

**Análise Harmônica de Processos
Estocásticos**

Pedro Alberto Morettin

COPYRIGHT © by PEDRO ALBERTO MORETTIN (1979)

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,
por qualquer processo, sem a permissão do autor.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Rua Luiz de Camões, 68
20.060 - Rio de Janeiro - RJ

"O âmago da Ciência, que quase sempre se apresenta como o mais importante no que se refere a resultados práticos, é a pesquisa altamente teórica e abstrata, nascida das infatigáveis curiosidade, flexibilidade e força da razão humana."

Andrei Sakharov

ÍNDICE

PREFÁCIO	vii
CAPÍTULO 1 - PRELIMINARES	1
1.1 - Introdução	1
1.2 - Processos Estocásticos e Séries Temporais.	2
1.3 - Integrais de Riemann-Stieltjes	3
1.4 - Variáveis Aleatórias	5
1.5 - Convergência de Variáveis Aleatórias	9
1.6 - Funções Características.	11
1.7 - Distribuições Normais.	14
1.8 - Exercícios	16
CAPÍTULO 2 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	18
2.1 - Introdução	18
2.2 - Especificação de um Processos Estocástico.	21
2.3 - Processos Estacionários.	24
2.4 - Propriedades da Função de Auto-Covariância	26
2.5 - Processos Estocásticos Complexos	28
2.6 - Exemplos de Processos Estocásticos	29
2.7 - Algumas Séries Temporais	36
2.8 - Exercícios	40
CAPÍTULO 3 - INTRODUÇÃO À ANÁLISE DE FOURIER.	43
3.1 - Introdução	43
3.2 - Coeficientes de Fourier - Aproximação por Mínimos Quadrados.	45
3.3 - Série de Fourier	47
3.4 - Forma Complexa da Série de Fourier	48
3.5 - Janelas.	50
3.6 - Coeficientes Discretos de Fourier.	55
3.7 - "Aliasing"	56
3.8 - Transformada de Fourier.	59
3.9 - Funções Generalizadas.	63
3.10 - Exemplo de Análise de Fourier.	67
3.11 - Exercícios	70
CAPÍTULO 4 - ESPECTRO DE UM PROCESSO ESTACIONÁRIO	74
4.1 - Introdução	74
4.2 - O Espectro	75
4.3 - O Teorema de Bochner-Khintchine.	78
4.4 - O Teorema da Representação Espectral de Cramér	84
4.5 - A Teoria de Wiener	93
4.6 - Exemplos	95
4.7 - Exercícios	100

CAPÍTULO 5 - FILTROS LINEARES, AMOSTRAGEM E ALIASING.	103
5.1 - Introdução	103
5.2 - Filtros Lineares	104
5.3 - O Problema Geral de Filtragem.	107
5.4 - A Equação Integral de Wiener-Hopf.	110
5.5 - Alguns Tipos de Filtros.	116
5.6 - Combinação de Filtros.	120
5.7 - Condições de Compatibilidade	121
5.8 - Amostragem	123
5.9 - "Aliasing"	126
5.10 - Exercícios	131
CAPÍTULO 6 - A TRANSFORMADA DE FOURIER FINITA E O PERIODOGRAMA.	135
6.1 - Introdução	135
6.2 - A Transformada de Fourier Finita	136
6.3 - O Periodograma	140
6.4 - A Transformada Rápida de Fourier	144
6.5 - Exercícios	147
CAPÍTULO 7 - ESTIMADORES ESPECTRAIS SUAVIZADOS.	149
7.1 - Introdução	149
7.2 - Estimadores Suavizados de Covariâncias	153
7.3 - Estimadores Suavizados de Periodogramas.	156
7.4 - Distribuição Assintótica dos Estimadores Suavizados.	159
7.5 - Intervalos de Confiança.	162
7.6 - Exemplos	163
7.7 - Exercícios	167
REFERÊNCIAS	169
APÊNDICE.	172

PREFÁCIO

O propósito destas notas é apresentar alguns tópicos da Análise Harmônica de Processos Estocásticos. Os requisitos prévios para a leitura são cursos em nível intermediário de Teoria das Probabilidades e Inferência Estatística. Conhecimentos da teoria dos processos estocásticos são desejáveis, se bem que os conceitos necessários são aqui desenvolvidos.

Parte do material apresentado tem sido ministrado no curso Análise de Séries Temporais para alunos de pós-graduação, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Não foram abordados aqui os tópicos referentes à análise espectral multivariada e modelos paramétricos finitos.

Gostaríamos de manifestar nossos agradecimentos à Comissão Organizadora do 12º Colóquio Brasileiro de Matemática pela oportunidade a nós concedida.

Agradeço, também, a Afrânio R. de Mesquita por ter lido criticamente o Capítulo 3 e a Maria Luíza Fátima Almeida pelo excelente trabalho de datilografia.

São Paulo, maio de 1978

Pedro Alberto Morettin

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

1.1 - INTRODUÇÃO

A análise de Fourier ou Análise Harmônica tem sido usada tradicionalmente, para resolver algumas equações diferenciais parciais que aparecem na Física Matemática, como a equação do calor e a equação das ondas.

Na análise de séries temporais, resultantes da observação de processos estocásticos, o objetivo básico é o de aproximar uma função do tempo por uma combinação linear de harmônicos (componentes senoidais), os coeficientes dos quais são as transformadas de Fourier discretas da série.

Em muitas aplicações, como em Meteorologia e Oceanografia, estamos em busca de periodicidades nos dados observados. Há duas situações que frequentemente ocorrem:

- (a) conhecemos frequências e queremos estimar amplitudes e fases.
- (b) queremos estimar amplitudes, frequências e fases.

No primeiro caso temos, por exemplo, o fenômeno das marés, onde as frequências são determinadas astronomicamente. O segundo caso é a situação mais geral encontrada.

Assim, se conhecemos a frequência ω do fenômeno sob consideração, um modelo adequado poderá ser

$$x(t) = \mu + R \cos(\omega t + \phi) + \xi(t), \quad (1.1)$$

para $t=1, 2, \dots, N$, instantes de observação. O problema é, então, estimar μ , R e ϕ , com base nos dados $x(1), \dots, x(N)$. Veja exercício 8 do Capítulo 3.

Mesmo que os dados não apresentem periodicidades, a Análise Harmônica é útil para analisá-los em componentes harmônicas periódicas.

1.2 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS E SÉRIES TEMPORAIS

A Análise de Fourier clássica é usada normalmente para estudar funções ou *sinais determinísticos*. Estes têm uma forma matemática definida e a teoria é desenvolvida para classes especiais de funções como por exemplo, funções absolutamente integráveis ou de decréscimo rápido (Capítulo 3). Contudo, na prática, temos observações feitas em instantes discretos do tempo, em geral equi-espaciaos e não uma função expressa por uma equação matemática. Mesmo que tenhamos observações contínuas, como no caso de temperaturas obtidas de um rolo de papel ou registros de marés, é necessário discretizá-las antes de analisá-las. Temos que ter, então, métodos de análise adequados para estas situações.

As funções que encontraremos em nossas análises serão, em geral, *funções aleatórias* e não determinísticas. Formalmente, uma função aleatória ou um *processo estocástico* é uma família de variáveis aleatórias e este enfoque será estudado com detalhe no Capítulo 2.

Imaginemos medir a temperatura do ar, de dado local, durante 24 horas; podemos obter o gráfico ilustrado na figura 1.1.

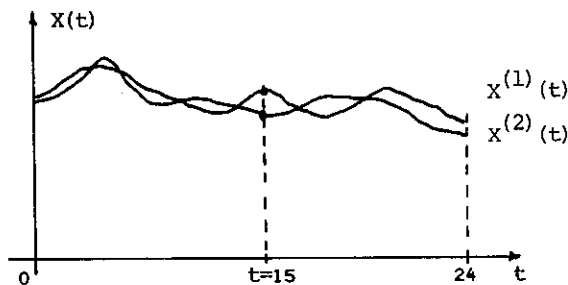


Figura 1.1

Notamos que, para dois dias diferentes, obtemos duas curvas que não são, necessariamente, as mesmas. Estas curvas são chamadas *trajetórias* do processo estocástico e este nada mais é do que o conjunto de todas as possíveis trajetórias que poderíamos observar. Cada trajetória é também chamada uma *série temporal* ou *função amostral*. Designando-se por $X^{(1)}(15)$ o valor da temperatura no instante $t = 15$, para a primeira trajetória (primeiro dia de observação), teremos um número real; para o segundo dia teremos outro número real, digamos $X^{(2)}(15)$. Em geral, para cada t , teremos os valores de uma variável aleatória $X(t)$, que tem uma certa distribuição de probabilidades. Daí, encararmos o processo como uma família de variáveis aleatórias $\{X(t), t \in T\}$, sendo T um conjunto de índices.

Nosso objetivo será aplicar os métodos da Análise Harmônica na análise de uma série temporal $X^{(j)}(t)$, que é uma trajetória de um processo estocástico. Na realidade, observamos apenas uma parte desta trajetória. Em algumas situações é possível observar algumas trajetórias do processo, mas na maioria dos casos temos uma só trajetória para análise. E o maior problema é estimar características de um conjunto de trajetórias (o processo estocástico) tendo-se apenas *parte de uma* trajetória.

Há vários modelos que podem ser usados para descrever e analisar processos estocásticos e o uso de cada um é baseado em nossos propósitos. Todavia, em cada caso, a verificação das suposições pressupostas no modelo é fundamental para a adequação do modelo à realidade física. Há várias classificações para os modelos que podem ser aplicados ao estudo de processos estocástico, mas aquele que será o objeto destas notas é o *modelo espectral*.

Aqui, os instrumentos básicos são a função de auto-covariância e sua transformada em Fourier, o espectro.

O Capítulo 4 tratará especificamente deste modelo.

1.3 - INTEGRAIS DE RIEMANN-STIELTJES.

Além da integral de Riemann, familiar ao leitor, será necessário utilizar o conceito de integral de Riemann-Stieltjes. No Capítulo 4, teremos que fazer uso de integrais de Riemann e Riemann-

-Stieltjes estocásticas.

Seja $[a, b]$ um intervalo; por uma partição de $P[a, b]$ entendemos um conjunto finito de pontos x_0, x_1, \dots, x_n , onde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

A integral de Riemann-Stieltjes pode ser obtida através de somas inferiores e superiores. Para detalhes, ver Rudin, 1964. Uma maneira equivalente é a que segue abaixo.

Suponha que $g(x)$ e $F(x)$ sejam funções definidas em $[a, b]$, com $F(x)$ crescente e $g(x)$ limitada em $[a, b]$. Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1, \dots, n$ e $\mu(P) = \max \Delta x_i$, $1 \leq i \leq n$.

Consideremos as somas

$$S(P, g, F) = \sum_{i=1}^n g(t_i) [F(t_i) - F(t_{i-1})], \quad (1.2)$$

onde t_1, \dots, t_n são tais que $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$, $i=1, \dots, n$.

Suporemos, agora, que o número de pontos de partição n e que $\mu(P) \rightarrow 0$. Se a soma (1.2) tende a um limite

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} S(P, g, F), \quad (1.3)$$

então este limite é chamado a *integral de Riemann-Stieltjes de $g(x)$ com respeito a $F(x)$* e usamos a notação

$$I = \int_a^b g(x) dF(x) \quad (1.4)$$

A integral imprópria de Riemann-Stieltjes é definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b g(x) dF(x) \quad (1.5)$$

se este limite existe.

Situações onde a integral de Riemann-Stieltjes existe são:

- (a) g contínua e F de variação limitada.
- (b) g e F de variação limitada, F contínua.

Algumas propriedades de (1.4) são apresentadas agora.

$$(i) \int_a^b g(x) d [c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x)] = c_1 \int_a^b g(x) dF_1(x) + c_2 \int_a^b g(x) dF_2(x),$$

c_1 e c_2 constantes.

$$(ii) \text{ Se } g(x) \geq 0 \text{ e } b > a, \text{ então } \int_a^b g(x) dF(x) \geq 0.$$

$$(iii) \int_a^b \sum_{i=1}^n g_i(x) dF(x) = \sum_{i=1}^n \int_a^b g_i(x) dF(x).$$

(iv) Se $F(x)$ possui uma derivada da qual é uma integral, isto é,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt; \text{ então}$$

$$\int_a^b g(x) dF(x) = \int_a^b g(x) p(x) dx.$$

(v) Seja $F(x)$ com um número finito de pontos de descontinuidade c_k em $[a, b]$, $a \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n \leq b$. Se $F(x)$ é constante em cada sub-intervalo (c_{k-1}, c_k) , então $F(x)$ é uma *função em patamar* e $F(c_k+0) - F(c_k-0) = F_k$ é o *salto* de $F(x)$ em c_k . Se $c_1 = a$, o salto em c_1 é $F(c_1+0) - F(c_1)$ e se $c_n = b$, o salto em c_n é $F(c_n) - F(c_n-0)$.

Então, se $g(x)$ e $F(x)$ não são ambas descontínuas em c_k , temos

$$\int_a^b g(x) dF(x) = \sum_{k=1}^n g(c_k) F_k, \quad (1.6)$$

e a integral (1.4) reduz-se a uma soma finita. A relação (1.6) pode ser estendida para um número infinito de pontos de descontinuidade, $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$, onde $F(x)$ muda de valor.

1.4 - VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Seja (Ω, A, P) um espaço de probabilidades, onde Ω é o espaço

amostral, A uma σ -álgebra de subconjunto de Ω (os eventos aleatórios) e P uma probabilidade sobre A . Uma *variável aleatória* (v.a.) real é uma função mensurável definida em Ω e com valores reais, isto é, uma função $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo conjunto B de Borel de \mathbb{R} , $X^{-1}(B)$ é um evento de A . Aqui, \mathbb{R} denota o conjunto dos reais. Pode-se provar que X é uma v.a. se e somente se $X^{-1}(J) \in A$, onde J é um intervalo da forma $(-\infty, a]$.

Designaremos por $E(X)$ a *média* ou *valor esperado* de X e por $\text{Var}(X)$ a *variância* de X . Tem-se que

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x), \quad (1.7)$$

onde $F(x)$ é a função de distribuição (f.d.) de X , ou seja, $F(x) = P(X \leq x) = P(\omega: X(\omega) \leq x)$. A integral (1.7) reduz-se a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (1.8)$$

se $F(x)$ é absolutamente contínua, isto é, $dF(x) = f(x) dx$, $f(x)$ sendo a função densidade de probabilidade de X e reduz-se a

$$E(X) = \sum_k x_k p(x_k), \quad (1.9)$$

se X assume valores em um conjunto enumerável $\{x_1, x_2, \dots\}$ tal que $p(x_k) = P(X = x_k) \geq 0$, para todo k .

A variância de X é definida por

$$\text{Var}(X) = E\{X - E(X)\}^2, \quad (1.10)$$

e é imediato ver que $\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Se X e Y são duas v.a. definidas em (Ω, A, P) , então a distribuição conjunta de X e Y é especificada por uma f.d. bivariada $F(x, y)$ tal que

$$F(x, y) = P\{\omega: X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}. \quad (1.11)$$

Se $F(x,y)$ é absolutamente contínua, existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y) \text{ e } F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v) du dv. \text{ No caso discreto,}$$

isto é, quando (X,Y) assume valores em um conjunto enumerável $\{(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \dots\}$, existe $p(x_i, y_j)$ tal que

$$F(x,y) = \sum p(x_i, y_j),$$

onde a soma é estendida a todos os valores (x_i, y_j) com $x_i \leq x$ e $y_j \leq y$.

A *covariância* entre X e Y é definida por

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X,Y) &= E\{[X-E(X)] [Y-E(Y)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x-E(X)] [y-E(Y)] dF(x,y). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Segue-se que

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \tag{1.13}$$

As v.a. X e Y são *independentes* se e somente se $F(x,y) = F_x(x) \cdot F_y(y)$ onde F_x e F_y são as f.d. de X e Y . Neste caso, $E(XY) = E(X)E(Y)$ e $\text{Cov}(X,Y) = 0$.

Quando $\text{Cov}(X,Y) = 0$ dizemos que X e Y são *não correlacionadas* e isto *não* implica que X e Y sejam independentes.

O *coeficiente de correlação* é a medida de dependência entre X e Y obtida normalizando-se (1.13):

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}, \tag{1.14}$$

onde $\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)}$, $\sigma_y = \sqrt{\text{Var}(Y)}$. Não é difícil provar que $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$ e os valores extremos ± 1 indicam uma perfeita dependência linear entre X e Y , enquanto que os valores entre -1 e $+1$ indicam os diversos graus de correlação.

Suponhamos, agora, que X seja uma *v.a. complexa*, isto é, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, \mathbb{C} denotando o conjunto dos números complexos. Então, $X=Y+iZ$, onde Y e Z são *v.a. reais*. Temos que a média de X é definida por

$$E(X) = E(Y) + iE(Z) \quad (1.15)$$

e a variância de X é definida por

$$\text{Var}(X) = E\{|X - E(X)|^2\}. \quad (1.16)$$

É fácil ver (exercício 12) que $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) + \text{Var}(Z)$ e que para $Z=0$ obtemos as definições usuais.

Sejam, agora X_1 e X_2 *v.a. complexas*. Para definir a covariância entre X_1 e X_2 seríamos tentados a por

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(\overset{\circ}{X}_1 \overset{\circ}{X}_2), \quad (1.17)$$

onde $\overset{\circ}{X}_j = X_j - E(X_j)$, $j=1,2$. Mas, para $X_1=X_2$, teríamos $\text{Cov}(X_1, X_2) = E(\overset{\circ}{X}_1 \overset{\circ}{X}_1)$ que não seria real. Logo, definimos

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(\overset{\circ}{X}_1 \overline{\overset{\circ}{X}_2}), \quad (1.18)$$

onde $X_j = Y_j + iZ_j$, $j=1,2$. Deixamos a cargo do leitor (exercício 12) verificar que

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Cov}(Y_1, Y_2) + \text{Cov}(Z_1, Z_2) + i\{\text{Cov}(Z_1, Y_2) - \text{Cov}(Y_1, Z_2)\}. \quad (1.19)$$

Vamos concluir esta seção com algumas desigualdades úteis envolvendo *v.a. (complexas, em geral)*.

DESIGUALDADE DE CHEBYSHEV - se ϕ é uma função estritamente positiva e crescente em $(0, \infty)$, $\phi(u) = \phi(-u)$ e X é uma *v.a. com valor esperado finito*, então, para cada $u > 0$,

$$P\{|X| \geq u\} \leq \frac{E\{\phi(X)\}}{\phi(u)}. \quad (1.20)$$

O caso mais familiar é aquele com $\phi(u) = u^2$ e $X = Y - E(Y)$, obten_{do-se}

$$P \{ |Y - E(Y)| \geq u \} \leq \frac{\text{Var}(Y)}{u^2}. \quad (1.21)$$

DESIGUALDADE DE JENSEN: se ϕ é uma função convexa em $-\infty < x < +\infty$, e X e $\phi(X)$ são v.a. integráveis, então

$$\phi\{E(X)\} \leq E\{\phi(X)\}. \quad (1.22)$$

Por exemplo, se $\phi(x) = x^2$, temos $[E(X)]^2 = E(X^2)$.

DESIGUALDADE DE SCHWARZ: se X e Y são duas v.a. temos

$$|E(XY)| \leq E(|XY|) \leq [E|X|^2 E|Y|^2]^{1/2}. \quad (1.23)$$

1.5 - CONVERGÊNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS.

Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a. definidas no mesmo espaço de probabilidades (Ω, A, P) . Há vários tipos de convergência que podem ser definidos.

DEFINIÇÃO: (i) A sequência $\{X_n\}$ converge em probabilidade para a v.a. X se e somente se para todo $\epsilon > 0$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| > \epsilon\} = 0, \quad (1.24)$$

e indicamos $X_n \xrightarrow{P} X$.

(ii) A sequência $\{X_n\}$ converge quase certamente (ou em quase to_{da a parte}) para a v.a. X se e somente se existe um con_{junto} N com $P(N) = 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) < \infty \quad (1.25)$$

para todo $\omega \in \Omega - N$. Indicaremos $X_n \xrightarrow{q.c.} X$.

Convergência quase certamente é um conceito mais forte do que convergência em probabilidade, no sentido que vale o resultado seguinte.

PROPOSIÇÃO 1.1 - Se $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ então $X_n \xrightarrow{P} X$.

DEFINIÇÃO: A sequência $\{X_n\}$ converge para a v.a. X em *média quadrática* (m.q.) ou em L_2 se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{|X_n - X|^2\} = 0. \quad (1.26)$$

Escrevemos $X_n \xrightarrow{L_2} X$ ou $X_n \xrightarrow{m.q.} X$.

Da desigualdade de Chebyshev segue imediatamente que

PROPOSIÇÃO 1.2 - Se $X_n \xrightarrow{m.q.} X$, então $X_n \xrightarrow{P} X$.

Convergência em m.q. e em probabilidade não implicam em convergência q.c. mas vale o resultado a seguir.

PROPOSIÇÃO 1.3 - Se $X_n \xrightarrow{m.q.} X$ (logo $X_n \xrightarrow{P} X$), então existe uma subsequência $\{n_k\}$ tal que $X_{n_k} \xrightarrow{q.c.} X$.

OBSERVAÇÕES: (a) Se $X_n \xrightarrow{q.c.} X$, isto não implica que $X_n \xrightarrow{m.q.} X$. Ver exercício 6.

(b) Dizemos que $\{X_n\}$ é *dominada* por Y se e somente se $|X_n| \leq Y$ q.c. Então, se $X_n \xrightarrow{P} X$ segue-se que $X_n \xrightarrow{m.q.} X$ se $\{X_n\}$ é dominada por uma v.a. Y de quadrado integrável.

(c) Em cada um dos casos definidos acima há um critério de convergência mútua, que dá uma condição necessária e suficiente, para a existência de uma v.a. X tal que cada uma das definições acima se aplique. Assim, existe X tal que $X_n \xrightarrow{m.q.} X \iff E\{|X_n - X_m|^2\} \rightarrow 0$, $n, m \rightarrow \infty$, etc.

DEFINIÇÃO: Seja $\{X_n\}$ uma seqüência de v.a. e $\{F_n\}$ a seqüência das cor-
respondentes f.d. Dizemos que $\{X_n\}$ converge para a v.a. X
em *distribuição* se e sômente se a seqüência F_n converge pa-
ra a f.d. F da v.a. X nos pontos de continuidade de F .
Indicaremos por $X_n \xrightarrow{D} X$.

Este é o conceito mais "fraco" de convergência, dado que se
 $X_n \xrightarrow{P} X$ então $X_n \xrightarrow{D} X$.

O conceito mais adequado à análise de séries temporais é o
de convergência em m.q. Em particular, as seguintes duas proposi-
ções são importantes.

PROPOSIÇÃO 1.4 - Se $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ são seqüências de v.a. com variâncias
finitas, então $X_n \xrightarrow{m.q.} X$ e $Y_n \xrightarrow{m.q.} Y$ implicam que $E(X_n \bar{Y}) \rightarrow E(X \bar{Y})$.

PROVA: Usar a desigualdade de Schwarz.

PROPOSIÇÃO 1.5 (Loève) - Se $\{X_n\}$ converge em m.q., então $E(X_m \bar{X}_n)$ conver-
ge para um limite que é finito.

1.6 - FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS

Um instrumento importante ao estudar variáveis aleatórias é
a função característica (f.c.). Se X é uma v.a. com f.d. $F(x)$, a f.c.
de X é definida como a função $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\phi(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x). \quad (1.27)$$

A f.c. é também chamada a *transformada de Fourier-Stieltjes* de F .

As demonstrações das propriedades e teoremas mencionados nes-
ta seção podem ser encontradas em Gnedenko, 1962 e Chung, 1969.

PROPOSIÇÃO 1.6 - (a) Para todo t real, $|\phi(t)| \leq 1$, $\phi(0) = 1$, $\phi(-t) = \bar{\phi}(t)$.
(b) ϕ é uniformemente contínua em \mathbb{R} .
(c) Se $\{\phi_n, n \geq 1\}$ são f.c., $\{\lambda_n\}$ é uma seqüência de \underline{n}

meros reais não negativos com $\sum_n \lambda_n = 1$, então $\sum_n \lambda_n \phi_n$ é uma f.c.

A questão que surge é: dada uma f.c. ϕ , como podemos obter a f.d. F ? A resposta é dada pela *fórmula de inversão*, que estabelece uma correspondência bi-unívoca entre a classe das f.d. e a das f.c.

TEOREMA 1.1 - (Fórmula de inversão).- Se $x_1 < x_2$ são pontos de continuidade de F , então

$$F(x_2) - F(x_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \phi(t) dt. \quad (1.28)$$

Em particular, segue-se que, para cada ponto de continuidade de $F(x)$, temos

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{it} \phi(t) dt, \quad (1.29)$$

onde o limite em y é calculado para pontos de continuidade de F .

O resultado seguinte mostra que uma f.d. é univocamente determinada por sua f.c.

TEOREMA 1.2 (da unicidade) - Se duas f.d. têm a mesma f.c. então elas são iguais.

Uma v.a. X é *simétrica* se X e $-X$ têm a mesma distribuição. Se X é simétrica, sua f.d. satisfaz

$$F(x) = 1 - F(-x) + P(X=x), \quad (1.30)$$

para todo x real. Relativamente a este conceito temos a

PROPOSIÇÃO 1.7 - Uma f.c. é real se e somente se sua f.d. é simétrica.

Um caso particular importante do Teorema 1.1 é o seguinte.

TEOREMA 1.3 - Se a f.c. $\phi(t)$ é integrável em \mathbb{R} , então F é contínua, sua derivada $f(x)$ é contínua e

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(t) dt. \quad (1.31)$$

Além disso,

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx. \quad (1.32)$$

Das das mais importantes propriedades das f.c. são enuncia das a seguir e constituem o *teorema limite* para f.c. de Lévy e Cramér.

Na seção anterior definimos convergência em distribuição de uma sequência de v.a. $\{X_n\}$. Dizemos também que a sequência correspondente de f.d. $\{F_n\}$ converge fracamente para a f.d. F , e indicamos $F_n \Rightarrow F$.

TEOREMA 1.4 - (a) Seja $\{F_n\}$ uma sequência de f.d. com f.d. $\{\phi_n\}$. Se $F_n \Rightarrow F$, então $\phi_n(t)$ converge para a f.c. $\phi(t)$, a convergência é uniforme com respeito a t em qualquer intervalo finito $a \leq t \leq b$.

(b) Suponhamos que:

- (i) ϕ_n converge em \mathbb{R} e define a função limite ϕ ;
- (ii) ϕ é contínua na origem.

Então,

- (i)' $F_n \Rightarrow F$, onde F é uma f.d.;
- (ii)' ϕ é a f.c. de F .

O resultado seguinte será usado no Capítulo 4 e é dado como referência aqui.

LEMA (LINNİK) - Se a função $g(t)$ é mensurável, limitada e integrável do intervalo $[-T, T]$ e

$$p(x) = \int_{-T}^T e^{-itx} g(t) dt \geq 0, \quad (1.33)$$

então a função $p(x)$ é integrável em toda a reta.

1.7 - DISTRIBUIÇÕES NORMAIS.

Para nossos propósitos é suficiente dar a seguinte

DEFINIÇÃO: As v.a. X_1, \dots, X_p , reais, têm uma distribuição conjunta normal multivariada de dimensões p (ou, simplesmente, p -variada) se sua função densidade é

$$f(x_1, \dots, x_p) = (2\pi)^{-p/2} \cdot |A| \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'A(x-\mu)} \quad (1.34)$$

onde A é uma matriz $p \times p$ positiva definida, $|A|$ é o determinante de A , $x = [x_1, \dots, x_p]'$ e $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_p]'$.

Se $X = [X_1, \dots, X_p]'$, segue-se que $E(X) = \mu$ e a matriz de covariâncias de X é $\Sigma = A^{-1}$.

Se X tem distribuição p -variada com média μ e matriz de covariâncias Σ escrevemos $X: N_p(\mu, \Sigma)$. Pode-se verificar que f.c. de X é

$$e^{it'\mu - \frac{1}{2} t'\Sigma t}, \quad (1.35)$$

para todo vetor real fixo t , de ordem $p \times 1$.

A densidade (1.33) não existe se Σ é singular. É possível dar uma definição mais geral e para detalhes o leitor deve consultar Rao, 1973.

No Capítulo 4 teremos que tratar da distribuição da transformada de Fourier finita, que é uma v.a. complexa. É necessário introduzir o conceito de v.a. normal complexa multivariada.

Se $Z = X+iY$ é um vetor aleatório $p \times 1$, então Z terá uma distribuição normal complexa multivariada se o vetor $[X, Y]'$, de ordem $2p \times 1$, tem uma distribuição normal multivariada, de dimensão $2p$. Há alguma ambiguidade na escolha da distribuição conjunta deste vetor e portanto nos fixaremos na

DEFINIÇÃO: Se $Z=X+iY$ é um vetor $p \times 1$, com componentes complexas, dizemos que Z tem *distribuição normal complexa multivariada* com média μ e matriz de covariâncias Σ se e somente se o vetor $[X, Y]'$, de ordem $2p \times 1$, com componentes reais, tem distribuição normal $2p$ -variada com média $[\text{Re}\mu, \text{Im}\mu]'$ e matriz de covariâncias

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{Re}\Sigma & -\text{Im}\Sigma \\ \text{Im}\Sigma & \text{Re}\Sigma \end{bmatrix},$$

para algum vetor $p \times 1$ μ e alguma matriz $p \times p$ Σ , Hermitiana e não negativa definida.

Escrevemos: $Z: N_p^C(\mu, \Sigma)$.

O caso que nos interessa é aquele em que $p=1$. Se $Z = X+iY$ tem distribuição $N_1^C(\mu, \sigma)$, então X e Y serão v.a. independentes, com distribuições normais $N_1(\mu_1, \sigma/2)$ e $N_1(\mu_2, \sigma/2)$, respectivamente, onde $\mu_1 = \text{Re}\mu$ e $\mu_2 = \text{Im}\mu$.

Um fato importante é o

TEOREMA 1.5(Isserlis) - Se $Z=[Z_1, \dots, Z_4]'$ é uma v.a. com distribuição normal complexa, com média 0 e matriz de covariâncias Σ , então

$$\begin{aligned} E\{Z_1 Z_2 Z_3 Z_4\} &= E\{Z_1 Z_2\} E\{Z_3 Z_4\} + E\{Z_1 Z_3\} E\{Z_2 Z_4\} + \\ &+ E\{Z_1 Z_4\} E\{Z_2 Z_3\}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

No caso de v.a. normais reais com média zero o teorema reduz-se a

$$\text{Cov}\{Z_1 Z_2, Z_3 Z_4\} = E\{Z_1 Z_3\} E\{Z_2 Z_4\} + E\{Z_1 Z_4\} E\{Z_2 Z_3\}. \quad (1.37)$$

1.8 - EXERCÍCIOS

1 - Se $Z = X+iY$ é uma v.a. $p \times 1$, prove que

$$\Sigma_{ZZ} = \Sigma_{XX} + \Sigma_{YY} + i(\Sigma_{YX} - \Sigma_{XY}),$$

onde Σ_{ZZ} indica a matriz de covariâncias de Z , etc.

2 - Prove que se $Z = X+iY$ tem distribuição $N_p^C(\mu, \Sigma)$ e $\text{Im}\Sigma=0$, então X e Y são independentes.

3 - Provar (1.20).

4 - Prove que, se $X_n \xrightarrow{m.q.} X$, então $X_n \xrightarrow{P} X$.

5 - Prove a proposição 1.6.

6 - Seja $\Omega=[0,1]$, $A=B=\sigma$ -álgebra de Borel em $[0,1]$ e P =medida de Lebesgue sobre B . Definamos

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 2^n, & \omega \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Prove que $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$ mas X_n não converge em m.q.

7 - Prove que a integral $\int_0^1 g(x)dF(x)$ existe e calcule-a usando a definição se $g(x)=x$ e $F(x)=x^2$.

8 - Uma função F definida em \mathbb{R} diz-se a *convolução* das f.d. F_1 e F_2 e escrevemos $F = F_1 * F_2$ se

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)dF_2(y), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Se ϕ, ϕ_1 e ϕ_2 são as respectivas f.c. prove que $\phi = \phi_1 \phi_2$.

9 - Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)$, se $g(x)=e^x$, $-\infty < x < +\infty$ e

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1/3, & -1 \leq x < 0 \\ 5/6, & 0 \leq x < 1 \\ 1/2, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

10 - Prove, que se $F(x)$ tem um salto em a , então

$$\int_a^b g(x)dF(x) - \int_{a+0}^b g(x)dF(x) = g(a) [F(a+0) - F(a-0)],$$

onde $a+0$ indica que o extremo a não é incluído.

11 - Prove que:

(a) $X_n \xrightarrow{D} X, Y_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{P} 0$

(b) Se $X_n \xrightarrow{D} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} c$, então $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X+c, X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$

e $X_n/Y_n \xrightarrow{D} X/c, c \neq 0$.

12 - (a) Se X é uma v.a. complexa, $X=Y+iZ$ prove que

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) + \text{Var}(Z).$$

(B) Prove a relação (1.19).

CAPÍTULO 2

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

2.1 - INTRODUÇÃO

Consideremos o experimento que consiste em medir a temperatura do ar, de dado local, durante um período de vinte e quatro horas, continuamente. Obtemos numa função $X(t)$, do tempo t , chamada *função aleatória*. Repetindo-se o experimento durante vários dias, obtaremos uma *família de realizações* da função aleatória $X(t)$. Na figura 2.1 temos ilustradas estas realizações, também chamadas de *trajetórias* ou *séries temporais*.

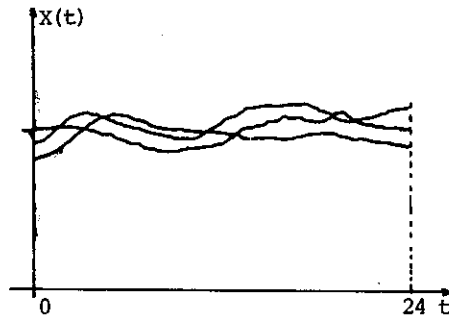


Figura 2.1

Uma função aleatória (ou um *processo aleatório* ou *processo estocástico*) não precisa ser, necessariamente, uma função do tempo e seu argumento pode ser, também, um vetor. Seja, por exemplo, o experi-

mento que consiste em medir as três componentes de velocidade em um ponto de um fluxo turbulento, como o oceano ou a atmosfera, durante um certo intervalo de tempo. Uma das componentes de velocidade, U digamos, é uma função de três coordenadas espaciais e do tempo, isto é, $U = U(x,y,z,t)$.

Vejamos, agora, uma definição formal de função aleatória. No que segue, adotamos a nomenclatura mais frequentemente usada entre nós, a de processo estocástico, para designar uma função aleatória.

DEFINIÇÃO: Seja T um conjunto arbitrário. Um *processo estocástico* é uma família $\{X(t), t \in T\}$ tal que, para cada $t \in T$, $X(t)$ é uma variável aleatória.

Nestas condições, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias (v.a.), que suporemos definidas num mesmo espaço de probabilidades (Ω, A, P) . O conjunto T é normalmente tomado como o conjunto dos inteiros $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ou o conjunto dos reais R . Também, para cada $t \in T$, $X(t)$ será, usualmente, uma v.a. real, mas será necessário considerar, mais tarde, v.a. complexas.

Como, para cada $t \in T$, $X(t)$ é uma v.a. definida sobre Ω , na realidade $X(t)$ é uma função de dois argumentos, $X(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$. A figura 2.2 ilustra esta interpretação de um processo estocástico.

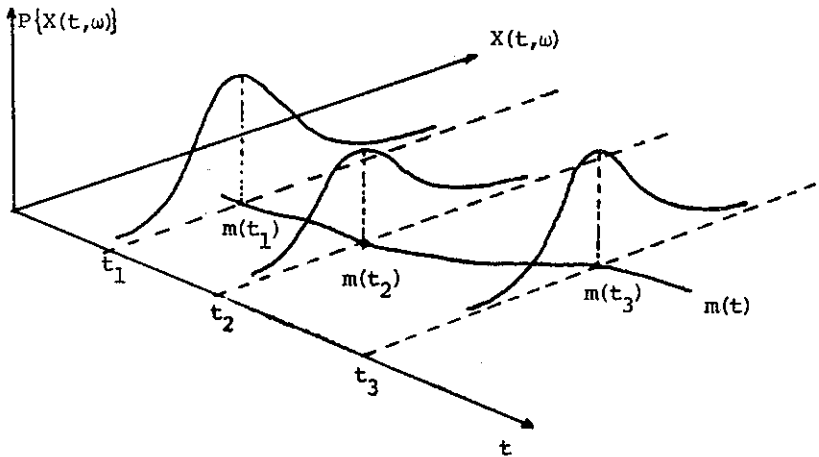


Figura 2.2

Vemos, na figura, que para cada $t \in T$, temos uma v.a. $X(t, \omega)$, com uma distribuição de probabilidades, $P\{X(t, \omega)\}$

Por outro lado, para cada $\omega \in \Omega$, fixado, obteremos uma função de t , ou seja, uma realização ou trajetória do processo. Ver figuras 2.1 e 2.3.

Vamos designar as realizações de $X(t, \omega)$ por $X^{(1)}(t), X^{(2)}(t)$, etc. O conjunto de todas estas trajetórias é chamado o "ensemble". Observemos que cada realização de $X(t, \omega)$ é uma função do tempo t não aleatória e para t fixo $X(t)$ é um número (real ou complexo). Uma maneira de encarar a distribuição de probabilidades de $X(t, \omega)$, para t fixo, é considerar a proporção de trajetórias que passam por uma "janela" de amplitude Δ , digamos. Tal proporção será $f(x) \cdot \Delta$, se $f(x)$ é a densidade de probabilidades da v.a. $X(t, \omega)$.

