Introdução à Teoria dos Grafos

Cláudio Leonardo Lucchesi

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Rua Luiz de Camões, 68
20.060 - Rio de Janeiro - RJ

ÍNDICE

PREFÁCIO

Apresentamos aqui alguns dos aspectos fundamentais da teoria dos grafos, a saber, conexidade, emparelhamentos, coloração, grafos eulerianos e hamiltonianos.

Os exercícios ao fim de cada capítulo complementam o texto, esperamos que dêem ao leitor um pouco mais exigente a profundidade desejada; nas notas ao fim de cada capítulo procuramos dar o devido crédito pela autoria dos vários resultados e eventualmente mencionamos livros e/ou artigos de interesse para o leitor mais entusiasmado.

Gostaríamos de agradecer a Comissão Organizadora do 12º Colóquio pela oportunidade que nos concedeu, bem como agradecer também o "Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada", pois parte do livro foi escrito quando de nossa permanência como professor visitante no Departamento de Combinatória e Otimização da Universidade de Waterloo.

Somos particularmente gratos a Daniel H. Younger, por despertar o nosso interesse pelo assunto e pelo incentivo incansável, a Imre Simon pelo apoio constante e pela leitura cuidadosa de partes do livro. Finalmente, nossos agradecimentos ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira pelo esmerado trabalho de datilografia e arte gráfica.

UNICAMP, julho de 1979

Cláudio L. Lucchesi

CAPÍTULO I

GRAFOS

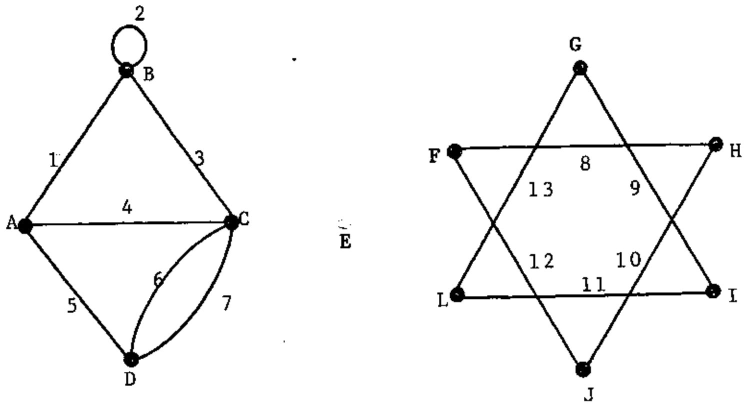
1.1 - ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS

Muitas situações podem ser convenientemente descritas através de diagramas que consistem de um conjunto de pontos, juntamente com linhas que ligam alguns pares destes pontos. Por exemplo, os pontos podem representar pessoas, as linhas ligam pares de amigos; os pontos podem representar centros de comunicações, as linhas ligações entre os centros. A abstração matemática de situações desse tipo dá lugar ao conceito de grafo.

Um *grafo* G consiste de um conjunto finito VG de elementos chamados *vértices*, um conjunto finito aG de elementos chamados *arestas*, e uma *função de incidência* ψG que associa a cada aresta α de G um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de G, chamados de *extremos* de α (figura 1).

Grafos podem ser representados por diagramas, onde cada vértice é representado por um ponto e cada aresta por uma linha ligando os pontos que representam seus extremos.

Muitos termos utilizados na teoria dos grafos advêm da representação em diagramas. Assim, os extremos de uma aresta são *incidentes* à aresta, e vice-versa. Os extremos de uma aresta são *adjacentes* (mesmo que coincidam); são *adjacentes* também arestas com pelo me-



Grafo Z: VZ = {A,B,...,L}

aZ = {1,2,...,13}

α	ψZ(α)
1	{A,B}
2	{B}
3	{B,C}
4	{A,C}
5	{A,D}
6	{C,D}
7	{C,D}
8	{F,H}
9	{G,I}
10	{H,J}
11	{I,L}
12	{F,J}
13	{G,L}

Figura 1 - Um grafo, Z, e uma de suas representações em diagrama.

nos um extremo em comum. Para X um subconjunto de VG, AdjG(X) denota o conjunto dos vértices de G adjacentes a pelo menos um dos vértices de X. Uma aresta é um *laço* se seus extremos coincidem, uma *ligação* caso contrário. No caso do grafo Z da Figura 1, a aresta 2 é um laço, as demais são ligações; se X denota o conjunto {B,F,I,J}, então $\mathrm{Adj}Z(X) = VZ \setminus \{D,E,I\}$.

O *tamanho* de um grafo G é o inteiro $|VG| + |aG|$, ou seja, é a soma do número de vértices com o número de arestas de G. O grafo *vazio* é o grafo de tamanho zero, sem arestas nem vértices.

O *grau* $gG(v)$ de um vértice v num grafo G é o número de arestas que incidem em v, onde os laços são contados duas vezes. Da definição segue imediatamente a

PROPOSIÇÃO 1 - A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas do grafo.

COROLÁRIO - Em todo grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

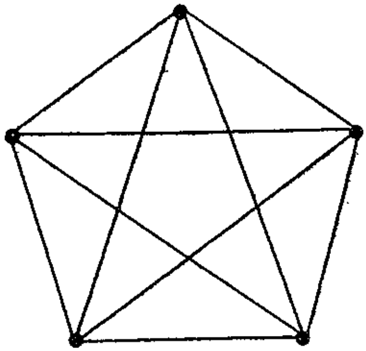
Usaremos normalmente a letra G para designar um grafo; assim, quando não houver possibilidade de ambigüidade, omitiremos a letra G e escreveremos, por exemplo, V, a, ψ e Adj, no lugar de VG, aG, ψG e AdjG, respectivamente.

No restante desta seção apresentamos um conjunto básico de definições. Convidamos o leitor a ler as demais seções, voltando a esta à medida que necessitar das definições.

TIPOS DE GRAFOS

Grafo simples é aquele que não contém laços nem duas ligações distintas com o mesmo par de extremos.

Grafo completo é um grafo simples em que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. A figura abaixo ilustra um grafo completo com cinco vértices.



Triângulo é um grafo completo com três vértices.

Grafo regular é aquele cujos vértices têm todos o mesmo grau. Caso haja necessidade de explicitar o grau comum, g, dizemos então que G é *g-regular*.

Grafo bipartícionável - Uma *bipartição* de um grafo G é um par $\{X,Y\}$ tal que $X \cup Y = VG$, $X \cap Y = \emptyset$ e cada aresta de X tem um extremo em X, o outro em Y. Um grafo é *bipartícionável* se admite uma bipartição.

n-cubo - Um *n-cubo* é um grafo simples cujos vértices são as n-uplas ordenadas sobre o conjunto $\{0,1\}$, e no qual dois vértices são adjacentes se e somente se diferem em exatamente uma coordenada; um *cubo* é um 3-cubo.

SUBGRAFOS

Subgrafo - Um grafo H é um *subgrafo* de outro G ($H \subseteq G$) se VG inclui VH, aG inclui aH e para toda aresta de H seus extremos em H são também seus extremos em G.

Subgrafo próprio - H é um subgrafo *próprio* de G ($H \subsetneq G$) se H for um subgrafo de G, porém distinto de G.

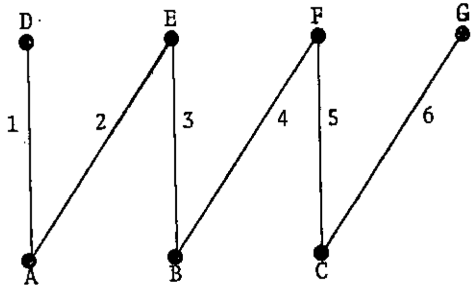
Subgrafo gerado - Se X é um subconjunto de V, então G[X] denota o subgrafo de G *gerado* por X: é o subgrafo H de G tal que VH = X e aH é o conjunto das arestas que têm ambos os extremos em X. Se x é um subconjunto de aG, então G[x] denota o subgrafo de G gerado por x: é o subgrafo H de G tal que aH = x e VH é o conjunto dos vértices que são extremos de arestas em x. Se Z é um subconjunto de VG e v um vértice em VG então G - Z abrevia G[VG\Z] e G - v abrevia G - {v}. Se z é um subconjunto de aG e α é uma aresta em aG então G - z é o subgrafo gerador de G que tem aG\z como conjunto de arestas e G - α abrevia G - {α}.

Subgrafo gerador - Um grafo H *gera* outro G se H⊆G e G = G[VH]. Grafo H é um subgrafo *gerador* de G se H gera G. Assim, um grafo H gera G se e somente se H⊆G e VH = VG.

MAXIMALIDADE E MINIMALIDADE

Máximo, mínimo, maximal, minimal - Dado um conjunto C de conjuntos, dizemos que um conjunto m em C é *máximo* em C se nenhum conjunto em C tem cardinalidade maior do que a de m; analogamente, um conjunto m' de C é *mínimo* em C se nenhum conjunto em C tem cardinalidade menor do que a de m'. Por exemplo, considere como C o conjunto dos emparelhamentos do grafo G indicado na figura a seguir (um *emparelhamento* de G é um conjunto de ligações de G duas a duas não adjacentes); nem o emparelhamento {2} nem o emparelhamento {2,5} são máximos em C; os emparelhamentos {1,3,5} e {1,3,6} são ambos máximos em C; o emparelhamento vazio é o único mínimo em C.

Por outro lado, dizemos que um conjunto m em C é *maximal* em C se nenhum conjunto em C inclui propriamente m; analogamente, um conjunto m' em C é



minimal se nenhum conjunto em C é um subconjunto próprio de m'. Utilizando ainda o conjunto C do exemplo anterior, nem o emparelhamento {2} nem o emparelhamento {2,4} são maximais em C; os emparelhamentos {2,5} e {2,4,6} são ambos maximais em C; o emparelhamento vazio é o único minimal em C.

Dado um conjunto C de grafos, G é *máximo* em C se nenhum outro grafo em C tem tamanho maior do que o de G; um grafo H é *maximal* em C se H não é subgrafo próprio de nenhum grafo em C. Analogamente se definem grafos *mínimos* e grafos *minimais*.

PASSEIOS

Passeio - Um *passeio* P em G é uma seqüência finita e não vazia $(v_0,\alpha_1,v_1,\ldots,\alpha_n,v_n)$, cujos termos são alternadamente vértices v_i e arestas α_j, e tal que, para todo i, $1 \leq i \leq n$, v_{i-1} e v_i são os extremos de α_i. Admite-se o caso em que $n = 0$, no qual P é então dito *degenerado*. O *comprimento* de P é o inteiro n. Dizemos que P é um passeio *de* v_0 *a* v_n; os vértices v_0 e v_n são a *origem* e o *término* de P, respectivamente; os vértices $v_1,\ldots,v_{n-1}$ são vértices *internos* de P; se $n > 0$ então as arestas α_1 e α_n são a *aresta-origem* e a *aresta-término* de P, respectivamente; VP e aP denotam os conjuntos $\{v_0,v_1,\ldots,v_n\}$ e $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, respectivamente; o passeio P *passa* pelos vértices de VP e pelas arestas de aP. O passeio $(v_n,\alpha_n,\ldots,v_1,\alpha_1,v_0)$ é o *reverso* R(P) de P. Uma *seção* de P é um passeio que é uma subseqüência de termos consecutivos de P. Se as arestas $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ de P forem duas a duas distintas então P é uma *trilha*. Se os vértices $v_0,\ldots,v_n$ forem dois a dois distintos então P é um *caminho*. Se a origem e o término de P coincidirem então P é *fechado*: nesse caso, para i tal que $0 \le i \le n$, $(v_i,\alpha_{i+1},v_{i+1},\ldots,\alpha_n,v_n,\alpha_1,v_1,\ldots,\alpha_i,v_i)$ é uma *rotação* de P. Dizemos que P é *aberto* se não for fechado. Se P for uma trilha fechada e não degenerada e se $v_1,\ldots,v_n$ forem dois a dois distintos então P é *circular* e aP um *circuito*. Seja Q um passeio $(u_0,\beta_1,u_1,\ldots,\beta_m,u_m)$ tal que $u_0 = v_n$. Então a seqüência $(v_0,\alpha_1,v_1,\ldots,\alpha_n,v_n,\beta_1,u_1,\ldots,\beta_m,u_m)$, um passeio, é o *produto* de P e Q, nesta ordem. No grafo Z da figura 1, P=(A,1,B,3,C,4,A,5,D,5,A, 1,B,2,B) é um passeio de A a B de comprimento 7, A é sua origem, B seu término, B,C,A e D são internos em P, VP = {A,B,C,D}, aP = {1,2, 3,4,5}; P não é uma trilha, nem um caminho, nem um passeio fechado. Por outro lado, Q = (B,2,B,3,C,4,A) é uma trilha, mas não um caminho. A seção (A,1,B,3,C) de P é um caminho. A seção (A,1,B,3,C,4,A) de P é circular, {1,3,4} um circuito, ao passo que a trilha fechada (A, 1,B,2,B,3,C,4,A) não é circular.

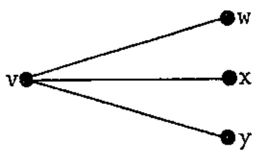
Dada uma coleção C de passeios, VC, OC, aC e oC denotam respectivamente o conjunto dos vértices pelos quais passam passeios em C, o conjunto dos vértices que são origens de passeios em C, o conjunto das arestas pelas quais passam passeios em C, o conjunto das arestas que são arestas-origens de passeios em C.

1.2 - SUBGRAFOS E O TEOREMA DE RAMSEY

Em toda festa com 6 pessoas, ou existem 3 que são 2 a 2 a migas, ou existem 3 que são 2 a 2 não amigas.

Vamos inicialmente traduzir esta afirmação para a linguagem da teoria dos grafos: seja G um grafo completo com 6 vértices, em que cada aresta é colorida com uma de duas cores, rosa e limão; sejam r e ℓ respectivamente os conjuntos de arestas rosa e limão. Então ou $G[r]$ ou $G[\ell]$ tem um triângulo como subgrafo.

Para demonstrar esta afirmação, considere um vértice qualquer de G, digamos v. Evidentemente ou pelo menos três das arestas que incidem em v são rosa ou pelo menos três delas são limão. Suponha que três delas são rosa, sejam w, x e y os extremos, distintos de v, destas três arestas. Se pelo menos uma das arestas de $G[\{w,x,y\}]$



for rosa, digamos a que liga w e x, então o triângulo $G[\{v,w,x\}]$ é um subgrafo de $G[r]$; por outro lado, se todas as arestas de $G[\{w,x,y\}]$ forem limão então o triângulo $G[\{w,x,y\}]$ é um subgrafo de $G[\ell]$. O caso em que pelo menos três das cinco arestas que incidem em v são limão é tratado de maneira análoga.

Convidamos o leitor a dar um exemplo de uma festa com cinco pessoas para a qual a afirmação acima não se aplica.

TEOREMA 1 - Existe uma função f dos pares ordenados de naturais ≥ 2 nos naturais tal que para todo par (m,n), todo grafo completo G com $f(m,n)$ vértices e toda partição (r,ℓ) das arestas de G, ou $G[r]$ contém um subgrafo completo com m vértices ou $G[\ell]$ contém um subgrafo completo com n vértices.

DEMONSTRAÇÃO - por indução em $m+n$.

O caso em que $m=2$ ou $n=2$ é trivial, bastando tomar $f(2,m) = f(m,2) = m$. O caso em que $m>2$ e $n>2$ é resolvido tomando-se $f(m,n) = f(m-1,n) + f(m,n-1)$. Para demonstrar esta afirmação, seja G um grafo completo com $f(m,n)$ vértices, (ℓ,r) uma partição das arestas de G, v um vértice de G. Sejam L e R os conjuntos dos vértices adjacentes a v em $G[\ell]$ e $G[r]$, respectivamente. Ora, $|L| + |R| = gG(v) = f(m,n)-1 = f(m-1,n)+f(m,n-1)-1$. Portanto, ou $|L| \geq f(m-1,n)$ ou $|R| \geq f(m,n-1)$.

Suponha que $|L| \geq f(m-1,n)$. Seja (ℓ',r') a partição de $G[L]$ definida por $\ell' = \ell \cap aG[L]$ e $r' = r \cap aG[L]$. Por indução, ou $G[L][r']$ tem um subgrafo completo com n vértices, ou $G[L][\ell']$ tem um subgrafo completo com m-1 vértices. Ora, se H é um subgrafo completo de $G[L][r']$ com n vértices então H é um subgrafo completo de $G[r]$ com n vértices; por outro lado, se K é um subgrafo completo de $G[L][\ell']$ com m-1 vértices, então $G[\{v\} \cup VK]$ é um subgrafo completo de $G[\ell]$ com m vértices. O caso em que $|R| \geq f(m,n-1)$ é tratado de maneira análoga. ∎

I.3 - CONTAGEM E O TEOREMA DA AMIZADE

Considere uma festa em que cada duas pessoas têm exatamente um amigo em comum. Naturalmente, suporemos que a relação de amizade é simétrica e irreflexiva. O teorema da amizade afirma então que existe alguém na festa que é amigo de todas as demais pessoas presentes à festa. Na linguagem da teoria dos grafos, temos então o seguinte

TEOREMA 2 - Seja G um grafo simples não vazio em que quaisquer dois vértices têm exatamente um vértice adjacente a ambos. Então G tem um vértice adjacente a todos os demais.

DEMONSTRAÇÃO - A demonstração é feita por contradição, considerando um grafo G em que cada dois vértices têm exatamente um vértice adjacente a ambos e supondo que nenhum vértice é adjacente a todos os demais. A demonstração prossegue provando cada uma das seguintes afirmações:

LEMA 1 - Se u e v são dois vértices não adjacentes em G, então $g(u) = g(v)$.

LEMA 2 - Se u e v são dois vértices de G, então $g(u) = g(v)$.

LEMA 3 - Seja g o grau comum a todos os vértices de G. Então $g \geq 3$ e $|V| = g(g-1) + 1$.

LEMA 4 - Seja $f(\ell)$ o conjunto dos passeios fechados de comprimento ℓ. Se $\ell \geq 2$ então $g-1$ divide $|f(\ell)| - 1$.

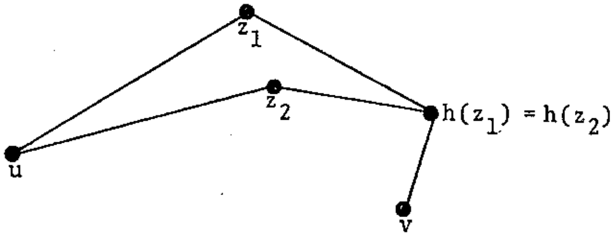
LEMA 5 - Se ℓ é primo, então ℓ divide $|f(\ell)|$.

LEMA 6 - Existe um primo ℓ que divide $|f(\ell)| - 1$.

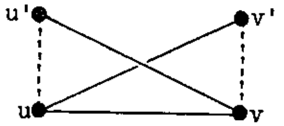
Naturalmente, as afirmações dos lemas 5 e 6 são contraditórias, o que prova o teorema.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 1 - Por simetria, basta mostrar que $g(u) \leq g(v)$. Cada vértice z em Adj(u) tem exatamente um vértice adjacente em comum com v, por hipótese: denote esse vértice h(z); ora, $h(z) \in Adj(v)$; a recém definida função $h\colon Adj(u) \longrightarrow Adj(v)$ é injetora, pois se $z_1 \neq z_2$ mas $h(z_1) = h(z_2)$ então z_1 e z_2 têm (pelo menos) dois vértices adjacentes em comum, a saber u e $h(z_1)$, conforme ilustrado na figura abaixo. Assim, $|Adj(u)| \leq |Adj(v)|$ e portanto $g(u) \leq g(v)$. Por simetria $g(v) \leq g(u)$. Logo $g(u) = g(v)$. ∎

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 2 - Pelo Lema 1, podemos supor que u e v são adjacentes. Como supusemos que nenhum vértice em G é adjacente a todos



os demais, então existe em G um vértice, u', tal que $u' \neq u$ e $u' \notin Adj(u)$. Se $u' \notin Adj(v)$, então $g(u)=g(u')=g(v)$, pelo Lema 1. Portanto, $u' \in Adj(v)$ (e conseqüentemente $u' \neq v$). Analogamente G tem um vértice, v', tal que $v \neq v' \neq u$ e $v' \in Adj(u) \setminus Adj(v)$, conforme ilustrado na figura abaixo. Ora, u' e v' não são adjacentes, pois caso contrário v' e v se-



riam vértices distintos em $Adj(u) \cap Adj(u')$. Pelo Lema 1, $g(u)=g(u')=$ $=g(v')=g(v)$. ∎

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 3 - Considere o conjunto X de todos os ternos ordenados (u,v,w) tais que $u \neq w$ e v é o vértice em $Adj(u) \cap Adj(w)$. Como existem precisamente $[V]\cdot[|V|-1]$ pares ordenados (u,w) de vértices com $u \neq w$, então

$$|X| = |V|\cdot[|V|-1]. \tag{1}$$

Por outro lado, dado um vértice v, existem precisamente $g(g-1)$ pares ordenados de vértices em $Adj(v)$. Assim,

$$|X| = |V|\cdot g(g-1). \tag{2}$$

De (1) e (2), segue que $|V| = g(g-1)+1$. Note, ao tentar $g=0,1,2$, que

$g \geq 3$. ∎

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 4 - Vamos denotar por $p(k)$ e $b(k)$, respectivamente, o conjunto dos passeios de comprimento k e o conjunto dos passeios abertos de comprimento k. Obviamente, $\{b(k), f(k)\}$ é uma partição de $p(k)$; ademais, $|p(k)| = |V|g^k$. Logo,

$$|b(\ell-2)| + |f(\ell-2)| = |V| \cdot g^{\ell-2}. \tag{3}$$

Vamos agora considerar a seguinte função $x: f(\ell) \rightarrow p(\ell-2)$: se $P = (u_0, \alpha_1, u_1, \ldots, \alpha_\ell, u_\ell)$ então $x(P) = (u_0, \alpha_1, u_1, \ldots, \alpha_{\ell-2}, u_{\ell-2})$. Note que se Q é um passeio em $b(\ell-2)$ então existe exatamente um passeio P em $f(\ell)$ tal que $x(P) = Q$; observe também que se Q é um passeio em $f(\ell-2)$ então existem precisamente g passeios P em $f(\ell)$ tais que $x(P) = Q$. Portanto,

$$|f(\ell)| = |b(\ell-2)| + g \cdot |f(\ell-2)|. \tag{4}$$

De (3) e (4),

$$|f(\ell)| = |V| \cdot g^{\ell-2} + (g-1) \cdot |f(\ell-2)|. \tag{5}$$

Pelo desenvolvimento do binômio de Newton, de (5) segue que

$$|f(\ell)| - 1 = |V| - 1 + \sum_{i=1}^{\ell-2} \binom{\ell-2}{i} (g-1)^i + (g-1) \cdot |f(\ell-2)|.$$

Portanto, pelo lema 3, $g-1$ divide $|f(\ell)|-1$. ∎

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 5 - Considere a relação $R(\ell) = \{(P,Q) \mid Q$ é uma rotação de $P\}$ sobre $f(\ell)$. É fácil ver que $R(\ell)$ é de equivalência. Considere um passeio $P = (u_0, \alpha_1, u_1, \ldots, \alpha_\ell, u_\ell)$ em $f(\ell)$ e considere o conjunto $S = \{s \mid 0 < s < \ell$ e $P = (u_s, \alpha_{s+1}, u_{s+1}, \ldots, \alpha_\ell, u_\ell, \alpha_1, u_1, \ldots, \alpha_s, u_s\}$. Note que se $s \in S$ então $u_0 = u_s$, $u_i = u_{i+s}$ e $\alpha_i = \alpha_{i+s}$ para todo i tal que $1 \le i \le \ell - s$. Assim, $u_0 = u_s$, $\alpha_i = \alpha_{i+js}$ e $u_i = u_{i+js}$ para todo i e todo j tais que $1 \le i \le s$ e $1 \le i+js \le \ell$. Em particular, se i denota o resto da divisão de ℓ por s, então $P = (u_i, \alpha_{i+1}, u_{i+1}, \ldots, \alpha_\ell, u_\ell, \alpha_1, u_1, \ldots, \alpha_i, u_i)$ e portanto ou $i = 0$ ou $i \in S$. Em particular, se s é mínimo em S então $s > 1$ (pois $u_0 \ne u_1$) e $i = 0$. Portanto, se ℓ é primo então S é vazio. Assim, a classe de equivalência de de $R(\ell)$ que contém P contém precisamente ℓ passeios. Como esta conclusão vale para todo P em $f(\ell)$, então ℓ divide $|f(\ell)|$. ■

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 6 - Do lema 3, segue que $g-1 \ge 2$ e portanto $g-1$ tem um divisor primo, digamos ℓ. Do lema 4, temos que ℓ divide $|f(\ell)| - 1$. ■

A demonstração do teorema está completa. ■

EXERCÍCIOS

1. Quantos grafos H existem tais que $VH = \{1,2,3,4,5\}$ e $aH = \{A, B, C, D, E\}$? Quantos grafos simples H existem com os citados conjuntos de vértices e arestas?
2. Mostre que se G é simples, H é completo e ambos tem exatamente n vértices então $|aG| \le |aH| \le \binom{n}{2}$.
3. Mostre que para todo $n \ge 3$ existe um grafo simples 3-regular com 2n vértices que não tem triângulos como subgrafos.
4. Mostre que o número de mulheres é igual ao de homens em toda festa em que cada pessoa é amiga de precisamente k outras do sexo oposto presentes à festa $(k \ge 1)$. Formule à asserção em termos de grafos.
5. Mostre que em toda cidade (com pelo menos dois habitantes) residem duas pessoas com o mesmo número de amigos habitantes

da cidade. Formule a asserção em termos de grafos.

6. Mostre que para todo grafo G existe um grafo regular H e um subconjunto X de VH tal que G = H[X]. Mostre também que se G é simples então existe um tal H que também é simples.

7. Mostre que todo k-cubo tem 2^k vértices, $k2^{k-1}$ arestas e é biparticionável.

8. Dê um exemplo de um grafo simples não biparticionável que nao seja um triângulo, e de tamanho o menor possível.

9 Seja C um conjunto finito e não vazio de conjuntos finitos. Mostre que C tem elementos máximos e mínimos. Mostre que todo elemento máximo (mínimo) é maximal (minimal

10 Demonstre as seguintes afirmações:

a. todo conjunto não vazio de conjuntos finitos tem um elemento mínimo e todo elemento mínimo e minimal

b. todo conjunto finito e não vazio de conjuntos tem um elemento máximo.

c. todo conjunto finito e não vazio de conjuntos tem elementos maximais e minimais.

d. conjuntos infinitos de conjuntos podem não ter nem elementos minimais nem elementos maximais.

11. Mostre que H = G[X] se e somente se H é maximal no conjunto dos subgrafos de G cujos vértices pertencem a X. Mostre que H = G[x] se e somente se H é minimal no conjunto dos subgrafos de G cujo conjunto de arestas inclui x.

12. Mostre que H gera G se e somente se H⊆G e VH = VG.

13. Dê um grafo G e um subconjunto x de aG tais que G[aG\x]≠G-x.

14. Mostre que todo grafo G sem laços tem um subgrafo gerador bi

particionável tal que $gH(v) \geq gG(v)/2$ para todo v em V.

15. Dê um exemplo de mostre que não existe(m):
   a. um passeio que não sej uma trilha.
   b. uma trilha que não seja um caminho.
   c. um caminho q e nã seja uma t ilha.
   d. um passeio fechado que não seja circular.
   e. dois caminhos cujo produto nao seja um caminho.
16. Mostre que se P é um passeio e Q uma seção fechada de P de comprimento máximo, então P pode ser expresso como um produto da forma RQS e RS é um caminho cuja origem coincide com a de P, o término de RS coincide com o de P, $V(RS) \subseteq VP$ e todo vértice interno em RS é interno em P. Co clua que todo passeio de comprim nto mínimo de u a v é um caminho e que existe um caminho de u a v se e somente se existe um passeio de u a v.
17. Mostre que existe um passeio circular em G que passa por uma aresta α cujos extremos são u e v se e somente se existe um caminho de u a v em $G-\alpha$.
18. Seja $P=(\ _0,\alpha_1,v_1,\ldots,\alpha_n,v_n)$ com n 0, $n \neq 2$ e $v_0 = v_n$. Mostre que P é circular se e somente se $v_1,\ldots v_n$ forem dois a dois distintos. Dê um contra-exemplo para essa afirmação se permitirmos $n = 2$.
19. Prove que por toda aresta numa t ilha fechada passa um passeio circular. Dê um contra-exemplo para a afirmação se substituirmos trilha por passeio.
20. Mostre que a operação de produto de sseios é associativa.
21. Seja γG o mínimo dos graus dos vértices de um grafo G não va

zio. Mostre que se G for simples então existe um caminho de comprimento γG. Para cada n, ache um grafo simples G tal que $n = \gamma G$ e G não tem caminhos de comprimento $n+1$.

22. Prove que se $\gamma G > 1$ então G tem um passeio circular; ademais, se G for simples então existe um tal passeio cujo comprimento é maior do que γG.

23. Sejam u, v e w três vértices num grafo G e sejam C e D caminhos de comprimento mínimo de u a v e de u a w, respectivamente. Mostre que se x e y são ambos vértices de VC e de VD então x precede y em C se e somente se x precede y em D. (Um vértice z' *precede* outro z" num caminho P se existem seções P', P" e P"' tais que P = P'P"P"', z' é o término de P' e z" o término de P").

24. Mostre que a função f definida na demonstração do teorema 1 satisfaz a identidade $f(m,n) = \binom{m+n-2}{n-1}$.

25. Mostre que a seguinte função f satisfaz a asserção do teorema 1:

$$f(m,n) = \begin{cases} m, \text{ se } n = 2 \\ n, \text{ se } m = 2 \text{ e } n > 2 \\ x + y - 1, \text{ se } x \text{ e } y \text{ forem ambos pares, } m>2 \text{ e } n>2 \\ x + y, \text{ nos demais casos} \end{cases}$$

onde $x = f(m-1,n)$ e $y = f(m,n-1)$. (Sugestão: refaça a demonstração do teorema, levando em conta o corolário da proposição 1 da seção 1).

26. Seja F o conjunto das funções que satisfazem a asserção do teorema 1. Então podemos definir uma função g, também em F,

tomando $g(m,n) = \min\{f(m,n) \mid f \in F\}$. Mostre que

a. $g(3,3) \geq 6$
b. $g(3,4) \geq 9$
c. $g(3,5) \geq 14$
d. $g(4,4) \geq 18$

(Sugestão: considere um grafo completo G com $VG = \{0,\ldots,z-1\}$, e uma partição (ℓ,r) das arestas de G, onde

a. $z=5$ e ℓ é o conjunto das arestas com extremos i e j tais que $i-j \equiv \pm 1 \pmod 5$

b. $z=8$ e ℓ é o conjunto das arestas com extremos i e j tais que $i-j \equiv +1, -1, 4 \pmod 8$

c. $z=13$ e ℓ é o conjunto das arestas com extremos i e j tais que $i-j \equiv \pm 1, \pm 5 \pmod{13}$

d. $z=17$ e ℓ é o conjunto das arestas com extremos i e j tais que $i-j \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$.)

27. Mostre que os valores de $g(3,3)$, $g(3,4)$, $g(3,5)$ e $g(4,4)$ são 6, 9, 14 e 18, respectivamente, onde g é a função definida no exercício 26. (Sugestão: considere a função f definida no exercício 25 e use o exercício 26).

28. Mostre que se g denota a função definida no exercício 26, então $g(n,n) \geq 2^{n/2}$. (Sugestão: considere um grafo G completo com z vértices ($z < 2^{n/2}$), verifique que o número de partições (ℓ,r) de aG é $2^{\binom{z}{2}}$, verifique que o número destas partições (ℓ,r) tais que $G[\ell]$ contém um subgrafo completo com n vértices não é maior do que $\binom{z}{n} 2^{\binom{z}{2}-\binom{n}{2}}$, e que correspondem portanto a menos da metade do total de partições).

29. Demonstre a seguinte generalização do teorema 1: Para todo $s \geq 1$ existe uma função f_s das seqüências de s naturais ≥ 2

nos naturais tais que para todo grafo completo G com $f_s(m_1, \ldots, m_s)$ vértices e toda partição $(\ell_1, \ldots, \ell_s)$ das arestas de G, existe um i $(1 \le i \le s)$ tal que $G[\ell_i]$ contém um subgrafo com m_i vértices. (Sugestão: defina f_s da seguinte maneira:

$$f_s(m_1,\ldots,m_s) = \begin{cases} f(f_{s-1}(m_1 \ldots, m_{s-1}), m_s), & \text{se } s \ge 2 \\ m_1, & \text{se } s = 1 \end{cases}$$

onde f é a função cuja existência é demonstrada no teorema 1.)

30. Demonstre que existe uma função f_s tal como no exercício 29, e que satisfaz a desigualdade

$$f_s(m_1,\ldots,m_s) \le \frac{(m_1+m_2+\ldots+m_s-s)!}{(m_1-1)!(m_2-1)!\ldots(m_s-1)!}$$

31. Demonstre a seguinte generalização do teorema 1 para todo $s \ge 1$ e todo $k \ge 1$ existe uma função $b_{s,k}$ das sequências de s naturais $\ge k$ nos naturais tais que para todo conjunto X com $b_{s,k}(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ elementos, e toda partição $(\ell_1, \ldots, \ell_s)$ do conjunto dos subconjuntos de X com k elementos, existe um i tal que $1 \le i \le s$ e um subconjunto X(i) de X com m_i elementos tal que todo subconjunto de X(i) com k elementos pertence a ℓ_i. (Sugestão: defina $b_{s,k}$ da seguinte maneira:

$$b_{s,k}(m_1,\ldots,m_s) = \begin{cases} m_1 & \text{se } s = 1 \\ b_{2,k}(b_{s-1,k}(m_1,\ldots,m_{s-1}), m_s), & \text{se } s > 2 \\ 1+b_{2,k-1}(b_{2,k}(m_1-1,m_2), b_{2,k}(m_1,m_2-1)), & \text{se } s = 2 \text{ e } m_1, m_2 > k > 1 \\ m_1 + m_2 - k, & \text{nos demais casos.)} \end{cases}$$

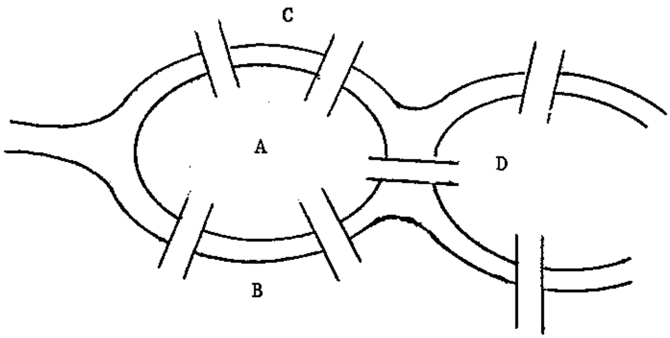
32. Verifique que a relação $R(\ell)$ definida na demonstração do lema 5 é de equivalência.

