2, satisfazendo:

$$|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon \ , \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \ ; \tag{3.3a}$$

$$\varphi_\varepsilon(x) = 0; \quad \varphi_\varepsilon(x) \geq 0 \ , \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \ ; \tag{3.3b}$$

$$|\varphi'_\varepsilon(x)| \leq 1 \ , \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \ ; \tag{3.3c}$$

$$|\varphi''_\varepsilon(x)| \leq M, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \ , \text{ para algum } M > 0 \tag{3.3d}$$

$$(M = M(\varepsilon), \text{ eventualmente}).$$

Um exemplo de uma tal função foi apresentado em (2.5).

Exercício 3. Construa aproximações φ_ε para as quais

$$\sup_\varepsilon M(\varepsilon) < +\infty.$$

Definindo em $L^2(\Omega)$ o funcional

$$J_\varepsilon(z;v) = \int_0^\ell \psi(z)\, \varphi_\varepsilon(v)dx \quad , \tag{3.4}$$

calculemos sua derivada $\frac{\partial}{\partial v} J_\varepsilon(z;v)$. Para $w \in L^2(\Omega)$ arbitrária, tem-se

$$J_\varepsilon(z;v+w) - J_\varepsilon(z;v) = \int_0^\ell \psi(z)\, [\varphi_\varepsilon(v+w) - \varphi_\varepsilon(v)]\, dx =$$

$$= \int_0^\ell \psi(z)\, [\varphi'(v)\, w + \varphi''(v+\theta w)w^2/2]\, dx \ ,$$

com $0 < \theta(x) \leq 1$, do que se deduz que

$$\frac{\partial}{\partial v} J_\varepsilon(z;v) = \psi(z)\, \varphi'_\varepsilon(v) \tag{3.5}$$

A igualdade (3.5) significa: a derivada que calculamos é o funcional linear em $L^2(\Omega)$ associado com a função $\psi(z)\varphi'_\varepsilon(v) \in \in L^2(\Omega)$ pela fórmula

$$w \longrightarrow (\psi(z)\, \varphi'_\varepsilon(v),\, w)_0, \quad w \in L^2(\Omega) \ . \tag{3.6}$$

Devido à relação entre $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$, pode-se afirmar que a derivada de $J_\varepsilon(z;\cdot)$ em $H^1(\Omega)$ é dada pela mesma fórmula

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} J_\varepsilon(z;v) \mid w\right)_1 = (\psi(z)\, \varphi'_\varepsilon(v), w)_0 \ , \quad \forall\, w \in H^1(\Omega). \tag{3.7}$$

As relações (2.27) e (3.2), escritas para J_ε e u_ε

tomam a forma

$$(3.8)_\varepsilon \quad \rho(\ddot{u}_\varepsilon, v-\dot{u}_\varepsilon)_0 + A_\varepsilon(u_\varepsilon; v-\dot{u}_\varepsilon) + A_v(\dot{u}_\varepsilon; v-\dot{u}_\varepsilon) + J_\varepsilon(u_\varepsilon; v) - J_\varepsilon(u_\varepsilon; \dot{u}_\varepsilon) \geq (E, v-u_\varepsilon)_1 , \quad \forall\, v \in H^1(\Omega) ,$$

$$(3.9)_\varepsilon \quad \rho(\ddot{u}_\varepsilon, w)_0 + A_\varepsilon(u_\varepsilon; w) + A_v(\dot{u}_\varepsilon; w) + (\psi(u_\varepsilon)\, \varphi'_\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon), w)_0 = (E, w)_1, \quad \forall\, w \in H^1(\Omega) .$$

Assim passamos a partir de agora a analisar os <u>sistemas</u> variacionais regularizados equivalentes

$(IVR)_\varepsilon$: (2.10) - (2.14) e $(3.8)_\varepsilon$,

$(EVR)_\varepsilon$: (2.10) - (2.14) e $(3.9)_\varepsilon$

sendo evidente que as relações (2.10) - (2.14) são consideradas para u_ε.

A mesma demonstração do Teorema II.4.4 pode ser aplicada à $(IVR)_\varepsilon$, de modo que desde já enunciamos o

<u>Teorema 1</u> (Unicidade e Estabilidade) - Para cada $\varepsilon > 0$, existe no máximo uma função $u_\varepsilon : I \to H^1(\Omega)$ que satisfaz $(IVR)_\varepsilon$ - e portanto $(EVR)_\varepsilon$ -. Supondo que, para dados iniciais arbitrários $u_0, v_0 \in H^1(\Omega)$, exi<u>s</u>te sempre a correspondente solução u_ε , a dependência desta so<u>l</u>ução com relação os dados é contínua, sendo expressa por uma fór<u>m</u>ula semelhante à (2.35').

Assim, o sistema $(IVR)_\varepsilon$ até o momento se comporta bem, pois satisfaz as propriedades que demonstramos para (IVE). A nossa próxima etapa é, supondo que ambos os sistemas admitem uma solução, estimar a diferença entre elas.

4. O erro na regularização

Para estimar o erro que a regularização acarreta, usamos o mesmo caminho de demonstração do Teorema II.4.4. Tomamos $v=\dot{u}_\varepsilon$ em (2.27), $u = \dot{u}$ em $(3.8)_\varepsilon$, denotamos

$$v_\varepsilon = u-u_\varepsilon \quad , \tag{3.9}$$

observando desde já que

$$v_\varepsilon(0) = 0 \quad , \tag{3.9a}$$

$$\dot{v}_\varepsilon(0) = 0 \ . \tag{3.9b}$$

A adição das inequações obtidas para essa escolha de funções-teste v nos fornece

$$\rho(\ddot{v}_\varepsilon,\dot{v}_\varepsilon)_0 + A_\varepsilon(v_\varepsilon;\dot{v}_\varepsilon) + A_V(\dot{v}_\varepsilon;\dot{v}_\varepsilon) \le J_\varepsilon(u_\varepsilon;\dot{u}) - \tag{3.10}$$

$$- J_\varepsilon(u_\varepsilon;\dot{u}) + J(u;\dot{u}_\varepsilon) - J(u;\dot{u}).$$

Somamos e subtraimos, ao segundo membro de (3.10), o termo $\psi(u)[\varphi_\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon(\dot{u})]$ para obter

$$(3.11)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\rho(\dot v_\varepsilon,\dot v_\varepsilon)_0 + A_\varepsilon(v_\varepsilon;v_\varepsilon)\} + A_v(\dot v_\varepsilon;\dot v_\varepsilon) \le$$

$$\le \int_0^{\ell} \{\psi(u_\varepsilon)\ |\varphi_\varepsilon(\dot u)-\varphi(\dot u)| + |\psi(u)-\psi(u_\varepsilon)||\varphi(\dot u)-\varphi(\dot u_\varepsilon)|$$

$$+ \psi(u_\varepsilon)\ |\varphi(\dot u_\varepsilon)-\varphi_\varepsilon(\dot u_\varepsilon)|\}\,dx \le$$

$$\le c\int_0^{\ell} \{\varepsilon\psi(u_\varepsilon) + |v_\varepsilon||\dot v_\varepsilon| + \varepsilon\psi(u_\varepsilon)\}\,dx \le$$

$$\le 2c\varepsilon\ |u_\varepsilon+\ell|_0\,\ell^{1/2} + \frac{c}{2}\{|v_\varepsilon|_0^2 + |\dot v_\varepsilon|_0^2\}\ .$$

Após integrar (3.11) entre 0 e $t \le T$, levando (3.9) em consideração e tomando

$$(3.12a)\qquad C = c/\min\{\rho,\ \alpha_\varepsilon,\ \beta_v\}\ ,$$

$$(3.12b)\qquad C_1 = c\ell^{1/2}\sup_I\{|u_\varepsilon+\ell|_0\}\ ,$$

obtem-se

$$(3.13)\qquad (|\dot v_\varepsilon|_0^2 + |v_\varepsilon|_1^2)(t) + 2\int_0^t |\dot v_\varepsilon|_1^2\,(\tau)d\tau \le \varepsilon C_1 t +$$

$$+ C\int_0^t (|\dot v_\varepsilon|_0^2 + |v_\varepsilon|_1^2)(\tau)d\tau\ ,\quad \forall\ t\in I\ .$$

Novamente, o lema de Gronwall pode ser aplicado, como no Teorema II.4.4, implicando

$$(3.14)\qquad (|\dot v_\varepsilon|_0^2 + |v_\varepsilon|_1^2)(t) + \int_0^t |\dot v_\varepsilon|_1^2(\tau)d\tau \le \varepsilon C_1 t e^{Ct}\ ,\quad t\in I\ ,$$

da qual obtemos uma limitação uniforme em $[0,T]$:

$$(3.15)\qquad |v_\varepsilon|^2_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + |v_\varepsilon|^2_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + |\dot{v}_\varepsilon|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq$$

$$\leq \varepsilon C_1 T\ e^{CT}\ .$$

Para a desigualdade (3.15) representar algum interes se na estimativa do erro, é imprescindível que a constante C_1 independa de ε, isto é, que não só u e u_ε satisfaçam (2.10)-(2.11), como também que u_ε admita uma limitação superior independente de ε,

$$(3.16)\qquad \sup_{\varepsilon>0}\ \sup_{t\in I}\ |u_\varepsilon|_0(t) < \infty\ .$$

Demonstramos assim o

Teorema 2 (Aproximação) - Supondo a existência da solução u da (IVE) e, para cada $\varepsilon > 0$, da solução da $(IVR)_\varepsilon$, bem como a validade de (3.16)), deduz-se a existência constante $K > 0$, independente de ε, tal que

$$(3.17a)\qquad |u-u_\varepsilon|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} \leq K\varepsilon^{1/2}\ ,$$

$$(3.17b)\qquad |\dot{u}-\dot{u}_\varepsilon|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} \leq K\varepsilon^{1/2}\ ,$$

$$(3.17c)\qquad |\dot{u}-\dot{u}_\varepsilon|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq K\varepsilon^{1/2}\ .$$

A forma como K depende dos parâmetros $\ell, T, C, \alpha_e, \beta_v$ e ρ está indicada em (3.12a,b) e (3.15).

É suficientemente claro como modificar a demonstração

do Teorema 2 com o fim de estimar a direrença $u_{\varepsilon,\delta} = u_\varepsilon - u_\delta$ entre duas soluções aproximadas. Necessitaremos então impor no lugar de (3.16) a condição

$$(3.16') \qquad \sup_{\varepsilon>0} \sup_{t\in I} \{|u_\varepsilon|_o + |\dot{u}_\varepsilon|_o\}(t) < \infty \ ,$$

deduzindo-se que, quando $\varepsilon \to 0$, tem-se a convergência forte de u_ε , no sentido das normas envolvidas em (3.17), sem que, em nenhum passo, tenha sido a solução u da (IVE) envolvida.

Sendo $\tilde{u} = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$, se conseguirmos demonstrar que $\tilde{u}$ satisfaz a (IVE) , teremos ao mesmo tempo:

a) transformado a questão da existência da solução u da (IVE) na mesma questão, agora para u_ε solução de $(EVR)_\varepsilon$, $\forall\ \epsilon > 0$;

b) dado um primeiro passo para calcular aproximadamente u, qual seja, calcular aproximações para u_ε , com ε convenientemente escolhido.

Demonstraremos nas duas seções seguintes que, de fato, a estimativa (2.16') se verifica e que $\tilde{u} = u$, sempre fazendo a hipótese de que é possível resolver a $(EVR)_\varepsilon$, $\forall\ \epsilon > 0$.

5. Uma estimativa a priori

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, suponhamos seja u_ε a solução de $(EVR)_\varepsilon$. Tomamos $v = 0$ em $(3.8)_\varepsilon$ e obtemos

$$\rho(\ddot{u}_\varepsilon,\dot{u}_\varepsilon)_o + A_\varepsilon(u_\varepsilon;\dot{u}_\varepsilon) + A_v(\dot{u}_\varepsilon;\dot{u}_\varepsilon) + J_\varepsilon(u_\varepsilon;\dot{u}_\varepsilon) \leq (E,\dot{u}_\varepsilon)_1 .$$

Observamos que J é sempre positivo, do que decorre

$$(3.18)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\rho|\dot{u}_\varepsilon|_o^2 + A_e(u_\varepsilon;u_\varepsilon)\} + A_v(\dot{u}_\varepsilon;\dot{u}_\varepsilon) \le |E|_1|\dot{u}_\varepsilon|_1 ,$$

Da maneira usual, integramos (3.18) entre 0 e $t \le T \le \infty$, usando as condições iniciais (2.13)-(2.14), e $c = 1/\min\{\rho,\alpha_e,\alpha_v\}$, para concluir que

$$(3.19)\qquad (|\dot{u}_\varepsilon|_o^2 + |u_\varepsilon|_1^2)(t) + 2\int_o^t |\dot{u}_\varepsilon|_1^2\,(\tau)d\tau \le$$

$$\le C\{\rho|v_o|^2 + \beta_e|u_o|_1^2 + \int_o^T (\frac{|E|_1^2}{4} + |u_\varepsilon|_1^2)(\tau)d\tau\} ,$$

$$\forall\, t \in I ,$$

ou seja

$$(3.19')\qquad (|\dot{u}_\varepsilon|_o^2 + |u_\varepsilon|_1^2)(t) + \int_o^t |\dot{u}_\varepsilon|_1^2(\tau)d\tau \le$$

$$\le C\{\rho|v|_o|_o^2 + \beta_e|u_o|_o^2 + \frac{1}{4}\int_o^T |E|_1^2\,(\tau)d\tau\} .$$

A desigualdade (3.19') é chamada de uma <u>estimativa a priori</u>, terminologia que expressa a idéia de resultados deduzidos diretamente da equação, sem conhecermos ainda a solução, nem termos se quer garantido sua existência.

Surge agora, de modo natural uma primeira hipótese a fazer sobre f e F:

$$(3.20)\qquad f \in L^2(I;L^2(\Omega)) ,$$

$$(3.21)\qquad F \in L^2(I;\mathbb{R}) = L^2(I) ,$$

do que decorre

$$\int_0^T |E|_1^2 (\tau)d\tau \leq 2 \int_0^T (|f|_0^2 + C_{\Omega}^2 |F|^2)(\tau)d\tau \ . \tag{3.22}$$

Chegamos assim a um resultado mais forte do que (3.16'), qual seja, o

Teorema 3 (Estimativa I) - Existindo a solução u_ε da (EVR) , ela satisfaz necessariamente

$$|u_\varepsilon|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + |\dot{u}_\varepsilon|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + |\dot{u}_\varepsilon|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq K \ , \tag{3.23}$$

onde K é função dos dados iniciais, de f,F,Ω e dos parâmetros físicos, mas não depende nem de ε , nem de $T \leq \infty$. (É quase desnecessário mencionar que supomos válidas as hipóteses (2.13)-(2.14),(3.20)-(3.21).

6. Existência da solução da (IVE)

Usando a modificação que indicamos acima para o Teorema II.4.2, concluimos a existência de $\tilde{u} \in L^\infty(I;H^1(\Omega))$ e $\tilde{w} \in L^2(I;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(I;L^2(\Omega))$ para as quais se verificam as relações

$$\sup_{t\in I} |\tilde{u}(t) - u(t)|_1 \to 0 \ , \tag{3.24a}$$

$$\sup_{t\in I} |\tilde{w}(t) - \dot{u}(t)|_0 \to 0 \ , \tag{3.24b}$$

$$\int_0^T |\tilde{w}(t) - \dot{u}(t)|_1^2 \, dt \to 0 \ , \tag{3.24c}$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Graças à forma segundo a qual introduzimos a derivação nos espaços de Sobolev, como extensão de um operador contínuo (ver observação que antecede o Teorema II.2.3), deduz-se imediatamente que $\dot{\tilde{u}} \in L^2(I;H^1(\Omega))$ e

$$\dot{\tilde{u}} = \tilde{w} \quad , \tag{3.25}$$

igualdade que, juntamente com (3.24) nos informa que, para quaisquer $w \in H^1(\Omega)$ e $W \in L^2(I;H^1(\Omega))$, quando $\varepsilon \to 0$

$$A_\varepsilon(u_\varepsilon;w) \to A_\varepsilon(\tilde{u};w) \quad , \qquad t \in I \tag{3.26a}$$

$$u_o = u_\varepsilon(0) \to \tilde{u}(0) \therefore \tilde{u}(0) = u_o \tag{3.26b}$$

$$\int_o^T A_v(\dot{u}_\varepsilon;W)(t)dt \to \int_o^T A_v(\dot{\tilde{u}};W)(t)dt \ . \tag{3.26c}$$

A convergência de $\dot{u}_\varepsilon$, sendo em $L^2(I;H^1(\Omega))$, não nos permite ainda deduzir que $\dot{\tilde{u}}(0) = v_o$, como também vai nos obrigar a considerar a convergência dos demais termos na "forma fraca" expressa em (3.26c).

Estudemos a convergência do termo não-linear. Sendo $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\ell,T}$ o retângulo $(0,\ell) \times (0,T)$, deduzimos de (3.24)-(3.25) que

$$|u - \tilde{u}|_{L^2(\mathcal{R})} \to 0 \ , \tag{3.27a}$$

$$|\dot{u} - \dot{\tilde{u}}|_{L^2(\mathcal{R})} \to 0 \ , \tag{3.27b}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Assim, pelo menos para uma subsequência de u_ε, - para a qual manteremos a mesma notação -, se $\varepsilon \to 0$,

$$\left.\begin{array}{ll} u_\varepsilon \to \tilde{u} & \text{(3.28a)} \\ \dot{u}_\varepsilon \to \dot{\tilde{u}} & \text{(3.28b)} \end{array}\right] \quad \text{qtp em } \mathcal{R}$$

Em particular,

$$\psi(u_\varepsilon)\,\varphi_\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon) \to \psi(\tilde{u})\,\varphi(\dot{\tilde{u}}) \quad \text{qtp em } \mathcal{R} \tag{3.29}$$

e, como

$$|\psi(u_\varepsilon)\,\varphi(\dot{u}_\varepsilon)|(x) \le C(\mathcal{L} + |u_\varepsilon(x)|)|\dot{u}_\varepsilon(x)| \ ,$$

graças a (3.23) podemos recorrer ao Teorema da convergência Dominada de Lebesgue a fim de concluir:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T (\psi(u_\varepsilon),\ \varphi_\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon))_0(t)dt = \int_0^T (\psi(\tilde{u}),\varphi(\dot{\tilde{u}}))_0(t)dt, \tag{3.30a}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T (\psi(u_\varepsilon),\ \varphi_\varepsilon(W))_0(t)dt = \int_0^T (\psi(u),\ \varphi(W))_0(t)dt \ , \tag{3.30b}$$

$$\forall\ W \in L^2(I;H^1(\Omega)).$$

Obteremos informações sobre $\ddot{u}_\varepsilon$, escrevendo (3.8) para $v = -\ddot{u}_\varepsilon + \dot{u}_\varepsilon$:

$$\rho|\ddot{u}_\varepsilon|_0^2 + A_\varepsilon(u_\varepsilon;\ddot{u}_\varepsilon) + A_V(\dot{u}_\varepsilon;\ddot{u}_\varepsilon) \le (E,\ddot{u}_\varepsilon)_1 + J_\varepsilon(u_\varepsilon;\dot{u}_\varepsilon-\ddot{u}_\varepsilon) - J_\varepsilon(u_\varepsilon;\dot{u}_\varepsilon) \ , \quad t \in I \ .$$

Integramos essa desigualdade entre 0 e $t \le T$, usando nos termos $A_\varepsilon(\ddot{u}_\varepsilon;u_\varepsilon)$ e $(E,\ddot{u}_\varepsilon)_1$ a fórmula de integração por partes,

como também a propriedade (2.25a) de J_ε nos termos não lineares, e chegamos a:

$$\rho \int_o^t |\ddot{u}_\varepsilon|_o^2(\tau)dt + A_e(u_\varepsilon;\dot{u}_\varepsilon)\Big]_{\tau=0}^t - \int_o^t A_e(\dot{u}_\varepsilon;\dot{u}_\varepsilon)(\tau)d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} A_v(\dot{u}_\varepsilon;\dot{u}_\varepsilon)\Big]_{\tau=0}^t \le (E,\dot{u}_\varepsilon)_1\Big]_{\tau=0}^t - \int_o^t (\dot{E},\dot{u}_\varepsilon)_1(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_o^t C|u_\varepsilon + \mathfrak{L}|_o|\ddot{u}_\varepsilon|_o(\tau)d\tau \quad ,$$

do que decorre

$$(3.31)\quad \rho \int_o^t |\ddot{u}_\varepsilon|_o^2(\tau)d\tau + \frac{\alpha_v}{2}|\dot{u}_\varepsilon|_1^2(t) \le \beta_e(|u_\varepsilon|_1|\dot{u}_\varepsilon|_1)(t) +$$

$$+ \beta_e|u_o|_1|v_o|_1 + \beta_e \int_o^t |\dot{u}_\varepsilon|_1^2(\tau)d\tau + \frac{\beta_v}{2}|v_o|_1^2$$

$$+ (|E|_1|\dot{u}_\varepsilon|_1)(t) + (|E(0)|_1|v_o|_1) + \int_o^t (|\dot{E}|_1|\dot{u}|_1)(\tau)d\tau$$

$$+ \frac{c}{4\gamma}\int_o^t |u_\varepsilon + \mathfrak{L}|_o^2(t)dt + \gamma\int_o^t |\ddot{u}_\varepsilon|_o^2(\tau)d\tau.$$

Esta última desigualdade nos orienta sobre hipóteses adicionais a fazer com relação a f e F, (ou seja, E) além de (3.20)-(3.21)

$$(3.32)\qquad \dot{f} \in L^2(I;L^2(\Omega)) \quad ,$$

$$(3.33)\qquad \dot{F} \in L^2(I;\mathbb{R}) = L^2(I) \quad .$$

Tomamos agora em (3.31), $\gamma = \rho/2$ e majoramos os termos que envolvem $|\dot{u}_\varepsilon|_1$ da forma usual,

$$\beta_e(|u_\varepsilon|_1|\dot{u}_\varepsilon|_1) \le \frac{\alpha_v}{8}\,|\dot{u}_\varepsilon|_1^2 + \frac{2\beta_e^2}{\alpha_v}\,|u_\varepsilon|_1^2 \quad ,$$

$$|\dot{E}|_1\,|\dot{u}_\varepsilon|_1 \le \frac{\alpha_v}{8}\,|\dot{u}_\varepsilon|_1^2 + \frac{2}{\alpha_v}\,|\dot{E}|_1^2 \quad .$$

para obter

$$\frac{\rho}{2}\int_0^t |\ddot{u}_\varepsilon|_0^2(\tau)d\tau + \frac{\alpha_v}{4}\,|\dot{u}_\varepsilon|_1^2(t) \le \tag{3.34}$$

$$\le K_1 + \frac{\alpha_v}{4}\int_0^t |\dot{u}_\varepsilon|_1^2(\tau)d\tau \quad , \quad t \in I \ .$$

Está claro que a constante K_1 em (3.34) depende das normas de E, $\dot{E}$, u_o, v_o e da estimativa previamente obtida (Teorema III.5.3). Uma aplicação, do lema de Gronwall a (3.34) nos permite enunciar o

Teorema 4 (Estimativa II) - Valendo as mesmas hipóteses do Teorema III.5.3, e mais (3.32)-(3.33), a solução u_ε satisfaz

$$|u_\varepsilon|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + |\dot{u}_\varepsilon|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} \le K_2 \quad , \tag{3.35}$$

onde a constante K_2 independe de ε, mas pode depender de T, bem como dos parâmetros que influenciam K em (3.23).