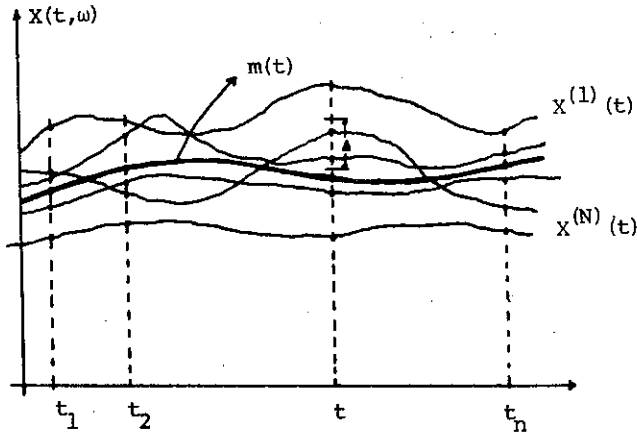


Figura 2.3

O conjunto dos valores de $\{X(t) \ t \in T\}$ é chamado o *espaço dos estados*, E , do processo estocástico e os valores de $X(t)$ são chamados *estados*.

Se o conjunto T for finito ou enumerável, como $T = \{1, 2, \dots, n\}$ ou $T = \mathbb{Z}$, o processo $\{X(t), t \in T\}$ diz-se um processo estocástico com *parâ*

metro discreto. Como exemplo, considere o caso em que as observações são vendas de uma firma, durante dez anos, registradas mensalmente. Obtemos uma parte de uma trajetória de um processo com parâmetro discreto! Se T for um intervalo de R teremos um processo com parâmetro contínuo. O processo da figura 2.1 é um exemplo.

O conjunto dos estados, E, também pode ser discreto ou contínuo. No primeiro caso, X(t) pode representar uma contagem, como por exemplo, o número de chamadas telefônicas que chegam a uma central durante um período de duas horas. No segundo caso, X(t) representa uma medida que varia continuamente, como temperatura, voltagem, altura de ondas, etc.

2.2 - ESPECIFICAÇÃO DE UM PROCESSO ESTOCÁSTICO

Sejam t_1, t_2, \dots, t_n elementos quaisquer de T e consideremos

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\}. \quad (2.1)$$

Então, o processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$ estará especificado se conhecermos as *distribuições finito-dimensionais* (2.1), para todo $n \geq 1$. Isto significa que, para $n=1$ nós conhecemos as distribuições uni-dimensionais da v.a. $X(t_1)$, $t_1 \in T$, para $n=2$ nós conhecemos as distribuições bi-dimensionais da v.a. $(X(t_1), X(t_2))$, $t_1, t_2 \in T$, e assim por diante. As funções de distribuição (2.1) devem satisfazer às duas condições seguintes:

i) (Condição de Simetria): para qualquer permutação j_1, j_2, \dots, j_n , dos índices $1, 2, \dots, n$ temos

$$F(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}; t_{j_1}, \dots, t_{j_n}) = F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n). \quad (2.2)$$

ii) (Condição de Compatibilidade) para $m < n$,

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty; t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n) &= \\ &= F(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m). \end{aligned} \quad (2.3)$$

A condição (2.3) deve ser entendida como

$$\lim_{\substack{x_{m+1} \rightarrow +\infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow +\infty}} F(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n).$$

Pode-se demonstrar que qualquer sistema de funções de distribuição da forma (2.1) satisfazendo as condições (2.2) e (2.3) define um processo estocástico $X(t)$ sobre T .

Contudo, o conhecimento de todas estas distribuições finito-dimensionais é muito difícil de ocorrer na prática, senão impossível. O que se faz é estudar certas características associadas a (2.1) e que sejam simples de interpretar e calcular. Notemos que uma maneira equivalente de especificar o processo $X(t)$ seria determinar todos os momentos de ordem n das v.a. $X(t_1), \dots, X(t_n)$, para qualquer $n \geq 1$. Ou seja, determinar

$$\mu(r_1, \dots, r_n; t_1, \dots, t_n) = E \{ X^{r_1}(t_1) \cdot \dots \cdot X^{r_n}(t_n) \} = \quad (2.4)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} dF(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n).$$

Isto apresenta os mesmos impecilhos anteriores e o que se faz é restringir o estudo de momentos de baixa ordem. Em particular, para a classe de processos que vai nos interessar, os chamados processos estacionários de segunda ordem, consideraremos somente os momentos de primeira e segunda ordem.

A *função média* (ou simplesmente *média*) de $X(t)$ é

$$\mu(1; t) = m(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x; t), \quad (2.5)$$

enquanto que a *função de auto-covariância* (f.a.c.) de $X(t)$ é

$$\begin{aligned} \mu(1, 1; t_1, t_2) - \mu(1; t_1)\mu(1; t_2) &= C(t_1, t_2) = \\ &= E\{X(t_1)X(t_2)\} - E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\}, \quad t_1, t_2 \in T. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Observe que $m(t)$ é uma função de $t \in T$ e que $C(t_1, t_2)$ depende de dois argumentos, t_1 e t_2 . Em particular, se $t_1 = t_2 = t$, (2.6) nos dá

$$C(t, t) = \text{Var}\{X(t)\} = E\{X^2(t)\} - E^2\{X(t)\}, \quad (2.7)$$

que é a (função) *variância* do processo $X(t)$, e que será indicada por $V(t)$.

Voltemos à figura 2.2. Para cada t , temos uma v.a. $X(t)$, que tem uma média $m(t)$ e uma variância $V(t)$. Na figura, estão indicadas as médias $m(t_1)$, $m(t_2)$ e $m(t_3)$. A f.a.c. $C(t_1, t_2)$ dá a covariância entre as duas v.a. $X(t_1)$ e $X(t_2)$, para quaisquer $t_1, t_2 \in T$. A função $m(t)$ é obtida "unindo-se" todos os pontos $m(t)$, $t \in T$.

Consideremos, agora, a figura 2.3. Para cada t , temos um conjunto de valores $X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t)$, ... correspondentes às várias realizações do processo. A função $m(t)$ é obtida determinando-se, para cada t , a médias dos valores $X^{(j)}(t)$, média esta calculada em relação a j .

Resumindo, os parâmetros importantes a serem considerados são a média e a função de auto-covariância,

$$\begin{aligned} m(t) &= E\{X(t)\}, \\ C(t_1, t_2) &= \text{Cov}\{X(t_1), X(t_2)\} \\ &= E\{\hat{X}(t_1) \hat{X}(t_2)\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

respectivamente, onde $\hat{X}(t) = X(t) - m(t)$.

Quando houver possibilidade de confusão, usaremos as notações $m_X(t)$ e $C_X(t_1, t_2)$ para indicar a média e a f.a.c. de $X(t)$. Outra convenção: quando falamos em "gráfico" de $X(t)$, na realidade estamos falando em algo parecido com a figura 2.3, onde estão "todas" as realizações de $X(t)$. Por isso, é usual representar apenas uma trajetória típica do processo.

Observemos também, que na prática, teremos que estimar as quantidades $m(t)$ e $C(t_1, t_2)$, bem como $V(t)$. Observando a figura 2.3 vemos que uma maneira de fazê-lo é considerar um número N de realizações $X^{(1)}(t), \dots, X^{(N)}(t)$ e utilizá-las para avaliar os parâmetros a-

cima. Por exemplo,

$$m(t) = \frac{X^{(1)}(t) + \dots + X^{(N)}(t)}{N}$$

Voltaremos a este assunto nos Capítulos 6 e 7.

2.3 - PROCESSOS ESTACIONÁRIOS.

Naquelas situações em que se pretende utilizar modelos para descrever processos físicos, é necessário introduzir suposições simplificadoras no modelo. No caso de processos estocásticos, uma suposição normalmente feita é a estacionaridade. Intuitivamente, um processo é estacionário se ele desenvolve-se no tempo de modo que a escolha de uma origem dos tempos não é importante. Em outras palavras, as características probabilísticas de $X(t+\tau)$, para todo τ , são as mesmas de $X(t)$. As medidas das vibrações de um avião em regime estável de voo horizontal, durante seu cruzeiro, constituem um exemplo de um processo estacionário. Também, as várias formas de "ruídos" podem ser consideradas processos estacionários.

Tecnicamente, há duas formas de estacionaridade: fraca (ou ampla, ou de 2a. ordem) e forte (ou estrita).

DEFINIÇÃO: Um processo estocástico $X(t), t \in T$ diz-se *estritamente estacionário* se todas as distribuições finito-dimensionais (2.1) permanecem as mesmas sob translações do tempo, ou seja,

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) = F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n), \quad (2.9)$$

para quaisquer t_1, \dots, t_n, τ de T .

Isto significa, em particular (exercício 1), que todas as distribuições uni-dimensionais são invariantes sob translações do tempo, logo a média $m(t)$ e a variância $V(t)$ são constantes, isto é,

$$\begin{aligned} m(t) &= m, \\ V(t) &= v, \end{aligned} \quad (2.10)$$

para todo $t \in T$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $m=0$ e $v=1$. Então, considere o processo $[X(t)-m]/v^{1/2}$

Do mesmo modo, todas as distribuições bi-dimensionais dependem de t_2-t_1 . De fato, como $C(t_1, t_2) = C(t_1+t, t_2+t)$, fazendo $t=-t_2$ vem que

$$C(t_1, t_2) = C(t_1-t_2, 0) = C(\tau), \quad (2.11)$$

para $\tau=t_1-t_2$. Logo, $C(t_1, t_2)$ é uma função de um só argumento, no caso do processo ser estacionário.

Genêricamente, de (2.9) segue-se que os momentos de ordem n dependem apenas das diferenças t_j-t_1 , e são funções de $n-1$ argumentos.

Como dissemos anteriormente, estaremos interessados em caracterizar os processos estocásticos através de um número pequeno de funções de distribuição (2.1) ou de momentos. Desta maneira, restringindo-se aos momentos de primeira e segunda ordens, somos levados à seguinte

DEFINIÇÃO: Um processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$ diz-se *estacionário de segunda ordem* (ou *fracamente estacionário*, ou ainda, *estacionário em sentido amplo*) se e somente se

- (i) $E\{X(t)\} = m(t) = m$, constante, para todo $t \in T$;
 - (ii) $E\{X^2(t)\} < \infty$, para todo $t \in T$;
 - (iii) $C(t_1, t_2) = \text{Cov}\{X(t_1), X(t_2)\}$ é uma função apenas de t_1-t_2 .
- (2.12)

A partir de agora, estaremos interessados somente nesta classe de processos, que denominaremos simplesmente de *processos estacionários*. Note-se que, se $X(t)$ é estritamente estacionário, ele não necessita ser estacionário de segunda ordem, pois (2.12)-(ii) pode não estar satisfeita. Um processo tal que $E\{X^2(t)\} < \infty$, para todo $t \in T$, diz-se um *processo de segunda ordem*.

No que segue, suporemos $m=0$.

DEFINIÇÃO: Um processo estocástico real $\{X(t), t \in T\}$ diz-se *Gaussiano* se, para qualquer conjunto t_1, t_2, \dots, t_n de T , as v. a. $X(t_1), \dots, X(t_n)$ têm uma distribuição normal n -variada.

Como um processo Gaussiano, com variância finita, é determinado pelas médias e covariâncias, se ele for estacionário de segunda ordem, então ele será estritamente estacionário.

2.4 - PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DE AUTO-COVARIANÇA

No que segue consideraremos o processo $\{X(t), t \in T\}$ estacionário, real, com $T \subset \mathbb{R}$ e de média zero. Sua f.a.c. é

$$C(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)], \quad (2.13)$$

$t, \tau \in T$.

PROPOSIÇÃO 2.1 - A f.a.c. $C(\tau)$ definida por (2.13) satisfaz às seguintes propriedades:

- (a) $C(0) > 0$,
- (b) $C(-\tau) = C(\tau)$,
- (c) $|C(\tau)| \leq C(0)$,
- (d) $C(\tau)$ é positiva definida, no sentido que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k C(\tau_j - \tau_k) \geq 0, \quad (2.14)$$

para quaisquer números reais a_1, \dots, a_n e $\tau_1, \dots, \tau_n \in T$.

DEMONSTRAÇÃO - As propriedades (a) e (b) decorrem imediatamente da definição (2.13). A propriedade (c) segue do fato que

$$E\{X(t+\tau) \pm X(t)\}^2 = E\{X^2(t+\tau) \pm 2X(t+\tau)X(t) + X^2(t)\} \geq 0.$$

Mas o segundo membro é igual a

$$V(t) \pm 2C(\tau) + V(t) \geq 0,$$

ou seja,

$$2C(0) \pm 2C(\tau) \geq 0$$

e (c) fica demonstrada. Quando a (d) temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k C(\tau_j - \tau_k) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k E\{X(\tau_j)X(\tau_k)\} = \\ &= E\left\{ \sum_{j=1}^n a_j X(\tau_j) \right\}^2 \geq 0. \quad \square \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO - A recíproca da propriedade (d) também é verdadeira. Ou seja, dada uma função $C(\tau)$ tendo a propriedade (2.14), existe um processo estocástico $X(t)$ tendo $C(\tau)$ como f.a.c. Na realidade, $C(t)$ pode ser tomado como Gaussiano. Para a demonstração deste fato, ver Cramér & Leadbetter, 1967, pág. 80.

Teremos interesse em considerar processos estocásticos $X(t)$ que sejam contínuos, conforme a definição seguinte.

DEFINIÇÃO - Seja $\{X(t), t \in T\}$ um processo de segunda ordem. Então, diremos que $X(t)$ é *contínuo em média quadrática no ponto* t_0 se e somente se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} E \{ |X(t) - X(t_0)|^2 \} = 0. \quad (2.15)$$

Escreveremos $X(t) \xrightarrow{\text{m.q.}} X(t_0)$.

Continuidade em m.q. de $X(t)$ está relacionada com continuidade da f.a.c. $C(\tau)$. Para que $C(\tau)$ seja contínua para todo τ é suficiente que ela seja contínua na origem.

PROPOSIÇÃO 2.2 - Continuidade de $C(\tau)$ para $\tau=0$ implica continuidade de $C(\tau)$ para todo τ .

DEMONSTRAÇÃO - A desigualdade de Schwarz diz que, para duas v.a. quaisquer Y e Z temos

$$|E \{YZ\}|^2 \leq E\{|Y|^2\}E\{|Z|^2\}.$$

Tomando $Y = X(\tau+h) - X(\tau)$, $Z = X(0)$, vem que

$$|E \{ |X(\tau+h) - X(\tau)| X(0) \}|^2 \leq E\{|X(\tau+h) - X(\tau)|^2\}E\{|X(0)|^2\}$$

que desenvolvida resulta

$$|C(\tau+h) - C(\tau)|^2 \leq 2C(0) \cdot [C(0) - C(h)]$$

e se $C(\tau)$ é contínua na origem vem que, para $h \rightarrow 0$, o primeiro membro tende a zero e $C(\tau)$ é contínua para todo τ . \square

PROPOSIÇÃO 2.3 - Se $C(\tau)$ é contínua, então $X(t)$ é contínuo em m.q.

DEMONSTRAÇÃO - Temos que demonstrar que $\lim_{h \rightarrow 0} E \{|X(t+h) - X(t)|^2\} = 0$,
para todo t . Mas, $E \{|X(t+h) - X(t)|^2\} = 2C(0) - 2C(h)$ e
para $h \rightarrow 0$, obtemos o resultado. \square

OBSERVAÇÃO - Continuidade de um processo em m.q. não implica que as trajetórias do processo sejam contínuas. Ver problema 12.

2.5 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS COMPLEXOS

Até agora supusemos que $X(t)$ é uma v.a. com valores reais, para cada $t \in T$. Se $X(t)$ for uma v.a. com valores complexos, então $\{X(t), t \in T\}$ é um processo estocástico complexo. Então, para todo $t \in T$,

$$X(t) = Y(t) + i \cdot Z(t),$$

onde $Y(t)$ e $Z(t)$ são processos estocásticos reais

Neste caso, $X(t)$ é especificado se conhecermos as funções de distribuição das $2n$ v.a. reais $Y(t_1), \dots, Y(t_n), Z(t_1), \dots, Z(t_n)$, para qualquer conjunto t_1, \dots, t_n de T .

Definimos a média de $X(t)$ por

$$E \{X(t)\} = E \{Y(t)\} + i E \{Z(t)\}, \quad (2.16)$$

e a variância por

$$V(t) = E \{|\dot{X}(t)|^2\}, \quad (2.17)$$

onde $\dot{X}(t) = X(t) - E\{X(t)\}$.

A f.a.c. de $X(t)$ será dada por

$$C(t_1, t_2) = E \{\dot{X}(t_1) \overline{\dot{X}(t_2)}\}, \quad (2.18)$$

para $t_1, t_2 \in T$. Como vimos no Capítulo 1, a definição (2.18) é tal que, se $t_1 = t_2 = t$, $C(t, t) = V(t)$ é real.

Se o processo complexo $X(t)$ é estacionário, então o número complexo (2.16) é constante e suporemos que seja nulo e também $V(t)$ será uma constante (real), v digamos. A função de auto-covariância dependerá apenas de t_1-t_2 , de modo que podemos escrever

$$C(\tau) = E\{X(t+\tau)\overline{X(t)}\}, \quad (2.19)$$

$t, \tau \in T$.

As propriedades de $C(\tau)$, dadas pela proposição 2.1, no caso real, são dadas pela proposição a seguir, cuja demonstração deixamos a cargo do leitor.

PROPOSIÇÃO 2.4 - (a) $C(0) > 0$

(b) $C(-\tau) = \overline{C(\tau)}$

(c) $|C(\tau)| \leq C(0)$

(d) $C(\tau)$ é positiva definida, isto é,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j \cdot \bar{a}_k C(\tau_j - \tau_k) \geq 0, \quad (2.20)$$

quaisquer que sejam a_1, \dots, a_n números complexos e τ_1, \dots, τ_n de T .

As proposições 2.2 e 2.3 continuam a valer para processos estocásticos complexos.

2.6 - EXEMPLOS DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.

Nesta seção apresentamos exemplos de processos estocásticos procurando descrever, quando possível, suas trajetórias típicas e *f. a.c.*

EXEMPLO 2.1 - Consideremos $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequência de v.a. definidas no mesmo espaço amostral Ω . Aqui, $T = \{1, 2, 3, \dots\}$ e temos um processo estocástico com parâmetros discreto ou uma *sequência aleatória*. Para todo $n \geq 1$ podemos escrever

$$P\{X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n\} = P\{X_1 = a_1\} P\{X_2 = a_2 | X_1 = a_1\} \dots P\{X_n = a_n | X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}\}. \quad (2.21)$$

Aqui, a_j representa um estado do processo. O caso mais simples é aquele em que temos uma sequência $\{X_n, n \geq 1\}$ de v.a. *mutuamente independentes*. Neste caso, (2.21) fica

$$P\{X_1=a_1, \dots, X_n=a_n\} = P\{X_1=a_1\} \dots P\{X_n=a_n\}. \quad (2.22)$$

É possível, ainda, que as v.a. X_1, X_2, \dots tenham todas a mesma distribuição. Teremos, então, uma sequência de v.a. independentes e identicamente distribuídas (i.i.d., brevemente). Considere, por exemplo, lançamentos sucessivos de uma moeda e defina

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{se o } n\text{-ésimo lançamento resulta "cara"} \\ 0, & \text{se o } n\text{-ésimo lançamento resulta "coroa"} \end{cases}$$

Aqui, o espaço dos estados é $E=\{0,1\}$ e $P\{X_n=0\} = P\{X_n=1\} = 1/2$, se a moeda é "honestá".

Uma trajetória típica de tal processo está na figura 2.4.

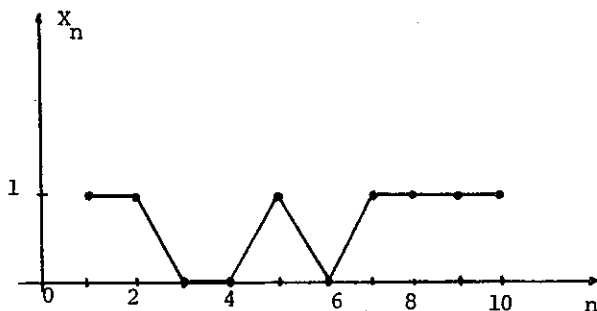


Figura 2.4

Segue-se que $E\{X_n\} = m = \frac{1}{2}$, para todo n e $\text{Var}\{X_n\} = v = \frac{1}{4}$, para todo n . Também,

$$C(k) = \text{Cov}\{X_n, X_{n+k}\} = \begin{cases} v, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Temos, pois, uma sequência aleatória estacionária, de média $m=1/2$ e f.a.c. dada por (2.23).

Se $m=0$, chamaremos tal sequência de *ruído branco*.

EXEMPLO 2.2 (Passeio Casual) - Considere uma sequência de v.a i.i.d $\{X_n, n \geq 1\}$ e suponha que cada X_n possa tomar os valores -1 ou $+1$, com probabilidades $P\{X_n = +1\} = p$, $P\{X_n = -1\} = q$, $p+q=1$. Definamos a sequência $\{Y_n, n \geq 1\}$, onde para cada $n \geq 1$,

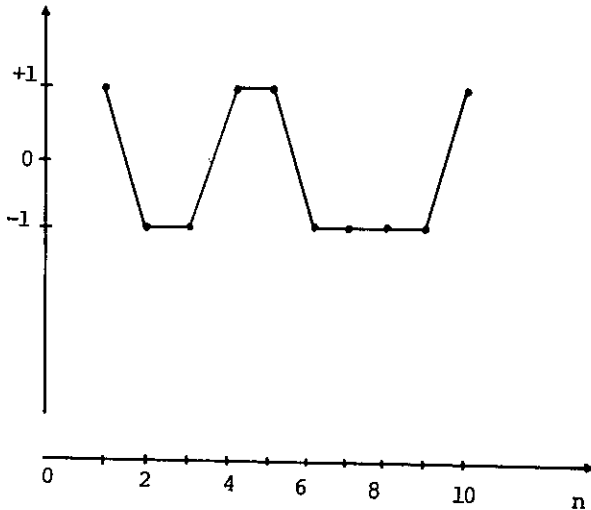
$$Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n. \tag{2.24}$$

Chamando $E\{X_n\} = m$ e $\text{Var}\{X_n\} = v$, é fácil ver de (2.24) que $E\{Y_n\} = n.m$ e $\text{Var}\{Y_n\} = V(n) = n.v$, ou seja, ambas dependem de n . Fica a cargo do leitor mostrar que

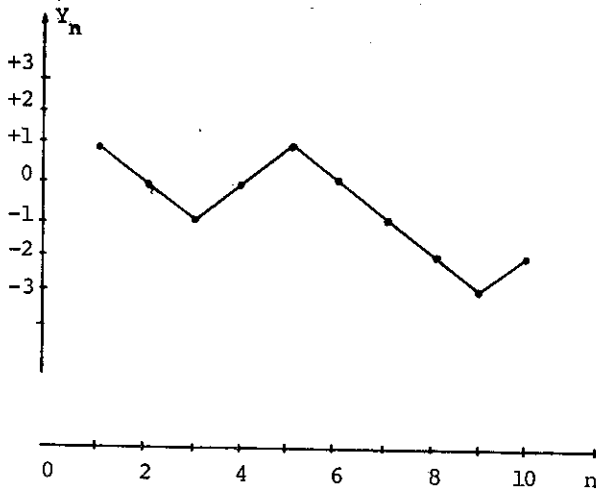
$$C_Y(n_1, n_2) = v[\min(n_1, n_2)] = v(n_1 \wedge n_2).$$

O processo estocástico (2.24) é chamado de *passeio casual* e à medida que o tempo passa Y_n tende a oscilar ao redor da reta $Y = nm$ com uma amplitude crescente. O processo é, então, não estacionário.

Se $\{X_n\}$ representa uma sequência de deslocamentos independentes e unitários de uma partícula no eixo real, sendo que ela move-se numa unidade para a direita, com probabilidade p ou uma unidade para a esquerda, com probabilidade q , então Y_n representará a posição da partícula após n deslocamentos. Na figura 2.5, temos a trajetória de $\{Y_n, n \geq 1\}$ em (b), correspondente à trajetória de $\{X_n, n \geq 1\}$ em (a).



(a)



(b)

Figura 2.5

Observemos que $Y_n = Y_{n-1} + X_n$, logo dado o valor de Y_{n-1} , Y_n depende apenas de X_n . Por exemplo, dado que $Y_4 = 0$, Y_5 poderá ser +1 ou -1, com probabilidades p e q , respectivamente. Logo, a probabilidade de Y_5 tomar o valor +1 ou o valor -1 só depende do estado imediatamente anterior do sistema, e não dos estados precedentes. O processo $\{Y_n, n \geq 1\}$ diz-se uma *Cadeia de Markov*. Como $X_n = Y_n - Y_{n-1}$, este processo também tem *incrementos ortogonais* ou *não correlacionados*, pois $X_n = Y_n - Y_{n-1}$ é não correlacionado com qualquer outro incremento $X_m = Y_m - Y_{m-1}$.

O espaço dos estados de X_n é $E_1 = \{-1, +1\}$ ao passo que o espaço dos estados de Y_n é $E_2 = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

EXEMPLO 2.3 (Processo de Poisson). Suponha que estamos interessados no número de eventos de certo tipo que ocorrem no intervalo de tempo $[0, t]$. Por exemplo, podemos estar contando o número de chamadas telefônicas que chegam a uma central no intervalo $(0, t]$, ou o número de partículas radioativas registradas por um contador Geiger naquele intervalo,

etc. O intervalo $\{0, t\}$ não precisa ser um intervalo de tempo. Podemos estar interessados no número de quebras de um fio elétrico a cada 100 metros, ou no número de acidentes ocorridos num trecho de 50 km de uma rodovia, etc.

Indicando-se por $\{N(t), t \geq 0\}$ o número de eventos que ocorreram no período de 0 a t , dizemos que este é um *processo de Poisson com intensidade λ* se as seguintes condições estão satisfeitas:

- (i) $N(0)=0$;
- (ii) para toda escolha de $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ em $(0, \infty)$, as v.a $N(t_1)-N(t_0), \dots, N(t_n)-N(t_{n-1})$ são independentes;
- (iii) para toda escolha de t_1, t_2 e τ positivos, as v.a $N(t_2+\tau)-N(t_1+\tau)$ e $N(t_2)-N(t_1)$ têm a mesma distribuição;
- (iv) para quaisquer s e t , $s < t$, a v.a. $N(t)-N(s)$ tem distribuição de Poisson com média $\lambda(t-s)$, isto é,

$$P\{N(t)-N(s)=k\} = \frac{e^{-\lambda(t-s)} [\lambda(t-s)]^k}{k!}, \quad (2.25)$$

para $k=0, 1, 2, \dots$

Segue-se que $E\{N(t)-N(s)\} = \text{Var}\{N(t)-N(s)\} = \lambda(t-s)$. O parâmetro λ representa a taxa média de ocorrência dos eventos, por unidade de tempo.

A figura 2.6 ilustra uma trajetória típica de um processo de Poisson.

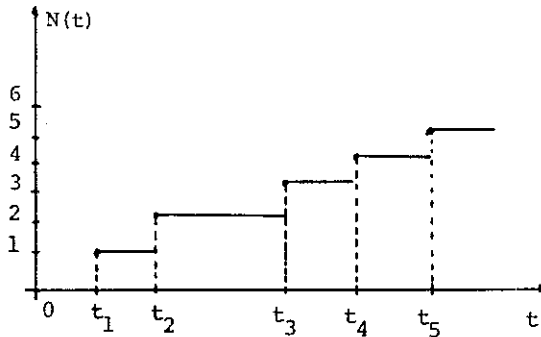


Figura 2.6

Vemos que o processo $\{N(t), t \geq 0\}$ não é estacionário e sua média $m(t) = \lambda t$, que é igual à variância $V(t)$. É fácil provar que $C(t_1, t_2) = (t_1 \wedge t_2)\lambda$. Ver exercício 9. Embora o processo não seja estacionário, as propriedades (ii) e (iii) mostram que ele tem *incrementos estacionários e independentes*. Ver Fernandez, 1975, pág. 112.

EXEMPLO 2.4 (Processo de Wiener) - Uma partícula imersa em um líquido ou gás exibe um movimento irregular, que pode ser acompanhado através de um microscópio. O movimento de tal partícula é chamado *movimento Browniano*, em homenagem ao botânico inglês Robert Brown, que descobriu o fenômeno em 1827. O fenômeno foi estudado matematicamente por A. Einstein em 1905 e depois por N. Wiener e P. Levy.

Seja $X(t)$ o deslocamento após o tempo t de uma partícula em movimento Browniano. Uma trajetória típica de $X(t)$ está na figura 2.7.

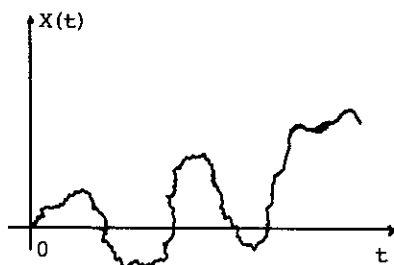


Figura 2.7

O processo $\{X(t), t \geq 0\}$ é dito um *processo de Wiener* (ou movimento Browniano ou processo de Wiener-Levy) se:

- (i) para todo $t > 0$, $X(t) \sim N(0, t)$;
- (ii) $X(0) = 0$;
- (iii) $\{X(t), t \geq 0\}$ tem incrementos estacionários e independentes, no sentido das propriedades (ii) e (iii) do exemplo 2.3.

Aqui, $m(t)=0$ e deixamos ao leitor provar que $C(t_1, t_2) = t_1 \wedge t_2$. Também, o processo definido por (i)-(iii) é Gaussiano. De fato, como

$$\begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) - X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_n) - X(t_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

e como $X(t_1)$, $X(t_2) - X(t_1)$, ..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ são v.a independentes e normais, temos que $[X(t_1), \dots, X(t_n)]'$ tem distribuição normal n -variada.

Para um estudo detalhado do Processo de Wiener, ver Fernandez, 1975.

EXEMPLO 2.5 - Seja $\{Z(t), t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ruído branco e considere

$$X(t) = \sum_{k=0}^n a_k Z(t-k), \quad (2.27)$$

onde os a_k são números complexos. Então, é fácil ver que $m = E[X(t)] = 0$ e que

$$C(\tau) = E\{X(t+\tau)\overline{X(t)}\} = \sum a_k \bar{a}_{k-\tau}, \quad (2.28)$$

onde a soma é estendida a todos os índices k tais que $0 \leq k \leq n$ e $0 \leq k-\tau \leq n$.

Podemos generalizar (2.27), considerando o processo

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k Z(t-k), \quad (2.29)$$

com $\sum |a_k|^2 < \infty$. Então,

$$C(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \bar{a}_{k-\tau} \quad (2.30)$$

EXEMPLO 2.6 - Seja o processo

$$X(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{i\lambda_k t} \quad (2.31)$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são constantes positivas e os A_k são v.a. com média zero.

ro e tais que $E\{A_k \bar{A}_j\} = 0$, $j \neq k$. Seja $v_j = E\{|A_j|^2\}$ a variância de A_j , $j=1, \dots, n$. Então, é fácil ver que

$$C(\tau) = \sum_{k=1}^n v_k e^{i\lambda_k \tau} \quad (2.32)$$

Para $t=0$ em (2.32) obtemos

$$C(0) = \text{Var}\{X(t)\} = \sum_{k=1}^n v_k, \quad (2.33)$$

o que mostra que a variância de $X(t)$ é igual à soma das variâncias das componentes harmônicas $A_k e^{i\lambda_k t}$ que o constituem.

Se $n=\infty$ em (2.31), a fórmula (2.32) vale com $n=\infty$, se $\sum_k |v_k| < \infty$. Ou seja, se

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k t}, \quad (2.34)$$

com $E\{A_k\} = 0$, $E\{A_k \bar{A}_j\} = 0$, $j \neq k$, $E\{|A_j|^2\} = v_j$ e $\sum_k |v_k| < \infty$, então

$$C(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e^{i\lambda_k \tau}. \quad (2.35)$$

As fórmulas (2.34) e (2.35) são casos particulares das chamadas representações espectrais de $X(t)$ e $C(\tau)$ que serão discutidas no Capítulo 4. A relação (2.34) nos diz que $X(t)$ é uma combinação linear de componentes harmônicas $A_k e^{i\lambda_k t}$, de frequências λ_k e amplitudes aleatórias A_k .

2.7 - ALGUMAS SÉRIES TEMPORAIS.

Nesta seção apresentaremos algumas séries temporais reais que serão utilizadas mais adiante para ilustrar os procedimentos de estimação a serem propostos.

EXEMPLO 2.7 - A figura 2.7 mostra uma série de temperaturas da cidade de São Paulo, com 96 observações mensais. Estas são apresentadas na Tabela A.1 do Apêndice.

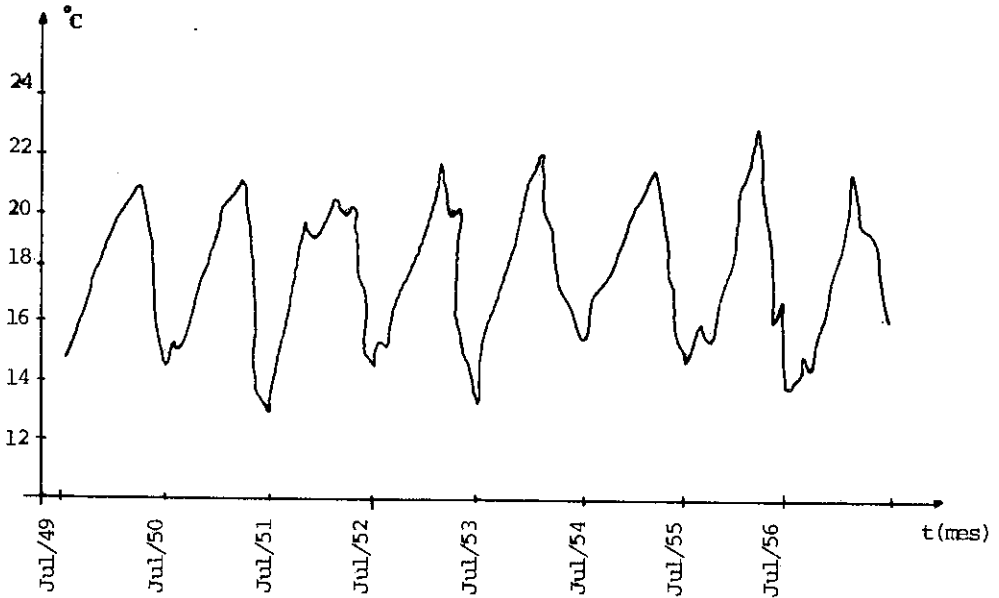


Figura 2.7

Analisando os dados da Tabela A.1 e a figura 2.7 vemos que as temperaturas oscilam entre um mínimo, que ocorre geralmente em julho, e um máximo, que ocorre em janeiro ou fevereiro. Observamos nesta série, a ocorrência de um movimento aproximadamente periódico, chamado variação sazonal.

A figura 2.8 ilustra a série de manchas solares de Wolfer, com observações anuais de 1749 até 1924. Os dados estão na Tabela A.2 do Apêndice. Notamos que esta série tem um ciclo de aproximadamente onze anos.

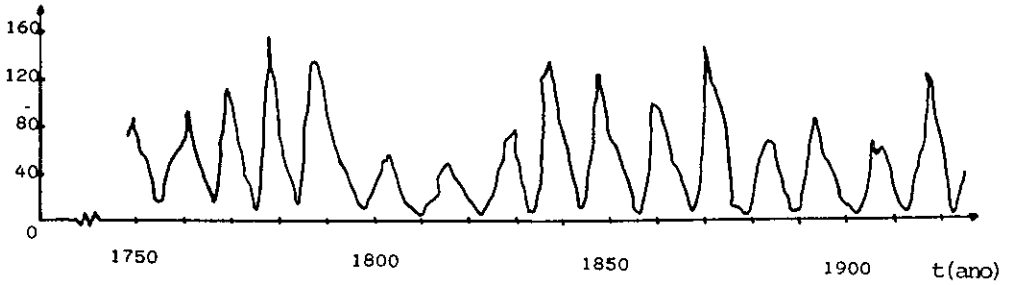


Figura 2.8

EXEMPLO 2.9 - A Figura 2.9 mostra a série marés observada em Ubatuba, São Paulo, nos primeiros cinco dias de novembro de 1972, dados horários. São, ao todo, 120 observações, apresentadas na Tabela A.3 do Apêndice. (Na figura temos apenas o gráfico do primeiro dia).

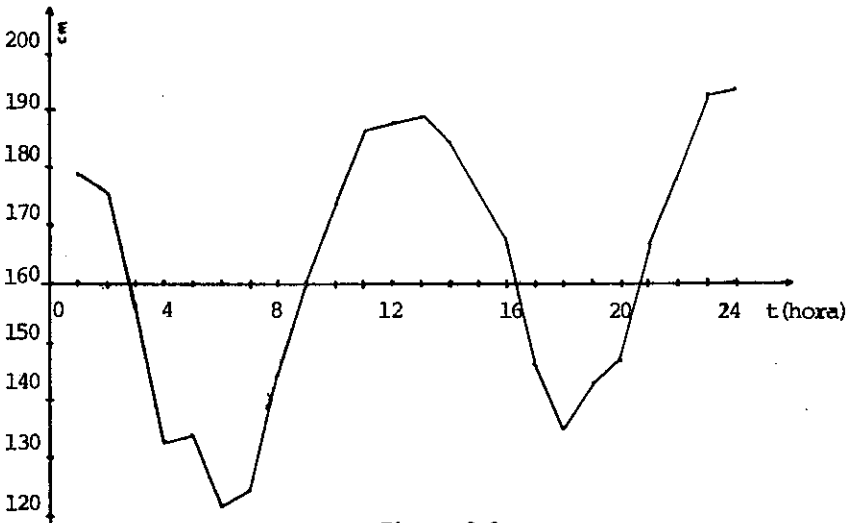


Figura 2.9

EXEMPLO 2.10 - A figura 2.10 mostra séries temporais de temperatura, obtidas nas três fases do GATE (GARP Atlantic Tropical Experiment), de julho a setembro de 1974, para os pontos geográficos $(00^{\circ}, 035^{\circ} W)$, $(02^{\circ} N, 038^{\circ} W)$ e $(02^{\circ} N, 035^{\circ} W)$. Quatro camadas de variabilidade térmica distintas podem ser observadas: camada 1, de 0 a 30m, camada 2, de 80 a 150m, camada 3, de 150 a 300m e camada 4, de 500 a 1.000m.