33. Considere a relação $S = \{(P,Q) | P$ é uma rotação de Q ou o reverso de uma rotação de $Q\}$ sobre o conjunto dos passeios circulares de um grafo. Mostre que S é uma relação de equivalência cujas classes de equivalência estão em correspondência biunívoca com o conjunto de circuitos do grafo.

NOTAS

A teoria dos grafos tem sido utilizada em áreas tão dispares do conhecimento humano como análise de circuitos elétricos, pesquisa operacional, teoria da computação, análise numérica, química orgânica, física, topologia, genética e psicolo ia (vide, por exemplo, [Harary 1969]).

Leonhard Euler é considerado o primeiro autor em teoria dos grafos; o famoso físico e matemático resolveu o problema das pontes de Königsberg [Euler 1736]. Havia duas ilhas ligadas entre si e às margens do rio Pregel por sete pontes, como na figura abaixo. O



problema era partir de uma das quatro regiões, atravessar cada ponte uma vez e voltar ao ponto de partida. Euler demonstrou que o problema não tinha solução. De fato, Euler caracterizou os grafos que admitem uma trilha fechada que passa por todos os vértices e arestas. Teremos oportunidade de examinar esta questão no capítulo IV.

O número de textos em teoria dos grafos é razoavelmente grande. Destacamos [Bondy e Murty 1976],[Berge 1970] e [Harary 1969] como textos de caráter geral, [Aho, Hopcroft e Ullman 1974] como um texto que aborda complexidade de algoritmos e estruturas de dados,e [Biggs 1974] como um enfoque algébrico da teoria dos grafos.

O teorema 1 é um caso particular do teorema de Ramsey [Ramsey 1930], que no caso finito corresponde ao enunciado do exercício 31; a demonstração aqui apresentada é outra [Erdös e Szekeres 1935] e [Greenwood e Gleason 1955] (exercícios 24 e 25). Pode-se dizer que o cerne desse resultado é o princípio das casas de pombo: dados n pombos e m casas (0<m<n), alguma casa deverá abrigar dois pombos (exercício 5).

Argumentos de contagem são utilizados no exercício 28 [Erdös 1947] e no teorema 2 [Erdös, Rényi e Sós 1966].

- 0 -

CAPÍTULO II

CONEXIDADE E SEPARAÇÃO

1.- COMPONENTES

Dois vértices u e v de um grafo G são *ligados* em G se existe um passeio de u a v em G. Convém ressaltar que u e v são ligados em G se e somente se existe um caminho de u a v em G (exercício 16 do capítulo I). Desta definição segue imediatamente que a relação de ligação é de equivalência. Portanto, induz uma partição p de VG tal que dois vértices são ligados em G se e somente se pertencem ao mesmo conjunto em p. Cada subgrafo de G gerado por um elemento de p é um *componente* de G. A figura abaixo ilustra os quatro componentes do grafo Z da figura 1 do capítulo I.

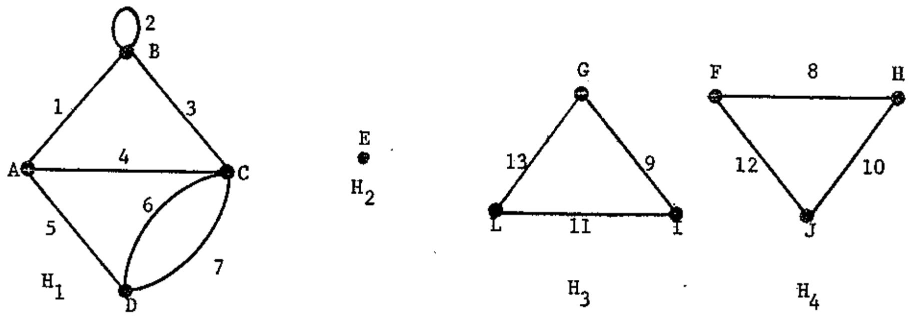


Figura 1 - Um grafo e seus quatro componentes: H_1, H_2, H_3 e H_4.

Um grafo é *conexo* se quaisquer dois de seus vértices são ligados. O grafo da figura 1 não é conexo, tem quatro componentes. Um grafo H é *isolado* em G se H⊆G e se qualquer passeio em G que passa por um vértice em H é um passeio em H.

LEMA 1 - Se L⊆H⊆G e L é isolado em G então L é isolado em H.

DEMONSTRAÇÃO - Se P é um passeio em H então P é um passeio em G. Se, além disso, P passa por um vértice em L, então P é um passeio em L, pois L é isolado em G. ∎

LEMA 2 - Se L⊆H⊆G, L é isolado em H e H é isolado em G então L é isolado em G.

DEMONSTRAÇÃO - Seja P um passeio em G que passa por um vértice em L. Como L⊆H, então P passa por um vértice em H. Como H é isolado em G, então P é um passeio em H. Como L é isolado em H, então P é um passeio em L. De fato, L é isolado em G. ∎

A cada subconjunto S de VG podemos associar o conjunto das arestas de G que têm um extremo em S, o outro em VG\S; esse conjunto é chamado o *corte de arestas associado* a S e é denotado δG(S). Convém ressaltar que δ(S) = δ(V\S) e que δ(∅) = ∅ = δ(V).

Podemos associar a S um outro conjunto, a saber, o dos vértices que pertencem a S e são extremos de arestas em δ(S); esse conjunto é chamado o *corte de vértices associado* a S e é denotado WG(S).

Um conjunto de arestas (vértices) é um *corte de arestas* (*corte de vértices*) se for o corte de arestas (vértices) associado a algum subconjunto de V.

Um corte d de arestas (W de vértices) *separa* dois subconjuntos X e Y de VG se, para algum subconjunto Z de VG, d = δ(Z) (W=W(Z)) e um de X e Y é um subconjunto de Z, o outro de VG\Z; se X = {x} ou Y =

= {y} (ou ambos), então escrevemos simplesmente que o corte separa x e Y ou X e y (ou x e y).

Um corte d de arestas é *separador* em G se d é o corte associado a algum subconjunto próprio e não vazio de VG. Um corte W de vértices é *separador* em G se W é o corte associado a algum subconjunto S de VG tal que $W \subsetneq S \subsetneq VG$.

EXEMPLO - No grafo Z da figura 1,

(i) se $S = \{B,C,F\}$ então $W(S) = S$ e $\delta(S) = \{1,4,6,7,8,12\}$

(ii) o conjunto {3,4,5,9,11} é um corte de arestas e o conjunto {A,B,I} um corte de vértices (ambos associados, por exemplo, ao conjunto {A,B,F,H,J,I}.

(iii) o corte vazio separa {B,D} e {J,F} mas não separa nem B e D nem J e F.

(iv) o subgrafo H_1, de Z é isolado em Z; também é isolado o subgrafo de Z que tem dois componentes, H_1 e H_2; o subgrafo Z[{A,B,C}] não é isolado; tampouco são isolados os subgrafos X de Z tais que $VX = \{A,B,C,D\}$ e $aX \neq \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

LEMA 3 - Seja X um subconjunto de V, $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$ um passeio em G, I o conjunto $\{i \mid 1 \leq i \leq n \text{ e } \alpha_i \in \delta(X)\}$. Então $|I|$ é ímpar se e somente se um dos vértices v_0 e v_n pertence a X, o outro a $V \setminus X$.

DEMONSTRAÇÃO - por indução em n. Se $n = 0$ então obviamente $I = \emptyset$ e $\{v_0, v_n\}$ é um subconjunto de X ou de $V \setminus X$. Suponha pois que $n > 0$. Considere inicialmente o caso em que $v_{n-1} \in X$. Por indução,

$$|I \setminus \{n\}| \text{ é par se e somente se } v_0 \in X. \tag{1}$$

Por outro lado, pela definição de corte,

$$n \in I \text{ se e somente se } v_n \in V\backslash X \qquad (2)$$

Ora $|I|$ é ímpar quando $|I\backslash\{n\}|$ é par e $n \in I$, ou quando $|I\backslash\{n\}|$ é ímpar e $n \notin I$; $|I|$ é par nos demais casos. Portanto, $|I|$ é ímpar se e somente se um de v_0 e v_n pertence a X, o outro a $V\backslash X$. O caso em que $v_{n-1} \in V\backslash X$ é tratado de maneira análoga. ∎

COROLÁRIO 1 - Se dois vértices são ligados então o corte vazio não os separa. ∎

COROLÁRIO 2 - Seja d um corte de arestas em G, $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$ um passeio em G, I o conjunto $\{i | 1 \leq i \leq n \text{ e } \alpha_i \in d\}$. Então $|I|$ é ímpar se e somente se d separa v_0 e v_n.

DEMONSTRAÇÃO - Pelo lema 3, $|I|$ é ímpar se e somente se um dos vértices v_0 e v_n pertence a X o outro a $V\backslash X$, qualquer que seja $X \subseteq V$ tal que $d = \delta(X)$. De fato, $|I|$ é ímpar se e somente se d separa v_0 e v_n. ∎

COROLÁRIO 3 - Seja H um subgrafo de G. Então H é isolado em G se e somente se $\delta(VH) = \emptyset$ e $G[VH] = H$. Ou seja, H é isolado em G se e somente se toda aresta de G com um extremo em VH pertence a aH.

DEMONSTRAÇÃO - Suponha que H é isolado em G, seja α uma aresta de G com extremos u e v, pelo menos um dos quais pertence a VH. Então (u, α, v) é um passeio em G que passa por um vértice em VH. Como H é isolado em G então (u, α, v) é um passeio em H. Logo, $\alpha \in aH$. Como esta conclusão vale para toda aresta α com pelo menos um extremo em VH, então $\delta(VH) = \emptyset$ e $G[VH] = H$.

Reciprocamente, suponha que $\delta(VH) = \emptyset$ e $G[VH] = H$. Para provar que H é isolado em G, seja $Q = (u_0, \beta_1, u_1, \ldots, \beta_m, u_m)$ um passeio em G. Como $\delta(VH) = \emptyset$, então $\delta(VH) \cap aQ = \emptyset$. Pelo lema 3, ou todos os vértices em VQ pertencem a VH ou pertencem todos a $VG\backslash VH$. Ademais, $H = G[VH]$ por hipótese. Portanto, ou Q é um passeio em H ou $VQ \subseteq VG\backslash VH$.

Como esta conclusão vale para todo passeio Q em G, de fato H é isolado em G. ∎

LEMA 4 - Se K é um componente de um grafo G então K é isolado em G.

DEMONSTRAÇÃO - Seja α uma aresta de G com extremos u e v, suponha que um deles pertence a VK. Por definição de componente, se um vértice em VK é ligado em G a outro em VG, então este outro pertence a VK. Ora, u e v são ligados em G e pelo menos um deles pertence a VK. Logo, ambos pertencem a VK. Ademais, ainda por definição de componente, $K = G[VK]$. Portanto, α pertence a aK. Como esta conclusão vale para toda aresta α com pelo menos um extremo em VK, então K é isolado em G, pelo corolário 3. ∎

COROLÁRIO 4 - Dois vértices são ligados se e somente se o corte vazio não os separa.

DEMONSTRAÇÃO - Imediata, do lema 4 e lema 3. ∎

TEOREMA 1 - As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) G é conexo.

(ii) G não possui cortes vazios separadores.

(iii) Nenhum subgrafo próprio e não vazio de G é isolado em G.

DEMONSTRAÇÃO - (i) $\Longrightarrow$ (ii) Suponha que G é conexo, seja X um subconjunto próprio e não vazio, de VG. Então X contém um vértice, digamos, u, e V\X outro, digamos v. Como G é conexo, então u e v são ligados em G. Pelo corolário 1, $\delta(X) \neq \emptyset$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Seja H um subgrafo próprio e não vazio de G. Se VH for um subconjunto próprio de VG, então $\delta(VH) \neq \emptyset$; se $VH = VG$ então $G = G[VH]$ e portanto $H \neq G[VH]$. Em ambos os casos, H não é isolado em G, pelo corolário 3.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Se G for vazio então é certamente conexo. Su ponha pois que G não é vazio, seja K um componente de G. Pelo lema 4, K é isolado em G. Logo, K = G. Ou seja, G é conexo. ∎

TEOREMA 2 - As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) H é um componente de G.

(ii) H é não vazio, isolado em G e conexo.

(iii) seja C' o conjunto dos subgrafos conexos e não vazios de G; então H é maximal em C'.

(iv) seja C" o conjunto dos grafos não va ios e isolados em G; então H é minimal em C".

DEMONSTRAÇÃO - (i) $\Longrightarrow$ (ii) Suponha que H é um componente de G. Certamente H é não vazio. Pelo lema 4, H é isolado em G. Se v e w denotam dois vértices de H, então v e w são ligados em G, por definição de componente; ademais, H é isolado em G; portanto v e w são ligados em H. Como esta conclusão vale para quaisquer v e w em VH, então H é conexo.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Suponha que H é não vazio, conexo e isolado em G. Se K é tal que $H \subsetneq K \subseteq G$, então H é isolado em K, pelo lema 1. Pelo corolário 3, K não é conexo. De fato, H é maximal em C'.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Suponha que H é maximal em C'. Como H é não vazio, então VH contém um vértice, digamos v. Seja K o componente de G que tem v como um de seus vértices Como H é um subgrafo, conexo, de G, então quaisquer dois vértices de VH são ligados em G. Portanto, $VH \subseteq VK$. Ademais, $K = G[VK]$; portanto $H \subseteq K$. Como já provamos, ((i) $\Longrightarrow$ (ii)), K é conexo; então H = K, pela maximalidade de H. De fato, H é um componente de G.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iv) Suponha que H é isolado em G e não vazio. Então $H \in C''$. Portanto, H é minimal em C" se e somente se nenhum subgra fo próprio e não vazio de H é isolado em G. Pelos lemas 1 e 2, H é minimal em C'' se e somente se nenhum subgrafo próprio e não vazio de H é isolado em H. Ou seja, H é minimal em C'' se e somente se H é conexo, pelo teorema 1. ∎

Se u e v são vértices ligados em G então a *distância* de u a v em G é o comprimento do menor passeio (caminho) de u a v em G.

TEOREMA 3 - Seja G um grafo, u um vértice em G, considere então a seqüência $S_0, S_1, \ldots$ de subconjuntos de VG assim definida:

$$S_k = \begin{cases} \{u\}, \text{ se } k=0 \\ \\ Adj(S_{k-1}) \backslash S_{\leq k-1}, \text{ se } k>0, \end{cases}$$

onde $S_{\leq r}$ denota $\cup S_i$ $(0 \leq i \leq r)$.

Então

(i) S_k é o conjunto dos vértices que distam k de u em G.

(ii) existe um natural ℓ tal que $\ell < |VG|$, $S_0 \neq \emptyset$, $S_1 \neq \emptyset, \ldots, S_\ell \neq \emptyset$, $\emptyset = S_{\ell+1} = S_{\ell+2} = \ldots$.

DEMONSTRAÇÃO - (i) Denote por D_k $(k \geq 0)$ o conjunto dos vértices que distam k de u em G, por $D_{\leq k}$ o conjunto $\cup D_i$ $(0 \leq i \leq k)$. Provaremos, por indução em k, que $D_k = S_k$. A afirmação é trivialmente válida para k=0, uma vez que $D_0 = \{u\} = S_0$. Suponha então que $k > 0$. Para mostrar que $D_k \subseteq S_k$, seja v um vértice em D_k. Então existe um passeio $(v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_k, v_k)$ de u a v em G. Ora, $(v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_{k-1}, v_{k-1})$ é um passeio de u a v_{k-1} em G e portanto $v_{k-1} \in D_{\leq k-1}$. Por indução, $v_{k-1} \in S_{\leq k-1}$. Portanto, v_k, um vértice em $Adj(v_{k-1})$, pertence a $S_{\leq k}$. Ainda por indução, v, um vértice em D_k, não pertence a $S_{\leq k-1}$. Assim, v pertence a S_k. Portanto, $D_k \subseteq S_k$.

Para mostrar que $S_k \subseteq D_k$, seja v um vértice em S_k. Então existe em S_{k-1} um vértice, v', e em aG uma aresta α, cujos extremos são v e v'. Por indução, existe um passeio P de u a v' de comprimento k-1 em G. Ora, $P(v',\alpha,v)$ é um passeio de u a v em G e tem comprimento k. Logo, $v \in D_{\leq k}$. Por outro lado, v, um vértice em S_k, pertence a $VG \setminus S_{\leq k-1}$, o que por indução implica que v pertence a $VG \setminus D_{\leq k-1}$. Assim, $v \in D_k$. De fato $S_k \subseteq D_k$ e a demonstração de (i) está completa.

(ii) Ora, $S_0, S_1, \ldots$ é uma seqüência disjunta de subconjuntos de VG. Assim, se ℓ denota o menor natural tal que $S_{\ell+1} = \emptyset$, então $\ell < |VG|$. Ademais, como $Adj(\emptyset) = \emptyset$, então $\emptyset = S_{\ell+2} = S_{\ell+3} = \cdots$ ∎

2 - CONEXIDADE

Nesta seção vamos generalizar os conceitos apresentados na seção anterior. Assim, por exemplo, haverá grafos "mais conexos do que outros", num sentido preciso. Estas noções são também de valor prático, além do natural interesse teórico; assim por exemplo, quando grafos são usados para representar redes de comunicação, é desejável que sejam "bastante" conexos, para imprimir à rede um certo grau de confiabilidade.

Dizemos que dois passeios são *disjuntos* se não existe vértice pelo qual ambos passam; *disjuntos nas arestas* se não existe aresta pelo qual ambos passam; *disjuntos internamente* se nenhum deles passa por vértice que é interno ao outro; *disjuntos exceto na origem (no término)* v se ambos têm a mesma origem v (mesmo término v) e por nenhum outro vértice além de v passam ambos os passeios.

Dois vértices distintos e não adjacentes u e v são *k-ligados* em G ($k \geq 0$) se existem k passeios dois a dois internamente disjuntos de u a v em G. Dois vértices distintos e adjacentes u e v são *k-ligados* em G ($k \geq 0$) se existem pelo menos k-1 passeios de u a v em G - x dois a dois disjuntos internamente, onde x denota o conjunto das li gações cujos extremos são u e v. Finalmente, qualquer vértice u é k-*ligado* a si mesmo, qualquer que seja $k \geq 0$. Note que a relação de 1-ligação é a relação de ligação. Note também que quaisquer dois vértices são 0-ligados, e se u e v são k-ligados, então u e v são k'-ligados, para todo k' tal que $0 \leq k' \leq k$.

EXEMPLO - No grafo da Figura 2, quaisquer dois vértices são 2-liga-

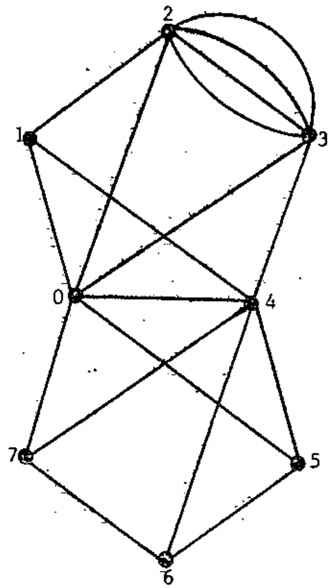


Figura 2

dos pois existe um passeio circular que passa por todos os vértices. Logo, quaisquer dois vértices são 1-ligados e 0-ligados. Os vértices 2 e 3 são 3-ligados, mas não 4-ligados. São 3-ligados quaisquer dois vértices em {0,1,2,3,4} e quaisquer dois vértices em {4,5,6,7,0}. Mas nenhum vértice em {1,2,3} é 3-ligado a algum vértice em {5,6,7} pois esses dois conjuntos são separados pelo corte de vértices {0,4} = = W({0 1,2,3,4}) que consiste de 2 vértices apenas e é disjunto de

$\{1,2,3\} \cup \{5,6,7\}$ (lema 3). Finalmente 0 e 4 são os únicos vértices distintos 4-ligados, e os únicos 5-ligados, e não existem vértices distintos que sejam 6-ligados.

Mais uma vez, se substituirmos na definição de k-ligação toda ocorrência de "passeio" por "caminho", obteremos outra definição, porém equivalente (veja exercício 16 do capítulo I).

O leitor atento deverá ter notado que a relação de k-ligação é reflexiva e simétrica, mas não necessariamente transitiva: conforme vimos no exemplo anterior, os vértices 1 e 0 (figura 2) são 3-ligados, o são também os vértices 0 e 7, mas os vértices 1 e 7 são apenas 2-ligados. Assim, não é possível generalizar de forma ingênua o conceito de componente.

TEOREMA 4 - Seja X um subconjunto de VG, x um vértice em VG\X, C uma coleção máxima de caminhos dois a dois disjuntos exceto no término x e todos com origem em X; seja Z um corte mínimo de vértices que separa X e x mas não contém x. Então $|C| = |Z|$.

DEMONSTRAÇÃO - Dentre as coleções de caminhos dois a dois disjuntos exceto no término x e todos com origem em X, escolha uma (existe, pois a vazia é uma delas), chame-a D, tal que OD seja maximal.

Pelo lema 5, abaixo, existe um subconjunto W de VG\{x} que é um corte de vértices que separa X e x, e contém precisamente $|D|$ vértices. Basta então mostrar que W é mínimo e D é máxima. Para tanto, observe que se D' é uma coleção de caminhos, disjuntos exceto no término x, e todos com origem em X, e se W' é um subconjunto de VG\{x} que é um corte de vértices e que separa X e x, então, pelo lema 3, cada caminho em D' passa por um vértice em W'; ademais, W' é um subconjunto de VG\{x} e D' consiste de caminhos disjuntos ex ceto no término x. Logo caminhos distintos em D' passam por vértices distintos em W'. Portanto, $|D'| \le |W'|$. Em particular,

$$|D'| \le |W| = |D| \le |W'|$$

e portanto $|D'| \le |D|$ e $|W| \le |W'|$. De fato, D é máxima e W é mínimo.

LEMA 5 - Seja D uma coleção de caminhos disjuntos exceto no término x, todos com origem em X. Então uma das seguintes alternativas vale:

ou (i) existe um corte de vértices W tal que W separa X e x, $|W| = |D|$ e x pertence a $VG\backslash W$.

ou (ii) existe outra coleção D_+ de caminhos disjuntos exceto no término x, e todos com origem em X, e também um vértice w em $X\backslash OD$, tais que $OD_+ = \{w\} \cup OD$ e $X \cap VD_+ \subseteq \{w\} \cup [X \cap VD]$.

DEMONSTRAÇÃO - Por indução em $|VD| + |VG\backslash X|$.

1º CASO $W(X)\backslash VD$ não é vazio.

Seja v um vértice em $W(X)\backslash VD$, α uma ligação em $\delta(X)$ que incide em v, v' o extremo de α em $VG\backslash X$. Se $v' = x$ então (ii) vale, com $D_+ = D \cup \{(v,\alpha,x)\}$ e $w = v$.

Suponha pois que $v' \ne x$, seja X' o conjunto $\{v'\} \cup X$. Note que a hipótese de indução é aplicável a X' e D. Todo corte de vértices que separa X' e x separa também X e x. Pela hipótese de indução podemos então supor que o caso (ii) ocorre, com X' no lugar de X, D'_+ no lugar de D_+, e w' no lugar de w.

Se $w' \ne v'$, então v', um vértice em $V\backslash OD'$, pertence a $V\backslash OD'_+$ e portanto (ii) vale, com $D_+ = D'_+$ e $w = w'$. Se $w' = v'$, então v, um vértice em $X'\backslash VD'$, pertence a $V\backslash VD'_+$ e portanto (ii) vale, com D_+ a coleção obtida a partir de D'_+ substituindo o caminho P em D'_+ cuja ori gem é w' pelo caminho $(v,\alpha,v')P$, e com $w=v$. Em ambos os casos, (ii) vale.

2º CASO $X \cap VD \setminus OD$ não é vazio.

Seja $P=(v_0,\alpha_1,v_1,\ldots,\alpha_n,v_n)$ um caminho em D e m um inteiro tais que $0<m<n$ e $v_m \in X$. (Figura 3).

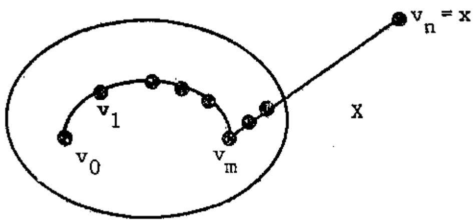


Figura 3

Note que P é um caminho com término x e portanto

$$\{v_1,\ldots,v_{m-1}\} \subseteq V \setminus \{x\}.$$

Seja então X' o conjunto $X \cup \{v_1,\ldots,v_{m-1}\}$, seja D' a coleção obtida de D substituindo P por $(v_m,\alpha_{m+1},v_{m+1},\ldots,\alpha_n,v_n)$. Note que $\{v_m\} = OD' \setminus OD$ e $\{v_0\} = OD \setminus OD'$. Observe também que a hipótese de indução é aplicável a X' e D', pois $X \subseteq X'$ e $|VD'| = |VD| - m < |VD|$. Se (i) valer, com X' no lugar de X, D' no lugar de D, e W' no lugar de W, então (i) vale para X e D com $W = W'$ pois todo corte que separa X' e x separa também X e x.

Suponha então que (ii) vale, para X' e D', com D'_+ no lugar de D_+ e w' no lugar de w. Note que v_m, um vértice em OD', pertence a OD'_+. Note também que o conjunto $\{v_0,v_1,\ldots,v_{m-1}\}$, que denotaremos M, é um subconjunto de $X' \setminus VD'$. Logo, ou $M \cap VD'_+ = \emptyset$ ou $M \cap VD'_+ =$

$= \{w'\}$.

Se $M\cap VD'_+ = \emptyset$ então faça $z = v_m$; se $M\cap VD'_+ = \{w'\}$ então faça $z = w'$. Em ambos os casos, seja r o inteiro tal que $0 \le r \le m$ e $z = v_r$, seja R o caminho em D'_+ cuja origem é z. Finalmente, seja D_+ a coleção obtida a partir de D'_+ mediante a substituição de R pelo caminho $(v_0,\alpha_1,v_1,\ldots,\alpha_r,v_r)R$. É fácil ver que (ii) vale, com $w = w'$ se $z = v_m$, e $w = v_m$ se $z = w'$.

3º CASO Nenhum dos anteriores.

Afirmamos que (i) vale, com $W = W(X)$. Certamente $W(X)$ é um corte de vértices, que separa X e x, e que não contém x, pois $X \subseteq V\setminus\{x\}$ e $W(X) \subseteq X$. Resta então mostrar que $W(X) = OD$, pois nesse caso $|W(X)| = |D|$.

Para mostrar que $W(X) \subseteq OD$, note que $W(X) = X\cap W(X)$, pois $W(X) \subseteq X$. Como o 1º caso não se aplica, então $W(X) \subseteq VD$. Portanto, $W(X) = X\cap W(X)\cap VD$. Como o 2º caso não se aplica, então $X\cap VD \subseteq OD$ Portanto, $W(X) \subseteq OD$.

Para mostrar que $OD \subseteq W(X)$, basta notar que pelo lema 3, cada caminho em D passa por um vértice em $W(X)$; como $W(X) \subseteq OD$, então a origem do caminho pertence a $W(X)$, pois D é constituída de caminhos disjuntos exceto no término x. De fato, $OD = W(X)$ e (i) vale, com $W = W(X)$. A demonstração do lema completa a demonstração do teorema.

■ ■

Convidamos o leitor a "aplicar" a demonstração do lema para o grafo da Figura 4, onde D consiste dos dois caminhos indicados, $x = 11$ e $X = \{1,2,3\}$.

COROLÁRIO 5 - Sejam u e v dois vértices distintos e não adjacentes em G; seja C_0 uma coleção máxima de caminhos de u a v dois a dois disjuntos internamente, W_0 um corte mínimo de vértices que separa u e

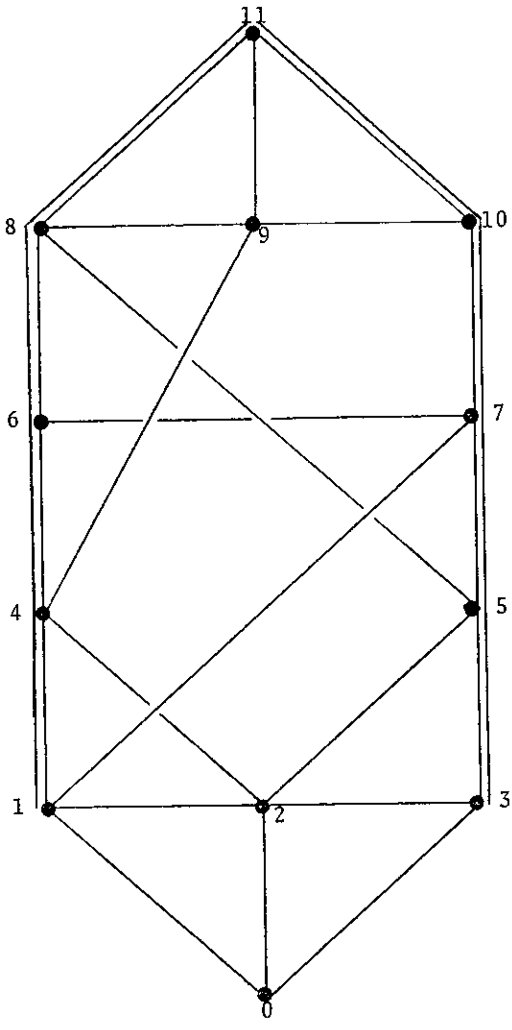


Figura 4

v mas não contém nem u nem v. Então $|C_0| = |W_0|$.

DEMONSTRAÇÃO - Se C é uma coleção de caminhos de u a v internamente disjuntos e se W é um corte de vértices que separa u e v mas não contém nem u nem v, então cada caminho em C passa por um vértice em W, e distintos caminhos em C passam por distintos vértices em W. Portanto, $|C| \leq |W|$, com igualdade somente se C é máxima e W é mínimo. Basta então produzir um tal par C, W com $|C| = |W|$.

Seja H o grafo $G-u$, X o conjunto $AdjG(u)\setminus\{u\}$. (No caso da Figura 4, se $u=0$ então $X=\{1,2,3\}$). Como u e v não são adjacentes, então $v \notin X$. Seja D uma coleção máxima de caminhos em H, disjuntos exceto no término v e todos com origem em X. Seja $W = WH(S)$ um corte mínimo de vértices em H que separa X e v mas não contém v.

A cada caminho P em D corresponde um caminho P' em G, de u a v, bastando para isso tomar $P' = (u,\alpha,u_0)P$, onde u_0 é a origem de P e α uma ligação com extremos u e u_0. Assim, $C = \{P' | P \in D\}$ é uma coleção de caminhos de u a v em G, dois a dois internamente disjuntos. Ademais, pelo teorema 4,

$$|C| = |D| = |W| \tag{1}$$

Por outro lado, mostramos agora que W é um corte de vértices em G que não contém nem u nem v mas separa u e v. Ora, $W = WH(S)$ é um corte em $H = G-u$ que separa X e v mas não contém v. Certamente W não contém nem u nem v. Se $v \in S$, então $X \subseteq VG\setminus S$ e nesse caso $W = WG(S)$; se $v \in VG\setminus S$ então $X \subseteq S$ e nesse caso $W = WG(S \cup \{u\})$ (Figura 5). Em ambos os casos, W é um corte de vértices em G que separa u e v.

De fato, em vista de (1), C é máxima, W é mínimo e $|C| = |W|$. ∎

COROLÁRIO 6 - Dois vértices distintos e não adjacentes de um grafo G são k-ligados se e somente se nenhum corte de vértices com menos de k vértices separa u e v mas não contém nem u nem v. ∎

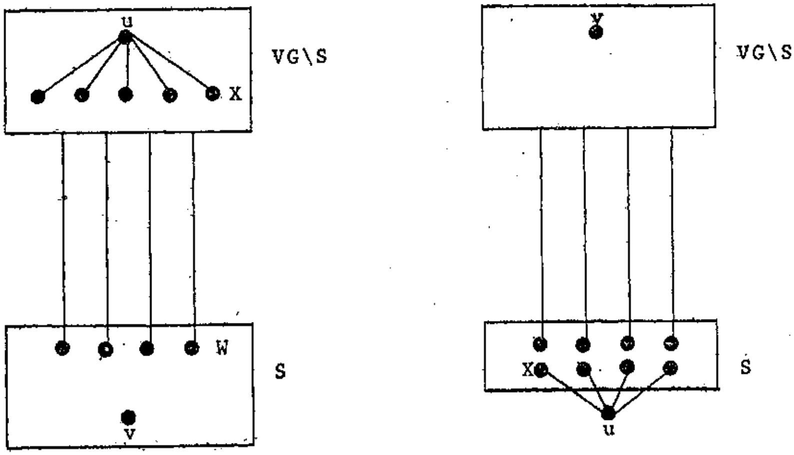


Figura 5

Um grafo é *k-conexo* (k≥0) se quaisquer dois de seus vértices são k-ligados. O grafo da Figura 2 é 2-conexo, mas não 3-conexo; o grafo da Figura 1 é 0-conexo· o grafo da Figura 4 é 0-conexo, 1-conexo, 2-conexo, 3-conexo mas não 4-conexo. Evidentemente, um grafo é 1-conexo se e somente se for conexo; todo grafo é 0-conexo; se um grafo é k-conexo então é k'-conexo para todo k' tal que $0 \leq k' \leq k$.

PROPOSIÇÃO 1 - Seja G um grafo com n vértices. Se $n \leq 1$ então G é k-conexo, para todo $k \geq 0$. Se $n \geq 2$ então G não é n-conexo, e será $n-1$ conexo se e somente se tiver um subgrafo gerador completo.

DEMONSTRAÇÃO - Como todo vértice é k-ligado a si mesmo, se $n \leq 1$ então G é k-conexo. Suponha então que $n \geq 2$, sejam u e v dois vértices distintos em G, x o conjunto das arestas cujos extremos são u e v, H o grafo $G - x$.

O corte $W = WH(VG \setminus \{v\})$ separa u e v em H mas não contém nem u nem v. Logo, u e v não são (n-1)-ligados em H. Portanto, u e v não são n-ligados em G. Ademais, u e v são (n-1)-ligados em G se e somente se u e v são adjacentes em G e $W_H(VG\setminus\{v\}) = VG\setminus\{u\}$, ou seja, se e somente se v for adjacente em G a todos os demais vértices de G.

Como estas conclusões valem para todos os pares de vértices distintos u e v em G, então G não é n-conexo, e será (n-1)-conexo se e somente se contiver um subgrafo gerador completo. ∎

Em vista da proposição 1, podemos definir a *conexidade* de um grafo G com pelo menos dois vértices como sendo o maior inteiro k tal que G é k-conexo.