Conforme indicado na Ref. [13], é possível obter uma estimativa mais forte que (3.35), a qual contudo não será necessária para o tratamento de $\ddot{u}_\varepsilon$ que segue.

De acordo com (3.35), a família $\{\ddot{u}_\varepsilon\}$ permanece num con-

junto limitado de $L^2(I;L^2(\Omega))$. Contém ela, portanto, uma subsequência que converge, no sentido fraco, para algum $z \in L^2(I;L^2(\Omega))$, isto é, se $\varepsilon \to 0$,

$$(3.36) \qquad \int_0^T (\ddot{u}_\varepsilon, w)_0(t)dt \to \int_0^T (z,w)_0(t)dt, \quad \forall\, w \in L^2(I;L^2(\Omega)).$$

Pelo raciocínio já empregado acima, segue que $z = \ddot{\tilde{u}}$. Tomando o limite $(\varepsilon \to 0)$ em

$$(3.37) \qquad \int_0^T \{\rho(\ddot{u}_\varepsilon, w-\dot{u}_\varepsilon)_0 + A_e(u_\varepsilon; w-\dot{u}_\varepsilon) + A_v(\dot{u}_\varepsilon; w-\dot{u}_\varepsilon) +$$

$$+ (\psi(u_\varepsilon), \varphi_\varepsilon(w))_0 - (\psi(u_\varepsilon), \varphi_\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon))_0$$

$$- (E, w-\dot{u}_\varepsilon)_1\}(t)dt \geq 0 \quad , \quad \forall\, w \in L^2(I;H^1(\Omega)) \ ,$$

e apelando para (3.26a,c), (3.30) e (3.36), obtemos

$$(3.38) \qquad \int_0^T \{\rho(\ddot{\tilde{u}}, w-\dot{\tilde{u}})_0 + A_e(\tilde{u}; w-\dot{\tilde{u}}) + A_v(\dot{\tilde{u}}; w-\dot{\tilde{u}}) +$$

$$+ (\psi(\tilde{u}), \varphi(w))_0 - (\psi(\tilde{u}), \varphi(\dot{\tilde{u}}))_0 +$$

$$+ (E, w-\dot{\tilde{u}})_1\}(t)dt \geq 0, \quad \forall\, w \in L^2(I;H^1(\Omega)) \ ,$$

que é uma "forma fraca em t" de (2.27).

Recordamos agora o seguinte resultado (devido a Lebesgue):

"Dada $h \in L^1(\mathbb{R})$, definindo-se

$$h_\delta(s) = \frac{1}{2\delta} \int_{s-\delta}^{s+\delta} h(\sigma)d\sigma \ , \quad s \in \mathbb{R} \ ,$$

tem-se que

$$\lim_{\delta \to 0} h_\delta = h \quad \text{qtp.}"$$

O uso de (3.38), onde escolhemos

$$W_\delta(\tau) = \begin{cases} w & |\tau - t| \leq \delta \\ \dot{\tilde{u}} & |\tau - t| > \delta \end{cases},$$

com $w \in H^1(\Omega)$ arbitrária, nos fornece o seguinte

"$\forall\ \delta > 0, \quad \forall\ w \in H^1(\Omega), \quad \forall\ t \in I$,

$$h_{\delta,w}(t) = \frac{1}{2\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} \{\rho(\ddot{\tilde{u}}, w - \dot{\tilde{u}})_o + A_e(\tilde{u}; w - \dot{\tilde{u}}) + A_v(\dot{\tilde{u}}; w - \dot{\tilde{u}}) +$$

$$+ (\psi(\tilde{u}), \varphi(w))_o - (\psi(\tilde{u}), \varphi(\dot{\tilde{u}}))_o - (E, w - \dot{\tilde{u}})_1\}(\tau)d\tau \geq 0 \text{ " } ;$$

do que decorre, aplicando o resultado de Lebesgue, que $\tilde{u}$ satisfaz (2.27).

Apesar de havermos chegado a um resultado mais fraco que (2.12), o fato de $\ddot{\tilde{u}} \in L^2(I; L^2(\Omega))$ nos permite, se usado com (3.24c), (2.14) e (3.9b), deduzir a continuidade de $\dot{\tilde{u}}$ e que

$$\dot{\tilde{u}}(0) = v_o \tag{3.39}$$

sendo $\tilde{u}$ a solução da (IVE), portanto. Demonstramos assim o

Teorema 4 (Existência) - Supondo que, para cada $\varepsilon > 0$, existe a solução u_ε de $(EVR)_\varepsilon$, concluimos a existência da solução u da (IVE).

A hipótese do Teorema II.4.2 pode ser, portanto, enfraquecida, passando a ser a mesma do Teorema II.4.4.

Observação. Chamamos a atenção do leitor para o fato de que, apesar de em duas passagens de argumento garantirmos a

convergência apenas para uma certa subsequência de $\{u_\varepsilon\}$, na realidade, toda a família converge. O conhecimento deste fato é importante quando construimos aproximações e não estamos só interessados na mera dedução de existência da solução.

Com efeito, já que <u>toda</u> a família $\{u_\varepsilon\}$ é limitada, qualquer que seja a subsequência $\{u_\varepsilon\}$ que considerarmos, a ele se aplica o mesmo raciocínio utilizado. Assim, garantimos a existência de uma subsequência $\{u_\varepsilon\}$ convergente, cujo limite é necessariamente $\tilde{u}$. A conclusão é que nenhuma subsequência de $\{u_\varepsilon\}$ se pode manter "afastada" de $\tilde{u}$, o que implica a convergência de toda a família $\{u_\varepsilon\}$.

CAPÍTULO IV

SEMI-DISCRETIZAÇÃO: PASSAGEM À DIMENSÃO FINITA

1. Introdução

A técnica de regularização introduzida no capítulo anterior, sem dúvida simplifica o problema, mas está longe de nos fornecer sua solução. Essencialmente, chegamos a uma equação diferencial ordinária no espaço $H^1(\Omega)$, ou seja, a um sistema diferencial com um número infinito de equações. (Para ser preciso, trata-se da forma fraca de uma equação diferencial).

Em geral, o cálculo da solução deste problema está fora de cogitações: o universo do computador é finito, não comportando uma infinidade de parâmetros. A alternativa que nos resta é dar mais um passo na direção de simplificá-lo, passando a um segundo nível de aproximação; considerar a $(EVR)_\varepsilon$ não em $H^1(\Omega)$, mas em espaços de dimensão finita que aproximem $H^1(\Omega)$ com a precisão que desejamos, na forma descrita na próxima seção.

Em todo este capítulo, bem como no seguinte, $\varepsilon > 0$ será mantido fixo, sendo previamente escolhido.

2. A equação aproximada

Com o parâmetro $h > 0$ podendo assumir valores arbitrariamente pequenos, seja $\{V_h\}$ uma família de subespaços de $H^1(\Omega)$, todos com dimensão finita

(4.1) $$\dim V_h = N_h \ .$$

Exige-se de $\{V_h\}$ que satisfaça a propriedade: "Dado $v \in H^1(\Omega)$, arbitrário, existe, para cada valor de h, $v_h \in V_h$ tal que

(4.2) $$\lim_{h\to 0} |v_h - v|_1 = 0 \quad " \ .$$

Já se sabe que pelo menos uma tal família existe, já que $H^1(\Omega)$ é um espaço separável.

Seja $\{w_1, w_2, \ldots\}$ um sistema ortogonal completo, ou seja, que verifica

(4.3) $$w = \sum_{j=1}^{\infty} (w, w_j)_1 w_j \ , \qquad \forall\ w \in H^1(\Omega) \ ;$$

para $h = 1/N$, $N = 1,2,\ldots$, seja V_h o espaço gerado por $\{w_1, \ldots, w_N\}$, usando-se a notação

(4.4) $$w^i = (w, w_i)_1 \ , \quad i = 1,2,\ldots, \quad \forall\ w \in H^1(\Omega)$$

É claro que a família $\{V_h\}$ satisfaz a propriedade acima enunciada.

Consideraremos agora o seguinte problema de valor inicial para a equação variacional aproximada, denotada $(EVA)_{\varepsilon,h}$: "Determinar

$(4.5)_{\varepsilon,h}$ $$u_{\varepsilon,h} \in L^2(I; V_h)$$

tal que

$(4.6)_{\varepsilon,h}$ $\qquad \dot{u}_{\varepsilon,h} \in L^2(I;V_h)$,

$(4.7)_{\varepsilon,h}$ $\qquad \ddot{u}_{\varepsilon,h} \in L^2(I;V_h)$,

$(4.8)_{\varepsilon,h}$ $\qquad (u_{\varepsilon,h}(0),w) = (u_o,w)$, $\quad \forall\, w \in V_h$,

$(4.9)_{\varepsilon,h}$ $\qquad (u_{\varepsilon,h}(0),w) = (v_o,w)$, $\quad \forall\, w \in V_h$

e

$(4.10)_{\varepsilon,h}$ $\qquad \rho(\ddot{u}_{\varepsilon,h},w)_o + A_e(u_{\varepsilon,h};w) + A_v(\dot{u}_{\varepsilon,h};w) +$

$$+ (\psi(u_{\varepsilon,h})\, \varphi'_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon,h}),w)_o = (E,w)_1 \ , \quad \forall\, w \in V_h \ , \quad \text{qtp em } I".$$

Guia-nos a esperança de que seja válido um novo resultado de aproximação, semelhante ao Teorema III.4.2, qual seja

$(4.11)_\varepsilon$ $\qquad \lim_{h\to 0} |u_{\varepsilon,h} - u_\varepsilon| = 0 \ , \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \ .$

O leitor atento já terá observado a similaridade entre este procedimento e a resolução de uma equação diferencial parcial via expansão em termos de auto-funções (séries de Fourier). Mas, de qualquer maneira, não é clara a simplificação que a passagem de $H^1(\Omega)$ para V_h nos trouxe. Mostramos, na próxima seção, que $(EVA)_{\varepsilon,h}$ é equivalente a um problema de valor inicial para um sistema de N_h equações diferenciais ordinárias não-lineares, de $2^{a.}$ ordem.

3. Um sistema diferencial em $\mathbb{R}^{N_h}$ (método de Faedo-Galerkin)

A fim de simplificar as fórmulas e fixar idéias, utilizaremos nesta seção os espaços V_h, introduzidos na seção 2, através de uma base ortonormal, fixa de uma vez por todas. Todavia, deixamos claro que os resultados obtidos são válidos para quaisquer espaços V_h e que esta escolha não é, em geral, a melhor, do ponto de vista computacional. Sob este aspecto, a criteriosa escolha dos espaços V_h desempenha um papel muito importante. A ela voltaremos na seção 4.

Seja $h = 1/N$ fixo. Da escolha de V_h e da linearidade de (4.8)-(4.10) com relação às funções-teste $w \in V_h$ decorre que basta considerá-las para $w = w_1,\ldots,w_N$. Mais ainda, como por (4.4) e (4.6)

$$u_{\varepsilon,h}(t) = \sum_{i=1}^{N} u^i_{\varepsilon,h}(t)\, w_i \quad , \tag{4.12}$$

as equações (4.8)-(4.10) são reescritas na forma

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} (w_i,w_j)_1\, u^i_{\varepsilon,h}(0) = (u_o,w_j)_1 \quad , \qquad (4.13)\\ &\sum_{i=1}^{N} (w_i,w_j)_1\, \dot{u}^i_{\varepsilon,h}(0) = (v_o,w_j)_1 \quad , \qquad (4.14)\end{aligned}\right\} \quad j = 1,\ldots,N$$

e

$$(4.15)\qquad \rho \sum_{i=1}^{N} (w_i,w_j)_o \, \ddot{u}^i_{\varepsilon,h}(t) + \sum_{i=1}^{N} A_e(w_i,w_j)\, u^i_{\varepsilon,h}(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} A_v(w_i,w_j)\, \dot{u}^i_{\varepsilon,h}(t) +$$

$$+ (\psi(\sum_{i=1}^{N} u^i_{\varepsilon,h}(t)\, w_i)\, \varphi'_\varepsilon(\sum_{i=1}^{N} \dot{u}^i_{\varepsilon,h}(t)\, w_i), w_j)_o =$$

$$= (E(t),\, w_j)_1 \,, \qquad \text{para } j = 1,\ldots,N \text{ e } t \in I \,.$$

Reconhecemos em (4.13)-(4.15) um sistema do tipo

$$(4.13')\qquad U_{\varepsilon,h}(0) = \mathbb{w}_h^{-1}(P_h\, u_o) \,,$$

$$(4.14')\qquad \dot{U}_{\varepsilon,h}(0) = \mathbb{w}_h^{-1}(P_h\, v_o) \,,$$

$$(4.15')\qquad \mathbb{m}_h \ddot{U}_{\varepsilon,h}(t) + \mathbb{v}_h \dot{U}_{\varepsilon,h}(t) + \mathbb{a}_h U_{\varepsilon,h}(t) +$$

$$+ \mathbb{f}_{\varepsilon,h}(\dot{U}_{\varepsilon,h}(t);\, \dot{U}_{\varepsilon,h}(t)) = \mathbb{e}_h(t) \,,$$

onde usamos a notação:

$$(4.16)\qquad [U_{\varepsilon,h}(t)]_j = u^j_{\varepsilon,h}(t); \quad \text{(vetor-incógnita)} \,;$$

$$(4.17)\qquad [\mathbb{w}_h]_{i,j} = (w_i,w_j)_o \,; \quad \text{(matriz wronskiana)};$$

$$(4.18)\qquad [P_h v]_j = v^j \,, \quad \forall\, v \in H^1(\Omega), \quad \text{("projeção")} \,;$$

$$(4.19)\qquad \mathbb{m}_h = \rho \mathbb{w}_h \quad \text{(matriz de massa)} \,;$$

$$(4.20)\qquad [\mathbb{v}_h]_{i,j} = A_v(w_i;w_j) \quad \text{(matriz de amortecimento)} \,;$$

(4.21) $\qquad [R_h]_{i,j} = A_e(w_i;w_j)$ (matriz de rigidez) ;

(4.22) $\qquad [\mathcal{J}_{\varepsilon,h}(U;V)]_j = (\psi(\sum_{i=1}^{N} U^i w_i)\ \varphi'_\varepsilon(\sum_{i=1}^{N} V^i w_i), w_j)_o$,

para quaisquer $U = (U^i)$, $V = (V^i) \in \mathbb{R}^N$ (termo não-linear);

(4.23) $\qquad [\mathcal{E}_h]_j = (E,w_j)_1$ (termo independente) .

Subentende-se, claro, que i,j percorrem os valores $1,2,\ldots,N$ nas expressões (4.16)-(4.23).

Esta técnica de aproximar a forma fraca de uma equação de evolução (envolvendo espaços de dimensão infinita) por um sistema finito de equações ordinárias é conhecida na literatura como método de Faedo-Galerkin.

Somos agora tentados naturalmente a repetir os passos do Capítulo III. Duas dificuldades surgem, porém:

(i) As equações variacionais (4.8)-(4.10) são válidas apenas para $w \in V_h$ o que nos impede de, seguindo a demonstração dos Teoremas III.4.2 ou III.4.4, tomar como funções-teste tanto $\dot{u}_\varepsilon - \dot{u}_{\varepsilon,h}$ como $\dot{u}_{\varepsilon,h} - \dot{u}_{\varepsilon,k}$, já que $\dot{u}_\varepsilon \notin V_h$ e, ou bem $\dot{u}_{\varepsilon,h} \notin V_k$ ou $\dot{u}_{\varepsilon,k} \notin V_h$.

(ii) Não podemos levar ao computador o sistema (4.13)-(4.15) sem discretizar a variável t, de modo que um terceiro nível de aproximação ainda se faz necessário. Os resultados a que chegarmos no momento, terão que ser repetidos - e eventualmente modificados - no próximo nível.

Assim, dedicamos o resto do capítulo à discussão de uma po

derosa escolha dos espaços de aproximação V_h , os espaços de elementos finitos, deixando para o capítulo seguinte o estudo da discretização completa (em x e em t) da $(EVR)_\varepsilon$.

Desde já chamamos a atenção para o fato de serem as matrizes m_h, v_h e $\mathcal{R}_h$ simétricas e definidas positivas, fato que depende apenas das propriedades de A_e , A_v e de ser $\{w_i\}$ uma base de V_h , mas não dos espaços V_h em si.

4. Construção dos espaços de elementos finitos

Os espaços V_h , com que trabalhamos na seção anterior, fornecem uma notação cômoda, mas deixam em aberto a questão da escolha e cálculo dos elementos da base $\{v_i\}$. Sob o ponto de vista computacional, uma tal escolha de espaços V_h pode mesmo não ser conveniente - repare que $V_h \subset V_k$ se $h > k$, uma propriedade não necessariamente desejável.

Na escolha dos espaços V_h é preciso ter em mente a necessidade do cálculo das matrizes $m_h, v_h, \mathcal{R}_h, \mathcal{P}_h$ e $\mathcal{E}_h$ de uma forma eficiente e precisa, bem como que propriedades destas matrizes podem mesmo vir a simplificar o sistema numérico. Tal é o caso, por exemplo, quando tais matrizes são espassas, i.e., com grande quantidade de elementos nulos, dispostos numa configuração vantajosa. A este ponto, voltaremos mais tarde.

O cálculo da solução $u_{\varepsilon,h}$ a partir dos coeficientes obtidos deve também satisfazer as mesmas exigências. Por fim, mas de forma alguma é este o aspecto menos importante, preocupa-nos a ordem de convergência no limite (4.2).

Para o analista numérico, o engenheiro, ou quem quer que deseje chegar a aplicações fazendo uso de computadores digitais, os "elementos finitos" são atualmente um instrumento semelhante às réguas de cálculo e às espessas tabelas de antanho. Sua utilização foi sugerida pela primeira vez em 1943 , num trabalho matemático, Ref. [1] , mas foi só após sua (re)descoberta independente, na área da Engenharia Civil que eles passaram a gozar da atual popularidade, tendo sido submetidos ao crivo da análise matemática.

Descreveremos agora como aproximar $H^1(\Omega)$ por espaços de elementos finitos quadráticos.

Certas dificuldades técnicas, que ocorrem quando a região Ω tem dimensão ≥ 2, permanecem ocultas na presente discussão. Contudo, já são encontradiços neste contexto os aspectos mais relevantes destes espaços. Repete-se o ocorrido quando estudamos os espaços de Sobolev no Capítulo II: as demonstrações ali apresentadas não podem ser generalizadas para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $n \geq 2$ e $H^p(\Omega)$, $p > 1$, sem investirmos uma certa quantidade de trabalho, tanto para contornar algumas dificuldades técnicas como para achar a correta generalização – p. ex., para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $C^0(\Omega) \not\subset H^1(\Omega)$ – como estender, pois, o teorema de imersão?

Quando foram descobertos os elementos finitos na Engenharia Civil, pesquisava-se a simulação numérica do comportamento de estruturas complexas. A idéia em que repousa o método é dividir a estrutura a ser analisada em elementos menores (e mais simples) que a compõem, estudar o comportamento de cada um deles como inde

pendentes, e depois acoplá-los.