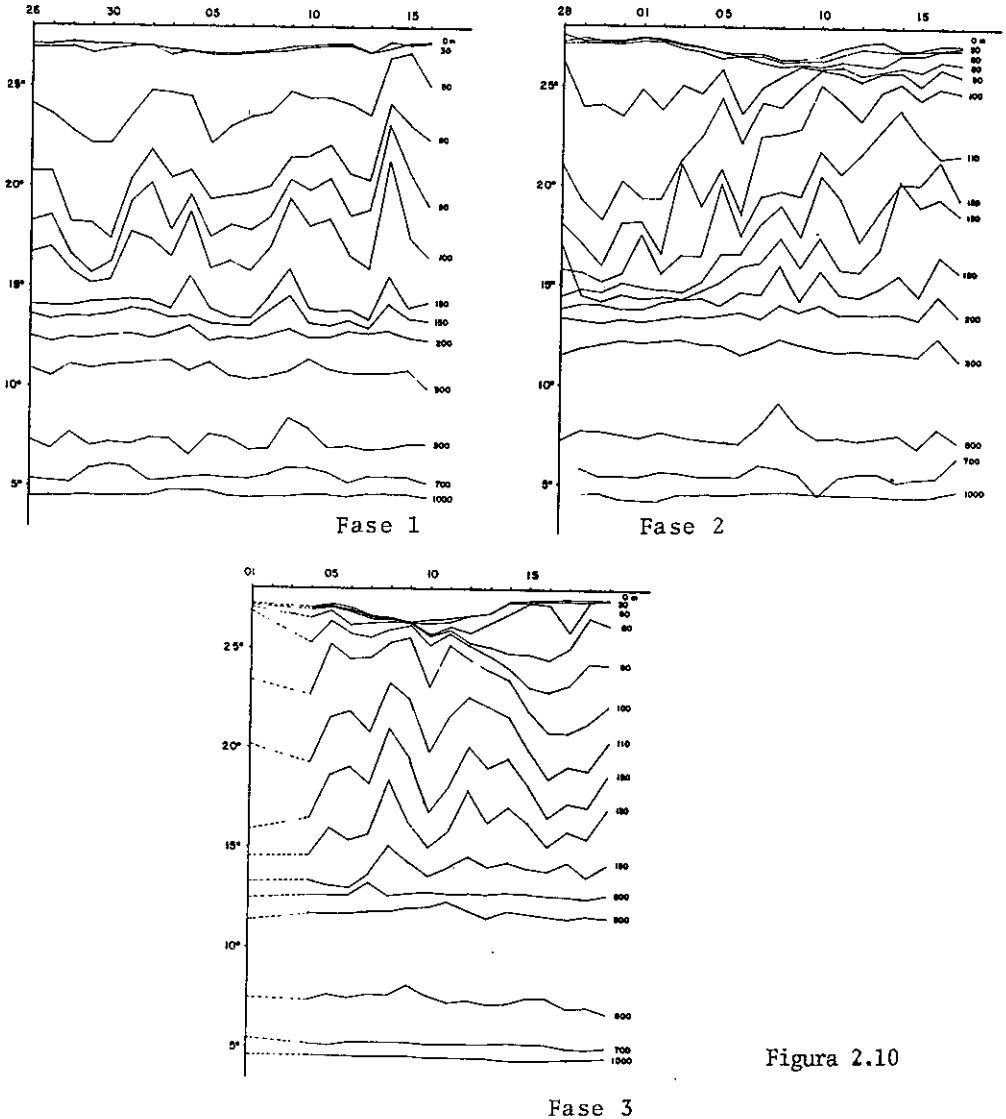


Figura 2.10

Fase 3

2.8 - EXERCÍCIOS

1 - Use a equação (2.4) para provar que, se $X(t)$ é estritamente estacionário, então $m(t)$ e $V(t)$ são constantes.

2 - Prove a proposição 2.4.

3 - Suponha $X(t), t \in T$ um processo estocástico com média $m_X(t)$ e função de auto-covariância $C_X(t_1, t_2)$ e seja $\phi(t)$ uma função não aleatória. Obtenha a média e a f.a.c. dos seguintes processos estocásticos:

(a) $Y(t) = X(t) + \phi(t)$

(b) $Y(t) = X(t) \cdot \phi(t)$

(c) $X(t) = X(t) - m(t)$

(d) $X_n(t) = X(t) / \sigma_X(t)$, onde $\sigma_X(t) = [V_X(t)]^{1/2}$

4 - Seja $X(t) = Y(t) + iZ(t)$ um processo estocástico complexo.

Prove que

$$C_X(t_1, t_2) = C_Y(t_1, t_2) + C_Z(t_1, t_2) + i\{C_{YZ}(t_2, t_1) - C_{YZ}(t_1, t_2)\},$$

onde $C_{YZ}(t_1, t_2) = \text{Cov}\{Y(t_1), Z(t_2)\}$ é a função de covariância cruzada entre os processos $Y(t)$ e $Z(t)$.

5 - Prove as seguintes propriedades da f.a.c. $C(t_1, t_2)$:

(a) $|C(t_1, t_2)| \leq [E|X(t_1)|^2 E|X(t_2)|^2]^{1/2}$

(b) $C(t_1, t_2) = \overline{C(t_2, t_1)}$

(c) $C(t, t) \geq 0$, real

(d) $C(t_1, t_2)$ é positiva definida.

6 - Seja $X(t) = m_X + \sum_{j=1}^n (A_j \cos w_j t + B_j \sin w_j t)$, onde w_1, \dots, w_n são constantes positivas e A_j, B_j são v.a. independentes, com média 0 e variâncias $v_j = \text{Var}(A_j) = \text{Var}(B_j)$, $j=1, \dots, n$. O processo $X(t)$ é estacionário? Encontra a média e a f.a.c. de $X(t)$.

7 - Considere o processo $X(t)$ definido por

$$X(t) = a X(t-1) + m + Z(t),$$

onde $Z(t)$ é ruído branco. Tal processo é chamado um processo au

to-regressivo de 1a. ordem. Pode-se demonstrar que $X(t)$ é estacionário se $|a| < 1$. Encontre a média e a f.a.c. de $X(t)$.

- 8 - Seja $\{X(t), t \in T\}$ um processo com incrementos independentes, isto é, para todo n e $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ as v.a. $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ são independentes. Prove que, para $t_1 \leq t_2$, $C(t_1, t_2) = \text{Var}[X(t_1)]e^{-a(t_2 - t_1)}$ e, em geral, $C(t_1, t_2) = \text{Var}[X(t_1 \wedge t_2)]e^{-a(t_2 - t_1 \wedge t_2)}$, onde, $t_1 \wedge t_2 = \min(t_1, t_2)$.
- 9 - Seja $\{X(t), t \in T\}$ um processo com incrementos estacionários, isto é, para quaisquer $t < s, t' < s'$, com $s - t = s' - t'$, temos que $X(s) - X(t)$ tem a mesma distribuição que $X(s') - X(t')$. Suponha, ainda, que $X(t)$ tenha também incrementos independentes. Prove que $C(t_1, t_2) = (t_1 \wedge t_2) \text{Var}[X(1)]e^{-a(t_2 - t_1 \wedge t_2)}$.
- 10 - Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ um processo de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$. Seja Z uma v.a. independentes de $X(t)$, com

$$Z = \begin{cases} +1, & \text{com probabilidade } 1/2 \\ -1, & \text{com probabilidade } 1/2 \end{cases}$$

Seja $Y(t) = Z \cdot (-1)^{X(t)}$. Prove que $Y(t)$ (chamado *signal de telégrafo aleatório*) é estacionário e que $C_Y(t_1, t_2) = \exp\{-2\lambda |t_1 - t_2|\}$.

- 11 - Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ um processo de Wiener e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva, estritamente crescente, com $g(0) = 1$. Seja o processo

$$Y(t) = [g(t)]^{-1/2} \cdot X(ag(t)); \quad a > 0 \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a) - Encontre a média e a variância de $Y(t)$ e prove que $Y(t)$ é Gaussiano. (Sugestão: escreva o vetor $[Y(t_1), \dots, Y(t_n)]'$ como uma combinação linear de v.a. normais, como em (2.26)).
- b) - Escolha g de modo que $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ seja estacionário. (Sugestão: obtenha $E\{Y(t+\tau)Y(t)\}$ e imponha a condição que esta seja independente de t).

O processo $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ acima é chamado *processo de Ornstein - Uhlenbeck*. Sua função de covariância é dada por $C_Y(t_1, t_2) = a \exp\{-b|t_1 - t_2|\}$ onde $g(1) = e^{2b}$, $b \geq 0$ (ver Fernandez, 1975). Observe que restringindo $t \geq 0$ e fazendo $a = 1, b = 2$, este processo tem a mesma f.a.c. que o processo do exercício 10.

- 12 - Prove que o processo de Poisson é contínuo em média quadrática. Como este processo tem trajetórias com saltos, vemos que um processo pode ser contínuo em m.q e ter trajetórias descontínuas.
- 13 - Seja ϕ uma v.a com distribuição uniforme no intervalo $[0, 2\pi]$. Considere o processo $X(t) = A \cos(t+\phi)$, $t \geq 0$, A constante. Calcule $E[X(t)]$ e $C(\tau)$. O processo assim definido é contínuo em média quadrática, para todo $t \geq 0$?
- 14 - A função $C(\tau) = \sin \tau$ é uma possível f.a.c.? Se não, por que não?

CAPÍTULO 3

INTRODUÇÃO À ANÁLISE DE FOURIER

3.1 - INTRODUÇÃO

De uma maneira bem geral, podemos dizer que a Análise de Fourier ou Análise Harmônica, ou ainda, a Análise Espectral de uma série temporal consiste em decompor esta série em uma soma de harmônicos $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$, a partir de registros de comprimento finito.

Básicamente, a análise clássica de séries temporais e funções temporais procura localizar períodos, identificar fenômenos correspondentes às linhas espectrais, como no estudo de marés.

Uma função do tempo $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, é *periódica de período T* se, para todo t ,

$$x(t) = x(t+kT), \quad (3.1)$$

para $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. No que segue, suporemos $T \neq 0$.

Dizemos que $x(t)$ é um *harmônico de frequência ω e amplitude A*, ω e A positivos, se

$$x(t) = A \cos \omega t \quad \text{ou} \quad x(t) = A \sin \omega t. \quad (3.2)$$

Como, para todo inteiro k ,

$$\cos \left[\omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} k \right) \right] = \cos(\omega t + 2\pi k) = \cos \omega t,$$

o mesmo ocorrendo com o seno, vemos que um harmônico de frequência ω tem período $T = \frac{2\pi}{\omega}$. A frequência dá o número de ciclos completos em 2π unidades de tempo; é chamada *frequência angular*.

Podemos considerar, também, a frequência em *ciclos por unidade de tempo*, que denotaremos por ν . Neste caso tem-se

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (3.3)$$

de modo que $\nu = \frac{1}{T}$. Assim, por exemplo, uma onda cossenoide de período $T = 5$ segundos tem uma frequência $\nu = \frac{1}{5}$ ciclos e $\omega = 2\pi\nu = 0,4$ radianos por segundo. Dizer que $\nu = 0,2$ significa dizer que em um segundo, $\frac{1}{5}$ de um ciclo tem lugar.

A figura 3.1 ilustra um harmônico

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (3.4)$$

onde foi introduzido um parâmetro adicional, ϕ , chamado *fase*, que dá o deslocamento da onda relativamente à origem.

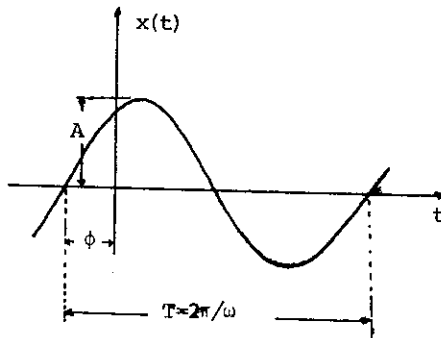


Figura 3.1

Como $\cos(\omega t + \phi) = \cos\omega t \cos\phi - \text{sen}\omega t \text{sen}\phi$, chamando $a = A \cos\phi$ e $b = -A \text{sen}\phi$, (3.4) pode ser escrita

$$x(t) = a \cos\omega t + b \text{sen}\omega t. \quad (3.5)$$

De modo geral, uma série temporal $x(t)$ pode ser considerada como uma superposição de harmônicos da forma (3.4), com frequências e fases variáveis, ou seja,

$$x(t) = \sum_{\omega} A(\omega) \cos[\omega t + \phi(\omega)], \quad (3.6)$$

onde o símbolo \sum_{ω} pode representar uma soma finita, infinita ou mesmo uma integral. Da mesma maneira que obtivemos (3.5), de (3.6) obtem-se

$$x(t) = \sum_{\omega} [a(\omega) \cos\omega t + b(\omega) \text{sen}\omega t], \quad (3.7)$$

$-\infty < t < +\infty$, onde

$$a(\omega) = A(\omega) \cos\phi(\omega), \quad b(\omega) = A(\omega) \text{sen}\phi(\omega).$$

As representações (3.6) e (3.7) são chamadas *representações espectrais* de $x(t)$, sendo que (3.7) é a chamada a forma real ou cartesiana.

3.2 - COEFICIENTES DE FOURIER - APROXIMAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS

A idéia seguinte é considerar uma função $x(t)$ com período T e tentar aproximá-la por uma combinação linear da forma (3.7) com um número finito de termos.

A expressão

$$x_N(t) = \sum_{n=0}^N \{A_n \cos\omega_n t + B_n \text{sen}\omega_n t\}, \quad (3.8)$$

com $\omega_n = \frac{2\pi}{T}n$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, é chamada um *polinômio harmônico de grau*

N e período T .

Devemos definir em que sentido o polinômio harmônico é uma boa aproximação de $x(t)$, periódica de período T . O critério que será utilizado é a aproximação de mínimos quadrados, que consiste em minimizar

$$\int_0^T [x(t) - x_N(t)]^2 dt. \quad (3.9)$$

Ou seja, devemos encontrar os valores dos coeficientes a_n , b_n , $0 \leq n \leq N$, de modo que

$$S(a_n, b_n) = \int_0^T [x(t) - \sum_{n=0}^N \{a_n \cos \omega_n t + b_n \text{sen} \omega_n t\}]^2 dt \quad (3.10)$$

seja minimizada. Considerando as derivadas $\frac{\partial S}{\partial a_n} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b_n} = 0$, $n=0, \dots, N$, e utilizando as relações de ortogonalidade abaixo

$$\int_0^T \cos \omega_n t \cdot \cos \omega_m t dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ T/2, & n=m > 0 \\ T, & n=0, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\int_0^T \text{sen} \omega_n t \cdot \text{sen} \omega_m t dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ T/2, & n=m > 0 \\ 0, & n=0, \end{cases}$$

$$\int_0^T \text{sen} \omega_n t \cdot \cos \omega_m t dt = 0, \text{ para todo } n, m,$$

obtemos que os valores A_n , B_n que minimizam (3.10) são dados por (ver exercício 1)

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad B_0 = 0$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n \frac{2\pi}{T} t) dt, \quad n > 0 \quad (3.12)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \text{sen}(n \frac{2\pi}{T} t) dt, \quad n > 0.$$

As quantidades $\{A_n, B_n, n \geq 0\}$ são chamadas os *coeficientes de Fourier* da função $x(t)$. Observemos que, para as expressões (3.12) te rem significado, é necessário que $\int_0^T |x(t)| dt < \infty$.

3.3 - SÉRIE DE FOURIER

Usando (3.8) pode-se verificar que

$$\int_0^T [x(t) - x_N(t)]^2 dt = \int_0^T x^2(t) dt - \sum_{n=0}^N (A_n^2 + B_n^2). \quad (3.13)$$

Para $N \rightarrow \infty$, a diferença $x(t) - x_N(t) \rightarrow 0$, de modo que, formalmente, podemos escrever

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n \cos \omega_n t + B_n \sen \omega_n t\}, \quad (3.14)$$

$0 \leq t \leq T$. O segundo membro de (3.14) diz-se a *expansão em série de Fourier* de $x(t)$. A menos que $x(t)$ seja uma função suficientemente "bem comportada", a série de Fourier de $x(t)$ não converge, necessariamente, para $x(t)$, para todo valor de t . Deste modo, escrevemos

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n \cos \omega_n t + B_n \sen \omega_n t\}, \quad (3.15)$$

onde $\omega_n = \frac{2\pi}{T} \cdot n$ e A_n, B_n são dados por (3.12); sendo $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de período T , integrável e absolutamente integrável. É **usual** escrever-se (3.15) na forma

$$x(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos \omega_n t + B_n \sen \omega_n t\}, \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_n t dt, \quad n \geq 0 \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sen \omega_n t dt, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

A introdução do termo $\frac{1}{2}$ para A_0 faz com que tenhamos uma única fórmula para os A_n .

Condições para que a função x seja igual a sua série de Fourier são consideradas por Figueiredo, 1977.

3.4 - FORMA COMPLEXA DA SÉRIE DE FOURIER.

Para facilidade de manipulação, é conveniente escrever a série e os coeficientes de Fourier na forma complexa. Usamos a fórmula de Euler

$$e^{i\omega_n t} = \cos\omega_n t + i\sin\omega_n t,$$

do que obtemos

$$\cos\omega_n t = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2}, \quad \sin\omega_n t = \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i}$$

Temos, então

$$\begin{aligned} A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t &= \frac{A_n}{2} [e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}] + \frac{B_n}{2i} [e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}] = \\ &= \left(\frac{A_n}{2} + \frac{B_n}{2}\right) e^{i\omega_n t} + \left(\frac{A_n}{2} - \frac{B_n}{2}\right) e^{-i\omega_n t}. \end{aligned}$$

Chamando de C_n o coeficiente de $e^{i\omega_n t}$, temos

$$C_n = \frac{A_n}{2} + \frac{B_n}{2i} = \frac{1}{2}(A_n - iB_n),$$

e substituindo os valores de A_n e B_n dados por (3.17) obtemos

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i \cdot n \frac{2\pi}{T} t} dt, \quad (3.18)$$

para $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, definindo-se $C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$.

A série de Fourier de $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica de período T , integrável e absolutamente integrável, pode então ser escrita como

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}. \quad (3.19)$$

Como C_n é um número complexo, ele pode ser escrito na forma polar

$$C_n = R_n \cdot e^{i\phi_n}, \quad (3.20)$$

de modo que

$$R_n = [A_n^2 + B_n^2]^{1/2}, \phi_n = \arctg \frac{B_n}{A_n}. \quad (3.21)$$

É fácil ver que, se a é um número real qualquer fixado, e se $x(t)$ tem período T , então

$$\int_a^{a+T} x(t) dt = \int_0^T x(t) dt.$$

Em particular, se $a = -\frac{T}{2}$, temos que

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \int_0^T x(t) dt. \quad (3.22)$$

Suponha, agora que $x(t)$ seja uma função definida no intervalo $[-T/2, T/2]$ e nada é dito sobre a periodicidade de $x(t)$. Como as fórmulas (3.17) envolvem somente integrais sobre o intervalo $[-T/2, T/2]$ de acordo com (3.22), então podemos escrever formalmente a série de Fourier de $x(t)$. O que fazemos é estender $x(t)$ periodicamente a toda reta, de modo a obter uma função periódica, de período T que coincide com $x(t)$ no intervalo $[-T/2, T/2]$ e que possui uma série de Fourier idêntica a de $x(t)$. O único cuidado a tomar é definir corretamente os valores de $x(t)$ em $-T/2$ e $T/2$, pois devemos ter $x(-T/2) = x(T/2)$ devido à periodicidade. Ver Tolstov, 1962, para detalhes.

3.5 - JANELAS

Considere o polinômio $x_N(t)$ dado por (3.8), ou então por

$$\sum_{n=-N}^N C_n e^{-in\frac{2\pi}{T}t}. \quad (3.23)$$

O problema que surge é: qual deve ser o valor de N de modo que $x_N(t)$ possa ser considerado uma boa aproximação de $x(t)$?

Substituindo os valores de A_n e B_n em (3.8) obtém-se

$$x_N(t) = \int_0^T D_N\left(\frac{2\pi}{T}[t-v]\right)x(v)dv, \quad (3.24)$$

onde,

$$D_N(t) = \frac{1}{T} \cdot \frac{\text{sen}(N+1/2)t}{\text{sen } 1/2t} \quad (3.25)$$

é o núcleo de Dirichlet e tem as seguintes propriedades:

- (i) $D_N(t)$ é uma função par;
- (ii) $\int_0^T D_N(t)dt = 1$;
- (iii) $D_N\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ é uma função periódica de período T ;
- (iv) $D_N(0) = \frac{2N+1}{T}$

A equação (3.24) mostra que $x_N(t)$ é uma soma de valores de $x(t)$, ponderada por $D_N(\cdot)$.

DEFINIÇÃO: Se $x(t)$ e $y(t)$ são funções periódicas com período T tais que

$$y(t) = \int_0^T k(t-v)x(v)dv, \quad (3.26)$$

dizemos que $k(t)$ é uma janela "através" da qual $y(t)$ vê $x(t)$ ".

Esta linguagem é tirada da teoria de comunicações. Propriedades de $K(t)$ são:

- (i) $K(-t) = K(t)$;
- (ii) $\int_0^T K(t) dt = 1$;
- (iii) $|K(t)| \leq K(0)$, para todo t .

Segue-se que o núcleo de Dirichlet é a janela através da qual $x_N(t)$ vê $x(t)$. Um gráfico de $D_N(t)$ para $T=2\pi$ está na figura 3.2., para alguns valores de N .

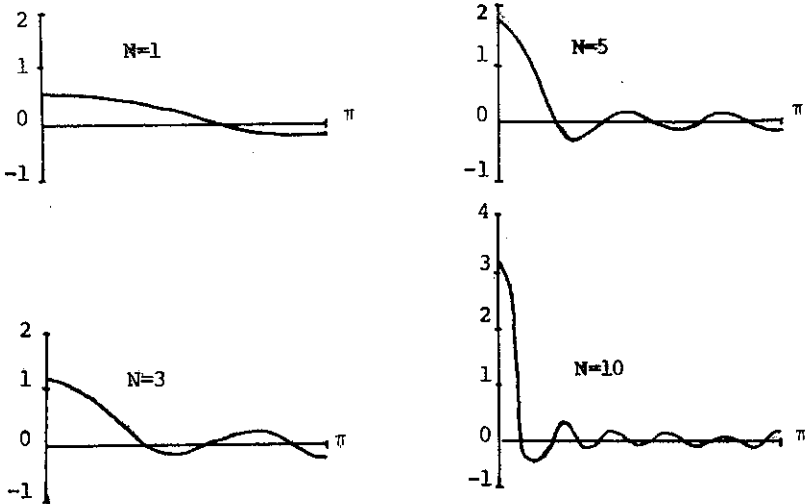


Figura 3.2

A relação (3.24) mostra que a aproximação de $x(t)$ através

de $x_N(t)$ será boa se o núcleo $D_N(\cdot)$ for concentrado ao redor do ponto t . A figura 3.2 nos mostra que o núcleo $D_N(\cdot)$ não é satisfatório, pois não está suficientemente concentrado ao redor da origem. Mesmo para $N=10$, há muitos picos laterais, além do pico central com magnitudes razoáveis. Em termos de convergência de $x_N(t)$ para $x(t)$, isto significa que $x(t)$ deve satisfazer condições de regularidade para que $x_N(t) \rightarrow x(t)$. No entanto, o Teorema de Aproximação de Weierstrass afirma que se $x: a, b \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real contínua, então existe uma sucessão de polinômios que converge uniformemente para x em $[a, b]$.

Uma maneira de construir polinômios harmônicos convergentes para a função em questão foi proposta por Fejér.

Considere $x_N(t)$ dado por (3.8) e a média

$$\sigma_{N+1}(t) = \frac{1}{N+1} \{x_0(t) + x_1(t) + \dots + x_N(t)\}. \quad (3.27)$$

Então, pode-se provar que:

- (i) $\sigma_{N+1}(t)$ converge para $x(t)$ uniformemente, se $x(t)$ é contínua e periódica;
- (ii) $\sigma_{N+1}(t) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) C_n \cdot e^{in \frac{2\pi}{T} t}$
- (iii) $\sigma_{N+1}(t) = \int_0^T F_{N+1}\left(\frac{2\pi}{T}[t-v]\right) x(v) dv, \quad (3.28)$

onde

$$F_{N+1}(t) = \frac{1}{T(N+1)} \left[\frac{\text{sen}(N+1)\frac{1}{2}t}{\text{sen}\frac{1}{2}t} \right]^2 \quad (3.29)$$

é o núcleo de Fejér, que tem as propriedades:

- (a) $F_{N+1}(t)$ é uma função par;

(b) $\int_0^T F_{N+1}(t) dt = 1;$

(c) $F_{N+1}(\frac{2\pi t}{T})$ é periódica, de período T.

(d) $F_{N+1}(0) = \frac{N+1}{T}.$

A figura 3.3 ilustra F_{N+1} para $T=2\pi$ e alguns valores de N.

Vemos que o núcleo de Fejér é uma janela mais concentrada ao redor da origem que o núcleo de Dirichlet. Além disso, $F_{N+1} > 0$, para todo t, e os picos laterais tem magnitude desprezível quando comparados com o pico central.

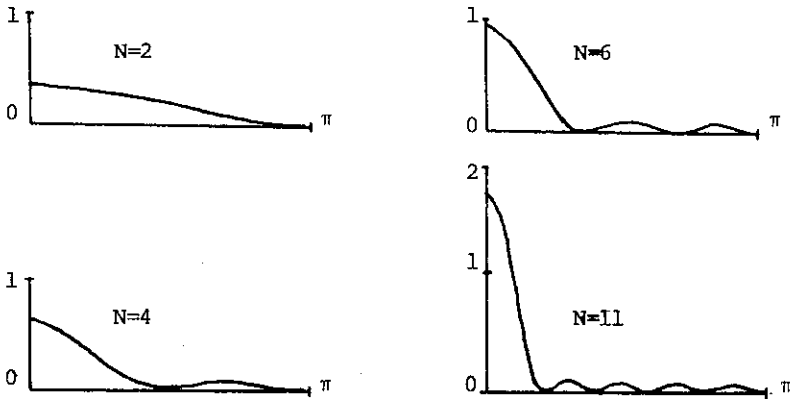


Figura 3.3

Do que foi dito acima, podemos considerar, de modo geral, expressões da forma

$$x^{(N)}(t) = \sum_n h\left(\frac{n}{N}\right) C_n e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}, \quad (3.30)$$

para alguma função $h(t)$, com $h(0)=1$ e $h(t)=0$, $|t|>1$. A função $h(n/N)$, é chamada *fator de convergência* (ou *coeficientes geradores de janelas*, (Parzen, 1967) ou "*data windows*" ou ainda "*tapers*" (Tukey, 1967)).

Se definirmos

$$H^{(N)}(t) = \frac{1}{T} \sum_n h\left(\frac{n}{N}\right) e^{-int}, \quad (3.31)$$

então (3.30) pode ser escrita

$$x^{(N)}(t) = \int_0^T H^{(N)}\left(\frac{2\pi}{T} [t-v]\right) x(v) dv. \quad (3.32)$$

A função $H^{(N)}(t)$ é o que chamamos de *janela* anteriormente e em capítulos posteriores será denominada de *janela espectral*, definida no domínio de frequências enquanto $h\left(\frac{n}{N}\right)$ será definida no domínio do tempo. A forma típica de $H^{(N)}(t)$ é aquela das figuras 3.2 e 3.3, isto é, concentrada ao redor da origem e tal que $\int_0^T H^{(N)}(t) dt = 1$.

Uma grande variedade de fatores de convergência tem sido gerida na literatura. A Tabela 3.1 ilustra alguns deles.

TABELA 3.1

$h(n/N)$, $0 \leq n \leq N$	$H^{(N)}(t)$, $-\pi < t < \pi$	Autores
1	$D_N(t)$	Dirichlet
$1 - \frac{ n }{N+1}$	$F_{N+1}(t)$	Fejér, Bartlett
$\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi n}{N}\right)$	$\frac{1}{2} D_N(t) + \frac{1}{4} D_N\left(t - \frac{\pi}{N}\right) + \frac{1}{4} D_N\left(t + \frac{\pi}{N}\right)$	Hamming, Tukey
$1 - \frac{6n^2}{N^2} \left(1 - \frac{ n }{N}\right)$, $0 \leq n \leq \frac{N}{2}$ $2 \left(1 - \frac{ n }{N}\right)^3$, $\frac{N}{2} \leq n \leq N$	$\frac{2 + \cos t \left[\frac{\text{sen } Nt/4}{\text{sen } t/4}\right]^4}{4\pi N^3}$	de la Vallée-Poussin, Parzen
$e^{-n^2/2N^2}$	$\approx \frac{N}{\sqrt{2\pi}} e^{-N^2 t^2/2}$	Gauss, Weierstrass
$1 - \frac{n^2}{N^2}$	$D_N(t) + \frac{1}{N^2} \frac{d^2 D_N(t)}{dt^2}$	Riesz, Bochner, Parzen

3.6 - COEFICIENTES DISCRETOS DE FOURIER.

Há uma dificuldade prática para calcular os coeficientes de Fourier dados por (3.17), pois normalmente não temos a expressão funcional da função $x(t)$. Mais ainda, a função $x(t)$ pode não ser conhecida em todos os pontos t do intervalo $0 \leq t \leq T$ e sim em um conjunto de pontos igualmente espaçados t_0, t_1, \dots, t_{N-1} , definidos por

$$t_j = \frac{T}{N}j, \quad j=0, 1, \dots, N-1. \quad (3.33)$$

Sabemos da teoria da integral de Riemann que, se $g(t)$ é uma função contínua, então

$$\int_0^T g(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g\left(\frac{T}{N}j\right), \quad (3.34)$$

então aproximamos os coeficientes de Fourier A_n, B_n por

$$A_n^{(N)} \approx \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) \cos\left(n\frac{2\pi}{N}j\right), \quad (3.35)$$

$$B_n^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) \operatorname{sen}\left(n\frac{2\pi}{N}j\right), \quad (3.36)$$

de modo que C_n é aproximado por

$$C_n^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) e^{-in\frac{2\pi}{N}j}. \quad (3.37)$$

As quantidades definidas em (3.35)-(3.37) são chamadas *coeficientes discretos de Fourier de $x(t)$* .

Na realidade, os números $A_n^{(N)}, B_n^{(N)}, n=0, 1, 2, \dots$ consistem de, no máximo, N números. Este fato segue das seguintes relações, que ficam a cargo do leitor serem verificadas (ver exercício 6):

$$\begin{aligned} \cos(kN+n)\frac{2\pi}{T}.t_j &= \cos(n\frac{2\pi}{T}t_j), \\ \text{sen}(kN+N)\frac{2\pi}{T}.t_j &= \text{sen}(n\frac{2\pi}{T}t_j), \\ -\text{sen}(kN-n)\frac{2\pi}{T}.t_j &= \text{sen}(n\frac{2\pi}{T}t_j), \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde $n=1,2,\dots,N$ e k é um inteiro qualquer.

As relações (3.38) nos mostram que, a fim de conhecermos todos os coeficientes discretos de Fourier $A_n^{(N)}$, $B_n^{(N)}$ é suficiente conhecê-los para

$$\begin{aligned} n=0,1,2,\dots,\frac{1}{2}(N-1) \quad &\text{se } N \text{ é ímpar,} \\ n=0,1,2,\dots,\frac{N}{2} \quad &\text{se } N \text{ é par.} \end{aligned}$$

ou então, para

$$n = 0,1,2,\dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \quad (3.39)$$

É possível obter uma relação entre os coeficientes de Fourier A_n , B_n e os coeficientes discretos de Fourier $A_n^{(N)}$, $B_n^{(N)}$. Pode-se provar (ver exercício 7) que

$$\begin{aligned} A_0^{(N)} &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{Nk}, \\ A_n^{(N)} &= A_n + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{Nk+n} + A_{Nk-n}), \\ B_n^{(N)} &= B_n + \sum_{k=1}^{\infty} (B_{Nk+n} - B_{Nk-n}). \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.7 - 'ALIASING'

Consideremos o harmônico $A\cos\omega t + B\sin\omega t$, de frequência $\omega > 0$. Substituindo ω por $-\omega$ obtemos

$$A \cos(-\omega t) + B \sin(-\omega t) = A \cos \omega t - B \sin \omega t,$$

ou seja, ainda temos um harmônico de frequência positiva ω . Segue-se que as frequências ω e $-\omega$ são indistinguíveis e dizemos que ω e $-\omega$ são "aliases".

O fato de observarmos nossa série temporal $x(t)$ em um conjunto de valores t igualmente espaçados introduz novas frequências "aliases".

As relações (3.38) nos dizem que dados os valores de $x(t)$ nos pontos t_0, t_1, \dots, t_N , um harmônico com $m \frac{2\pi}{T} t$, de frequência $m \frac{2\pi}{T}$, não pode ser distinguido de um harmônico com $n \frac{2\pi}{T} t$, de frequência, $n \frac{2\pi}{T}$, se m e n são relacionados por

$$m = kN + n \quad (3.41)$$

ou

$$m = kN - n, \quad (3.42)$$

para algum inteiro k . Dizemos que a frequência $m \frac{2\pi}{T}$ é "alias" da frequência $n \frac{2\pi}{T}$, sobre os pontos $t_j = j \frac{T}{N}$, se m e n são relacionados por (3.41) ou (3.42). Obtemos o chamado *efeito de "aliasing"*, introduzido pela amostragem da série em pontos do tempo igualmente espaçados.

A frequência $\omega = n \frac{2\pi}{T}$ é a frequência mais baixa, da qual todas as demais $\omega \pm \frac{2\pi k}{\Delta t}$ são "aliases", onde $\Delta t = \frac{T}{N}$ é o intervalo de amostragem, isto é $\Delta t = t_j - t_{j-1} = \frac{T}{N} j - \frac{T}{N} (j-1) = \frac{T}{N}$.

Para ilustrar o exposto, consideremos, mais uma vez, o harmônico

$$x(t) = \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \cdot \Delta t \right),$$

de tal sorte que a t -ésima observação é feita em $t \cdot \Delta t$. Aumentando a frequência $n \frac{2\pi}{T}$ a partir de 0, esta onda oscila cada vez mais rápida

mente e para $n = \frac{N}{2}$ obtemos

$$x(t) = \cos \frac{N}{2} \cdot \frac{2\pi}{T} t \cdot \Delta t = \cos \pi t = (-1)^t,$$

pois $\Delta t = \frac{T}{N}$, e esta oscilação é a mais rápida observável.

Aumentando-se n mais ainda, de modo que $\frac{N}{2} < n < N$ e sendo $n' = N - n$ temos

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(N-n') \frac{2\pi}{T} t \Delta t = \cos(2\pi t - \cos n' \frac{2\pi}{T} t \Delta t) \\ &= \cos n' \frac{2\pi}{T} t \Delta t. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $\sin n \frac{2\pi}{T} t \Delta t = -\sin n' \frac{2\pi}{T} t \Delta t$. Podemos entender o argumento para qualquer n , não importa quão grande ele seja.

Concluimos que toda frequência $n \frac{2\pi}{T}$, com n não no intervalo, $0 \leq n \leq \frac{N}{2}$, tem uma frequência "alias" neste intervalo, chamada de "alias principal". Para $n = \frac{N}{2}$ obtemos a frequência de Nyquist $n \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{N}{2} \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{\Delta t}$ também chamada frequência de corte, e ela é tal que frequências mais altas são "dobradas" para dentro de $[0, \frac{\pi}{\Delta t}]$. Ver figura 3.4.

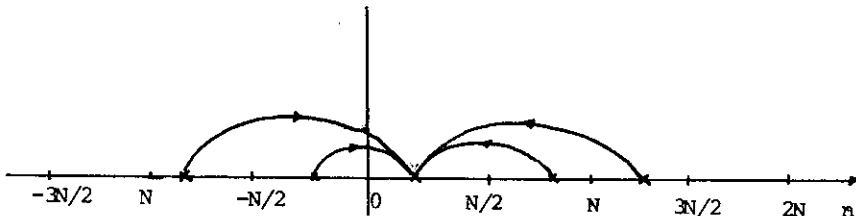


Figura 3.4

Voltaremos a este assunto no Capítulo 5.

3.8 - TRANSFORMADA DE FOURIER.

Nas seções anteriores consideramos a série de Fourier de uma função do tempo $x(t)$, periódica, integrável e absolutamente integrável. Nesta seção veremos como se passar da série de Fourier para a transformada de Fourier.

Vamos introduzir a seguinte notação. Dizemos que $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de L_1 se e somente se x e $|x|$ forem integráveis segundo Riemann.

Consideremos, então, uma função $x(t)$ de L_1 , periódica de período T . Então,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\frac{2\pi}{T}t},$$

com

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt.$$

Sejam $h = \frac{2\pi}{T}$ e $\omega_n = nh = n\frac{2\pi}{T}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Então

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t},$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\omega_n t} dt.$$

Definindo-se

$$C(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\omega_n t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.43)$$

temos que

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} hC(\omega_n) e^{i\omega_n t}. \quad (3.44)$$

Fazendo $T \rightarrow \infty$ e $h \rightarrow 0$ e notando que a série (3.44) é, formalmente, a soma de Riemann definindo a integral de $C(\omega)$ e $e^{i\omega t}$, obtemos

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3.45)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.46)$$

As relações (3.45) e (3.46) definem a transformada de Fourier e sua inversa, respectivamente.

Podemos, agora, definir a transformada de Fourier para uma classe particular de funções.