TEOREMA 5 - Seja G um grafo com n vértices ($n \geq 2$) e que não contém um subgrafo gerador completo. Então a conexidade k_0 de G é caracterizada pelas seguintes propriedades:

(i) k_0 é a cardinalidade de cada corte mínimo W de vértices de G que é separador em G.

(ii) k_0 é a cardinalidade de cada subconjunto mínimo X de VG tal que G - X não é conexo.

DEMONSTRAÇÃO - Vamos primeiramente mostrar que W existe e $|W| \leq k_0$. Para tanto, sejam u_0 e v_0 dois vértices de G que são k_0-ligados mas não (k_0+1)-ligados. Se u_0 e v_0 não forem adjacentes então pelo corolário 6 existe um corte de vértices em G com precisamente k_0 vértices, que separa u_0 e v_0 mas não contém nem u_0 nem v_0. Nesse caso, W existe e $|W| \leq k_0$.

Podemos então supor que u_0 e v_0 são adjacentes. Seja x o conjunto das arestas de G cujos extremos são u_0 e v_0, seja H o grafo G - x. Então u_0 e v_0 são (k_0-1)-ligados em H, mas não k_0-ligados. Pelo corolário 6, existe em H um corte $W_0 = W_H(S)$ que separa u_0 e v_0 mas não contém nem u_0 nem v_0, e consiste de precisamente k_0-1 vérti ces. Pela proposição 1, $k_0 \le n-2$ e portanto $|W_0| \le n-3$. Seja então w um vértice em $VG \setminus [W_0 \cup \{u,v\}]$. Ajuste a notação, permutando u_0 e v_0, se necessário, de forma que $u_0 \in S$. Se w pertence a S então WG(S) separa w e v_0, não contém nem w nem v_0 e consiste de k_0 vértices (Figura 6). Se w pertence a $VG \setminus S$ então $WG(S \cup \{v_0\})$ separa u_0 e w, não contém nem u_0 nem w e consiste de k_0 vértices (Figura 7).

De fato, W existe e

$$|W| \le k_0. \tag{1}$$

Vamos agora mostrar que X existe e $|X| \le |W|$. Para tanto, sejam u e v vértices em $VG \setminus W$ que W separa. Qualquer passeio de u a v passa por um vértice em W; portanto u e v não são ligados em G-W. Logo,

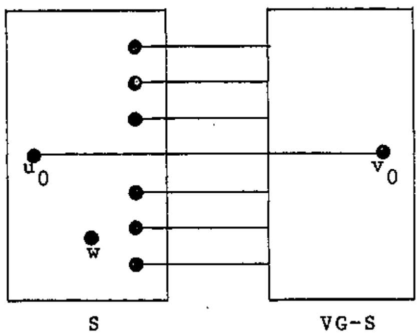


Figura 6

G - W não é conexo. De fato, X existe e

$$|X| \le |W|. \tag{2}$$

Finalmente, se u' e v' são vértices de G - X não ligados em

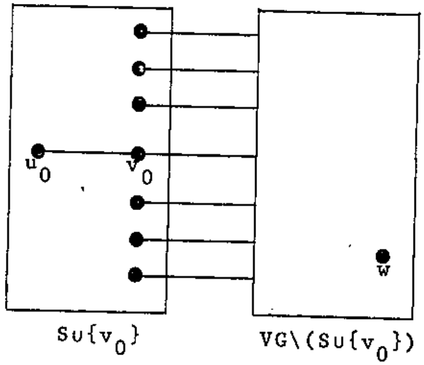


Figura 7

$G - X$, então u' e v' não são $(|X|+1)$-ligados em G, pois todo passeio de u' a v' em G passa por um vértice em X e passeios distintos de u' a v' em G internamente disjuntos passam por vértices distintos em X. Assim, $k_0 \leq |X|$. Desta desigualdade, (2) e (1) segue que $k_0 = |X| = |W|$. ∎

O próximo resultado é mais uma aplicação do "princípio da casa do pombo".

TEOREMA 6 - Se G é um grafo k-conexo ($k \geq 2$) com pelo menos 2 vértices então por quaisquer k vértices passa um passeio circular.

DEMONSTRAÇÃO - Por indução em k. Considere o caso $k = 2$, inicialmente. Sejam u e v dois vértices distintos em G. Pelo corolário 5 existem dois caminhos, P e Q, disjuntos internamente e de u a v em G. Então o produto de P com o reverso de Q, isto é, $P \cdot R(Q)$, é um passeio circular que passa por u e v.

Suponha então que $k \geq 3$, seja Z um subconjunto de VG com k vértices, u um vértice em Z. Como G é k-conexo, então G é $(k-1)$-conexo. Por indução existe em G um passeio circular C que passa por todos os vértices de $Z\setminus\{u\}$. Se C passa também por u, então C passa por todos os vértices de Z. Suponha então que C não passa por u.

O passeio circular C pode ser expresso (tomando uma rotação de C, se necessário) como um produto $C_1C_2\ldots C_{k-1}$ onde cada C_i é um caminho não degenerado e tem como origem um dos $k-1$ vértices em $Z\setminus\{u\}$, (Figura 8). Seja D uma coleção máxima de caminhos dois a dois disjuntos exceto no término u, todos com origem em VC. Sem perda de generalidade, $VD\setminus OD \subseteq V\setminus VC$.

Suponha que existe um i tal que $1 \leq i \leq k-1$ e dois caminhos distintos P_1 e P_2 de D tem sua origem em VC_i. Então C_i pode ser expresso como um produto $C_{i0}C_{i1}C_{i2}$ onde C_{i1} é não degenerado, sua origem e seu término constituem as origens de P_1 e de P_2 (Figura 8). Ajuste a notação, permutando P_1 e P_2 se necessário, de forma que a origem de C_{i1} seja a origem de P_1 e seu término a origem de P_2. Então $C_{i0}P_1R(P_2)C_{i2}C_{i+1}C_{i+2}\ldots C_{k-1}C_1C_2\ldots C_{i-1}$ é um passeio circular em G

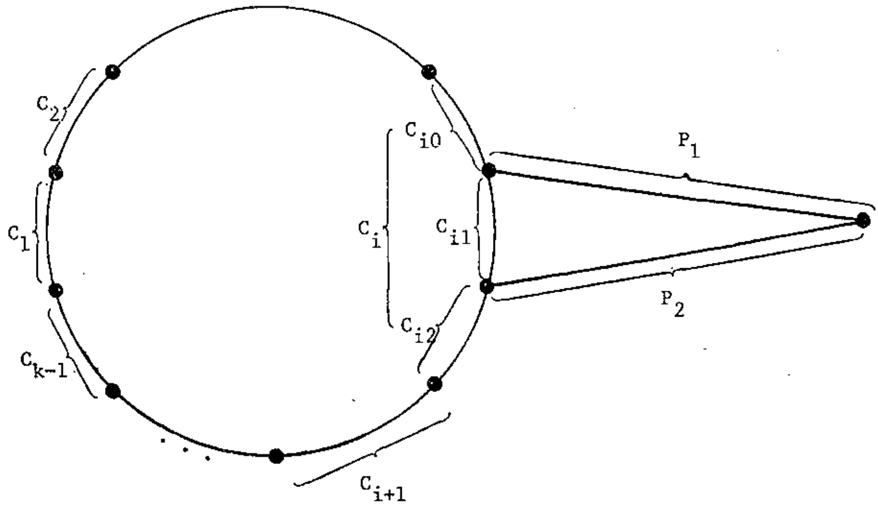


Figura 8

que passa por todos os vértices de Z.

Para completar a demonstração, resta então mostrar que pelo menos dois caminhos em D tem suas origens num mesmo VC_i $(1 \le i \le k-1)$. Ora este é certamente o caso se $|D| \ge k$. Suponha então que $|D| \le k-1$. Pelo teorema 4, existe um corte W de vértices que separa VC e u, não contém u e consiste precisamente de $|D|$ vértices.

Seja w um vértice em VC. Como G é k-conexo, então pelo corolário 6 ou W contém u, ou W contém w, ou w e u são adjacentes, ou W não separa w e u. Mas W separa VC e u, não contém u, e $w \in VC$. Logo $w \in W$. Como esta conclusão vale para todo vértice w em VC, então $VC \subseteq W$. Portanto,

$$k-1 \le |VC| \le |W| = |D| \le k-1.$$

Consequentemente, $|VC| = k-1 = |D|$. Portanto, $VC = Z-\{u\} = OD$. Assim, para cada C_i existem dois caminhos em D cujas origens são a origem e o término de C_i. A demonstração do teorema está completa. ∎

Da mesma forma como usamos passeios disjuntos internamente para definir a relação de k-ligação, podemos definir a relação de k-aresta-ligação usando passeios disjuntos nas arestas. Resultados semelhantes àqueles já obtidos valem também neste caso, com demonstrações mais simples ainda. Por isso, apenas enunciaremos a maioria destes resultados, deixando suas demonstrações como exercício para o leitor.

Dois vértices u e v são *k-aresta-ligados* em G $(k \ge 0)$ se $u = v$ ou se existem k passeios de u a v em G dois a dois disjuntos nas arestas. Novamente, quaisquer dois vértices são 0-arestas-ligados e a relação de 1-ligação coincide com a relação de 1-aresta-ligação e com a relação de ligação. Se dois vértices são k-aresta-ligados então são também k'-aresta-ligados, para todo k' tal que $0 \leq k' \leq k$. No grafo da Figura 2, os vértices 2 e 3 são 6-aresta-ligados, os vértices 3 e 4 são 4-aresta-ligados, mas não 5-aresta-ligados, pois o corte $\delta(\{2,3\})$ de arestas separa 3 e 4 e consiste de quatro arestas (lema 3).

Um grafo G é *k-aresta-conexo* ($k \geq 0$) se quaisquer dois de seus vértices são k-arestas-ligados.

PROPOSIÇÃO 2 - Seja G um grafo com n vértices. Se $n \leq 1$ então G é k-aresta-conexo, qualquer que seja $k \geq 0$. Se $n \geq 2$ e d denota o mínimo dos graus dos vértices de G, então G não é (d+1)-aresta-conexo.

DEMONSTRAÇÃO - Imediata. ∎

A *aresta-conexidade* de um grafo G com pelo menos dois vértices é o maior inteiro k tal que G é k-aresta-conexo.

COROLÁRIO 7 - Seja G um grafo com pelo menos dois vértices, d o mínimo dos graus dos vértices de G, k_0 a conexidade de G e k'_0 a aresta-conexidade de G. Então $k_0 \leq k'_0 \leq d$.

DEMONSTRAÇÃO - Basta notar que quaisquer dois passeios distintos disjuntos internamente são disjuntos nas arestas. ∎

TEOREMA 7 - Sejam X e Y dois subconjuntos de VG, disjuntos. Então uma coleção máxima de caminhos com origem em X e término em Y, dois a dois disjuntos nas arestas tem a mesma cardinalidade de um corte mínimo de arestas que separa X e Y.

DEMONSTRAÇÃO - Análoga à do teorema 4.

Mostre que se D é uma coleção de caminhos com origem em X e término em Y, dois a dois disjuntos nas arestas, então uma das seguintes alternativas vale:

ou (i) existe um corte d de arestas que separa X e Y, e $|d|=|D|$, ou (ii) existe outra coleção D_+ de caminhos com origem em X, término em Y, dois a dois disjuntos nas arestas, e também uma aresta α em $oD_+ \backslash oD$ tais que

$$oD_+ = \{\alpha\} \cup oD \quad \text{e}$$

$$aD_+ \cap aG[X] \subsetneq aD \cap aG[X]. \quad \blacksquare$$

COROLÁRIO 8 - Dois vértices de um grafo G são k-aresta-ligados se e somente se nenhum corte com menos do que k arestas os separa. $\blacksquare$

TEOREMA 8 - Seja G um grafo com n vértices ($n \geq 2$). Então a aresta-conexidade k_0' de G é caracterizada pelas seguintes propriedades:

(i) k_0' é a cardinalidade de cada corte mínimo de arestas de G que é separador em G.

(ii) k_0' é a cardinalidade de cada subconjunto mínimo x de aG tal que $G - x$ não é conexo.

DEMONSTRAÇÃO - Análoga à do teorema 5. $\blacksquare$

EXERCÍCIOS

1. Mostre que para quaisquer subconjuntos X e Y de V, $\delta(X \oplus Y) = \delta(X) \oplus \delta Y$, onde $\oplus$ denota a operação de "diferença simétrica", ou seja $A \oplus B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
2. Mostre que um subconjunto de aG é um corte se e somente se é a união de uma coleção de cortes não vazios minimais, dois a dois disjuntos.
3. Mostre que se G é conexo então $\delta(S)$ é um corte não vazio minimal se e somente se $G[S]$ e $G[V \backslash S]$ são ambos subgrafos próprios de G e conexos.

4. Mostre que um conjunto de arestas é um corte se e somente se sua interseção com cada circuito do grafo contém um número par de arestas. Conclua então que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) G é biparticionável.

(ii) aG é um corte em G.

(iii) todo circuito em G consiste de um número par de arestas.

5. Mostre que $|\delta(S)|$ é ímpar se e somente se o número de vértices de grau ímpar que pertencem a S é ímpar.

6. Mostre que se $W = WG(S)$ então $W((VG\setminus S)\cup W)\subseteq W$.

7. Mostre que todo grafo simples com n vértices e mais do que $\binom{n-1}{2}$ arestas é conexo.

8. Mostre que se G é um grafo simples com n vértices e cada um de seus vértices tem grau pelo menos $(n-1)/2$ então G é conexo.

9. Demonstre que dois caminhos de comprimento máximo num grafo conexo não são disjuntos.

10. Mostre que se modificarmos a definição de S_k $(k>0)$ no enunciado do teorema 3 para

$$S_1 = \mathrm{Adj}(\{u\})\setminus\{u\}$$

$$\text{e} \quad S_k = \mathrm{Adj}(S_{k-1})\setminus(S_{k-1}\cup S_{k-2}) \quad (k>1)$$

então obteremos a mesma seqüência $S_0, S_1, \ldots$.

11. Suponha que a seqüência $S_0, S_1, \ldots, S_\ell$ a que se refere o enunciado do teorema 3 seja fornecida. Esboce um algoritmo efi-

ciente que calcula um caminho de comprimento mínimo de u a um vértice dado.

12. Seja $S_0, S_1, \ldots, S_\ell$ a seqüência a que se refere o enunciado do teorema 3. O que se pode afirmar a respeito do grafo $G[S_{\leq \ell}]$?

13. Mostre que para quaisquer vértices distintos u e v ligados em G a distância de u a v é igual à cardinalidade de cada coleção máxima de cortes de arestas dois a dois disjuntos que separam u e v, e é igual a d-1, onde d é a cardinalidade de cada coleção máxima de cortes de vértices dois a dois disjuntos que separam u e v.

14. Suponha que a cada aresta α de um grafo G seja associado um real não negativo $p(\alpha)$. O *peso* de um passeio $(v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$ é a soma $p(\alpha_1) + p(\alpha_2) + \ldots + p(\alpha_n)$, e a *p-distância* entre dois vértices u e v é o mínimo dos pesos dos passeios de u a v. Generalize o teorema 3 e demonstre a generalização obtida.

15. Como se pode determinar eficientemente um circuito mínimo que contenha uma aresta dada, ou verificar que nenhum circuito contém?

16. A *cintura* de um grafo é a cardinalidade de cada circuito mínimo, se o grafo tiver algum circuito. Como se pode determinar eficientemente a cintura de um grafo?

17. Um passeio é *par* (*ímpar*) se seu comprimento é par (ímpar). Da mesma forma como distância e cintura foram definidos com relação a passeios, podemos também definir distâncias e cinturas pares e ímpares. Por exemplo, a *distância par* de u a v é

o mínimo dos comprimentos dos passeios pares de u a v. Dê exemplos de passeios pares (ímpares) de u a v cujo comprimento seja a distância par (ímpar) de u a v mas que não sejam trilhas.

18. Defina uma seqüência $(P_0,I_0),(P_1,I_1),\ldots$ de pares ordenados de subconjuntos de V de forma que para cada k, $P_k(I_k)$ é o conjunto dos vértices cuja distância par (ímpar) de u é 2k (2k+1).

19. Prove que existe um passeio fechado ímpar em G se e somente se existe um passeio circular ímpar em G. Mostre, através de um exemplo, que a afirmação fica falsa se substituirmos "ímpar" por "par", mesmo se substituirmos "passeio" por "trilha". Como se pode calcular eficientemente a cintura ímpar de um grafo?

20. Dado um conjunto t de arestas de um grafo G, um passeio P = $= (v_0,\alpha_1,v_1,\ldots,\alpha_n,v_n)$ é *alternado* com relação a t se para cada i ($1 \le i \le n-1$), uma das arestas α_i e α_{i+1} pertence a t, a outra a G\t. Podemos então definir distância alternada da maneira usual. Dê uma definição recursiva da seqüência $S_0,S_1,\ldots,S_k,\ldots$ tal que S_k é o conjunto dos vértices cuja distância alternada a u é igual a k, para cada $k \ge 0$. Se necessário, substitua cada S_k por $P_k \cup I_k$, e defina uma seqüência $(P_0,I_0),(P_1,I_1),\ldots$ recursivamente.

21. Dê um exemplo de um corte de arestas não vazio d que separa dois vértices u e v, e um subconjunto S de $V\setminus\{u,v\}$ tal que $d = \delta(S)$.

22. Caracterize a classe de grafos para os quais a seguinte de-

finição de k-ligação é equivalente àquela dada no texto: "Dois vértices u e v são k-ligados em G se $u = v$ ou se existem k passeios de u a v dois a dois disjuntos internamente".

23. Dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação."Sejam X e Y subconjuntos disjuntos de VG. Então a cardinalidade de cada coleção máxima de caminhos com origem em X e término em Y, dois a dois disjuntos, é igual à cardinalidade de cada corte mínimo de vértices que separa X e Y" (confronte esta afirmação com as dos teoremas 4 e 7).
24. Mostre que se X e Y são subconjuntos (não necessariamente disjuntos) de V então a cardinalidade de cada coleção máxima de caminhos com origem em X e término em Y, dois a dois disjuntos, é igual à cardinalidade de cada subconjunto mínimo Z de V tal que no grafo $G - Z$, nenhum vértice em $X \setminus Z$ é ligado a algum vértice em $Y \setminus Z$.
25. Mostre que um grafo com pelo menos 2k vértices é k-conexo se e somente se, para quaisquer subconjuntos X e Y de V com pelo menos k vértices cada um,existem k caminhos dois a dois disjuntos, com origem em X e término em Y. Sugestão: use o teorema 4 e o raciocínio do corolário 5.
26. Mostre que se G é 2-conexo então quaisquer duas ligações de G pertencem a um circuito em G.
27. Dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação (compare-a com o teorema 6):" Se G é um grafo k-aresta-conexo ($k \geq 2$) com pelo menos 2 vértices então por quaisquer k arestas passa um passeio circular". Mostre que essa afirmação é falsa mesmo se restringirmos os conjuntos de k arestas a arestas duas a

duas não adjacentes.

28. Mostre que dois passeios disjuntos internamente são disjuntos nas arestas.
29. Demonstre a proposição 2.
30. Demonstre o teorema 7.
31. Demonstre o teorema 8.
32. Seja G um grafo simples com n vértices ($n \geq 2$) e d o mínimo dos graus dos vértices em G. Mostre que se $d \geq (n-1)/2$ então a aresta-conexidade de G é igual a d.

NOTAS

A definição de k-ligação e de conexidade aqui apresentada não é única. Alguns autores [Harary 1969, Bondy e Murty 1976] preferem a caracterização (ii) dada no teorema 5; outros usam ainda outra definição, imune a dualidade planar [Tutte 1966]. O teorema 4 e os corolários 5 e 6 são variações do famoso teorema de Menger (1927). Uma dessas variações, a do corolário 6, aparece num trabalho de Whitney, juntamente com a desigualdade do corolário 7 [Whitney 1932b]. O caso particular do teorema 6, para $k = 2$ bem como o resultado enunciado no exercício 26 também são de Whitney (1932a). O teorema 6 foi demonstrado por Dirac (1960a). É também de Dirac (1960b) o resultado enunciado no exercício 25. Uma solução para o exercício 14 é conhecida como o algoritmo de Dijkstra (1959). Igualdades minimax análogas ao teorema de Menger envolvendo arestas ao invés de vértices (teoremas 7 e 8 e corolário 8) só foram descobertas mais tarde por Ford e Fulkerson (1956), no contexto de fluxos em redes. Para um estudo mais aprofundado de conexidade sugerimos a já citada monografia de Tutte (1966).

CAPÍTULO III

G R A U

1 - SEQÜÊNCIAS GRÁFICAS

Seja G um grafo com n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$. A seqüência $(g(v_1), g(v_2), \ldots, g(v_n))$ é uma *seqüência de graus* de G. Uma seqüência de naturais é *gráfica* se for uma seqüência de graus de algum grafo, e *estritamente gráfica* se for uma seqüência de graus de algum grafo simples.

Seja f uma função de um conjunto V no conjunto N dos naturais. Dizemos que f é *gráfica* se existe um grafo G tal que V = VG e $gG(v) = f(v)$ para todo v em V, e *estritamente gráfica* se existir um tal G que seja simples. Para X um subconjunto de V, f(X) denota $\sum_{v \in X} f(v)$.

TEOREMA 1 - Uma função $f: V \longrightarrow N$ é gráfica se e somente se f(V) é par.

DEMONSTRAÇÃO - Se f é gráfica então existe um grafo G tal que V = VG e $gG(v) = f(v)$ para todo v em V; nesse caso, $f(V) = \sum gG(v) = 2|aG|$, pela proposição 1 do capítulo I; portanto, f(v) é par.

Reciprocamente, se f(V) é par então o conjunto $X = \{v | v \in V$ e $f(v)$ é ímpar$\}$ tem um número par de elementos; nesse caso podemos particionar X em pares $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_4\}, \ldots, \{x_{|X|-1}, x_{|X|}\}$; podemos definir então G como um grafo em que existem $|X|/2$ ligações, com ex tremos x_1 e x_2, x_3 e x_4, .. , $x_{|X|-1}$ e $x_{|X|}$, respectivamente, e $(f(V)-|X|)/2$ laços, $f(v)/2$ dos quais incidentes a cada vértice v em $V \setminus X$, e $(f(v)-1)/2$ dos quais incidentes a cada vértice v em X. ∎

A Figura 1 mostra um exemplo em que $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, v_1, v_2, v_3\}$ consiste de sete elementos,

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 3 \text{ e } f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = 2.$$

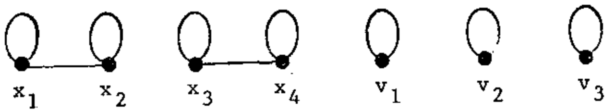


Figura 1

O grafo ilustrado na Figura 2 é outra solução para a função f mencionada.

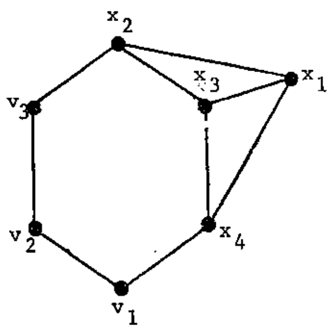


Figura 2

Conforme vimos, a solução dada pelo teorema 1 nem sempre (quase nunca) é um grafo simples, mesmo quando existe uma solução simples. O próximo resultado caracteriza funções estri tamente gráficas:

TEOREMA 2 - Uma função gráfica $f: V \longrightarrow N$ é estritamente gráfica se e somente se $f(X) \leq k(k-1) + \sum_{v \in V \setminus X} \min\{k, f(v)\}$ para cada subconjunto X de V (onde k denota a cardinalidade de X).

DEMONSTRAÇÃO - Para verificar que a condição citada é necessária, suponha que f é estritamente gráfica. Seja G um grafo simples com $V = VG$ e $gG = f$. Considere um subconjunto X de V, seja k a cardinalidade de X. Então, se H denota o grafo G[X] e K denota o grafo G-X, temos que (figura 3)

$$\sum_{v \in X} gG(v) - \sum_{v \in X} gH(v) = |\delta(X)| = \sum_{v \in V \setminus X} (gG(v) - gK(v)). \qquad (1)$$

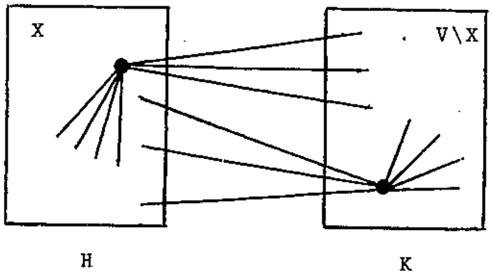


Figura 3

Como G é simples, então

$$gH(v) \leq k-1 \qquad (v \in X) \qquad (2)$$

e

$$gG(v) - gK(v) \leq \min\{k, f(v)\} \qquad (v \in V \setminus X). \qquad (3)$$

De (1), (2) e (3),

$$f(X) \leq k(k-1) + \sum_{v \in V \setminus X} \min\{k, f(v)\}. \qquad (4)$$

De fato, a citada condição é necessária. Para mostrar sua suficiência, suponha que vale. Vamos provar, por indução em $|V|$, que f é estritamente gráfica. Certamente f é estritamente gráfica se $V=\emptyset$, pois nesse caso basta tomar o grafo vazio.

Suponha então que $V\neq\emptyset$. Vamos colocar os n vértices de V na ordem $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ de forma que $f(v_1)\geq f(v_2)\geq\ldots\geq f(v_n)$.

Por hipótese, a condição (4) vale para todo subconjunto X de V. Em particular, quando $X=\{v_1\}$, temos que

$$f(v_1) \leq \sum_{i=2}^{n}\min\{1,f(v_i)\} \leq n-1.$$

Assim, $f(v_1)\leq n-1$. Ademais, denotando por X_0 o conjunto $\{v_2,\ldots,v_{f(v_1)+1}\}$, temos que $f(v)\geq 1$ para todo v em X_0. Seja então V' o conjunto $V\setminus\{v_1\}$, f': $V'\longrightarrow N$ a função definida por

$$f'(v) = \begin{cases} f(v)-1, & \text{se } v\in X_0 \\ f(v), & \text{se } v\in V'\setminus X_0 \end{cases}$$

Pelo lema abaixo e pela hipótese de indução, f' é estritamente gráfica. Seja pois G' um grafo simples com $VG'=V'$ e $gG'=f'$. Então adicionando a G' o vértice v, e $f(v_1)$ ligações $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{f(v_1)+1}$ tais que v_1 e v_i são os extremos de α_i para todo i $(2\leq i\leq f(v_1)+1)$, obtemos um grafo simples G com $VG=V$ e $gG=f$. De fato, se (4) vale para todo subconjunto X de V então f é estritamente gráfica.

LEMA - A função f': $V'\rightarrow N$ é gráfica; ademais, para cada subconjunto X de V',

$$f'(X) \leq k(k-1) + \sum_{v\in V'\setminus X}\min\{k,f'(v)\}, \tag{5}$$

onde k denota a cardinalidade de X.

DEMONSTRAÇÃO - Para mostrar que f' é gráfica, basta notar que $f'(V') = f(V) - 2f(v_1)$. Como f é gráfica então f' é gráfica, pelo teorema 1.

Vamos mostrar que a condição (5) vale, por indução em $|X \setminus X_0|$.

1º CASO $f(v) \geq k+1$ para todo vértice v em $X_0 \setminus X$.

Pela escolha de v_1 e X_0,

$$f(X) \leq kf(v_1) = k|X_0| = k|X_0 \cap X| - |X_0 \setminus X| + (k+1)|X_0 \setminus X|. \qquad (6)$$

Como $f'(X) = f(X) - |X_0 \cap X|$, então de (6) segue que

$$f'(X) \leq (k-1)|X_0 \cap X| - |X_0 \setminus X| + (k+1)|X_0 \setminus X|. \qquad (7)$$

Por hipótese do caso, $\min\{k+1, f(v)\} = k+1$ para todo v em $X_0 \setminus X$. Portanto,

$$(k+1)|X_0 \setminus X| = \sum_{v \in X_0 \setminus X} \min\{k+1, f(v)\} = |X_0 \setminus X| + \sum_{v \in X_0 \setminus X} \min\{k, f'(v)\}. \qquad (8)$$

De (7) e (8),

$$f'(X) \leq (k-1)|X_0 \cap X| + \sum_{v \in X_0 \setminus X} \min\{k, f'(v)\},$$

Daí a validade de (5), pois $|X_0 \cap X| \leq |X| = k$. A análise do 1º caso está completa.

2º CASO $X \subseteq X_0$ e $f(v) \leq k$ para cada v em $V' \setminus (X \cup X_0)$.

Seja X' o conjunto $X \cup \{v_1\}$. Então,

$$f'(X) = f(X') - f(v_1) - |X \cap X_0| = f(X') - |X_0| - k. \qquad (9)$$

Por outro lado,

$$f(X') \le (k+1)k + \sum_{v \in V \setminus X'} \min\{k+1, f(v)\} . \qquad (10)$$

Se v pertence a $X_0 \setminus X$ então $\min\{k+1, f(v)\} = 1 + \min\{k, f'(v)\}$; se v pertence a $V' \setminus (X \cup X_0)$ então $f'(v) = f(v) \le k$ e portanto $\min\{k+1, f(v)\} = \{k, f'(v)\}$. Logo,

$$\sum_{v \in V \setminus X'} \min\{k+1, f(v)\} = \sum_{v \in V' \setminus X} \min\{k, f'(v)\} + |X_0 \setminus X| . \qquad (11)$$

Finalmente, $|X_0 \setminus X| = |X_0| - |X| = |X_0| - k$. Desta, (9), (10) e (11),

$$f'(X) \le (k+1)k + \sum_{v \in V' \setminus X} \min\{k, f'(v)\} - 2k.$$

Portanto, (5) vale. A análise do 2º caso está completa.

3º CASO Existe um vértice w em $X \setminus X_0$ e outro w_0 em $X_0 \setminus X$ tais que $f(w) < f(w_0)$.

Como $f'(w_0) = f(w_0) - 1$ e $f'(w) = f(w)$, então $f'(w) \le f'(w_0)$. Seja X' o conjunto $[X \setminus \{w\}] \cup \{w_0\}$. Por indução (uma vez que $X' \setminus X_0 = (X \setminus X_0) \setminus \{w\}$),

$$f'(X') \le k(k-1) + \sum_{v \in V' \setminus X'} \min\{k, f'(v)\}. \qquad (12)$$

Mas

$$\sum_{v \in V' \setminus X'} \min\{k, f'(v)\} - \sum_{v \in V' \setminus X} \min\{k, f'(v)\} = \min\{k, f'(w)\} - \min\{k, f'(w_0)\} \le 0 \qquad (13)$$

e

$$f'(X) - f'(X') = f'(w) - f'(w_0) \le 0. \qquad (14)$$

De (12), (13) e (14) segue a validade de(5). A análise do 3º caso está completa.

4º CASO Nenhum dos anteriores.

Como o 1º caso não se aplica, então existe um vértice w_0 em $X_0 \backslash X$ tal que $f(w_0) \leq k$.

Por definição de X_0,

$$f(v) \leq f(w_0) \leq k \qquad (\forall v \in V' \backslash X_0). \tag{15}$$

Como o 2º caso não se aplica, então $X \backslash X_0$ é não vazio, seja w um de seus vértices. Como o 3º caso não se aplica, então

$$f(v) \leq f(w) \qquad (\forall v \in X_0 \backslash X). \tag{16}$$

De (15) e (16), temos que

$$f(v) \leq k \qquad (\forall v \in V' \backslash (X \cap X_0)) \tag{17}$$

pois $w \in V' \backslash X_0$.

Seja X' o conjunto $X \backslash \{w\}$. Por indução, (pois $X' \backslash X_0 = (X \backslash X_0) \backslash \{w\}$),

$$f'(X') \leq (k-1)(k-2) + \sum_{v \in V' \backslash X} \min\{k-1, f'(v)\} + \min\{k-1, f'(w)\}.$$

Logo,

$$f'(X') \leq (k-1)(k-1) + \sum_{v \in V' \backslash X} \min\{k, f'(v)\}. \tag{18}$$

Finalmente,

$$f'(X) = f'(X') + f'(w) \leq f'(X') + k.$$

Desta e (18),

$$f'(X) \leq 1 + k(k-1) + \sum_{v \in V' \setminus X} \min\{k, f'(v)\}. \tag{19}$$

Para mostrar a validade de (5), resta agora mostrar que a desigualdade estrita se aplica a (19). Para tanto, note que, de (17),

$$\sum_{v \in V' \setminus X} \min\{k, f'(v)\} = f'(V' \setminus X).$$

Logo, de (19),

$$f'(X) \leq 1 + k(k-1) + f'(V' \setminus X) \tag{20}$$

com igualdade se e somente se a igualdede se aplica a (19). Mas $f'(V')$ é par e portanto $f'(X) \equiv f'(V' \setminus X)$ (mod 2). Ademais, $k(k-1)$ é par. Portanto, a desigualdade estrita se aplica a (19) e a (20). De fato, (5) vale. A análise do 4º caso completa a demonstração do lema. ∎

A demonstração do lema completa a demonstração do teorema.

∎

COROLÁRIO 1 - Seja $f = (f_1, \ldots, f_n)$ uma seqüência não crescente de naturais. Então f é estritamente gráfica se e somente se $\sum f_i$ é par e

$$\sum_{i=1}^{k} f_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, f_i\}$$

para todo k tal que $1 \leq k \leq n$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto com n elementos. Seja f a função de V em N que associa a cada v_i o valor f_i. Basta notar que para cada subconjunto X de V, onde k designa sua cardinalidade,

$$f(X) \leq \sum_{i=1}^{k} f_i$$

e

$$\sum_{i=k+1}^{n} \min\{k,f_i\} \leq \sum_{v \in V \setminus X} \min\{k,f(v)\}.$$

Assim, a condição enunciada implica na validade da condição enunciada no teorema. Por outro lado, evidentemente esta implica aquela. Assim, as duas são equivalentes. ∎

Vamos agora demonstrar uma outra propriedade a respeito de seqüências estritamente gráficas, que a rigor segue como corolário da demonstração do teorema 2. O método a ser utilizado é todavia diferente daquele usado na demonstração do teorema 2.

TEOREMA 3 - Seja $f = (f_1,\ldots,f_n)$ uma seqüência não crescente de naturais. Então f é estritamente gráfica se e somente se $f_1 \leq n-1$ e $f' = (f_2-1, f_3-1,\ldots,f_{f_1+1}-1, f_{f_1+2},\ldots,f_n)$ é estritamente gráfica.

DEMONSTRAÇÃO - Obviamente, se $f_1 \leq n-1$ e f' é estritamente gráfica então f é estritamente gráfica.