Seja $N > 0$ um inteiro arbitrário e consideremos uma partição $\mathfrak{I}$ de $[0,\ell]$ formada por N subintervalos (fechados e disjuntos) denominados <u>elementos</u> e denotados por e, $e \in \mathfrak{I}$. Os pontos extremos e médios de cada elemento e são os <u>nós</u> (nodos) deste elemento e os denotaremos por e_i , $e_1 < e_2 < e_3$. Tem-se

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e\in\mathfrak{I}} e \quad , \tag{4.24}$$

$$e \cap e' = \begin{cases} \phi & \text{ou} \\ \{e_i\} = \{e'_j\} \ , & \text{com } \{i,j\} = \{1,3\} \ . \end{cases} \tag{2.25}$$

E, sendo

$$h_e = e_3 - e_1 = \text{diam } e \tag{4.26a}$$

e

$$h = \max_{e\in\mathfrak{I}} \{h_e\} \quad , \tag{4.26b}$$

vale

$$|e_i - e_j| \leq h \quad , \quad \forall\, e \in \mathfrak{I}, \quad i,j = 1,2,3. \tag{4.27}$$

A própria definição (4.26) já enfatiza ser desnecessária a escolha de uma partição <u>regular</u>, composta de intervalos de igual comprimento. Tal escolha precisa mesmo ser evitada em alguns problemas, ver p. ex. a Ref. [6].

O espaço $V_h \subset H^1(\Omega)$ que construiremos é formado por funções contínuas que, dentro de cada elemento, coincidem com um po

linômio de grau ≤ 2.

Assim, cada função $v \in V_h$ fica completamente caracterizada pelos seus valores nos nodos e_i, $i = 1,2,3$, $e \in \mathfrak{I}$. Em particular, sendo $\phi_{e_i} \in V_h$ as <u>funções de forma</u> definidas para $e \in \mathfrak{I}$, $i,j = 1,2,3$ por

$$\phi_{e_i}(e_j) = \delta_{ij} \qquad (\delta = \text{delta de Kronecker}) , \tag{4.28}$$

e denotando

$$v_e^i = v(e_i) , \tag{4.29}$$

tem-se

$$v(x) = \sum_{i=1}^{3} v_e^i \, \phi_{e_i}(x) , \quad \forall\, v \in V_h , \quad x \in e. \tag{4.30}$$

Esta é a chamada <u>representação local</u> de v, válida apenas no elemento $e \in \mathfrak{I}$. Com relação a esta <u>base local</u>, v apresenta coeficientes bem simples: são os seus próprios valores nos 3 nodos e_i. Por outro lado, para qualquer elemento $e \in \mathfrak{I}$, as funções ϕ_{e_i} podem ser calculadas nos pontos do elemento e através das mesmas funções de interpolação $\theta_i : [-1,1] \to \mathbb{R}$, dadas por (ver Fig. 3)

$$\theta_1(s) = s(s-1)/2 , \tag{4.31a}$$

$$\theta_2(s) = 1-s^2 , \tag{4.31b}$$

$$\theta_3(s) = s(s+1)/2 , \tag{4.31c}$$

e das mudanças de coordenadas

$$\xi_e(x) = 2\,\frac{x-e_1}{e_3-e_1} - 1\,, \qquad x \in e\,, \tag{4.32a}$$

ou seja,

$$x_e(\xi) = [\xi(e_3-e_1) + e_3+e_1]/2\,, \qquad -1 \le \xi \le 1\,. \tag{4.32b}$$

De fato, vale

$$\phi_{e_i}(x) = \theta_i(\xi_e(x)), \qquad x \in e, \quad \forall\, e \in \mathcal{T}\,. \tag{4.33}$$

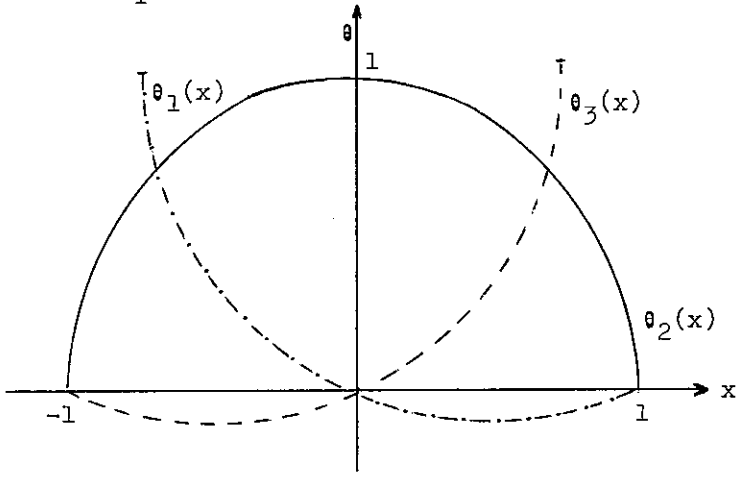


Fig. 3

Restringimo-nos agora a cada elemento $e \in \mathcal{T}$ e supomos que ele obedece à $(EVR)_\varepsilon$, ignorando o comportamento do resto da barra, desacoplamento. Assim, a nível de cada elemento, $u_{\varepsilon,h}$ é caracterizada, via (4.30), pelo vetor-coluna

$$u^e = u^e_{\varepsilon,h}(t) = (u^1_e,\ u^2_e,\ u^3_e)^\dagger \quad (\dagger = \text{transposto})\,, \tag{4.34}$$

para o qual obtemos um sistema análogo a (4.13')-(4.15), que es-

crevemos eliminando os índices ε e h:

$$(4.35)_e \qquad u^e(0) = (u_o(e_1),\ u_o(e_2),\ u_o(e_3))^\dagger \ ,$$

$$(4.36)_e \qquad \dot{u}^e(0) = (v_o(e_1),\ v_o(e_2),\ v_o(e_3))^\dagger \ ,$$

$$(4.37)_e \qquad \mathbb{m}^e\ddot{u}^e + \mathbb{v}^e\dot{u}^e + \mathbb{R}^e u^e + \mathcal{J}^e(u^e;\dot{u}^e) = \mathcal{E}^e \ , \quad t \in I \ .$$

Empregamos uma notação semelhante à de (4.19)-(4.23), qual seja,

$$(4.38) \qquad [\mathbb{m}^e]_{ij} = \rho \int_e \Phi_{e_i}(x)\ \Phi_{e_j}(x)dx \ ,$$

$$(4.39) \qquad [\mathbb{v}]_{ij} = a_v \int_e \Phi'_{e_i}(x)\ \Phi'_{e_j}(x)dx + k_v\ \delta_{e_i,e_j}\ \delta_{e_i,1} \ ,$$

$$(4.40) \qquad [\mathbb{R}^e]_{ij} = a_e \int_e \Phi'_{ei}(x)\ \Phi'_{e_j}(x)dx + k_e\ \delta_{e_i,e_j}\ \delta_{e_i,1} \ ,$$

$$(4.41) \qquad [\mathcal{J}^e(u^e;\dot{u}^e)]_i = c \int_e \psi(u_{\varepsilon,h})\ \varphi'_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon,h})\ \Phi_{e_i}(x)dx \ ,$$

$$(4.42) \qquad [\mathcal{E}^e]_i = \int_e f(x,t)\ \Phi_{e_i}(x)dx + F(t)\ \delta_{e_i,o} \ ,$$

onde $i,j = 1,2,3$, $e \in \mathcal{I}$ e δ = delta de Kronecker.

É útil observar que, de (4.33) e (4.32), seguem

$$(4.43) \qquad \int_e \Phi_{e_i}(x)\ \Phi_{e_j}(x)dx = \int_{-1}^{1} \theta_i(\xi)\ \theta_j(\xi)\ \frac{e_3-e_1}{2}\ d\xi =$$

$$= \frac{h_e}{2} \int_{-1}^{1} \theta(\xi)\ \theta_j(\xi)\ d\xi$$

e

$$(4.44) \qquad \int_e \phi'_{e_i}(x)\, \phi'_{e_j}(x)dx = \frac{2}{h_e}\int_{-1}^{1} \theta'_i(\xi)\, \theta'_j(\xi)d\xi \ ,$$

ou seja, as matrizes (4.38)-(4.40) são praticamente as mesmas em todos os elementos com exceção daquele que contém o ponto $x = 1$.

Está claro que, se $e \cap e' = \{e_i\} = \{e'_j\}$, devemos ter necessariamente $u^i_e = u^j_e$, condição que não pode decorrer dos sistemas $(4.37)_e$, que são desacoplados. É necessário acoplá-los, pois.

A notação introduzida em (4.28) é propositalmente ambígua: a mesma função ϕ aparece com índices distintos conforme um nó seja considerado como em um ou noutro elemento. Ora, a família $\{\phi_{e_i}\}_{i=1,2,3,\, e\in\mathfrak{I}}$ é uma base de V_h, com $N_h = 2N+1$ elementos, logo podemos indiciá-la na forma $\{\phi_j\}_{1\le j\le N_h}$, o que corresponde a reindiciar os nós; temos agora uma <u>indiciação</u> global $\{x_j\}_{1\le j\le N_h}$ e uma <u>representação global</u>

$$(4.45) \qquad u_{\varepsilon,h}(x,t) = \sum_{j=1}^{N_h} u_{\varepsilon,h}(x_j,t)\, \phi_j(x) \ .$$

A partir de (4.45) chega-se a (4.15') e correspondentes relações (4.16)-(4.23), com $w_j \equiv \phi_j$ e $N \equiv N_h$.

Como se ligam tais relações, ditas relações globais, e as equações locais, a nível de elementos ?

As funções ϕ_j apresentam os perfis da Figura 4. Assim, o suporte de cada uma delas interseciona no máximo o suporte de outras <u>quatro</u>, do que decorre que as matrizes m_h, ν_h e $\mathcal{R}_h$ têm

têm no máximo cinco elementos não nulos em cada linha (ou coluna, por simetria).

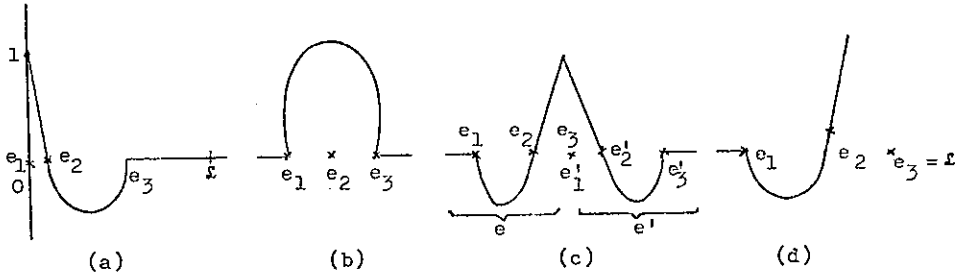


Fig. 4

Quando passamos para o nível dos elementos, as funções do tipo (c) na Fig. 4 - isto é, ϕ_j para x_j um nó comum a 2 elementos - foram "quebrados". Apenas um "pedaço" delas comparece nas relações (4.38)-(4.42), em cada elemento com um índice. Faz-se mister "soldá-las", já se vê. É o que se chama a montagem das equações locais.

Escolhendo a indiciação "natural"

$$0 = x_1 < \ldots < x_{2N} < x_{2N+1} = \ell \quad , \tag{4.46}$$

verifica-se que, sendo j ímpar, $1 < j < 2N+1$,

$$\phi_j = \phi_{e_3} = \phi_{e_1'}$$

para dois elementos contígnos e e e', e que

$$(\phi_{j-2},\ \phi_j)_o = \int_e \phi_{e_1}\, \phi_{e_3} \quad , \tag{4.47a}$$

(4.47b) $$(\Phi_{j-1}, \Phi_j)_o = \int_e \Phi_{e_2} \Phi_{e_3} \quad ,$$

(4.47c) $$(\Phi_{j+1}, \Phi_j)_o = \int_{e'} \Phi_{e'_1} \Phi_{e'_2} \quad ,$$

(4.47d) $$(\Phi_{j+2}, \Phi_j)_o = \int_{e'} \Phi_{e'_1} \Phi_{e'_3}$$

e

(4.47e) $$(\Phi_j, \Phi_j)_o = \int_e \Phi_{e_3} \Phi_{e_3} + \int_{e'} \Phi_{e'_1} \Phi_{e'_1} \quad ,$$

com relações semelhantes para Φ'_j .

Da mesma forma, usando a notação de (4.41) e (4.42) , vem

(4.48) $$\int_\Omega \psi(u_{\varepsilon,h})\, \varphi'_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon,h})\, \Phi_j(x)dx = [\mathcal{P}^e(u^e;\dot{u}^e)]_3 + [\mathcal{P}^{e'}(u^{e'};\dot{u}^{e'})]_1$$

e

(4.49) $$\int_\Omega f(x,t)\, \Phi_j(x)dx = [\mathcal{E}^e]_3 + [\mathcal{E}^{e'}]_1$$

(Observe que o suporte de Φ_j é $e \cup e'$).

A montagem é portanto simples, a partir de (4.15')-(4.23), (4.41)-(4.44) e (4.47)-(4.49), justificando-se o desacoplamento inicial pela facilidade que nos permite efetuar os cálculos a nível de elemento.

Em lugar de (4.13')-(4.14'), as condições iniciais passam a ser

$$u_{\varepsilon,h}(x_i,0) = u_o(x_i)\ , \tag{4.50}$$

$$\dot{u}_{\varepsilon,h}(x_i,0) = v_o(x_i)\ , \tag{4.51}$$

$$1 \le i \le N_h$$

A montagem pode ser ilustrada de uma forma ingênua pela Figura 5, onde pretendemos mostrar como, no caso em estudo, passamos dos sistemas correspondentes a dois elementos contígnos e e e' para o sistema global. Denotamos com + a soma dos e elementos correspondentes nas matrizes e por ~ a sua identificação.

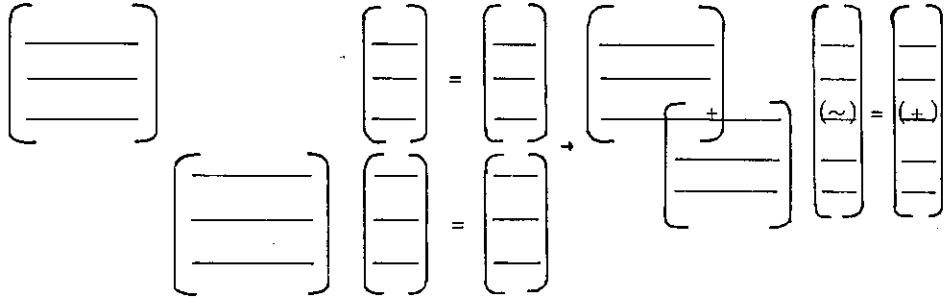


Fig. 5

Como já salientamos, certas facilidades advêm de ser unidimensional o problema tratado. Assim, foi instintivamente que tomamos as indicações $e_1 < e_1 < e_3$ e $x_j < x_{j+1}$. Tal escolha acarreta serem as matrizes de massa, $\mathbb{m}_h$, de amortecimento, $\mathbb{v}_h$, e de rigidez, $\mathbb{R}_h$, todas elas matrizes de banda, pentadiagonais, isto é,

$$a_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad |i-j| > 2, \quad a = \mathbb{m}_h\ ,\ \mathbb{v}_h \ \text{ ou } \ \mathbb{R}_h. \tag{4.52}$$

Fosse outra a indexação e tal não sucederia.

Em problemas bi ou tridimensionais, não existe uma indexação "natural" e uma das dificuldades na implementação é justamente obter uma indexação conveniente. Também a competência entre os índices locais e globais não é tão simples. A introdução das matrizes de incidência facilita a montagem, tendo este conceito sido oculto na simplicidade da presente discussão. Incentivamos o leitor a consultar a Ref. [12], onde o caso geral é examinado.

5. Propriedades da aproximação por elementos finitos

Já lembramos acima uma outra técnica de aproximação, a da expansão em termos de auto-funções. Com este método, passa-se de uma equação parcial para uma família de equações diferenciais ordinárias desacopladas. Nosso problema, sendo não-linear, não se tem a menor chance de chegar a uma situação tão simples. Porém, mesmo a parte linear de sistema (4.15') ou (4.37) é acoplada, já que as matrizes $\mathbb{M}_h$, $\mathbb{U}_h$ e $\mathbb{R}_h$ não são, em geral, diagonais.

É natural nos perguntarmos então, se vale a pena procurar uma base que diagonalize simultaneamente $\mathbb{M}_h$, $\mathbb{U}_h$ e $\mathbb{R}_h$. Sucede que uma tal base não apresentaria certamente as características do esquema construído na seção anterior e que passamos a descrever. (O leitor é instado a cotejá-las com as propriedades de uma base de senos e co-senos, ou funções de Bessel, por exemplo).

(a) A construção do espaço V_h independe, até certo ponto, do problema abordado. Melhor dizendo o mesmo espaço V_h é ainda o contexto correto para muitos outros problemas, o que

propicia a utilização de programas automáticos já existentes numa biblioteca.

(b) Apesar de não termos a ortogonalidade, as funções $\{\phi_j\}$ são "quase ortogonais", já que, por terem o suporte contido em, no máximo, dois elementos, as matrizes $\mathfrak{M}_h$, $\mathfrak{V}_h$ e $\mathfrak{R}_h$ têm uma banda estreita.

(c) O cálculo das funções ϕ_j, bem como a construção de $u_{\varepsilon,h}$, combinação linear dessas ϕ_j, é todo feito a nível de "hardware", sendo assim eficiente e preciso. Por outro lado, só com o cálculo dos coeficientes de $u_{\varepsilon,h}$ com relação a $\{\phi_j\}$ já temos muita informação, os valores de $u_{\varepsilon,h}$ nos modos x_j.

(d) Se desejarmos uma precisão maior numa sub-região de Ω, podemos <u>refinar</u> apenas os elementos desta sub-região, deixando inalterados os demais. (A implicação "refinamento ⇒ precisão", que é intuitiva, está implícita).

Resta agora responder a questão fundamental da aproximação, qual seja, a validade de (4.2). Denotaremos por

$$\Delta = \min_{e \in \mathcal{I}} \{h_e\} , \tag{4.53}$$

e para $v \in H^1(\Omega)$, definiremos $\pi_h(v) = v_h \in V_h$ por

$$v_h(x_j) = v(x_j) , \quad j = 1,\ldots,N_k \tag{4.54}$$

Então, para toda função $w \in C^2(\Omega)$, vale (ver [5])

(4.55) $$|w - \pi_h w|_1 \leq C(w) \frac{h^2}{\Delta} \quad .$$

Sendo $C^2(\Omega)$ denso em $H^1(\Omega)$, com um argumento tipo 2ε se conclui ser possível aproximar um elemento arbitrário $v \in H^1$ $v \in H^1(\Omega)$ por elementos de $\{V_h\}$, no sentido forte de (4.2).

Uma última observação: o resultado acima nos mostra não só que $H^1(\Omega)$ é separável, como também que as <u>projeções ortogonais</u> $P_h: H^1(\Omega) \to V_h$ definidas por

(4.56) $$(P_h u, v)_1 = (u,v)_1 \quad , \qquad \forall\, v \in V_h \quad ,$$

satisfazem

(4.57) $$\lim_{h \to 0} |u - P_h u|_1 = 0 \quad , \qquad \forall\, u \in H^1(\Omega) \quad ,$$

um fato a ser usado no Capítulo V.

CAPÍTULO V

DISCRETIZAÇÃO NO TEMPO: PASSAGEM AO NÍVEL DO COMPUTADOR

1. Introdução

Nosso objetivo agora é transformar o sistema diferencial a que chegamos na seção IV.3 em um problema que possa efetivamente ser resolvido, com o emprego do computador; em resumo, que só envolva as quatro operações aritméticas.

Para isto, discretizaremos as derivadas com relação à variável t que aparecem em (4.15), usando as chamadas diferenças finitas. Tal procedimento nos conduzirá a um sistema linear de N_h equações algébricas, tendo por incógnitas certas aproximações dos coeficientes $u^i_{\varepsilon,h}$, $1 \le i \le N_h$ -ver (4.12)-(4.15) - .

Assim, para cumprir as etapas descritas na Figura 6, faltará apenas a efetiva implementação do algorítmo num computador eletrônico. Nessa direção, alguns resultados numéricos foram obtidos, sendo eles descritos na seção V.4.

Escolhido $M > 0$, um inteiro arbitrário, tomaremos como passo,

$$k = T/(M+1) \quad , \tag{5.1}$$

e os níveis discretos de tempo

$$t_n = nk \quad , \quad 0 \le n \le M+1 \quad , \tag{5.2}$$

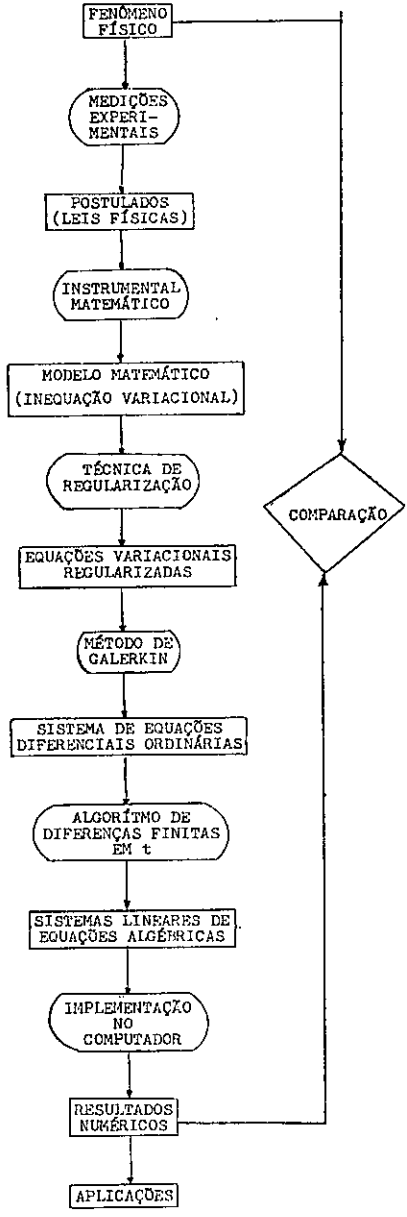

FENÔMENO FÍSICO
MEDIÇÕES EXPERI-MENTAIS
POSTULADOS (LEIS FÍSICAS)
INSTRUMENTAL MATEMÁTICO
MODELO MATEMÁTICO (INEQUAÇÃO VARIACIONAL)
TÉCNICA DE REGULARIZAÇÃO
EQUAÇÕES VARIACIONAIS REGULARIZADAS
MÉTODO DE GALERKIN
SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS
ALGORÍTMO DE DIFERENÇAS FINITAS EM t
SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS
IMPLEMENTAÇÃO NO COMPUTADOR
RESULTADOS NUMÉRICOS
APLICAÇÕES
COMPARAÇÃO

Fig. 6

usando a notação descrita em (5.2) para valores de n não necessariamente inteiros.