DEFINIÇÃO: Se $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função de L_1 , com valores complexos, então a transformada de Fourier de $x(t)$ é a função $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$X(\omega) = F[x](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} x(t) dt. \quad (3.47)$$

Algumas propriedades de $X(\cdot)$ são (ver Figueiredo, 1977, para as demonstrações):

- (i) $X(\cdot)$ é contínua
- (ii) $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} X(\omega) = 0$.
- (iii) F é um operador linear, no sentido que

$$F[\alpha x + \beta y] = \alpha F[x] + \beta F[y],$$

para x e y funções de L_1 , α e β complexos.

- (iv) $X(\omega)$ não é, necessariamente, uma função de L_1 . Este fato faz com que se estude a transformada de Fourier em um espaço (contido em L_1) onde $X(\cdot)$ pertença a este espaço. Tal espaço é o conjunto S das funções de decrescimento rápido.

Uma função $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é de *decréscimo rápido* se for infinitamente diferencial e se

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} t^m \cdot \frac{d^n x(t)}{dt^n} = 0, \quad (3.48)$$

para todo $m, n \geq 0$ inteiros. Para um estudo detalhado do assunto, ver Figueiredo, 1977, Capítulo 6. Contentar-nos-emos em apresentar os seguintes fatos:

(a) Se $x \in \mathcal{S}$, então $x \in L_1$.

(b) Se $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $x \in \mathcal{S}$, então $F[x](\omega)$ pertence a \mathcal{S} .

$$(c) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} X(\omega) d\omega, \quad (3.49)$$

que é a fórmula da inversa de Fourier.

(d) Se x e y pertencem a \mathcal{S} , então a *convolução* de x e y é definida por

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s) y(s) ds. \quad (3.50)$$

(d1) $x * y \in \mathcal{S}$.

$$(d2) \quad F[x * y] = 2\pi F[x] F[y]. \quad (3.51)$$

$$(d3) \quad xy \in \mathcal{S} \quad \text{e} \quad F[xy] = \frac{1}{2\pi} F[x] * F[y]. \quad (3.52)$$

No caso de x e y pertencerem a L_1 , a propriedade (3.51) ainda é válida, mas com a condição de x ser contínua e limitada em \mathbb{R} .

O desenvolvimento acima foi feito para uma função $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de L_1 . Se temos uma sequência infinita $x_n, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, com $\sum_n |x_n| < \infty$, então a transformada de Fourier de x_n será

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot e^{-i\omega n}, \quad -\pi < \omega < \pi \quad (3.53)$$

e a transformada inversa fica

Tabela 3.2 — Sumário de Transformadas de Fourier

FUNÇÃO	DOMÍNIO DA FUNÇÃO	TRANSFORMADA DE FOURIER	TRANSFORMADA INVERSA
Sequência finita, x_n	$-(N-1), \dots, 0, \dots, N$	$c_k = \frac{1}{2N} \sum_{n=-(N-1)}^N x_n e^{-in\pi k/N}$ $k = -(N-1), \dots, 0, \dots, N.$	$X_n = \sum_{k=-(N-1)}^N c_k e^{in\pi k/N}$ $n = -(N-1), \dots, 0, \dots, N,$ pode ser estendida a $n = 0, \pm 1, \dots$
Sequência infinita, x_n , absolutamente <u>se</u> mével.	$0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_n x_n e^{-i\omega n}$ $-\pi < \omega < \pi, \text{ periódica de período } 2\pi.$	$x_n = \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{i\omega n} d\omega,$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
$x(t)$ contínua, seccionalmente lisa.	$[-\pi, \pi]$	$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-ikt} dt,$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$x(t) = \sum_k c_k e^{ikt},$ $t \in [-\pi, \pi],$ pode ser estendida como uma função periódica de \mathbf{R}
$x(t)$ contínua, seccionalmente lisa, período T .	$[-T/2, T/2]$ pode ser estendida a \mathbf{R} .	$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi kt/T} dt,$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$x(t) = \sum_k c_k e^{i2\pi kt/T}$ $-T/2 \leq t \leq T/2,$ pode ser estendida a \mathbf{R} .
$x(t)$ de $L_1(\mathbf{R})$.	\mathbf{R}	$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt,$ $-\infty < \omega < +\infty$	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ $-\infty < t < +\infty$

Fonte: Fuller, 1976.

$$x_n = \int_{-\pi}^{\pi} x(\omega) e^{i\omega n} d\omega, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.54)$$

A função $X(\omega)$ definida para $-\pi < \omega < \pi$ através da relação (3.53) é periódica, de período 2π .

A tabela 3.2 fornece um sumário dos casos de interesse

3.9 - FUNÇÕES GENERALIZADAS

Comecemos com um exemplo. Seja a função

$$x(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq b \\ 0, & |t| > b. \end{cases}$$

Usando (3.47) obtemos facilmente que

$$X(\omega) = 2ab \frac{\text{sen } 2\pi\omega b}{2\pi\omega b} \quad (3.55)$$

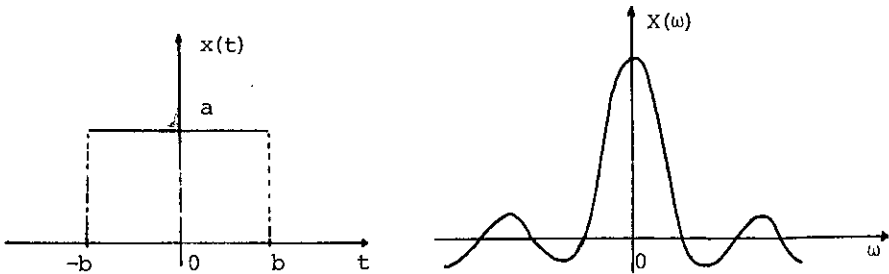


Figura 3.5

Considere o caso $a = 1$. Se $b \rightarrow \infty$, $x(t)$ tende a uma constante, igual a 1, para todo t ; quanto a $X(\omega)$, ela tende a concentrar-se cada vez mais ao redor da origem, a medida que b cresce. Ver figura 3.6.

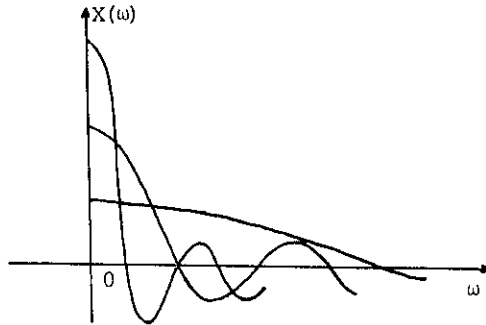


Figura 3.6

No limite, $X(\omega)$ tende a uma "função", que tem um salto infinito na origem e é zero para todo $\omega \neq 0$.

Tal função é chamada a *função impulso* ou δ (*delta*) de Dirac e é definida pelas relações

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.57)$$

A rigor, o δ não é uma função, pois assume o valor $+\infty$, para $t=0$ e a integral (3.57) deveria ser zero. Normalmente, δ é introduzida através da propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0), \quad (3.58)$$

se $f(t)$ é uma função real, contínua e que se anula fora de um intervalo limitado. Contudo, como δ não é uma função, a integral do primeiro membro de (3.58) não faz sentido.

A idéia é considerar uma sequência de funções contínuas $\delta_n(t)$ tais que:

- (i) $\delta_n(t) \geq 0$, para todo t ;
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) dt = 1$;
- (iii) para todo $\epsilon > 0$, $n > 0$, existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$

$$\int_{|t| > n} \delta_n(t) dt < \epsilon.$$

Desta maneira, (3.58) poderia ser definida como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) f(t) dt. \quad (3.59)$$

Uma sequência de funções $\delta_n(t)$ como acima é chamada uma *sucessão de núcleos de Dirac*. A Tabela 3.3 mostra exemplos de tais funções, juntamente com suas transformadas de Fourier.

TABELA 3.3 - Núcleos de Dirac

$\delta_n(t)$	$\Delta_n(\omega)$
$2n \frac{\text{sen } 2\pi nt}{2\pi nt}$	$1, \omega \leq n$ $0, \omega > n$
$\sqrt{n} e^{-\pi n t^2}$	$e^{-\pi \omega^2 / n}$
$\frac{n}{2} e^{- t n}$	$\frac{n^2}{n^2 + (2\pi\omega)^2}$

FONTE: Jenkins & Watts, 1968.

Pode-se demonstrar que, usando (3.59), a relação (3.58) é realmente correta, se impomos a condição que os núcleos $\delta_n(t)$ sejam funções pares. Ver Figueiredo, 1977.

A interpretação física da função delta é a de um impulso de energia em um sistema. Suponha um sistema definido pela integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du. \quad (3.60)$$

Aqui, $x(t)$ é a entrada do sistema e $y(t)$ é a saída e o sistema é caracterizado pela função $h(t)$. Tal sistema diz-se um *filtro linear* e será estudado com algum detalhe no Capítulo 5. Se a entrada de (3.60) é $x(t)=\delta(t)$, então

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\delta(t-u)du = h(t), \quad (3.61)$$

ou seja, a resposta do sistema a um impulso é a função $h(t)$, que recebe daí o nome de *função resposta de impulso*. A relação (3.58) é caso particular de (3.61).

Uma função relacionada com δ é a função de Heaviside, definida por

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

Esta função pode ser encarada como o limite de funções $u_n(t)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Por exemplo, considere

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (3.63)$$

Derivando $u_n(t)$ obtemos $u'_n(t) = \frac{1}{2}n \cdot e^{-n|t|}$, que é um núcleo de Dirac. Logo, podemos dizer que a derivada de $u(t)$ é $\delta(t)$.

Duas outras funções úteis são o *delta de Kronecker*,

$$\delta\{t\} = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

e o *pente de Dirac*,

$$\eta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t-2\pi j), \quad (3.65)$$

com a propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \eta(t) dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(2\pi j), \quad (3.66)$$

para $x(t)$ apropriada. Funções generalizadas são discutidas em Lighthill, 1958.

3.10 - EXEMPLO DE ANÁLISE DE FOURIER

Vamos considerar os dados horários de marés, observados em Ubatuba, São Paulo, durante os cinco primeiros dias de novembro de 1972. Os dados estão apresentados na Tabela A.3 do Apêndice e ilustrados na figura 2.9.

A Tabela 3.4 mostra alguns dos coeficientes $A_n^{(N)}$, $B_n^{(N)}$ calculados usando (3.35) e (3.36), e dos valores correspondentes de $R_n^{(N)} = \left[(A_n^{(N)})^2 + (B_n^{(N)})^2 \right]^{1/2}$. Lembremos que (omitindo o índice, superior N)

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) = \bar{x}, \\
 A_n &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) \cos\left(n \frac{2\pi}{N} j\right), \\
 B_n &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} s(t_j) \operatorname{sen}\left(n \frac{2\pi}{N} j\right),
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

para $n=1, 2, \dots, \left[\frac{N}{2}\right]$ e se N é par,

$$A_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) \cos(\pi j) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) (-1)^j,$$

de modo que podemos escrever

$$x(t) = A_0 + \sum_{j=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} (A_j \cos \omega_j t + B_j \operatorname{sen} \omega_j t) + (-1)^t \cdot A_{N/2}, \tag{3.68}$$

o último termo sendo incluído se N é par, $t=0, 1, \dots, N-1$, com $\omega_j = j \frac{2\pi}{T}$.

Aparece também na tabela a contribuição de cada harmônico para a energia média. Esta é dada por

$$s_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x^2(t) = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N/2} R_j^2 + A_{N/2}^2, \tag{3.69}$$

novamente o último termo incluído se N é par. A equação (3.69) nos diz que a energia média dissipada por $x(t)$ pode ser decomposta em contribuições dos diferentes harmônicos.

Consultando a Tabela A.4 do Apêndice, que apresenta a análise completa, vemos que os termos para $n=0, 10$ e 12 contribuem com mais de 98% da energia média, de modo que os dados podem ser aproximados pelo modelo

$$x(t) = 1,7007 + 0,3801 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + 3,53\right) + 0,576 \cos\left(\frac{\pi}{5}t + 356,60\right),$$

TEBELA 3.4

n	A _n	B _n	R _n	φ _n (°)	CONTRIBUIÇÃO PARA \bar{s}_N^2
0	1,7007	0,0000	1,7007	0,00	2,8923
1	-0,1158	0,0026	0,1159	178,74	0,0067
10	0,3793	0,0234	0,3801	3,53	0,0722
12	0,0575	-0,0034	0,5760	356,60	0,1658
19	0,0471	0,0383	0,0607	39,15	0,0018
23	0,0210	0,0027	0,0212	7,39	0,0002
40	0,0056	0,0071	0,0090	51,71	0,0000
50	0,0122	-0,0104	0,0160	319,48	0,0001
60	0,0283	-0,0000	0,0283	360,00	0,0008

Fonte: Tabela A.4

sendo que o ângulo da fase ϕ_n é dado em graus nas Tabelas 3.4 e A.4.

Na forma complexa, (3.67) fica

$$\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x^2(t) = \sum_{n=0}^{N-1} |C_n|^2, \quad (3.70)$$

onde

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x(t) e^{-i\omega_j t}.$$

No caso de observarmos $x(t)$ no intervalo $[-T/2, T/2]$, de (3.13) obtemos

$$s_T^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \sum_n |C_n|^2. \quad (3.71)$$

A análise de Fourier sumarizada na Tabela A.4. foi feita utilizando-se um computador de mesa HP-9810A.

3.11 - EXERCÍCIOS.

1 - Prove que os coeficientes de Fourier (3.12) são soluções do seguinte sistema de equações normais:

$$\sum_{n=0}^N \{A_n \int_0^T \cos \omega_n t \cos \omega_m t dt + B_n \int_0^T \sin \omega_n t \cos \omega_m t dt = \int_0^T x(t) \cos \omega_m t dt,$$

$$\sum_{n=0}^N A_n \int_0^T \cos \omega_n t \sin \omega_m t dt + B_n \int_0^T \sin \omega_n t \sin \omega_m t dt = \int_0^T x(t) \sin \omega_m t dt.$$

2 - Prove que

(a) Se $x(t)$ é periódica e par, então $B_n=0$, para todo n e

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) dt, \quad n=0 \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos \omega_n t dt, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

(b) Se $x(t)$ é periódica e ímpar, então $A_n=0$, para todo n e

$$B_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin \omega_n t dt, \quad n \geq 1.$$

3 - Prove a equação (3.24)

4 - Prove que, para $N \geq 0$ inteiro e $t \neq 0 \pmod{2\pi}$:

$$(a) D_N(t) = \sum_{|n| \leq N} e^{int} = \frac{\text{sen}(N+1/2)t}{\text{sen } 1/2 t}.$$

$$(b) F_{N+1}(t) = \frac{D_0(t) + \dots + D_N(t)}{N+1} = \frac{1}{N+1} \left[\frac{\text{sen}(N+1)1/2t}{\text{sen } 1/2 t} \right]^2$$

5 - Usando o exercício 4(b) prove a equação (3.28).

6 - Prove as equações (3.38)

7 - Usando (3.38) e os fatos

$$\sum_{j=0}^{N-1} \cos(n \frac{2\pi j}{N}) = 0, \quad \sum_{j=0}^{N-1} \text{sen}(n \frac{2\pi j}{N}) = 0, \quad n \neq 0, N, 2N, \dots$$

prove as equações (3.40).

8 - Suponha que a série temporal $x(t)$ possa ser modelada por $x(t) = A \cos \omega t + B \text{sen} \omega t + e(t)$, onde a frequência ω é suposta conhecida. Conhecendo-se N observações de $x(t)$, para $t=0, 1, \dots, N-1$, determine os estimadores de mínimos quadrados de A e B , isto é, os valores de A e B que minimizam

$$\sum_{t=0}^{N-1} e^2(t) = \sum_{t=0}^{N-1} [x(t) - A \cos \omega t - B \text{sen} \omega t]^2.$$

9 - Obter a transformada de Fourier de cada uma das funções:

$$(a) x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

$$(b) \ x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

$$(c) \ x(t) = e^{-|t|}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

$$(d) \ x(t) = e^{-\pi t^2}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

10 - Considere a função

$$x(t) = \begin{cases} a \cdot \cos \frac{2\pi t}{\Delta}, & -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Prove que a transformada de Fourier de $x(t)$ tende para $\frac{a}{2} \{ \delta(\omega - \frac{1}{\Delta}) + \delta(\omega + \frac{1}{\Delta}) \}$, quando $T \rightarrow \infty$. Ou seja, a transformada de Fourier de uma cosenóide consiste de uma função δ de área $\frac{a}{2}$ centrada em $\omega = -1/\Delta$ e de uma função de área $a/2$ centrada em $\omega = 1/\Delta$.

11 - Prove que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(x * y)(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |y(s)| ds.$$

12 - Defina a energia média contida na série $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, como sendo

$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt$. Considere

$$x(t) = \sum_{j=-n}^n C_j e^{i\omega_j t}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

$\omega_0 = 0$, $\omega_{-j} = -\omega_j$ e $c_{-j} = \bar{c}_j$. Obtenha a energia média contida em $x(t)$.

- 13 - Usando um programa de computador (ou fazendo seu próprio programa), faça uma análise de Fourier completa dos dados da Table A.1.

CAPÍTULO 4

ESPECTRO DE UM PROCESSO ESTACIONÁRIO

4.1 - INTRODUÇÃO

Dada uma série temporal, ela poderá ser analisada de várias maneiras, dependendo de nossos objetivos. Podemos estar interessados apenas na descrição da série, ou em fazer previsões de valores futuros. No primeiro caso, a construção do gráfico da série e a verificação da existência de tendências, ciclos e variações sazonais pode ser tudo o que se deseja. No segundo caso, será necessário considerar algum tipo de modelo que descreva o comportamento da série e a escolha do modelo pode ser um ponto crítico na análise.

Um problema mais complicado seria o de tentar descrever o mecanismo aleatório que gerou a série sob estudo. Por exemplo, analisando-se uma série de alturas de ondas, podemos querer saber como estas ondas são geradas.

Outros propósitos são: estimação de funções de transferência de sistemas dinâmicos, controle de tais sistemas, simulação e otimização de sistemas, etc.

Em todos os casos, *modelos probabilístico* são construídos, no domínio do tempo ou no domínio de frequências.

No domínio do tempo, os modelos são utilizados com o propósito principal de previsão e controle. Obtemos os chamados *modelos paramétricos finitos*, no sentido que estes modelos são determinados por um número finito de parâmetros a serem estimados através das obser-

vações. A classe dos modelos auto-regressivos e de médias móveis tem sido bastante utilizada neste contexto.

Outra maneira de descrever séries temporais é através de *modelos não paramétricos*, ou seja, modelos com um número infinito de parâmetros. Um dos modelos não paramétricos mais utilizados é a *análise espectral* ou *harmônica*, no domínio de frequências, ou a análise da função de auto-covariância (f.a.c.), no domínio do tempo.

Na análise espectral, a característica fundamental é o *espectro*, que é a transformada de Fourier da função de auto-covariância. Logo, sob o ponto de vista da quantidade de informação probabilística que fornecem, o espectro e a f.a.c. são ferramentas equivalentes.

A análise espectral é fundamental em áreas onde o interesse básico é a procura de periodicidade nos dados, como em Meteorologia e Oceanografia, por exemplo. Campos de aplicação da análise espectral incluem a Engenharia Elétrica, Comunicações, Física, Economia, Medicina, etc. Para exemplos e referências, ver Brillinger, 1975, Capítulo 1.

Na análise espectral de processos estocásticos, duas linhas de pensamento são possíveis. Uma é devida aos trabalhos de Wiener (1930) e tiveram início com Schuster (1898, 1906); aqui, a teoria é desenvolvida para uma classe bastante ampla de processos estocásticos e não estocásticos. A outra linha tem seus primórdios nos trabalhos de Khintchine (1932, 1934) e continua com Cramér (1942) e Kolmogorov (1941). Aqui, a análise é restrita à classe dos processos estocásticos estacionários.

No que segue, desenvolvemos de maneira especial a teoria de Khintchine e daremos, brevemente, noções da teoria de Wiener e estabeleceremos a relação entre as duas.

4.2 - O ESPECTRO

Seja $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ um processo estocástico estacionário, real,

com média zero, variância unitária e função de auto-covariância $C(\tau)$, $\tau \in \mathbb{Z}$.

Nesta seção, suporemos que uma condição de independência as sintótica esteja satisfeita, no sentido que valores do processo bas tante separados no temp. sejam pouco dependentes. Esta condição é expressa na forma

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |C(\tau)| < \infty, \quad (4.1)$$

ou seja, $C(\tau) \rightarrow 0$, quando $|\tau| \rightarrow \infty$. Nestas condições, o *espectro* de $X(t)$ é definido como a transformada de Fourier de $C(\tau)$, ou seja,

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\omega\tau}, \quad (4.2)$$

$-\infty < \omega < +\infty$.

TEOREMA 4.1 - O espectro $f(\omega)$ definido por (4.2) é limitado, não negativo e uniformemente contínuo. Além disso, $f(\omega)$ é par e periódico de período 2π .

DEMONSTRAÇÃO - Que é limitado segue de $|f(\omega)| \leq (2\pi)^{-1} \sum_{\tau} |C(\tau)|$ e de (4.1). Agora,

$$|f(\omega+\lambda) - f(\omega)| \leq (2\pi)^{-1} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |e^{-i(\omega+\lambda)\tau} - e^{-i\omega\tau}| |C(\tau)|,$$

logo

$$|f(\omega+\lambda) - f(\omega)| \leq (2\pi)^{-1} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |C(\tau)| |e^{-i\lambda\tau} - 1|,$$

que tende para zero, para $\lambda \rightarrow 0$, independente de ω .

Como $C(-\tau) = C(\tau)$ segue-se que

$$f(-\omega) = (2\pi)^{-1} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{i\omega\tau} = (2\pi)^{-1} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C(-\tau) e^{-i\omega\tau} = f(\omega),$$

logo o espectro é uma função par. Também,

$$f(\omega+2\pi) = (2\pi)^{-1} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i(\omega+2\pi)\tau} = (2\pi)^{-1} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\omega\tau} \cdot e^{-i2\pi\tau} = f(\omega),$$

pois $e^{-i2\pi\tau} = 1$.

Para provar que $f(\omega) \geq 0$, para todo ω , considere

$$f_N(\omega) = (2\pi N)^{-1} \left| \sum_{t=0}^{N-1} X(t) e^{-i\omega t} \right|^2. \quad (4.3)$$

Então

$$E\{f_N(\omega)\} = (2\pi N)^{-1} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} C(t-s) e^{-i\omega(t-s)},$$

e colocando $\tau=t-s$, vem que

$$\begin{aligned} E\{f_N(\omega)\} &= (2\pi N)^{-1} \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} (N-|\tau|) C(\tau) e^{-i\omega\tau} \\ &= (2\pi)^{-1} \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right) C(\tau) e^{-i\omega\tau}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Como $f_N(\omega) \geq 0$, segue-se que $E\{f_N(\omega)\} \geq 0$. Quando $N \rightarrow \infty$, a série do segundo membro de (4.4) converge para $f(\omega)$, logo $f(\omega) \geq 0$. \square

Como $f(\omega)$ é periódico, de período 2π , basta considerar $\omega \in [-\pi, \pi]$. Como $f(\omega)$ é par, basta representá-lo no intervalo $[0, \pi]$.

A condição (4.1) não precisa estar satisfeita. Nestas condições é necessário introduzir o espectro de processo de outro modo. Notemos que, de (4.1) segue

$$C(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} f(\omega) d\omega, \quad \tau \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

Para um processo com parâmetro contínuo $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, as relações (4.1), (4.2) e (4.5) ficam, respectivamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C(\tau)| d\tau < \infty, \quad (4.6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} C(\tau) d\tau, \quad (4.7)$$

e

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} f(\omega) d\omega. \quad (4.8)$$

4.3 - O TEOREMA DE BOCHNER-KHINTCHINE.

Nesta seção e na seguinte trataremos das chamadas representações espectrais para o processo $X(t)$ e para a respectiva função de covariância $C(\tau)$. Para ilustrar, iniciaremos com um exemplo, que dá estas representações em um caso particular.

EXEMPLO 4.1 - Seja $X(t)$, $-\infty < t < +\infty$, uma função quase-periódica

$$X(t) = \sum_{j=-n}^n Z_j e^{i\omega_j t}, \quad (4.9)$$

onde ω_j , $-n \leq j \leq n$ são frequências e Z_j são v.a. complexas com variâncias b_j , $j = -n, \dots, n$. Vejamos como as v.a. Z_j devem ser de modo que o processo $X(t)$ definido por (4.9) seja real e estacionário.

Para que o processo $X(t)$ seja real os ω_j devem ser simétricos, isto é, $\omega_{-j} = \omega_j$ e as v.a. Z_j devem ser tais que $Z_{-j} = \bar{Z}_j$, $j = 0, \pm 1, \dots, \pm n$. Agora,

$$E\{X(t)\} = \sum_{j=-n}^n E\{Z_j\} e^{i\omega_j t}, \quad (4.10)$$

e para que o processo seja estacionário, devemos ter $E\{X(t)\}=E\{X(0)\}=m$, constante, para todo $t \in \mathbb{R}$. Segue-se de (4.10) que $E\{Z_j\}$ são os coeficientes de Fourier da função $m=E\{X(t)\}$ (uma discussão elaborada, deste fato encontra-se em Koopmans, 1975, pag.21) e então

$$E\{Z_j\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T m \cdot e^{-i\omega_j t} dt.$$

Como m é constante,

$$E\{Z_0\} = m \quad \text{e} \quad E\{Z_j\} = 0, \quad j \neq 0.$$

Por outro lado, como $X(t)$ é real, $X(t)=\overline{X(t)}$ e

$$\begin{aligned} E\{X(t+\tau)X(t)\} &= E\left\{ \sum_{j=-n}^n Z_j e^{i\omega_j(t+\tau)} \overline{\sum_{k=-n}^n Z_k e^{i\omega_k t}} \right\} \\ &= \sum_{j=-n}^n \sum_{k=-n}^n E\{Z_j \overline{Z_k}\} e^{i(\omega_j - \omega_k)t} e^{i\omega_j \tau} \\ &= \sum_{j=-n}^n E\{|Z_j|^2\} e^{i\omega_j \tau} + \sum_{j=-n}^n \sum_{k \neq j} E\{Z_j \overline{Z_k}\} e^{i\omega_j \tau} e^{i(\omega_j - \omega_k)t} \end{aligned}$$

Encarada como uma função quase-periódica de t , com τ fixo, de vemos ter

$E\{X(t+\tau)X(t)\}=E\{X(\tau)X(0)\}=B(\tau)$, digamos, $-\infty < t < +\infty$, constante, e o argumento visto acima pode ser aplicado novamente obtendo-se

$$E\{Z_j \overline{Z_k}\} = 0, \quad j \neq k. \quad (4.11)$$

Logo, para que o processo seja estacionário é necessário que as v.a. Z_j sejam *não correlacionadas*.

No que segue suporemos $m=0$, do que obtemos $B(\tau)=C(\tau)$ e

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \sum_{j=-n}^n E\{|Z_j|^2\} e^{i\omega_j \tau} \\ &= \sum_{j=-n}^n b_j e^{i\omega_j \tau}, \quad -\infty < \tau < +\infty \end{aligned} \quad (4.12)$$

A relação (4.9) é a representação espectral de $X(t)$ enquanto que (4.12) é a representação espectral de $C(\tau)$. Ambas constituem as *relações de Wiener-Khintchine*.

Consideremos, agora, um processo estocástico estacionário genérico $X(t)$, $-\infty < t < +\infty$, real, de média 0 e f.a.c. $C(\tau)$ suposta contínua para todo τ . Suponhamos, também, $C(0)=1$.

TEOREMA 4.1 - (Bochner-Khintchine). Uma função contínua $C(\tau)$ é positiva definida se e somente se $C(\tau)$ pode ser escrita na forma

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega), \quad (4.13)$$

onde $F(\omega)$ é uma função real, não decrescente e limitada.

DEMONSTRAÇÃO - (i) Suponha que $C(\tau)$ possa ser escrita na forma (4.13)

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C(\tau_k - \tau_j) a_k \bar{a}_j &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau_k - \tau_j)} dF(\omega) \right\} a_k \bar{a}_j \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n e^{i\omega(\tau_k - \tau_j)} a_k \bar{a}_j dF(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n e^{i\omega\tau_k} a_k \left(\sum_{j=1}^n e^{-i\omega\tau_j} \bar{a}_j \right) dF(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n e^{i\omega\tau_k} a_k \right|^2 dF(\omega) \geq 0, \text{ logo } C(\tau) \text{ é positiva definida.} \end{aligned}$$

(ii) Suponhamos, agora, $C(\tau)$ positiva definida, contínua. Temos que $|C(\tau)| \leq C(0) = 1$ e

$$1 = C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda) < \infty.$$

Seja $z > 0$ e considere a função

$$p_z(\omega) = \frac{1}{2\pi z} \int_0^z \int_0^z C(u-v) e^{i\omega u} e^{i\omega v} du dv.$$

Como $C(\tau)$ é positiva definida, $p_z(\omega) \geq 0$; fazendo $u=t+v$ e mudando a ordem de integração vemos que

$$p_z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-z}^z \left(1 - \frac{|t|}{z}\right) C(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Pelo Lema de Linnik, $p_z(\omega)$ é integrável em toda a reta. Como $C(t)$ é contínua, usando o Teorema 1.4 temos que

$$\left(1 - \frac{|t|}{z}\right) C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_z(\omega) e^{it\omega} d\omega,$$

para todo t com $|t| \leq z$. Para $t=0$, $\int_{-\infty}^{\infty} p_z(\omega) d\omega = 1$ logo $p_z(\omega)$ é a densidade de alguma distribuição de probabilidade, logo $(1 - \frac{|t|}{z})C(t)$ é a função característica correspondente. Quando $z \rightarrow \infty$, $(1 - \frac{|t|}{z})C(t) \rightarrow C(t)$ uniformemente em todo intervalo finito. Segue-se que $C(\tau)$ é uma função característica, logo pode ser representada na forma (4.13). \square

Se $C(0) \neq 1$, a modificação no teorema é óbvia, com o resultado final sendo $C(\tau)$ uma função característica multiplicada pela constante $C(0)$.

A função $F(\omega)$ diz-se *função de distribuição espectral* do processo $X(t)$. Ela é definida a menos de uma constante, e podemos supor $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Se $C(0) \neq 1$, tome $F(+\infty) = C(0)$. Também, normalmente tomamos $F(\omega)$ contínua à direita.

Também, de (4.13),

$$C(0) = \text{Var } X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda), \quad (4.14)$$

que nos diz que a variância total de $X(t)$ é obtida somando-se as variâncias das componentes harmônicas de $X(t)$.

Se $C(0) \neq 1$, podemos escrever (4.13) na forma

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dG(\omega); \quad (4.15)$$

onde $R(\tau)$ é a função de auto-correlação $C(\tau)/C(0)$ e $G(\omega) = F(\omega)/C(0)$.

A função $F(\omega)$ pode ser escrita na forma

$$F(\omega) = F_d(\omega) + F_c(\omega) + F_s(\omega), \quad (4.16)$$

onde $F_d(\omega)$ é uma função em escada, a f.d. espectral *discreta*, $F_c(\omega)$ é absolutamente contínua, a f.d. espectral *contínua* e $F'_s(\omega) = 0$ em quase toda a parte. Para modelos de interesse prático, a última componente pode ser desprezada, de modo que

$$F(\omega) = F_d(\omega) + F_c(\omega). \quad (4.17)$$

A função $F_d(\omega)$ está associada a uma função $p(\omega)$, tal que $p(\omega) \geq 0$ para todo ω e $p(\omega) > 0$ para um conjunto discreto de frequências e

$$F_d(\omega) = \sum_{\omega_j \leq \omega} p(\omega_j). \quad (4.18)$$

A componente contínua $F_c(\omega)$ é tal que pode ser escrita na forma

$$F_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f(\alpha) d\alpha, \quad (4.19)$$

ou seja, $f(\omega) = F'(\omega)$, para todo ω . Como F é não decrescente, $f(\omega) \geq 0$, para todo ω .

Podemos, então, escrever (4.13) na forma

$$C(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k \tau} p(\omega_k) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \tau} f(\omega) d\omega. \quad (4.20)$$

Se $f(\omega) = 0$, para todo ω , temos um espectro discreto e se $p(\omega) = 0$, para todo ω , temos um espectro contínuo.

De um modo genérico, o espectro é uma mistura das duas componentes, discreta e contínua, como ilustra a figura 4.1.

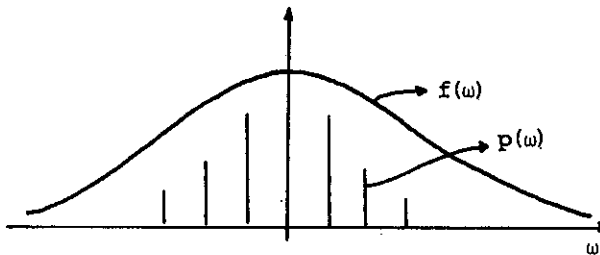


Figura 4.1

Se a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C(\tau)| d\tau < \infty, \quad (4.21)$$

está satisfeita, então

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.22)$$

4.4 - O TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO ESPECTRAL DE CRAMÉR.

O processo $X(t)$ dado por (4.9), com Z_j v.a. de média 0, variância b_j e não correlacionadas, é um exemplo de representação espectral de um processo estacionário. Ou seja, $X(t)$ é escrito como uma combinação linear de componentes harmônicas, de frequências ω_j e amplitudes aleatórias, de modo que

$$C(0) = \sum_{j=-n}^n b_j, \quad (4.23)$$

que segue de (4.12); ou seja, a variância de $X(t)$ é igual à soma das variâncias das componentes harmônicas que formam $X(t)$.

O passo seguinte é generalizar esta idéia para processos estacionários quaisquer. A possibilidade de tal representação foi primeiro provada por Kolmogorov, 1941, 1942, usando geometria de espaços de Hilbert. A prova de Cramér, 1951, usa métodos de espaços de Hilbert e pode ser encontrada em Cramér & Leadbetter, 1967.

No que segue será necessário necessário integrais do tipo

$$I_1 = \int_a^b g(t)X(t)dt \quad (4.24)$$

ou

$$I_2 = \int_a^b g(t)dX(t), \quad (4.25)$$

de Riemann e Riemann-Stieltjes, respectivamente, onde $g(t)$ é uma função não aleatória e $X(t)$ é um processo estocástico de média 0 e f.a.c. $C(t_1, t_2)$. Tais integrais são definidas como limites em m.q. de somas definidas como segue. Suponha $[a, b]$ um intervalo finito e $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ uma partição deste intervalo. Consideremos as somas

$$S_1 = \sum_{j=1}^n g(t'_j) X(t'_j) (t_j - t_{j-1}) \quad (4.26)$$

e

$$S_2 = \sum_{j=1}^n g(t'_j) [X(t_j) - X(t_{j-1})], \quad (4.27)$$

que são v.a. de média zero, determinadas pela partição, com $t_{j-1} < t'_j < t_j$.

Se as somas S_1 e S_2 convergem em m.q. para v.a. limites e estes limites são os mesmos para qualquer sequência de partições de $[a, b]$, com $n \rightarrow \infty$ e $\max(t_j - t_{j-1}) \rightarrow 0$, então estes limites serão definidos como as integrais em m.q. I_1 e I_2 :

$$I_1 = \text{l.i.m. } S_1,$$

$$I_2 = \text{l.i.m. } S_2,$$

se estes limites existem, onde l.i.m. indica limite em m.q.

Uma condição suficiente para (4.24) existir é que a integral,

$$Q_1 = \int_a^b \int_a^b g(t) \overline{g(s)} C(t, s) dt ds, \quad (4.28)$$

exista e neste caso $E(I_1) = 0$, $E\{|I_1|^2\} = Q_1$.

Do mesmo modo, uma condição suficiente para (4.25) existir é que a integral

$$Q_2 = \int_a^b \int_a^b g(t) \overline{g(s)} dC(t,s) \quad (4.29)$$

exista e neste caso $E(I_2) = 0$, $E\{|I_2|^2\} = Q_2$. Para demonstrações destes fatos ver Cramér & Leadbetter, 1967.

Uma propriedade importante é a seguinte. Seja $C_{xy}(t_1, t_2)$ a função de covariância cruzada de $X(t)$ e $Y(t)$.

PROPOSIÇÃO 4.1 - Se $X(t)$ e $Y(t)$ são dois processos satisfazendo as condições necessárias para a existência de (4.24) e (4.25), então

$$E \left\{ \int_a^b g(t) X(t) dt \int_a^b \overline{h(s) Y(s)} ds \right\} = \int_a^b \int_a^b g(t) \overline{h(s)} C_{xy}(t,s) dt ds, \quad (4.30)$$

$$E \left\{ \int_a^b g(t) dX(t) \int_a^b \overline{h(s) dY(s)} \right\} = \int_a^b \int_a^b g(t) \overline{h(s)} dC_{xy}(t,s). \quad (4.31)$$

O desenvolvimento seguinte é baseado em Yaglom, 1962.