Vamos considerar portanto somente o caso em que f é estritamente gráfica. Nesse caso, evidentemente $f_1 \leq n-1$. Seja $V = \{v_1,\ldots,v_n\}$ um conjunto com n elementos e f a função de V em N que associa a cada v_i o valor f_i. Note que intencionalmente estamos usando o mesmo símbolo f, seja para a seqüência, seja para a função. Seja $\mathcal{G}$ a classe dos grafos simples G com $VG = V$ e $gG = f$. Como f é estritamente gráfica, então $\mathcal{G}$ é não vazia. Seja X_0 o conjunto $\{v_2,v_3,\ldots,v_{f_1+1}\}$. Seja G um grafo em $\mathcal{G}$ tal que $\Delta G = \mathrm{Adj}G(v_1) \setminus X_0$ seja minimal.

Vamos agora mostrar que ΔG é vazio. Para tanto, suponha o contrário, seja v_i um vértice em ΔG. Como $|AdjG(v_1)| = |X_0|$, então $X_0 \backslash AdjG(v_1)$ é não vazio, seja v_j um de seus vértices.

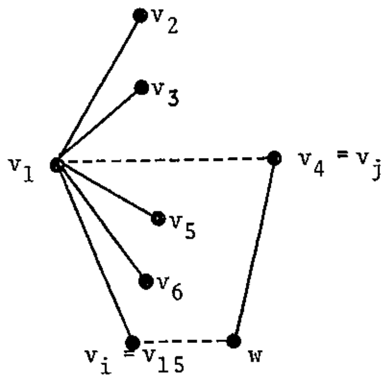


Figura 4

Por definição de X_0, $j < i$. (A figura 4 mostra um exemplo em que $f_1 = 5$, $i = 15$ e $j = 4$). Portanto, $f_j \geq f_i$. Ou seja $gG(v_j) \geq gG(v_i)$. Mas v_i é adjacente a v_1 e v_j não o é. Logo, existe um vértice, w, adjacente a v_j mas não a v_i (figura 4). Substituindo em G as ligações com extremos v_j e w, e v_1 e v_i, por ligações com extremos v_1 e v_j, e v_i e w, obtemos outro grafo simples G' em $\mathcal{G}$, com $\Delta G' \subseteq \Delta G \backslash \{v_i\}$, em contradição a escolha de G. De fato, ΔG é vazio.

Como $|AdjG(v_1)| = |X_0|$, então $AdjG(v_1) = X_0$. Logo, f' é a função grau do grafo $G - v_1$. De fato, f' é estritamente gráfica. ∎

2 - EMPARELHAMENTOS

Na seção anterior, vimos caracterizações de funções gráficas e estritamente gráficas. Quanto às últimas, podemos dizer que decidir se uma dada função $f: V \longrightarrow N$ é estritamente gráfica equivale a decidir se existe um subgrafo G de um grafo completo K com VK = V e tal que f = gG. Podemos pensar então na seguinte generalização: e ja K um grafo (não necessariamente simples nem tampouco completo), f uma função de VK em N. Em que condições K tem um subgrafo gerador G tal que f = gG? A resposta a esta pergunta será dada na próxima seção. Nesta seção consideraremos casos particulares desta questão, em que f(v) = 1 para todo v em VK.

Considere um conjunto t de arestas de um grafo G. Para X um subconjunto de VG, Xt denota o conjunto dos vértices incidentes a arestas de t. Dizemos que t *cobre* um subconjunto Y de VG se cada vértice em Y incide em pelo menos uma aresta em t: assim, t cobre Y se e somente se Y = Yt. Dizemos que t é um *emparelhamento com relação a* um subconjunto X de VG se nenhum laço em t incide em algum vértice em X e nenhum vértice em X é incidente a mais de uma ligação em t. Assim t é um emparelhamento em relação a X se e somente se gH(v) ≤ 1 para todo vértice v em X, onde H denota o grafo G (aG\t).

Quando t cobre VG dizemos simplesmente que t é uma *cobertura* de (vértices) de G; quando t é um emparelhamento com relação a VG dizemos simplesmente que t é um *emparelhamento* em G.

Considere agora um conjunto T de vértices de um grafo G. Para x um subconjunto de aG, xT denota o conjunto das arestas incidentes a vértices de T. Dizemos que T *cobre* um subconjunto y de aG se cada aresta em y incide em pelo menos um vértice em T: assim, T cobre y se e somente se y = yT. Dizemos que T é *independente com relação a* um subconjunto x de aG se nenhuma aresta em x tem ambos os extremos (ou o único extremo, no caso de laços) em T: assim, T é independente com relação a x se e somente se nenhuma aresta em x pertence a aH, onde

H denota o grafo $G[T]$.

Quando T cobre aG dizemos simplesmente que T é uma *cobertura* de (arestas) de G; quando T é independente com relação a aG dizemos que T é *independente* em G.

Finalmente, dado um grafo G, $V_0(G)$ denota o conjunto dos vértices de G que têm grau zero em G; quando G é subentendido, V_0 abrevia $V_0(G)$.

TEOREMA 4 - Seja G um grafo, t em emparelhamento em G, c uma cobertura de vértices em $V \backslash V_0$, T um conjunto de vértices independente em G, C uma cobertura de arestas de G. Então

(i) $|T| \leq |c| + |V_0|$, com igualdade somente se T é máximo e c é mínima.

(ii) $|t| \leq |C|$, com igualdade somente se t é máximo e C é mínima.

(iii) $V \backslash T$ cobre aG e $V \backslash C$ é independente em G.

(iv) existe uma cobertura c' dos vértices de $G - V_0$ e um emparelhamento t' em G tais que

$$|t| + |c'| + |V_0| \leq |V| \leq |t'| + |c| + |V_0|.$$

(v) se T é máximo e C é mínima então

$$|T| + |C| = |V|.$$

(vi) se t é máximo e c é mínima então

$$|t| + |c| + |V_0| = |V|.$$

DEMONSTRAÇÃO -

(i) cada vértice em T ou pertence a V_0 ou incide em arestas em c; ademais, vértices distintos em $T\backslash V_0$ incidem em arestas distintas de c, pois T é independente e c cobre $V\backslash V_0$. Se T' é um conjunto independente em G e c' cobre $V\backslash V_0$ então $|T'|\leq|c|+|V_0|$ e $|T|\leq|c'|+|V_0|$; assim, se $|T| = |c|+|V_0|$ então $|T'|\leq|T|$ e $|c|\leq|c'|$, logo T é máximo e c é mínima.

(ii) análoga a (i).

(iii) nenhuma aresta de G tem ambos os extremos em T e toda aresta de G tem pelo menos um extremo em C; logo, toda aresta de G tem pelo menos um extremo em $V\backslash T$, e nenhuma aresta de G tem ambos os extremos em $V\backslash C$. Portanto, $V\backslash T$ cobre aG e $V\backslash C$ é independente em G.

(iv) Para cada vértice v em $(V\backslash V_0)\backslash Vt$, escolha arbitrariamente uma aresta $\alpha(v)$ incidente em v, seja $c' = t\cup\{\alpha(v)\,|\,v\in(V\backslash V_0)\backslash Vt\}$. Então $|c'|\leq|t|+|V|-|V_0|-|Vt| = |V|-|V_0|-|t|$ e portanto $|t|+|c'|+|V_0| \leq |V|$.

Seja t' um subconjunto maximal de c tal que t' é um emparelhamento em G. Então nenhuma ligação em $c\backslash t'$ tem ambos os extremos em $V\backslash Vt'$; por outro lado, todo vértice em $(V\backslash V_0)\backslash Vt'$ incide em pelo menos uma aresta em $c\backslash t'$. Logo, $|(V\backslash V_0)\backslash Vt'| \leq |c\backslash t'|$. Assim,

$$|V| - |V_0| - 2|t'| \leq |c| - |t'|.$$

Ou seja, $|V| \leq |t'| + |c| + |V_0|$.

(v) De (iii), temos que $V\backslash T$ cobre aG e portanto $|C|\leq|V|-|T|$. De (iii), temos também que $V\backslash C$ é independente e portanto $|V|-|C| \leq |T|$. De fato, $|T| + |C| = |V|$.

(vi) Analogamente a (v), de (iv) temos que

$$|t| + |c'| + |V_0| \leq |V| \text{ e portanto } |t| + |c| + |V_0| \leq |V|.$$

Ainda de (iv), $|V| \leq |t'| + |c| + |V_0|$ e portanto $|V| \leq |t| + |c| + |V_0|$. Daí a igualdade $|t| + |c| + |V_0| = |V|$. ∎

Convém ressaltar que a desigualdade (i) no enunciado do teorema 4 é muitas vezes estrita, mesmo quando T é máximo e c é mínimo: considere por exemplo um triângulo A propósito,este mesmo exemplo (triângulo) serve para ilustrar que a desigualdade (ii) é também às vezes estrita, mesmo quando t é máximo e C é mínima. Veremos a seguir todavia que a igualdade ocorre em (i) e (ii) nas situações minimax, quando G é biparticionável.

Por outro lado, a recíproca de (v é falsa: um contra-exemplo trivial consiste em tomar um grafo não vazio G, fazer $T = \emptyset$ e $C = VG$. Analogamente, a recíproca de (vi) é falsa: deixamos a cargo do leitor a elaboração de contra-exemplos.

TEOREMA 5 - Seja G um grafo com bipartição {X,Y}. A cardinalidade de cada cobertura mínima C de arestas de G é igual a de cada emparelhamento máximo t em G.

DEMONSTRAÇÃO - Adicione a G um novo vértice x, e ligações entre x e cada vértice em Y, desta forma obtendo um novo grafo H (figura 5). Assim, $G = H-x$.

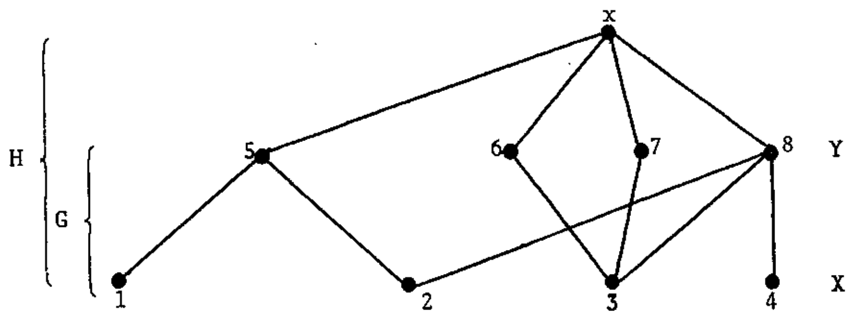


Figura 5

Seja W um corte mínimo de vértices em H que separa X e x mas não contém x. (No caso da figura 5, {3,5,8} constituem um tal corte.) Então W é uma cobertura das arestas de G, pois se $\alpha \in aG$ com extremo u em X e v em Y e se β denota a aresta em H com extremos v e x, então $(u,\alpha\ v,\beta,x)$ é um caminho em H com origem em X e término x, portanto ou u ou v pertence a W. De fato, W cobre aG. Assim,

$$|C| \leq |W|. \tag{1}$$

Seja agora D uma coleção máxima de caminhos em H dois a dois disjuntos exceto no término x e todos com origem em X. A cada caminho $P = (v_0,\alpha_1,v_1,\ldots,\alpha_n,v_n)$ em D corresponde uma aresta $\alpha(P)=\alpha_1$, de G (note que $n \geq 2$); ademais a caminhos distintos em D correspondem arestas sem extremo em comum. Assim, $\{\alpha(P) | P \in D\}$ é um emparelhamento em G, com cardinalidade $|D|$. Logo,

$$|D| \leq |t|. \tag{2}$$

De (1) e (2), pelo teorema 4 do capítulo II e pelo teorema 4, (ii), $|C| = |t|$. ∎

COROLÁRIO 2 - Seja G um grafo com bipartição $\{P,N\}$, c uma cobertura mínima dos vértices em $V \backslash V_0$, T um conjunto independente máximo. Então $|c| + |V_0| = |T|$.

DEMONSTRAÇÃO - Pelo teorema 5, existe uma cobertura C de aG e um emparelhamento t em G tais que

$$|C| = |t|. \tag{1}$$

Pelo teorema 4, (iv), existe uma cobertura c dos vértices em $V \backslash V_0$ tal que

$$|t| + |c'| + |V_0| \leq |V|. \tag{2}$$

Pelo teorema 4, (iii), $V \setminus C$ é independente em G. De (1) e (2),

$$|c| \le |c'| \le |V| - |V_0| - |t| = |V| - |V_0| - |C| \le |T| - |V_0|.$$

Portanto, $|c| \le |T| - |V_0|$. Do teorema 4, (i), segue que $|c|+|V_0| = |T|$.

∎

O próximo resultado é conhecido como teorema de Hall, e às vezes chamado de "o problema dos casamentos" (vide exercício 11).

TEOREMA 6 - Seja G um grafo com bipartição $\{X,Y\}$. Existe um emparelhamento que cobre Y se e somente se

$$|Y \cap V_0(G-Z)| \le |Z|,$$

para cada subconjunto Z de X.

DEMONSTRAÇÃO - Para verificar a necessidade da condição, seja t um emparelhamento em G que cobre Y, Z um subconjunto de X. Seja v um vértice em $Y \cap V_0(G-Z)$. Como v pertence a Y e t cobre Y, então v é o extremo de uma aresta, α, em t. Seja u o extremo de α em X. Como v pertence a $V_0(G-Z)$, então u pertence a Z. Podemos assim associar a cada vértice v em $Y \cap V_0(G-Z)$ um vértice $u(v)$ em Z, de forma que v e $u(v)$ são adjacentes em G[t]. Como t é um emparelhamento, então se $v' \ne v''$ segue que $u(v') \ne u(v'')$ para quaisquer vértices v' e v'' em $Y \cap V_0(G-Z)$. Assim, a desigualdade vale.

EXEMPLO - Considere o grafo G da figura 5. Não existe emparelhamento que cobre Y em G pois se tomarmos $Z=\{3\}$, temos que $Y \cap V_0(G-Z)=\{6,7\}$.

Para verificar a suficiência da citada condição, suponha que ela vale, seja t um emparelhamento máximo em G, C uma cobertura mínima de aG. Pelo teorema 5, $|C| = |t|$.

Seja Z o conjunto $C \cap X$. Note que para cada vértice v em $Y \setminus C$, $Adj(v) \subseteq Z$, pois C cobre aG e $\{X,Y\}$ é uma bipartição de G. Assim, $Y \setminus C \subseteq Y \cap V_0(G \setminus Z)$. Logo,

$$|Y \setminus C| \leq |Y \cap V_0(G \setminus Z)| \leq |Z| = |C \cap X|.$$

Portanto, $|Y| \leq |C|$. Mas $|C| = |t| = |Yt|$. Logo, $|Y| \leq |Yt|$. Ou seja, $Y = Yt$ e t cobre Y. ∎

O leitor atento deverá notar que o enunciado do teorema 6 não se generaliza de maneira ingênua para grafos não biparticionáveis. Poder-se-ia pensar que a condição

$$|V_0(G-Z)| \leq |Z|$$

para todo subconjunto Z de VG é necessária e suficiente para que um grafo G tenha um emparelhamento que cobre VG. Esta condição é certamente necessária (vide exercício 16), mas não suficiente; mais uma vez, o triângulo é um contra-exemplo.

Daremos a seguir a condição necessária e suficiente para que G tenha um emparelhamento *perfeito*, isto é, um emparelhamento que cobre VG. Dado um grafo H, um componente K de H é *ímpar* se $|VK|$ é ímpar, e *par* se $|VK|$ é par; denotamos por $I(H)$ o conjunto de componentes ímpares de H. A condição necessária e suficiente para que G tenha um emparelhamento perfeito é que

$$|I(G-Z)| \leq |Z|,$$

para todo subconjunto Z de VG. Mais adiante, iremos demonstrar esta afirmação. Vamos agora dar três exemplos. O grafo G da figura 6 não tem um emparelhamento perfeito, pois se tomarmos $Z = \{v\}$, então $|I(G-Z)| = 3$. O triângulo também não tem um emparelhamento perfeito, basta tomar $Z = \emptyset$.

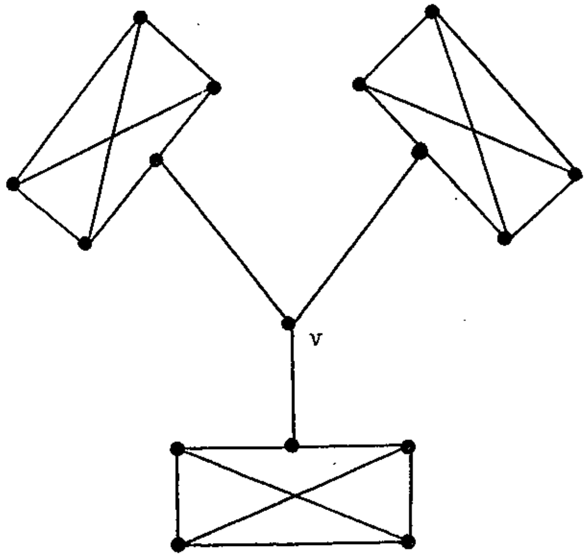


Figura 6

No caso do grafo G da figura 5, se tomarmos $Z = \{3\}$ temos $|I(G-Z)| = 3$.

LEMA 1 - Seja t um emparelhamento num grafo G, Z um subconjunto de VG. Então

$$|I(G-Z)| \leq |V \backslash Vt| + |Zt|.$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja K um componente ímpar de G - Z, tal que t cobre VK. Como VK é ímpar, então pelo menos uma aresta α em t tem um extremo em VK, o outro em Zt. Podemos então associar a K o extremo v(K) de α em Zt. Por outro lado, se K é um componente ímpar de G - Z tal que t não cobre VK, então $VK \backslash Vt \neq \emptyset$ e podemos então associar a K um vértice $v(K)$ em $VK\setminus Vt$.

Note que $v\colon I(G\setminus Z) \longrightarrow [V\setminus Vt]\cup Zt$ é injetora, pois se K e K' são componentes distintos em $I(G\setminus Z)$ então $v(K) \neq v(K')$, pois t é um emparelhamento em G e VK e VK' são subconjuntos disjuntos de V. Daí a desigualdade enunciada. ∎

Dado um emparelhamento t em um grafo G, um passeio $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$ em G é t-*alternado* se para cada i tal que $1 \le i \le n-1$, uma das arestas α_i e α_{i+1} pertence a t, a outra a $aG\setminus t$. O passeio P é t-*par* se $n=0$ ou se $\alpha_1 \in aG\setminus t$, é t-*ímpar* se $n=0$ ou se $\alpha_1 \in t$. Note que qualquer passeio de comprimento menor do que dois é t-alternado. A figura 7 mostra alguns exemplos de passeios alternados.

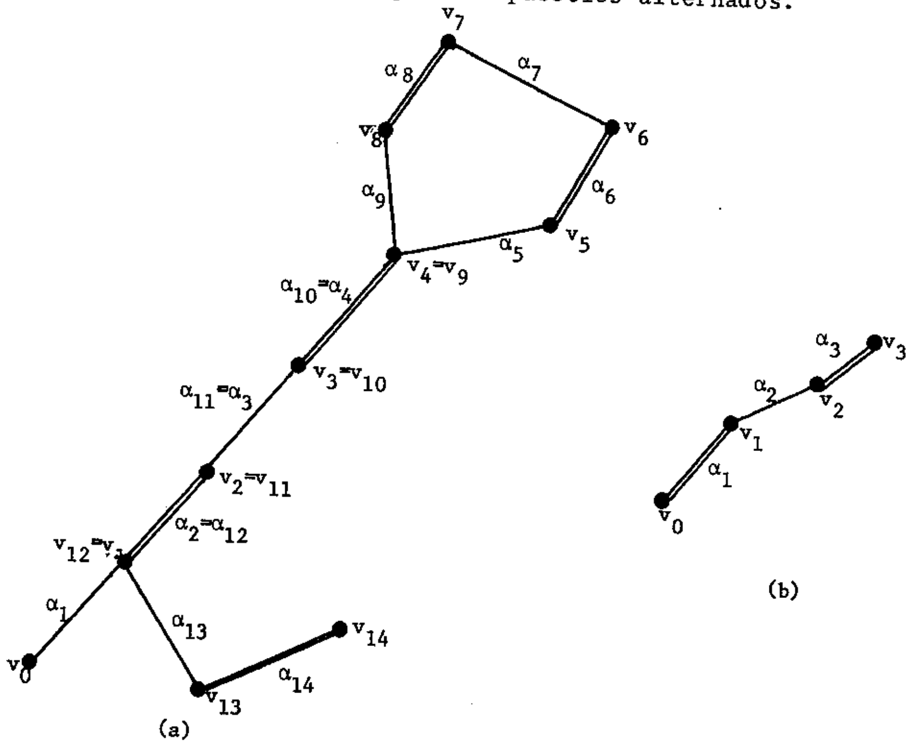


Figura 7

Enunciamos a seguir algumas propriedades elementares cujas demonstrações ficam a cargo do leitor.

LEMA 2 - Seja $P=(v_0,\alpha_1,v_1,\ldots,\alpha_n,v_n)$ um passeio t-alternado. Se P for t-par então $\alpha_{2i}\in t$ $(1\leq i\leq n/2)$ e $\alpha_{2i+1}\in aG\setminus t$ $(0\leq i\leq (n-1)/2)$, e se P for t-ímpar então $\alpha_{2i}\in aG\setminus t$ $(1\leq i\leq n/2)$ e $\alpha_{2i+1}\in t$ $(0\leq i\leq (n-1)/2)$. ∎

LEMA 3 - Se P é um passeio t-par (t-ímpar) de comprimento ímpar então R(P) é um passeio t-par (t-ímpar). Se P é um passeio t-par (t-ímpar) de comprimento par então R(P) é um passeio t-ímpar (t-par). ∎

LEMA 4 - Se P é um passeio t-ímpar cujo término pertence a $V\setminus Vt$ e α é uma aresta em t, então ou P não passa por nenhum dos extremos de α ou P passa por α. ∎

LEMA 5 - Seja C um caminho t-ímpar, com origem u, e com término v. Se v pertence a $V\setminus Vt$ então $t'=(t\cup aC)\setminus(t\cap aC)$ é um emparelhamento em G, com $Vt'=[Vt\cup\{v\}]\setminus\{u\}$. ∎

LEMA 6 - Se C é um caminho t-alternado não degenerado com origem u e término v, ambos em $V\setminus Vt$, então $t'=(t\cup aC)\setminus(t\cap aC)$ é um emparelhamento em G, com $Vt'=\{u,v\}\cup Vt$. ∎

Denotaremos por Q(G,t) o conjunto dos vértices v de G que são origens de caminhos t-ímpares com término em $V\setminus Vt$. No grafo G da figura 7(a), onde $v_0\in V\setminus Vt$, temos $Q(G,t)=\{v_0,v_2,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$.

Se H é um subgrafo de G, então tH denota o emparelhamento $t\cap aH$ de H. Um subgrafo H de G é um *t-vértice em* G se $VH\setminus V(tH)$ é unitário e $VH=Q(H,tH)$. O subgrafo $G[\{v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}]$ do grafo G da figura 7(a) é um t-vértice em G. Note que qualquer subgrafo de G com precisamente um vértice é um t-vértice em G, qualquer que seja t e G.

TEOREMA 7 - Seja t um emparelhamento em G tal que Vt é maximal. Então existe um subconjunto Z de V tal que

$$|I(G-Z)| = |V\setminus Vt| + |Z|.$$

Ademais, cada componente em I(G-Z) é um t-vértice em G.

DEMONSTRAÇÃO - A demonstração será feita mediante os seguintes resultados, onde Q abrevia Q(G,t) e Z denota o conjunto Adj(Q)\Q.

LEMA 7 - $V\setminus Vt \subseteq Q$.

LEMA 8 - Toda aresta em t com um extremo em Z tem o outro extremo em Q.

LEMA 9 - Para cada componente K em G[Q], VK = Q(K,tK).

LEMA 10 - Para cada componente K em G[Q], se $|VK\setminus V(tK)| \geq 2$ então para cada vértice v em VK\V(tK) existe em K um caminho tK-par não degenerado com origem em VK\V(tK) e término v.

LEMA 11 - Para cada componente K em G[Q], $|VK\setminus V(tK)| = 1$.

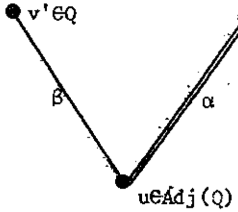


Figura 8

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 7 - Para cada vértice v em V\Vt, (v) é um caminho t-par em G com orgiem v e término em V\Vt. Portanto v∈Q; logo,

$V \backslash Vt \subseteq Q$. ∎

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 8 - Seja α uma aresta em t com extremos u e v, suponha que $u \in Adj(Q)$. Seja β uma aresta que incide em u e tem um extremo v' em Q (figura 8). Seja C um caminho t-ímpar em G com origem v' e término em $V \backslash Vt$. Se C passa por α então C pode ser expresso como o produto $C'(u,\alpha,v)C''$ ou como o produto $C'(v,\alpha,u)C''$; no 1º caso $(u,\alpha,v)C''$ é um caminho t-ímpar com origem u e término em $V \backslash Vt$; no 2º caso $(v,\alpha,u)C''$ é um caminho t-ímpar com origem v e término em $V \backslash Vt$. Finalmente, se C não passa por α então C não passa nem por u nem por v; nesse caso $(v,\alpha,u,\beta,v')C$ é um caminho t-ímpar em G com origem v e término em $V \backslash Vt$. Em todos os três casos, pelo menos um de u e v pertence a Q. Assim, se $u \in Z = Adj(Q) \backslash Q$ então $v \in Q$. ∎

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 9 - Considere um vértice v em VK. Como $VK \subseteq Q$, então seja $C = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$ um caminho t-ímpar em G com origem $v_0 = v$ e término em $V \backslash Vt$. Ora, (v_0) é um caminho em K. Seja então m o maior inteiro $\leq n$ tal que $C' = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_m, v_m)$ é um caminho em K.

Considere inicialmente o caso em que $m < n$ (figura 9, com $m = 4$ e $n = 8$). Pela maximalidade de m, $v_{m+1} \in V \backslash VK$; logo, $v_{m+1} \in V \backslash VQ$. Como $C'' = (v_{m+1}, \alpha_{m+2}, v_{m+2}, \ldots, \alpha_n, v_n)$ é um caminho t-alternado em G cujo término pertence a $V \backslash Vt$, então C'' não é ímpar; portanto, $m+1<n$ e $\alpha_{m+2} \in aG \backslash t$. Assim, $\alpha_{m+1} \in t$ e portanto $v_m \in VK \backslash V(tK)$. Logo, C' é um caminho tK-ímpar em K cujo término pertence a $VK \backslash V(tK)$ Assim, $v \in Q(K,tK)$.

Considere agora o caso em que $m = n$. O vértice v_n necessariamente pertence a $VK \backslash V(tK)$, pois pertence a $V \backslash Vt$. Assim, novamente C' é um caminho tK-ímpar em K, com origem v e término em $VK \backslash V(tK)$.

Em ambos os casos, $v \in Q(K,tK)$. Como esta conclusão vale para todo vértice v em VK, então de fato $VK = Q(K,tK)$. ∎

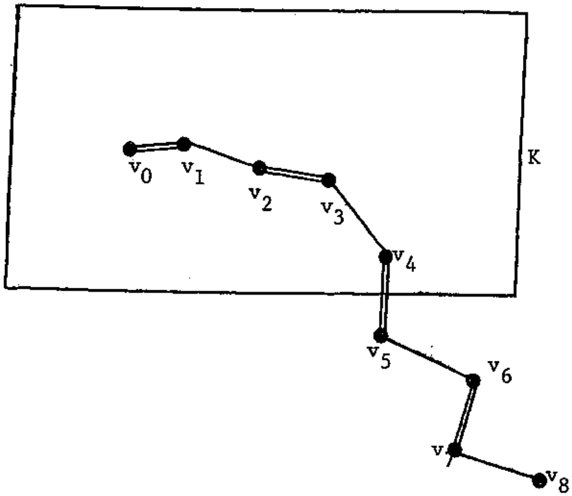


Figura 9

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 10 - Suponha que $|VK \setminus V(tK)| \geq 2$, seja v um vértice em $VK \setminus V(tK)$.

Observe que simplesmente pelo fato de pertencer a VK, $M = G[\{v\}]$ é um subgrafo de K tal que $\{v\} = VM \setminus V(tM)$ e $VM = Q(M,tM)$. Seja então X um subconjunto maximal (não vazio) de VK tal que $\{v\} = X \setminus V(tL)$ e $VL = Q(L,tL)$, onde L denota o grafo G[X] (figura 10).

Como $\{v\} = X \setminus V(tL)$ então nenhum vértice em $VK \setminus V(tK) \setminus \{v\}$ pertence a X. Assim, como K é conexo, então o corte $WK(VK \setminus X)$ não é vazio. Ademais, como $v \in VK \setminus V(tK)$, então $t \cap \delta K(X) = \emptyset$.

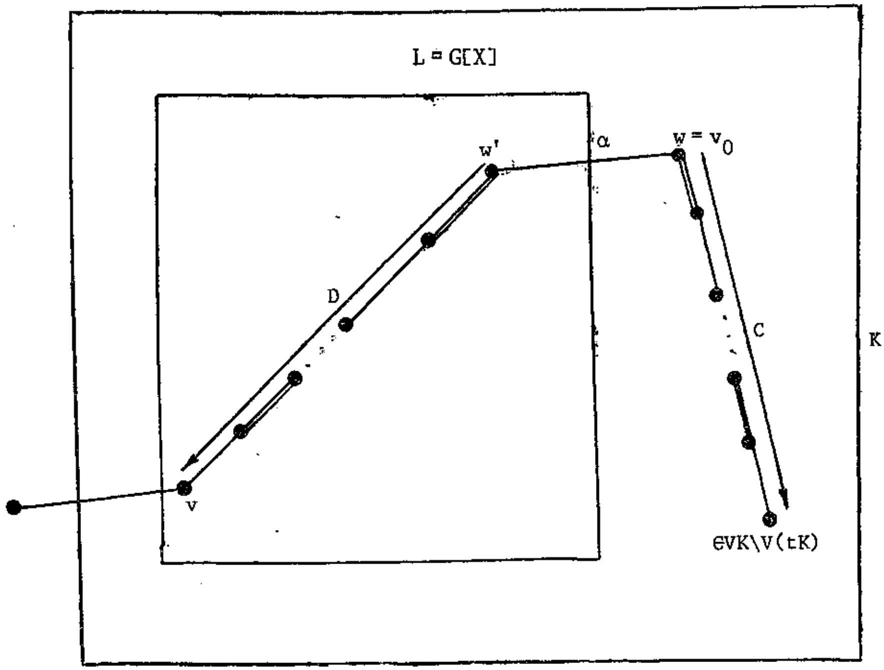


Figura 10

Considere agora um vértice w em WK(VK\X). Pelo lema 9, existe em K um caminho tK-ímpar $C = (v_0, \alpha_1, v_1 \ldots, \alpha_n, v_n)$ cuja origem v_0 é w e cujo término pertence a VK\V(tK). Seja α uma aresta em δK(X) que incide em w, seja w' seu extremo em X. Como $t \cap \delta K(X) = \emptyset$, então $\alpha \in aK \setminus t$.

Como $K = VL = Q(L, tL)$, então existe em L um caminho D tL-ímpar com origem em w' e término v.

Suponha que C é um caminho em K - X. Então C e D são disjun

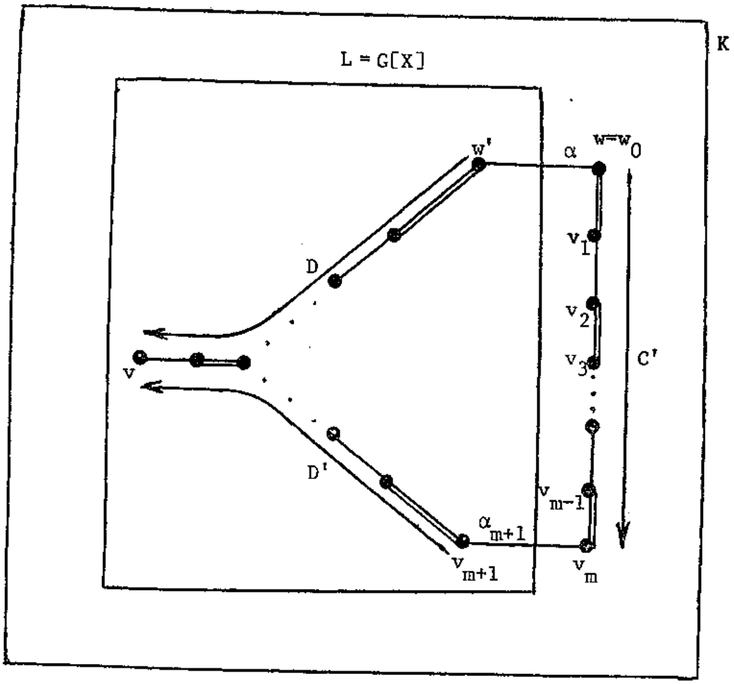


Figura 11

tos; ademais $R(C)(w,\alpha,w')D$ é um caminho tK-par não degenerado com o rigem em $VK\backslash V(tK)$ e término v.

Resta então mostrar que C é um caminho em $K - X$. Para tanto, suponha o contrário; observe que (v_0) é um caminho em $K - X$, pois $v_0 = w$. Seja então m o maior inteiro $\leq n$ tal que $C' = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_m, v_m)$ é um caminho em $K - X$. Seja $X' = X \cup VC'$, $L' = G[X']$. Vamos agora mostrar que X' contradiz a escolha de X (figura 11).

Observe primeiramente que para cada inteiro i tal que

$1 \leq 2i+1 \leq m$, $(v_{2i+1},\alpha_{2i+1},\ldots,v_1,\alpha_1,v_0)(w,\alpha,w')D$ é um caminho tK-ímpar em L', com origem v_{2i+1} e término v. Ademais, pela maximalidade de m, e uma vez que C não é um caminho em K - X, então $m<n$, $v_{m+1}\in X$, $\alpha_{m+1}\in aG\backslash t$.

Logo, m é ímpar e $\{v_1,v_3,\ldots,v_m\}\subseteq Q(L',tL')$.

Analogamente, seja D' um caminho tL-ímpar em L, com origem v_{m+1} e término v. Então para cada inteiro i tal que $0\leq 2i\leq m-1$, $(v_{2i}, \alpha_{2i+1},v_{2i+1},\ldots,\alpha_{m+1},v_{m+1})D'$ é um caminho tL'-ímpar em L', com origem v_{2i} e término v. Assim, $\{v_2,v_4,\ldots,v_{m-1}\}\in Q(L',tL')$.

Portanto, $X' = Q(L',tL')$.

Finalmente v, um vértice em $VK\backslash V(tK)$, pertence a $X'\backslash V(tL')$; todo vértice em $X'\backslash\{v\}$ pertence a $V(tL')$, pois C' e R(C') são ambos ímpares e não degenerados, e todo vértice em $X\backslash\{v\}$ pertence a $V(tL)$. Assim, $\{v\} = X'\backslash V(tL')$ e a escolha de X é de fato contradita.