Para inteiros $0 \le j < q \le M+1$, será conveniente empregar a notação

$$I_j^q = \{j,\ j+1,\ldots,q-1,q\} \ , \tag{5.3}$$

e, dada uma função arbitrária s, definida em I, denotaremos

$$s^n = s(t_n) \ , \qquad n \in [0,M+1] \ . \tag{5.4}$$

As aproximações que vamos calcular são funções

$$U_{\varepsilon,h,k} \in L^2(I;V_h) \ , \tag{5.5}$$

para as quais será demonstrado que

$$U_{\varepsilon,h,k} \to u, \quad \text{se} \quad (\varepsilon,h,k) \to (0,0,0) \ , \tag{5.6}$$

num sentido a ser precisado posteriormente. Tais funções, nós as definiremos constantes em cada intervalo $[t_n,t_{n+1})$, $n \in I_o^M$, assim que elas ficarão caracterizadas a partir apenas dos valores

$$U^n = U^n_{\varepsilon,h,k} \tag{5.7}$$

Estando ε,h e k fixos, a partir de agora suprimiremos os índices, como em (5.7).

Apresentamos, nas fórmulas que seguem, a notação que utilizaremos para as diferenças finitas. Em todas elas entende-se que $k \to 0$ e que a função s possui a regularidade exigida para o emprego da expansão de Taylor que garante o comportamento assintótico indicado:

(5.8a) $$\delta_k\, s(t) = \frac{s(t+k)-s(t)}{k} = s'(t) + O(k) \quad ,$$

(5.8b) $$\delta_k\, s(t) = \frac{s(t+k)-s(t-k)}{2k} = s'(t) + O(k^2) \ ,$$

(5.8c) $$d_k\, s(t) = \frac{3s(t)-4s(t-k)+s(t-2k)}{2k} = s'(t) + O(k^2),$$

(5.8d) $$\delta_k^2\, s(t) = \frac{s(t+k)-2s(t)+s(t-k)}{k^2} = s''(t) + O(k^2).$$

Necessitaremos também da média ponderada

(5.8e) $$M_k^p\, s(t) = ps(t+k)+(1-2p)\, s(t) + ps(t-k) = s(t)+O(k^2) \ ,$$

$$0 \leq p \leq 1/2.$$

Observe o leitor as relações

(5.8f) $$\delta_k s^n = (\delta_k s^n + \delta_k s^{n-1})/2 \quad ,$$

(5.8g) $$\delta_k^2 s^n = (\delta_k s^n - \delta_h s^{n-1})/k = 2(\delta_h s^n - \delta_h s^{n-1})/k \ ,$$

(5.8h) $$d_k s^n = (3\delta_k s^{n-1} - \delta_k s^{n-2})/2 = \delta_k s^{n-1} + k\delta_k^2 s^{n-1} \quad ,$$

(5.8i) $$\delta_k s^n = \delta_{k/2}\, s^{n+1/2} = s'(t_{n+1/2}) + O(k^2) \ ,$$

e ainda que

(5.8j) $$\delta_k s(t-k) = s'(t) + O(k) \ .$$

2. Um esquema não-linear

Reecrevamos $(4.10)_{\varepsilon,h}$ eliminando os índices,

(5.9) $$\rho(\ddot{u},w)_o + A_e(u;w) + A_v(\dot{u};w) + (\psi(u)\varphi'_\varepsilon(\dot{u}),w)_o =$$

$$= (E,w)_1 \ , \quad \forall\, w \in V_h \ , \quad t \in I \ ,$$

e observemos que, baseada em (5.8), uma boa discretização de (5.9) seria

$(5.10)_n$ $$\rho(\delta_k^2 U^n,w)_o + A_e(U^n;w) + A_v(\delta_k U^n;w) +$$

$$+(\psi(U^n)\varphi'_\varepsilon(\delta_k U^n),w)_o = (E^n,w)_1 \ , \quad \forall\, w \in V_h, \quad n \in I_1^M ,$$

pois ela implica, supondo $U = U_{\varepsilon,h,k}$ suficientemente regular, que

$(5.11)_n$ $$\rho(\ddot{U}^n,w)_o + A_e(U^n;w) + A_v(\dot{U}^n;w) + (\psi(U^n)\varphi'_\varepsilon(\dot{U}^n),w)_o =$$

$$= (E^n,w)_1 + (e^n,w), \quad \forall\, w \in V_h \ , \quad n \in I_1^M \ ,$$

com $e = O(k^2)$. Ou seja, que U satisfaz a equação aproximada (5.9), a menos de um erro da ordem de k^2, para os níveis $t = t_n$, $n \in I_1^M$.

Está claro que sendo U seccionalmente constante, não temos (5.11), mas ainda assim podemos sistematizar o raciocínio acima, fazendo o caminho inverso: consideramos uma solução exata

de (5.9), suposta suficientemente regular, e verificamos que ela satisfaz $(5.10)_n$, a menos de um erro da ordem de k^2. Diz-se então que (5.10) é uma discretização de (5.9) consistente, sendo sua precisão local da ordem de k^2.

A equação (5.10) envolve três níveis, t_{n-1} , t_n , t_{n+1}. E não poderia ser de outra forma, devido à presença da derivada segunda de u em (5.9). Por outro lado, sendo a aproximação para u de segunda ordem, é natural tolerar para $\dot{u}$ um erro também quadrático, com relação a k, daí tomarmos $\delta_k U^n$ como aproximação para $\dot{u}^n$

A idéia é que este seja um esquema evolutivo ao longo dos níveis t_n , sendo U^{n+1} calculada a partir dos valores U^j , $j \in I_o^n$. Como a equação (5.10) pode ser reescrita na forma

$$(5.10')_n \qquad \rho(U^{n+1},w)_o + kA_v(U^{n+1},w)/2 +$$

$$+ k^2(\psi(U^n)\varphi'_e(U^{n+1}/2k - U^{n-1}/2k),w)_o =$$

$$= k^2(E^n,w)_1 - k^2A_e(U^n;w) + \rho(2U^n-U^{n-1},w)_o +$$

$$+ kA_v(U^{n-1};w)/2, \quad \forall\, w \in V_h \qquad n \in I_1^m \ ,$$

vê-se que, em cada nível t_n , $(5.10')_n$ é equivalente a um sistema algébrico não-linear de N_h equações nos coeficientes de U^{n+1} com relação a uma dada base de V_h ; é o raciocínio já discutido no Capítulo IV. A não linearidade é devida ao termo $\varphi'_e(\delta_k U^n)$ e é ela que nos separa do cumprimento da promessa feita no segundo parágrafo de V.1: chegar a um sistema algébrico linear.

Existem, contudo, métodos iterativos extremamente eficazes para a resolução de (5.10), que nos permitem considerar sua solução um problema resolvido a nível do computador, e definir o seguinte algorítmo de aproximação para a (IVE):

ALGORÍTMO 1. Escolhidos $\epsilon > 0$, o espaço V_h e um inteiro $M > 0$, e sendo $k(M+1) = T$, calcule-se U como a função-escada, constante em $[t_n, t_{n+1})$, caracterizada por:

$$U^n \in V_h ,$$

$$(U^0, w)_1 = (u_0, w)_1 , \quad \forall\, w \in V_h , \tag{5.12}$$

$$(U^1, w)_1 = (u_0 + kv_0, w)_1 , \quad \forall\, w \in V_h , \tag{5.13}$$

e como a solução U^{n+1} de $(5.10)_n$, para $n-1 \in I_1^M$.

Duas questões devem ser postas a esta altura:

(a) Pode efetivamente $(5.10')_n$ ser sempre resolvida, isto é, pode o sistema discreto evoluir em todos os níveis t_n, $n \in I_1^M$?

(b) Verifica-se de fato (5.6), a convergência de U para u?

Estas questões podem ser respondidas (afirmativamente) mas as deixaremos em suspenso até a seção V.7.

3. Um esquema linear

A partir das observações da seção anterior, já antevê o leitor uma das alternativas que se nos apresentam: utilizar no

termo não-linear, em lugar de $\delta_k U^n$, a discretização $d_k U^n$ definida em (5.8c). Continuamos simulando a equação (5.9) com um erro da ordem de k^2 , mas estamos agora com um problema linear:

$$(5.14)_n \qquad \rho(\delta_k^2 U^n, w)_o + A_e(U^n; w) + A_v(\delta_k U^n; w) =$$

$$= (E^n, w)_1 - (\psi(U^n)\varphi_\epsilon'(d_k U^n), w)_o \,, \quad \forall\, w \in V_h \,,$$

ou seja,

$$(5.14')_n \quad \rho(U^{n+1}, w)_o + kA_v(U^{n+1}; w)/2 = k^2(E^n, w)_1 - k^2 A_e(U^n; w)$$

$$+ \rho(2U^n - U^{n-1}, w)_o + kA_v(U^{n-1}; w)/2 -$$

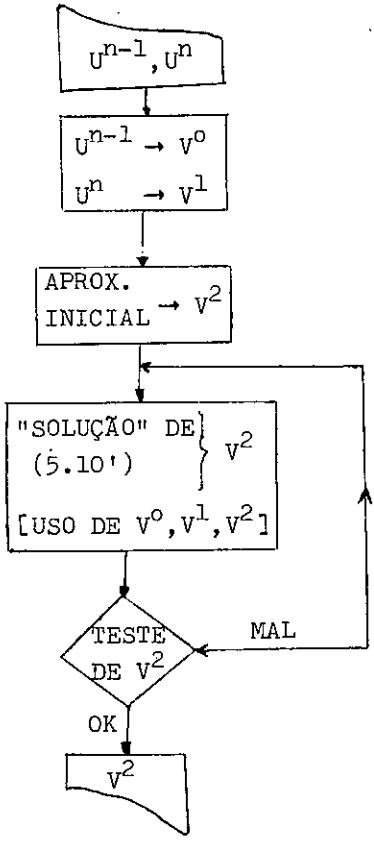
$$- k^2(\psi(U^n)\,\varphi_\epsilon'([3U^n - 4U^{n-1} + U^{n-2}]/2k), w)_o \,,$$

$$\forall\, w \in V_h \,.$$

Aparentemente, sob o ponto de vista computacional houve uma troca entre esforço e memória: trocamos um problema que envolve 3 níveis, mas só pode ser resolvido iterativamente - logo com um grande volume de cálculo - por outro, que pode ser resolvido diretamente, sem iterações, mas que exige a armazenagem dos valores de U em 4 níveis: de t_{n-2} a t_{n+1}. Na realidade, o sistema (5.14') requer a armazenagem simultânea de apenas 3 níveis: porque, calculado o 2º membro de $(5.14')_n$, U^{n-2} pode ser descartado, passando-se ao cálculo de U^{n+1}. Por outro lado, durante todo o processo iterativo para o cálculo de U^{n+1} através de $(5.10')_n$, necessitamos manter simultaneamente armazenados U^{n-1} , U^n e pelo menos um dos sucessivos iterados $U^{n+1}_{(j)}$ (ver Fig. 7).

ALGORÍTMO 1

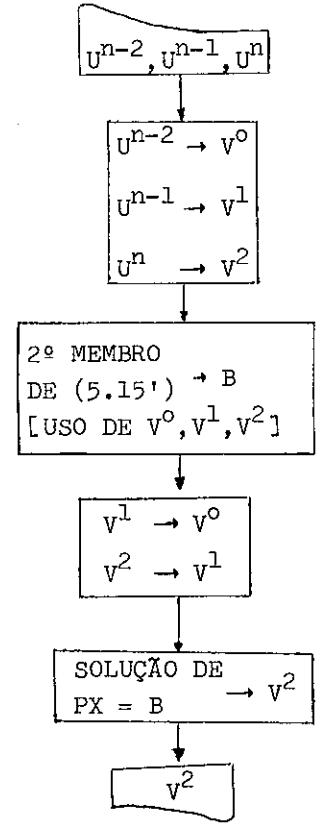
Subrotina que calcula U^{n+1}, dados U^n, U^{n-1}



(a)

ALGORÍTMO 2

Subrotina que calcula U^{n+1}, dados U^n, U^{n-1}, U^{n-2}



(b)

Fig. 7

Seguindo uma tradição herdada dos esquemas que discretizam todas as variáveis independentes com diferenças finitas, diz-se que (5.14) define um esquema explícito: é que o termo elítico A_e não atua sobre U^{n+1}.

Por razões justificadas a posteriori, consideraremos também os esquemas ditos implícitos:

$$(5.15)_{n,p} \qquad \rho(\delta_k^2 U^n, w)_o + A_e(M_k^p U^n; w) + A_v(\delta_k U^n; w) = (E^n, w)_1 - (\psi(U^n)\, \varphi_e'(d_k U^n; w), w)_o$$

$$\forall\, w \in V_h\,, \quad n \in I_1^M, \quad p \in (0, 1/2].$$

Está claro que (5.14) nada mais é que (5.15) para $p = 0$. Por outro lado, escrevendo-se (5.15) na forma

$$(5.15')_{n,p} \qquad \rho(U^{n+1}, w)_o + k^2 p A_e(U^{n+1}; w) + k A_v(U^{n+1}; w)/2 = k^2 (E^n, w)_1 - (\psi(U^n)\varphi_e'(d_k U^n), w)_o - k^2 A_e([2-p]\, U^n + p U^{n+1}; w) + k A_v(U^{n-1}; w)/2 \,,$$

e nos reportando aos cálculos da seção IV.3, fica evidenciado ser a matriz do sistema (5.15') dada por

$$(5.16) \qquad \mathcal{P}_{h,k,p} = \mathcal{M}_h + k\mathcal{V}_h/2 + k^2 p \mathcal{R}_h \,,$$

que é simétrica, definida positiva.

Por conseguinte, está bem definido o

ALGORÍTMO 2. Escolhidos $\varepsilon > 0$, o espaço V_h, um inteiro $M > 0$, o parâmetro $p \in [0, 1/2]$, e sendo $k(M+1) = T$, defina-se U como a função-escada, constante em $[t_n, t_{n+1})$, caracterizada por $U^n \in V_h$ e:

$$\left.\begin{array}{ll} (5.17) & (U^o,w)_1 = (u_o,w)_1 \\ (5.18) & (U^1,w)_1 = (u_o+kv_o,w)_1 \\ (5.19) & (U^2,w)_1 = (u_o+2kv_o,w)_1 \end{array}\right] \quad \forall\, w \in V_h$$

e a solução U^{n+1} de $(5.15)_n$, para $n \in I_2^M$.

Um aspecto deve ser mencionado: de nível para nível a mudança no sistema linear algébrico a ser resolvido é apenas o 2º membro. Assim, a matriz $\mathcal{P}_{h,k,p}$ é triangularizada de uma vez por todas, sendo efetuada em cada nível apenas a parte mais econômica da resolução.

4. Resultados numéricos

Implementamos o algorítmo 2, tomando os espaços V_h de elementos finitos quadráticos, com 3 nós, descritos em IV.4. Em todos os exemplos, escolheu-se uma partição regular de 5 elementos, de sorte que

$$h = 1/10 \ , \quad N_h = 11 \ .$$

A função φ_ε foi aquela descrita em (2.5), tomando-se para os parâmetros ε e p os valores

$$\varepsilon = 10^{-7}, \quad p = 1/4 \ .$$

Exemplo 1. Na ausência do termo não-linear, a (EVR) descreve o movimento de uma barra sujeita a forças de tração ou compressão. Trata-se de um problema bem conhecido, que pode fornecer os primeiros testes para verificação tanto do modelo como do programa de computação. Assim, neste primeiro exemplo, estudamos uma barra engastada (fixa no extremo $x = 0$) e sujeita a uma força de tração $F = 1$, aplicada no extremo $x = \ell$. Não se considera a força de massa f, o que significa, fisicamente, tomar a barra na posição horizontal, desprezando-se a flexão vertical. Tampouco se leva em conta a resistência do solo, assim que

$$k_e = 0, \quad k_v = 0 .$$

Por fim, os valores tomados para o comprimento, a área da seção e o coeficiente de elasticidade da barra foram

$$\ell = 10, \quad S = 1, \quad a_e = 1 ,$$

e fizemos o coeficiente de viscosidade variar:

(i) $a_v = 0$ (elasticidade perfeita, nenhum amortecimento),

(ii) $a_v = 1$ (algum amortecimento),

(iii) $a_v = 10$ (grande amortecimento).

O gráfico das aproximações que calculamos para $u(\ell,t)$, com $k = 1/10$ está nas Figs. 8 e 9.

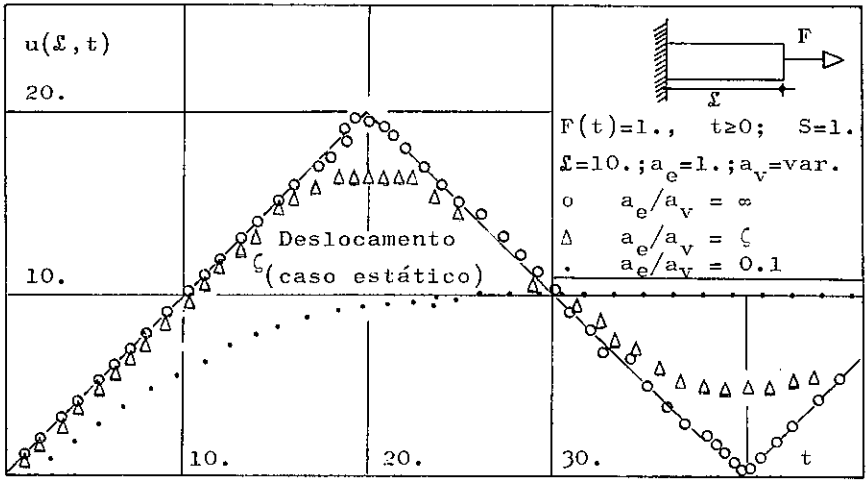


FIG. 8

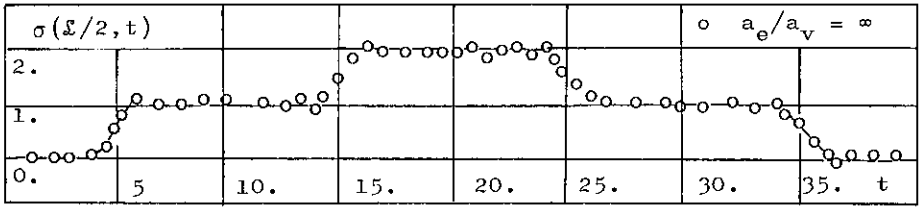


FIG. 9

(i) A coincidência entre os valores calculados e os da solução exata (função-serrote em linha cheia) é apreciável. Calculamos também a tensão no ponto médio $x = \ell/2$, tendo os valores obtidos apresentado o comportamento elástico esperado (note que as "ondas de tensão" percorrem a barra).

(ii) O perfil de $u(\ell,t)$ mostra uma variação acentuadamente menor que no caso elástico, como era de se esperar devido ao efeito da viscosidade; observa-se também a tendência de u para atingir o estado estacionário de equilíbrio ($u = 10$, logo $a_e u = F$).

(iii) O efeito amortecedor da viscosidade é forte, fazendo com que o estado estacionário seja rapidamente atingido.

Exemplo 2. O sistema solo-estaca foi tomado com as seguintes características:

$$a_e = 100; \quad a_v = 1/10; \quad k_e = 1/10; \quad k_v = 1;$$

$$\rho = 10^{-3} \quad c = 1/2 ; \quad \ell = 10; \quad S = 1 .$$

Definiu-se a força externa como

$$F(t) = \begin{cases} t/5 & 0 \leq t \leq 10 \\ 2 & t \geq 10 \end{cases},$$

e

$$k = 1/20 .$$

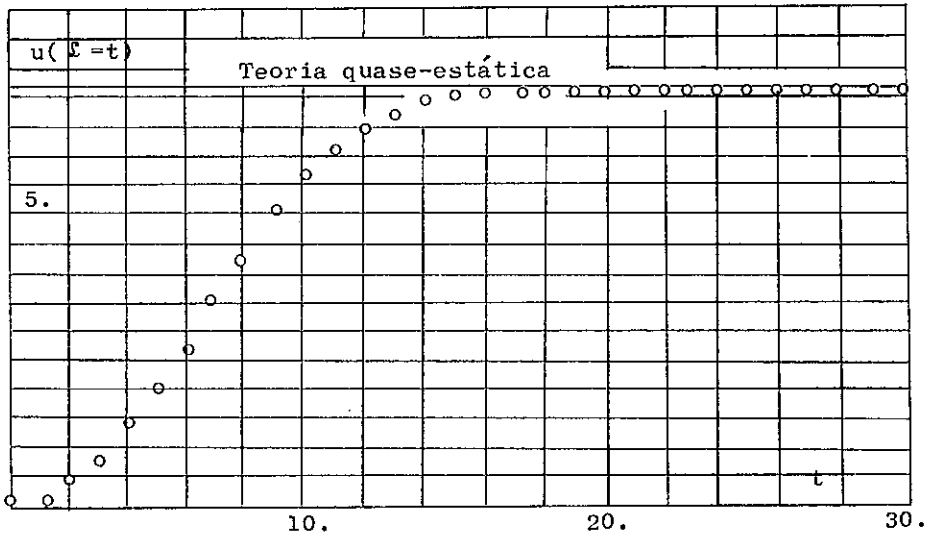


Fig. 10

Na Fig. 10, os valores obtidos para o deslocamento da extremidade, $u(\ell,t)$, são mostrados e comparados com os valores da situação quase estática i.e., aceleração nula. Também neste exemplo, o bom desempenho do modelo e do algorítmo está patente.