Pode-se demonstrar que todo processo estacionário $X(t)$ pode ser aproximado por um processo da forma (4.9), no sentido que, para todo $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno e para todo $T > 0$ arbitrariamente grande, existem v.a. Z_1, \dots, Z_n mutuamente não correlacionadas e números reais $\omega_1, \dots, \omega_n$ tais que

$$E \left| X(t) - \sum_{j=1}^n Z_j e^{i\omega_j t} \right|^2 < \epsilon,$$

para todo $t \in [-T, T]$. A aproximação é melhorada aumentando-se n (que depende de ϵ e T) e diminuindo-se $\omega_{j+1} - \omega_j$. Logo, dado um intervalo qualquer $\Delta\omega$ de frequências, para T arbitrariamente grande, o número

de frequências ω_j em $\Delta\omega$ tornar-se-ã arbitrariamente grande e a soma $\sum_{\omega_j \in \Delta\omega} Z_j$ converge para uma v.a. que denotaremos $Z(\Delta\omega)$. Logo, heurís-
ticamente, temos que podemos representar o processo estocástico $X(t)$ na forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} Z(d\omega), \quad (4.32)$$

que é uma integral de Fourier-Stieltjes. Esta integral pode ser es-
crita na forma de uma integral de Riemann-Stieltjes, considerando-se
uma função pontual

$$Z(\omega) = Z\{(-\infty, \omega]\} \quad (4.33)$$

de modo que

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega). \quad (4.34)$$

A função de conjuntos $Z: \Delta\omega \rightarrow Z(\Delta\omega)$ satisfaz as propriedades:

- (a) $E[Z(\Delta\omega)] = 0$, para todo ω .
- (b) Se $\Delta_1\omega$ e $\Delta_2\omega$ são intervalos disjuntos,

$$Z(\Delta_1\omega + \Delta_2\omega) = Z(\Delta_1\omega) + Z(\Delta_2\omega).$$

- (c) Se $\Delta_1\omega$ e $\Delta_2\omega$ são intervalos disjuntos,

$$E\{Z(\Delta_1\omega) \overline{Z(\Delta_2\omega)}\} = 0.$$

Encarada como uma função pontual, podemos escrever:

(a') $E[Z(\omega)] = 0$.

(c') $E\{[Z(\omega_1 + \Delta\omega_1) - Z(\omega_1)] \overline{[Z(\omega_2 + \Delta\omega_2) - Z(\omega_2)]}\} = 0$,

se os intervalos $(\omega_1, \omega_1 + \Delta\omega_1)$ e $(\omega_2, \omega_2 + \Delta\omega_2)$ são disjuntos.

A condição (c') nos diz que $Z(\omega)$ é um processo estocástico com *incrementos ortogonais*.

Vamos usar a seguinte convenção operacional. A notação $d\omega$ representará o intervalo $(\omega, \omega + \Delta\omega)$ de modo que (c') pode ser escrita

$$E\{Z(d\omega)Z(d\nu)\} = 0, \quad \text{se } \omega \neq \nu, \quad (4.35)$$

no sentido que $d\omega$ e $d\nu$ são tão pequenos que eles são considerados disjuntos se $\omega \neq \nu$.

Formalmente, temos o resultado seguinte.

TEOREMA 4.2 - (Teorema Espectral) - Se $X(t)$ é um processo estocástico estacionário, então

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} Z(d\omega) \quad (4.36)$$

onde $Z(\omega)$ é um processo com incrementos ortogonais e tal que

$$E\{|Z(d\omega)|^2\} = F(d\omega), \quad (4.37)$$

onde $F(\omega)$ é a função de distribuição espectral.

OBSERVAÇÕES -

(a) Notemos que (4.37) significa

$$E\{|Z(\omega_2) - Z(\omega_1)|^2\} = F(\omega_2) - F(\omega_1), \quad (4.38)$$

se $\omega_2 > \omega_1$.

(b) O processo $Z(\omega)$ é chamado o *processo espectral associado a $X(t)$* .

(c) Usaremos, como formas alternativas, as expressões (4.36) e

(4.34) bem como (4.37) e

$$E\{|dZ(\omega)|^2\} = dF(\omega).$$

DEMONSTRAÇÃO - Definamos a função aleatória

$$Z_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-i\omega t} - 1}{-it} X(t) dt. \quad (4.39)$$

É fácil ver, usando os resultados do Capítulo 1, seção 1.6, que a integral (4.39) existe. Definamos

$$Z(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} Z_T(\omega), \quad (4.40)$$

onde o limite é em m.q. Para provar que o limite (4.40) existe, se ja $T' > T$ e considere

$$\begin{aligned} E\{|Z_{T'}(\omega) - Z_T(\omega)|^2\} &= E\left\{\frac{1}{2\pi} \left| \int_{T < |t| < T'} \frac{e^{-i\omega t} - 1}{-it} X(t) dt \right|^2\right\} = \\ &= \int \int_{\substack{T < |t| < T' \\ T < |s| < T'}} \frac{e^{-i\omega t} - 1}{-2\pi it} \frac{e^{i\omega s} - 1}{2\pi is} E\{|X(t)X(s)|\} dt ds. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Usando (4.36) e (4.37) vem que (4.41) torna-se

$$\begin{aligned} &\int \int_{\substack{T < |t| < T' \\ T < |s| < T'}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} - 1}{-2\pi it} \frac{e^{i\omega s} - 1}{2\pi is} e^{i\omega'(t-s)} dt ds dF(\omega') = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{T < |t| < T'} \frac{e^{-i\omega t} - 1}{-2\pi it} e^{i\omega' t} dt \right|^2 dF(\omega'). \end{aligned}$$

Suponha $F(\omega)$ contínua. Por (4.41), provar que o limite existe é consequência da existência do limite

$$\begin{aligned} \psi(\omega', \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega' t} - e^{i(\omega' - \omega)t}}{it} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \psi_T(\omega', \omega) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen} \omega' t}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(\omega' - \omega)t}{t} dt. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Mas,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen} \omega t}{t} dt = \begin{cases} 1/2, & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -1/2, & \omega < 0, \end{cases} \quad (4.43)$$

do que segue que

$$\psi(\omega', \omega) = \begin{cases} 1, & 0 < \omega' < \omega \\ 1/2, & \omega' = \omega > 0 \text{ ou } \omega' = 0, \omega > 0 \\ 0, & \omega' > 0, \omega' > \omega \text{ ou } \omega' = \omega = 0 \\ & \text{ou } \omega' < 0, \omega' < \omega. \\ -1/2, & \omega' = \omega < 0 \text{ ou } \omega' = 0, \omega < 0 \\ -1, & \omega < \omega' < 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Logo,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega', \omega) - \psi_T(\omega', \omega)|^2 dF(\omega) = 0,$$

e (4.40) define realmente um processo estocástico.

Verifiquemos que $Z(\omega)$ tem incrementos ortogonais e satisfaz (4.37). Temos que

$$\begin{aligned} &E\{[Z(\omega_2) - Z(\omega_1)] \overline{[Z(\omega_4) - Z(\omega_3)]}\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega - \omega_1, \omega_2 - \omega_1) \cdot \overline{\psi(\omega - \omega_3, \omega_3 - \omega_4)} dF(\omega). \end{aligned}$$

Segue-se que, por (4.44), para $\omega_2 > \omega_1$,

$$E\{|Z(\omega_2) - Z(\omega_1)|^2\} = F(\omega_2) - F(\omega_1),$$

e para $\omega_1 < \omega_2 \leq \omega_3 < \omega_4$,

$$E\{[Z(\omega_2) - Z(\omega_1)][Z(\omega_4) - Z(\omega_3)]\} = 0.$$

Finalmente, mostremos que $Z(\omega)$ satisfaz (4.36). Temos

$$E\{X(t) \overline{[Z(\omega_2) - Z(\omega_1)]}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega_2 - \omega, \omega_2 - \omega_1) e^{i\omega t} dF(\omega),$$

de modo que, para $\omega_2 > \omega_1$, a esperança do lado esquerdo é igual a

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega t} dF(\omega).$$

Logo,

$$\begin{aligned} E\{X(t) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s} dZ(\omega)}\} &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} e^{i\omega(t-s)} dF(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} dF(\omega) = C(t-s) \end{aligned}$$

e

$$E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s} dZ(\omega)}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} dF(\omega) = C(t-s),$$

do que segue que

$$E\{|X(t) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega)|^2\} = 0, \quad (4.45)$$

equivalente a (4.36).

Se $f(\omega)$ não é contínua, defina $Z(\omega)$ como antes nos pontos de continuidade de $F(\omega)$ e por

$$Z(\omega) = \frac{1}{2} [Z(\omega-0) + Z(\omega+0)]$$

nos pontos de descontinuidade de $F(\omega)$ e os resultados provados continuam a valer. \square

Consideremos, agora, um processo estacionário discreto $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$. Como vimos na seção 4.2, ω estará sempre entre $-\pi$ e π , de modo que as equações (4.13) e (4.36) ficam, neste caso,

$$C(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega), \quad (4.46)$$

e

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} dZ(\omega), \quad (4.47)$$

respectivamente. Se a condição $\sum_{\tau} |C(\tau)| < \infty$ está satisfeita, então $F(\omega)$ é derivável, com $F(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} f(\alpha) d\alpha$, e temos

$$C(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} f(\omega) d\omega, \quad (4.48)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau} e^{-i\omega\tau} C(\tau), \quad (4.49)$$

como tínhamos visto na seção 4.2. A representação espectral (4.46) no caso discreto, é conhecida como Teorema de Herglotz.

Podemos, também, considerar as chamadas representações espectrais reais para $C(\tau)$ e $X(t)$. Se $X(t)$ é um processo real, a f.d. espectral $F(\omega)$ é uma função par (a menos de uma constante aditiva) e podemos escrever

$$C(\tau) = \int_0^{\infty} \cos \omega \tau dG(\omega), \quad (4.50)$$

onde $G(\omega) = 2F(\omega) + \text{constante}$. Também, se a condição (4.21) está satisfeita, então $f(\omega)$ é par e (4.22) fica

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega \tau C(\tau) d\tau, \quad (4.51)$$

onde $g(\omega) = G'(\omega) = 2f(\omega)$.

Quanto à representação espectral de $X(t)$, consideremos $U(\omega)$ e $V(\omega)$ tais que

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \operatorname{Re}[Z(\omega)] \\ V(\omega) &= -\operatorname{Im}[Z(\omega)]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Estas funções são tais que $U(-\omega) = U(\omega)$, $V(-\omega) = -V(\omega)$ e se fazemos as substituições

$$\begin{aligned} U(\omega) &= [Z(\omega) + Z(-\omega)]/2, \\ V(\omega) &= -[Z(\omega) - Z(-\omega)]/2, \end{aligned} \quad (4.53)$$

obtemos a representação

$$X(t) = \int_0^{\infty} [\cos \omega t dU(\omega) + \sin \omega t dV(\omega)], \quad (4.54)$$

onde

$$E\{U(d\omega)U(d\nu)\} = E\{V(d\omega)V(d\nu)\} = \begin{cases} 0, & \omega \neq \nu \\ G(\omega), & \omega = \nu, \end{cases}$$

$$E\{U(d\omega)V(d\nu)\} = 0, \text{ para todo } \omega \text{ e } \nu.$$

4.5 - A TEORIA DE WIENER.

A diferença entre as teorias de Wiener e Khintchine está na definição da função de auto-covariância.

Seja $x(t)$ uma série temporal real, $-\infty < t < +\infty$, tal que

$$C_W(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t)dt \quad (4.55)$$

exista e seja finita, para todo $\tau \in \mathbb{R}$. $C_W(\tau)$ é chamada a função de auto-covariância (segundo Wiener) de $x(t)$. Para $\tau=0$ obtemos a energia total de $x(t)$, dada por

$$C_W(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t)dt. \quad (4.56)$$

Como dissemos no início do capítulo, a teoria de Wiener engloba a teoria estabelecida para processos estocásticos estacionários. Se $x(t)$ é um processo estocástico, então em (4.56) o limite tem que ser encarado como um limite em m.q., de tal sorte que $C_W(\tau)$ seja uma função não aleatória.

Wiener estabeleceu a existência da f.d. espectral $F(\omega)$ tal que (4.13) esteja satisfeita e resultados análogos valem a partir daí.

Resta saber em que condição $C_W(\tau)$ dada por (4.55) coincide com $C(\tau) = E\{X(t+\tau)X(t)\}$. Esta é uma média no "ensemble", ao passo que (4.55) é uma média no tempo. Ou seja, aqui estamos considerando $x(t)$ como uma trajetória, logo $x(t)$ é uma função real e (4.55) é um limite numérico usual.

Processos para os quais $C_W(\tau)$ coincide com $C(\tau)$ são chamados *ergódicos*. Condições para que um processo seja ergódico podem ser encontradas em Yaglom, 1962, página 16. Na realidade, devemos falar em ergodismo em relação à média e em relação a f.a.c. Um processo estacionário é ergódico em relação à média se

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(t)dt \xrightarrow{m.q.} E\{X(t)\}. \quad (4.57)$$

e é ergódico em relação à f.a.c. se

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(t+\tau)X(t)dt \xrightarrow{m.q.} C(\tau). \quad (4.58)$$

Em particular, (4.57) e (4.58) estarão verificadas se $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau) = 0$, ou seja, quando a dependência entre as v.a. $X(t)$ e $X(t+\tau)$ torna-se progressivamente menor à medida que $\tau \rightarrow \infty$.

O maior impedimento para ergodismo é a presença da componente discreta no espectro de $X(t)$. Pode-se demonstrar (ver Koopmans, 1975, página 60) que $C_W(\tau) = C(\tau)$ se e somente se $p(\lambda_j) = 0$, para todo j .

4.6 - EXEMPLOS

EXEMPLO 4.2 - Consideremos $\{Z(t), t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ o ruído branco. Então $C(0)=1$ e $C(\tau)=0$, $\tau \neq 0$ e usando (4.2) temos que $f(\omega) = \frac{1}{2\pi}$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Ou seja, o ruído branco tem um espectro constante.

EXEMPLO 4.3 - Suponha que o processo estacionário $\{X(t), t=0, 1, \dots\}$ tenha f.a.c.

$$C(\tau) = M \cdot a^{-|\tau|}, \quad \tau=0, 1, \pm 2, \dots, \quad |a| < 1, M > 0.$$

Então, a condição (4.1) está satisfeita e

$$f(\omega) = \frac{M}{2\pi} \sum_{\tau} a^{-|\tau|} e^{-i\omega\tau} = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1-a^2}{|e^{i\omega} - a|^2}.$$

EXEMPLO 4.4 - Considere o processo $X(t)$, $-\infty < t < +\infty$, dado por

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) Z(t-\tau) d\tau, \quad (4.59)$$

onde $Z(t)$ é um processo estacionário, de média 0 e f.a.c. $C_Z(\tau)$.

Segue-se que $X(t)$ é estacionário (por que?) de média 0 e f.a.c.

$$\begin{aligned} C_X(\tau) &= E \{X(t+\tau)X(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(u)Z(t+\tau-u)du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)Z(t-v)dv\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)E\{Z(t+\tau-u)Z(t-v)\}dudv \quad (4.60) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)C_Z(\tau-u+v)dudv. \end{aligned}$$

Segue-se que o espectro de $X(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} f_X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)C_Z(\tau+v-u)dudvd\tau. \end{aligned}$$

Chamando $y=\tau+v-u$, vem que

$$\begin{aligned} f_X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(y-v+u)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)C_Z(y)dudvdy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-i\omega u} du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{i\omega v} dv \int_{-\infty}^{\infty} C_Z(y)e^{-i\omega y} dy. \end{aligned}$$

Chamando

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-i\omega u} du, \quad (4.61)$$

obtemos

$$f_X(\omega) = H(\omega)H(-\omega)f_Z(\omega),$$

ou ainda,

$$f_X(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot f_Z(\omega). \quad (4.62)$$

A equação (4.59) representa o que chamamos um sistema linear e $H(\omega)$ é a função de transferência do sistema. A equação (4.62) mostra que podemos obter o espectro da "saída" do sistema, dado o espectro da "entrada". No caso discreto, (4.59) reduz-se a

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k Z(t-k) \quad (4.63)$$

e (4.61) fica

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\omega k}. \quad (4.64)$$

No caso particular em que a entrada $Z(t)$ é ruído branco, o análogo discreto de (4.60) fica

$$C_X(\tau) = \sum_k h_k h_{k+\tau}$$

e o espectro de $X(t)$ é dado por

$$f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} |H(\omega)|^2. \quad (4.65)$$

EXEMPLO 4.5 - Seja $X(t) = R \cos(\omega t + \phi)$, onde R e ω são constantes e ϕ é uma v.a. com distribuição uniforme em $(-\pi, \pi)$.

Então,

$$E\{X(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R \cos(\omega t + \phi) d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R \cos \phi d\phi = 0.$$

Também

$$\begin{aligned} C(\tau) &= E\{X(t+\tau)X(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R \cos[\omega(t+\tau) + \phi] R \cos(\omega t + \phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R \cos(\omega\tau + \phi) R \cos \phi d\phi = \frac{R^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\omega\tau - 2\phi) + \cos \omega\tau}{2} d\phi, \end{aligned}$$

logo

$$C(\tau) = \frac{R^2}{2} \cos \omega \tau.$$

Como $C(\tau)$ não absolutamente somável, temos que

$$C(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega' \tau} dF(\omega'),$$

onde

$$F(\omega') = \begin{cases} 0, & -\pi < \omega' < -\omega \\ R^2/4, & -\omega \leq \omega' < \omega \\ 2R^2/4, & \omega \leq \omega' < \pi \end{cases}$$

Usando a função δ de Dirac podemos escrever

$$f(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} F(\lambda) = \frac{R^2}{4} \delta(\lambda + \omega) + \frac{R^2}{4} \delta(\lambda - \omega).$$

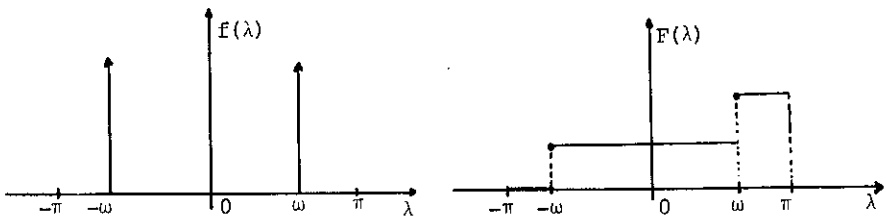


Figura 4.2

EXEMPLO 4.6 - Suponha o processo (4.63), com $Z(t)$ ruído branco e apenas um número finito de valores h_k não nulos.

Obtemos o processo

$$X(t) = h_0 Z(t) + h_1 Z(t-1) + \dots + h_q Z(t-q), \quad (4.66)$$

e dizemos que $X(t)$ é um *processo de médias móveis de ordem q*. Aqui,

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^q h_k e^{-i\omega k}$$

e o espectro de $X(t)$ é dado por (4.65),

$$f_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^q h_k e^{-i\omega k} \right|^2. \quad (4.67)$$

EXEMPLO 4.7 - O processo definido pela equação de diferenças

$$X(t) = \phi_1 X(t-1) + \dots + \phi_p X(t-p) + Z(t), \quad (4.68)$$

onde ϕ_1, \dots, ϕ_p são constantes e $Z(t)$ é ruído branco, é chamado um *processo auto-regressivo de ordem p*. O processo será estacionário se as raízes do polinômio $1 - \phi_1 Z - \dots - \phi_p Z^p$ estão fora do círculo unitário - (ver Box & Jenkins, 1976, página 54).

Multiplicando (4.68) por $X(t-k)$ e tomando o valor esperado, vemos que a f.a.c. do processo satisfaz à equação de diferenças

$$C(k) = \phi_1 C(k-1) + \dots + \phi_p C(k-p), \quad k > 0. \quad (4.69)$$

Substituindo $k=1, 2, \dots, p$ em (4.69) obtemos um sistema de equações lineares, chamadas equações de Yule-Walker.

O espectro de $X(t)$ é dado por

$$f_x(\omega) = (2\pi)^{-1} \cdot \left| \sum_{k=0}^p b_k e^{-i\omega k} \right|^{-2}, \quad (4.70)$$

escrevendo (4.68) na forma $\sum_{k=0}^p b_k X(t-k) = Z(t)$, $b_0 = 1$. Ver Koopmans 1975, Cap. 7 para detalhes.

4.7 - EXERCÍCIOS.

1 - Seja $X(t) = \sum_{j=1}^N \{A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t\}$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, com $E(A_j) = E(B_j) = 0$, $E(A_j^2) = E(B_j^2) = \sigma_j^2$, A_j e B_j mutuamente não correlacionadas. Determine a f.d. espectral $F(\omega)$ para este processo.

2 - Considere o processo auto-regressivo de primeira ordem

$$X(t) = \phi_1 X(t-1) + Z(t),$$

onde $Z(t)$ é ruído branco.

(a) Prove que o processo $X(t)$ pode ser escrito na forma

$$X(t) = Z(t) + \phi_1 Z(t-1) + \phi_1^2 Z(t-2) + \dots;$$

(b) Qual a condição para que o processo seja estacionário?

(c) Obtenha $E[X(t)]$ e $C(\tau)$.

(d) Obtenha o espectro do processo, usando (a) e (4.67).

3 - Suponha que um processo estacionário tenha f.a.c.

$C(\tau) = M e^{-\alpha |\tau|} \cos \beta \tau$, $M > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Prove que o espectro é

$$\text{dado por } f(\omega) = \frac{M\alpha}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} \right\}.$$

4 - Suponha que $X(t)$ tenha f.a.c. $C_x(\tau) = \cos \tau$ e que $X(t)$ seja a entrada de um sistema linear representado por

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) X(t-u) du,$$

$$\text{com } h(u) = \begin{cases} 1/10, & 0 \leq u \leq 10 \\ 0, & u < 0 \text{ ou } u > 10 \end{cases}$$

obtenha a f.a.c. de $Y(t)$ e o espectro de $Y(t)$.

- 5 - Mostre que $Y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-p(t-v)} X(v) dv$, com $p > 0$, satisfaz à equação diferencial $\frac{dY(t)}{dt} + pY(t) = X(t)$ e que $Y(t)$ pode ser escrito na forma

$$Y(t) = \int_0^{\infty} e^{-pv} X(t-v) dv.$$

- 5 - No problema anterior, se $X(t)$ é estacionário, de média 0 e espectro $f(\omega) = e^{-\pi\omega^2}$, obtenha o espectro de $Y(t)$.
- 7 - Suponha que $V(t)$ seja o desvio de um fluxo turbulento a partir da velocidade média do fluxo. Se o espectro de $V(t)$ é

$$f(\omega) = \begin{cases} e^{-3\omega}, & \omega > 0 \\ e^{3\omega}, & \omega < 0, \end{cases}$$

qual é a fração de energia associada com as frequências $1 < |\omega| < 2$?

- 8 - Seja $X(t) = R \cos(\omega t + \phi)$ um processo estacionário, com R constante ω uma v.a. com função densidade contínua $g(\omega)$ e ϕ uma v.a. uniforme em $(-\pi, \pi)$. Mostre que o espectro de $X(t)$ é dado por

$$R^2 \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} [g(\lambda + 2\pi j) + g(-\lambda + 2\pi j)] / 4.$$

- 9 - Sejam $X(t)$, $Y(t)$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ processos independentes, com média 0 e espectro $f_X(\omega)$, $f_Y(\omega)$, respectivamente. Prove que o espectro de $X(t)Y(t)$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ é dado por

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_X(\omega-\alpha) f_Y(\alpha) d\alpha.$$

10 - Se $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ(\lambda)$, defina a derivada de $X(t)$ como sendo

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} e^{i\lambda t} dZ(\lambda).$$

- (a) Sob que condições a integral resultante tem sentido?
- (b) Obtenha a f.a.c. de $X(t)$
- (c) Obtenha a f.d. espectral de $X(t)$.

11 - Suponha o processo estacionário $X(t)$ com representação espec-

tral $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega)$. Se $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) X(t-u) du$,

obter a representação espectral de $Y(t)$.

CAPÍTULO 5

FILTROS LINEARES, AMOSTRAGEM E "ALIASING"

5.1 - INTRODUÇÃO

Antes que a análise estatística propriamente dita seja levada efeito para dada série temporal, há uma série de passos a considerar no que se refere ao processamento dos dados. Tais passos incluem:

- (i) coleta dos dados
- (ii) amostragem (digitalização ou discretização)
- (iii) uso de janelas de dados ou "tapers"
- (iv) filtragem dos dados
- (v) tratamento de "outliers" e valores não observados
- (vi) uso de gráficos e tabelas.

Há outros fatores relacionados com os mencionados e neste capítulo trataremos em especial do problema de filtragem e o de determinar o intervalo de amostragem de modo a evitar o fenômeno de "aliasing", que já foi mencionado no Capítulo 3.

Os problemas listados acima entram no contexto do planejamento do experimento que conduz à obtenção das séries temporais disponíveis para análise. É claro que em muitas situações tal planejamento é impossível, pois nõs não podemos controlar o experimento. As séries econômicas, astronômicas e meteorológicas estão nesta categoria. Nõs não entraremos em detalhes sôbre este assunto nestas notas e a referência adequada é o Capítulo 9 de Koopmans, 1975.

O problema da coleta de dados é fundamental e se os mesmos não são confiáveis toda a análise subsequente torna-se inútil. Em

particular, ênfase deve ser dada ao fato que a sêrie temporal observada deve ser representativa do processo estocástico que vai ser analisado.

Como dissemos, em muitas situações teremos que nos contentar em observar a sêrie temporal de interesse e o cuidado a se tomar é que as medidas sejam obtidas com a melhor precisão possível. Como regra geral, nossas observações serão igualmente espaçadas no tempo mas haverá ocasiões em que isto não ocorre. Por exemplo, em Astronomia este fato ocorre frequentemente, pois a observação de um corpo celeste depende, obviamente, de condições meteorológicas. Em outras situações, como em Oceanografia, pode haver a quebra de instrumento de medida. Nestas condições, será necessário usar técnicas de interpolação adequadas, quando isto for possível ou então recorrer a métodos não convencionais de análise, que normalmente ainda não se encontram suficientemente desenvolvidos e testados.

Em ciências como Comunicações, Engenharia Elétrica, Oceanografia, etc, há um número grande de sistemas de aquisição de dados e uma referência para o assunto é Otnes e Enochson, 1978.

Os problemas de amostragem e da filtragem serão tratados com algum detalhe neste capítulo. Com referência ao item (iii) acima, frequentemente nós multiplicamos a sêrie temporal por uma janela de dados ou "taper", com o propósito de tornar mais visíveis certas características dos nossos estimadores espectrais. Normalmente nós temos um segmento de sêrie para análise e o uso do "taper" tem por objetivo "suavizar" descontinuidades potenciais em cada extremo deste segmento.

5.2 - FILTROS LINEARES

Em Comunicações um filtro é um mecanismo que deixa passar harmônicos numa certa faixa de frequências, suprimindo ou atenuando componentes harmônicos com frequências fora daquela faixa. Tais mecanismos são amplamente utilizados, por exemplo, nos modernos amplificadores e receptores de rádio.

Do ponto de vista matemática, um filtro é uma operação que

transforma uma série de *entrada* $X(t)$, $-\infty < t < +\infty$, em uma série de *saída* $Y(t)$, $-\infty < t < +\infty$. Este fato é indicado por

$$Y(t) = F[X(t)], \quad (5.1)$$

ou, simplesmente, $Y = F[X]$. Tal operação é também chamada de um sis
tema.

Dizemos que F é *invariante no tempo* se a série de entrada é a
trasada (ou avançada) de τ unidades implica que a série de saída é a
trasada (ou avançada) de τ unidades. Ou seja, se $Y(t) = F[X(t)]$, en
tão

$$F[X(t+\tau)] = Y(t+\tau), \quad (5.2)$$

$-\infty < \tau, t < +\infty$.

São invariantes no tempo os seguintes sistemas:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)X(\tau) d\tau, \quad (5.3)$$

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau_1, t-\tau_2)X(\tau_1)X(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (5.4)$$

$$Y(t) = \max_{\tau \leq t} X(\tau), \quad (5.5)$$

para funções $s(\tau)$ e $s(\tau_1, \tau_2)$ satisfazendo certas condições de regula
ridade.

Um sistema F é *linear* se, para $X_1(t)$ e $X_2(t)$ pertencendo do
domínio de F e α_1, α_2 constantes complexas, temos

$$\begin{aligned} F[\alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t)] &= \alpha_1 F[X_1(t)] + \alpha_2 F[X_2(t)] \\ &= \alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 Y_2(t), \end{aligned} \quad (5.6)$$

se $Y_1(t) = F[X_1(t)]$ e $Y_2(t) = F[X_2(t)]$. Estamos supondo, tacitamente, que se $X_1(t)$ e $X_2(t)$ pertencem ao domínio de F , então $\alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t)$ também pertence.

A partir de agora chamaremos de *filtro linear* ou simplesmente *filtro* a um sistema que seja linear e invariante no tempo. (5.3) é um exemplo de tal sistema. A relação (5.6) pode ser estendida para

$$F[\sum_{\omega} \alpha_{\omega} X_{\omega}(t)] = \sum_{\omega} \alpha_{\omega} F[X_{\omega}(t)], \quad (5.7)$$

onde por \sum_{ω} entendemos uma soma finita ou infinita ou mesmo uma integral. Em particular, se $X(t) = e^{i\omega t}$, então

$$F[\sum_{\omega} \alpha_{\omega} e^{i\omega t}] = \sum_{\omega} \alpha_{\omega} \cdot F[e^{i\omega t}], \quad (5.8)$$

de modo que se a série de entrada é uma soma de cosenóides, a ação do filtro fica determinada por $F[e^{i\omega t}]$. Para filtros cujo domínio inclui tais séries, temos o seguinte resultado.

LEMA 5.1 - Se F é um filtro e se $X(t) = e^{i\omega t}$, $-\infty < t < +\infty$, então existe uma função $S(\omega)$ tal

$$F[X(t)] = S(\omega) e^{i\omega t}, \quad (5.9)$$

DEMONSTRAÇÃO - Chamemos $F[e^{i\omega t}] = \phi_{\omega}(t)$. Temos, então,

$$F[e^{i\omega(t+\tau)}] = F[e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega \tau}] = \phi_{\omega}(t+\tau)$$

e usando a linearidade, obtemos

$$e^{i\omega \tau} \phi_{\omega}(t) = \phi_{\omega}(t+\tau),$$

para todo t, τ e ω . Para $t=0$ ficamos com

$$\phi_{\omega}(\tau) = e^{i\omega \tau} \cdot \phi_{\omega}(0),$$

ou, como τ é um valor do tempo, podemos escrever

$$F[e^{i\omega t}] = e^{i\omega t} \cdot S(\omega),$$

onde $S(\omega) = \phi_{\omega}(0)$. \square

A relação (5.9) nos diz que, se $e^{i\omega t}$ é a entrada de filtro, a saída é uma oscilação harmônica de mesma frequência que a entrada, mas possivelmente com amplitude e fase diferentes. $S(\omega)$ é chamada *função de transferência* do filtro. De (5.8) obtemos

$$F\left[\sum_{\omega} \alpha_{\omega} e^{i\omega t}\right] = \sum_{\omega} \alpha_{\omega} S(\omega) e^{i\omega t}. \quad (5.10)$$

Usando o lema é fácil ver que a função de transferência de sistema linear (5.3) é

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (5.11)$$

Como $S(\omega)$ é uma função complexa, podemos escrever

$$S(\omega) = |S(\omega)| e^{i\theta(\omega)}, \quad (5.12)$$

do que decorre que (5.10) pode ser escrita

$$F\left[\sum_{\omega} \alpha_{\omega} e^{i\omega t}\right] = \sum_{\omega} |\alpha_{\omega}| |S(\omega)| e^{i[\omega t + \psi(\omega) + \theta(\omega)]} \quad (5.13)$$

com $\alpha_{\omega} = |\alpha_{\omega}| e^{i\psi(\omega)}$. Vemos, então, que a amplitude de cada harmônico é multiplicada por $|S(\omega)|$ e a fase é alterada de $\psi(\omega)$ para $\psi(\omega) + \theta(\omega)$.

$|S(\omega)|$ é chamado o *ganho* de filtro e $\theta(\omega)$ é a *fase* do filtro.

5.3 - O PROBLEMA GERAL DE FILTRAGEM

De modo geral, o problema de filtragem consiste em separar um sinal desejado do ruído que o contamina. Suponhamos que

$$X(t) = M(t) + N(t), \quad (5.14)$$

onde $M(t)$ é o sinal e $N(t)$ é o ruído e $X(t)$ é aplicado a um filtro F como está ilustrado na figura 5.1.

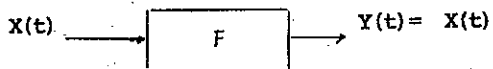


Figura 5.1

Suporemos que os processos estocásticos envolvidos sejam estacionários, de média zero.

Seja $Y(t)$ a saída do filtro, isto é, $Y(t) = F[X(t)]$.

Seja L um outro filtro conhecido e

$$K(t) = L[M(t)] \quad (5.15)$$

uma transformação do sinal $M(t)$.

Então, o problema que se apresenta é: escolher o filtro F que reproduza $K(t)$ com o menor erro possível.

O caso usual é aquele em que $K(t) = M(t)$, ou seja $L = I$, filtro identidade, e o sinal $M(t)$ é que deve ser reproduzido.

Se

$$\epsilon(t) = Y(t) - K(t) \quad (5.16)$$

é o erro instantâneo de reprodução, ele será caracterizado pelo erro quadrático médio (e.q.m) $E\{\epsilon^2(t)\}$.

No que segue consideraremos somente filtros do tipo (5.3).
ou seja

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) X(t-\tau) d\tau, \quad (5.17)$$

ou

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)X(\tau)d\tau. \quad (5.18)$$

Há, basicamente, três formas de filtros que podem ser consideradas (Wainstein e Zubakov, 1962):

- (a) filtros do tipo I, que funcionam como um computador, no sentido que a entrada $X(t)$ é armazenada por um certo intervalo de tempo, processada, resultando $Y(t)$. Ou seja, para se obter $Y(t)$ um filtro do tipo I usa os valores $X(t)$, $-\infty < t < +\infty$;
- (b) filtros do tipo II, para os quais as três funções mencionadas em (a) não são separadas no tempo, mas são realizadas continuamente. Isto quer dizer que $Y(t)$ depende de $X(s)$, para $s \leq t$ ou seja, o filtro utiliza somente os valores passados e o presente de $X(s)$.
- (c) filtros do tipo III, que utilizam somente uma parte finita do passado de $X(s)$, por exemplo, os valores de $X(s)$ para $s \in [-T, T]$.

Do ponto de vista teórico, os filtros do tipo I conduzem a uma separação melhor do sinal, já que utilizam a entrada $X(t)$ para um "número" maior de valores de t . Por outro lado, os filtros do tipo II são mais fáceis de implementar e conduzem a uma maior rapidez na obtenção de $Y(t)$.

No que segue, nos restringiremos aos filtros de tipo I. Para o tratamento análogo para filtros de tipo II ver Wainstein e Zubakov, 1962. Vamos nos limitar a dizer que, neste caso, (5.17) e (5.18) ficam

$$Y(t) = \int_0^{\infty} s(\tau)X(t-\tau)d\tau, \quad (5.19)$$

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t s(t-\tau)X(\tau)d\tau, \quad (5.20)$$

respectivamente. Em (5.19) podemos dizer que $s(t)=0$, para $t < 0$ e $t > +\infty$

bém se diz que o sistema é *fisicamente realizável*.

Então, o problema proposto acima pode ser rephraseado como se gue:

"Encontrar a função $s(t)$ tal que $E\{\epsilon^2(t)\}$ seja mínimo."

5.4 - A EQUAÇÃO INTEGRAL DE WIENER-HOPF.

Sejam, então, $M(t)$ e $N(t)$ processos estacionários de média zero e $X(t)$ dado por (5.14). Se $Y(t)$ é dado por (5.17), então

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)X(t-\tau)d\tau - K(t). \quad (5.21)$$

Então, o problema é encontrar o filtro F (ou a função $s(\tau)$) que minimiza o e.q.m. $E\{\epsilon^2(t)\}$.

Temos

$$\begin{aligned} \epsilon^2(t) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)X(t-\tau)d\tau \right]^2 - 2K(t) \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)X(t-\tau)d\tau + K^2(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)s(u)X(t-\tau)X(t-u)d\tau du - 2 \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)K(t)X(t-\tau)dt + K^2(t). \end{aligned}$$

Logo, tomando a esperança,

$$\begin{aligned} E\{\epsilon^2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)s(u)E\{X(t-\tau)X(t-u)\}d\tau du - \\ &- 2 \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)E\{K(t)X(t-\tau)\}d\tau + E\{K^2(t)\}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Se $C_X(\tau)$ indica a f.a.c. de $X(t)$, $C_K(\tau)$ é a f.a.c. de $K(t)$ e $C_{KX}(\tau)$ é a função de covariância cruzada entre $K(t)$ e $X(t)$, então (5.22) fica

$$E \{ \epsilon^2(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) s(u) C_X(\tau-u) d\tau du - 2 \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) C_{kX}(\tau) dz + C_k(0). \quad (5.23)$$

Vemos que o e.q.m. não depende de $K(t)$ e $X(t)$ mas de suas f.a.c. e função de covariância cruzada.

PROPOSIÇÃO 5.1 - $E\{\epsilon^2(t)\}$ dado por (5.23) é mínimo se e somente se $s(t)$ é solução da equação integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(u) C_X(\tau-u) du = C_{kX}(\tau). \quad (5.24)$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja $s(\tau)$ a função (chamada função de impulso) correspondente ao filtro ótimo e seja Q o seu e.q.m. Então, qualquer outro filtro com e.q.m. Q' terá função de impulso $s(\tau) + \delta s(\tau)$. Queremos $s(\tau)$ tal que $Q' > Q$. Substituindo $s(\tau)$ por $s(\tau) + \delta s(\tau)$ em (5.23) obtemos

$$Q' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [s(\tau) + \delta s(\tau)] [s(u) + \delta s(u)] C_X(\tau-u) d\tau du - 2 \int_{-\infty}^{\infty} [s(\tau) + \delta s(\tau)] C_{kX}(\tau) d\tau + C_k(0),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} Q' = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) s(u) C_X(\tau-u) d\tau du - 2 \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) C_{kX}(\tau) d\tau + \\ & + C_k(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta s(u) C_X(\tau-u) d\tau du + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta s(\tau) s(u) C_X(\tau-u) d\tau du - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta s(\tau) C_{kX}(\tau) d\tau + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta s(\tau) \delta s(u) C_X(\tau-u) d\tau du. \end{aligned}$$

Como $C_x(\cdot)$ é uma função par, temos

$$Q' = Q + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta s(\tau) d\tau \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(u) C_x(\tau-u) du - C_{kx}(\tau) \right] + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta s(\tau) \delta s(u) C_x(\tau-u) d\tau du. \quad (5.25)$$

Mas esta última integral é igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta s(\tau) \delta s(u) E\{X(t-\tau)X(t-u)\} d\tau du \\ = E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta s(\tau) X(t-\tau) d\tau \right\}^2 \geq 0,$$

logo para que o e.q.m. correspondente a $s(\tau)$ seja um mínimo, é necessário e suficiente que o termo entre colchetes em (5.25) seja nulo, isto é, que a equação (5.24) seja satisfeita (o que aconteceria se esse termo fosse não nulo?).