Portanto existe um caminho tK-alternado não degenerado, com origem em $VK\backslash V(tK)$ e término v. ∎

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 11 - Em virtude do lema 9, $|VK\backslash V(tK)| \geq 1$. Suponha que $|VK\backslash V(tK)| \geq 2$. Dentre os vértices em VK, escolha um, v, tal que se C denota um caminho t-ímpar de v a algum vértice em $V\backslash Vt$, então para nenhum outro vértice v' em VK existe um caminho t-ímpar de v' a algum vértice em $V\backslash Vt$ cujo comprimento seja menor do que o de C.

Vamos agora mostrar que $v\in VK\backslash V(tK)$ e é o único vértice em $VK\cap VC$. Para tanto, observe que se o término de C pertence a VK então é v e $C = (v)$. Por outro lado, se o término de C pertence a $V \backslash VK$, então, como na demonstração do lema 9, C pode ser expresso como um produto $C'(v',\gamma,u)C''$, onde $\gamma \in t \cap \delta G(VK)$ e C'' é um caminho em $G - VK$; nesse caso, pela escolha de v e C, temos que C' é degenerado, $v = v'$.

De fato, em ambos os casos $v \in VK \backslash V(tK)$ e $\{v\} = VK \cap VC$ (figura 12).

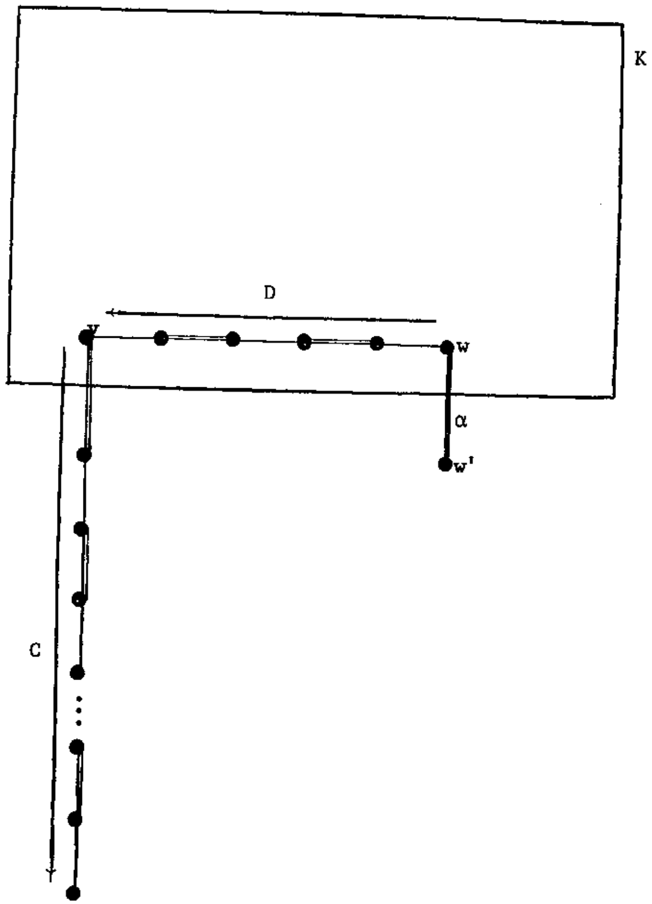


Figura 12 - A situação analisada no lema 11, no caso particular em que nem v nem w pertencem a $V \backslash Vt$.

Como $|VK\backslash V(tK)| \geq 2$, então pelo lema 10 existe em K um caminho t-alternado não degenerado D cuja origem, digamos w, pertence a $VK\backslash V(tK)$ e cujo término é v.

Note que DC é um caminho não degenerado e t-alternado em G cujo término pertence a $V\backslash Vt$. Se w pertence também a $V\backslash Vt$ então Vt não é maximal, pelo lema 6. Se w pertence a Vt e se α denota a aresta em t que incide em w e w' denota o extremo de α em $V\backslash VK$, então $(w',\alpha,w)DC$ é um caminho t-ímpar cuja origem, w', pertence a $V\backslash Q$ e cujo término pertence a $V\backslash Vt$, uma contradição. Note que C não passa por w e portanto não passa nem por w' nem por α, D não passa por w'; assim, $(w',\alpha,w)DC$ é de fato um caminho.

Em ambos os casos, com w em $V\backslash Vt$ ou com w em Vt, obtivemos uma contradição. De fato, $|VK\backslash V(tK)| = 1$. ∎

Para completar a demonstração do teorema, vamos denotar por J o conjunto de componentes do grafo G[Q].

Pelo lema 7,

$$V\backslash Vt = Q\backslash Qt, \tag{1}$$

e $Z \subseteq Vt$. Cada vértice v em Z pertence pois a Vt e pelo lema 8 é adjacente ao longo de uma aresta em t a um vértice v' em $Qt\backslash V(tQ)$; ademais, t é um emparelhamento e portanto se v e w são vértices distintos em Z entao são adjacentes ao longo de arestas em t a vértices distintos v' e w', respectivamente, em $Qt\backslash V(tQ)$. Assim,

$$|Z| \leq |Qt\backslash V(tQ)|. \tag{2}$$

Pelo lema 11,

$$|Q\backslash V(tQ)| = |J|. \tag{3}$$

Cada componente K em J é um subgrafo não vazio e conexo de G - Z; de fato, K é isolado em G - Z, pois $Z = AdjG(Q)\backslash Q$. Assim, cada componente em J é um componente de G - Z. Ademais, pelo lema 11, para cada componente K em J, $|VK|$ é ímpar, pois $|VK| = 1+2|tK|$. Assim,

$$J \subseteq I(G-Z). \tag{4}$$

De (1), (2) (3) e (4), temos que

$$|V\backslash Vt| + |Z| \leq |I(G-Z)|. \tag{5}$$

Pelo lema 1, a igualdade vale em (5), e portanto a igualdade vale em (2) e (4). Assim, I(G-Z) é J. Pelos lemas 9 e 11 cada componente em I(G-Z) é um t-vértice em G. A demonstração do teorema está completa. ∎

COROLÁRIO 3 - Um grafo G tem um emparelhamento perfeito se e somente se

$$|I(G-Z)| \leq |Z|$$

para todo subconjunto Z de VG.

DEMONSTRAÇÃO - Imediata, pelo lema 1 e teorema 7. ∎

COROLÁRIO 4 - Um emparelhamento t em um grafo G é máximo se e somente se existe um subconjunto Z de VG tal que

$$|I(G-Z)| = |V\backslash Vt| + |Z|.$$

DEMONSTRAÇÃO - Imediata, a partir do lema 1 e do teorema 7, uma vez que t é máximo se e somente se $V\backslash Vt$ é mínimo. ∎

COROLÁRIO 5 - Um emparelhamento t em um grafo G é máximo se e somente se Vt é maximal em $\{Vt' | t'$ é um emparelhamento em $G\}$.

DEMONSTRAÇÃO - Aplique o teorema 7 e o lema 1. ∎

3 - f-EMPARELHAMENTOS

Nesta seção vamos considerar um problema que abrange os considerados nas duas primeiras seções deste capítulo.

Dado um grafo G, a cada subconjunto t de aG corresponde uma função t de VG no conjunto N dos naturais, tal que para cada v em VG, t(v) é o grau de v no grafo $G-(aG\setminus t)$; assim, para cada v em VG, t(v) é o número de arestas de t que incidem em v, laços contados duas vezes. Note que usamos o mesmo símbolo tanto para o conjunto de arestas quanto para a função, mas é fácil distinguir quando se trata de um ou outro, pelo contexto.

Dada uma função f de V em N, e um subconjunto X de V, f(X) denota $\sum_{v \in X} f(v)$. Um subconjunto t de aG é um *f-emparelhamento* se $t(v) \leq f(v)$ para cada v em V, e um *f-emparelhamento perfeito* se $t(v) = f(v)$ para cada v em V. A *f-deficiência* de t é o inteiro $f(V) - t(V)$; note que a f-deficiência de t é sempre não negativa; é igual a zero se e somente se t é um f-emparelhamento perfeito.

Assim, um emparelhamento é um f-emparelhamento em que f é a função que associa o valor 1 a cada vértice de V; é perfeito se e somente se t for um f-emparelhamento perfeito; a f-deficiência de t é igual a $|V\setminus Vt|$, neste caso.

Por outro lado, se f é uma função de um conjunto V no conjunto N dos naturais, então f é estritamente gráfica se e somente se um grafo completo G com $VG = V$ admite um f-emparelhamento perfeito.

Vamos então caracterizar os pares G, f onde G é um grafo e f uma função de V em N, tais que G admite um f-emparelhamento perfeito; na verdade, vamos ver também como se determina um f-emparelhamento de f-deficiência mínima.

Dados dois subconjuntos disjuntos X e Y de VG, $\lambda G(X,Y)$ denota o conjunto $\delta G(X) \cap \delta G(Y)$; assim, $\lambda(X,Y)$ é o conjunto das arestas com um extremo em X, o outro em Y, e é igual a $\delta H(X) = \delta H(Y)$, onde $H = G[X \cup Y]$.

Dada uma partição $p = (S,T,U)$ de V em 3 blocos S, T e U (alguns eventualmente vazios), um componente K de $G[U]$ é *ímpar* com relação a $f: V \longrightarrow N$ e com relação à partição, se $f(VK) + |\lambda(VK, T)|$ é ímpar. Denotamos por $I(f,p)$ o conjunto de componentes de $G[U]$ ímpares com relação a f e a p.

Conforme veremos, a condição necessária e suficiente para que G admita um f-emparelhamento perfeito é que

$$|I(f,p)| \leq f(S) - [f(T) - 2|aG[T]| - |\lambda(U,T)|] \qquad \text{(I)}$$

para cada partição $p = (S,T,U)$ de V.

Vamos inicialmente ilustrar a necessidade desta condição com alguns exemplos. Evidentemente, G não admite um f-emparelhamento quando $f(V)$ é ímpar. De fato, se $f(V)$ é ímpar então a partição $p = (\emptyset,\emptyset,V)$ de V não satisfaz a condição mencionada acima (I) pois o lado direito da desigualdade é igual a zero, enquanto o esquerdo é positivo, uma vez que $f(V)$ sendo ímpar implica que $f(VK)$ é ímpar para pelo menos um componente K de G.

Como outro exemplo, considere o caso em que $f(v_0) > gG(v_0)$ para algum vértice v_0. Evidentemente, G não admite um f-emparelhamento perfeito. De fato, a partição $p = (\emptyset, \{v_0\}, V\setminus\{v_0\})$ não satisfaz a condição (I), pois como $T = \{v_0\}$, então $f(T) - 2|aG[T]| - |\lambda(U,T)| = f(v_0) - gG(v_0) > 0$; assim, o lado direito de (I) é negativo (pois $S = \emptyset$) e portanto (I) não é satisfeita.

Como um terceiro exemplo, considere o grafo da figura 13,

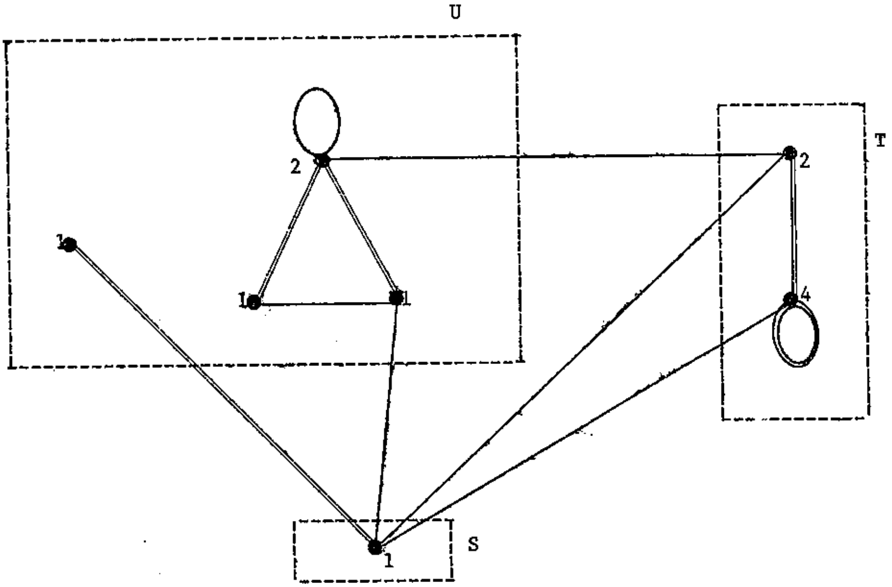


Figura 13

onde o número próximo a cada vértice indica o valor de f naquele vértice. O f-emparelhamento indicado tem f-deficiência 2. Evidentemente, nenhum f-emparelhamento tem f-deficiência ímpar pois f(V) é par. Assim, o f-emparelhamento indicado tem f-deficiência mínima, pois o grafo não admite um f-emparelhamento perfeito. De fato, se considerarmos a partição $p = (S,T,U)$ indicada, então os dois componentes de G[U] são ímpares com relação a f e p, $f(S) = 1$ e $f(T)-2|aG[T]|-|\lambda(U,T)|=6-4-1=$ $= 1$. Assim, p não satisfaz (I).

LEMA 12 - Seja t um f-emparelhamento em um grafo G, $p = (S,T,U)$ uma partição de V. Então

$$|I(f,p)| \le [f(V)-t(V)] + f(S) - [f(T) - 2|aG[T]| - |\lambda(U,T)|] \qquad \text{(II)}$$

Ademais, a igualdade ocorre em (II) se e somente se cada uma das seguintes condições vale:

(i) para cada componente K de G[U], $\Delta(K,t) \le 1$ onde $\Delta(K,t)$ denota

$$[f(VK)-t(VK)] + |\lambda(VK,S)\cap t| + |\lambda(VK,T)\setminus t|$$

e (ii) $a(G[T]) \subseteq t$

e (iii) $f(S) = t(S)$ e $t\cap a(G[S]) = \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO - Considere um componente K de G[U]. Então

$$t(VK) = 2|t\cap aK| + |\lambda(VK,S)\cap t| + |\lambda(VK,T)\cap t|.$$

Portanto,

$$0 \le \Delta(K,t) = f(VK) + |\lambda(VK,T)| - 2|t\cap aK| - 2|\lambda(VK,T)\cap t|.$$

Assim, $\Delta(K,t)$ é ímpar se e somente se $K \in I(f,p)$. Portanto,

$$|I(f,p)| \le [f(U)-t(U)] + |\lambda(U,S)\cap t| + |\lambda(U,T)\setminus t| \qquad (1)$$

com igualdade se e somente se (i) vale.

Por outro lado,

$$t(T) \le 2|aG[T]| + |\lambda(U,T)\cap t| + |\lambda(S,T)\cap t| \qquad (2)$$

com igualdade se e somente se (ii) vale. Finalmente,

$$|t \cap \delta(S)| \leq f(S) - t(S) + f(S) \tag{3}$$

com igualdade se e somente se (iii) vale.

Lembrando que $\lambda(U,S) \cup \lambda(S,T) = \delta(S)$, e somando (1),(2) e (3) obtemos (II), com igualdade se e somente se (i), (ii) e (iii) valem. ∎

TEOREMA 8 - Para todo grafo G e toda função f: $V \longrightarrow N$ existe um f-emparelhamento t de G e uma partição $p = (S,T,U)$ de V tal que

$$|I(f,p)| = [f(V)-t(V)] + f(S) - [f(T)-2|aG[T]| - |\lambda(U,T)|].$$

Ademais, $T \cap \{v | f(v)=1\} = \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO - Por indução em $|\{v|f(v) \neq 1\}|$.

Considere inicialmente o caso em que $f(v) = 1$ para todo v em V. Pelo teorema 7, existe um emparelhamento t em G e um subconjunto Z de V tais que

$$|I(G-Z)| = |V \backslash Vt| + |Z|.$$

É fácil verificar então que a asserção vale, com $p=(Z,\emptyset,V\backslash Z)$. Podemos pois supor que existe em V um vértice x tal que $f(x) \neq 1$.

Vamos agora definir um novo grafo G' e uma nova função $f':VG' \longrightarrow N$. Inicialmente, vamos "quebrar" x em gG(x) novos vértices, de forma que cada um deles fique com grau 1 (figura 14).

Adicionamos agora $\max\{0, gG(x)-f(x)\}$ novos vértices ao grafo, ligando cada um deles a cada um dos gG(x) vértices em que x foi quebrado (figura 15).

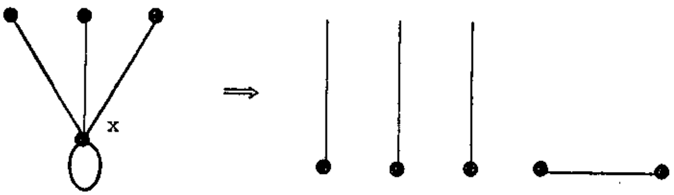


Figura 14

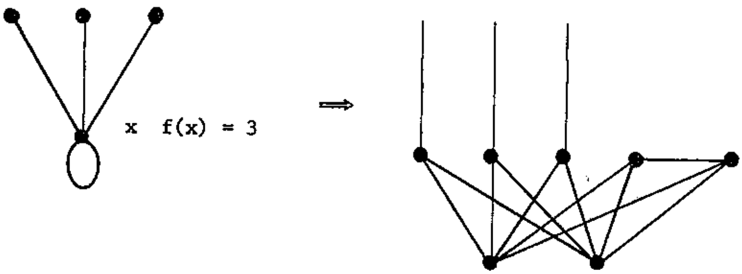


Figura 15

Finalmente, modificamos f, obtendo f', fazendo $f'(v) = f(v)$ para cada vértice "antigo", e $f'(v) = 1$ para cada "novo" vértice.

Formalmente, $VG' = [VG\setminus\{x\}] \cup Ext \cup Int$, onde $VG\setminus\{x\}$, Ext e Int são conjuntos 2 a 2 disjuntos, Ext consiste de $gG(x)$ vértices, Int consiste de $\max\{0, gG(x) - f(x)\}$ vértices, $Ext = \{v_\alpha \mid \alpha$ é uma aresta que em G incide em $x\} \cup \{w_\alpha \mid \alpha$ é um laço que em G incide em $x\}$. O conjunto aG' é então definido como sendo igual a $aG \cup [Ext \times Int]$ onde se supõe, sem perda de generalidade, que aG e $Ext \times Int$ são disjuntos, e a função de incidência $\psi G'$ de G' é assim definida:

$$\psi G'(\alpha) = \begin{cases} \psi G(\alpha), \text{ se } \alpha \in a(G-x) \\ \{u, v_\alpha\}, \text{ se } \alpha \text{ é uma ligação de G com extremos u e x} \\ \{v_\alpha, w_\alpha\}, \text{ se } \alpha \text{ é um laço de G que incide em x} \\ \{u', u''\}, \text{ se } \alpha \in Ext \times Int \text{ e } \alpha = (u', u''). \end{cases}$$

Finalmente, f' é a função de VG' em N que associa a cada vértice em VG\{x} o valor f(v) e a cada vértice em Ext∪Int o valor 1. Note que se gG(x) = 0 então G' = G-x e f' é a restrição de f a VG'.

A figura 16 mostra o grafo obtido a partir do grafo G da figura 13, efetuando a operação recém-descrita para cada vértice x tal que f(x) ≠ 1.

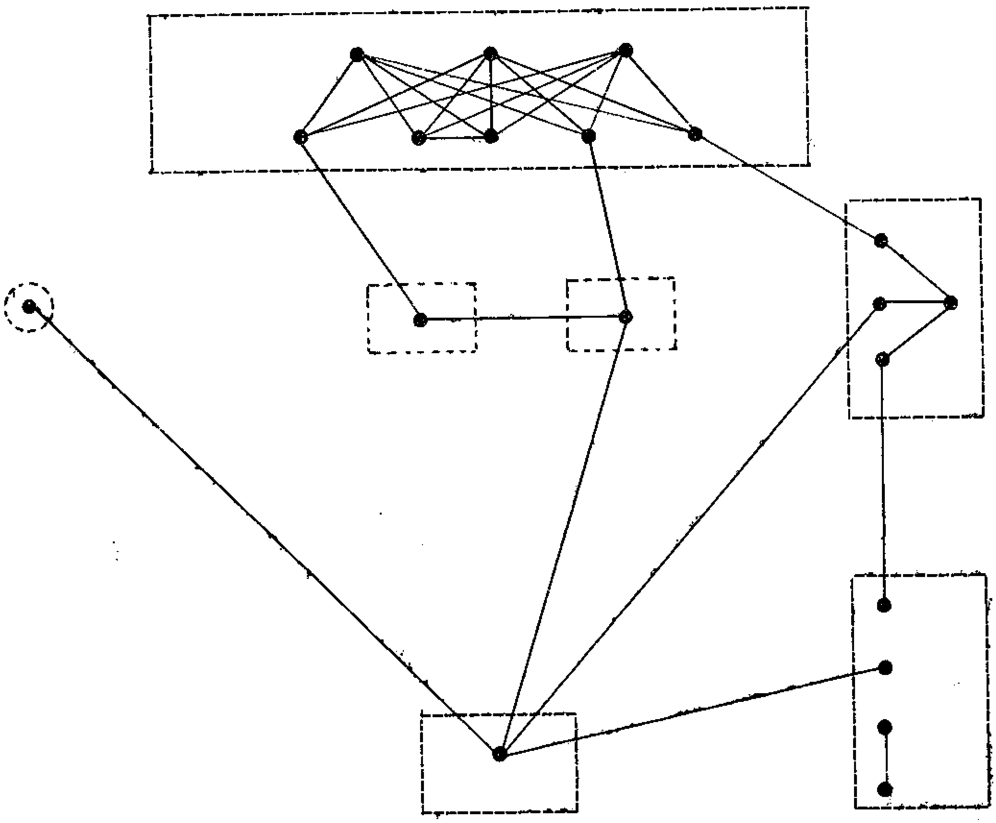


Figura 16

Podemos agora aplicar a hipótese de indução a G', f' uma vez que o vértice x foi substituído por vértices nos quais f' assume o valor 1.

Dentre os pares t', $p' = (S',T',U')$ tais que

$$|I(f',p')| = [f'(VG')-t'(VG')] + f'(S') - [f'(T')-2|aG'[T']| - |\lambda G'(U',T')|] \quad \text{(III)}$$

e

$$T' \cap \{v \mid f'(v)=1\} = \emptyset, \quad \text{(IV)}$$

escolha um tal que $t'\backslash aG$ é maximal e S é minimal.

LEMA 13 - O conjunto $t = t' \cap aG$ é um f-emparelhamento de G, com

$$f(VG) - t(VG) = f'(VG') - t'(VG') + \max\{0, f(x) - gG(x)\}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Vamos inicialmente mostrar que $t'(Int) = |Int|$, ou seja, que todo vértice em Int é incidente a uma aresta em t'. Para tanto, suponha que, pelo contrário, Int contém um vértice v que não incide em nenhuma aresta de t'. Pelo lema 12, a f -deficiência de t' é mínima, e portanto todo vértice em Ext é incidente a alguma aresta de t'. Como $|Ext| \geq |Int|$, então pelo menos um vértice de Ext é incidente a uma aresta de $t' \cap aG$; seja v' um tal vértice, α uma tal aresta. Então $t'' = [t'\backslash\alpha] \cup \{(v,v')\}$ contradiz a escolha de t'. De fato, $t'(Int) = |Int|$.

Portanto, $t'(Ext \cup Int) = t(x) + 2|Int|$. Assim, $f(VG) - t(VG) = f'(VG') - t'(VG') - [f'(Ext \cup Int) - t'(Ext \cup Int)] + f(x) - t(x) = f'(VG') - t'(VG') + f(x) + |Int| - |Ext|$.

Mas $|Int| - |Ext| = \max\{0, gG(x) - f(x)\} - gG(x)$. ∎

LEMA 14 - Seja v um vértice em S' com $f'(v) = 1$, o número de componentes em $I(f',p')$ que contêm vértices em $AdjG'(v)$. Então $n + |\lambda G'(\{v\},T')| \geq 3$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $S'' = S' \setminus \{v\}$, $U'' = U' \cup \{v\}$, $p'' = (S'', T', U'')$. Pela minimalidade de S' e pelo lema 12, da igualdade (III) segue que

$$|I(f', p'')| \leq |I(f', p')| + |\lambda G'(\{v\}, T'| - 2. \qquad (1)$$

Seja K' o conjunto dos componentes de G'[U'] que contêm vértices em AdjG'(v), seja K o componente de G'[U"] que contêm v. Então

$$f'(VK) + |\lambda G'(VK, T')| = 1 + |\lambda G'(\{v\}, T')| + \sum_{L \in K'} [f'(VL) + |\lambda G'(VL, T')|].$$

Assim,

$$f'(VK) + |\lambda G'(VK, T')| \equiv 1 + |\lambda G'(\{v\}, T')| + n \quad (\text{mod } 2).$$

Portanto,

$$|I(f', p'')| \geq |I(f', p')| - n \qquad (2)$$

com igualdade somente se $n + |\lambda G'(\{v\}, T')|$ for ímpar.

De (1) e (2), segue que $2 \leq n + |\lambda G'(\{v\}, T')|$, com igualdade somente se $n + |\lambda G'(\{v\}, T')|$ for ímpar. De fato, $n + |\lambda G'(\{v\}, T')| \geq 3$. ∎

LEMA 15 - Se $U' \cap \text{Int} \neq \emptyset$ então U' inclui Int.

DEMONSTRAÇÃO - Seja w um vértice em $U' \cap \text{Int}$, v outro em $\text{Int} \setminus \{w\}$. Como $\text{Adj}G'(z) = \text{Ext}$ para cada vértice z em Int, então todos os vértices em $U' \cap \text{Ext}$ são ligados a w em G'[U'] e portanto no máximo um componente de G'[U'] contêm vértices em AdjG'(v). Por outro lado, $T' \cap (\text{Int} \cup \text{Ext}) = \emptyset$; portanto $|\lambda G'(\{v\}, T')$ é vazio e $v \in U' \cup S'$. Pelo lema 14, $v \in U'$. Como esta conclusão vale para cada vértice v em Int, então $\text{Int} \subseteq U'$. ∎

LEMA 16 - Se $U' \cap \text{Ext} \neq \emptyset$ então U' inclui Ext.

DEMONSTRAÇÃO - Seja w um vértice em $U' \cap \text{Ext}$, v outro em $\text{Ext} \setminus \{w\}$. Analogamente ao lema 15, todos os vértices de $U'\cap Int$ pertencem a um mesmo componente de $G'[U']$.

Ademais, $|AdjG'(v)\setminus Int| = 1$. Assim, ou no máximo 2 componentes de $G'[U']$ contém vértices em $U'\cap AdjG'(v)$ (mas nesse caso $\lambda G'(\{v\},T') = \emptyset$), ou no máximo um componente de $G'[U']$ contém vértices em $U'\cap AdjG'(v)$ (e nesse caso $|\lambda G'(\{v\},T')| \leq 1$). Em ambos os casos, $v \in U'$, pelo lema 14.

∎

Para provar o teorema, vamos considerar três casos.

1º CASO - $U'\cap Int \neq \emptyset$ e $U'\cap Ext \neq \emptyset$.

Pelos lemas 15 e 16, U' inclui $Ext\cup Int$. Façamos $S = S'$, $T = T'$ e $U = \{x\}\cup[U'\cap VG]$. Os componentes de $G'[U']$ que não contêm vértices em $Int\cup Ext$ são os componentes de $G[U]$ que não contêm x. Se K' denota o componente de $G'[U']$ que contém os vértices em $Int\cup Ext$ e se K denota o componente de $G[U]$ que contém x, então $f(VK) = f'(VK') - 2gG(x) + 2f(x)$ e $\lambda G(VK,T) = \lambda G'(VK',T')$. Portanto,

$$|I(f,p)| = |I(f',p')|.$$

Consequentemente, pelo lema 13, a igualdade vale para f, t e p.

2º CASO - $U'\cap Int \neq \emptyset$ mas $U'\cap Ext = \emptyset$.

Pelo lema 15, $Int \subseteq U'$; como $T'\cap Ext = \emptyset$, então $Ext \subseteq S'$. Faça $S = [S'\cap VG]\cup\{x\}$, $T = T'$ e $U = U'\cap VG$.

Evidentemente, para cada vértice v em Int, $G'[\{v\}]$ é um componente em $I(f',p')$. Ademais $Int = U'\setminus U$. Assim,

$$|I(f,p)| = |I(f',p')| - |Int|$$

e

$$\lambda G(U,T) = \lambda G'(U',T')$$

Por outro lado, $f(S) = f'(S') - f'(Ext) + f(x) = f'(S') - |Ext| + f(x) = f'(S') - |Int|$.

Assim, pelo lema 13, a igualdade enunciada vale para f, t e p.

3º CASO - Nenhum dos anteriores.

Como nem o 1º nem o 2º caso se aplicam, então U' e Int são disjuntos. Portanto, S' inclui Int. Assim, para cada vértice v em Ext, $|AdjG'(v)\backslash S'| \leq 1$. Pelo lema 14, U' inclui Ext.

Faça $S = S' \cap VG$, $T - T' \cup \{x\}$, $U = U' \cap VG$.

Considere um vértice z em U, seja K o componente de G[U] que contém z, K' o componente de G'[U'] que contém z. Seja X o conjunto $VK' \cap Ext$, seja v um vértice nesta interseção. Ora, o grau em G'[U'] de cada vértice em X é igual a 1, portanto o vértice v adjacente a v em G'[U'] não pode pertencer também a X, pois caso contrário $VK' = \{v,v'\}$ e não contém então z. De fato, v' pertence a $VK'\backslash X$. Portanto, para cada vértice v em X, v tem grau 1 em G'[U'] e o vértice adjacente a v em G'[U'] pertence a $VK'\backslash X$. Assim, nenhum corte separador de vértices de G'[U'] consiste exclusivamente de vértices em X. Portanto, $G[VK'\backslash X]$ é conexo. Ademais, contém z e é isolado em G[U]. Portanto, $K = G[VK'\backslash X]$. Assim, $f(VK) + |\lambda G(VK,T)| = f'(VK') + |\lambda G'(VK',T')|$.

Logo, os componentes de I(f,p) são os componentes de I(f',p') que contêm vértices em $U'\backslash Ext$. Vamos agora analisar os componentes K' de $G'[U']$ tais que $VK' \subseteq Ext$. Seja v um vértice em VK'. Seja v' o vértice em $VG' \setminus Int$ adjacente a v em G'. Se $v' \in Ext$ então $VK' = \{v,v'\}$ e $f'(VK') + |\lambda G'(VK',T')| = 2$. Se v' pertence a T' então $VK' = \{v\}$ e $K' \notin I(f',p')$ pois $f'(VK') + |\lambda G'(VK',T')| = 2$. Finalmente, se v' pertence a S' então $VK' = \{v\}$ e $K' \in I(f',p')$, pois $f'(VK') + |\lambda G'(VK',T')| = 1$.

Portanto,

$$|I(f,p)| = |I(f',p')| - |\lambda(\{x\},S)|. \tag{1}$$

Por outro lado, pelo lema 13,

$$f(VG) - t(VG) = f'(VG) - t'(VG) + \max\{0, f(x) - gG(x)\}. \tag{2}$$

Note que $S = S' \setminus Int$. Assim,

$$f(S) = f'(S') - \max\{0, gG(x) - f(x)\}. \tag{3}$$

Note também que

$$f(T) = f'(T') + f(x). \tag{4}$$

Finalmente,

$$|\lambda G(U,T)| = |\lambda G'(U',T')| + |\lambda G(\{x\},U)| - |\lambda G(\{x\},T \setminus \{x\})| \tag{5}$$

e

$$2|aG[T]| = 2|aG'[T']| + 2\ell + 2|\lambda G(\{x\},T \setminus \{x\})| \tag{6}$$

onde ℓ indica o número de laços que em G incidem em x.

De (1) a (6), segue a igualdade enunciada. A análise do 3º caso completa a demonstração do teorema. ∎

COROLÁRIO 6 - Seja G um grafo, f uma função de V em N. Então G admite um f-emparelhamento perfeito se e somente se

$$|I(f,p)| \leq f(S) - [f(T) - 2|aG[T]| - |\lambda(U,T)|]$$

para cada partição $p = (S,T,U)$ de V. ∎

COROLÁRIO 7 - Seja G um grafo, f uma função de V em N, t um f-emparelhamento. Então t tem f-deficiência mínima se e somente se

$$|I(f,p)| = [f(V) - t(V)] + f(S) - [f(T) - 2|aG[T]| - |\lambda(U,T)|]$$

para alguma partição $p = (S,T,U)$ de V. ∎

Vamos agora dar uma aplicação do Teorema 8.

TEOREMA 9 - Seja H um grafo k-regular, r um inteiro tal que $0 \leq r \leq k$. Então H tem um subgrafo gerador L tal que $r \leq gL(v) \leq r+1$ para todo v em VH.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $n = |VH|$, suponha que n é par. Vamos formar um novo grafo G, adicionando a H um novo vértice w, ligando w a cada vértice em H através de exatamente uma ligação, e adicionando ainda ℓ laços incidentes a w, onde $\ell = n/2$.

Seja $f\colon VG \longrightarrow N$ que associa n a w e r+1 aos demais vértices. Basta agora mostrar que G tem um f-emparelhamento perfeito, digamos t, pois nesse caso a asserção vale, com $L = H - [aH \setminus t]$.

Seja pois t um f-emparelhamento em G e $p = (S,T,U)$ uma partição de VG tais que

$$|I(f,p)| = f(V) - t(V) + f(S) - [f(T) - 2|aG[T]| - |\lambda(U,T)|].$$

Pelo lema 12,

$$|I(f,p)| = f(U) - t(U) + |\lambda(U,S) \cap t| + |\lambda(U,T) \setminus t| \qquad (1)$$

$$aG[T] \subseteq t \tag{2}$$

$$f(S) = t(S) \tag{3}$$

$$aG[S] \subseteq aG \setminus t \tag{4}$$

Considere primeiramente o caso em que $w \in S$. De (4), nenhum dos laços incidentes a w pertence a t. Portanto, de (3), todas as ligações que incidem em w pertencem a t. Novamente de (4), $S = \{w\}$, pois w é adjacente a todos os demais vértices. Portanto, $|\lambda(U,S) \cap t| = |U|$. Logo, de (1), $f(U) = t(U)$ e $\lambda(U,T) \setminus t = \emptyset$. Assim, de (2), todo vértice em T tem todas as suas arestas incidentes em t. Portanto, ou $T = \emptyset$ ou $r+1 = k+1$. Em ambos os casos, como $f(U) = t(U)$, t é um f-emparelhamento perfeito.