Exemplo 3. Esta é a verificação crucial do trabalho até aqui desenvolvido. A força F agora se assemelha mais à que efetivamente exerce o martelo de um bate-estaca, conforme a descrição na Fig. 11, onde superpõem-se os gráficos dos deslocamentos de ambos os extremos da estaca. Com a exceção de $a_v = 1$ e $\rho = 1/100$, todos os parâmetros são os do Exemplo 2.

Merecem ser mencionados os seguintes aspectos dos resul

dos, todos eles evidenciando uma excelente concordância da simulação numérica com o fenômeno físico.

(i) Defasagem entre $u(0,t)$ e $u(\ell,t)$ - o golpe do martelo leva um certo tempo para se propagar até a extremidade oposta, já que a estaca não é rígida.

(ii) Repulsão da estaca pelo solo, depois que a força do martelo deixa de atuar - é a propriedade elástica do solo.

(iii) Decréscimo da penetração correspondente a cada golpe do martelo, até eventualmente ser igualada pela repulsão, tendo-se atingido o estado estacionário - a "finca" na linguagem dos operários da construção civil. (Abrimos aqui um parêntese para condenar o arrocho salarial!)

5. Resultados teóricos - estabilidade do algorítmo

Destinam-se esta seção e a seguinte a expor as propriedades matemáticas do Algorítmo 2. Mais precisamente, deduziremos que valem, em $L^2(I;H^1(\Omega))$, os seguintes limites fracos

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0\\ k\to 0}} \begin{cases} U_{\varepsilon,h,k} = u \ , \\ \delta_k U_{\varepsilon,h,k} = \dot{u} \ , \\ \delta_k^2 U_{\varepsilon,h,k} = \ddot{u} \ , \end{cases} \tag{5.20}$$

sendo u a solução da (IVE). Este resultado responde a questão ainda parcialmente em aberto sobre a existência da solução da (IVE).

Vale a pena lembrar que nem todo algorítmo se presta simul

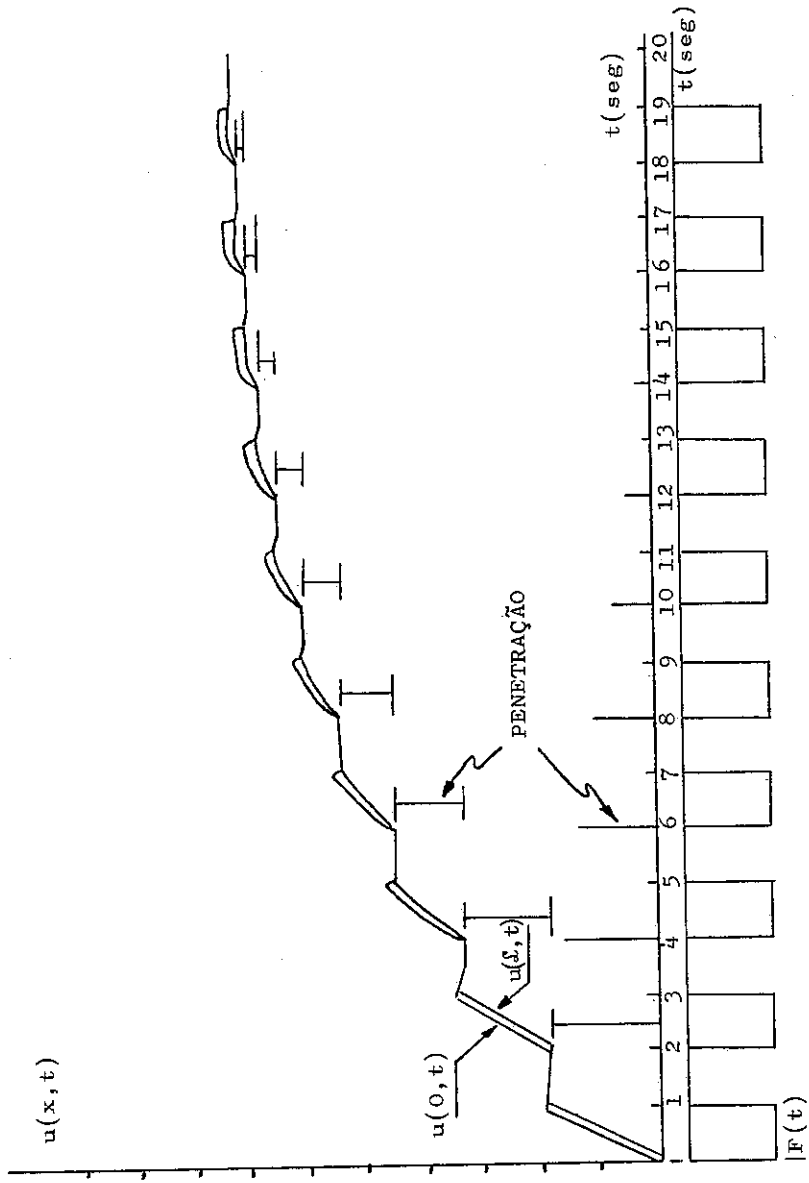

u(x,t)
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
u(0,t)
u(ℓ,t)
PENETRAÇÃO
t(seg)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
t(seg)
|F(t)

Fig. 11

taneamente a uma demonstração construtiva de existência e a uma eficiente implementação. Tal é o caso, por exemplo, do algorítmo de Euler para equações ordinárias, cujo desempenho computacional é pobre.

Adaptando agora a notação usada em (3.1) para a discretização $(5.14)_n$, escrevemos

$$(5.23)\qquad \mathcal{G}_k(U^n;v) + J_\varepsilon(U^n;v) \geq \mathcal{G}_k(U^n;d_k U^n) + J_\varepsilon(U^n;\, d_k U^n)\ , \quad \forall\, v \in V_h\ ,$$

ou seja, $d_k U^n$ é o ponto de mínimo em V_h do funcional convexo

$$\mathcal{W}_{k,U^n}(\cdot) = \mathcal{G}_k(U^n;\cdot) + J_\varepsilon(U^n;\cdot)\ .$$

É natural que, a esta altura, tenha assaltado o leitor a sensação de que estamos "re-complicando" o problema. A inequação não-linear (5.23) não dá de forma alguma a visão algorítmica do esquema que é tão transparente em (5.14'), sendo difícil explicar (e justificar) a evolução do esquema numérico, a partir apenas de (5.23). Nosso objetivo é, porém, reconduzir (5.14) a uma forma a mais próxima possível da (IVE), para abordá-la com o mesmo instrumental matemático dos Capítulos II e III.

A partir do que já expusemos, está suficientemente evidenciado - cremos - quão imprescindível é obtermos <u>estimativas a priori</u>: é nelas que repousa toda a análise desenvolvida. E são novas estimativas, agora para as soluções aproximadas $U_{\varepsilon,h,k}$, que vamos agora procurar.

Assim, escrevemos (5.23) na forma

$$(5.24)_n \qquad \rho(\delta_k^2 U^n,\ v-d_k U^n) + A_e(M_k^p U^n;\ v-d_k U^n) +$$

$$+ A_v(\delta_k U^n;\ v-d_k U^n) + J_e(U^n;v) - J_e(U^n;d_k U^n)$$

$$\geq (E^n, v-d_k U^n)_1 \quad \forall\ v \in V_h\ , \quad n \in I_2^M\ .$$

Como o caso $p = 0$ necessita ser tratado à parte, no que segue suporemos sempre $p \neq 0$.

Seguindo o objetivo de obter uma desigualdade semelhante a (3.23), escolhemos $v = d_k U^n - \delta_k U^n$ para, fazendo uso de (5.8f)-(5.8g), chegar a

$$(2.25)_n \qquad \rho\left(\frac{\delta_k U^n - \delta_k U^{n-1}}{k}\ ,\ \frac{\delta_k U^n + \delta_k U^{n-1}}{2}\right)_o + A_e(M_k^p U^n;\delta_k U^n) +$$

$$A_v(\delta_k U^n;\delta_k U^n) \leq (E^n, \delta_k U^n)_1 +$$

$$+ J_e(U^n;d_k U^n - \delta_k U^n) - J_e(U^n;d_k U^n)\ ,$$

e a partir daí

$$(2.25')_n \qquad \rho\{|\delta_k U^n|_o^2 - |\delta_k U^{n-1}|_o^2\}/2k + \rho\{A_e(U^{n+1};U^{n+1}) -$$

$$- A_e(U^{n-1};U^{n-1})\}/2k + A_v(\delta_k U^n;\delta_k U^n)$$

$$\leq (2-p)|A_e(U^n;\delta_k U^n)| + |E^n|_1 |\delta_k U^n|_1$$

$$+ c|U^{n+\mathfrak{L}}|_o\ |\delta_k U^n|\ .$$

As técnicas já exaustivamente expostas são usadas nestas desigualdades e, após somá-las $(2 \leq n \leq q \leq M)$, vem

$$(5.26)_q \qquad |\delta_k U^q|_o^2 + |U^{q+1}|_1^2 + \sum_{n=2}^{q} k|\delta_k U^n|_1^2 \le K_1\Big[\sum_{n=2}^{q} k\{|E^n|_1^2 + \mathfrak{L}^2 + |U^n|_1^2\} + |\delta_k U^1|_o^2 + |U^2|_1^2 + |U^1|_1^2\Big], \quad q \in I_2^M .$$

Da forma como calculamos U^0, U^1 e U^2, - ver (5.17)-(5.19)-, é evidente que

$$(5.27) \qquad |\delta_k U^1|_o^2 + |U^2|_1^2 + |U^1|_1^2 \le K_2 ,$$

com K_2 dependendo só de u_o e v_o. Por outro lado,

$$\lim_{k\to 0} \sum_{n=0}^{M} k|E^n|_1^2 = |f|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))} + |F|^2_{L^2(I;\mathbb{R})} ,$$

assim que (5.26) implica

$$(5.28)_q \qquad |\delta_k U^q|_o^2 + |U^{q+1}|_1^2 + \sum_{n=2}^{q} k|\delta_k U^n|_1^2 \le K_3\Big(1 + \sum_{n=2}^{q} k|U^n|_1^2\Big) ,$$

que, escrita na forma

$$(5.28)'_q \qquad |\delta_k U^q|_o^2 + |U^{q+1}|_o^2 + \int_{t_2}^{t_{q+1}} |\delta_k U|_1^2(t)dt \le K_3\Big(1 + \int_{t_2}^{t_{q+1}} |U|_1^2(t)dt\Big) ,$$

justifica a aplicação do lema de Gronwall para concluirmos:

$$(5.29)\qquad |\delta_k U|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + |U|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + |\delta_k U|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \le K \ ,$$

onde a constante K varia com u_o, v_o, f, F, $\mathfrak{L}$ e T, mas não com ϵ, h ou k.

A estimativa (5.29) corresponde ao Teorema III.5.3.

Adaptamos agora as passagens que nos levaram a (3.34), na forma que acabamos de expor, escolhendo $v = d_k U^n - \delta_k^2 U^n$ e usando (5.8f)-(5.8g). Obtém-se destarte

$$(5.30)_n\qquad \rho|\delta_k^2 U^n|_o^2 + 2[A_v(\delta_k U^n) - A_v(\delta_k U^{n-1})] \le$$
$$\le (E^n, \delta_k U^n - \delta_k U^{n-1})/k + J_\epsilon(U^n; d_k U^n) -$$
$$- J_\epsilon(U^n; \delta_k^2 U^n - d_k U^n) -$$
$$- A_\epsilon(M_k^p U^n; \delta_k U^n - \delta_k U^{n-1})/k \ .$$

A fórmula de integração por parte que usamos antes, temos de substituí-la agora pela correspondente

$$(5.31)\qquad \sum_{j=Q+1}^{R-1} a_j(b_{j+1}-b_j) = -\sum_{j=Q+1}^{R-1}(a_{j+1}-a_j)b_{j+1} + a_R b_R - a_Q b_Q,$$

dita fórmula de <u>adição por parte</u>. Assim, somando $(5.30)_n$ para $2 \le n \le q-1 \le M$, obtemos

$$(5.32)\qquad \rho \sum_{n=2}^{q} k|\delta_k^2 U^n|_o^2 + 2\{A_v(\delta_k U^q) - A_v(\delta_k U^1)\} \le$$

$$\le c \sum_{n=2}^{q} k|U^{n+\ell}|_o \, |\delta_k^2 U^n|_o + \sum_{n=2}^{q} k(\delta_k E^{n-1}, \delta_k U^{n-1})_1$$

$$+ (E^q, \delta_k U^q)_1 + (E^1, \delta_k U^1)_1$$

$$+ \beta_e \sum_{n=2}^{q} k|M_k^p \delta_k U^{n-1}|_1 \, |\delta_k U^{n-1}|_1 + \beta_e |M_k^p U^q|_1 \, |\delta_k U^q|_1 ,$$

que nos permite chegar a uma estimativa semelhante a (3.35). Este resultado, nós o juntamos a (5.29) no enunciado do

Teorema 1 (Estabilidade)- Existe uma constante $K > 0$ tal que, qualquer função $U = U_{\epsilon,h,k}$ calculada pelo Algorítmo 2 ($p \neq 0$) verifica

$$(5.33)\qquad |U|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + |\delta_k U|_{L^\infty(I;H^1(\Omega))} + |\delta_k^2 U|_{L^2(I;L^2(\Omega))}$$

$$+ |\delta_k U|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \le K .$$

Enfatizamos a independência de K com relação aos 3 parâmetros ϵ, h e k.

Na terminologia corrente em Análise Numérica, um algorítmo para o qual se obtém estimativas a priori é dito estável. Esta propriedade nos assegura que os erros fatalmente introduzidos na sua implementação - imprecisão dos dados, arredondamento, etc - não são amplificados, por menores que sejam os parâmetros de discretização considerados.

6. Resultados teóricos - Convergência

A compacidade, no sentido fraco, dos conjuntos fechados e limitados em $L^2(I;H^r(\Omega))$, $r = 0$ ou 1, garante a existência de funções $\tilde{U},\tilde{V} \in L^2(I;H^1(\Omega))$, $\tilde{W} \in L^2(I;L^2(\Omega))$, tais que para uma certa subseqüência de $U_{\varepsilon,h,k}$, se verificam os seguintes limites (fracos):

$$(5.34) \qquad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0\\ k\to 0}} -f \begin{cases} U_{\varepsilon,h,k} = \tilde{U} , \\ \delta_k U_{\varepsilon,h,k} = \tilde{V} , \\ \delta_k^2 U_{\varepsilon,h,k} = \tilde{W} . \end{cases}$$

Conforme já observamos, o fato de termos diferentes espaços V_h nos impede de obter a convergência forte como no Capítulo III.

A primeira questão a ser abordada é se $\tilde{U}$ é derivável e $\mathring{\tilde{U}} = \tilde{V}$. Começamos operando com $\tilde{V}$, que satisfaz

$$(5.35) \qquad \int_0^T (\tilde{V},Z)_1 dt = \lim_{\varepsilon,h,k} \int_0^T (\delta_k U,Z)_1 dt , \quad \forall\, Z \in L^2(I;H^1(\Omega)).$$

Por outro lado, a fórmula de adição por partes (5.31) nos dá, para $Z \in C^1_*(I;H^1(\Omega))$, nula nos extremos $t = 0$ e $t = T$,

$$\int_0^T (\delta_k U,\ Z)_1 dt = \sum_{n=0}^{M} (\delta_k U^n ,\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} Z(t)dt)_1$$

$$= -\sum_{n=0}^{M} (U^n,\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \delta_k Z(t)dt)_1 = -\int_0^T (U,\ \delta_k Z)_1\, dt .$$

Tomamos o limite para o primeiro e o último termo nesta cadeia de igualdades, levando em consideração (5.35), para deduzir que

$$(5.36) \qquad \int_0^T (\tilde{V},Z)_1 dt = -\int_0^T (\tilde{U},\dot{Z})_1 dt \quad ,$$

qualquer que seja Z nas condições acima. Esta propriedade é, aparentemente, mais fraca que aquela expressa na definição de derivada que adotamos no Capítulo III (por isto mesmo, são elas conhecidas como derivadas "fraca" e "forte", respectivamente). No presente contexto, porém, é fácil concluir a equivalência destes conceitos, sendo a verificação no caso geral exposta com detalhes, por exemplo, na Ref. [9].

Exercício 4. Verifique que a derivada "forte" de $\tilde{U}$ é $\tilde{V}$.

Assim, podemos concluir que $\tilde{V} = \dot{\tilde{U}}$ e, sendo a demonstração de que $\tilde{W} = \dot{\tilde{V}} = \ddot{\tilde{U}}$ análoga, reformular (5.34):

$$(5.37) \qquad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0\\ k\to 0}} -f \begin{cases} U_{\varepsilon,h,k} = \tilde{U} \ , \\ \partial_k U_{\varepsilon,h,k} = \dot{\tilde{U}} \ , \\ \partial_k^2 U_{\varepsilon,h,k} = \ddot{\tilde{U}} \ . \end{cases}$$

Também as condições iniciais não podem ser tratadas de uma forma tão direta como na seção III.6. Seu enfoque, contudo, da mesma forma que na obtenção das estimativas a priori, requer basicamente uma conveniente escolha de funções-teste. Trata-se novamente de obter um resultado pontual a partir de um limite fraco.

Já se tem a continuidade de $\tilde{U}$ e $\dot{\tilde{U}}$, pelo Teorema de Imersão II.2.3, sendo honesta a integração por partes em

$$(5.38) \qquad \int_0^T (\tilde{U},\dot{Z})_1 dt = -\int_0^T (\dot{\tilde{U}},Z)_1 dt + (\tilde{U}(t), Z(t))_1 \Big]_{t=0}^T \ ,$$

com $Z \in C_*^1(I;H^1(\Omega))$.

Mas por outro lado,

$$(5.39)\quad \int_o^T (U,\dot{Z})_1 dt = \sum_{n=0}^{M} (U^n, \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{Z} dt)_1 = \sum_{n=0}^{M} k(U^n, \partial_k Z^n)_1 =$$

$$= - \sum_{n=0}^{M} k(\partial_k U^n, Z^{n+1})_1 + (U(t),Z(t))_1]_{t=0}^{T} =$$

$$= - \int_o^T (\partial_k U, Z_k)_1 dt + (U(t),Z(t))_1]_{t=0}^{T} \quad ,$$

onde $Z_k(t)$ é a função-escada que coincide com Z em t_n e é constante em $[t_n,t_{n+1})$, $n \in I_o^M$. Observamos que $Z_k \to Z$ no sentido da norma de $L^2(I;H^1(\Omega))$. Para nos descartar dos valores no extremo $t = T$, basta escolher Z com $Z(T) = 0$, e para usar as informações que temos sobre $U(0)$, isto é (5.17), devemos ter $Z(0) \in V_h$. Assim é natural, dado $w \in H^1(\Omega)$ arbitrário, escolher $w_h \in V_h$ satisfazendo

$$\lim_{h \to 0} |w_h - w|_1 = 0 \quad ,$$

e usar em (5.38) e (5.39), $Z(t) = (T-t)\, w/T$ e $Z_h(t) = (T-t)\, w_h/T$, respectivamente, tomando nesta última o limite em ϵ,h,k. Obtemos

$$(5.38')\qquad \int_o^T (\tilde{U},\dot{Z})_1 dt = - \int_o^T (\dot{\tilde{U}},Z)_1 dt - (\tilde{U}(0),w)_1$$

e

$$(5.39')\qquad \int_o^T (\tilde{U},\dot{Z})_1 dt = - \int_o^T (\dot{\tilde{U}},Z)_1 dt - (u_o,w)_1 \quad ,$$

do que resulta $\tilde{U}(0) = u_o$.

A verificação de que $\dot{\tilde{U}}(0) = v_o$ é idêntica.