Por outro lado, a suficiência da condição segue do fato que se (5.24) é válida, então a fórmula (5.25) fica

$$Q' = Q + J,$$

e como $J \geq 0$, vem que $Q' \geq Q$, ou seja, F é o filtro ótimo. \square

A equação (5.24) é chamada equação de Wiener-Hopf e temos que resolvê-la para encontrar o filtro ótimo. Para filtros de tipo I is to pode ser feito facilmente.

Seja $S(\omega)$ a função de transferência do filtro, isto é,

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (5.26)$$

Multipliquemos ambos os lados de (5.24) por $e^{-i\omega\tau}$ e integremos com respeito a τ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} s(u) C_x(\tau-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} C_{kx}(\tau) d\tau. \quad (5.27)$$

Fazendo a transformação $t=\tau-u$, obtemos para o primeiro membro de (5.27):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+u)} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(u) C_X(t) du &= \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} C_X(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} s(u) du. \end{aligned}$$

Definindo-se

$$f_{kX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} C_{kX}(\tau) d\tau \quad (5.28)$$

como o *espectro cruzado* das séries $K(t)$ e $X(t)$, obtemos então

$$f_X(\omega) \cdot S(\omega) = f_{kX}(\omega), \quad (5.29)$$

usando (5.26) e a definição de espectro de $X(t)$.

Segue-se de (5.29) que a função de transferência do filtro ótimo é dada por

$$S(\omega) = \frac{f_{kX}(\omega)}{f_X(\omega)}, \quad (5.30)$$

ou seja, é o quociente entre o espectro cruzado de $K(t)$ e $X(t)$ e o espectro de $X(t)$.

O correspondente e.q.m. do filtro ótimo é, de (5.23),

$$E\{\varepsilon^2(t)\} = C_K(0) - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) s(u) C_X(\tau-u) d\tau du. \quad (5.31)$$

Como

$$C_k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\omega) d\omega,$$

onde $f_k(\omega)$ é o espectro de $K(t)$, temos que (5.31) fica

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\omega) d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) s(u) C_x(\tau-u) d\tau du = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\omega) d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) s(u) d\tau du \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau-u)} f_x(\omega) d\omega \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\omega) d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} f_x(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} s(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} s(u) du \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\omega) d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S(-\omega) f_x(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

usando (5.26).

Logo, temos que

$$E\{\varepsilon^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [f_k(\omega) - S(\omega) S(-\omega) f_x(\omega)] d\omega. \quad (5.32)$$

Pela relação (5.30),

$$S(\omega) S(-\omega) = \frac{f_{kx}(\omega) f_{kx}(-\omega)}{f_x(\omega) f_x(-\omega)} = \frac{f_{kx}(\omega) f_{kx}(-\omega)}{f_x^2(\omega)},$$

de onde vem

$$\begin{aligned} E\{\varepsilon^2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_k(\omega) - \frac{f_{kx}(\omega) f_{kx}(-\omega)}{f_x(\omega)} \right] d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_k(\omega) f_x(\omega) - f_{kx}(\omega) f_{kx}(-\omega)}{f_x(\omega)} d\omega. \end{aligned} \quad (5.33)$$

O caso mais simples mencionado anteriormente é aquele em que $X(t)=M(t)$, que conduz a

$$S(\omega) = \frac{f_{mX}(\omega)}{f_X(\omega)}. \quad (5.34)$$

Supondo-se ainda, que o sinal e o ruído sejam não correlacionados, temos que $C_{mN}(\tau)=0$. Neste caso,

$$\begin{aligned} C_{mX}(\tau) &= E\{M(t)X(t+\tau)\} = E\{M(t)[M(t+\tau)+N(t+\tau)]\} = \\ &= E\{M(t)M(t+\tau)\} + E\{M(t)N(t+\tau)\} = C_m(\tau) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} C_X(\tau) &= E\{X(t)X(t+\tau)\} = E\{[M(t)+N(t)][M(t+\tau)+N(t+\tau)]\} = \\ &= C_m(\tau) + C_n(\tau). \end{aligned}$$

Destas duas relações, vemos que

$$f_{mX}(\omega) = f_m(\omega) \quad (5.35)$$

e

$$f_X(\omega) = f_m(\omega) + f_n(\omega). \quad (5.36)$$

Portanto, (5.34) reduz-se a

$$S(\omega) = \frac{f_m(\omega)}{f_m(\omega) + f_n(\omega)}, \quad (5.37)$$

e o e.q.m. do filtro ótimo será

$$E\{\varepsilon^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_m(\omega)f_n(\omega)}{f_m(\omega)+f_n(\omega)} d\omega. \quad (5.38)$$

5.5 - ALGUNS TIPOS DE FILTROS.

(A) *Filtros passa-alto ("high-pass")*.

São filtros que deixam passar frequências altas e suprimem frequências baixas. A função de transferência de um tal filtro é dada por

$$S(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \geq \omega_0 \\ 0, & |\omega| < \omega_0 \end{cases} \quad (5.39)$$

(ver figura 5.2)

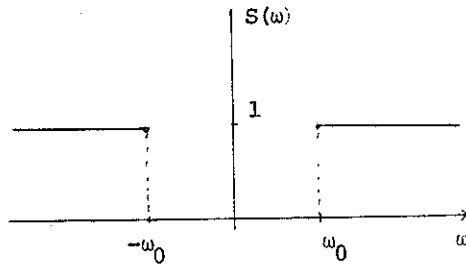


Figura 5.2

Um filtro particularmente simples para remover componentes de baixa frequência é o filtro diferença

$$Y(t) = X(t) - X(t-1). \quad (5.40)$$

A função de transferência de (5.40) é

$$S(\omega) = 2i \cdot e^{-i\omega/2} \cdot \text{sen } \omega/2$$

e o ganho é $G(\omega) = |S(\omega)| = 2|\text{sen } \omega/2|$, ilustrado na figura 5.3. A função $S(\omega)$ tem massa concentrada nas vizinhanças das frequências $\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$

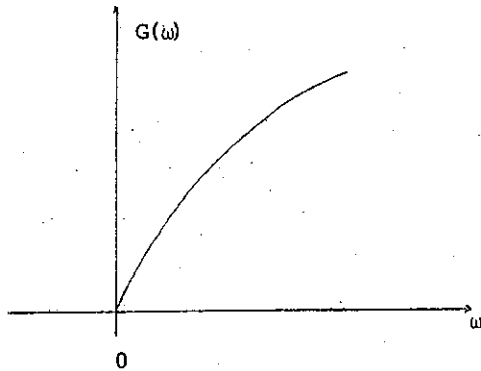


Figura 5.3

O filtro (5.40) é bastante utilizado quando a série apresenta tendência e é caracterizada pela presença de grande quantidade de energia em frequências baixas.

Observemos que (5.39) é a função de transferência de um filtro passa-alto ideal. Na realidade, os filtros fisicamente realizados atenuam as componentes de baixa frequência, em vez de eliminá-las totalmente.

Outro filtro nestas condições é o filtro derivada, cuja função de transferência é

$$S(\omega) = i\omega, \quad (5.41)$$

Logo $G(\omega) = |\omega|$ e $G^2(\omega) = \omega^2$ (figura 5.4)

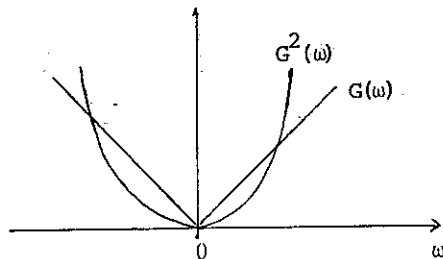


Figura 5.4

(B) *Filtros passa-baixo ("low-pass")*

São filtros que atenuam frequências altas e deixam passar frequências baixas relativamente inalteradas. A função de transferência de um filtro passa-baixo é

$$S(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_1 \\ 0, & |\omega| > \omega_1 \end{cases} \quad (5.42)$$

(figura 5.5).

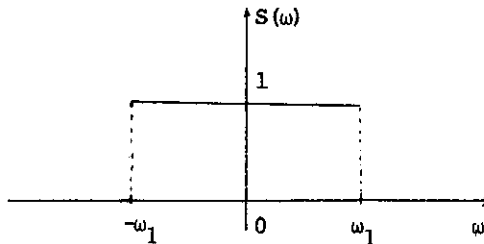


Figura 5.5

Quando aplicamos num filtro passa-baixo a uma série $X(t)$ obtemos uma série $Y(t)$ com aparência mais suave.

Um exemplo de filtro passa-baixo é a soma $Y(t) = X(t) + X(t-1)$, que tem função de transferência

$$S(\omega) = 2 e^{-i\pi\omega} \cos \pi\omega,$$

e, em geral, os filtros de médias móveis

$$Y(t) = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=-m}^m X(t+k) \quad (5.43)$$

cuja função de transferência é

$$S(\omega) = \frac{1}{2m+1} \frac{\text{sen}(2m+1)\omega/2}{\text{sen } \omega/2}, \quad (5.44)$$

que tem sua massa concentrada nas frequências $\omega \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Ver figura 3.2.

(C) - Filtros passa-banda ("band-pass").

São os filtros que removem ou atenuam todas as frequências exceto aquelas em uma faixa de frequências. A função de transferência de tais filtros têm a forma

$$S(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_0 \leq |\omega| \leq \omega_1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.45)$$

(figura 5.6).

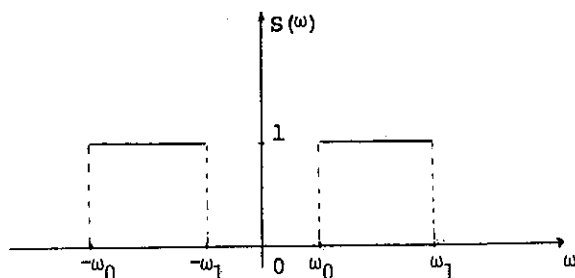


Figura 5.6

Como um exemplo temos o procedimento chamado *demodulação complexa*. Consideremos a série de entrada $X(t)$ e formemos o par de séries (reais).

$$Y_1(t) = (\cos \omega_0 t)X(t) \quad (5.46)$$

$$Y_2(t) = (\sin \omega_0 t)X(t), \quad t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Depois, passamos $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ por um filtro passa-baixo, com função de impulso $s(\tau)$:

$$W_1(t) = \int_{\tau} s(t-\tau)Y_1(\tau), \quad (5.47)$$

$$W_2(t) = \int_{\tau} s(t-\tau)Y_2(\tau),$$

As séries $W_1(t)$ e $W_2(t)$ são chamadas *demoduladas complexas* de $X(t)$, $t=0, \pm 1, \dots$, e dado que $\{s(t)\}$ é passa-baixo, elas serão mais suaves que $X(t)$. Se depois formamos

$$V_1(t) = (\cos \omega_0 t)W_1(t) + (\sen \omega_0 t)W_2(t), \quad (5.48)$$

então pode-se mostrar fãcilmente (ver exercício 4) que $V_1(t)$ é essencialmente uma versão filtrada de $X(t)$ através de um filtro passa-banda, com função de transferência $[S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)]/2$, onde $S(\omega)$ é a função de transferência de (5.47). Se $S(\omega) = 1$, $|\omega| \leq \Delta$, $S(\omega) = 0$, caso contrário, então a função de transferência de $F[X(t)] = V_1(t)$ é

$$\begin{cases} 1/2, & |\omega \pm \omega_0| \leq \Delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.49)$$

5.6 - COMBINAÇÃO DE FILTROS

Dados dois filtros F_1 e F_2 com funções de transferência $S_1(\omega)$ e $S_2(\omega)$, podemos considerar um novo filtro F_3 obtido de uma das seguintes maneiras.

(A) COMBINAÇÃO LINEAR - $F_3[X(t)] = aF_1[X(t)] + bF_2[X(t)]$, a e b constantes cuja função de transferência é $S_3(\omega) = aS_1(\omega) + bS_2(\omega)$ (ver exercício 5). Escrevemos $F_3 = aF_1 + bF_2$.

(B) APLICAÇÃO SEQUENCIAL - $F_3[X(t)] = F_2[F_1[X(t)]]$, que tem a função de transferência $S_3(\omega) = S_2(\omega)S_1(\omega)$ (ver exercício 6). Escrevemos $F_3 = F_2F_1$.

É claro que podemos considerar mais de dois filtros. Por exemplo, considerando-se K filtros em série, com funções de transferência $S_j(\omega)$, $j=1, \dots, k$, como na figura 5.7, então a função de transferência do filtro resultante é $S_k(\omega) \dots S_1(\omega)$.

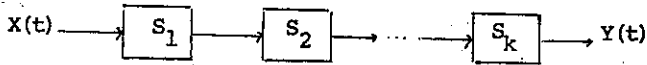


Figura 5.7

Se F_1 e F_2 são filtros do tipo (5.3), os chamados *filtros con*
volução, então $F_3 = F_2 F_1$ é também um filtro do mesmo tipo, com função
de transferência $S_2(\omega)S_1(\omega)$. Se as funções respostas de impulso são
 $s_i(\tau)$, $i=1,2$, então a função resposta de impulso de F_3 , $s_3(\tau)$, é a
convolução de $s_2(\tau)$ e $s_1(\tau)$, isto é,

$$s_3(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(u)s_1(\tau-u)du. \quad (5.50)$$

(ver exercício 7)

5.7 - CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE.

Para que a relação (5.7) esteja satisfeita, determinadas
condições sobre $S(\omega)$ ou $s(\tau)$ devem se verificar. Vejamos alguns ca-
sos.

(A) - Considere o filtro convolução

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)X(t-\tau)d\tau. \quad (5.51)$$

Como

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau,$$

para que $S(\omega)$ seja uma função limitada devemos ter

$$|S(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)e^{-i\omega\tau}|d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)|d\tau < \infty. \quad (5.52)$$

Por outro lado, se a entrada de (5.51) é limitada, isto é, $|X(t)| \leq K$, para todo t , então

$$|Y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)| |X(t-\tau)| d\tau \leq K \int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)| d\tau < K' < \infty,$$

ou seja, se (5.52) está satisfeita, a saída do filtro também é limitada. Um filtro tal que, se a entrada é limitada, a saída também é limitada, é chamado *estável*.

(B) Sabemos que se $X(t)$ é estacionário.

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_X(\omega). \quad (5.53)$$

Também, $C_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(\omega)$ é a energia (variância) contida em $X(t)$ e esta será finita se $\int_{-\infty}^{\infty} dF_X(\omega) < \infty$. Se $Y(t)$ é dada por (5.51), sabemos que

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} S(\omega) dZ_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_Y(\omega),$$

de modo que

$$dZ_Y(\omega) = S(\omega) dZ_X(\omega). \quad (5.54)$$

Como $E\{|dZ_Y(\omega)|^2\} = dF_Y(\omega)$, segue-se que

$$dF_Y(\omega) = |S(\omega)|^2 dF_X(\omega), \quad (5.55)$$

e a energia da série de saída será finita se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 dF_X(\omega) < \infty. \quad (5.56)$$

(C) Podemos obter um filtro passa-banda através da aplicação sequencial de um filtro passa-baixo seguido de um filtro passa-alto ou vice-versa. De fato, se F_1 é passa-baixo com função de transferência

$S_1(\omega)$ dada por (5.42) e F_2 é passa alto, com função de transferência $S_2(\omega)$ dada por (5.39), com $0 < \omega_0 < \omega_1$, então $F_3 = F_2 F_1$ tem função de transferência $S_3(\omega) = S_2(\omega) S_1(\omega)$, dada por (5.45).

$$\text{Devemos ter } \int_{-\infty}^{\infty} |S_1(\omega)|^2 dF_X(\omega) < \infty \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} |S_1(\omega) S_2(\omega)|^2 dF_X(\omega) < \infty,$$

mas como $S_1(\omega) S_2(\omega) \leq S_1(\omega)$, estas relações estão satisfeitas. Além disso, $F_3 = F_1 F_2$.

5.8 - AMOSTRAGEM.

Em alguns campos, como em Economia, a série temporal de interesse ocorre naturalmente de forma discreta. Assim, as vendas diárias de um dado produto ou as médias diárias de fechamento de ações são exemplos. Mas, muitas séries consideradas discretas são versões amostradas das respectivas séries contínuas.

Alguns exemplos de séries observadas continuamente são:

- o registro de alturas de marés em um ponto do oceano;
- o registro dos movimentos da crosta terrestre através de um sismógrafo;
- temperaturas lidas continuamente através de um termômetro que registra as medidas em um rolo de papel.

O problema que se apresenta, então, é o de amostragem de uma série temporal contínua, de modo a convertê-la em uma série discreta, a fim de que se possa utilizar computadores digitais para analisar os dados.

É claro que aquelas características de interesse da série original terão que ser estimadas através da série discreta e discrepâncias grandes podem aparecer. Assim, o espectro estimado através da série discreta pode ser bastante diferente do espectro da série original, se certos cuidados não forem tomados no processo de amostragem.

Suponhamos $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ uma série temporal contínua e estacionária.

Seja Δt o intervalo de amostragem, ou seja, o intervalo de tempo entre as observações amostradas (figura 5.8)

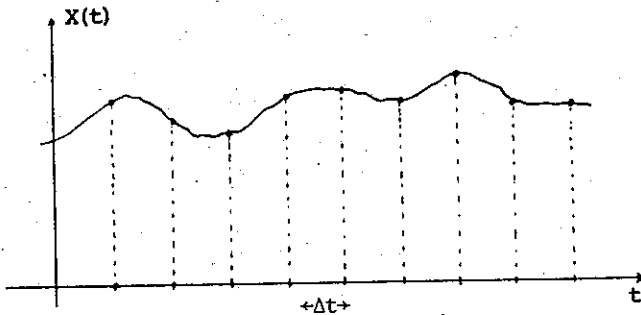


Figura 5.8

A quantidade $1/\Delta t$ é a taxa de amostragem, ou seja, o número de observações amostradas por unidade de tempo.

Obtemos uma série temporal discreta.

$$X_k = X_{\Delta t}(k) = X(k\Delta t), \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.57)$$

A questão que ocorre, naturalmente, é: a série amostrada X_k nos diz tudo sobre $X(t)$? A resposta está contida no *Teorema da Amostragem* de Shannon, 1949.

TEOREMA 5.1 Seja $X(t)$, $-\infty < t < +\infty$, uma série temporal com espectro $f(\omega) = 0$, para $|\omega| > \Omega$. Então, a série $X(t)$ pode ser exatamente reconstituída a partir de seus valores nos pontos $\frac{\pi k}{\Omega}$, $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Precisamente, temos

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\Omega(t - \frac{\pi k}{\Omega})}{\Omega(t - \frac{\pi k}{\Omega})} X(\frac{\pi k}{\Omega}), \quad -\infty < t < +\infty. \quad (5.58)$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja

$$E_{\Omega}(\omega) = \begin{cases} e^{i\omega t}, & -\Omega \leq \omega \leq \Omega \\ \text{extensão periódica de } e^{i\omega t}, \text{ de período } 2\Omega, \\ \text{fora deste intervalo.} \end{cases}$$

Os coeficientes de Fourier de $E_{\Omega}(\omega)$ são dados por

$$C_n = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} X(t) e^{-i\omega_n t} dt, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

onde $\omega_n = \frac{2\pi n}{2\Omega}$, e a série de Fourier é

$$X(t) = \sum_n C_n e^{i\omega_n t} = \sum_k \frac{\text{sen}\Omega(t-\pi k/\Omega)}{\Omega(t-\pi k/\Omega)} e^{i\omega(\pi k/\Omega)}.$$

Como para $|\omega| > \Omega$, $F(d\omega) = 0$, segue-se que $Z(d\omega) = 0$, logo

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} Z(d\omega) = \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t} Z(d\omega) = \\ &= \int_{-\Omega}^{\Omega} E_{\Omega}(\omega) Z(d\omega) = \sum_k \frac{\text{sen}\Omega(t-\pi k/\Omega)}{\Omega(t-\pi k/\Omega)} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega\pi k/\Omega} Z(d\omega) = \\ &= \sum_k \frac{\text{sen}\Omega(t-\pi k/\Omega)}{\Omega(t-\pi k/\Omega)} X\left(\frac{\pi k}{\Omega}\right). \quad \square \end{aligned}$$

O teorema nos diz que, se o intervalo de amostragem é tal que $\Delta t \leq \frac{\pi}{\Omega}$, então o espectro da série original e o da série amostrada coincidirão.

5.9 -"ALIASING"

Consideremos, então, a série temporal contínua $X(t)$ amostrada em intervalos de tempo igualmente espaçados, sendo Δt o intervalo de amostragem.

A observação fundamental é (Tukey, 1959) que uma onda cosseno rápida, amostrada sistematicamente em intervalos de tempos regulares, aparece da mesma maneira que uma onda cosseno lenta (figura 5.9).

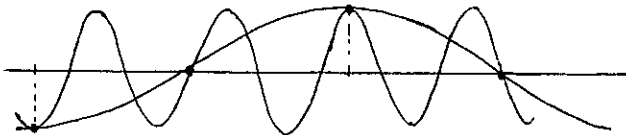


Figura 5.9

Ou seja, dado Δt , é impossível saber qual dos dois harmônicos está sendo observado. Após a amostragem, a contribuição aparente perto de qualquer frequência é o resultado da superposição de contribuição de muitas outras frequências, que se tornaram "aliases" umas das outras.

Para ver precisamente este fato, consideremos a representação espectral da série $X(t)$:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} Z(d\omega) \tag{5.59}$$

Segue-se que

$$X_k = X_{\Delta t}(k) = X(k\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega k\Delta t} Z(\omega), \quad (5.60)$$

que é uma "soma" de funções periódicas $e^{i\omega k\Delta t}$ com amplitudes aleatórias $Z(d\omega)$.

Para um dado ω , seja $\phi_{\omega}(k) = e^{i\omega k\Delta t}$. Temos que, na frequência $\omega + \frac{2\pi}{\Delta t}$,

$$\phi_{\omega+2\pi/\Delta t}(k) = e^{i(\omega+2\pi/\Delta t)k\Delta t} = e^{i\omega k\Delta t} e^{i2\pi k} = \phi_{\omega}(k),$$

ou seja, a função $\phi_{\omega}(k)$ é indistinguível da função $\phi_{\omega+2\pi/\Delta t}(k)$ na frequência $\omega + \frac{2\pi}{\Delta t}$. A amplitude na frequência $\omega + \frac{2\pi}{\Delta t}$, digamos $Z(d\omega + \frac{2\pi}{\Delta t})$ aparecerá como contribuição à amplitude de $\phi_{\omega}(k)$.

De modo geral, obtemos que, se $\ell=0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\phi_{\omega+2\pi\ell/\Delta t}(k) = \phi_{\omega}(k). \quad (5.61)$$

Chamando

$$\omega_N = \frac{\pi}{\Delta t} \quad (5.62)$$

a frequência angular de Nyquist, segue-se que ω , $2\omega_N - \omega$, $2\omega_N + \omega$, $4\omega_N - \omega$, $4\omega_N + \omega, \dots$, são confundidas e tornaram-se "aliasas". Todas as amplitudes $Z(d\omega + \frac{2\pi\ell}{\Delta t})$, $\ell=0, \pm 1, \dots$, contribuem para a amplitude de $\phi_{\omega}(k)$. Chamando $Z_{\Delta t}(d\omega)$ a amplitude de $\phi_{\omega}(k)$, para $\omega \in [-\omega_N, \omega_N]$, temos que

$$X_{\Delta t}(k) = \int_{-\omega_N}^{\omega_N} e^{i\omega k\Delta t} Z_{\Delta t}(d\omega), \quad (5.63)$$

onde

$$Z_{\Delta t}(d\omega) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} Z(d\omega + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}) \quad (5.64)$$

A equação (5.63) é a representação espectral do processo amostrado. Em particular, para $\Delta t=1$ obtemos a representação espectral do processo $\{X_k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, ou seja, $X_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega k} Z(d\omega)$, que já conhecemos.

Vejamos qual a relação entre os espectros de $X(t)$ e de X_k . Chamando $f(\omega)$ o espectro da série contínua e $f_{\Delta t}(\omega)$ o espectro da série amostrada, temos que

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega} f(\omega) d\omega,$$

supondo $\Delta t=1$, por um momento. Logo,

$$C(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} e^{i\tau\omega} f(\omega) d\omega = \int_0^{2\pi} e^{i\tau\omega} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\omega+2\pi j) d\omega, \quad (5.65)$$

para $\tau=0, \pm 1, \dots$. Como também

$$C(\tau) = \int_0^{2\pi} e^{i\tau\omega} f_{\Delta t}(\omega) d\omega,$$

obtemos

$$f_{\Delta t}(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\omega+2\pi j). \quad (5.66)$$

Vemos, então, que numa frequência ω na série discreta X_k relaciona-se com as frequências $\omega, \omega \pm 2\pi, \dots$ da série contínua $X(t)$. Como $f_{\Delta t}(\omega) = f_{\Delta t}(-\omega)$, também relaciona-se com as frequências $-\omega, -\omega \pm 2\pi, \dots$

Se $\Delta t \neq 1$, obtemos

$$C(k\Delta t) = \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} e^{i\omega k\Delta t} f_{\Delta t}(\omega) d\omega$$

e (5.66) é substituída por

$$f_{\Delta t}(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\omega + \frac{2\pi j}{\Delta t}). \quad (5.67)$$

Para todo $\omega \in \left[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}\right] = [-\omega_N, \omega_N]$, obtemos as frequências $\pm\omega + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}$, $\ell = \pm 1, \pm 2, \dots$, "aliasés" de $\pm\omega$.

No caso geral, obtemos a f.d. espectral do processo amostrado, $F_{\Delta t}(\omega)$ digamos, está relacionada com a f.d. espectral da série contínua, $F(\omega)$, através da relação

$$F_{\Delta t}(\omega) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} F\left(\omega + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}\right) \quad (5.68)$$

Deste modo, no caso em que o espectro de $X(t)$ é uma mistura de uma parte discreta e de uma parte contínua, teremos que

$$p_{\Delta t}(\omega) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} p\left(\omega + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}\right), \quad (5.69)$$

$$f_{\Delta t}(\omega) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f\left(\omega + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}\right), \quad (5.70)$$

para $-\frac{\pi}{\Delta t} \leq \omega \leq \frac{\pi}{\Delta t}$, onde $p_{\Delta t}(\omega)$ e $f_{\Delta t}(\omega)$ são a função espectral e a função densidade espectral, respectivamente, de $X_{\Delta t}(k)$ e $p(\omega)$, $f(\omega)$ a função espectral e função densidade espectral de $X(t)$, respectivamente.

No caso em que a frequência é dada em ciclos por unidade de tempo, $\nu(\omega = 2\pi\nu)$, a frequência de Nyquist é dada por $\nu_N = \frac{\omega_N}{2\pi} = \frac{1}{2\Delta t}$:

$$\nu_N = \frac{1}{2\Delta t} \quad (5.71)$$

Se a série $X(t)$, $-\infty < t < +\infty$, não possui componentes com frequências maiores que ω_N , então $f_{\Delta t}(\omega) = f(\omega)$, para $|\omega| < \frac{\pi}{\Delta t}$, e o problema de "aliasing" não aparece.

A figura 5.10 mostra como a energia do processo fora do intervalo $[-\omega_N, \omega_N]$ é "dobrada" para dentro deste intervalo.

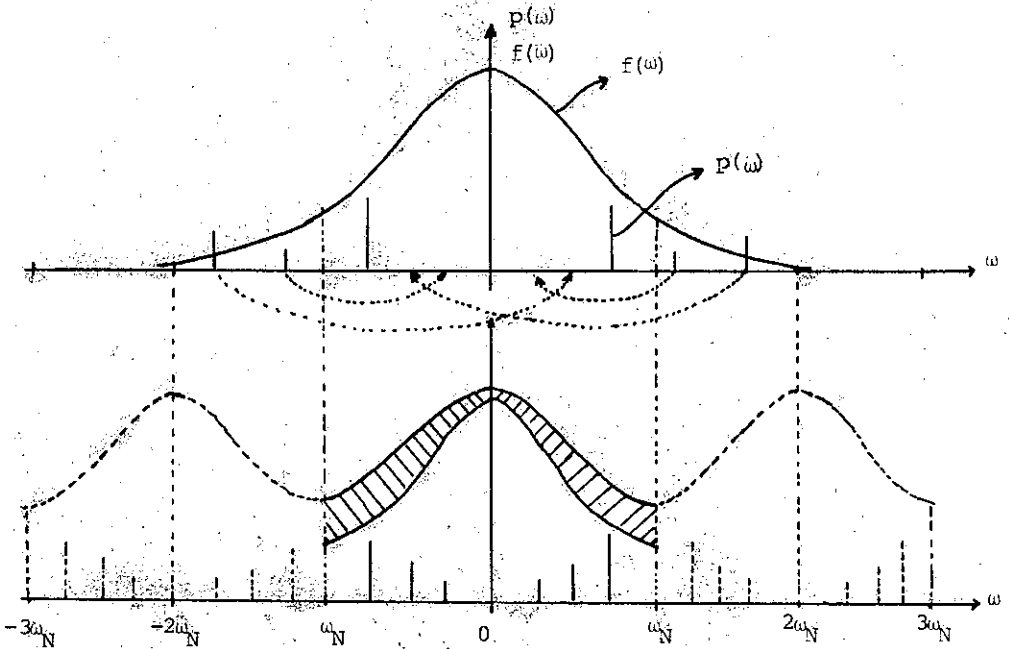


Figura 5.10

A região hachurada na figura corresponde à energia que é transferida de fora do intervalo $[-\omega_N, \omega_N]$ para dentro deste intervalo. Observe que, se tomássemos a frequência de Nyquist igual ao dobro daquela da figura, não teríamos novamente o problema de "aliasing". Isto corresponderia a tomar o intervalo de amostragem igual à metade daquela que resultou ω_N da figura 5.10. O espectro da série amostrada, $f_{\Delta t}(\omega)$ terá período $\frac{2\pi}{\Delta t} = 2\omega_N$ e está indicado na figura 5.10 em linha pontilhada, e como vemos, pode ser bem diferente do espectro da série original.

Como observamos acima, o fenômeno pode ser evitado ou pelo menos reduzido escolhendo ω_N (e portanto Δt) de modo conveniente.

A maioria dos processos físicos têm pouca energia em altas frequências. Se Ω é uma frequência tal que $f(\omega) \approx 0$, para $|\omega| > \Omega$, então basta tomar Δt de modo que

$$\omega_N = \frac{\pi}{\Delta t} > \Omega.$$

Deste modo, $f_{\Delta t}(\omega) = f(\omega)$, para $|\omega| \leq \Omega$,

5.10 - EXERCÍCIOS.

1 - Prove que a solução da equação integral $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$, onde T é uma constante, é $y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) s(t-u) du$. Determine $s(u)$.

2 - Suponha $Z(t)$ e $X(t)$ processos estacionários, com

$$X(t) = \int_{t-T}^t Z(u) du.$$

Obtenha $E\{X(t)\}$ e $C_X(\tau)$.

3 - No exercício 1, suponha $x(t)$ ruído branco. Determine a função de transferência $S(\omega)$ e o espectro de $y(t)$.

4 - Prove que a função de transferência do filtro (5.48) é $\frac{s(\omega - \omega_0) + s(\omega + \omega_0)}{2}$, onde $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$.

5 - Prove que a função de transferência do filtro $F_3 = aF_1 + bF_2$ é $S_3(\omega) = aS_1(\omega) + bS_2(\omega)$, onde $S_1(\omega)$ e $S_2(\omega)$ são as funções de transferência de F_1 e F_2 .

6 - Prove que a função de transferência do filtro $F_3 = F_2 F_1$ é $S_3(\omega) = S_2(\omega) \cdot S_1(\omega)$.

7 - Prove a relação (5.50).

8 - Considere a função quase periódica $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}$, $-\infty < t < +\infty$,

e suponha que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$. Suponha que F seja um filtro com função de transferência $S(\omega)$ e considere $F[X(t)]$. Qual condição deve estar satisfeita para que a saída do filtro seja uma função quase periódica bem definida?

9 - Considere um processo estocástico estacionário qualquer e suponha que seja possível considerar

$$X(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} e^{i\omega t} dZ(\omega). \quad (*)$$

(a) Qual a condição que deve estar satisfeita para que a mudança de ordem de derivação e integração em (*) seja válida?

(b) Considerando (*) como um filtro, obter sua função de transferência.

(c) Obter o ganho e a fase do filtro.

10- Considere um filtro convolução, com a entrada sendo um processo estacionário e com função de impulso $s(\tau)$ satisfazendo $\int_{-\infty}^{\infty} s^2(\tau) d\tau < \infty$. Que condição deve satisfazer a função de transferência $S(\omega)$?

11- Seja I o filtro *identidade*, isto é, $I[X(t)] = X(t)$. Considere L um filtro passa-baixo e a operação $F = I - L$. Obtenha a função de transferência de F . Que tipo de filtro é F ?

12- Seja F um filtro com função de transferência $S(\omega)$ e suponha que ele seja aplicado sequencialmente n vezes, a entrada inicial sendo uma série estacionária $X(t)$, com f.d. espectral $F(\omega)$. Determine a condição de compatibilidade do filtro resultante F^n , sua função de transferência e sua fase.

13- Suponha que F_1 e F_2 sejam dois filtros convolução, com funções de impulso $s_1(\tau)$ e $s_2(\tau)$, respectivamente, tais que $\int_{-\infty}^{\infty} |s_1(\tau)| d\tau < \infty$,

$i=1,2$. Considere $F=F_1 F_2$. Se $s(\tau)$ é a função de impulso de F , prove que $\int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)| d\tau < \infty$.

14- Considere a equação (5.37). Suponha que os espectros $f(\omega)$ e $f_n(\omega)$, do sinal e do ruído, respectivamente, não se interceptem. Mostre, que neste caso, $S(\omega)=1$ para $f_m(\omega) \neq 0$ e $S(\omega)=0$, para $f_m(\omega)=0$. Obtenha $E\{\epsilon^2(t)\}$ neste caso.

15- Suponha que $f_n(\omega) \gg f_m(\omega)$, isto é, o espectro do ruído é substancialmente maior que o espectro do sinal. Mostre que, neste caso, $E\{\epsilon^2(t)\} \approx E\{M^2(t)\}$.

16- Seja $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) X(t-\tau) d\tau$. Prove que o espectro de $X(t)$, $f_X(\omega)$, é não negativo, através da expressão para $E\{Y^2(t)\}$, usando um filtro conveniente.
(Sugestão: use $S(\omega)$ passa-banda ao redor de ω).

17- Considere o filtro F cuja função de transferência é

$$S(\omega) = \begin{cases} -i, & 0 < \omega < \pi \\ 0, & \omega = 0 \\ i, & -\pi < \omega < 0. \end{cases}$$

Se $X(t) = \sum_{j=1}^n R_j \cos(\omega_j t + \phi_j)$, R_j, ϕ_j e n constantes, qual é a série resultante da aplicação de F à série $X(t)$? F é chamado de *transformada de Hilbert*.

18- Determinar as fases dos filtros (5.40), (5.41) e (5.43).

19- Provar (5.68), utilizando (5.64) e as propriedades de $Z(\omega)$.

20- Considere a série $X(t) = R \cos(\omega t + \phi)$, $-\infty < t < +\infty$, onde ϕ é uniforme em $(-\pi, \pi)$. Obtenha os espectros de $X(t)$, $f(\omega)$, e da série amostrada, $f_{\Delta t}(\omega)$.

- 21- Suponha que uma série temporal do nível do oceano é amostrada uma vez a cada semana, para procurar possíveis periodicidades nos dados. Se t é dado em dias, encontrar a frequência de Nyquist. Mostre que 2π é uma frequência "alias" da frequência 0.
- 22- Suponha que experiências passadas surgiram que o espectro de um processo é da forma

$$f(\nu) = \begin{cases} c - c \cdot (\nu/7\pi) + \cos \nu, & 0 < \nu < 7\pi \\ c + c \cdot (\nu/7\pi) + \cos \nu, & -7\pi < \nu < 0 \\ 0 & , |\nu| > 7\pi, \end{cases}$$

onde c é uma constante e a frequência ν é dada em ciclos por unidade de tempo. Um intervalo de amostragem $t=1/7\pi$ é adequado para estimar $f(\nu)$? E $\Delta t=1/14\pi$?

CAPÍTULO 6

A TRANSFORMADA DE FOURIER FINITA E O PERIODOGRAMA.

6.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo e no seguinte estaremos interessados em obter estimadores do espectro $f(\omega)$ do processo estocástico estacionário $X(t)$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, definido por

$$f(\omega) = (2\pi)^{-1} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\omega} \cdot C(\tau), \quad (6.1)$$

$-\pi \leq \omega \leq \pi$. Os estimadores são baseados em observações do processo obtidas nos instantes $t=1, 2, \dots, N$.

Neste capítulo, trataremos de um particular estimador, que foi introduzido por Schuster, em 1894. É o *periodograma* ou *espectro amostral*. Este estimador é frequentemente usado em ciências aplicadas e o seu limite, quando $N \rightarrow \infty$ é chamado de espectro de potências. Esta definição do espectro é adequada quando temos sinais determinísticos, mas quando temos processos aleatórios o limite em questão pode não ter sentido, já que o periodograma, como um estimador, será uma v.a. Vamos ilustrar o procedimento em questão.