Considere agora o caso em que $w \in T$. De (2), todos os ℓ laços incidentes em w pertencem a t. Como $f(w) = 2\ell$, então nenhuma das ligações incidentes em w pertence a t. Como w é adjacente a todos os demais vértices, então, de (2), $T = \{w\}$ e $|\lambda(U,T) \setminus t| = |U|$. De (1), $f(U) = t(U)$. De (3), $f(S) = t(S)$. Assim, t é um f-emparelhamento perfeito.

Resta considerar agora o caso em que $w \in U$. Então $G[U]$ é conexo. Portanto, de (1),

$$1 \geq f(U) - t(U) + |\lambda(U,S) \cap t| + |\lambda(U,T) \setminus t| \tag{5}$$

Por outro lado, de (2)

$$(k-r)|T| + f(T) - t(T) = |\delta(T) \setminus t| \tag{6}$$

e de (3) e (4),

$$(r+1)|S| = |\delta(S)\cap t|. \qquad (7)$$

De (5), (6) e (7), uma vez que $t(S) = f(S)$,

$$f(V) - t(V) + (k-r)|T| + (r+1)|S| \le |\lambda(S,T)| + 1.$$

Seja $s = \min\{|S|, |T|\}$. Então, como todo vértice em $S\cup T$ tem grau k em H e como $w \in U$, segue que $|\lambda(S,T)| \le ks$. Portanto,

$$f(V) - t(V) + (k+1)s \le |\lambda(S,T)| + 1 \le ks + 1.$$

Logo, $f(V) - t(V) + s \le 1$.

Mas $f(V) = n + n(r+1)$, e é par pois n é par; por outro lado, $t(V)$ é par pois t é gráfica. Logo, $f(V) - t(V) = 0$. Ou seja, t é um f-emparelhamento perfeito. Como esta conclusão vale para o caso em que n é par, basta agora observar que se n for ímpar podemos tomar 2 "cópias" disjuntas, de H, no lugar de H. ∎

EXERCÍCIOS

1. Mostre que se $d = \min\{g(v) | v\in V\}$ e $D = \max\{g(v) | v \in V\}$ então $d \le 2|a|/|V| \le D$.

2. Mostre que dado um conjunto de n pontos no plano, quaisquer dois dos quais distam pelo menos 1 um do outro, então existem não mais do que $3n$ pares de pontos cuja distância é precisamente 1.

3. Mostre que existe um grafo k-regular simples com n vértices $(0 < n;\ 0 \le k)$ se e somente se $k < n$ e kn é par.

4. Mostre que $f\colon V \longrightarrow N$, gráfica, é a função grau de algum grafo sem laços se e somente se $f(V) \ge 2f(v)$ para cada

vértice v em V.

5. Uma *árvore* é um grafo conexo sem circuitos. Mostre que $f: V \to N$, $|V| \geq 2$, é a função grau de alguma árvore se e somente se $f(V) = 2|V| - 2$ e $f(v) \geq 1$ para cada v em V.

6. Seja $f: V \longrightarrow N$ ($|V| \geq 2$) uma função estritamente gráfica. Mostre que f é a função grau de algum grafo simples conexo se e somente se $f(V) \geq 2|V| - 2$ e $f(v) \geq 1$ para cada v em V. (Sugestão: use o enunciado do exercício 17 do capítulo I).

7. Seja $f: V \longrightarrow N$ ($|V| \geq 2$) uma função estritamente gráfica. Mostre que f é a função grau de algum grafo simples 2-conexo se e somente se $f(V) \geq 2|V| - 2 + 2f(v) \geq 2|V| + 2$ para cada v em V.

8. Seja $f: V \longrightarrow N$ ($|V| \geq 2$) uma função estritamente gráfica. Mostre que f é a função grau de algum grafo simples k-aresta-conexo ($k \geq 2$) se e somente se $f(v) \geq k$ para todo v em V.

9. Seja $f: V \longrightarrow N$, $\{X, Y\}$ uma partição de V. Mostre que existe um grafo com bipartição $\{X,Y\}$ tendo f como função grau se e somente se $f(X) = f(Y)$. Mostre também que existe um grafo simples com bipartição $\{X,Y\}$ tendo f como função grau se e somente se $f(X) = f(Y)$ e $f(Z) \leq \sum_{v \in X} \min\{k, f(v)\}$ para cada $Z \subseteq Y$, onde $k = |Z|$.

10. Dê um exemplo de um grafo G, um emparelhamento t de G e uma cobertura c de $V \setminus V_0(G)$ tais que $|t| + |c| + |V_0| = |V|$, mas nem t é máximo, nem c é mínima.

11. Considere um conjunto X de moças e outro Y de rapazes. Qual a condição necessária e suficiente para que seja possível casar todos os rapazes em X com moças em Y, de forma que a esposa

de cada rapaz seja uma moça de quem ele goste?

12. Seja G um grafo com bipartição $\{X,Y\}$ e k um inteiro positivo. Mostre que se $g(v) \geq k$ para cada vértice v em Y e $g(v) \leq k$ para cada vértice v em X, então G tem um emparelhamento que cobre Y.

13. Seja G um grafo com bipartição $\{X,Y\}$. Mostre que se G tem um emparelhamento que cobre X e outro que cobre Y então G tem um emparelhamento que cobre V.

14. Mostre que se G é um grafo biparticionável k-regular então o seu conjunto de arestas é a união de uma coleção de k emparelhamentos perfeitos, dois a dois disjuntos. (Sugestão: aplique os exercícios 12 e 13).

15. Sejam n prismas triangulares regulares $(n \geq 1)$ tais que cada face (lateral) de cada prisma é colorida com uma de n cores, de forma que existem exatamente três das 3n faces com cada cor. Mostre que é possível empilhar os prismas pelas bases de forma a obter outro prisma triangular no qual cada face exibe cada uma das n cores. (Sugestão: veja exercício 14).

16. Mostre que um grafo biparticionável G tem um emparelhamento que cobre V se e somente se $|V_0(G-Z)| \leq |Z|$, para todo subconjunto Z de V. Mostre que se um grafo G, não necessariamente biparticionável, tem um emparelhamento que cobre V, então $|V_0(G-Z)| \leq |Z|$, para todo subconjunto Z de V.

17. Seja G um grafo com bipartição $\{X,Y\}$, $D = \max\{g(v) \mid v \in V\}$. Mostre que o conjunto de arestas de G pode ser expresso como a união de D emparelhamentos dois a dois disjuntos. (Sugestão:

mostre que existe um grafo H com bipartição $\{X',Y'\}$ tal que $G\subseteq H$, H é D-regular, $X\subseteq X'$ e $Y\subseteq Y'$; use o exercício 14).

18. Seja G um grafo com bipartição $\{X,Y\}$, K e M subconjuntos de V. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

    (i) G tem um emparelhamento com relação a M que cobre K.

    (ii) para todo subconjunto Z de M, $|K\cap V_0(G-Z)| \leq |Z|$.

    (iii) para todo subconjunto Z de $M\cap X$, $|K\cap Y\cap V_0(G-Z)| \leq |Z|$ e para todo subconjunto Z de $M\cap Y$, $|K\cap X\cap V_0(G-Z)| \leq |Z|$.

19. Refaça o exercício 17, usando o exercício 18.

20. Seja P um conjunto finito parcialmente ordenado pela relação $\dot{\leq}$. Uma *cadeia* em P é uma seqüência $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ não vazia de elementos de P tais que $v_i \dot{<} v_{i+1}$ para todo i tal que $1\leq i\leq n-1$. Uma coleção de cadeias *cobre* P se todo elemento de P ocorre em pelo menos uma cadeia da coleção. Uma *anticadeia* é um conjunto A de elementos de P tais que para todo v e todo w em A, ou v=w ou nem $v \dot{<} w$ nem $w \dot{<} v$. Mostre que cada coleção mínima de cadeias que cobre P tem cardinalidade igual à de cada anticadeia máxima. (Sugestão: obtenha um grafo G com bipartição $\{P',P''\}$ onde $|P'| = |P''| = |P|$, $P' = \{v' | v\in P\}$, $P'' = \{v'' | v\in P\}$ e vértices v' em P' e w'' em P'' são adjacentes em G se e somente se $v\dot{<}w$. Obtenha um emparelhamento máximo em G e uma cobertura mínima dos arestas de G.)

21. Mostre que se G é um grafo completo com um número par de vértices então o conjunto de arestas de G pode ser expresso como a união de uma coleção de emparelhamentos dois a dois disjuntos.

22. Demonstre os lemas 2, 3, 4, 5 e 6.

23. Demonstre que um emparelhamento t num grafo G é máximo se e somente se não existe caminho não degenerado e t-alternado em G com origem e término em V\Vt

24. Mostre que se um grafo 2-conexo G com pelo menos dois vértices tem um emparelhamento perfeito, então G tem pelo menos dois emparelhamentos perfeitos.

25. Mostre que todo grafo 2-conexo 3-regular tem um emparelhamento perfeito.

26. Mostre que toda aresta de um grafo 2-conexo 3-regular pertence a pelo menos um emparelhamento perfeito

27. Dê um exemplo de um grafo 3-regular que não tem um emparelhamento perfeito.

28. Cada aresta do grafo de Petersen (figura 17) pertence a algum emparelhamento perfeito. Mas o conjunto de arestas desse grafo não é a união de uma coleção de três emparelhamentos dois a dois disjuntos. Demonstre estas afirmações.

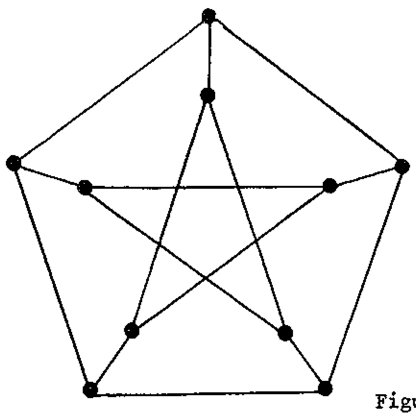


Figura 17

29. Mostre que todo grafo n-conexo n-regular com um número par de vértices tem um emparelhamento perfeito.

30. Demonstre o corolário 3 a partir do corolário 6.

31. Sejam K e M subconjuntos de VG. Mostre que G tem um emparelhamento com relação a M que cobre K se e somente se $|I(G[K \cap M]-Z)| + |(K \setminus M) \cap V_0(G-Z)| \leq |Z|$ para cada subconjunto Z de M.

32. *Conjetura:* Todo grafo 5-regular 5-conexo tem um 2-emparelhamento perfeito (isto é, um f-emparelhamento perfeito em que $f(v) = 2$ para todo v).

NOTAS

A caracterização de seqüências estritamente gráficas apresentada no corolário 1 foi demonstrada por Erdös e Gallai (1960). Esta caracterização pode ser demonstrada de maneira simples a partir do teorema 8 (ou corolário 6 — vide exercício 30), e foi assim demonstrada por Tutte (1974).

A caracterização recursiva e construtiva de seqüências estritamente gráficas apresentada no teorema 3 foi descoberta independentemente por Havel (1955) e Hakimi (1962); é também de Hakimi (1962) a caracterização de funções gráficas do teorema 1 e a caracterização de seqüências de graus sem laços do exercício 4. O resultado enunciado no exercício 8, que caracteriza funções gráficas de grafos com uma dada aresta-conexidade, foi demonstrado por Edmonds (1964).

O teorema 5 é conhecido como teorema de König (1931). O corolário 2 é um caso particular do enunciado no exercício 20, que por sua vez é conhecido como teorema de Dilworth (1950). O teorema 6, às vezes mencionado como o teorema de König-Hall, foi demonstrado por Philip Hall (1935).

A igualdade minimax enunciada no corolário 4 (juntamente com o lema 1), é conhecido como teorema de Berge-Tutte e foi demonstrada por Berge (1958). O corolário 3, aqui demonstrado a partir do teorema 7, na verdade foi provado muito antes, por Tutte (1947). A primeira demonstração algorítmica do teorema 7 foi dada por Edmonds (1965). A demonstração aqui apresentada é baseada em parte no trabalho de Lovász. O enunciado do exercício 23 foi demonstrado por Berge (1957). O enunciado do exercício 25, que pode ser facilmente demonstrado a partir do teorema de Tutte (corolário 3), na verdade foi provado muito antes por Petersen (1891), que exibiu o grafo da figura 6 (vide exercício 27) e o grafo da figura 17 (vide exercício 28).

A caracterização de grafos G e funções f: V $\longrightarrow$ N tais que G tem um f-emparelhamento perfeito (teorema 8) é de Tutte (1952). Também é de Tutte (1978) a demonstração do teorema 9, sobre subgrafos quase regulares.

CAPÍTULO IV

GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS

1 - GRAFOS EULERIANOS

Um grafo G é *euleriano* se existe uma trilha fechada que passa por todos os vértices e arestas de G. Informalmente, podemos dizer que um grafo G é euleriano se pudermos desenhar uma representação gráfica de G sem tirar o lápis do papel e voltar ao ponto de partida, sem passar mais de uma vez por nenhuma aresta.

TEOREMA 1 - Um grafo não vazio G é euleriano se e somente se G é conexo e todos os seus vértices têm grau par.

DEMONSTRAÇÃO - Suponha inicialmente que G é euleriano, seja T uma trilha fechada em G que passa por todos os vértices e arestas de G. Para mostrar que G é conexo, sejam u e v dois vértices em G. Como T é fechada e passa por u, podemos tomar uma rotação T' de T que também é fechada, passa por todos os vértices e arestas de G e tem u como origem. Como T' passa por v, então T' tem uma seção T" com origem u e término v. Assim, u e v são ligados em G. Como esta conclusão vale para quaisquer u e v em G, então G é conexo.

Para mostrar que cada vértice v em G tem grau par, observe que como T é uma trilha fechada em G, então $|aT \cap \delta\{v\}|$ é par, pelo le ma 3 do capítulo II. Como T passa por todas as arestas de G, então $aT \cap \delta\{v\} = \delta\{v\}$ e portanto $|\delta\{v\}|$ é par. Assim, o número de ligações que incidem em v é par e portanto o grau de v é par. De fato, esta conclusão vale para cada vértice v em G.

Vamos agora demonstrar a recíproca do que já foi demonstrado. Suponha que G é conexo e cada um de seus vértices tem grau par. Seja T uma trilha de comprimento máximo em G. Vamos mostrar que T é fechada e passa por todos os vértices e arestas de G. Para mostrar que T é fechada, seja u a origem de T, v seu término. Pelo lema 3 do capítulo II, $|aT \cap \delta\{v\}|$ é par se e somente se $u = v$. Mas $|\delta\{v\}|$ é par, pois o grau de v é par. Assim, se $u \neq v$ então $aT \cap \delta\{v\} \subsetneq \delta\{v\}$ e portanto T pode ser estendida a uma trilha $T(v, \alpha, v')$, onde α é uma aresta em $\delta\{v\} \setminus aT$ (e v e v' são os extremos de α), em contradição à escolha de T. Portanto $u = v$ e T é fechada.

Para mostrar que T passa por todos os vértices e arestas de G, suponha o contrário. Então o grafo $H = G[aT]$ é um subgrafo próprio (e não vazio) de G. Como G é conexo, então H não é isolado em G. Logo, $aG \setminus aT$ contém uma aresta, digamos β, que tem pelo menos um extremo, digamos w, em VH. Tomando uma rotação T' de T com origem (e término) w, vemos que T' pode ser estendida a uma trilha $T'(w, \beta, w')$ (onde w e w' são os extremos de β), em contradição à escolha de T. De fato, T é fechada e passa por todos os vértices e arestas de G. ∎

Podemos agora considerar a seguinte questão: em que condições é possível obter um passeio fechado que passa por todos os vértices e todas as arestas de um grafo não vazio G? em caso afirmativo, quão grande deve ser o comprimento de um tal passeio? Evidentemente, a resposta para a primeira pergunta é trivial: se e somente se o grafo é conexo.

Com relação à segunda pergunta, observamos que certamente o comprimento é no mínimo $|aG|$; de fato, pelo teorema 1, esse mínimo é atingido se e somente se todos os vértices de G tiverem grau par. Daremos a seguir um limite inferior para o comprimento de P (teorema 2).

Dado um grafo G, vamos denotar por $V_I(G)$ o conjunto dos vértices de G cujo grau é ímpar. Vamos denotar por $I(G)$ o conjunto dos subconjuntos X de VG tais que $|X \cap V_I(G)|$ é ímpar.

LEMA 1 - Um corte $\delta(X)$ tem um número ímpar de arestas se e somente se $X \in I(G)$.

DEMONSTRAÇÃO - Por indução em $|X|$. A afirmação é trivialmente válida se $X = \emptyset$, pois nesse caso $|\delta(X)|$ é par e $X \notin I(G)$. Suponha pois que X é não vazio, seja v um vértice em X, seja X' o conjunto $X \setminus \{v\}$. Por indução,

$$|\delta(X')| \equiv |X' \cap V_I(G)| \pmod 2. \tag{1}$$

Evidentemente,

$$|\delta\{v\}| \equiv |\{v\} \cap V_I(G)| \pmod 2. \tag{2}$$

Por outro lado,

$$\delta(X) = \delta(X' \oplus \{v\}) = \delta(X') \oplus \delta\{v\} \text{ (exercício 1 do capítulo II).}$$

Assim, $|\delta(X)| = |\delta(X')| + |\delta\{v\}| - 2|\delta(X') \cap \delta\{v\}|$. Logo,

$$|\delta(X)| \equiv |\delta(X')| + |\delta\{v\}| \pmod 2. \tag{3}$$

De (1), (2) e (3),

$$|\delta(X)| \equiv |X \cap V_I(G)| \pmod 2.$$

De fato, $|\delta(X)|$ é ímpar se e somente se $X \in I(G)$. ∎

Um *subconjunto ponderado de* $I(G)$ é uma função $f\colon I(G) \longrightarrow N$, onde N denota o conjunto dos naturais; a *cardinalidade* $|f|$ de f é o inteiro $\sum_{X \in I(G)} f(X)$; o *suporte* $S(f)$ de f é o conjunto $\{X \mid X \in I(G) \text{ e } f(X)>0\}$; para cada aresta α de G, $f(\alpha)$ denota o inteiro $\sum_{\substack{\alpha \in \delta(X) \\ X \in I(G)}} f(X)$ f é *2-disjunto nas arestas* se $f(\alpha) \le 2$ para cada aresta α em G.

TEOREMA 2 - Seja G um grafo conexo e não vazio, seja P um passeio fechado que passa por todos os vértices e arestas de G, seja f um subconjunto ponderado, 2-disjunto nas arestas, de $I(G)$. Então o comprimento c de P e a cardinalidade $|f|$ de f satisfazem a desigualdade

$$c \ge |aG| + 1/2|f|$$

com igualdade somente se c é mínimo e $|f|$ é máximo.

DEMONSTRAÇÃO - Seja t o conjunto das arestas de G pelas quais P passa pelo menos duas vezes; ou seja, t é o conjunto das arestas α de G tais que se u e v denotam os extremos de α então P pode ser expresso por um produto da forma $P_1A'P_2A''P_3$ onde cada um de A' e A'' pertence a $\{(u,\alpha,v), (v,\alpha,u)\}$.

Pelo lema 1, e pelo lema 3 do capítulo II, $t \cap \delta(X) \ne \emptyset$ para cada X em $I(G)$. Assim, para cada X em $S(f)$, $t \cap \delta(X) \ne \emptyset$. ademais, como f é 2-disjunto nas arestas, então $|f| \le 2|t|$. Logo, $|t| \ge 1/2|f|$. Mas $c \ge |aG| + |t|$, por definição de t; daí a desigualdade. Como em outras desigualdades deste tipo já vistas, se $c = |aG| + 1/2|f|$ então c é mínimo, $|f|$ é máxima (e P passa exatamente duas vezes por cada uma das arestas de t).

EXEMPLO - A figura 1 mostra um conjunto t de arestas de G e um subconjunto ponderado f de $I(G)$, 2-disjunto nas arestas, tais que $|t| = 1/2|f|$ e $gH(v)$ é par para todo v em V, onde $H = G-t$. Os conjuntos X em $S(f)$ são indicado por linhas tracejadas, e os números próximos a elas indicam os valores de $f(X)$. Deixamos a cargo do leitor, como exercício de entendimento do teorema 1, a obtenção de um passeio P tal que P é fechado, passa por todos os vértices e arestas de G e seu comprimento é $|aG| + |t|$. ∎

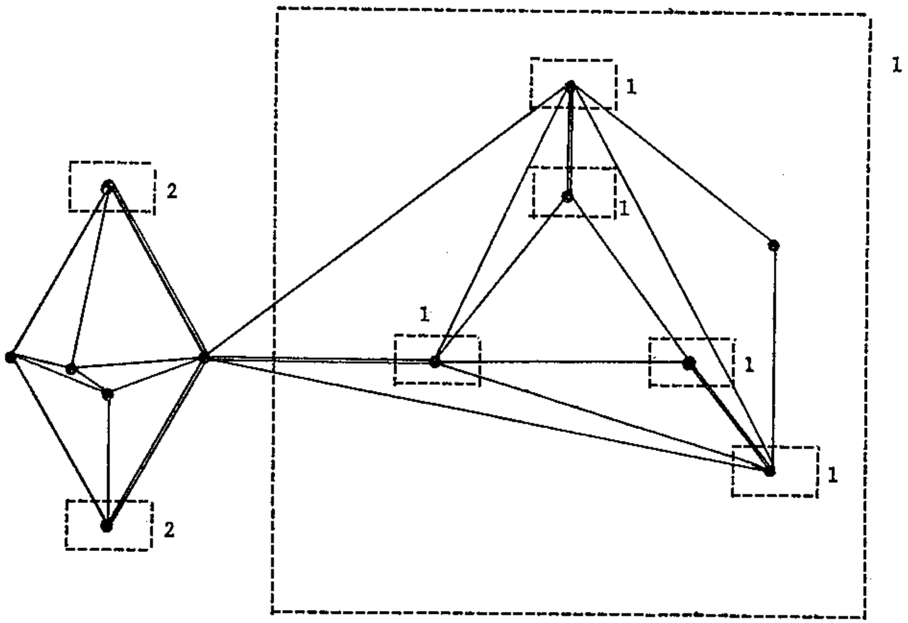


Figura 1

Na verdade, o limite inferior obtido no teorema 2 é ótimo, ou seja

TEOREMA 3 - Seja G um grafo conexo e não vazio, P um passeio fechado de comprimento mínimo que passa por todos os vértices e arestas de G, f um subconjunto ponderado de $I(G)$, 2-disjunto nas arestas e máximo. Então o comprimento c de P satisfaz a igualdade $c = |aG| + 1/2|f|$.

Não iremos demonstrar o teorema aqui, pois sua demonstração foge ao escopo destas notas. ∎

2 - GRAFOS HAMILTONIANOS

Um *caminho hamiltoniano* em G é um caminho que passa por todos os vértices de G; um passeio circular é *hamiltoniano* se passa por todos os vértices de G. Um grafo é *hamiltoniano* se contém um passeio circular hamiltoniano. O grafo do dodecaedro, ilustrado na figura 2, é hamiltoniano. Por outro lado, o grafo de Pe-

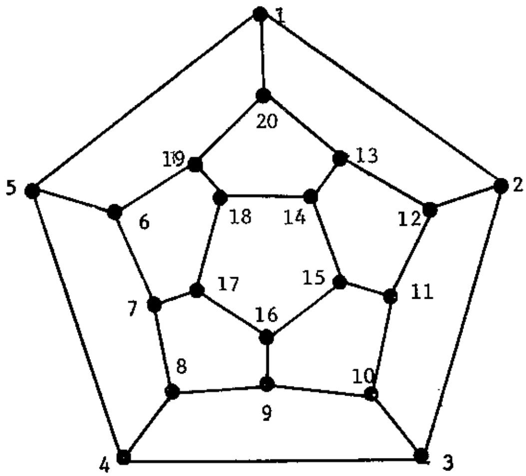


Figura 2

tersen (figura 17 do capítulo III) não é, pois não possui 3 emparelhamentos perfeitos, dois a dois disjuntos (exercício 28 do capítulo III e exercício 8).

O próximo resultado é mais uma aplicação do "princípio das casas de pombo".

TEOREMA 4 - Seja G um grafo simples, u e v vértices distintos não adjacentes tais que $g(u) + g(v) \geq |V|$, seja H o grafo obtido a partir de G adicionando-lhe uma ligação α com extremos u e v. Então G é hamiltoniano se e somente se H é hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO - Evidentemente, se G é hamiltoniano então H é hamiltoniano. Suponha agora que H é hamiltoniano, seja $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$ um passeio circular hamiltoniano em H; obviamente, se P não passa por α então P é um passeio em G e portanto G é hamiltoniano. Suponha pois que P passa por α. Ajuste a notação, considerando uma rotação de P ou uma rotação do reverso de P se necessário, de forma que $v_0 = v, \alpha_1 = \alpha$ e $v_1 = u$. Observe que

$$P' = (v_1, \alpha_2, v_2, \ldots, \alpha_n, v_n)$$

é um caminho hamiltoniano em G, com origem u e término v. Note também que $n = |V|$. Como G é simples, u e v não são adjacentes em G e $gG(u) + gG(v) \geq n$, então existe i tal que $1 \leq i \leq n-1$, $v_{i+1} \in AdjG(u)$ e $v_i \in AdjG(v)$. Nesse caso, se β denota a aresta de G com extremos u e v_{i+1}, e se γ denota a aresta de G com extremos v_i e v, então (figura 3) o passeio circular

$$Q = (u, \beta, v_{i+1}, \alpha_{i+2}, v_{i+2}, \ldots, \alpha_n, v_n, \gamma, v_i, \alpha_i, \ldots, v_2, \alpha_2, u)$$

é hamiltoniano em G.

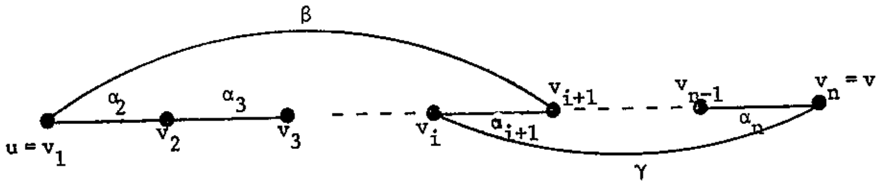


Figura 3

De fato, se H é hamiltoniano então G é hamiltoniano. ∎

Com base no teorema 4, damos agora a seguinte definição. O *fecho* de um grafo simples G é o grafo obtido a partir de G adicionando arestas entre vértices distintos não adjacentes cuja soma dos graus é pelo menos $|V|$ até que não existam mais pares de vértices com esta propriedade. Formalmente o fecho F(G) de um grafo G é definido indutivamente da seguinte m neira·

(i) se não existem vertices distintos u e v de G tais que u e v não são adjacentes e $gG(u) + gG(v) \geq |V|$, então $F(G) = G$.

(ii) se existirem vértices não adjacentes e distintos u e v em G tais que $gG(u)+gG(v) \geq |V|$, então $F(G) = F(H)$, onde H é o grafo obtido a partir de G, adicionando uma ligação entre u e v.

LEMA 2 - O fecho de G está bem definido.

DEMONSTRAÇÃO por indução em $|V|(|V|-1) - |aG|$. Suponha que existem pares distintos u, v e u', v' em G tais que u e v não são adjacentes mas são distintos, u' e v' não são adjacentes mas são distintos, com $g(u)+g(v) \geq |V|$ e $g(u')+g(v') \geq |V|$. Sejam H e H' os grafos obtidos a partir de G pela adição de uma aresta com extremos u e v, u' e v', respectivamente. Evidentemente u e v não são adjacentes em H', u' e

v' não são adjacentes em H, $gH'(u)+gH'(v) \geq |V|$, $gH(u')+gH(v') \geq |V|$. Assim, se K denota o grafo obtido a partir de G pela adição de uma aresta com extremos u e v e outra com extremos u' e v', então, por indução,

$$F(H) = F(K) = F(H').$$

Assim, o grafo final obtido não depende da ordem em que as arestas são adicionadas. ∎

OBSERVAÇÃO - Na definição de fecho, bem como na demonstração do lema 2, não levamos em conta os "nomes" das arestas adicionadas.

COROLÁRIO 1 - Um grafo simples G é hamiltoniano se e somente se $F(G)$ é hamiltoniano. ∎

COROLÁRIO 2 - Se o fecho de um grafo simples G com pelo menos três vértices é completo então G é hamiltoniano. ∎

COROLÁRIO 3 - Se um grafo simples G contém n vértices $(n \geq 3)$ e $g(v) \geq n/2$ para todo v em V, então G é hamiltoniano. ∎

LEMA 2 - Se um grafo G é hamiltoniano então o número de componentes de $G - Z$ é no máximo $|Z|$, para cada subconjunto não vazio Z de V.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$ um passeio circular hamiltoniano em G, seja Z um subconjunto não vazio de V. Ajuste a notação, considerando uma rotação de P se necessário, de forma que $v_0 \in Z$. Seja $i = (i_1, \ldots, i_{|Z|+1})$ a seqüência estritamente crescente de índices tais que $v_{i_j} \in Z$ $(1 \leq j \leq |Z|+1)$. Evidentemente, $i_1 = 0$ e $i_{|Z|+1} = n$. Para cada j tal que $1 \leq j \leq |Z|$, ou $i_{j+1} = i_j + 1$ ou a seção de P de v_{i_j+1} a $v_{i_{j+1}-1}$ é um caminho em $G - Z$ que passa por todos os vértices em $\{v_k | i_j < k < i_{j+1}\}$. Em ambos os casos, $G(\{v_k | i_j < k < i_{j+1}\})$ é um subgrafo conexo de $G - Z$. Assim, o nú mero de componentes de $G - Z$ é no máximo $|Z|$. ∎

Uma seqüência de naturais $(g_1, \ldots, g_m)$ *majora* outra $(h_1, \ldots, h_n)$ se $m = n$ e $g_i \geq h_i$ para todo i tal que $1 \leq i \leq m$.

TEOREMA 5 - Seja G um grafo simples com seqüência de graus $g = (g_1, \ldots, g_n)$ onde $n \geq 3$ e $g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_n$. Se

$$\nexists m \mid 1 \leq m < n/2,\ g_m \leq m \text{ e } g_{n-m} < n-m \tag{I}$$

então G é hamiltoniano. Ademais, este resultado é o melhor possível, no seguinte sentido: se g não satisfaz (I) então g é majorada por uma seqüência crescente que também não satisfaz (I) e que é a seqüência de graus de um grafo não hamiltoniano.

DEMONSTRAÇÃO - Seja F o fecho de G. Se F for completo então G é hamiltoniano. Suponha pois que F não é completo, vamos primeiramente mostrar que g não satisfaz (I). Para tanto, sejam u e v dois vértices distintos e não adjacentes em F tais que $gF(u) + gF(v)$ é máximo. Ajuste a notação, permutando u e v se necessário, de forma que

$$gF(u) \leq gF(v). \tag{1}$$

Se $gF(u) = 0$ então (I) é falsa, pois $g_1 = 0 < 1 < n/2$ e $g_n < n$. Suponha então que $0 < gF(u)$. Nesse caso, seja

$$m = gF(u) \geq 1. \tag{2}$$

Por definição de fecho,

$$gF(u) + gF(v) < n. \tag{3}$$

Pela escolha de u e v, cada vértice em $[V \backslash AdjF(v)] \backslash \{v\}$ tem grau no máximo $gF(u)$ em F; assim, de (3), pelo menos $gF(u)$ vértices têm grau no máximo gF(u) em F; como G é um subgrafo gerador de F, então, de (2), segue que pelo menos m vértices têm grau no máximo m em G; assim

$$g_m \leq m. \tag{4}$$

Analogamente, pela escolha de u e v, e por (1), cada vértice em V\AdjF(u) tem grau no máximo gF(v) em F; assim, de (3), pelo menos n - gF(u) vértices têm grau menor do que n - gF(u) em F; como G é um subgrafo gerador de F, então, de (2), pelo menos n-m vértices têm grau menor do que n-m em G. Assim,

$$g_{n-m} < n-m. \tag{5}$$

Finalmente, de (1), (2) e (3),

$$m < n/2. \tag{6}$$

De (4), (5) e (6) vemos que g não satisfaz (I). De fato, se g satisfaz (I) então F(G) é completo e portanto G é hamiltoniano.

Para provar a segunda parte do teorema, suponha que g não satisfaz (I), seja m tal que $m < n/2$, $g_m \leq m$ e $g_{n-m} < n-m$. Seja h a seqüência

$$(\underbrace{m,\ldots,m}_{m},\ \underbrace{n-m-1,\ldots,n-m-1}_{n-2m},\ \underbrace{n-1,\ldots,n-1}_{m}).$$

Certamente h é crescente, majora g, $h_m = m$ e $h_{n-m} = n-m-1$. Seja H um grafo simples obtido da seguinte maneira: seja K um grafo completo com n vértices; particione VK em três conjuntos V_1, V_2 e V_3 com m, n-2m e m vértices, respectivamente; remova de K todas as arestas com um extremo em V_1 e o outro em $VK \backslash V_3$. Evidentemente, h é uma seqüência de graus de H, pois para cada vértice v em V_1, $AdjH(v) = V_3$, para cada vértice v em V_2, $AdjH(v) = [VH \setminus V_1] \setminus \{v\}$ e para cada vértice v em V_3, $AdjH(v) = VH \setminus \{v\}$. Ademais, H não é hamiltoniano, pelo lema 2; pois em $H - V_3$ cada vértice em V_1 tem grau zero e $H[V_2]$ é também um componente; assim, $H - V_3$ tem m+1 componentes. A figura 4 dá um exemplo de um tal grafo H, com $m = 2$ e $n = 7$. ∎

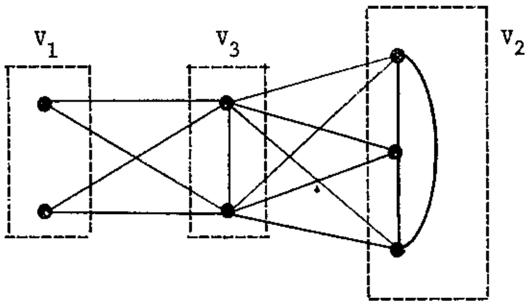


Figura 4

EXERCÍCIOS

1. Verifique que o problema das pontes de Königsberg (notas do capítulo I) não tem solução.

2. Mostre que um grafo G conexo e não vazio tem uma trilha (não necessariamente fechada) que passa por todos os vértices e arestas de G se e somente se G tem no máximo dois vértices com grau ímpar.

3. Seja G um grafo conexo e não vazio com exatamente 2 vértices de grau ímpar. Seja d a distância entre esses vértices em G. Mostre que cada passeio fechado de comprimento mínimo que passa por todos os vértices e arestas de G tem comprimento $|aG| + d$.

4. Seja G um grafo conexo e não vazio com exatamente 2n vértices de grau ímpar, P um passeio fechado de comprimento mínimo que passa por todos os vértices e arestas de G. Dentre as enumerações do conjunto de vértices de grau ímpar, seja $(v_1, v_2, \ldots, v_{2n})$ uma tal que $\sum_{i=1}^{n} d(v_{2i-1}, v_{2i})$ é mínimo, onde $d(x,y)$ denota a distância entre dois vértices x e y em G. Mostre que o comprimento de P é $|aG| + \sum_{i=1}^{n} d(v_{2i-1}, v_{2i})$.