Por fim, falta verificar se $\tilde{U}$ satisfaz a (IVE). Tal fato pode ser mostrado diretamente, como na Ref. [10]. O tratamento é, porém, mais envolvido que aquele da seção III.6, devido ao aparecimento de termos bilineares do tipo $(\delta_k^2 U^n, v\text{-}d_k U^n)_o$, onde ocorre apenas a convergência fraca para ambos os argumentos. Tal não sucede na $(EVA)_{\varepsilon,h}$. Podemos então, para encurtar a presente exposição, fixar $\varepsilon > 0$ e tomar, na equação (5.15) que define o Algorítmo 2, o limite em h e k, concluindo que

$$u_\varepsilon = \lim_{h,k} U_{\varepsilon,h,k}, \quad \forall\, \varepsilon > 0 ,$$

e a partir daí, graças a (3.17),

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{h,k\to 0} \begin{cases} U_{\varepsilon,h,k} = u , & \text{(5.40a)} \\ \delta_k U_{\varepsilon,h,k} = \dot{u} , & \text{(5.40b)} \\ \delta_k^2 U_{\varepsilon,h,k} = \ddot{u} . & \text{(5.40c)} \end{cases}$$

Pode-se mesmo concluir que os dois primeiros limites se verificam no sentido forte em $L^2(\mathcal{R}_{\mathcal{L},T})$, sendo os detalhes da demonstração, mais elaborada que no caso contínuo, apresentados na Ref. [10].

Resumimos agora os resultados obtidos (ou mencionados) ao longo da exposição no

Teorema 2 (do Bate-Estaca) - Sejam, para $T > 0$ e $\mathcal{L} > 0$, finitos,

$$\Omega = (0,\mathcal{L}), \quad I = (0,T), \quad \mathcal{R} = \Omega \times I ,$$

e sejam dados

$u_o, v_o \in H^1(\Omega)$,

$f \in L^2(I,L^2(\Omega))$, com $\dot{f} \in L^2(I,L^2(\Omega))$,

$F \in L^2(I, \mathbb{R})$, com $\dot{F} \in L^2(I, \mathbb{R})$,

arbitrárias, bem como constantes positivas

$$\rho,\ a_e,\ k_e,\ a_v,\ k_v,\ c \ ,$$

quaisquer. Então existe uma única função

$$u \in L^2(I;\ H^1(\Omega)) \ ,$$

tal que

$$\dot{u} \in L^2(I;H^1(\Omega)) \ ,$$

$$\ddot{u} \in L^2(I;\ H^1(\Omega)) \ ,$$

que satisfaz as condições iniciais

$$u(0) = u_o \ ,$$

$$\dot{u}(0) = v_o \ ,$$

e a inequação variacional de evolução

$$\rho \int_o^{\ell} (v-\dot{u})\ddot{u}dx + a_e \int_o^{\ell} (v_x-\dot{u}_x)u_x dx + a_v \int_o^{\ell} (v_x-\dot{u}_x)\dot{u}_x \, dx$$

$$+ k_e\, u(0)[v(0)-\dot{u}(0)] + k_v\dot{u}(0)[v(0)-\dot{u}(0)]$$

$$+ c \int_o^{\ell} (x+u-\ell)\, H(x+u-\ell)(|v|-|\dot{u}|)dx$$

$$\geq \int_o^{\ell} (v-\dot{u})f dx + F(t)[v(0)-\dot{u}(0)] \ ,$$

$$\forall\ v \in H^1(\Omega), \quad t \in I \ .$$

Tal função u varia continuamente com os dados u_o, v_o, f e F, e seus valores podem ser calculados através do algoritmo 2 ($p > 0$), que fornece aproximações $U_{\varepsilon,h,k}$ para as quais

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to 0\\ k\to 0}} \begin{cases} |U_{\varepsilon,h,k} - u|_{L^2(\mathbb{R})} = 0 , \\ |\partial_k U_{\varepsilon,h,k} - \dot{u}|_{L^2(\mathbb{R})} = 0 , \\ \int_0^T (\partial_k^2 U_{\varepsilon,h,k} - \ddot{U}, Z)_1 dt = 0 , \quad \forall\, Z \in L^2(I;H^1(\Omega)) . \end{cases}$$

7. Apêndice - Exercícios Propostos

Nesta seção, faremos algumas observações e complementaremos as idéias acima expostas, na maioria das vezes apenas indicando o caminho a seguir, deixando a elaboração como exercício. A supressão de sua leitura não afeta a continuidade.

Exercício 5 (Estudo do Algorítmo 1). Efetue na equação (5.10) a substituição de

$$A_\varepsilon(U^n;w) \quad \text{por} \quad A_\varepsilon(M_k^p\, U^n;\, w), \quad 0 < p \le 1/2 .$$

a) Verifique a existência de $\tau > 0$, tal que se $k < \tau$, a equação obtida tem sempre solução (única).

b) Para este algorítmo valem estimativas ainda mais fortes que (5.29) e (5.33), a saber:

Para $p > 0$, uma estimativa independente de T é deduzida, operando exatamente como fizemos para chegar a (3.19).

Para $p \in [1/4, 1/2]$, a identidade

$$k\, A_e(M_k^p\, U^n; \delta_k\, U^n) = (4p-1)\{A_e(U^{n+1}/2) - A_e(U^{n-1}/2)\}$$
$$+ (1-2p)\{A_e(M_{k/2}^{1/2}\, U^{n+1/2}) - A_e(M_{k/2}^{1/2}\, U^{n-1/2})\}$$

nos conduz a uma estimativa também independente de T.

c) Deduzir a convergência deste Algorítmo e

d) implementá-lo.

Exercício 6 (Algorítmo "Predictor-Corrector"). De fato, os resultados numéricos apresentados na seção 4 foram obtidos não com o Algorítmo 2, mas com o esquema tipo "predictor-corrector" que passamos a descrever. (Por razões didáticas é que preferimos conduzir a discussão em torno do Algorítmo 2)

ALGORÍTMO 3. Escolhidos $\varepsilon > 0$, o espaço V_h, $M > 0$ e $p \in (0, 1/2]$, com $k(M+1) = T$, calcule os valores U^n, $n \in I_o^M$ da função-escada $U \in L^2(I; V_h)$, constante em $[t_n, t_{n+1})$, pelas relações:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & (U^0, w)_1 = (u_o, w)_1 \\ \text{(ii)} & (U^1, w)_1 = (u_o + kv_o, w)_1 \end{array}\right] \quad \forall\, w \in V_h$$

e, para $n \in I_1^M$, U^{n+1} deve satisfazer

$$\text{(iii)} \quad \rho(\delta_k^2\, U^n, w)_o + A_e(M_k^p\, U^n; w) + A_v(\delta_k\, U^n; w) +$$
$$+ (\psi(U^n)\varphi_\varepsilon'(\delta_k\, U^n_{(0)}), w)_o = (E^n, w)_1 \quad , \quad \forall\, w \in V_h \, ,$$

onde

$$\delta_k U^n_{(0)} = \frac{U^{n+1}_{(0)} - U^{n-1}}{2k}$$

sendo $U^{n+1}_{(0)}$ uma primeira aproximação de U^{n+1} adrede calculada por:

(iv) $$\rho\left(\frac{U^{n+1}_{(0)} - 2U^n + U^{n-1}}{k^2}, w\right)_o + A_e(pU^{n+1}_{(0)} + (1-2p)U^n + pU^{n-1}; w)$$

$$+ A_v(\delta_k U^n_{(0)}; w) + (\psi(U^n)\, \varphi'_\varepsilon(\delta_k U^{n-1}), w)_o = (E^n, w)_1 ,$$

$$\forall\, w \in V_h .$$

Observe que este esquema

(a) tem precisão local da ordem de k^2 ;

(b) exige para avançar cada nível a solução de 2 sistemas lineares (ambos com a mesma matriz, que também não varia de nível para nível);

(c) requer armazenagem de dados da mesma ordem que o Algorítmo 2;

(d) calcula U^2 através de um procedimento certamente mais preciso que a expansão de Taylor usada em (5.19).

Na Ref. [10] tal esquema foi analisado. Naquele trabalho, a estimativa para as diferenças finitas de ordem 2 se deteriora quando $\varepsilon \to 0$.

(e) Mostre que isto não precisa necessariamente ocorrer, bastando que utilizemos funções φ_ε como aquelas descritas no Exercício 3, seção III.3.

(f) Uma outra alternativa para a análise deste esquema é operar com as inequações variacionais equivalentes, como fizemos neste capítulo. Dessa forma, podemos chegar a uma estimativa independente de ε, mesmo que $\sup_x |\varphi_\varepsilon''(x)| \uparrow \infty$ com $\varepsilon \downarrow 0$ (situação mais propícia que a descrita em (e), já que nos dá uma regularização mais precisa).

Exercício 7 (Relação entre os Algorítmos 1 e 3). Podemos pensar nas equações (iv) e (iii) do Exercício 6 como as duas primeiras iterações do seguinte processo:

Passo 0 - Calcule $U_{(0)}^{n+1}$ através de (iv).

Passo j(j≥1) - Calcule $U_{(0)}^{n+1}$ através da equação obtida de (iii) mediante a substituição de U^{n+1} por $U_{(j)}^{n+1}$ e de $\delta_k U_{(0)}^{n}$ por

$$\delta_k U_{(j-1)}^{n} = \frac{U_{(j-1)}^{n+1} - U^{n-1}}{2k} .$$

(a) É este processo iterativo convergente?

(b) Na implementação deste algorítmo, um critério simples de "parada" seria

$$\frac{U_{(j)}^{n+1} - U_{(j-1)}^{n+1}}{|U_{(j)}^{n+1}|} < \text{tolerância dada} .$$

Observe porém que o limite (em j) de $U_{(j)}^{n+1}$ é necessariamente a solução do problema não-linear descrito no Algorítmo 1 - equação (5.10). Assim, um critério de "parada" mais coerente é

exigir que $U_{(j)}^{n+1}$ satisfaça a equação (5.10) a menos de uma tolerância dada.

Esta interpretação dos algorítmos tipo "predictor-corrector" serve também como justificativa para o melhor desempenho computacional destes com relação a algorítmos "atrasados" (tipo Algorítmo 2); ver por exemplo os resultados numéricos em [7].

Os algorítmos 1,2 e 3, para $p = 0$ serão discutidos no Capítulo VI.

CAPÍTULO VI

UMA SEGUNDA ABORDAGEM: OTIMIZAÇÃO

1. Definição do algorítmo

A técnica de regularização nos permite passar de uma inequação variacional para uma equação variacional, e foi para esta última que desenvolvemos a análise exposta nos Capítulos III e V. O objetivo era reduzir o problema inicial a outros, mais simples do ponto de vista computacional. Mas, sem dúvida, terá o leitor percebido que insistentemente voltávamos à inequação quando questões teóricas eram discutidas, fato que sugere um tratamento mais direto da inequação: sem regularizá-la, discretizar as duas variáveis x e t.

Esta é a justificativa heurística do

ALGORÍTMO 4. Escolhidos o espaço V_h, um inteiro $M > 0$, $p \in (0, 1/2]$, e sendo $k = T/(M+1)$, calcule a função escada $U \in L^2(I, V_h)$, constante em $[t_n, t_{n+1})$, $n \in I_o^M$, através do procedimento recursivo:

$$\left.\begin{aligned} (U^o, w)_1 &= (u_o, w)_1 \qquad (6.1)\\ (U^1, w)_1 &= (u_o + kv_o, w)_1 \qquad (6.2)\end{aligned}\right] \quad \forall\, w \in V_h$$

e, para $x \in I_1^M$,

$$(6.3)_n \quad \rho(\delta_k^2 U^n,\ v-\delta_k U^n)_o + A_e(M_k^p U^n;\ v-\delta_k U^n) + A_v(\delta_k U^n;\ v-\delta_k U^n)$$

$$+ J(U^n;v) - J(U^n;\delta_k U^n) \geq$$

$$\geq (E^n, v-\delta_k U^n)_1, \quad \forall\ v \in V_h \ .$$

Para justificar a possibilidade de evolução do esquema acima, ou seja, que $(6.3)_n$ admite sempre uma solução U^{n+1}, dados U^{n-1} e U^n, é mais conveniente manipular a expressão

$$(6.4)_n \quad 2\rho(\delta_k U^n,\ v-\delta_k U^n)_o/k + 2kpA_e(\delta_k U^n; v-\delta_k U^n) +$$

$$+ A_v(\delta_k U^n; v-\delta_k U^n) + J(U^n;v) - J(U^n;\delta_k U^n) \geq$$

$$\geq (E^n, v-\delta_k U^n)_1 + 2\rho(\delta_k U^{n-1}; v-\delta_k U^n)_o/k +$$

$$+ 2kpA_e(\delta_k U^{n-1}; v-\delta_k U^n) - A_e(U^n; v-\delta_k U^n), \quad \forall\ v \in V_h \ .$$

Para passar de $(6.3)_n$ a $(6.4)_n$, fizemos uso da identidade

$$(5.8g) \qquad \delta_k^2 U^n = 2[\delta_k U^n - \delta_k U^{n-1}]/k$$

e de

$$(6.5) \qquad M_k^p U^n = 2kp[\delta_k U^n - \delta_k U^{n-1}] + U^n \ .$$

A relação $(6.4)_n$ pode ser pensada como tendo por incógnita $\delta_k U^n$ que é claro, determina U^{n+1} a partir de U^{n-1}. O segundo membro de $(6.4)_n$ envolve apenas termos já calculados no nível n-1 ou n-2.

Introduzindo $B: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $j_n: H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e

$\ell_n : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, através de

$$B(u;v) = \rho(u,v)_o + k^2 p A_e(u,v) + k A_v(u;v)/2 \quad , \tag{6.6}$$

$$j_n(v) = kJ(U^n;v)/2 \tag{6.7}$$

e

$$\ell_n(v) = -k\{(E^n,v)_1 + 2kpA_e(\delta_k U^{n-1};v) - A_e(U^n;v)\}/2 - \rho(\delta_k U^{n-1};v)_o \quad , \tag{6.8}$$

na inequação $(6.4)_n$ obtemos

$$B(\delta_k U^n; v-\delta_k U^n) + j_n(v) - j_n(\delta_k U^n) + \ell_n(v-\delta_k U^n) \geq 0 \quad , \quad \forall\, v \in V_h \, . \tag{6.9}_n$$

Notemos que o funcional B é bilinear, simétrico e contínuo em $H^1(\Omega)$ e a forma quadrática a ele associada

$$Q(w) = \frac{1}{2} B(w;w) \tag{6.10}$$

é <u>convexa</u>, logo sua derivada Q' satisfaz

$$\langle Q'(w) | v-w \rangle_1 \leq Q(v) - Q(w), \quad \forall\, v,w \in H^1(\Omega) \, . \tag{6.11}$$

Ademais, como

$$\langle Q'(w) | Z \rangle_1 = B(w;Z) \quad , \tag{6.12}$$

deduz-se de $(6.9)_n$, (6.10), (6.11) e (6.12) que

$$(6.13)_n \qquad 0 \le B(\delta_k U^n; v-\delta_k U^n) + j_n(v) - j_n(\delta_k U^n) + \ell_n(v-\delta_k U^n)$$

$$\le \tfrac{1}{2} B(v;v) - \tfrac{1}{2} B(\delta_k U^n; \delta_k U^n) + j_n(v) - j_n(\delta_k U^n) +$$

$$+ \ell_n(v) - \ell_n(\delta_k U^n), \qquad \forall\, v \in V_h \ ,$$

ou seja

$$(6.13')_n \qquad Q(\delta_k U^n) + j_n(\delta_k U^n) + \ell_n(\delta_k U^n) \le$$

$$\le Q(w) + j_n(w) + \ell_n(w), \qquad \forall\, w \in V_h \ .$$

Em outras palavras, o funcional $Q + j_n + \ell_n$ tem em $\delta_k U^n$ um ponto de mínimo absoluto com relação a V_h, desde que $(6.3)_n$ admita solução.

Ora, a forma Q é <u>coerciva</u>, isto é, existe $\delta > 0$ para o qual

$$(6.14) \qquad \tfrac{1}{2} B(w;w) \ge \delta |w|_1^2 , \qquad \forall\, w \in H^1(\Omega).$$

Portanto, Q é estritamente convexa, conclusão também válida para $Q + j_n + \ell_n$, visto serem ambas j_n e ℓ_n convexas. Assim, $Q + j_n + \ell_n$ admite, no <u>máximo</u>, um ponto de <u>mínimo</u>.

Por outro lado, da linearidade de ℓ_n e da continuidade de j_n - ver (2.25a) - segue que

$$|j_n(w) + \ell_n(w)| \le K_n \, |w|_1 , \qquad \forall\, w \in V_h \ ,$$

do que decorre:

$$\tfrac{1}{2} B(w;w) + j_n(w) + \ell_n(w) \ge \delta |w|_1^2 - K_n |w|_1 \uparrow +\infty \ ,$$

se $|w|_1 \uparrow \infty$. Infere-se daí que

$$\eta = \inf_{w \in V_h} \{\tfrac{1}{2} B(w;w) + j_n(w) + \iota_n(w)\} > -\infty .$$

Mas V_h é um espaço de dimensão finita, logo existe um ponto $w_\eta \in V_h$ onde o valor $\eta = \eta(n,h)$ é assumido pela forma $Q+j_n+\iota_n$.

Desta feita, está bem definido um outro Algorítmo, no qual U^{n+1} é obtido, para $n \in I^M$, através dos passos (a) e (b).

(a) Calcule $\delta_k U^n$, resolvendo o problema dito de <u>otimização</u>

$$(6.15)_n \qquad Q(\delta_k U^n) + j_n(\delta_k U^n) + \iota_n(\delta_k U^n) = \inf_{v \in V_h} \{Q(v) + j_n(v) + \iota_n(v)\}.$$

(b) Calcule

$$(6.16) \qquad U^{n+1} = 2k\delta_k U^n + U^{n-1} .$$

Resta verificar que toda solução de $(6.15)_n$ - ou $(6.13')_n$ - é também solução de $(6.9)_n$, ou seja, satisfaz

$$(6.17)_n \qquad \langle Q'(\delta_k U^n) \mid v - \delta_k U^n \rangle_1 + j_n(v) - j_n(\delta_k U^n) + \iota_n(v) - \iota_n(\delta_k U^n) \geq 0, \quad \forall\, v \in V_h ,$$

sendo o passo (a) mera reformulação de $(6.3)_n$ no Algorítmo 4.

Escolhemos em $(6.13')_n$ uma função-teste que nos conduza a $(6.17)_n$, qual seja

$$w = \delta_k U^n + \lambda(v-\delta_k U^n) = (1-\lambda)\delta_k U^n + \lambda v ,$$

com $0 < \lambda \leq 1$, obtendo

$$0 \leq Q(\delta_k U^n + \lambda(v-\delta_k U^n)) - Q(\delta_k U^n) + j_n(\delta_k U^n + \lambda(v-\delta_k U^n)) -$$

$$- j_n(\delta_k U^n) + \lambda \ell_n(v-\delta_k U^n) ,$$

do que decorre, pela convexidade de j_n, que

$$0 \leq Q(\delta_k U^n + \lambda(v-\delta_k U^n)) - Q(\delta_k U^n) + \lambda[j_n(v) - j_n(\delta_k U^n) +$$

$$+ \ell_n(v-\delta_n U^n)] .$$

Dividimos esta desigualdade por λ e tomamos $\lambda \downarrow 0$ para chegar a $(6.17)_n$, pelo fato de ser $v \in H^1(\Omega)$ qualquer.

A presente discussão para $Q + j_n + \ell_n$ é um caso particular de uma situação mais geral abordada, por exemplo, em [4], Capítulo II.

Adiaremos para a seção 3 a discussão do passo (a), minimização de um funcional não-linear convexo em V_h.

2. Propriedades do Algorítmo - o conceito de estabilidade condicional

A obtenção de estimativas a priori para o esquema que aca-

bamos de definir, no caso $p > 0$, não traz dificuldades; pelo contrário, apresenta as boas características descritas no Exercício V.7.5. Assim, consideramos demonstradas propriedades de convergência análogas àquelas obtidas para os três primeiros algorítmos, nem nos dando ao trabalho de enunciá-las.

Resta o caso $p = 0$. A discussão que se segue, por seu turno, se aplica aos algorítmos anteriormente expostos.

Já observou o leitor que a dificuldade que surge quando $p = 0$ provém do termo $A_e(U^n;\ v-\delta_k U^n)$. Reescrevendo $(6.3)_n$ com $v = 0$, obtemos as desigualdades

$$\rho\{|\delta_k U^n|_o^2 - |\delta_k U^{n-1}|_o^2\} + A_e(U^n;\ U^{n+1} - U^{n-1}) +$$

$$+ 2kA_v(\delta_k U^n; \delta_k U^n) + 2kJ(U^n; \delta_k U^n) \le 2k(E^n, \delta_k U^n)_1 ,$$

que, somadas para $1 \le n \le q \le M$, nos dão

$$(6.18)_q \qquad \rho|\delta_k U^q|_o^2 + 2\alpha_v \sum_{n=1}^{q} k|\delta_k U^n|_1^2 + A_e(U^q, U^{q+1}) \le$$

$$\le \rho|\delta_k U^o|_o^2 + A_e(U^o; U^1) + 2\sum_{n=1}^{q} k|E^n|_1\ |\delta_k U^n|_1 .$$

A relação

$$A_e(U^q; U^{q+1}) = A_e(U^q; U^q) + A_e(U^q; U^{q+1} - U^q) =$$

$$= A_e(U^q; U^q) + kA_e(U^q; \delta_k U^q)$$

aplicada em $(6.18)_q$ nos leva a

$$(6.19)_q \qquad \rho|\delta_k U^q|_o^2 + \sum_{n=1}^{q} k|\delta_k U^n|_1^2 + \alpha_e|U^q|_1^2 \le \rho|\delta_k U^o|_o^2 + A_e(U^o;U^1) +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_v}\sum_{n=1}^{q} k|E^n|_1^2 + k\beta_e|U^q|_1|\delta_k U^q|^1 ,$$

e a dificuldade foi assim transferida para o termo $\delta_k U^q$, que aparece com as normas $|\cdot|_o$ e $|\cdot|_1$, no primeiro e segundo membro, respectivamente. Mais uma vez lançamos mão do fato de estarmos num espaço de dimensão finita, V_h. As duas normas envolvidas são portanto equivalentes, donde

$$(6.20) \qquad |v|_o \le |v|_1 \le S(h)\,|v|_o , \quad \forall\, v \in V_h ,$$

sendo $S(h)$ a chamada <u>função-estabilidade</u> associada ao par (L^2,H^1). Está claro que $S(h)\uparrow+\infty$ com $h \downarrow 0$ e que, de fato, $S = S(V_h)$.