Se $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$ é um sinal determinístico, sabemos do Capítulo 3, que a variância ou energia média do sinal no domínio $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ pode ser escrita

$$s_T^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |C_m|^2, \quad (6.2)$$

(5.14)

onde

$$C_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2\pi m t/T} dt. \quad (6.3)$$

Segue-se que a variância da série $x(t)$ é

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_m (T |C_m|^2) \frac{1}{T} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\nu) d\nu,$$

onde

$$p(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} T |C_m|^2 \quad (6.4)$$

é chamado o espectro de potências. Por (6.3) segue-se que $T |C_m|^2$ pode ser escrito

$$\frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \right|^2 \quad (6.5)$$

e este é chamado o periodograma. A definição (6.4) não é satisfatória se $x(t)$ é um processo estocástico, pois (6.5) é uma v.a. e pode não convergir para nenhum valor limite, quando $T \rightarrow \infty$.

6.2 - A TRANSFORMADA DE FOURIER FINITA.

Dados os valores $X(1), X(2), \dots, X(N)$ do processo estacionário real $X(t)$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, definimos a transformada de Fourier finita destes valores como

$$d^{(N)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{t=1}^N X(t) e^{-i\omega t}, \quad (6.6)$$

$-\infty < \omega < +\infty$. É fácil ver que

(i) $d^{(N)}(\omega) = d^{(N)}(\omega + 2\pi)$, isto é, tem período 2π ;

(6.7)

(ii) $\overline{d^{(N)}(-\omega)} = d^{(N)}(\omega)$.

Portanto, basta considerar ω no intervalo $[-\pi, \pi]$. Embora (6.6) seja definida para todas as frequências ω em $[-\pi, \pi]$ ela na prática é calculada para frequências da forma $\omega_v = \frac{2\pi v}{N}$, com $-\left[\frac{N-1}{2}\right] \leq v \leq \left[\frac{N}{2}\right]$. Escrevemos

$$d_v^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{t=1}^N X(t) e^{\frac{-i2\pi vt}{N}}, \quad (6.8)$$

$$-\left[\frac{N-1}{2}\right] \leq v \leq \left[\frac{N}{2}\right].$$

Suporemos, no que segue, que $X(t)$ tem média zero, f.a.c. $C(\tau)$ e espectro dado por (6.1). Temos, então, que $E\{d_v^{(N)}\} = 0$. Calculemos $\text{Var}\{d_v^{(N)}\} = E\{|d_v^{(N)}|^2\}$. Usando a representação espectral de $X(t)$ em (6.8) obtemos

$$d_v^{(N)} = (2\pi N)^{1/2} \sum_{t=1}^N e^{-i\omega_v t} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} dZ(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} (2\pi N)^{-1/2} \sum_{t=1}^N e^{i(\omega - \omega_v)t} dZ(\omega).$$

Chamando

$$\Delta^{(N)}(\omega) = \frac{1}{(2\pi N)^{1/2}} \sum_{t=1}^N e^{i\omega t}, \quad (6.9)$$

temos que

$$d_v^{(N)} = \int_{-\pi}^{\pi} \Delta^{(N)}\left(\omega - \frac{2\pi v}{N}\right) dZ(\omega). \quad (6.10)$$

É fácil ver que $|\Delta^{(N)}(\omega)|^2$ é o núcleo de Fejer (ver Capítu-

lo 3) e este comporta-se como uma função δ de Dirac quando $N \rightarrow \infty$.

Agora,

$$E\{|d_{\nu}^{(N)}|^2\} = E\{d_{\nu}^{(N)} \overline{d_{\nu}^{(N)}}\} =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta^{(N)}\left(\omega - \frac{2\pi\nu}{N}\right) \overline{\Delta^{(N)}\left(\alpha - \frac{2\pi\nu}{N}\right)} E\{dZ(\omega) \overline{dZ(\alpha)}\}$$

e como $E\{dZ(\omega) \overline{dZ(\alpha)}\} = f(\omega) \delta(\omega - \alpha)$, se $\omega = \alpha$, segue-se que

$$E\{|d_{\nu}^{(N)}|^2\} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \Delta^{(N)}\left(\omega - \frac{2\pi\nu}{N}\right) \right|^2 f(\omega) d\omega. \quad (6.11)$$

Pela propriedade acima referida de $|\Delta^{(N)}(\cdot)|^2$, segue-se que se $f(\omega)$ é contínua, para N grande,

$$E\{|d_{\nu}^{(N)}|^2\} \approx f(\omega_{\nu}), \quad (6.12)$$

e esta aproximação é tanto melhor quanto mais suave for $f(\omega)$ na vizinhança de $\omega_{\nu} = \frac{2\pi\nu}{N}$.

Vamos, supor agora, que $X(t)$ seja Gaussiano. Segue-se de (6.8) que $d_{\nu}^{(N)}$, sendo uma combinação linear de variáveis normais, terá uma distribuição conjunta multivariada normal complexa.

Então, temos o seguinte Teorema de Limite Central.

TEOREMA 6.1 - Se o espectro $f(\omega)$ é contínuo, então as v.a. $d_{\nu}^{(N)}$, $-\left[\frac{N-1}{2}\right] \leq \nu \leq \left[\frac{N}{2}\right]$, são assintoticamente independentes, quando $N \rightarrow \infty$, e com distribuição assintótica $N_1^C(0, f(\omega_{\nu}))$, se $\nu \neq 0, \frac{N}{2}$ e com distribuição assintótica $N_1(0, f(\omega_{\nu}))$, se $\nu = 0$ ou $\frac{N}{2}$.

DEMONSTRAÇÃO. Em primeiro lugar, devemos provar que $E\{d_{\nu}^{(N)} \overline{d_{\nu}^{(N)}}\} \rightarrow 0$, quando $N \rightarrow \infty$ e $\mu \neq \nu$. Usando (6.10),

$$\begin{aligned}
 E\{d_{\mu}^{(N)} \overline{d_{\nu}^{(N)}}\} &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta^{(N)}\left(\alpha - \frac{2\pi\mu}{N}\right) \overline{\Delta^{(N)}\left(\beta - \frac{2\pi\nu}{N}\right)} E\{dZ(\alpha) \overline{dZ(\beta)}\} \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \Delta^{(N)}\left(\alpha - \frac{2\pi\mu}{N}\right) \overline{\Delta^{(N)}\left(\alpha - \frac{2\pi\nu}{N}\right)} f(\alpha) d\alpha. \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

A função $\Delta^{(N)}\left(\alpha - \frac{2\pi\mu}{N}\right) \overline{\Delta^{(N)}\left(\alpha - \frac{2\pi\nu}{N}\right)}$ é o produto de duas janelas centradas em ω_{μ} e ω_{ν} e quando $N \rightarrow \infty$ estas frequências tendem a zero e os picos das janelas tornam-se mais próximos e pontiagudos. Como $f(\omega)$ é contínua, (6.13) tende ao mesmo limite que

$$f\left(\frac{\omega_{\mu} + \omega_{\nu}}{2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \Delta^{(N)}\left(\alpha - \frac{2\pi\mu}{N}\right) \overline{\Delta^{(N)}\left(\alpha - \frac{2\pi\nu}{N}\right)} d\alpha,$$

quando $N \rightarrow \infty$ e a integral é igual a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi N} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N e^{-\frac{i2\pi\mu t}{N} + \frac{i2\pi\nu s}{N}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha(t-s)} d\alpha &= \\
 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e^{i2\pi(\nu-\mu)t/N} &= \begin{cases} 1, & \nu = \mu \\ 0, & \nu \neq \mu \end{cases}
 \end{aligned}$$

usando (6.9) e o fato que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha(t-s)} d\alpha = \begin{cases} 2\pi, & t=s \\ 0, & t \neq s. \end{cases}$$

Logo, $\lim_{N \rightarrow \infty} E\{d_{\mu}^{(N)} \overline{d_{\nu}^{(N)}}\} = 0$, $\nu \neq \mu$ e as v.a. $d_{\nu}^{(N)}$ são assintoticamente independentes.

Como $X(t)$ é Gaussiano, a distribuição limite é uma normal complexa, com média zero e variância $E\{|d_{\nu}^{(N)}|^2\} = f(\omega_{\nu})$, para $\nu \neq 0$ e $\nu \neq \frac{N}{2}$. Para $\nu=0$ ou $\nu=\frac{N}{2}$, $d_{\nu}^{(N)}$ é real e a variância assintótica é $f(0)$ ou $f(\pi)$, respectivamente. \square

O Teorema 6.1 foi demonstrado sob a suposição que $X(t)$ é Gaussiano.

Se $X(t)$ é um processo estacionário qualquer, satisfazendo à condição

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\tau| |C(\tau)| < \infty,$$

pode-se provar que

$$\text{Cov}\{d_{\nu}^{(N)}, d_{\mu}^{(N)}\} = f(\omega_{\nu}) + o(1), \quad (6.14)$$

e sob certas condições de regularidade sobre as frequências ω_{ν} , $d_{\nu}^{(N)}$ tem distribuição assintótica normal complexa, como no Teorema 6.1. Para detalhes, ver Brillinger, 1975, Capítulo 4.

O Teorema 6.1 também é válido para frequências ω quaisquer; basta considerar uma sequência de inteiros $\{\nu_N\}$ e as frequências $\frac{2\pi\nu_N}{N}$ convergindo para ω .

6.3 - O PERIODOGRAMA.

A equação (6.12) (ou a equação (6.14)) sugere que um estimador para $f(\omega_{\nu})$ é

$$I_{\nu}^{(N)} = |d_{\nu}^{(N)}|^2 = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N X(t) e^{-i\omega_{\nu} t} \right|^2, \quad (6.15)$$

para frequências $\omega_{\nu} = \frac{2\pi\nu}{N}$, $-\left[\frac{N-1}{2}\right] \leq \nu \leq \left[\frac{N}{2}\right]$. Este estimador é chamado o *periodograma* dos valores $X(t)$, $t=1, 2, \dots, N$.

Podemos definir o periodograma para qualquer frequência $\omega \in [-\pi, \pi]$:

$$I^{(N)}(\omega) = |d^{(N)}(\omega)|^2, \quad (6.16)$$

mas na prática ele só poderá ser calculado para um número finito de frequências. Pode-se demonstrar que (6.16) é completamente determinado por seus valores nas frequências $\omega_v = \frac{2\pi v}{N}$.

De (6.11) segue-se que $I_v^{(N)}$ é assintoticamente não viciado, isto é,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{I_v^{(N)}\} = f(\omega_v). \quad (6.17)$$

Vejamos, agora, a distribuição assintótica do periodograma. Supomos $X(t)$ Gaussiano.

TEOREMA 6.2 - As ordenadas do periodograma $I_v^{(N)}$ são v.a. assintoticamente independentes e têm distribuição assintótica múltipla de uma v.a. qui-quadrado com dois graus de liberdade, se $v \neq 0$ e $v \neq \frac{N}{2}$ e com um grau de liberdade, se $v=0$ ou $v=\frac{N}{2}$.

DEMONSTRAÇÃO - Escrevamos $d_v^{(N)} = a_v^{(N)} - ib_v^{(N)}$, de modo que

$$a_v^{(N)} = (2\pi N)^{-1/2} \sum_{t=1}^N X(t) \cos \omega_v t \quad \text{e} \quad b_v^{(N)} = (2\pi N)^{-1/2} \sum_{t=1}^N X(t) \sin \omega_v t$$

Como $a_v^{(N)} = \frac{d_v^{(N)} + \overline{d_v^{(N)}}}{2}$ e $b_v^{(N)} = \frac{d_v^{(N)} - \overline{d_v^{(N)}}}{2i}$, estas são v.a. reais, com média zero e distribuição normal. Como os $d_v^{(N)}$ são independentes, os pares $(a_v^{(N)}, b_v^{(N)})$ também serão. Provemos que os $a_v^{(N)}$ são independentes dos $b_v^{(N)}$ assintoticamente

Temos que

$E\{d_v^{(N)}\}^2 = E\{d_v^{(N)} d_v^{(N)}\} = E\{d_v^{(N)} \overline{d_v^{(N)}}\} + 0$, pois os $d_v^{(N)}$ são assintoticamente independentes e $\overline{d_v^{(N)}} = \overline{d_v^{(N)}}$. Do mesmo modo, $E\{\overline{d_v^{(N)}}\}^2 \rightarrow 0$, em ambos os casos $v \neq 0$ e $v \neq \frac{N}{2}$. Logo,

$$E\{a_v^{(N)} b_v^{(N)}\} = E\left\{ \frac{d_v^{(N)} + \overline{d_v^{(N)}}}{2} \cdot \frac{d_v^{(N)} - \overline{d_v^{(N)}}}{2i} \right\} = \frac{1}{4i} E\{[d_v^{(N)}]^2 - [\overline{d_v^{(N)}}]^2\} \rightarrow 0$$

e $a_v^{(N)}$ é independente de $b_v^{(N)}$, $v \neq 0$, $v \neq \frac{N}{2}$.

Para $v=0$, $a_0^{(N)} = d_0^{(N)}$ e $b_0^{(N)} = 0$. Para $v = \frac{N}{2}$, $a_{N/2}^{(N)} = d_{N/2}^{(N)}$ e

$b_{N/2}^{(N)} = 0$. Como, para $v \neq 0$ e $v \neq \frac{N}{2}$, $d_v^{(N)} \sim N_1^C(0, f(\omega_v))$, pela propriedade da normal complexa (ver seção 1.7) segue-se que $a_v^{(N)} \sim N_1(0, \frac{1}{2}f(\omega_v))$,

$b_v^{(N)} \sim N_1(0, \frac{1}{2}f(\omega_v))$ e independentes, logo

$$\frac{a_v^{(N)}}{\left[\frac{1}{2}f(\omega_v)\right]^{1/2}} \sim N_1(0,1) \text{ e } \frac{b_v^{(N)}}{\left[\frac{1}{2}f(\omega_v)\right]^{1/2}} \sim N_1(0,1) \text{ e independentes}$$

do que segue que $\frac{[a_v^{(N)}]^2 + [b_v^{(N)}]^2}{\frac{1}{2}f(\omega_v)} \sim \chi^2(2)$, onde $\chi^2(2)$ indica uma v.a

com distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade. Vemos portanto, que $I_v^{(N)}$ tem a distribuição de uma v.a. $\frac{1}{2}f(\omega_v)\chi^2(2)$, para $v \neq 0$ e $v \neq \frac{N}{2}$. Para $v=0$ ou $v = \frac{N}{2}$ obtemos

$$I_0^{(N)} = [a_0^{(N)}]^2 \sim f(0)\chi^2(1) \text{ e } I_{N/2}^{(N)} = [a_{N/2}^{(N)}]^2 \sim f(\pi)\chi^2(1). \quad \square$$

Temos, então, que *assintoticamente*,

$$E(I_v^{(N)}) = f(\omega_v),$$

$$\text{Var}(I_v^{(N)}) = f^2(\omega_v), \quad v \neq 0, v \neq \frac{N}{2}. \quad (6.18)$$

$$\text{Var}(I_v^{(N)}) = \begin{cases} 2f^2(0), & v=0 \\ 2f^2(\pi), & v=\frac{N}{2} \end{cases}$$

Vê-se, então, que embora o periodograma seja assintoticamente não viciado ele não é consistente, isto quer dizer que, mesmo au

mentando o número de observações, a variância de $I_v^{(N)}$ não decresce e permanece ao nível de $f^2(\omega_v)$. Pode-se demonstrar que as relações (6.18) valem para frequências quaisquer e que o Teorema 6.2 continua válido, removendo-se a suposição de que $X(t)$ é Gaussiano. Para detalhes, ver Brillinger, 1975.

TEOREMA 6.3 - Se $X(t)$ tem média m e $\sum |C(\tau)| < \infty$, então

$$E\{I^{(N)}(\omega)\} = \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta^{(N)}(\omega-\alpha)|^2 f(\omega) d\alpha + [\Delta^{(N)}(\omega)]^2 \cdot m^2 \quad (6.19)$$

DEMONSTRAÇÃO - A relação (6.19) é obtida do mesmo modo como foi obtida a relação (6.11), já que $I_v^{(N)}(\omega) = |d_v^{(N)}(\omega)|^2$. \square

Notemos que se $\omega = \frac{2\pi v}{N}$, $v \neq 0$, $v \neq \frac{N}{2}$, o termo envolvendo m no segundo membro de (6.19) anula-se e obtemos a relação (6.11). Lembremos também que $|\Delta^{(N)}(\cdot)|^2$ é o núcleo de Fejer. Se $\omega \neq 0$, $\omega \neq \pi$, o termo $[\Delta^{(N)}(\omega)]^2 \cdot m^2$ é pequeno, e (6.19) nos diz que a média do período grama é aproximadamente igual a uma média ponderada do espectro com peso concentrado na vizinhança de ω .

TEOREMA 6.4 - Se μ e λ são frequências diferentes de zero e π , então

$$\text{Cov } I^{(N)}(\lambda), I^{(N)}(\mu) = \left\{ \frac{[\text{sen } N[\lambda+\mu]/2]^2}{[N \text{ sen}(\lambda+\mu)/2]} + \frac{[\text{sen } N(\lambda-\mu)/2]^2}{[N \text{ sen}(\lambda-\mu)/2]} \right\} f^2(\lambda) + o(N^{-1}). \quad (6.20)$$

DEMONSTRAÇÃO - Ver exercício 7. \square

COROLÁRIO 6.1 - Se $\lambda = \frac{2\pi r}{N}$, $\mu = \frac{2\pi s}{N}$, $r, s \neq 0$, $r, s \neq \frac{N}{2}$, então

$$\text{Cov}\{I^{(N)}(\lambda), I^{(N)}(\mu)\} = o(N^{-1}). \quad (6.21)$$

DEMONSTRAÇÃO - Segue imediatamente do Teorema 6.4, pois $\lambda + \mu$ e $\lambda - \mu$ se-
nã da forma $\frac{2\pi\nu}{N}$ e o termo entre chaves será nulo. \square

Também, para $\lambda = \mu = \frac{2\pi\nu}{N}$, obtemos de (6.20) que

$$\text{Var}\{I^{(N)}(\lambda)\} = f^2(\lambda) + O(N^{-1}). \quad (6.22)$$

A relação (6.21) nos diz que ordenadas do periodograma são praticamente não correlacionadas, do que resulta o comportamento er
rático do periodograma.

6.4 - A TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER.

Para calcular a transformada de Fourier finita (6.6) são ne
cessárias aproximadamente N^2 operações complexas. Por uma operação
complexa entendemos uma multiplicação complexa seguida por uma adi-
ção complexa.

Cooley e Tukey, em 1965 introduziram um algoritmo, chama-
do transformada rápida de Fourier - FFT (de "fast Fourier transform")
que requer apenas $2N \log_2 N$ operações. Para séries longas, a econo-
mia de tempo é considerável.

Inicialmente, para o caso $N = r_1 \cdot r_2$, r_1 e r_2 inteiros e dife-
rentes de um, é mostrado que são necessárias $T = N(r_1 + r_2)$ operações.
Se $N = r_1 \cdot r_2 \dots r_m$, então serão necessárias $T = (r_1 + r_2 + \dots + r_m)$ operações.

O caso $N = r^m$, com $r = 2$ ou 4 oferece vantagens importantes pa-
ra computadores com aritmética binária.

Se todos os r_j são iguais a r , então $N = r^m$ e $m = \log_r N$, de mo-
do que o número total de operações é $T = Nmr = rN \log_r N$, que para $r = 2$ re
duz-se a $T = 2N \log_2 N$. Para detalhes, ver o artigo acima mencionada de
Cooley e Tukey ou Brillinger, 1975, Capítulo 3.

Veremos, no capítulo seguinte, que um procedimento para es-
timar $f(\omega)$ consiste em considerar

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} w(\tau) \hat{C}(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (6.23)$$

onde $\hat{C}(\tau)$ é um estimador da f.a.c. $C(\tau)$ e $w(\tau)$ é uma função peso. (6.23) é um estimador suavizado de covariâncias e corresponde a suavizar a função de auto-covariância no domínio do tempo e então transformar para o domínio de frequências.

Outra possibilidade é obter estimadores suavizados de periodogramas, de modo que os cálculos são feitos todos no domínio de frequências. Obtemos a transformada de Fourier finita (6.6) usando uma FFT, depois obtemos o periodograma (6.15), nas frequências $\frac{2\pi\nu}{N}$, e depois suavizamos ao redor de uma frequência de interesse. Aqui reside a vantagem do algoritmo, reduzindo o tempo de computação necessário.

Se N não é um múltiplo de 2 ou da forma $N=r_1 r_2 \dots r_m$, considere um inteiro adequado $N' > N$ e os valores $X(1), X(2), \dots, X(N), 0, \dots, 0$, onde temos $N'-N$ zeros.

Então, obtemos a transformada $d_{\nu}^{(N')}$, para frequências da forma $\frac{2\pi\nu}{N'}$, ou seja,

$$d_{\nu}^{(N')} \left(\frac{2\pi\nu}{N'} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N'}} \sum_{t=1}^N X(t) e^{-i \frac{2\pi\nu t}{N'}}$$

Temos aqui, um número maior de frequências do que no caso de usar $\frac{2\pi\nu}{N}$, pois $N' > N$.

EXEMPLO 6.1 - A Figura 6.1 mostra o periodograma dos registros de maré, de 1 a 29 de abril de 1975, obtidos em Cananéia, S.P., dados horários.

Na realidade, o gráfico mostra $\bar{I}_{\nu}^{(N)} = [A_{\nu}^{(N)}]^2 + [B_{\nu}^{(N)}]^2$, onde

$$A_{\nu}^{(N)} = \frac{2}{N} \sum X(t) \cos \omega_{\nu} t,$$

$$B_v^{(N)} = \frac{2}{N} \sum X(t) \text{sen} \omega_v t.$$

$\tilde{I}_v^{(N)}$ difere do periodograma por um fator $\frac{8\pi}{N}$.

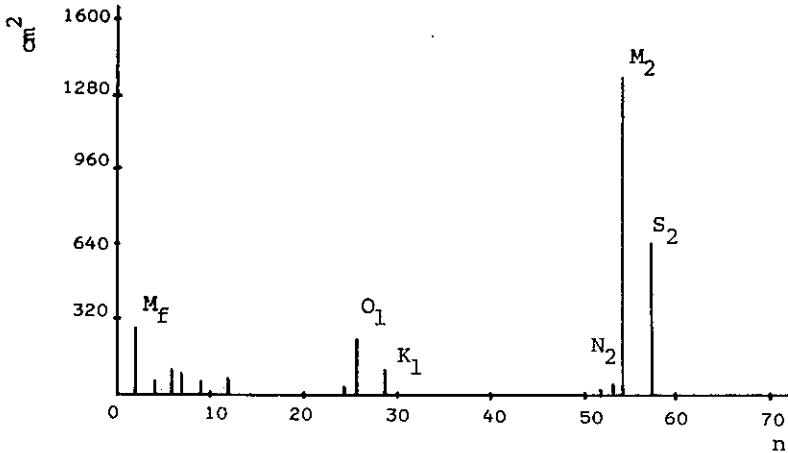


Figura 6.1

Também, somente 75 coeficientes de Fourier foram calculados para o exemplo em questão.

Vemos que há, basicamente, três frequências dominantes; temos a componente de baixa frequência, M_f , um pico ao redor de $n=30$, correspondente às marés diurnas e um pico ao redor de $n=55$, correspondente às marés semi-diurnas. Há outras periodicidades que não aparecem na figura. Ver capítulo 7, para um exemplo em que outras componentes, correspondentes a altas frequências aparecem.

6.5 - EXERCÍCIOS

1 - Prove com detalhe o Teorema 6.3.

2 - Se $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X(t)$, prove que

$$d_Y^{(N)}\left(\frac{2\pi\nu}{N}\right) = d_X^{(N)}\left(\frac{2\pi\nu}{N}\right),$$

para $\nu \neq 0$, $\nu \neq \frac{N}{2}$, onde $Y(t) = X(t) - \bar{X}$

3 - Prove que $I_Y^{(N)}\left(\frac{2\pi\nu}{N}\right) = I_X^{(N)}\left(\frac{2\pi\nu}{N}\right)$, para $\nu \neq 0$, $\nu \neq \frac{N}{2}$, e $Y(t) = X(t) - \bar{X}$.

4 - Se $Y(t) = X(t) - \bar{X}$, prove que

$$I_Y^{(N)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} \hat{C}(\tau) e^{-i\tau\omega},$$

$$\text{onde } \hat{C}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-|\tau|} [X(t+\tau) - \bar{X}] [X(t) - \bar{X}].$$

5 - Se $\sum_{\tau} |\tau| |C(\tau)| < \infty$, prove que

$$\text{Cov}\{d^{(N)}(\lambda), d^{(N)}(\mu)\} = f(\lambda) + o(1).$$

6 - Usando o exercício anterior e sob a suposição lá estabelecida prove que, se $E[X(t)] = m$,

$$E\{I^{(N)}(\omega)\} = f(\omega) + \frac{1}{2\pi N} \left[\frac{\text{sen } N\omega/2}{\text{sen } \omega/2} \right]^2 \cdot m^2 + o(N^{-1}),$$

para qualquer frequência ω e

$$E\{I^{(N)}(\omega)\} = f(\omega) + o(N^{-1}), \text{ se } \omega = \frac{2\pi\nu}{N},$$

$\nu \neq 0$ e $\nu \neq \frac{N}{2}$.

7. Prove que o Teorema 6.4, supondo $X(t)$ de média 0 e Gaussiano.

8. Prove que $\hat{C}(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha\tau} I_Y^{(N)}(\alpha) d\alpha$, onde $Y(t) = X(t) - \bar{X}$ e $\hat{C}(\tau)$ é definida no exercício 4.

9. Obtenha $d^{(N)}(\omega)$ para as seguintes séries:

(a) $X(t) = 1$, para $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots, N=2n+1$.

(b) $X(t) = e^{i\omega t}$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(c) $X(t) = t^k$, k inteiro, $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

CAPÍTULO 7

ESTIMADORES ESPECTRAIS SUAVIZADOS

7.1 - INTRODUÇÃO

Constatamos que o periodograma não é um bom estimador do espectro, dada a sua grande instabilidade. Neste capítulo vamos ver como podemos obter estimadores espectrais que têm propriedades melhores que o periodograma.

Há dois métodos para se obter estimadores mais estáveis que o periodograma, ambos conduzindo aos chamados estimadores suavizados do espectro. Podemos fazer o processo de suavização no tempo e depois transformar para o domínio de frequências. Obtemos os *estimadores suavizados de covariâncias*. Ou então, o processo de suavização é feito no próprio domínio de frequências e teremos os *estimadores suavizados de periodogramas*. Em ambos os casos obtemos estimadores que são assintoticamente não viciados e com variâncias que decrescem com o número de observações da série temporal.

Como o espectro é definido por

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} C(k), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi, \quad (7.1)$$

a idéia natural é substituir $C(k)$ por um estimador.

Suponhamos, então, que temos observações $X(1), \dots, X(N)$ da sé

rie temporal e consideramos estimar $C(k)$ através de

$$\begin{aligned} \hat{C}(k) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} [X(t) - \bar{X}] [X(t+|k|) - \bar{X}], \quad |k| \leq N-1, \\ &= 0, \quad |k| > N-1, \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde \bar{X} é a média amostral

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X(t). \quad (7.3)$$

Sem perda de generalidade, suponhamos a média do processo i gual a zero, de modo que (7.2) fica

$$\begin{aligned} \hat{C}(k) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} X(t)X(t+|k|), \quad |k| \leq N-1 \\ &= 0, \quad |k| > N-1 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Então,

$$\begin{aligned} E\{\hat{C}(k)\} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} E\{X(t)X(t+|k|)\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} C(k) = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) C(k), \end{aligned} \quad (7.5)$$

o que mostra que $\hat{C}(k)$ é viciado. Se, em (7.4), colocamos $N-|k|$ no denominador, no lugar de N , obteremos um estimador não viciado de $C(k)$. Contudo, o estimador definido por (7.4) tem um erro quadrático médio menor que o do estimador não viciado. De (7.5) vemos que $\hat{C}(k)$ é assintoticamente não viciado.

Se $E\{X(t)\} = \mu \neq 0$, obtemos de (7.2) que, para $|k| \leq N-1$,

$$\begin{aligned}
 \hat{C}(k) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} [X(t)-\mu+\mu-\bar{X}] [X(t+|k|)+\mu-\mu-\bar{X}] \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} [X(t)-\mu] [X(t+|k|)-\mu] - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} [X(t)-\mu] [\bar{X}-\mu] \\
 &\quad - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} [X(t+|k|)-\mu] [\bar{X}-\mu] + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} [\bar{X}-\mu]^2.
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Mas

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} (\bar{X}-\mu)^2 = (1-\frac{|k|}{N}) (\bar{X}-\mu)^2$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} (\bar{X}-\mu) \sum_{t=1}^{N-|k|} [X(t)-\mu] &= -\frac{1}{N} (\bar{X}-\mu) (N-|k|) \mu + \frac{1}{N} (\bar{X}-\mu) (N-|k|) \bar{X} \\
 &= \frac{1}{N} (\bar{X}-\mu) (N-|k|) (\bar{X}-\mu) = (1-\frac{|k|}{N}) (\bar{X}-\mu)^2.
 \end{aligned}$$

Logo, (7.6) fica

$$\hat{C}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} [X(t)-\mu] [X(t+|k|)-\mu] - (1-\frac{|k|}{N}) (\bar{X}-\mu)^2,$$

de modo que

$$E\{\hat{C}(k)\} = (1-\frac{|k|}{N}) \hat{C}(k) - (1-\frac{|k|}{N}) \text{Var}(\bar{X}). \tag{7.7}$$

Considerando (7.3) como um filtro linear, obtemos que ela pode ser escrita

$$\bar{X} = \bar{X}(t) = \frac{1}{N} \sum_{u=t-N}^{t-1} X(u), \quad (7.8)$$

pois o vetor $[X(1), \dots, X(N)]'$ tem a mesma distribuição que $[X(t-N), \dots, X(t-1)]'$.

É fácil ver que a função de covariância de (7.8) é

$$C_{\bar{X}}(k) = \text{Cov}\{\bar{X}(t), \bar{X}(t+k)\} = \frac{1}{N^2} \sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N C_X(k+u-v)$$

e fazendo $u-v=y$ vem que

$$C_{\bar{X}}(k) = \frac{1}{N^2} \sum_{y=-N}^N \sum_{v=1}^{N-|y|} C_X(k+y) = \frac{1}{N^2} \sum_{y=-N}^N (N-|y|) C_X(k+y)$$

e fazendo $k=0$ obtemos, então,

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{N} \sum_{y=-N}^N \left(1 - \frac{|y|}{N}\right) C_X(y). \quad (7.9)$$

Logo, se a média do processo não é zero, vemos de (7.7) que o vício do estimador é acrescido por um termo da ordem de N^{-1} .

Estimando-se $f(\lambda)$ por

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} \hat{C}(k), \quad (7.10)$$

onde $\hat{C}(k)$ é dado por (7.2), é fácil ver (exercício 3) que

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} \hat{C}(k) = I^{(N)}(\lambda), \quad (7.11)$$

logo o estimador $\hat{f}(\lambda)$ coincide com o mesmo periodograma anterior.

7.2 - ESTIMADORES SUAVIZADOS DE COWARIÂNCIAS.

Do Teorema 4.1 vimos que

$$E\{I^{(N)}(\lambda)\} = (2\pi)^{-1} \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right) C(\tau) e^{-i\lambda\tau}. \quad (7.12)$$

Chamando

$$w(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{N}, & |\tau| \leq N-1 \\ 0, & |\tau| > N-1 \end{cases} \quad (7.13)$$

vemos que (7.12) é a transformada de Fourier do produto $w(\tau) \cdot C(\tau)$, logo temos

$$E\{I^{(N)}(\lambda)\} = \int_{-\pi}^{\pi} W(\alpha) f(\lambda - \alpha) d\alpha, \quad (7.14)$$

onde $W(\lambda)$ é a transformada de Fourier de $w(\tau)$, dada por

$$W(\lambda) = N \left[\frac{\text{sen} \pi N \lambda}{\pi N \lambda} \right]^2 \quad (7.15)$$

A equação (7.14) nos diz que o periodograma tem um valor esperado que corresponde a "olhar o espectro através da janela $W(\lambda)$." Como, para N grande, $W(\lambda)$ comporta-se como uma função δ , (7.14) também nos diz que $I^{(N)}(\lambda)$ é assintoticamente não viciado.

O procedimento de suavização foi introduzido por Bartlett, 1953. Suponhamos que dividamos a série de N pontos em K séries de comprimento $M = \frac{N}{K}$ e calculamos o periodograma $I_{\ell}^{(M)}(\lambda)$, $\ell = 1, \dots, K$, para cada sub-série. Depois tomamos

$$\overline{I}(\lambda) = \frac{1}{K} \sum_{\ell=1}^K I_{\ell}^{(M)}(\lambda), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (7.16)$$

Este é chamado o *periodograma suavizado de Bartlett*, na frequência λ . Pode-se provar facilmente (exercício 5) que

$$E\{\overline{I(\lambda)}\} = \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\alpha) f(\lambda - \alpha) d\alpha, \quad (7.17)$$

onde $W_M(\lambda)$ é a função (7.15) com $N=M$, transformada de Fourier de

$$w_M(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{M}, & |\tau| \leq M-1 \\ 0, & |\tau| > M-1, \end{cases} \quad (7.18)$$

$M < N$. $W_M(\lambda)$ é a *janela espectral de Bartlett* e está ilustrada na figura 7.1, enquanto que $w_M(\lambda)$ é o *núcleo ("lag Window")* de Bartlett.

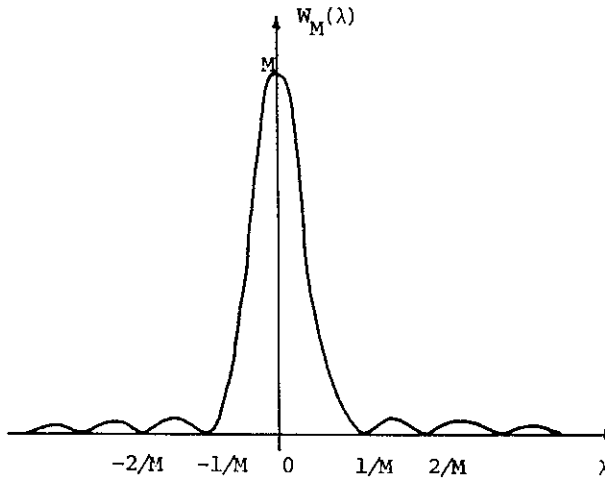


Figura 7.1

O procedimento acima sugere considerar estimadores espec
suavizados da forma

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} w_M(\tau) \hat{C}(\tau) e^{-i\lambda\tau}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi \quad (7.19)$$

onde, para um inteiro $M < N$, $w_M(\tau)$, $\tau=0, \pm 1, \dots$, é uma sequência de pesos satisfazendo:

- (i) $0 \leq w_M(\tau) \leq w_M(0) = 1$;
 - (ii) $w_M(-\tau) = w_M(\tau)$, para todo τ ;
 - (iii) $w_M(\tau) = 0$, $|\tau| > M$
- (7.20)

O estimador $\hat{f}(\lambda)$ é chamado *estimador suavizado de covariâncias*. A *janela espectral* correspondente à função peso (núcleo) $w_M(\tau)$ é definida por

$$W_M(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau} e^{-i\lambda\tau} w_M(\tau). \quad (7.21)$$

Segue-se que $W_M(\lambda)$ satisfaz:

- (i) $W_M(-\lambda) = W_M(\lambda)$, para todo λ ;
 - (ii) $\int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda) d\lambda = w_M(0) = 1$.
- (7.22)

De (7.19) obtemos que $\hat{f}(\lambda)$ é a convolução das transformadas de Fourier de $w_M(\tau)$ e $\hat{C}(\tau)$, isto é,

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda - \alpha) I^{(N)}(\alpha) d\alpha. \quad (7.23)$$

Tomando o valor esperado de (7.23) obtemos

$$E\{\hat{f}(\lambda)\} = \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda - \alpha) E\{I^{(N)}(\alpha)\} d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda - \alpha) f(\alpha) d\alpha. \quad (7.24)$$

Supondo a janela $W_M(\lambda)$ concentrada ao redor de $\lambda=0$ e $f(\lambda)$ constante sobre todo intervalo de frequência de comprimento comparável com a largura do pico da janela, podemos escrever

$$E\{\hat{f}(\lambda)\} = f(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\alpha) d\alpha = f(\lambda). \quad (7.25)$$

Sob estas mesmas condições, pode-se provar que

$$\text{Var}\{\hat{f}(\lambda)\} = \frac{2\pi}{N} f^2(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\alpha) d\alpha, \quad (7.26)$$

o que será feito na seção seguinte. A relação (7.26) vem do fato

$$\text{Cov}\{\hat{f}(\lambda), \hat{f}(\mu)\} = \frac{2\pi}{N} \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda-\alpha) [W_M(\mu-\alpha) + W_M(\mu+\alpha)] f^2(\alpha) d\alpha, \quad (7.27)$$

que por sua vez é obtida de (7.23). Ver Jenkins & Watts, 1968, página 412. A relação (7.27) mostra que a covariância entre os estimadores espectrais suavizados depende da intersecção entre as janelas espectrais centradas em λ e μ .

7.3 - ESTIMADORES SUAVIZADOS DE PERIODOGRAMAS

Consideremos a integral (7.23) substituída por suas somas de Riemann:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{2\pi}{N} \sum_{\nu=-[\frac{N-1}{2}]}^{[\frac{N-1}{2}]} W_M(\lambda-\lambda_\nu) I_\nu^{(N)}, \quad (7.28)$$

onde $\lambda_v = \frac{2\pi v}{N}$. Como $\frac{2\pi}{N} \sum_v W_M(\lambda_v) = \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda) d\lambda = 1$, temos que o estimador (7.23) é assintoticamente equivalente ao estimador

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{v=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} W(\lambda - \lambda_v) I_v^{(N)}, \quad (7.29)$$

onde $W(\lambda)$ é uma função peso real, par, periódica e tal que

$$\sum_{v=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} W(\lambda_v) = 1.$$

O estimador (7.29) é chamado *estimador suavizado de periodogramas*.

Um caso particular de (7.29) foi sugerido por Daniell, 1946, e consiste em tomar a média de n ordenadas do periodograma ao redor da frequência de interesse.