5. Seja G um grafo conexo e não vazio, P um passeio fechado de comprimento mínimo que passa por todos os vértices e arestas de G, t um subconjunto mínimo de aG tal que $gG(v) \equiv gH(v) \pmod 2$ para todo v em VH, onde H denota G[t]. Mostre que o comprimento de P é $|aG| + |t|$.

6. Mostre que um grafo conexo e não vazio é euleriano se e somente se o seu conjunto de arestas é a união de uma coleção de circuitos dois a dois disjuntos.

7. Mostre que se G tem $2k > 0$ vértices de grau ímpar e é conexo então o seu conjunto de arestas é a união dos conjuntos de arestas de uma coleção de k trilhas duas a duas disjuntas nas arestas.

8. Mostre que todo grafo 3-regular hamiltoniano tem três emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos.

9. Mostre que se G é um grafo com bipartição {X,Y} e $|X| \neq |Y|$, então G não é hamiltoniano.

10. Mostre que a recíproca do lema 2 é falsa. (Sugestão: considere o grafo de Petersen, figura 17 do capítulo III).

11. Dê exemplos de grafos simples hamiltonianos cujos fechos não são completos. Dê exemplos de grafos simples cujos fechos são completos mas cujas seqüências crescentes de graus $g = (g_1, \dots, g_n)$ não satisfazem a condição (i) o teorema 5.

12. Demonstre a seguinte generalização do teorema 5; seja G um grafo simples com seqüência de graus $g = (g_1, \dots, g_n)$ onde $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_n$; seja C uma coleção de caminhos dois a dois disjuntos em G, denote por ℓ a soma dos comprimentos dos caminhos em C. Se $n \geq 3 + \ell$ e se

$$\nexists m \mid \ell < m < (n+\ell)/2, \; g_{m-\ell} \leq m \text{ e } g_{n-m} < n+\ell-m. \tag{II}$$

então existe em G um passeio circular hamil oniano Q tal que para cada caminho P em C ou P ou o reverso de P é uma seção de Q Mostre ainda que se a condição (II) não é satisfeita então g é majorada por uma seqüência crescente de graus de um grafo H, que tem um caminho P de comprimento ℓ, tais que nem P nem o reverso de P é seção de algum passeio circular hamiltoniano em H.

13. Mostre que se G é um grafo e Z um subconjunto próprio de V tal que o número de componentes de G - Z é no mínimo $|Z| + 2$, então G não tem um caminho hamiltoniano.

14. Seja G um grafo simples com pelo menos uma aresta, $g = (g_1, \dots, g_n)$ uma seqüência de graus de G, com $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_n$. Mostre que se não existe m tal que $m < (n+1)/2$, $g_m < m$ e $g_{n+1-m} < n-m$ então G tem um caminho hamiltoniano (Sugestão: adicione um novo vértice a G, faça-o adjacente a todos os demais e use o teorema 5.)

15. Seja G um grafo simples com bipartição $\{X,Y\}$, onde $|X|=|Y|\geq 2$, seja $g=(g_1,\ldots,g_n)$ a seqüência crescente de graus de G. Mostre que se

$$\nexists m \mid m\leq n/4,\ g_m\leq m \text{ e } g_{n/2-m}\leq n/2-m$$

então G é hamiltoniano. (Sugestão: faça todos os vértices de X ficarem adjacentes, adicionando arestas a G.)

16. Seja G um grafo não vazio, $d=\min\{g(v)\mid v\in V\}$. Mostre que se G é conexo e $|V|>2d$ então G tem um caminho de comprimento 2d; se G é 2-conexo e $|V|\geq 2d\geq 2$ então G tem um circuito com pelo menos 2d arestas. Conclua que todo grafo simples 2k-regular com $4k+1$ vértices é hamiltoniano ($k\geq 1$).

17. Mostre que se G é o grafo de Petersen (figura 17 do capítulo III) então $G-\{v\}$ é hamiltoniano, para qualquer v em V.

NOTAS

O teorema 1 é devido a Euler (1736), que resolveu o então famoso problema das pontes de Könisberg (vide notas do capítulo I e exercício 1). O problema do correio chinês (teorema 3) foi resolvido por Edmonds e Johnson (1973). O termo "hamiltoniano" é usado, pois o matemático William Hamilton inventou em 1859 um jogo em que um dodecaedro regular tinha seus 20 vértices rotulados com nomes de cidades famosas; o participante deveria então dar a "volta ao mundo", determinando uma rota ao longo das arestas do dodecaedro que passe através de cada um dos vértices exatamente uma vez e volte ao ponto de partida (figura 2). O teorema 4 é de Bondy e Chvátal (1974), mas a idéia fundamental aparece na demonstração do corolário 3, dada por Dirac (1952).

O teorema 5 é de Chvátal (1972). Convém mencionar que nenhuma caracterização simples de grafos hamiltonianos é conhecida. De fato, o problema de decidir se um dado grafo é ou não hamiltoniano parece ser intratável computacionalmente, pois este problema pertence à classe dos problemas NP-m-completos (veja Lucchesi, Simon, Simon, Simon e Kowaltowski (1979)).

CAPÍTULO V

COLORAÇÃO

1 - NÚMERO CROMÁTICO

Uma k-*coloração* ($k \geq 0$) de um grafo é uma função $c: V \to \{1,2,\ldots,k\}$ tal que se u e v são vértices adjacentes em G então $c(u) \neq c(v)$; assim, uma k-coloração de um grafo particiona V em k subconjuntos (V_1, $V_2,\ldots,V_k$), alguns dos quais eventualmente vazios, tais que vértices adjacentes pertencem a blocos distintos da partição. Note que um grafo com laços não admite k-colorações, qualquer que seja k. Por outro lado, se G é um grafo sem laços com n vértices então G admite pelo menos n! n-colorações. Um grafo é k-*colorável* se admite uma k-coloração. Evidentemente, se G é k-colorável então G é k'-colorável para todo k' tal que $k' \geq k$. O *número cromático* de um grafo, $\chi(G)$, é o menor natural k (se existir) tal que G é k-colorável; se $\chi(G) = k$, então G é k-*cromático*. A figura 1 ilustra um grafo 3-cromático.

Freqüentemente, ao considerarmos uma k-coloração c de um grafo G, dizemos que um vértice v tem cor j em lugar de dizer que $c(v) = j$.

Note que um grafo é 0-colorável se e somente se for vazio, 1-colorável se e somente se não tiver arestas e 2-colorável se e somente se for bipartícionável.

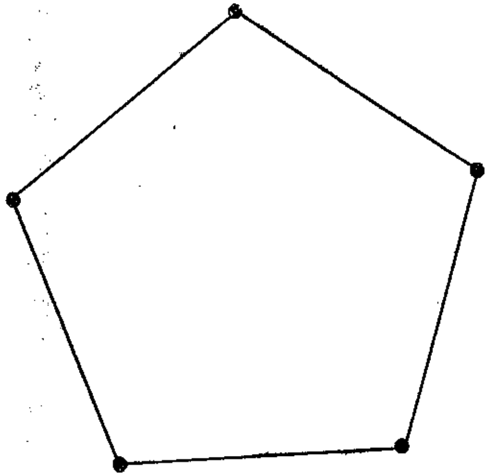


Figura 1

Vamos denotar por $\Delta(G)$ o inteiro $\max\{g(v) \mid v \in V\}$ se G não for vazio; para o grafo vazio G, adotamos $\Delta(G) = 0$.

PROPOSIÇÃO 1 - Se G é um grafo sem laços então $\chi(G) \leq 1+\Delta(G)$.

DEMONSTRAÇÃO por indução em $|V|$. Se G for vazio então $\chi(G)=0<1+\Delta(G)$. Suponha então que G não é vazio. Certamente $\Delta(G-v) \leq \Delta(G)$. Assim, por indução, $\chi(G-v) \leq 1+\Delta(G)$. Seja c' uma k-coloração de G - v, onde k denota $1+\Delta(G)$. Então c' pode ser estendida a G, (bastando para isso notar que $\mathrm{Adj}G(v) \leq \Delta(G) < k$), atribuindo a v uma cor que não é usada por nenhum de seus adjacentes. Assim, G é k-colorável e portanto $\chi(G) \leq k$. ∎

O resultado enunciado como proposição 1 é o melhor possível, pois para todo k, se K_{k+1} denota um grafo completo com k+1 vértices, então $\Delta(K_{k+1}) = k$ e $\chi(K_{k+1}) = k+1$. Contudo, em (quase) todos os demais casos podemos diminuir o limite superior de $\chi(G)$ de uma unidade.

TEOREMA 1 - Seja G um grafo sem laços. Então $\chi(G) \le \Delta(G)$ a menos que

ou (i) pelo menos um dos componentes de G é um grafo completo com (precisamente) $\Delta(G)+1$ vértices,

ou (ii) pelo menos um dos componentes tem como conjunto de arestas um circuito ímpar e $\Delta(G)=2$.

Observe que o caso (ii) no enunciado do teorema 1 é ilustrado na figura 1.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1 - Suponha o contrário, dentre os contra-exemplos da asserção, escolha um, G, que seja minimal. Vamos agora obter algumas propriedades de G. Observe que removendo um vértice v de G, cada vértice de AdjG(v) em G - v tem grau menor do que $\Delta(G)$; assim, nenhum dos componentes de G - v que contêm vértices em AdjG(v) é um grafo completo com $\Delta(G)+1$ vértices, e se $\Delta(G)=2$ então nenhum desses componentes tem como conjunto de arestas um circuito (ímpar). Assim, se G - v tem um componente K, completo, com $\Delta(G)+1$ vértices, então K é um componente de G; se G - v tem um componente K cujo conjunto de arestas é um circuito ímpar e $\Delta(G)=2$ então K é um componente de G.

Por definição de G, podemos então supor que G - v é $\Delta(G)$-colorável. Para cada $\Delta(G)$-coloração de G - v é necessário que se usem todas as $\Delta(G)$ cores para os t vértices $x_1, x_2, \ldots, x_t$ adjacentes a v em G, pois caso contrário haveria uma cor disponível para v e G seria então $\Delta(G)$-colorável. Como $gG(v) \le \Delta(G)$, então $t=\Delta(G)$ e podemos supor que os vértices $x_1, x_2, \ldots, x_{\Delta(G)}$ são coloridos com as cores $1, 2, \ldots, \Delta(G)$, respectivamente. Supondo o grafo G - v assim colorido, temos então:

LEMA 1 - Os vértices x_i e x_j $(1 \le i, j \le \Delta(G);\ i \ne j)$ estão no mesmo componente C_{ij} do subgrafo B_{ij} de $G-v$ gerado pelo conjunto de vértices de cores i e j.

DEMONSTRAÇÃO - Caso contrário a permuta das cores i e j no componente de B_{ij} que tem x_i como um de seus vértices fornece uma $\Delta(G)$-coloração de $G-v$ em que os vértices x_i e x_j têm ambos a mesma cor j, em contradição à obrigatoriedade de colorir $x_1,\ldots,x_{\Delta(G)}$ com $\Delta(G)$ cores diferentes. ∎

LEMA 2 - C_{ij} é uma cadeia ($1 \leq i,j \leq \Delta(G)$; $i \neq j$). Isto é, C_{ij} é gerado pelas arestas de um caminho em C_{ij}. Ademais, esse caminho tem comprimento ímpar, um de x_i e x_j é sua origem, o outro seu término.

DEMONSTRAÇÃO - Pela lema 1, existe um caminho não degenerado $C = (v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n)$ de x_i a x_j em C_{ij}, onde $v_0 = x_i$ e $v_n = x_j$.

Observe que x_i é adjacente ao vértice v_1, que por sua vez tem cor j. Como $gG(x_i) \leq \Delta(G)$ e como v é adjacente a x_i, então, em $G-v$, x_i é adjacente a não mais do que $\Delta(G)-1$ vértices. Se pelo menos dois deles tiverem a mesma cor ou se x_i for adjacente a menos do que $\Delta(G)-1$ vértices em $G-v$, então a cor de x_i pode ser mudada. Assim, x_i é adjacente a precisamente $\Delta(G)-1$ vértices em $G-v$ e v_1 é o único deles com cor j. Logo, o grau de x_i em C_{ij} é 1. Analogamente, o grau de x_j em C_{ij} é 1.

Para completar a demonstração do lema, basta agora mostrar que para todo k tal que $1<k<n$, o grau de v_k em C_{ij} é 2. Para tanto, suponha o contrário, seja k o menor inteiro tal que $1<k<n$ e $gC_{ij}(v_k) \neq 2$. Como v_k é adjacente em C_{ij} a v_{k-1} e a v_{k+1}, por sua vez distintos, então $gC_{ij}(v_k) > 2$. Nesse caso, v_k pode ser recolorido com uma cor diferente de i e diferente de j, e o novo componente C'_{ij} terá $x_i = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ como vér tices, mas não terá nenhum dos vértices $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n = x_j$ em contradição ao lema 1. De fato, C_{ij} é a cadeia G[aC]. Deixamos ao leitor como exercício a verificação de que o comprimento de C é ímpar. ∎

LEMA 3 - O vértice x_i é o único comum a C_{ij} e C_{ik} $(1 \leq i,j,k \leq \Delta(G); i \neq j \neq k \neq i)$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponha que w é um vértice distinto de x_i e comum a C_{ij} e C_{ik}. Então o grau de w em C_{ij} é 2 e em C_{ik} também. Logo, w pode ser recolorido com uma cor diferente de i, j e k; nesse caso os vértices x_i e x_j ficarão em componentes distintos do novo B_{ij}, em contradição ao lema 1. ∎

Se x_i e x_j forem adjacentes para todo i e todo j tais que $1 \leq i,j \leq \Delta(G)$ e $i \neq j$, então $G[\{v\} \cup \{x_1, \ldots, x_{\Delta(G)}\}]$ é um grafo completo com $\Delta(G)+1$ vértices (e um componente de G). Por outro lado, o conjunto de arestas do grafo $H = G[\{v\} \cup VC_{12}]$ é um circuito ímpar; ademais, se $\Delta(G) = 2$ então H é um componente de G. Podemos então supor que $\Delta(G) \geq 3$ e, sem perda de generalidade, que x_1 e x_2 não são adjacentes. Nesse caso, a cadeia C_{12} contém um vértice $y \neq x_2$ adjacente a x_1. Após permutar as cores 1 e 3 na cadeia C_{13}, as novas cadeias C_{21} e C_{23} conterão ambas o vértice y distinto de x_2, em contradição ao lema 3. A demonstração do teorema está completa. ∎

Um *clique* num grafo G é um conjunto de vértices dois a dois adjacentes. Numa coloração de um grafo, os vértices de um clique recebem todos cores distintas. Assim, um grafo com um clique grande necessariamente tem um número cromático alto. A recíproca deste fato porém é falsa, conforme veremos a seguir.

TEOREMA 2 - Para todo natural k, existe um grafo k-cromático sem triângulos.

DEMONSTRAÇÃO - Por indução em k. Para $k=0$, tomamos o grafo vazio. Para $k=1$, tomamos um grafo com um vértice e sem arestas. Para $k=2$, tomamos um grafo com uma ligação e dois vértices. Suponha pois que $k \geq 3$. Por indução, existe um grafo G' (k-1)-cromático sem triângulos. Enumere os vértices de G' segundo uma seqüência $(v_1', v_2', \ldots, v_n')$, onde $n = |VG'|$. Forme um grafo G adicionando a G' n+1 novos vértices $v_0'', v_1'', \ldots, v_n''$, ligando v_0'' a cada vértice em $\{v_1'', \ldots, v_n''\}$ e ligando cada v_i'' a todos os vértices de G' adjacentes a v_i'.

EXEMPLOS - No caso $k=3$, o grafo G obtido está ilustrado na figura 2, é o grafo da figura 1.

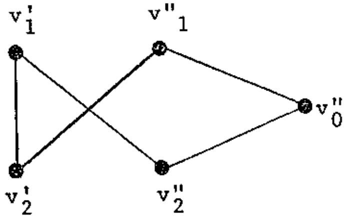


Figura 2

No caso $k=4$, o grafo obtido está ilustrado na figura 3.

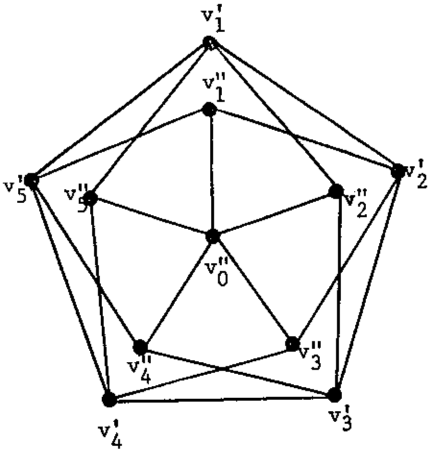


Figura 3

Vamos inicialmente mostrar que G não tem triângulos. Para tanto, suponha que, pelo contrário, G contém três vértices, u, v e w, dois a dois distintos e adjacentes. Seja V'' o conjunto $\{v''_1, \ldots, v''_n\}$. Note que V'' é independente em G e portanto no máximo um dos vértices $\{u,v,w\}$ pertence a V''. Por outro lado, $V'' = \mathrm{Adj}\,G(v''_0)$, logo $v''_0 \notin \{u,v,w\}$. Assim, $\{u,v,w\} \subseteq VG \setminus \{v''_0\}$ e pelo menos dois vértices em $\{u,v,w\}$ pertencem a VG'. Sejam pois i,j e ℓ tais que $u = v'_i$, $v = v'_j$, $w \in \{v'_\ell, v''_\ell\}$ e $i \neq j$. Como v'_i e v''_i não são adjacentes então $\ell \neq i$; analogamente, $\ell \neq j$. Ou seja, $i \neq j \neq \ell \neq i$. Mas $G' = G[VG']$ e $\mathrm{Adj}\,G(v''_\ell) = \mathrm{Adj}\,G'(v'_\ell)$, portanto u,v e v'_ℓ são três vértices distintos, dois a dois adjacentes em G', uma contradição pois G' não tem triângulos. De fato, G não tem triângulos.

É fácil ver que G é k-colorável, pois G' é $(k-1)$-colorável e qualquer $(k-1)$-coloração c' de G' pode ser estendida a uma k-coloração c de G fazendo $c(v''_0) = k$ e $c(v''_i) = c'(v'_i)$, para cada i tal que $1 \leq i \leq n$.

Para mostrar que G é k-cromático, resta agora mostrar que G não é $(k-1)$-colorável. Suponha que, pelo contrário, G tem uma $(k-1)$-coloração c. Sem perda de generalidade, podemos supor que $c(v''_0) = k-1$. Assim, $c(v''_i) < k-1$ para todo i tal que $1 \leq i \leq n$. Mudando para $c(v''_i)$ a cor de cada vértice v'_i tal que $c(v'_i) = k-1$, obtemos então uma $(k-2)$-coloração de G', uma contradição. De fato, G é k-cromático e não tem triângulos. ∎

2 - POLINÔMIOS CROMÁTICOS

Denotaremos por $\pi(G,k)$ o número de k-colorações distintas de um grafo G. Assim, G é k-colorável se e somente se $\pi(G,k) > 0$. Se G é um grafo com laços, $\pi(G,k) = 0$ para todo k; se G é um grafo completo com n vértice ($n>0$) então $\pi(G,k)=0$ para todo k tal que $0\leq k<n$ e $\pi(G,k)=k!/(k-n)!$ para todo k tal que $k\geq n$; se G é um grafo sem arestas e com n vértices ($n>0$) então $\pi(G,k)=k^n$; se G é o grafo vazio então $\pi(G,k)=1$.

Dado um grafo G e uma aresta α em G com extremos u e v (não necessariamente distintos), vamos denotar por G'_α o grafo $G-\alpha$ e por G''_α o grafo obtido a partir de G'_α mediante a coalizão de u e v num único vértice. Note que se α é um laço então $G'_\alpha=G''_\alpha$. A figura 4 mostra um grafo G e os grafos G'_α e G''_α. O grafo G''_α é o grafo obtido a partir de G mediante a *contração* da aresta α.

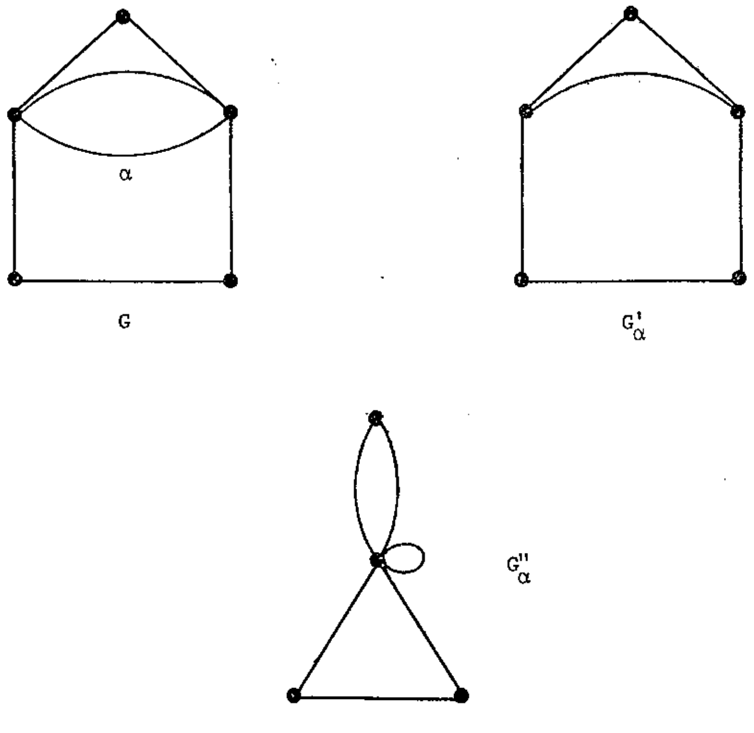


Figura 4

LEMA 4 - Seja α uma aresta de G. Então

$$\pi(G,k) = \pi(G'_\alpha,k) - \pi(G''_\alpha,k).$$

DEMONSTRAÇÃO - Sejam u e v os extremos de α. Sem perda de generalidade, suponha que u é o vértice em G''_α obtido pela identificação de u e v. Observe inicialmente que o conjunto das k-colorações de G é o conjunto das k-colorações c de G'_α tais que $c(u) \neq c(v)$. Assim,

$$\pi(G,k) = \pi(G'_\alpha,k) - m, \tag{1}$$

onde m é o número de k-colorações c de G'_α tais que $c(u) = c(v)$. A toda k-coloração c' de G'_α corresponde uma coloração c de G'_α tal que $c(u) = c(v)$, bastando para isso tomar a extensão c de c' a VG'_α tal que $c(v) = c'(u)$; por outro lado, se c é uma k-coloração de G'_α tal que $c(u) = c(v)$, então a restrição de c a VG'_α é uma k-coloração de G''_α. Assim, existe uma bijeção entre as k-colorações de G'_α e as k-colorações c de G'_α tais que $c(u) = c(v)$. Logo,

$$m = \pi(G''_\alpha,k). \tag{2}$$

De (1) e (2) segue a igualdade enunciada. ∎

TEOREMA 3 - Seja G um grafo com n vértices. Então existe uma seqüência de inteiros não negativos $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ tal que $\pi(G,k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i k^{n-i}$. Ademais, se G não tem laços então $a_0 = 1$; se $n > 0$ então $a_n = 0$.

DEMONSTRAÇÃO - Por indução em $|aG|$. Se G não tem arestas então evidentemente $\pi(G,k) = k^n$ se $n > 0$, e $\pi(G,k) = 1$, se $n = 0$. Em ambos os casos $a_0 = 1$ e se $n > 0$ então $a_n = 0$.

Por outro lado, se G tem laços então $\pi(G,k) = 0$ e $n > 0$.

Suponha pois que G não tem laços, mas tem uma ligação α.

Então, pelo lema,

$$\pi(G,k) = \pi(G'_\alpha,k) - \pi(G''_\alpha,k). \tag{1}$$

Como α é uma ligação, então $n \geq 2$; como G não tem laços, então G'_α não tem laços. Por indução, existem seqüências $(b_1,b_2,\ldots,b_{n-1})$ e $(c_0,c_1,\ldots,c_{n-2})$ de inteiros não negativos tais que

$$\pi(G'_\alpha,k) = k^n + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i b_i k^{n-i} \tag{2}$$

e

$$\pi(G''_\alpha,k) = \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i c_i k^{n-1-i}. \tag{3}$$

De (1), (2) e (3),

$$\pi(G,k) = k^n + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(b_i+c_{i-1})k^{n-i}.$$

Assim, a asserção vale, com $a_0 = 1$, $a_i = (b_i+c_{i-1})$ para cada i tal que $1 \leq i \leq n-1$, e $a_n = 0$. ∎

A função $\pi(G,k)$ é conhecida como o *polinômio cromático* de G. Observe que $\pi(G,k)$ pode ser calculado usando recursivamente a fórmula enunciada no lema 4.

3 - GRAFOS CRÍTICOS

Um grafo é k-*crítico* se for k-cromático minimal. Por exemplo, os grafos k-cromáticos obtidos pela demonstração do teorema 2 são k-críticos (exercício 3). Vamos agora obter propriedades de grafos k-críticos.

PROPOSIÇÃO 2 - Todo grafo k-cromático tem um subgrafo k-crítico, todo grafo k-crítico é simples e conexo.

DEMONSTRAÇÃO - Imediata. ∎

PROPOSIÇÃO 3 - Todo grafo k-crítico G tem pelo menos k vértices, todos com grau maior do que $k-2$.

DEMONSTRAÇÃO - Suponha que G tem um vértice, v, tal que $gG(v) \leq k-2$. Como $G-v$ é $(k-1)$-colorável, então seja c uma $(k-1)$-coloração de $G-v$. Evidentemente, c pode ser estendida a uma $(k-1)$-coloração de G, atribuindo a v uma das cores não usadas pelos vértices em $AdjG(v)$. Assim, G é $(k-1)$-colorável, uma contradição. Portanto, $gG(v) > k-2$ para todo v em V. Evidentemente, $k = \chi(G) \leq |V|$. ∎

PROPOSIÇÃO 4 - Se G é um grafo k-crítico e $W(X)$ é um corte (de vértices) separador em G, então $W(X)$ não é um clique em G.

DEMONSTRAÇÃO - Suponha o contrário. Como $G' = G[X]$ e $G'' = G[(V\setminus X)\cup W(X)]$ são ambos subgrafos próprios de G, então são ambos $(k-1)$-coloráveis; sejam c' e c'' $(k-1)$-colorações de G' e G'' respectivamente. Como $W(X)$ é um clique, então $c'(v) \neq c'(w)$ e $c''(v) \neq c''(w)$ para quaisquer v e w distintos em $W(X)$. Podemos então ajustar a notação, permutando as cores atribuidas pela coloração c' se necessário, de forma que $c'(v) = c''(v)$ para cada v em $W(X)$. Nesse caso, a "união" c de c' e c'', ou seja, a função $c: V \longrightarrow \{1,\ldots,k-1\}$ tal que $c(v) = c'(v)$ para cada v em VG' e $c(v) = c''(v)$ para cada v em VG'', é uma $(k-1)$-coloração de G, uma contradição. ∎

COROLÁRIO 1 - Todo grafo k-crítico é 2-conexo, exceto o grafo completo com 2 vértices. ∎

Conforme veremos a seguir, a proposição 4 tem uma outra conseqüência interessante. Seja W um conjunto de vértices de um grafo G

G' um componente de $G-W$; então o grafo $G[W \cup VG']$ é um *W-componente* de G. Considere agora um grafo G k-crítico, e dois vértices u e v tais que $\{u,v\}$ é um corte separador em G. Dizemos que um $\{u,v\}$-componente de G é do *tipo 1* se todas as suas (k-1)-colorações atribuem a mesma cor a u e v, e do *tipo 2* se todas as suas (k-1)-colorações atribuem cores diferentes a u e a v.

TEOREMA 4 - Seja G um grafo k-crítico, $\{u,v\}$ um corte separador em G. Então G tem exatamente dois $\{u,v\}$-componentes, um, G_1, do tipo 1, outro G_2, do tipo 2. Ademais, se G_1' denota o grafo obtido a partir de G_1 pela adição de uma ligação com extremos u e v, e se G_2' denota o grafo obtido a partir de G_2 pela identificação dos vértices u e v, então G_1' e G_2' são ambos k-críticos.

DEMONSTRAÇÃO - Como $\{u,v\}$ é separador, então $G-\{u,v\}$ não é conexo. Assim, $G-\{u,v\}$ tem pelo menos dois componentes. Logo, G tem pelo menos dois $\{u,v\}$-componentes. Como G é k-crítico então cada um desses componentes é (k-1)-colorável. Se todos esses componentes admitem (k-1)-colorações que atribuem a mesma cor a u e a v, então evidentemente G é (k-1)-colorável, uma contradição. Logo, pelo menos um desses componentes, digamos G_2, é do tipo 2. Analogamente, se todos os $\{u,v\}$-componentes de G admitem (k-1)-colorações que atribuem cores distintas a u e a v então G é (k-1)-colorável, novamente uma contradição. Assim, pelo menos um desses componentes G_1, é do tipo 1 Evidentemente, como G é k-cromático, então $G[VG_1 \cup VG_2]$ é k-cromático. Logo, como G é k-crítico, então $G = G[VG_1 \cup VG_2]$. De fato, G tem exatamente dois $\{u,v\}$-componentes, G_1 e G_2, do tipo 1 e 2, respectivamente.

Para mostrar que G_1' é k-crítico, observe inicialmente que

G_1 é (k-1)-colorável; assim, dada uma (k-1)-coloração de G_1, obtemos uma k-coloração de G_1' mudando para k a cor de u. Logo, G_1' é k-colorável. Por outro lado, G_1' não é (k-1)-colorável, pois G_1 é do tipo 1. Assim, G_1' é k-cromático. Para mostrar que G_1' é k-crítico, basta agora mostrar que $G_1' - \alpha$ é (k-1)-colorável, para todo α em aG_1'. Isto é certamente verdade se α for a aresta com extremos u e v. Suponha então que α pertence a aG_1 Como G é k-crítico, então $G - \alpha$ é (k-1)-colorável; seja c uma (k-1)-coloração de $G-\alpha$. Como $G_2 \subseteq G-\alpha$ então a restrição de c a VG_2 é uma (k-1)-coloração de G_2; portanto $c(u) \neq c(v)$. Assim, a restrição de c a VG_1 é uma (k-1)-coloração de G_1'. De fato, G_1' é k-crítico.

De maneira análoga demonstra-se que G_2' é k-crítico. ∎

TEOREMA 5 Todo grafo k-crítico (k>0) é (k-1)-aresta-conexo.

DEMONSTRAÇÃO - Suponha o contrário. Seja G um grafo k-crítico (k>0), X um subconjunto próprio e nao vazio de VG tal que $|\delta(X)| \leq k-2$. Para cada aresta α de $\delta(X)$, seja x_α o extremo de α em X, $\bar{x}_\alpha$ o extremo de α em $V\backslash X$.

Como G é k-crítico, então G[X] e G-X são ambos (k-1)-coloráveis. Seja $\bar{c}$ uma (k-1)-coloração de G-X. Para cada (k-1)-coloração c de G[X], seja Z(c) o conjunto $\{\alpha | \alpha \in \delta(X) \text{ e } c(x_\alpha) = \bar{c}(\bar{x}_\alpha)\}$. Seja c uma (k-1)-coloração de G[X] tal que Z(c) é minimal.

Observe que se $Z(c) = \emptyset$ então a "união" de c e $\bar{c}$ (ou seja, $f: V \longrightarrow \{1,\ldots,k-1\}$ tal que $f(v) = c(v)$ se $v \in X$ e $f(v) = \bar{c}(v)$ se $v \in V\backslash X$) é uma (k-1)-coloração de G, contradição.

Resta portanto mostrar que $Z(c) = \emptyset$. Suponha o contrário, seja α uma aresta em Z(c), seja

$$I = \{v | v \in W(X) \text{ e } c(v)=c(x_\alpha)\},$$

$$d = \delta(X) \cap \delta(I),$$

$$m = \{i | 1 \le i \le k-1, \exists v \text{ em } W(X)\backslash I \text{ com } c(v)=i\},$$

e

$$n = \{i | 1 \le i \le k-1, \exists v \text{ em } AdjG(I)\backslash X \text{ com } \bar{c}(v)=i\}.$$

Por definição de m, X e d,

$$|m| \le |W(X)\backslash I| \le k-2-|d|. \qquad (1)$$

Analogamente,

$$|n| \le |AdjG(I)\backslash X| \le |d|. \qquad (2)$$

De (1) e (2),

$$|m| + |n| \le k-2.$$

Mas a cor comum aos vértices em I pertence a n, pois $x_\alpha \in I$, $\bar{x}_\alpha \in AdjG(I)\backslash X$ e $c(x_\alpha) = \bar{c}(\bar{x}_\alpha)$.

Assim, existe pelo menos uma cor, digamos r, que não é a cor de nenhum vértice em $W(X) \cup [AdjG(I)\backslash X]$. Portanto, se permutarmos em $G[X]$ as cores r e $c(x_\alpha)$, obteremos uma nova (k-1)-coloração c' de $G[X]$, tal que $Z(c') \subseteq Z(c)\backslash\{\alpha\} \subsetneq Z(c)$, em contradição à escolha de c. De fato, Z(c) é vazio, e G (k-1)-colorável. Portanto, $|\delta(X)| \ge k-1$ e G é de fato (k-1)-aresta-conexo. ∎

Um grafo H é uma *subdivisão elementar* de outro G se H pode ser obtido a partir de G substituindo uma aresta α com extremos u e v por duas novas arestas α' e α'' e um novo vértice v_α tal que v_α e u são os extremos de α' e v_α e v os extremos de α''. Um grafo H é uma *subdivisão* de outro G se existe uma seqüência $(G_0, G_1, \ldots, G_n)$ $(n \geq 0)$ em que $G_0 = G$, $G_n = H$ e G_{i+1} é uma subdivisão elementar de G_i, para cada i tal que $0 \leq i \leq n-1$. A figura 5 mostra um grafo que é uma subdivisão de um grafo completo com 4 vértices.

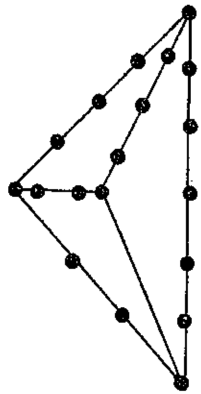


Figura 5

TEOREMA 6 - Se G é k-cromático e $k \leq 4$ então G tem um subgrafo que é uma subdivisão de um grafo completo com k vértices.