Tem-se então a desigualdade

$$k\beta_e|U^q|_1\,|\delta_k U^q|_o \le \frac{1}{2}\left\{\alpha_e|U^q|_1^2 + \frac{\beta_e^2}{\alpha_e}k^2\,S(h)^2\,|\delta_k U^q|_1^2\right\} ,$$

que levamos a $(6.19)_q$ para concluir

$$(6.21)_q \qquad \left\{\rho - \frac{\beta_e^2}{\alpha_e}k^2\,S(h)^2\right\}|\delta_k U^q|_o^2 + \frac{\alpha_e}{2}|U^q|_1^2 + \sum_{n=1}^{q} k|\delta_k U^n|_1^2 \le$$

$$\le \rho|v_o|_o^2 + \beta_e|u_o|_1\,|v_o|_1 + \frac{1}{\alpha_v}\sum_{n=1}^{q} k|E^n|_1^2$$

Esta última relação só é relevante se o primeiro termo for positivo, ou seja, se

$$(6.22) \qquad kS(h) \le \frac{\sqrt{\rho\alpha_e}}{\beta_e} ,$$

para todo k e todo h. A desigualdade (6.22), é conhecida como uma condição de estabilidade. O algorítimo 4, para $p = 0$, é dito condicionalmente convergente, o advérbio expressando a impossibilidade de h e k tenderem para zero independentes um do outro.

A restrição (6.22) significa que a velocidade de propagação dos sinais (ondas) numericamente simulada é consistente com a velocidade de propagação no caso contínuo, não sendo desperdiçadas informações. Foram Courant, Friedrichs e Lewy, em um trabalho pioneiro na teoria da Análise Numérica, Ref. [2], os primeiros a discutir este conceito.

A obtenção de uma estimativa para as diferenças finitas de segunda ordem depende de (6.22) apenas na medida em que ela se baseia numa prévia limitação de U^n.

3. Discussão do algorítmo de otimização

No algorítmo 4, em cada nível de tempo t_n, devemos resolver o problema de minimização $(6.15)_n$, que é equivalente a $(6.9)_n$. Para simplicidade da notação, eliminamos os índices, reescrevendo este problema na forma

"Determinar $w \in V_k$ tal que

$$B(w;\, v-w) + j(v) - j(w) + \ell(v-w) \geq 0 \,, \quad \forall\, v \in V_h \,, \tag{2.23}$$

ou, equivalentemente,

$$\eta(w) = \frac{1}{2} B(w;w) + j(w) + \ell(w) = \tag{6.23'}$$

$$= \inf_{V_h} \{\frac{1}{2} B(v;v) + j(v) + \ell(v)\}" \ .$$

Lembramos que neste contexto, ver (6.7) ,

$$j(v) = \int_\Omega \Psi(x)|v(x)|dx \ . \tag{6.24}$$

A técnica que usaremos pode ser considerada uma generalização dos multiplicadores de Lagrange. Recordamos que minimizar uma função $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sujeita ao vínculo

$$Y(x) = 0 \ , \quad \text{com} \quad Y: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \tag{6.25}$$

equivale a resolver um sistema de $n+1$ equações, a saber:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} G^*(x,\lambda) = 0 \ , \quad i = 1,\ldots,n \ , \tag{6.26}$$

onde

$$G^*(x,\lambda) = G(x) + \lambda Y(x) \ , \tag{6.27}$$

mais (6.25).

Introduziu-se mais uma variável, λ , conhecida como um <u>multiplicador de Lagrange</u> para transformar o problema de minimização num sistema (não-linear) de equações.

Assim, também o problema em discussão é equivalente a um outro, que envolve a resolução de uma equação com uma incógnita adicional:

"Encontrar $w \in V_h$ e $\lambda \in L^2(\Omega)$ tais que

$$(6.28)\qquad B(w;v) + \int_\Omega \lambda(x)\, v(x)dx + \ell(v) = 0, \quad \forall\, v \in V_h \quad ,$$

$$\left.\begin{aligned} (6.29)\qquad & |\lambda(x)| \le \mathcal{Y}(x) \\ (6.30)\qquad & \lambda\, w = \mathcal{Y}|w| \end{aligned}\right\} \quad \text{qtp em } \Omega \text{ .}$$

É fácil ver que (6.28)-(6.30) implicam (6.23): tomamos em (6.28) $v = z-w$, com $z \in V_h$ arbitrária, obtendo

$$B(w;\, z-w) + \int_\Omega \lambda(x)\,[z(x) - w(x)]dx + \ell(z-w) = 0 \quad ,$$

do que decorre, graças a (6.29) e (6.30), que

$$B(w;\, z-w) + \int_\Omega \mathcal{Y}|z|dx - \int_\Omega \mathcal{Y}|w|dx + \ell(z-w) \ge 0$$

e, tendo em vista (6.24), vem por fim (6.23).

A demonstração da existência do multiplicador λ pode ser encontrada em [14], juntamente com outros detalhes omitidos nesta seção.

Introduzimos agora o conjunto convexo, fechado e limitado

$$(6.31)\qquad \Lambda = \{q \in L^2(\Omega);\ |q(x)| \le \mathcal{Y}(x) \quad \text{qtp em } \Omega\} \ .$$

Tem-se que

$$(6.32)\qquad \sup_{q\in\Lambda} (q,v)_o \le \int_\Omega \mathcal{Y}|v|dx = j(v), \quad \forall\, v \in V_h \quad ,$$

mas de fato vale a igualdade em (6.32). Assim, w satisfaz

$$\eta(w) = \inf_{v\in V_h} \sup_{q\in\Lambda} \{\tfrac{1}{2}\, B(v;v) + (q,v)_o + \ell(v)\}$$

Definindo-se a função lagrangeana $\mathcal{L}: V_h \times \Lambda \to \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{L}(v,q) = \frac{1}{2} B(v;v) + (q,v)_o + \ell(v) \quad ,$$

tem-se

$$\eta(w) = \mathcal{L}(w,\lambda)$$

e demonstra-se ainda que (w,λ) é um ponto de sela de $\mathcal{L}$, i.e.

$$\mathcal{L}(w,\lambda) = \inf_{v\in V_h} \sup_{q\in \Lambda} \mathcal{L}(v,q) = \sup_{q\in\Lambda} \inf_{v\in V_h} \mathcal{L}(v,q) \quad .$$

O par (w,λ) pode ser então aproximado através do seguinte

Algorítmo (de Usawa).

Passo 0: escolha de $\lambda_o \in \Lambda$ (arbitrário) $\longrightarrow \lambda_o$

Passo m: ($m\geq 1$)

a) minimização de $\mathcal{L}(v, \lambda_{m-1})$, $v \in V_h$ $\longrightarrow w_m$

b) escolha do parâmetro ρ_m

cálculo de $\lambda_m = P_\Lambda(\lambda_{m-1} + \rho_m w_m)$ $\longrightarrow \lambda_m$

Pelo raciocínio já exposto na seção VI.1, a minimização de $\mathcal{L}(v,\lambda_{m-1})$ é equivalente à resolução da equação

$$B(w_m;v) + (\lambda_{m-1},v)_o + \ell(v) = 0, \quad \forall\, v \in V_h \ .$$

Os parâmetros ρ_m são escolhidos num intervalo que depende das constantes ρ, α_e, β_e, α_v e β_v, garantindo-se que

$$\lim_{m\to\infty} |w_m - w|_1 = 0 \ .$$

Finalmente, P_Λ é o operador de projeção sobre Λ, que é dado explicitamente por

$$P_\Lambda v = \frac{\Psi v}{\max\{\Psi, v\}} \ , \quad v \in L^2(\Omega).$$

CAPÍTULO VII

UMA TERCEIRA ABORDAGEM: MÉTODO DE PONTO FIXO

1. Discretização Direta. Um Problema de Ponto Fixo

Neste capítulo, uma outra forma de calcular soluções aproximadas do modelo do bate-estaca (ver Capítulo II, seção 3, principalmente (2.10)-(2.14), (2.27)) será apresentada. Todavia o presente capítulo tem um caráter apenas ilustrativo e, portanto, não serão feitas demonstrações dos vários fatos citados, sendo apenas indicadas referências.

Em alguns pontos, esta nova forma de discretização difere, acentuadamente, dos algorítmos do Capítulo V e do Capítulo VI. Primeiro, o presente esquema não é linearizado. Consequentemente, o algoritmo implementado não se resume ao cálculo de soluções de sistemas lineares. Segundo, é um esquema não-regularizado, aproximando assim diretamente o modelo proposto, e não um que esteja "próximo" dele. Por último, os esquemas anteriores são esquemas de segunda ordem em k, centrados no ponto t_n da malha e envolvendo os níveis t_{n-1}, t_n e t_{n+1} ou t_{n-2}, t_{n-1} e t_n; ao passo que o deste capítulo é centrado em $t_{n+1/2} = (t_{n+1}+t_n)/2$, e envolve somente os níveis t_n e t_{n+1}. Esta última diferença não é essencial, mas traz certas diferenças na notação.

Assim, neste capítulo, em vez das identidades de (5.8), consideraremos (por simplicidade, não utilizaremos o subescrito k)

(7.1a) $$\delta G^n = 2\,\frac{G^n - G^{n-1}}{k} - \delta G^{n-1} \quad ,$$

(7.1b) $$\delta G^{n+1/2} = \frac{\delta G^{n+1} + \delta G^n}{2} = \frac{G^{n+1} - G^n}{k} \quad ,$$

(7.1c) $$G^{n+1} = G^n + k\,\delta G^{n+1/2} \quad ,$$

(7.1d) $$\delta^2 G^{n+1/2} = \frac{\delta G^{n+1} - \delta G^n}{k} \quad ,$$

(7.1e) $$G^{n+1/2} = \frac{G^{n+1} + G^n}{2} \quad ,$$

bem como as funções

(7.2a) $$G_{h,k}(x,t) = \sum_{h=0}^{N} \left[G^n(x) + \delta G^n(x)(t-t_n) + \right.$$
$$\left. + \delta^2 G^{n+1/2}(x)\,\frac{(t-t_n)^2}{2}\right] \chi_n(t) \quad ,$$

(7.2b) $$\delta G_{h,k}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \left[\delta G^n(x) + \delta^2 G^{n+1/2}(x)(t-t_n)\right] \chi_n(t) \quad ,$$

(7.2c) $$\delta^2 G_{h,k}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \delta^2 G^{n+1/2}(x)\,\chi_n(t) \quad ,$$

onde χ_n é a função característica de $[t_n, t_{n+1}]$.

Para obter este novo esquema, consideremos a forma semi-discretizada da inequação (2.27), a qual é obtida através dos mesmos argumentos (método Faedo-Galerkin) que levaram a $(4.10)_{\varepsilon,h}$. Isto é, consideramos o seguinte problema, onde u_h tem uma expressão similar a (4.12).

Encontrar $u_h : [0,T) \to V_h$, tal que

$$(7.3)\qquad (\ddot{u}_h, w-\dot{u}_h) + A_v(\dot{u}_h; w-\dot{u}_h) + A_e(u_h; w-\dot{u}_h) + J(u_h, w) - J(u_h, \dot{u}_h) \geq \langle E | w-\dot{u}_h \rangle_1 ,$$

$$\forall\, w \in V_h ,\quad t \in [0,T) ,$$

$$(7.4)\qquad u_h(0) = U^0 ,$$

$$(7.5)\qquad \dot{u}_h(0) = \delta U^0 ,$$

onde são dados U^0 e δU^0, pertencentes a V_h. E é um funcional linear, contínuo em $H^1(\Omega)$. $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ é o par de dualidade de $H^1(\Omega)$ e $H^1(\Omega)^*$. E A_e e A_v são dadas por (2.18) e (2.21). Quando $E = f(x,t) + F(t)\delta_o$, $\langle E | w \rangle_1$ é dado por (2.17).

A seguir, substituamos a função u_h, e suas derivadas no tempo, pelas fórmulas (7.1) convenientemente escolhidas. Chegamos, assim, ao seguinte algorítmo.

Dados U^0 e δU^0 em V_h, encontrar uma seqüência $\{U^n\}_{0 \leq n \leq N+1}$ de funções de V_h que satisfaçam (7.4), (7.5) e

$$(7.6)\qquad (\delta^2 U^{n+1/2}, w-\delta U^{n+1/2}) + A_v(\delta U^{n+1/2}, w-\delta U^{n+1/2}) + A_e(U^{n+1/2}, w-\delta U^{n+1/2}) + J(U^{n+1/2}, w) - J(U^{n+1/2}, \delta U^{n+1/2}) \geq \langle E^{n+1/2} | w-\delta U^{n+1/2} \rangle_1 ,$$

onde

$$\langle E^{n+1/2} | w \rangle_1 = \left(\frac{1}{k}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)dt, w\right) + \left(\frac{1}{k}\int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t)dt\right)\delta_o(w) ,$$

pertence a $H^1(\Omega)^*$.

De [8] e [10] sabemos que caso a sequência $\{U^n\}$ possa ser calculada, o algorítmo acima é incondicionalmente estável e que $U_{h,k}$ converge, num sentido preciso, para a solução da inequação (2.27), quando h e $k \to 0$. Vejamos a seguir como o cálculo da sequência $\{U^n\}$ se reduz ao computo de pontos-fixos.

Inicialmente, uma

Observação - se $f: H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é um funcional convexo, dizemos que f é própria se $f \not\equiv \infty$ e $f > -\infty$. Um subgradiente de f, no ponto $y \in H^1(\Omega)$, é, essencialmente, um hiperplano maximal afim de $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ que passa pelo ponto $(y, f(y))$ e é tal que $f(y)$ é sempre maior ou igual ao valor do ponto correspondente do hiperplano. Ou seja, se identificamos o hiperplano maximal com o funcional linear, $f_* \in H^1(\Omega)^*$ - que o define -, f_* é subgradiente de f em y se e somente se

$$f(x) - f(y) \geq \langle f_* | x-y \rangle_1 .$$

O conjunto composto de todos os subgradientes de f num ponto y é chamado de subdiferencial de f em y. Mostra-se que toda função convexa própria tem subdiferencial não vazio em todos os pontos. Para maiores detalhes consultar [5].

A seguir, notemos que $J(y,\cdot)$, como um funcional contínuo e convexo próprio (ver Capítulo II, seção 3), tem subdiferencial não vazio em todos os pontos de $H^1(\Omega)$, qualquer que seja $y \in L^2(\Omega)$. Denotemos por $S(y,v)$ o subdiferencial de $J(y,\cdot)$ no ponto v. Temos então que, para todo y em $L^2(\Omega)$ e todo v,

em $H^1(\Omega)$,

$$(7.7) \qquad J(y,v_1) - J(y,v_o) \geq \langle \varphi \mid v_1 - v_o \rangle \ , \quad \forall\ v_1 \in H^1(\Omega) \ ,$$

se $\varphi \in S(y,v_o) \subset H^1(\Omega)^*$. Assim, caso uma seqüência $\{U^n\}$ de elementos de V_h satisfaça

$$(7.8) \qquad (\delta^2 U^{n+1/2}, w-\delta U^{n+1/2}) + A_v(\delta U^{n+1/2}, w-\delta U^{n+1/2}) +$$
$$+ A_e(U^{n+1/2}, w-\delta U^{n+1/2}) + \langle \varphi | w-\delta U^{n+1/2} \rangle_1 \geq$$
$$\geq \langle E_{n+1/2} | w-\delta U^{n+1/2} \rangle_1 \ , \quad \forall\ w \in V_h \ ,$$

para algum $\varphi \in S(U^{n+1/2}, \delta U^{n+1/2})$; então, esta sequência necessariamente satisfaz (7.6). Por conveniência, notaremos a partir de agora um elemento genérico de $S(y,v)$ por $\varphi(y,v)$. Além disso, é fácil ver que

$$(7.9) \quad \langle \varphi(y,v) | w \rangle_1 = c \int_\Omega H(x+y(x)-L)[x+y(x)-L]\ G_\alpha(v(x))\, w(x)dx \ ,$$

onde

$$G_\alpha(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \lambda > 0, \\ \alpha, & \text{se} \quad \lambda = 0, \\ -1, & \text{se} \quad \lambda < 0, \end{cases}$$

e $-1 \leq \alpha \leq 1$.

Consideremos, agora, uma base $\{e_1, \ldots, e_N\}$ de V_h que seja ortonormal em $L^2(\Omega)$ e sua extensão $\{e_i\}_{i \geq 1}$ a $H^1(\Omega)$ (uma tal base existe e é diferente da do Capítulo IV, seção 2). Consideremos, também, $P_h : H^1(\Omega)^* \to V_h$ o projetor naturalmente associado a esta base, isto é,

$$P_h(f) = \sum_{i=1}^{N} \langle f | e_i \rangle_1 \ e_i \ ,$$

e sejam $\tilde{A}_v$ e $\tilde{A}_e$ os operadores de $H^1(\Omega)$ no seu dual induzidos pelas formas bilineares A_v e A_e, respectivamente.

Tomando $w = \pm w' + \delta U^{n+1/2}$ em (7.8), segue-se que (7.8) é equivalente a

$$(7.10) \qquad (\delta^2 U^{n+1/2}, w) + A_v(\delta U^{n+1/2}, w) + A_e(U^{n+1/2}, w) + \langle \varphi(U^{n+1/2}, \delta U^{n+1/2}), w\rangle_1 = \langle E^{n+1/2} | w\rangle_1, \quad \forall\, w \in V_h ,$$

ou seja,

$$(7.10)' \qquad \delta^2 U^{n+1/2} = -(P_h \circ \tilde{A}_v)(\delta U^{n+1/2}) - (P_h \circ \tilde{A}_e)(U^{n+1/2}) - P_h(\varphi(U^{n+1/2}, \delta U^{n+1/2})) + P_h(E^{n+1/2}).$$

A partir da equação (7.10)', construiremos a sequência $\{U^n\}$, $0 \le n \le n+1$, indutivamente. Isto é, mostraremos como, dados U^n e δU^n, a equação (7.10)' determina U^{n+1} e δU^{n+1}.

De (7.1c) e (7.1e) têm-se que

$$U^{n+1/2} = U^n + \frac{k}{4}(\delta U^{n+1} + \delta U^n).$$

Definamos então

$$\Psi_n(y) = \{P_h\varphi \mid \varphi \in S(U^n + \tfrac{k}{4}[y + \delta U^n], \tfrac{y + \delta U^n}{2})\},$$

que é uma função de V_h no conjunto de partes de V_h. Podemos, assim, reescrever (7.10)' da seguinte forma:

$$\delta^2 U^{n+1/2} + (P_h \circ \tilde{A}_u)(\delta U^{n+1/2}) + (P_h \circ \tilde{A}_e)(U^n + \tfrac{k}{4}[\delta U^{n+1} + \delta U^n]) = P_h(E^{n+1/2}) - \Psi ,$$

onde $\psi \in \Psi_n(\delta U^{n+1})$. Assim, se I é o operador identidade, a equação (7.10)' é equivalente a

$$[I + \frac{k}{2} P_h \circ \tilde{A}_v + \frac{k}{4} P_h \circ A_e](\delta U^{n+1}) = P_h(E^{n+1}) - \frac{k}{2}[P_h \circ A_v(\delta U^n)] ,$$

$$- k[P_h \circ A_e (U^n + \frac{k}{4} \delta U^n)] + \delta U^n - \psi .$$

Devido à coercividade das formas bilineares A_v e A_e, o operador $B: V_h \to V_h$, dado por

$$B = I + \frac{k}{2} P_h \circ \tilde{A}_v + \frac{k^2}{4} P_h \circ \tilde{A}_e ,$$

é inversível qualquer que seja $k \geq 0$, e sua inversa possui norma limitada independentemente de h e k. Desta forma, se considerarmos o operador $\mathbb{F}$ de V_h no conjunto de partes de V_h definido por

$$\mathbb{F}(y) = -B^{-1} \circ \Psi_n(y) + D_n , \tag{7.11}$$

onde

$$B^{-1} \circ \Psi_n(y) = \{B^{-1} \psi \mid \psi \in \Psi_n(y)\}$$

e

$$D_n = B^{-1} \circ P_n(E^{n+1/2}) + B^{-1}(\delta U^n) - \frac{k}{2} (B^{-1} \circ P_n \circ \tilde{A}_v(\delta U^n)) -$$

$$- k(B^{-1} \circ P_n \circ \tilde{A}_e(U^n + \frac{k}{4} \delta U^n)) ,$$

o problema de - dados U^n e δU^n - encontrar U^{n+1} e δU^{n+1} satisfazendo (7.8) se reduz ao seguinte problema de ponto fixo.