Se queremos calcular $\tilde{f}(\lambda)$ em $\lambda = \lambda_j = \frac{2\pi j}{N}$, consideramos, então,

$$\tilde{f}(\lambda_j) = \frac{1}{n} \sum I_v^{(N)}, \quad (7.30)$$

onde a soma é estendida de $v = j - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ a $j + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Como $I_v^{(N)}$ é assintoticamente não viciado, temos que

$$E\{\tilde{f}(\lambda)\} = \sum_v W(\lambda - \lambda_v) f(\lambda_v). \quad (7.31)$$

Vejamos a variância de $\tilde{f}(\lambda)$, que é assintoticamente a mesma que a variância de $\hat{f}(\lambda)$. Temos, de (7.29),

$$\text{Cov} \{ \tilde{f}(\lambda), \tilde{f}(\mu) \} = \sum_{r,s} W(\lambda - \lambda_r) W(\mu - \lambda_r) \text{Cov} \{ I_r^{(N)}, I_s^{(N)} \},$$

onde $\lambda_r = \frac{2\pi r}{N}$, $\lambda_s = \frac{2\pi s}{N}$. Como, para N grande, as ordenadas do periodograma são não correlacionadas, temos que

$$\begin{aligned} \text{Cov} \{ \tilde{f}(\lambda), \tilde{f}(\mu) \} &= 2W(\lambda)W(\mu) f^2(0) + \sum_{r \neq 0, \frac{N}{2}} N W(\lambda - \lambda_r) W(\mu - \lambda_r) f^2(\lambda_r) + \\ &+ 2W(\lambda - \pi) W(\mu - \pi) f^2(\pi), \end{aligned} \quad (7.32)$$

supondo N par.

Para $\lambda = \mu$, obtemos

$$\text{Var} \{ \tilde{f}(\lambda) \} = 2W^2(\lambda) f^2(0) + \sum_{r \neq 0, \frac{N}{2}} N W^2(\lambda - \lambda_r) f^2(\lambda_r) + 2W^2(\lambda - \pi) f^2(\pi). \quad (7.33)$$

Como $W(\lambda) = \frac{2\pi}{N} W_M(\lambda)$, substituindo as somas por integrais obtemos:

$$\begin{aligned} E \{ \tilde{f}(\lambda) \} &= \frac{2\pi}{N} \sum_{\nu} W_M(\lambda - \lambda_{\nu}) f(\lambda_{\nu}) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda - \alpha) f(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (7.34)$$

que coincide com a equação (7.24). Também,

$$\text{Cov} \{ \tilde{f}(\lambda), \tilde{f}(\mu) \} = \frac{2\pi}{N} \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda - \alpha) W_M(\mu - \alpha) f^2(\alpha) d\alpha, \quad (7.35)$$

para $\lambda, \mu \neq 0, \pi$. Para $\lambda = \mu$,

$$\text{Var} \{ \tilde{f}(\lambda) \} = \frac{2\pi}{N} \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\lambda - \alpha) f^2(\alpha) d\alpha. \quad (7.36)$$

Observemos que a expressão (7.36) é aproximadamente a mesma que (7.27), desprezando-se o termo que contém $W_M(\lambda-\alpha)W_M(\mu+\alpha)$ em (7.27) que é pequeno quando comparado com $W_M(\lambda-\alpha)W_M(\mu-\alpha)$, quando $\lambda=\mu$.

Fazendo-se agora a suposição já mencionada após (7.24), obtemos de (7.34) e (7.36) que

$$E\{\tilde{f}(\lambda)\} = f(\lambda), \quad (7.37)$$

$$\text{Var}\{\tilde{f}(\lambda)\} = \frac{2\pi}{N} f^2(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\alpha) d\alpha, \quad (7.38)$$

que são aquelas já mencionadas na seção anterior para $\tilde{f}(\lambda)$.

7.4 - DISTRIBUIÇÃO ASSINTÓTICA DOS ESTIMADORES SUAVIZADOS.

Consideremos, inicialmente, o estimador de Daniell, dado por (7.30). Suponha que N e n sejam suficientemente grandes, mas n é pequeno comparado com N , de modo que $f(\lambda)$ seja aproximadamente constante sobre intervalos de frequência de comprimento $\frac{2\pi n}{N}$. Pode-se demonstrar (ver problema 2) que

$$\begin{aligned} E\{\tilde{f}(\lambda_j)\} &= f(\lambda_j), \\ \text{Var}\{\tilde{f}(\lambda_j)\} &= f^2(\lambda_j)/n, \end{aligned} \quad (7.39)$$

para λ_j da forma $2\pi j/N$.

Para um j fixo, $\frac{I_v^{(N)}}{\tilde{f}(\lambda_j)/2}$ têm distribuição $\chi^2(2)$

e são independentes, para $j - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq v \leq j + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Supondo-se $\lambda_j \neq 0, \pi$ e $\frac{n}{N}$ suficientemente pequeno de modo que $v \neq 0, \left[\frac{N}{2} \right]$, vem que a soma

$$\sum_v I_v^{(N)} / 2f(\lambda_j),$$

para $j - \left[\frac{n-1}{2} \right] \leq v \leq j + \left[\frac{n}{2} \right]$, tem uma distribuição $\chi^2(2n)$.

De (7.30), segue-se que $\bar{f}(\lambda_j)$ tem uma distribuição

$\frac{f(\lambda_j)}{2n} \chi^2(2n)$, ou seja, podemos dizer que

$$\frac{2n\bar{f}(\lambda_j)}{f(\lambda_j)} \xrightarrow{\mathcal{E}} \chi^2(2n). \quad (7.40)$$

Voltemos agora, ao estimador suavizado (7.29), escrito na forma

$$\bar{f}(\lambda_j) = \frac{2\pi}{N} \sum_v W_M(\lambda_j - \lambda_v) I_v^{(N)}, \quad (7.41)$$

para $-\left[\frac{N-1}{2} \right] \leq v \leq \left[\frac{N}{2} \right]$. Se $f(\lambda)$ é aproximadamente constante sobre a largura do pico principal de $W_M(\lambda)$, então

$$\bar{f}(\lambda_j) = \frac{f(\lambda_j)\pi}{N} \sum_v W_M(\lambda_j - \lambda_v) U_v^{(N)}, \quad (7.42)$$

onde

$$U_v^{(N)} = \frac{I_v^{(N)}}{I_{j/2} \cdot f(\lambda_j)} \quad (7.43)$$

tem uma distribuição $\chi^2(2)$. Logo, por (7.42), $\bar{f}(\lambda_j)$ tem uma distribuição que (para M e N grandes) é uma combinação linear de variáveis $\chi^2(2)$ independentes. Como é difícil obter a distribuição desta v.a.

usamos uma aproximação, que consiste em supor que $\tilde{f}(\lambda_j)$ tenha uma distribuição $c \cdot \chi^2(r)$, onde c e r são determinados de modo que os dois primeiros momentos do estimador coincidam com os dois primeiros momentos da distribuição proposta. Temos:

$$E\{\tilde{f}(\lambda_j)\} = E[c\chi^2(r)] = cr,$$

$$\text{Var}\{\tilde{f}(\lambda_j)\} = \text{Var}[c\chi^2(r)] = 2c^2r.$$

Destas relações obtemos

$$c = \frac{\text{Var}\{\tilde{f}(\lambda_j)\}}{2 E\{\tilde{f}(\lambda_j)\}^2}, \quad (7.44)$$

$$r = \frac{2[E\{\tilde{f}(\lambda_j)\}]^2}{\text{Var}\{\tilde{f}(\lambda_j)\}}. \quad (7.45)$$

O parâmetro r é chamado *número equivalente de graus de liberdade* do estimador. De (7.37) e (7.38) obtemos facilmente que

$$r = \frac{2\{f(\lambda_j)\}^2}{f^2(\lambda_j) \frac{2\pi}{N} \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\alpha) d\alpha} = \frac{N}{\int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\alpha) d\alpha}. \quad (7.46)$$

Também,

$$\frac{\text{Var}\{\tilde{f}(\lambda_j)\}}{2E\{\tilde{f}(\lambda_j)\}^2} \cdot \frac{2[E\{\tilde{f}(\lambda_j)\}]^2}{\text{Var}\{\tilde{f}(\lambda_j)\}} = f(\lambda_j),$$

de modo que

$$c = \frac{f(\lambda_j)}{r}. \quad (7.47)$$

Como, assintoticamente, $\frac{2\pi}{N} W_M(\lambda) \approx W(\lambda)$, temos que

$$r = \frac{2}{\sum_v W^2(\lambda_v)} \quad (7.48)$$

onde a soma é sobre $-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor \leq v \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$.

Concluimos, portanto, que $\hat{f}(\lambda_j)$ (ou $\hat{f}(\lambda_j)$) tem uma distribuição aproximada $\frac{\hat{f}(\lambda_j)}{r} \chi^2(r)$, onde r é dado por (7.46) ou (7.48).

7.5 - INTERVALOS DE CONFIANÇA.

Vamos nos referir, no que segue, a $\hat{f}(\lambda)$ mas tudo aplica-se, é claro, a $\hat{f}(\lambda)$.

Como $r\hat{f}(\lambda)/f(\lambda)$ tem uma distribuição aproximada $\chi^2(r)$, fixado um coeficiente de confiança γ , $0 < \gamma < 1$, podemos determinar dois números a e b tais que

$$P \{ a \leq \frac{r\hat{f}(\lambda)}{f(\lambda)} \leq b \} = \gamma. \quad (7.49)$$

Os números a e b são escolhidos como os quantis $\xi_{\alpha/2}$ e $\xi_{1-\alpha/2}$ da distribuição $\chi^2(r)$, com $\gamma = 1 - \alpha$ (Figura 7.2)

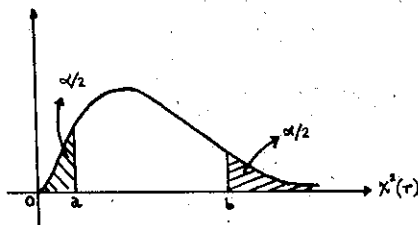


Figura 7.2

De (7.49) obtemos

$$P \left\{ \frac{r\tilde{f}(\lambda)}{b} \leq f(\lambda) \leq \frac{r\tilde{f}(\lambda)}{a} \right\} = \gamma \quad (7.50)$$

do que decorre que $[r\tilde{f}(\lambda)/b, r\tilde{f}(\lambda)/a]$ é um intervalo de confiança para $f(\lambda)$ com coeficiente de confiança γ .

O comprimento deste intervalo é

$$L = \frac{r\tilde{f}(\lambda)}{a} - \frac{r\tilde{f}(\lambda)}{b} = r\tilde{f}(\lambda) \frac{b-a}{ab},$$

que depende de $\tilde{f}(\lambda)$, portanto é uma v.a. Se queremos L constante, basta tomar logaritmos. De fato, de (7.50) temos

$$\log \frac{r}{b} + \log \tilde{f}(\lambda) \leq \log f(\lambda) \leq \log \frac{r}{a} + \log \tilde{f}(\lambda), \quad (7.51)$$

que é um intervalo de confiança com coeficiente de confiança γ para $\log f(\lambda)$. O comprimento do intervalo fica

$$\log \frac{r}{a} - \log \frac{r}{b} = \log \frac{b}{a}.$$

7.6 - EXEMPLOS.

Nesta seção apresentamos dois exemplos de estimadores suavizados.

EXEMPLO 7.1 - A figura 7.3 mostra o estimador suavizado de covariâncias para a série de temperaturas a 110 metros (figura 2.10), Fase 2, do GATE, com $N=21$ observações (ver capítulo 2). O estimador (7.19) é calculado para três valores do ponto de truncamento, M : $M=10, M=14$ e $M=18$. Além disso, a frequência está dada em ciclos por dia. Os

espectros estimados foram obtidos utilizando-se o programa BMD-02T com uma janela espectral de Tukey. Para este caso, os números de graus de liberdade, calculados segundo (7.46) são, respectivamente, $r=6$, $r=4$ e $r=3$. Como temos poucas observações, há grande imprecisão na determinação das frequências prováveis, contudo vê-se que há cinco faixas de frequências dominantes. Ver Mesquita e Morettin, 1978, para detalhes.

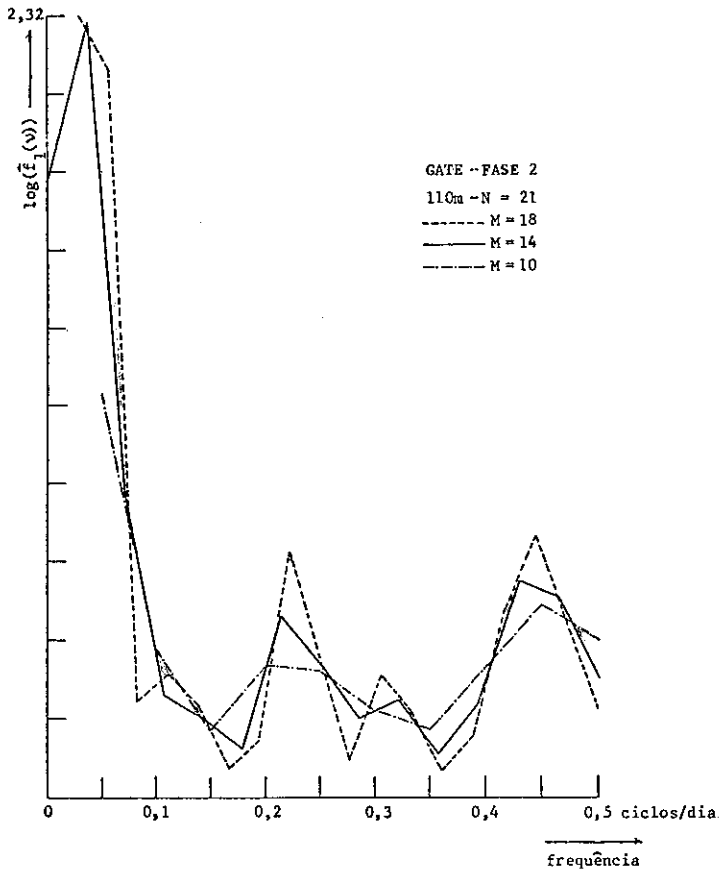


Figura 7.3

EXEMPLO 7.2 - Na figura 7.4 temos um estimador espectral usando (7.29), para uma função $W(\lambda)$ particular. O estimador apresentado corresponde a um ano de observações horárias de alturas de marés no porto de Cananéia, São Paulo (conforme Franco & Rock, 1971). Cada pico corresponde a uma componente de maré: D=diurna, SD=semi-diurna, etc. A frequência é dada em ciclos por dia.

Este é um exemplo em que vemos picos emergindo de um espectro contínuo, que é devido ao ruído subjacente, particularmente em frequências baixas. Um modelo razoável é o seguinte: supomos que o processo de marés é a superposição de um processo fortemente determinístico e de um processo aleatório suposto ergódico, estacionário e de média zero. Usualmente, o primeiro é suposto ser uma função quase-periódica e o segundo Gaussiano.

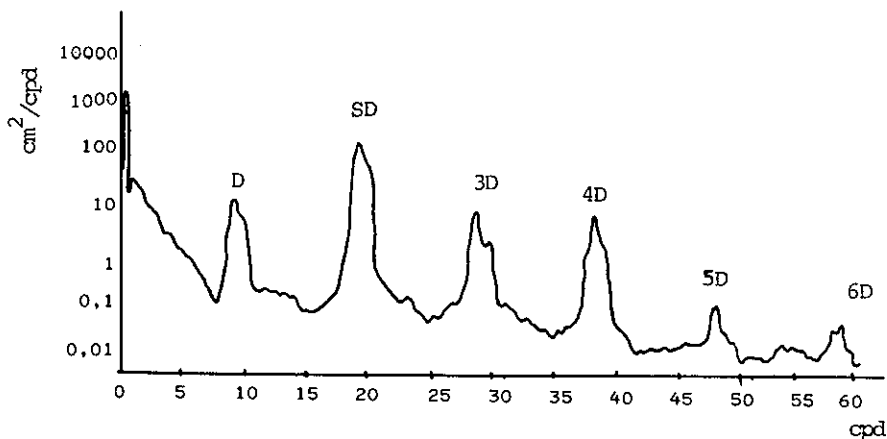


Figura 7.4

7.7 - EXERCÍCIOS

- 1 - Seja $X(t)$ uma série estacionária, de média zero e densidade espectral $f(\omega)$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Passe $X(t)$ por um filtro linear com função de transferência $A(\omega)$, passa-banda, com faixa de passagem $\Delta\omega$ ao redor da frequência ω' . Prove que a variância da série de saída é aproximadamente $f(\omega')$.
- 2 - Prove as relações (7.39). (Sugestão: Suponha n suficientemente pequeno e N suficientemente grande de modo que $f(\lambda)$ seja constante sobre todo intervalo de frequências de comprimento $2\pi n/N$).
- 3 - Prove a relação (7.11).
- 4 - Prove que (sob certas condições de regularidade) $\exp\{-I^{(N)}(\lambda)/f(\lambda)\}$ tende em distribuição para uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$, quando $N \rightarrow \infty$.
- 5 - Prove a relação (7.17).
- 6 - Uma sequência de núcleos $\{w_M(\tau)\}$ pode ser gerada escalando-se, uma função contínua $w(u)$ como segue. Seja $w(u)=0$, $|u|>1$. Defina

$$w_M(\tau) = w(\tau/M).$$

Se $w(u)$ é par e $0 \leq w(u) \leq w(0)=1$, para $|u| < 1$, este núcleo tem as propriedades (7.20).

(a) Prove que

$$2\pi \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\lambda) d\lambda = M \int_{-1}^1 w^2(u) du.$$

(b) Prove que

$$\text{Var} \{ \hat{f}(\lambda) \} = f^2(\lambda) c_w M/N,$$

onde $c_w = \int_{-1}^1 w^2(u) du.$

7 - Um estimador suavizado de covariâncias é calculado com N=500 pontos, núcleo

$$w_M(k) = \begin{cases} 1, & |k| \leq M \\ 0, & |k| > M \end{cases}$$

e o valor de M usado foi 50. Supondo $\hat{f}(\lambda')=20$, obtenha um intervalo de confiança para $f(\lambda')$ com $\gamma=0,95$.

8 - Provar a relação (7.27).

9 -

Nº realização \ t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
1	0,64	0,74	0,62	0,59	0,35	-0,09	-0,39
2	0,54	0,37	0,06	-0,32	-0,60	-0,69	-0,67
3	0,34	0,50	0,37	0,26	-0,52	-0,72	0,42
4	0,23	0,26	0,35	0,55	0,69	0,75	0,80
5	0,12	0,20	0,24	0,18	-0,20	-0,42	-0,46
6	-0,16	-0,12	-0,15	0,05	0,29	0,43	0,63
7	-0,22	-0,29	-0,38	-0,24	-0,06	0,07	-0,16
8	-0,26	-0,69	-0,70	-0,61	-0,43	-0,22	0,29
9	-0,50	-0,60	-0,68	-0,62	-0,68	-0,56	-0,54
10	-0,30	0,13	0,75	0,84	0,78	0,73	0,71
11	-0,69	-0,40	0,08	0,16	0,12	0,18	0,33
12	0,18	-0,79	-0,56	-0,39	-0,42	-0,58	-0,53

Temos, na página 167 (tabela), os valores do processo estocástico $X(t)$ para 12 realizações e $t = 0; 0,4; 0,8; 1,2; 1,6; 2,0; 2,4$. Supondo $X(t)$ estacionário:

- a) Estimar $E[X(t)]$ e $\text{Var}[X(t)]$
- b) Estimar $C(\tau)$.

REFERÊNCIAS

- [1] - Bartlett, M.S., *An introduction to stochastic processes with special reference to methods and applications*, Cambridge, University Press, 1953.
- [2] - Box, G.E.P. & Jenkins, G.M., *Time Series Analysis Forecasting and Control*, San Francisco, Holden-Day, 1976, Revised Edition, 575 p.
- [3] - Brillinger, D.R., *Time-series - Data analysis and theory*, New York, Holt, Rinehart & Winston, Inc., 1975, 500 p.
- [4] - Chung, K.L., *A course in probability theory*, New York, Brace & World, 1968, 331 p.
- [5] - Cooley, J.W. & Tukey, J.W., An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math. Comput.*, Vol. 19, 1965, pp. 297-301.
- [6] - Cramér, H., On harmonic analysis in certain functional spaces, *Ark. Mat. Astron. Fys.*, Vol. 283, 1942, 17 pp.
- [7] - Cramér, H., A Contribution to the theory of stochastic processes, *Proc. Symp. Math. Statistic. and Probab.*, 2nd, Berkeley, Unif. of California Press, 1950, pp. 329-339.
- [8] - Cramér, H. & Leadbetter, H.R., *Stationary and related stochastic processes*, New York, John Wiley and Sons, 1967, 348 p.
- [9] - Daniell, P.J., Discussão do artigo "On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time series, por M.S. Bartlett, *J. Royal Statistical Soc. suppl.*, Vol. 8, 1946. pp. 27-41.
- [10] - Fernandez, P.J., *Introdução aos processos estocásticos*, Rio de Janeiro, IMPA, 1975, 139 p.
- [11] - Figueiredo, D.G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro, IMPA, 1977, 274 p.
- [12] - Franco, A.S. & Rock, N.J., *The fast Fourier transform and its applications*

to tidal oscillations, *Bol. Inst. Oceanog.*, São Paulo, Vol. 20, 1971, pp. 145-199.

- [13] - Fuller, W.A., *Introduction to statistical time series analysis*, New York, John Wiley and Sons, 1976, 470 p.
- [14] - Gnedenko, B.V., *The theory of probability*, New York, Chelsea, 1962.
- [15] - Jenkins, G.M. & Watts, D.G., *Spectral Analysis and its applications*, S. Francisco, Holden-Day, 1968, 525 p.
- [16] - Khintchine, A., Mathematisches über die erwartung von ein öffentlichen Schaffer (em Russo, sumário em Alemão), *Mat. Sbornik*, Vol. 39, 1973, p.73.
- [17] - Khintchine, A., Korrelations theorie der stationare stochastischen processe, *Math. Ann.*, Vol. 109, 1934, pp. 604-615.
- [18] - Kolmogorov, A.N., Stationary sequences in Hilbert space (em Russo), *Bull. Math. Univ. Moscow*, Vol. 2, 1941, 40 pp.
- [19] - Koopmans, L.H., *The spectral analysis of time series*, New York, Academic Press, 1974, 366 p.
- [20] - Lighthill, M.J., *Introduction to Fourier analysis and generalised functions*, Cambridge, at the University Press, 1964, 79 p.
- [21] - Mesquita, A.R. & Morettin, P.A., Análise de séries temporais oceanográficas com pequeno número de observações. *Atas do 3º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*, São Paulo, IME-USP, 1979, pp. 165-173.
- [22] - Parzen, E., *Time series analysis papers*, San Francisco, Holden-Day, 1967, 565 p.
- [23] - Rao, C.R., *Linear statistical inference and its applications*, New York, John Wiley & Sons, 2ª Edição, 1973, 625 p.
- [24] - Rudin, W., *Principles of Mathematical analysis*, New York, McGraw-Hill Book Company, 1964, 270 p.
- [25] - Schuster, A., On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26-day period of meteorological phenomena, *Terr. Magn.*, Vol. 3, 1898, pp. 13-41.
- [26] - Schuster, A., On the periodicities of sunspots, *Trans. Roy. Soc. London*, Vol. 206, 1906, pp. 69-100.

- [27] - Tolstov, G.P., *Fourier series*, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1962, 336p.
- [28] - Tukey, J.W., An introduction to the measurement of spectra, in *Probability & Statistics* (Ed. U. Grenander), New York, John Wiley and Sons, 1959, pp. 300-330.
- [29] - Tukey, J.W., An introduction to the calculations of numerical spectrum analysis, in *Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series* (Ed. B. Harris), New York, John Wiley and Sons, 1967, pp. 25-46.
- [30] - Wainstein, L.A. & Zubakov, V.D., *Extraction of Signal from Noise*, New York, Dover, 1962, 382 p.
- [31] - Wiener, N., Generalized harmonic analysis, *Acta Math.*, Vol. 55, 1930, pp. 117-258.
- [32] - Yaglom, A.M., *An introduction to the theory of stationary random Functions*, New Jersey, Prentice-Hall, 1962, 235 p.
- [33] - Otnes, R.K. & Enochson, L., *Applied Time Series Analysis*, Vol. 1, New York, John Wiley and Sons, 1978, 449 p.

APÊNDICE

TABELA A.1
TEMPERATURA EM SÃO PAULO
(Média de 24 leituras diárias)

ANOS MESES	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Janeiro	-	20,6	20,5	20,8	21,9	22,1	21,1	23,4	21,3
Fevereiro	-	20,9	20,7	20,1	20,7	21,5	21,9	21,2	20,4
Março	-	20,6	20,0	20,5	20,9	21,0	20,7	20,3	20,4
Abril	-	18,8	15,9	17,1	18,1	18,3	18,6	18,1	18,1
Maiο	-	17,5	15,7	16,7	16,9	16,5	15,7	15,1	15,9
Junho	-	16,1	14,6	15,2	15,5	16,3	14,9	13,5	15,0
Julho	14,5	14,7	13,2	14,8	13,3	15,7	14,7	14,0	-
Agosto	15,6	17,0	14,0	16,8	15,8	16,2	15,5	13,6	-
Setembro	16,0	17,0	16,3	17,9	17,8	17,7	16,6	17,6	-
Outubro	17,7	16,9	17,5	18,0	18,4	17,7	16,4	17,0	-
Novembro	17,6	17,8	19,0	19,1	18,6	18,5	16,9	16,7	-
Dezembro	19,6	19,9	18,4	19,8	19,4	19,6	20,2	19,1	-

FONTE: IAG-USP.

TABELA A.2
SÉRIES DE MANCHAS SOLARES DE WOLFER, 1749-1924

Ano	Número de Wolfer	Ano	Número de Wolfer	Ano	Número de Wolfer	Ano	Número de Wolfer
1749	80,9	1793	46,9	1837	138,3	1881	54,3
1750	83,4	1794	41,0	1838	103,2	1882	59,7
1751	47,7	1795	21,3	1839	85,8	1883	63,7
1752	47,8	1796	16,0	1840	63,2	1884	63,5
1753	30,7	1797	6,4	1841	36,8	1885	52,2
1754	12,2	1798	4,1	1842	24,2	1886	25,4
1755	9,6	1799	6,8	1843	10,7	1887	13,1
1756	10,2	1800	14,5	1844	15,0	1888	6,8
1757	32,4	1801	34,0	1845	40,1	1889	6,3
1758	47,6	1802	45,0	1846	61,5	1890	7,1
1759	54,0	1803	43,1	1847	98,5	1891	35,6
1760	62,9	1804	47,5	1848	124,3	1892	73,0
1761	85,9	1805	42,2	1849	95,9	1893	84,9
1762	61,2	1806	28,1	1850	66,5	1894	78,0
1763	45,1	1807	10,1	1851	64,5	1895	64,0
1764	36,4	1808	8,1	1852	54,2	1896	41,8
1765	20,9	1809	2,5	1853	39,0	1897	26,2
1766	11,4	1810	0,0	1854	20,6	1898	26,7
1767	37,8	1811	1,4	1855	6,7	1899	12,1
1768	69,8	1812	5,0	1856	4,3	1900	9,5
1769	106,1	1813	12,2	1857	22,8	1901	2,7
1770	100,8	1814	13,9	1858	54,8	1902	5,0
1771	81,6	1815	35,4	1859	93,8	1903	24,4
1772	66,5	1816	45,8	1860	95,7	1904	42,0
1773	34,8	1817	41,1	1861	77,2	1905	63,5
1774	30,6	1818	30,4	1862	59,1	1906	53,8
1775	7,0	1819	23,9	1863	44,0	1907	62,0
1776	19,8	1820	15,7	1864	47,0	1908	48,5
1777	92,5	1821	6,6	1865	30,5	1909	43,9
1778	154,4	1822	4,0	1866	16,3	1910	18,6
1779	125,9	1823	1,8	1867	7,3	1911	5,7
1780	84,8	1824	8,5	1868	37,3	1912	3,6
1781	68,1	1825	16,6	1869	73,9	1913	1,4
1782	38,5	1826	36,3	1870	139,1	1914	9,6
1783	22,8	1827	49,7	1871	111,2	1915	47,4
1784	10,2	1828	62,5	1872	101,7	1916	57,1
1785	24,1	1829	67,0	1873	66,3	1917	103,9
1786	82,9	1830	71,0	1874	44,7	1918	80,6
1787	132,0	1831	47,8	1875	17,1	1919	63,6
1788	130,9	1832	27,5	1876	11,3	1920	37,6
1789	118,1	1833	8,5	1877	12,3	1921	26,1
1790	89,9	1834	13,2	1878	3,4	1922	14,2
1791	66,6	1835	56,9	1879	6,0	1923	5,8
1792	60,0	1836	121,5	1880	32,3	1924	16,7

TABELA A.3

DADOS HORÁRIO DO MAREGRAMA DE UBATUBA,
1 A 5 DE NOVEMBRO DE 1972

HORA	D I A .					HORA	D I A				
	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
1	1,79	1,84	2,23	2,25	2,16	13	1,89	1,94	2,17	2,10	2,06
2	1,76	1,87	2,17	2,18	2,17	14	1,85	1,96	2,07	2,04	2,04
3	1,56	1,59	2,02	2,07	2,07	15	1,68	1,90	1,96	1,93	1,88
4	1,32	1,45	1,93	1,93	1,86	16	1,46	1,72	1,85	1,30	1,76
5	1,33	1,45	1,72	1,74	1,67	17	1,46	1,58	1,63	1,61	1,52
6	1,21	1,20	1,58	1,55	1,57	18	1,35	1,49	1,46	1,41	1,38
7	1,24	1,24	1,45	1,40	1,38	19	1,43	1,50	1,38	1,30	1,24
8	1,44	1,33	1,44	1,34	1,31	20	1,47	1,55	1,37	1,20	1,12
9	1,60	1,45	1,51	1,33	1,30	21	1,67	1,77	1,49	1,26	1,15
10	1,74	1,73	1,81	1,56	1,39	22	1,79	1,99	1,72	1,44	1,24
11	1,87	1,96	2,04	1,84	1,60	23	1,92	2,13	1,99	1,73	1,59
12	1,88	1,91	2,16	2,09	1,93	24	1,93	2,26	2,20	2,02	1,90

TABELA A.4

ANÁLISE DE FOURIER DOS DADOS DE MARÉ DA TABELA A.3

n	A _n	B _n	R _n	φ _n (°)	CONTR. AO Q.M.
0	1,7007	0,0000	1,7007	0,00	2,8923
1	-0,1158	0,0026	0,1159	178,74	0,0067
2	0,0319	-0,0283	0,0427	318,44	0,0009
3	-0,0052	0,0248	0,0254	101,92	0,0003
4	-0,0647	0,0102	0,0654	171,06	0,0021
5	0,0390	0,0035	0,0395	5,03	0,0008
6	0,0225	-0,0081	0,0239	340,09	0,0003
7	-0,0040	-0,0005	0,0040	186,70	0,0000
8	-0,0116	0,0130	0,0174	131,82	0,0001
9	-0,0719	0,0246	0,0760	161,09	0,0029
10	0,3793	0,0234	0,3801	3,53	0,0722
11	0,0698	-0,0296	0,0758	337,03	0,0029
12	0,0575	-0,0034	0,5760	356,60	0,1658
13	0,0493	-0,0086	0,0500	350,08	0,0012
14	0,0369	-0,0098	0,0382	345,07	0,0007
15	0,0252	0,0028	0,0254	6,42	0,0003
16	0,0405	-0,0026	0,0405	356,29	0,0008
17	0,0302	-0,0098	0,0317	342,07	0,0005
18	0,0173	-0,0008	0,0173	357,27	0,0001
19	0,0471	0,0383	0,0607	39,15	0,0018
20	0,0456	-0,0273	0,0531	329,10	0,0014
21	0,0261	-0,0197	0,0327	322,99	0,0005
22	0,0204	-0,0054	0,0211	345,29	0,0002
23	0,0210	0,0027	0,0212	7,39	0,0002
24	0,0187	-0,0177	0,0258	316,61	0,0003
25	0,0232	-0,0072	0,0243	342,84	0,0003
26	0,0175	0,0021	0,0176	6,96	0,0002
27	0,0307	-0,0032	0,0309	354,09	0,0005
28	0,0250	-0,0146	0,0289	329,71	0,0004
29	0,0280	-0,0004	0,0280	359,19	0,0004
30	0,0185	0,0075	0,0200	22,07	0,0002
31	0,0258	-0,0019	0,0259	355,86	0,0003
32	0,0233	-0,0109	0,0257	334,93	0,0003
33	0,0080	-0,0003	0,0080	357,82	0,0000
34	0,0210	0,0009	0,0210	2,38	0,0002
35	0,0288	-0,0022	0,0289	355,71	0,0004
36	0,0117	0,0030	0,0120	14,36	0,0000
37	0,0148	0,0080	0,0168	28,38	0,0001
38	0,0342	0,0000	0,0344	0,02	0,0006
39	0,0245	-0,0068	0,0254	344,60	0,0003
40	0,0056	0,0071	0,0090	51,71	0,0000

TABELA A.4 - conclusão

ANÁLISE DE FOURIER DOS DADOS DE MARÉ DA TABELA A.3

n	A_n	B_n	R_n	$\phi_n (^{\circ})$	CONTR.AO Q.M.
41	0,0046	0,0041	0,0061	41,56	0,0000
42	0,0253	-0,0083	0,0266	341,90	0,0004
43	0,0173	-0,0095	0,0197	331,17	0,0002
44	0,0147	0,0072	0,0164	25,97	0,0001
45	0,0141	0,0012	0,0142	4,73	0,0001
46	0,0217	-0,0149	0,0263	325,62	0,0004
47	0,0126	-0,0036	0,0131	343,88	0,0000
48	0,0173	0,0110	0,0204	32,41	0,0002
49	0,0271	0,0042	0,0274	8,86	0,0003
50	0,0122	-0,0104	0,0160	319,48	0,0001
51	0,0106	-0,0052	0,0119	333,90	0,0000
52	0,0285	0,0089	0,0299	17,26	0,0004
53	0,0301	-0,0045	0,0304	351,45	0,0005
54	0,0198	-0,0018	0,0198	354,84	0,0002
55	0,0133	0,0108	0,0171	38,99	0,0001
56	0,0360	-0,0034	0,0308	353,62	0,0005
57	0,0245	-0,0066	0,0254	344,92	0,0003
58	0,0089	-0,0086	0,0123	315,93	0,0000
59	0,0259	0,0039	0,0262	8,54	0,0004
60	0,0283	-0,0000	0,0283	360,00	0,0008

ANÁLISE HARMÔNICA DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

E R R A T A

Pedro A. Morettin

PÁGINA	LINHA	ONDE ESTÁ	DEVE SER
v	14 ↓	Processos Estocástico	Processo Estocástico
vi	2 ↓	ALIASING	"ALIASING"
1	4 ↓	análise de Fourier	Análise de Fourier
6	12 ↓	(.17)	(1.7)
9	7 ↓	$[E(X)]^2 = E(X^2)$	$[E(X)]^2 \leq E(X^2)$
12	11 ↓	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$
13	4 ↑	é integrável do	é integrável no
22	9 ↑	o estudo de	o estudo a
26	2 ↑	$= \sum a_j a_j$	$= \sum a_j a_k$
27	5 ↑	$ \Sigma\{ x(0) \}^2$	$ E[x(0)] ^2$
41	14 ↓	v.a.independentes	v.a.independente
45	9 ↑	é a chamada	é chamada
46	10 ↑	$T = n = 0,$	$T, n = 0$
52	8 ↓	$x: a, b \rightarrow R$	$x:[a, b] \rightarrow R$
55	10 ↓	, então aproximamos	. Então aproximamos
60	13 ↑	$(2\pi)^{-1} \int e^{it\omega} x(t) dt$	$(2\pi)^{-1} \int e^{-it\omega} x(t) dt$
61	2 ↓	diferencial	diferenciável
72	9 ↓	$\frac{a}{2} \{ \delta(\omega - \frac{1}{\Delta}) + \delta(\omega + \frac{1}{\Delta}) \}$	$\frac{a}{2} \{ \delta(\omega - \frac{1}{\Delta}) + \delta(\omega + \frac{1}{\Delta}) \}$
96	7 ↑	$= (2\pi)^{-1} \int h(u) e^{-i\omega u} dv$	$= (2\pi)^{-1} \int h(u) e^{-i\omega u} du$
103	2 ↓	levada efeito	levada a efeito
107	7 ↑	para $\psi(\omega) + \psi(\omega)$	para $\psi(\omega) + \theta(\omega)$

PÁGINA	LINHA	ONDE ESTÁ	DEVE SER
108	3 ↓	$Y(t) = X(t)$	$Y(t) = \mathfrak{F}[X(t)]$
129	3 ↓	obtemos a f.d.	obtemos que a f.d.
131	4 ↓	$w_N = \frac{\pi}{\Delta t} > \Delta$	$w_N = \frac{\pi}{\Delta t} > \Omega$
137	6 ↑	$d_v^{(N)} = (2\pi N)^{1/2}$	$d_v^{(N)} = (2\pi N)^{-1/2}$
138	4 ↓	$E\{dZ(\omega)\overline{dZ(\alpha)}\}$	$E\{dZ(\omega)\overline{dZ(\alpha)}\}$
139	1 ↓	$E\{dZ(\alpha)\overline{dZ(\beta)}\}$	$E\{dZ(\alpha)\overline{dZ(\beta)}\}$
143	4 ↑	$\text{Cov } I^{(N)}(\lambda), I^{(N)}(\mu)$	$\text{Cov}\{I^{(N)}(\lambda), I^{(N)}(\mu)\}$
144	9 ↑	$T = (r_1 + \dots + r_m)$	$T = N(r_1 + \dots + r_m)$
155	1 ↓	estimadores espec	estimadores espectrais