DEMONSTRAÇÃO - A afirmação é trivialmente válida se $k \leq 2$. Para $k=3$ a afirmação é facilmente verificada pois se G é 3-cromático então G tem um circuito c com um número ímpar de arestas e G[c] é uma subdivisão de um triângulo. Podemos então supor que $k = 4$.

Evidentemente, todo subgrafo de um subgrafo de G é um subgrafo de G. Assim, podemos supor sem perda de generalidade que G é 4-crítico. Pelo corolário 1, G é 2-conexo.

Considere inicialmente o caso em que G tem um corte separador {u,v}. Pelo teorema 4, G tem exatamente dois {u,v}-componentes, G_1 e G_2; ademais, se adicionarmos uma aresta α a G_1 com extremos u e v, o grafo assim obtido, G_1', é 4-crítico. Por indução, G_1' tem um subgrafo H' que é uma subdivisão de um grafo completo com 4 vértices. Se C denota um caminho de u a v em G_2, então G[VH'∪VC] tem um subgrafo H que é uma subdivisão de H'. Assim, H é um subgrafo de G e uma subdivisão de um grafo completo com quatro vértices.

Suponha então que G é 3-conexo. Nesse caso, tomando 2 vértices distintos u e v de G, existe uma coleção com 3 caminhos C_1, C_2 e C_3 de u a v, dois a dois internamente disjuntos. Ademais, pela proposição 2, G é simples, portanto pelo menos dois dos caminhos C_1, C_2 e C_3, digamos C_1 e C_2, têm comprimento maior do que 1. Como G é 3-conexo, G - {u,v} é conexo. Dentre os caminhos em G - {u,v} com origem em VC_1 e término em $VC_2 \cup VC_3$, escolha um, C_4, de comprimento mínimo. É fácil ver que $G[aC_1 \cup aC_2 \cup aC_3 \cup aC_4]$ é uma subdivisão de um grafo completo com 4 vértices (figura 6). ∎

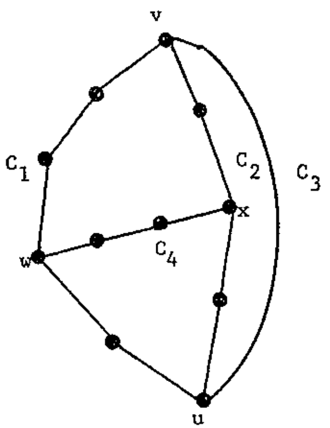


Figura 6

Convém ressaltar que a recíproca do teorema é falsa, pois se o conjunto de arestas de um grafo G é um circuito em G com um número par de arestas e ≥ 4, então G é 2-colorável e uma subdivisão de um triângulo.

Dado um grafo simples G, uma *contração elementar* de G é um grafo simples H obtido a partir de G mediante a substituição de dois vértices adjacentes u e v por um novo vértice w que é ligado (por meio de ligações) a cada vértice em $\mathrm{Adj}G(\{u,v\})\setminus\{u,v\}$ Um grafo H é uma *contração* de outro G se existe uma seqüência $(G_0\ G_1,\ldots,G_n)$ $(n\geq 0)$ tal que $G_0 = G$, $G_n = H$ e G_{i+1} é uma contração elementar de G_i, para cada i tal que $0 \leq i \leq n-1$. A figura 7 ilustra um grafo G e uma contração elementar H de G.

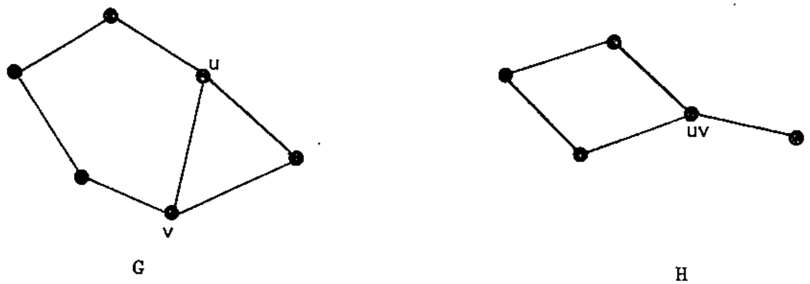


Figura 7

COROLÁRIO 2 - Se G é um grafo k-crítico $(k\leq 4)$ então G pode ser contraído a um grafo completo com k vértices. ∎

4 - COLORAÇÃO DE ARESTAS

Uma k-*aresta-coloração* $(k\geq 0)$ de um grafo G é uma função $c\colon aG \longrightarrow \{1,\ldots,k\}$ tal que para arestas distintas e adjacentes α e

β, $c(\alpha) \neq c(\beta)$. Um grafo é *k-aresta-colorável* se admite uma k-aresta-coloração. Observe que o grafo vazio é 0-aresta-colorável. Note também que todo grafo é $|aG|$-aresta-colorável e que se um grafo é k-aresta-colorável então é k'-aresta-colorável, para todo $k' \geq k$. Podemos assim definir o *número aresta-cromático* de G, $X'(G)$, como sendo o menor k tal que G é k-aresta-colorável; dizemos então que G é $X'(G)$-*aresta-cromático*.

Dada uma k-aresta-coloração c de um grafo G, dizemos que a cor i $(1 \leq i \leq k)$ *está representada* por c num vértice v de G se $c(\alpha) = i$ para alguma aresta α incidente em v.

PROPOSIÇÃO 5 - Seja $m = \max\{|\delta(v)| \mid v \in V\}$. Então $X'(G) \geq m$. Assim, se G não tem laços então $X'(G) \geq \Delta(G)$. ∎

TEOREMA 7 - Se G é um grafo simples então

$$\Delta(G) \leq X'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

DEMONSTRAÇÃO - Pela proposição 5, $\Delta(G) \leq X'(G)$.

Provaremos, por indução em $|aG|$, que

$$X'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Evidentemente, se aG for vazio então $X'(G) = 0 < 1 = \Delta(G)+1$. Suponha então que G tem uma aresta, α. Seja G' o grafo $G - \alpha$. Certamente $\Delta(G') \leq \Delta(G)$. Por indução, G' tem uma $(\Delta(G)+1)$-aresta-coloração c'.

Seja v_0 um extremo de α. Seja $s = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $(n \geq 1)$ uma seqüência de arestas duas a duas distintas todas incidentes em v_0. Para cada j $(1 \leq j \leq n)$, seja v_j o extremo de α_j distinto de v_0. Dizemos que s é *alternada* se $\alpha = \alpha_1$ e a cor $c'(\alpha_{j+1})$ não está representada em

v_j, para cada j tal que $1 \leq j \leq n-1$. Evidentemente, (α) é alternada. Seja $s=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ uma seqüência alternada maximal. Como $gG(v_n) \leq \Delta(G)$, então pelo menos uma das cores $\{1,2,\ldots,\Delta(G)+1\}$ não está representada em v_n; seja p uma tal cor.

Se p não estiver representada em v_0 então uma $(\Delta(G)+1)$-aresta-coloração de G é obtida a partir de c' atribuindo a cor $c'(\alpha_{i+1})$ à aresta α_i para cada i tal que $1 \leq i \leq n-1$, atribuindo a cor p à aresta α_n e mantendo as cores das demais arestas.

Podemos pois supor que p está representada em v_0. Pela maximalidade de s, $p = c'(\alpha_j)$, onde $2 \leq j \leq n-1$. Por outro lado, como $gG'(v_0) < \Delta(G)$, então pelo menos duas cores não estão representadas em v_0; seja q uma delas. Seja G'_{pq} o subgrafo gerador de G' cujas arestas são precisamente as arestas de cor p ou q. Seja K_j o componente de G'_{pq} que contém a aresta α_j.

Se $v_{j-1} \notin K_j$ então uma $(\Delta(G)+1)$-aresta-coloração de G é obtida a partir de c', atribuindo a cor $c'(\alpha_{i+1})$ à aresta α_i $(1 \leq i \leq j-1)$, trocando as cores p e q em K_j e mantendo inalteradas as cores das demais arestas.

Podemos então supor que $v_{j-1} \in K_j$. Seja $C=(u_0,\beta_1,u_1,\ldots,\beta_m,u_m)$ um caminho de v_0 a v_{j-1} em K_j (figura 8). Como q não é representada em v_0 e $c'(\alpha_j)=p$, então $\beta_1=\alpha_j$ e $u_1=v_j$. Cada vértice interno u_i em C é incidente a β_i e β_{i+1}, uma das quais tem cor p, a outra cor q. Finalmente, u_m, isto é, v_{j-1}, tem grau 1 em K_j, pois a cor p não é representada em v_{j-1} e $m>0$. Assim, $K_j=G'[aC]$. Ademais, v_{j-1} é o único vértice de K_j no qual a cor p não é representada. Logo, $v_n \notin K_j$. Assim, se K_n denota o componente de G'_{pq} que contém v_n, então nem v_{j-1}

nem α_j pertencem a K_n. Portanto, uma $(\Delta(G)+1)$-coloração de G é obtida a partir de c' atribuindo a cor $c'(\alpha_{i+1})$ à aresta α_i $(1 \leq i \leq n-1)$,

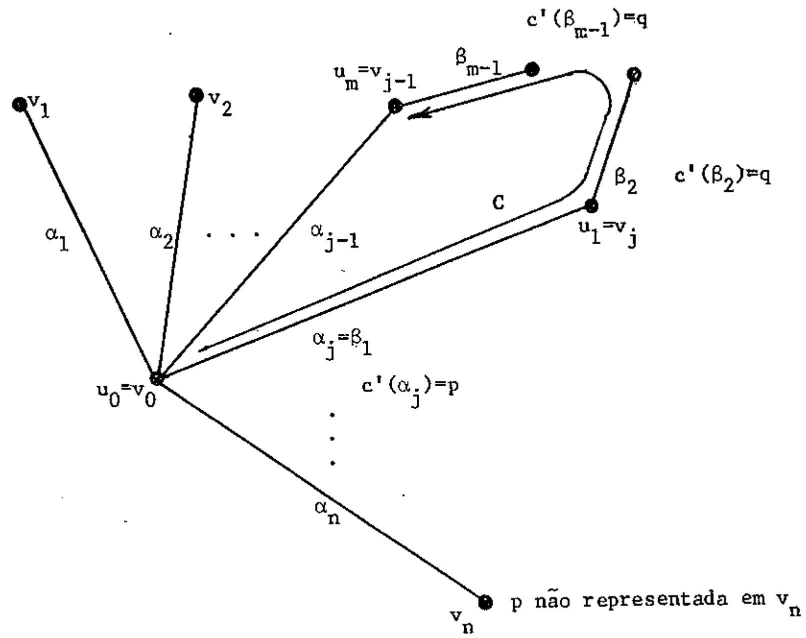


Figura 8

atribuindo a cor q à aresta α_n, trocando as cores p e q em K_n e conservando as cores das demais arestas.

De fato, G é $(\Delta(G)+1)$-aresta-colorável. ∎

TEOREMA 8 - Se G é biparticionável (não necessariamente simples) então $X'(G) = \Delta(G)$.

DEMONSTRAÇÃO - Pela proposição 5, $X'(G) \geq \Delta(G)$. Mostraremos que G é $\Delta(G)$-aresta-colorável por indução em $|aG|$. Se aG for vazio então $X'(G) = 0 = \Delta(G)$. Suponha pois que G tem uma aresta, α. Seja G' o grafo

$G - \alpha$. Como $\Delta(G') \leq \Delta(G)$ então, por indução, G' tem uma $\Delta(G)$-aresta-coloração c'.

Sejam v_0 e v_1 os extremos de α. Como $gG'(v_0) < \Delta(G)$, então pelo menos uma cor em $\{1,\ldots,\Delta(G)\}$, digamos q, não é representada em v_0. Se q não for representada em v_1 então a extensão c de c' a G que atribui cor q a α é uma $\Delta(G)$-aresta-coloração de G. Suponha então que q é representada em v_1. Como $gG'(v_1) < \Delta(G)$, então pelo menos uma cor em $\{1,\ldots,\Delta(G)\}$ não é representada em v_1; seja p uma tal cor. Seja G'_{pq} o subgrafo gerador de G' cujas arestas são precisamente as arestas de cor p ou q. Seja K o componente de G'_{pq} que contém v_1.

Vamos agora mostrar que $v_0 \notin VK$. Para tanto, suponha o contrário. Seja $C = (u_0, \beta_1, u_1, \ldots, \beta_m, u_m)$ um caminho de v_1 a v_0 em K. Como p não é representada em v_1 e q não é representada em v_0, então m é par, $c'(\beta_{2i+1}) = q$ $(0 \leq i < m/2)$ e $c'(\beta_{2i}) = p$ $(1 \leq i \leq m/2)$. Assim, $C(v_0, \alpha, v_1)$ é um passeio circular de comprimento ímpar em G, contradição pois G é biparticionável. De fato, $v_0 \notin VK$.

Uma $\Delta(G)$-coloração de G é obtida a partir de c' trocando as cores p e q em K, atribuindo a cor q a α e mantendo as cores das demais arestas. ■

EXERCÍCIOS

1. Mostre que se G é um grafo sem laços com n vértices e se m denota a cardinalidade de cada subconjunto independente máximo de V, então

$$mX(G) \geq n$$

e

$$m + X(G) \leq n + 1.$$

2. Um *complemento* de um grafo G é um grafo simples $\bar{G}$ com $V\bar{G} = VG$ tal que dois vértices distintos são adjacentes em $\bar{G}$ se e somente se não o forem em G. Mostre que $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n+1$ para todo grafo G sem laços, onde $n = |VG|$.

3. Mostre que para cada k, o grafo k-cromático fornecido pela demonstração do teorema 2 é k-crítico.

4. Mostre que se G é um grafo k-crítico e $\{u,v\}$ é um corte separador em G, então $g(u) + g(v) \geq 3k-5$. (Sugestão: considere os grafos G_1', G_2' como no enunciado do teorema 4 e aplique a proposição 3 a ambos).

5. Mostre que se G é simples com n vértices (n>0) e m arestas, então

$$\chi(G) \geq n^2/(n^2-2m).$$

6. Mostre que se G não tem laços e quaisquer dois passeios circulares de comprimento ímpar passam por um mesmo vértice então $\chi(G) \leq 5$.

7. Demonstre a seguinte generalização da proposição 1: se G é um grafo sem laços então $\chi(G) \leq 1 + \max\{d(G[X]) \mid X \subseteq V\}$ onde $d(H) = \min\{gH(v) \mid v \in VH\}$.

8. Mostre que se G é k-cromático e se G tem uma k'-coloração c' em que cada cor é atribuída a pelo menos dois vértices então G tem uma k-coloração deste tipo. (Sugestão: dentre as k-colorações de G, considere aquelas cujo número de cores atribuídas a precisamente um vértice é mínimo; dentre estas, escolha uma tal que o número de cores atribuídas a precisamen-

te dois vértices, e/que têm cores diferentes em c', é mínimo).

9. Seja G um grafo sem laços com a seqüência de graus decrescente $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, onde $n = |VG|$. Mostre que $\chi(G) \le \max\{\min\{i, g_i+1\} \mid 1 \le i \le n\}$. De fato, mostre que se $(S_1, \ldots, S_k)$ é a partição de V induzida por uma k-coloração de G então

$$\chi(G) \le \max\{\min\{i, d_i+1\} \mid 1 \le i \le k\},$$

onde d_i denota $\max\{gG(v) \mid v \in S_i\}$.

10. Mostre que se G é um grafo simples com n vértices (n>0) então o coeficiente de k^{n-1} em $\pi(G,K)$ é $-|aG|$.

11. Mostre que se G é uma árvore (isto é, um grafo conexo sem circuitos) com n vértices (n>0), então $\pi(G,k) = k(k-1)^{n-1}$. Conclua que se G é conexo e simples com n vértices (n>0), então $\pi(G,k) \le k(k-1)^{n-1}$ com igualdade se e somente se G é uma árvore.

12. Mostre que se o conjunto de arestas de G é um circuito em G, e se G é conexo com n vértices, então $\pi(G,k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

13. Mostre que se $G_1, \ldots, G_m$ são os componentes de G, então $\pi(G,k) =$ $= \pi(G_1,k) \cdot \pi(G_2,k) \cdot \ldots \cdot \pi(G_m,k)$.

14. Mostre que se W é um clique e se $G_1, G_2, \ldots, G_m$ são os W-componentes de G, então

$$\pi(G,k) = r \cdot \pi(G_1,k) \cdot \pi(G_2,k) \cdot \ldots \cdot \pi(G_m,k)$$

onde $r = 0$ se $\pi(G[W],k) = 0$ e $r = [\pi(G[W],k)]^{1-m}$, caso contrário.

15. Mostre que os únicos grafos k-críticos ($k \leq 2$) são os grafos completos com k vértices. Mostre que os únicos grafos 3-críticos são os grafos gerados pelo conjunto de arestas de passeios circulares de comprimento ímpar ≥ 3.

16. Mostre que se u e v são vértices de um grafo crítico, então $Adj(u) \setminus Adj(v)$ e $Adj(v) \setminus Adj(u)$ são ambos não vazios. Conclua que nenhum grafo com k+1 vértices é k-crítico.

17. Demonstre a seguinte generalização do teorema 1: Seja G um grafo k-crítico. Então $gG(v) \geq k-1$ para todo v em G, e cada subgrafo 2-conexo maximal do grafo $G[\{v \mid gG(v)=k-1\}]$ é ou um grafo completo ou um grafo gerado por um circuito com um número ímpar de arestas.

18. Demonstre a seguinte generalização do teorema 1: se G é (k+1)-cromático sem subgrafos completos com k+1 vértices, então

$$\sum_{v \in S} (g(v)-k) \geq k-2,$$

onde $S = \{v \mid g(v)>k\}$.

19. Considere uma classe minimal C_k de grafos que contém os grafos completos com k vértices e fechada sob as seguintes operações:

(I) Adição de um vértice ou ligação.

(II) Identificação de dois vértices não adjacentes.

(III) Sejam G_1 e G_2 dois grafos sem vértices nem arestas em comum; a_1 e b_1 dois vértices distintos adjacentes em G_1, a_2 e b_2 dois vértices distintos e adjacentes em G_2. Remova de G_1 as arestas com extremos a_1 e b_1, de G_2 as a restas com extremos a_2 e b_2. Adicione uma aresta com extremos b_1 e b_2, identifique os vértices a_1 e a_2 (figura 9).

Demonstre que C_k é a classe dos grafos G tais que $\chi(G) \geq k$.

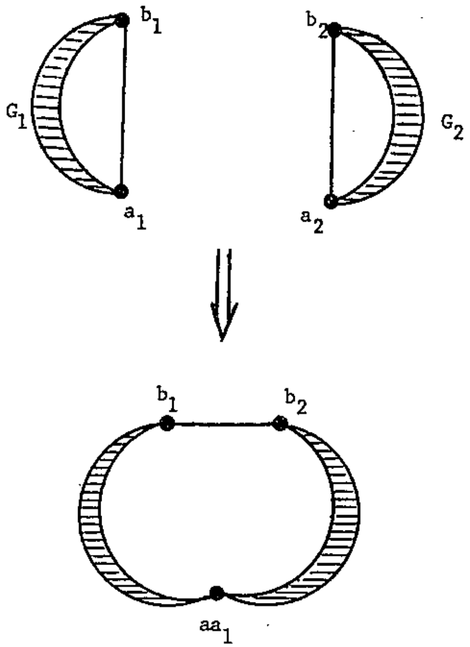


Figura 9

20. Mostre que se G_1 e G_2 são grafos k-críticos então todo grafo G obtido mediante a operação (III) do exercício anterior em G_1 e G_2 é também k-crítico. Construa grafos 4-críticos com n vértices, $n \geq 4$, $n \neq 5$.

21. Mostre que o teorema 1 é equivalente à seguinte afirmação: se G é k-crítico ($k \geq 4$) mas não completo, então $2|aG| \geq (k-1)|VG|+1$.

22. Demonstre o caso particular do teorema 7 em que $\Delta(G) \leq 3$ como um corolário do teorema 1.

23. Demonstre o teorema 8 como um corolário do exercício 17 do capítulo III.

24. Mostre que o grafo de Petersen (figura 17 do capítulo III) é 4-aresta-cromático.

25. Demonstre o caso particular do teorema 7 em que $\Delta(G) \leq 3$ como um corolário do teorema 8 e do exercício 14 do capítulo I.

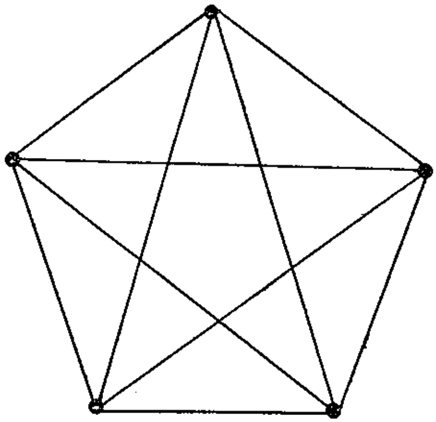
26. Mostre que se K_{2n-1} e K_{2n} são grafos completos com 2n-1 e 2n vértices, respectivamente, então $\chi'(K_{2n-1}) = \chi'(K_{2n}) = 2n-1$.

27. Um grafo G é *k-aresta-colorável de maneira única* se toda k-aresta-coloração de G induz a mesma partição de aG. Mostre que todo grafo 3-regular 3-aresta-colorável de maneira única é hamiltoniano.

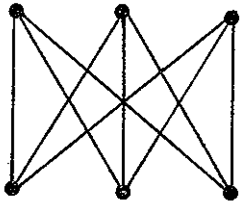
28. Um grafo G é *k-colorável de maneira única* se G for k-colorável e toda k-coloração de G induz a mesma partição de V. Mostre que todo grafo k-colorável de maneira única é (k-1)-conexo.

NOTAS

O estudo de colorações surgiu devido ao famoso "problema das quatro cores", que passamos a descrever informalmente. Um grafo G é *planar* se existe uma representação gráfica de G em que arestas não cruzam, a não ser num vértice que é extremo de ambas (representações gráficas com esta propriedade são chamadas *mapas*). Os grafos da figura 11 são planares. Os grafos K_5 e $K_{3,3}$ da figura 10 não são planares. Tampouco é planar o grafo de Petersen (figura 17 do capítulo III).

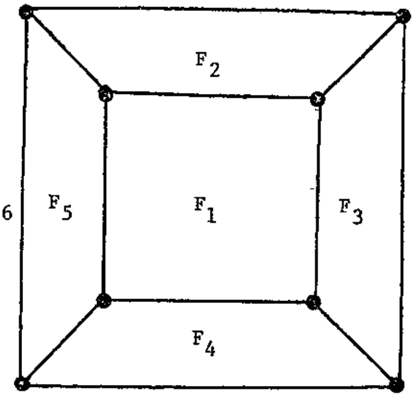


K_5

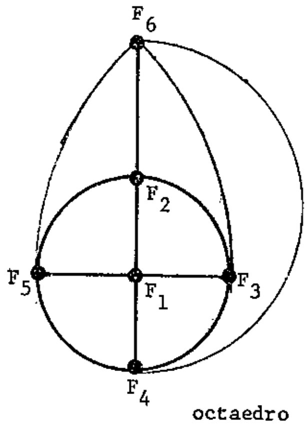


$K_{3,3}$

Figura 10



cubo



octaedro

Figura 11

Pode-se verificar que uma representação gráfica de um grafo (planar) por meio de um mapa particiona o plano em regiões chamadas *faces*. Por exemplo, o cubo (figura 11) tem 6 faces (marcadas F_1,

$F_2,\ldots,F_6$); as faces F_1 e F_5 são *adjacentes*, pois têm uma linha divisória comum. O problema das quatro cores pode ser então assim enunciado: as faces de todo mapa podem ser coloridas com não mais do que quatro cores de forma que faces adjacentes tenham cores distintas. Este problema foi inventado em 1852 por Francis Guthrie e resistiu por mais de 100 anos ao ataque de combinatóricos, algebristas e topólogos; uma solução usando o computador foi dada em 1976, por Kenneth Appel e Wolfgang Haken (1977); outra demonstração do teorema das quatro cores também usando o computador foi dada por Frank Allaire (1977).

Dado um grafo planar G, pode-se considerar o grafo *dual* (também planar) D em que os vértices de D são as faces de G, as arestas de D são as arestas de G, e os extremos de α em D são as faces de G que contêm α. O octaedro (figura 11) é o dual do cubo (figura 11). A figura 12 mostra um grafo G e o dual D. Pode-se mostrar que o dual do dual de G é igual a G.

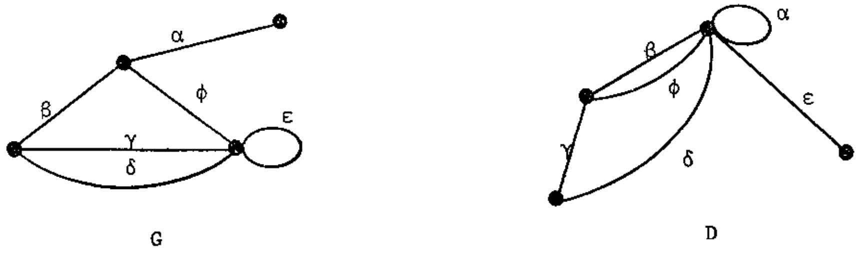


Figura 12

Com o conceito de dualidade, pode-se enunciar o teorema das quatro cores da seguinte maneira: todo grafo planar é 4-colorável. Uma vez transformado o problema de colorir faces em outro de colorir vér tices foi natural estudar colorações de vértices de grafos quaisquer, não necessariamente planares. Damos a seguir uma lista de afirmações equivalentes ao teorema das quatro cores.

AFIRMAÇÃO 1 - Todo grafo 5-cromático é não planar.

AFIRMAÇÃO 2 - Todo grafo 5-cromático contém um subgrafo que é uma subdivisão de K_5 (figura 10).

AFIRMAÇÃO 3 - Todo grafo 5-crítico pode ser contraído a um K_5.

AFIRMAÇÃO 4 - Todo grafo 3-regular, 2-conexo, planar tem 3 emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos (ou seja, é 3-aresta-colorável).

O teorema 1 foi demonstrado por Brooks (1941); a demonstração aqui apresentada é de Melnikov e Vizing (1969) e usa a técnica de cadeias de Kempe, utilizada por Kempe (1879) na primeira demonstração errada famosa do teorema das quatro cores.

O teorema 2 é de Mycielski (1955).

O estudo de polinômios cromáticos foi introduzido por Birkhoff (1912) no ataque ao problema das quatro cores e desenvolvido por Whitney e Tutte. A alternância de sinais do polinômio cromático (teorema 3) foi demonstrada por Whitney (1932c).

Os teoremas 4, 5 e 6 são de Dirac (1952a,1953). O teorema 6 demonstra casos particulares da conjetura de Hajós (1961): se um grafo é k-cromático então tem um subgrafo que é uma subdivisão de um grafo completo com k vértices (veja também afirmação 2, acima). Analogamente, o corolário 2 demonstra casos particulares da conjetura de Hadwiger (1943): se G é k-crítico então pode ser contraído a um grafo completo com k vértices (veja também afirmação 3, acima).

O teorema 7 é de Vizing (1964); o enunciado do exercício 18 é de Dirac (1952), o do exercício 19 de Hajós (1961). O primeiro contra-exemplo para a generalização da afirmação 4 para grafos não planares foi dado por Petersen (1891) (veja exercício 24).

O leitor interessado em grafos planares, bem como na imersão de grafos em outras superfícies, pode consultar o livro de Fréchet e Fan (1967).

Para um estudo do teorema das quatro cores, e da sua história, citamos os livros de Ore (1967) e de Kainen e Saaty (1977), e os artigos de May (1965), Saaty (1972), Haken (1977), Appel e Haken (1977) e Allaire (1977).

- o -

REFERÊNCIAS

[1] - A.V.Aho, J.E.Hopcroft e J.D.Ullmann (1974), *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, Reading.

[2] - F. Allaire (1977), Another proof of the four colour theorem - Research Report 370, Dept. of Math and Statistics, The University of Calgary, Canadá.

[3] - K.Apell e W.Haken (1977), Every planar map is four colorable, *Ill.J.of Math.*, *21*, 429-567 + microfiche supplement.

[4] - C.Berge (1957), Two theorems in Graph Theory, *Proc. Nat. Ac. Sciences*, USA, *43*, 842.

[5] - C.Berge (1958), Sur le couplage maximum d'un graphe, *C.R.Acad.Sciences*, Paris, *247*, 258-259.

[6] - C.Berge (1970), *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris (traduzido para o inglês em Berge (1973)).

[7] - C.Berge (1973), *Graphs and Hypergraphs*, North Holland, Amsterdã (tradução do original em francês Berge (1970)).

[8] - N.Biggs (1974), *Algebraic Graph Theory*, Cambridge U.Press., Cambridge.

[9] - G.D.Birkhoff (1912), A determinant formula for the number of ways of coloring a map, *Ann.of Math.*, *14*, 42-46.

[10] - J.A.Bondy e V.Chvátal (1974), A method in graph theory, *Discrete Math.*, *15*, 111-135.

[11] - J.A.Bondy e U.S.R.Murty (1976), *Graph Theory with Applications*, MacMillan, Londres.

[12] - R.L.Brooks (1941), On colouring the nodes of a network, *Proc.Cambridge Philos.Soc.*, *37*, 194-197.

[13] - V.Chvátal (1972), On Hamilton's ideals, *J.Comb.Th.* (B), *12*, 163-168.

[14] - E.W.Dijkstra (1959), A note on two problems in connexion with graphs, *Numer. Math.*, *1*, 269-271.

[15] - R.P.Dilowrth (1950), A decomposition theorem for partially ordered sets, *Ann. of Math.*, *51*, 161-166.

[16] - G.A.Dirac (1952), Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Math. Soc.*, *2*, 69-81.

[17] - G.A.Dirac (1952a), A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs, *J. London Math. Soc.*, *27*, 85-92.

[18] - G.A.Dirac (1953), The structure of k-chromatic graphs, *Fund.Math.*, *40*, 42-55.

[19] - G.A.Dirac (1960a) In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4 - Graphen und ihre Unterteilungen, *Math. Nachr.*, *22*, 61-85.

[20] - G.A.Dirac (1960b), Généralisations du théorème de Menger, *C.R.Acad.Sci.Paris*, *250*, 4252-4253.

[21] - J.Edmonds (1964), Existence of k-edge connected ordinary graphs with prescribed degrees, *J.Res.Nat.Bur.Stand.*, Sect B, *68*, 73-74.

[22] - J.Edmonds (1965), Paths, trees and flowers, *Can.J.Math.*, *17*, 449-467.

[23] - J.Edmonds e E.L.Johnson (1973), Matching, Euler tours and the Chinese postman, *Math. Programming*, *5*, 88-124.

[24] - P.Erdös e T.Gallai (1960), Grafos cujos vértices têm grau pré-determinado, *Mat. Lapok*, *11*, 264-273 (em húngaro).

[25] - P.Erdös, A.Rényi e V.T.Sos (1966), On a problem of graph theory, *Studia Sci. Math. Hungar*, *1*, 283-305.

[26] - P.Erdös e G.Szekeres (1935), A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.*, *2*, 463-470.

[27] - L.Euler (1736), Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Comment Academiae Sci. I. Petropolitanae*, *8*, 128-140.

[28] - L.R.Ford e D.R.Fulkerson, (1956), Maximal flow through a network, *Can.J. Math.*, *8*, 399-404.

[29] - M.Fréchet e Ky Fan (1967), *Initiation to Combinatorial Topology*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston.

[30] - R.E.Grenwod e A.M.Gleason (1955), Combinatorial relations and chromatic

graphs, *Can. J. Math.*, *7*, 1-7.

[31] - H.Hadwiger (1943), Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe, *Viertel-jschr. Naturforsch Gesellsch. Zürich*, *88*, 133-142.

[32] - G.Hajős (1961). Über eine Konstruktion nicht n-farbarcer Graphen, *Wiss. Zeitschr. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg*, A *10*, 116-117.

[33] - W.Haken (1977), An attempt to Understand the Four Color Problem, *J.of Graph Theory*, *1*, 193-206.

[34] - S.Hakimi (1962), On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph, *J.SIAM Appl.Math.*, *10*, 496-506.

[35] - P.Hall (1935), On representatives of subsets, *J.London.Math.Soc.*, *10*, 26-30.

[36] - F.Harary (1969), *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading.

[37] - V.Havel (1955), Uma observação sobre a existência de grafos finitos, *Časopis Pěst Mat.*, *80*, 477-480 (em húngaro).

[38] - P.C.Kainen e T.L.Saaty (1977), *The four-color problem: assaults and conquest*, McGraw-Hill, New York.

[39] - A.B.Kempe (1879), On the Geographical problem of the four colours, *Amer.J. Math.*, *2*, 193-200.

[40] - D.König (1931), Grafos e matrizes, *Mat.Fiz.Lapok*, *38*, 116-119 (em hungaro).

[41] - C.L.Lucchesi, I.Simon, I.Simon, J.Simon e T.Kowaltowski (1979), *Aspectos teóricos da computação*, Coleção Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.

[42] - K.O.May (1965), The origin of the Four-Color Conjecture, *Isis*, *56*, 346-348.

[43] - L.S.Melnikov e V.G.Vizing (1969), New proof of Brooks'theorem, *J. Comb. Th.* (B), *7*, 408-409.

[44] - K.Menger (1927), Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fund. Math.*, *10*, 96-115.

[45] - J.Mycielski (1955) Sur le colorage des graphes, *Colloq.Math.*, *3*, 161-162.

[46] - O.Ore (1967), *The Four-Color Problem*, Academic Press, New York.

[47] - J.Petersen (1891), Die Theorie der regularen Graphen, *Acta Math.*, *15*, 193-220.

[48] - F.P.Ramsey (1930), On a problem of formal logic, *Proc. London Math.Soc.*, *30*, 264-286.

[49] - T.L.Saaty (1972), Thirteen Colorful Variations on Guthrie's Four-Color Con-

jecture, *Amer.Math.Monthly*, 79, 2-43.

[50] - W.T.Tutte (1947), The factorization of linear graphs, *J.London Math. Soc.*, 22, 107-111.

[51] - W.T.Tutte (1952), The factors of graphs, *Can.J.Math.*, 4, 314-328.

[52] - W.T.Tutte (1966), *Connectivity in Graphs*, Oxford U.Press, Oxford.

[53] - W.T.Tutte (1974), Spanning Subgraphs with specified valencies, *Discr.Math.*, 9, 97-108.

[54] - W.T.Tutte (1978), The subgraph problem, *Annals of Discr. Math.*, 3, 289-295.

[55] - V.G.Vizing (1964), Uma estimativa do índice cromático de um p-grafo, *Diskret Analiz.*, 3, 25-30 (em russo).

[56] - H.Whitney (1932a), Non separable and planar graphs, *Trans.Amer.Math. Soc.*, 34, 339-362.

[57] - H.Whitney (1932b), Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Amer.J. Math.*, 54, 150-168.

[58] - H.Whitney (1932c), The coloring of graphs, *Ann. of Math.*, (2) 33, 688-718.