Encontrar $\delta U^{n+1} \in V_h$ tal que

$$\delta U^{n+1} \in \mathbb{F}(\delta U^{n+1}) . \tag{7.12}$$

O Teorema do Ponto Fixo de Kakutani [16, Cap. V] garante a existência de um ponto fixo para este problema, posto que $\mathbb{F}$ é uma função semi-contínua superiormente [16, Cap V] tal que $\mathbb{F}(y)$ é um convexo para todo y e, para uma bola $B(0,r)$ com um raio r suficientemente grande, temos que,

$$\mathbb{F}(y) \subset B(0,r), \quad \forall\, y \in B(0,r) \,. \tag{7.13}$$

Para a demonstração do último fato ver [8]. Um raciocínio semelhante ao exposto em [13, seção 3] mostra que (7.6) tem no máximo uma solução para cada U^n, ∂U^n. Donde concluímos que o ponto fixo de Kakutani do operador $\mathbb{F}$ é único.

Do esposto acima, segue que a seqüência $\{U^n\}_{0\le n\le m+1}$ existe e é bem definida, ao menos quanto ao aspecto teórico.

2. Um algorítmo para o cálculo de um ponto fixo aproximado

Nesta seção, exporemos uma maneira de computar pontos fixos aproximados de (7.12). Um ponto fixo aproximado, no sentido do problema (7.12), é um ponto que está muito próximo de sua imagem. Isto é, um ponto $\tilde{x}$ tal que existe $y \in \mathbb{F}(\tilde{x})$ satisfazendo

$$|y-\tilde{x}| \le \mu$$

onde μ é uma tolerância dada. O algorítmo que será exposto, o de Eaves, não é, necessariamente, o mais eficiente, mas é o mais simples que resolve o problema de encontrar um ponto fixo aproximado de $\mathbb{F}$.

Devido a (7.13), é suficiente considerarmos apenas a res-

trição de $\mathbb{F}$ à bola $\mathcal{B}(0,r)$, de agora em diante denotada por $\mathcal{B}$ apenas. Temos então que

$$\mathbb{F}: \mathcal{B} \to \mathcal{B}^+ ,$$

onde $\mathcal{B}^+$ é o conjunto das partes convexas de $\mathcal{B}$. Apresentaremos abaixo, de forma suscinta, uma lista de definições necessárias. Para maiores detalhes, consultar [16].

Seja V_h e $\{e_1,\ldots,e_N\}$ uma base qualquer deste espaço. Identificaremos V_h à $\mathbb{R}^N$ pelo isomorfismo canônico segundo esta base e utilizaremos a mesma notação para um vetor de V_h e seu vetor de coordenadas em $\mathbb{R}^N$.

Definição 1 - Dados $\xi^0,\ldots,\xi^j$ pontos de V_h, a combinação linear $\sum_{i=0}^{j} \lambda_i \xi^i$, sujeita à restrição $\sum_{i=0}^{j} \lambda_i = 1$, é uma combinação afim dos pontos ξ^i. Se, além disso, $\lambda_i \geq 0$ para todo $0 \leq i \leq j$, têm-se então uma combinação convexa.

Definição 2 - Seja $S \subset \mathbb{R}^N$. O envoltório afim de S, denotado $\mathrm{aff}(S)$, é o conjunto de todas as combinações afins de elementos de S. Todos os conceitos relativos da topologia são relativos à topologia do envoltório afim. Por exemplo, o interior relativo de S é o interior de S como subconjunto de $\mathrm{aff}(S)$. Um conjunto de vetores $\{\xi^0,\ldots,\xi^j\}$ é afim-independente se e somente se a dimensão de $\mathrm{aff}(\{\xi^0,\ldots,\xi^j\})$ é igual a j. Ou, de forma equivalente, se

$$\sum_{i=0}^{j} \lambda_i \xi^i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^{j} \lambda_i = 0$$

implicam que $\lambda_i = 0$, para todo i.

Definição 3 - O envoltório convexo de um conjunto S, denotado $co(S)$, é o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de S. Se $\xi^0,\ldots,\xi^j$ é um conjunto afim-independente, então o interior relativo do seu envoltório convexo, isto é

$$(7.14)\quad \sigma = \{ \sum_{i=0}^{j} \lambda_i \xi^i \mid \lambda_i > 0 \text{ qualquer que seja } i \text{ e } \sum_{i=0}^{j} \lambda_i = 1\}$$

é um j-simplex. Os vértices de σ são $\xi^0,\ldots,\xi^j$ e escrevemos $\sigma = \langle \xi^0,\ldots,\xi^j\rangle$. Denotamos o fecho (relativo) de σ por $\overline{\sigma} = [\xi^0,\ldots,\xi^j]$, $\overline{\sigma}$ é chamado de j-simplex fechado.

Definição 4 - Um simplex τ é uma faceta de um simplex σ, se todos os vértices de τ são vértices de σ. Se $\dim \tau = \dim \sigma - 1$, τ é uma face de σ. Se $\dim \tau = 1$, τ é uma aresta de σ. Se ξ é o vértice de σ que não é vértice da face τ, τ é a face de σ oposta a ξ.

Definição 5 - Se S é um simplex tal que $\dim(S) = n \leq N$, então G é uma triangularização de S caso

i) G seja uma coleção de n-simplexos,

ii) as facetas de todos os simplexos em G formem uma partição de S,

iii) cada ponto $\xi \in S$ tenha uma vizinhança que intercepte apenas um número finito de simplexos de G.

Denotaremos por G^j o conjunto de todos os j-simplexos que são facetas de algum simplex de G. Chamaremos os elementos de G^0 de vértices de G. Por exemplo, seja

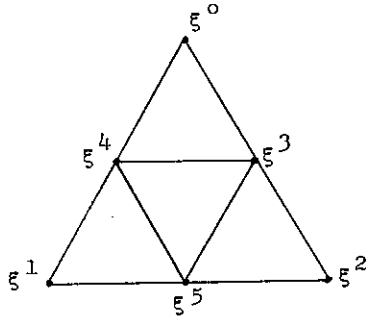


Fig. 12

temos assim que

$$S = \langle \xi^0, \xi^1, \xi^2 \rangle \ ;$$

$$G = G^2 = \{\langle \xi^0, \xi^4, \xi^3 \rangle, \ \langle \xi^4, \xi^5, \xi^3 \rangle, \ \langle \xi^1, \xi^4, \xi^3 \rangle, \ \langle \xi^5, \xi^2, \xi^3 \rangle\} \ ;$$

$$G^1 = \{\langle \xi^0, \xi^4 \rangle, \ \langle \xi^0, \xi^3 \rangle, \ \langle \xi^4, \xi^3 \rangle, \ \langle \xi^4, \xi^5 \rangle, \ \langle \xi^4, \xi^1 \rangle, \ \langle \xi^1, \xi^5 \rangle, \ \langle \xi^5, \xi^3 \rangle, \ \langle \xi^5, \xi^2 \rangle, \ \langle \xi^2, \xi^3 \rangle\};$$

$$G^0 = \{\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \xi^5\}$$

Definição 6 - Seja S um simplex, G uma triangularização de S e $F: S \to \mathcal{P}(S)$ (conjunto de partes de S) tal que $F(\xi)$ não é vazio, qualquer que seja $\xi \in S$. Para todo vértice α de G, escolha $f(\alpha) \in F(\alpha)$. Se $\xi \in S$, então existe um simplex $\langle \alpha^0, \ldots, \alpha^n \rangle$ de G tal que $\xi \in [\alpha^0, \ldots, \alpha^n]$. Podemos então escrever $\xi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \alpha^i$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, e os pares λ_i, α^i para $\lambda_i > 0$ são únicos [16, Teorema 2.3]. Defina

$$f(\xi) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(a^i) \quad . \tag{7.15}$$

A função $f: S \to \mathbb{R}^N$ está bem definida. Chamamos f de uma aproximação linear por partes de F com respeito a G.

O algorítmo a ser apresentado baseia-se na idéia, utilizada por Kakutani na demonstração de existência do ponto fixo, de aproximar o ponto fixo de F por uma seqüência de pontos fixos de aproximações lineares por partes de F. A próxima definição dá uma forma operacional de decidirmos se existe um ponto fixo de f num dado simplex da triangularização G. Suporemos abaixo, sem perda de generalidade, que a dimensão do simplex S seja N.

Definição 7 - Sejam S um simplex, $F: S \to \mathcal{P}(S)$, G uma triangularização de G, e f uma aproximação linear por partes de F com respeito a G. A função $\ell(\xi) = f(\xi) - \xi$ é chamada de rótulo vetorial de f (ou um rótulo vetorial de F com respeito a G). Observe que os pontos fixos de f são zeros de ℓ.

Se $\sigma = \langle \xi^0, \ldots, \xi^j \rangle \in G^j$, então a matriz $-(j+1)x(N+1)$,

$$\mathcal{L}_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \ell(\xi^0) & & \ell(\xi^j) \end{bmatrix} \quad , \tag{7.16}$$

é chamada de matriz-rótulo de σ. Tem-se que [16, Capítulo VII], se t^0 é o vetor $(1,0,\ldots,0)^T$ de $\mathbb{R}^{N+1}$, podemos identificar os pontos fixos de f (ou zeros de ℓ) da seguinte forma.

Seja $\sigma = \langle \xi^0, \ldots, \xi^N \rangle \in G$. Então existe um ponto fixo de f em $\overline{\sigma}$ se e somente se existe uma solução do problema

(7.17) $$\mathfrak{L}_\sigma w = t^o \in \mathbb{R}_+^{N+1} \quad ,$$

onde $\mathbb{R}_+^{N+1} = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} \text{ tq } x_i \geq 0, \ 0 \leq i \leq N\}$. Se w é solução de (7.17), então $\tilde{\xi} = \sum_{i=0}^{N} w_i \xi^i$ é um ponto fixo de f.

Definição 8 - Um simplex σ de G é dito completo se existe uma solução de (7.17). Isto é, se existe um ponto fixo de f em σ.

Para ver como esses conceitos se adaptam à resolução do problema de ponto fixo (7.12), seja S um simplex (regular) de V_h tal que $\beta \subset S$. Um algorítmo que constrói um tal simplex é descrito em [8, Capítulo IV]. Em seguida, seja $\mathbb{F}_o$, uma extensão de $\mathbb{F}$ à S, definida por

$$\mathbb{F}_1(\xi) = \begin{cases} \mathbb{F}(\xi), & \text{se } \xi \in \beta \\ \phi \quad , & \text{se } \xi \in S-\beta \end{cases}$$

e

$$\mathbb{F}_2(\xi) = \begin{cases} \{c\} \ , & \text{se } \xi \in S-\mathring{\beta} \\ \phi \quad , & \text{se } \xi \in \mathring{\beta} \end{cases} \quad ,$$

onde $\mathring{\beta}$ é o interior de β, ϕ o conjunto vazio e $c \in \mathring{\beta}$, e

(7.18) $$\mathbb{F}_o(\xi) = co(\mathbb{F}_1(\xi) \cup \mathbb{F}_2(\xi)).$$

Temos que $\mathbb{F}_o$ é s.c.s, posto que $\mathbb{F}$ também é; e que se $\tilde{\xi}$ é

um ponto fixo de $\mathbb{F}_o$ então $\tilde{\xi} \in \mathcal{B}$ e é um ponto fixo de $\mathbb{F}$[16].

Consideremos, também, G uma triangularização de $\mathcal{S}$ e f uma aproximação linear por partes de $\mathbb{F}_o$ com respeito a G. Isto posto, o problema se resume em encontrar um simplex σ de G que seja completo. Em cujo caso, a solução w de (7.17) dará o ponto fixo aproximado. O algorítmo de Eaves consiste exatamente num método de procura deste simplex completo.

O algorítmo, acima referido [8, Capítulo IV], que constrói o simplex $\mathcal{S}$, o faz de forma que a face oposta a um dos seus vértices esteja contida no hiperplano afim dado por

$$H_o = \{\xi \in \mathbb{R}^N \mid \xi_N = R\} \quad ,$$

onde R é uma constante que depende do raio da bola $\mathcal{B}$. Escolhamos então $\xi_o \in H_o$ tal que ξ_o pertença a $\mathcal{S} \cap H_o$. Pode-se sempre supor que ξ_o pertença a um simplex τ_o de G^{n-1}, pois uma pequena perturbação o colocaria num destes simplexos. Seja $d = c - \xi_o$, onde c é a constante da definição de $\mathbb{F}_o$. Dizemos que:

Defínção 9 - Um simplex $\sigma \in G^{N-1} \cup G$ é um simplex quase completo, se existe uma solução para o sistema

$$\mathcal{L}_\sigma w + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ d \end{bmatrix} = t^o \quad , \quad w \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+ . \tag{7.19}$$

Se a matriz $\left[\mathcal{L}_\sigma \mid \begin{matrix} 1 \\ d \end{matrix}\right]$ tem posto $N+1$ e não é degenerada o sistema (7.19) tem exatamente duas soluções com $N+1$ variáveis positivas [16, 3]. Dizemos que uma coluna de $[\mathcal{L}_\sigma \mid \begin{matrix} 1 \\ d \end{matrix}]$ é básica, para uma dada solução de (7.19), se w_i ou λ são estritamente po

sitivos. Assim, se o posto de $[\mathcal{L}_\sigma \mid \frac{1}{\lambda}]$ é N+1 e $\sigma \in G$, só existe uma única coluna que não é básica, para cada uma das duas soluções.

Devido à definição do vetor d em (7.19), mostra-se que $[\mathcal{L}_{\tau_o} \mid \frac{1}{\lambda}]$ tem uma solução com $\lambda = 1/2$ e é não-singular [16, Capítulo VII]. Além disso, τ_o é o único simplex de G^{N-1} que é quase-completo. O algorítmo de Eaves começa do simplex τ_o e cai caminhando através dos simplexos de G até encontrar um simplex completo. O algorítimo é:

Passo zero - Seja σ_1 o único simplex de G tendo τ_o como face. Seja ξ^+ o vértice de σ_1 que não o é de τ_o. Considere o sistema linear (.19) com a matriz $\mathcal{L}_{\tau_o}$. Faça $m \leftarrow 1$.

Passo 1 - Calcule o rótulo vetorial $\ell(\xi^+)$ e monte o sistema (7.19) com a matriz $\mathcal{L}_{\sigma_n}$. Este sistema tem duas soluções w^+, λ^+ e w^-, λ^-, sendo que a coluna $\begin{bmatrix} 1 \\ \ell(\xi^+) \end{bmatrix}$ não é básica para a solução w^+, λ^+. Se $\lambda^- = 0$, PARE; σ_m é um simplex completo. Caso contrário, existe uma única coluna $\begin{bmatrix} 1 \\ \ell(\xi^-) \end{bmatrix}$ de $\mathcal{L}_{\sigma_m}$ que não é básica (Note que $\xi^- \in \sigma_m$ e que $\xi^- \neq \xi^+$).

Passo 2 - Encontre o <u>único</u> simplex σ_{m+1} de G contendo todos os vértices de σ_m, exceto ξ^-. Seja ξ^+ o vértice de σ_{m+1} que não o é de σ_m. Faça $m \leftarrow m+1$ e volte para o passo 1.

Teoricamente, o algorítmo acima é bem definido e para. Pois exis-

tem apenas um número finito de simplexos quase completos em $G^{N-1} \cup G$ e pode-se garantir que os simplex σ_m nunca se repetem. Todavia, na prática, a hipótese de não degenerescência, válida quando se trabalha em otimização, não é viável neste problema; principalmente quando o diâmetro dos simplexos de G é muito pequeno. Portanto, é necessário que utilizemos sistemas lexicográficos [16, 3] a fim de evitar ciclagem, ou seja, repetição dos simplex σ_m.

Uma vez conhecido o conceito de sistemas lexiocográficos, a generalização do algorítmo apresentado é imediata. Porém, a introdução de sistemas lexicográficos não é imediata, e se situa fora dos objetivos deste trabalho.

Referências

[1] Courant, R. - Variational Methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. Bull. Amer. Math. Soc., v. 49 (1943), pp. 1-23.

[2] Courant, R., Friedrichs, K.O. & Lewy, M. - Uber die partiellen differezingleichungen der matematischen phisik.Math.Ann., v. 100, pg. 59-14 (1928). Versão inglesa IBM Journal, March 1967.

[3] Dantzig, G.B. - Linear programming and extentions. Princeton University Press, Princeton, N.J. (1963).

[4] Do , C. - Inequations variationelles en mecanique de milieux continus. Laboratório de Cálculo - CBPF. Rio de Janeiro (1978).

[5] Ekeland, I., Teman, R. - Analise convexe et problèmes variationelles. Études Mathématiques, Dunod, Paris 1974.

[6] Gesteira, C. - Tese de Doutorado. Programa de Engenharia Civil, COPPE - UFRJ, 1978.

[7] Kritz, M.V. - The pile-driver problem via a fixed point argument. Bol.Soc.Bras.Mat., v. 10, nº 2 (1979).

[8] Kritz, M.V. - Aplicação de técnicas de ponto fixo ao estudo e simulação de problemas em mecânica do contínuo. IM/UFRJ, Tese de Doutorado. Em preparação .

[9] Moura, C.A. de - Análise funcional e aplicações. Laboratório de Cálculo - CBPF. Rio de Janeiro (1978).

[10] Moura, C.A. de, Feijóo, R.A. & Raupp, M.A. - Numerical simulation of the motion of a pile thrust tinto the soil. Rev. Bras. Fis., v.8 (1979).

[11] Moura, C.A. de, Raupp, M.A. & Barbetta, J.C. - Numerical Study of an equation related to wave propagation. Bol. Soc. Bras. Mat., v.10, nº 1 (1979).

[12] Raupp, M.A. - Análise numérica e equações diferenciais parciais. Laboratório de Cálculo - CBPF. Rio de Janeiro (1978).

[13] Raupp, M.A., Feijóo, R.A. & Moura, C.A. de - A non-linear problem in dynamic visco-elasticity with friction. Bol. Soc. Bras. Mat., v. 9, nº 1, pp. 61-82 (1978).

[14] Raupp, M.A., Feijóo, R.A. & Moura, C.A. de - An optimization algorithm for the pile-driver problem. Bol.Soc.Bras.Mat., v. 9, nº 2, pp 38-62 (1978).

[15] Suaiden, T. - Em preparação.

[16] Todd, M.J. - The computation of fixed points and applications. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 124, Springer-Verlag. Berlin 1976.

ANÁLISE HARMÔNICA DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Pedro A. Morettin

E R R A T A

PÁGINA	LINHA	ONDE ESTÁ	DEVE SER
v	14 ↓	Processos Estocástico	Processo Estocástico
vi	2 ↓	ALIASING	"ALIASING"
1	4 ↓	análise de Fourier	Análise de Fourier
6	12 ↓	(.17)	(1.7)
9	7 ↓	$[E(X)]^2 = E(X^2)$	$[E(X)]^2 \leq E(X^2)$
12	11 ↓	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$
13	4 ↑	é integrável do	é integrável no
22	9 ↑	o estudo de	o estudo a
26	2 ↑	$= \Sigma\Sigma a_j a_j$	$= \Sigma\Sigma a_j a_k$
27	5 ↑	$\lvert\Sigma\{\lvert \quad \rvert X(0)\}\rvert^2$	$\lvert E\{[\quad]X(0)\}\rvert^2$
41	14 ↓	v.a.independentes	v.a.independente
45	9 ↑	é a chamada	é chamada
46	10 ↑	T = n = 0,	T, n = 0
52	8 ↓	x: a,b → $\mathbb{R}$	x:[a,b] → $\mathbb{R}$
55	10 ↓	, então aproximamos	. Então aproximamos
60	13 ↑	$(2\pi)^{-1} \int e^{it\omega} x(t)dt$	$(2\pi)^{-1} \int e^{-it\omega} x(t)dt$
61	2 ↓	diferencial	diferenciável
72	9 ↓	$\frac{a}{2}\{\delta(\omega - \frac{1}{\Delta}) + \delta(\omega + \frac{1}{\Delta})$	$\frac{a}{2}\{\delta(\omega - \frac{1}{\Delta}) + \delta(\omega + \frac{1}{\Delta})\}$
96	7 ↑	$=(2\pi)^{-1} \int h(u)e^{-i\omega u}dv$	$=(2\pi)^{-1} \int h(u)^{-i\omega u}du$
103	2 ↓	levada efeito	levada a efeito
107	7 ↑	para $\psi(\omega) + \psi(\omega)$	para $\psi(\omega) + \theta(\omega)$

PÁGINA	LINHA	ONDE ESTÁ	DEVE SER
108	3 ↓	$Y(t) = X(t)$	$Y(t) = \mathfrak{F}[X(t)]$
129	3 ↓	obtemos a f.d.	obtemos que a f.d.
131	4 ↓	$\omega_N = \frac{\pi}{\Delta t} > \Delta$	$\omega_N = \frac{\pi}{\Delta t} > \Omega$
137	6 ↑	$d_\nu^{(N)} = (2\pi N)^{1/2}$	$d_\nu^{(N)} = (2\pi N)^{-1/2}$
138	4 ↓	$E\{dz(\omega)\overline{dZ(\alpha)}\}$	$E\{dZ(\omega)\overline{dZ(\alpha)}\}$
139	1 ↓	$E\ dZ(\alpha)\overline{dZ(\beta)}\}$	$E[dZ(\alpha)\overline{dZ(\beta)}]$
143	4 ↑	$Cov\ I^{(N)}(\lambda), I^{(N)}(\mu)$	$Cov\{I^{(N)}(\lambda), I^{(N)}(\mu)\}$.
144	9 ↑	$T = (r_1 + \ldots + r_m)$	$T = N(r_1 + \ldots + r_m)$
155	1 ↓	estimadores espec	estimadores espectrais