

Teoria Elementar das Distribuições

Jorge Hounie

COPYRIGHT © JORGE G. HOUNIE

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,
por qualquer processo, sem a permissão do autor.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Rua Luiz de Camões, 68
20.060 - Rio de Janeiro - RJ

A minha esposa Emilie

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	iv
CAPÍTULO I	
§1. Funções generalizadas e soluções fracas.....	1
§2. As funções-teste.....	4
§3. As distribuições.....	10
Exercícios.....	12
CAPÍTULO II	
§1. Operações com distribuições.....	15
§2. Derivadas distribucionais e derivadas clássicas.....	19
§3. Derivadas e primitivas.....	25
Exercícios.....	30
CAPÍTULO III	
§1. Partições da unidade.....	32
§2. Distribuições com suporte compacto.....	36
§3. Divisão de distribuições.....	46
Exercícios.....	49
CAPÍTULO IV	
§1. Convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$	53

§2. Prolongamento analítico de distribuições.....	58
§3. Convolução.....	61
Exercícios.....	69

CAPÍTULO V

§1. A transformação de Fourier em \mathcal{S}	73
§2. A transformação de Fourier em \mathcal{S}'	79
§3. Transformação parcial de Fourier.....	88
Exercícios.....	92

CAPÍTULO VI

§1. Os teoremas de Paley-Wiener.....	95
§2. A transformada de Laplace.....	102
Exercícios.....	111

CAPÍTULO VII

§1. O exemplo de Chi Min-You.....	115
§2. O exemplo de Grushin-Garabedian.....	121
§3. Regularidade das soluções.....	124
§4. Soluções fundamentais.....	128
Exercícios.....	132

CAPÍTULO VIII

§1. O operador de Cauchy-Riemann.....	136
---------------------------------------	-----

§2. O operador de calor.....	143
§3. O operador das ondas.....	148
§4. O operador de Laplace.....	152
Exercícios.....	158
REFERÊNCIAS.....	162

INTRODUÇÃO

Estas notas foram escritas com o intuito de servir como texto para um curso introdutório à teoria das distribuições, com ênfase no cálculo. Como pre-requisitos são suficientes os cursos usuais de Análise no \mathbb{R}^n , Teoria da Medida, Topologia e Variável Complexa que fazem parte do curriculum do mestrado em matemática da maioria das universidades brasileiras.

O texto consiste de oito capítulos. Nos primeiros seis, procuramos descrever as propriedades elementares mais importantes dos espaços de distribuições mais comuns $(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{E}'(\Omega), \mathcal{S}')$ e estender as operações clássicas do cálculo funcional, tais como a mudança de variáveis, a convolução, as transformadas de Fourier e Laplace, etc. Isto é feito de forma autosuficiente. Por exemplo a completude sequencial de $\mathcal{D}'(\Omega)$ (Teorema IV.1.1) é feita usando diretamente o teorema de Baire que o aluno deve conhecer do curso de Topologia, ao invés de aplicar o teorema de Banach-Steinhaus em espaços de Frechet como é praxe. No capítulo VI são apresentados os teoremas de Paley-Wiener para as transformadas de Fourier e Laplace.

Os dois últimos capítulos pretendem ilustrar como as distribuições constituem um marco adequado para a discussão da existência, unicidade e regularidade das soluções das equações

diferenciais parciais. Em particular, prova-se a existência de soluções fundamentais para os operadores diferenciais de Cauchy-Riemann, Laplace, ondas e calor.

Alguns tópicos elementares da teoria das distribuições que podem ser com frequência evitados nas aplicações, tais como o produto tensorial ou o teorema de representação local de uma distribuição como soma de derivadas de funções contínuas, não aparecem nestas notas. Estes e outros temas podem ser vistos ou aprofundados na referência básica da teoria, [23].

Queremos deixar aqui consignados os nossos agradecimentos à Comissão Organizadora do 12º Colóquio Brasileiro de Matemática pela oportunidade de ministrar o presente curso, a Maria Eulália de Moraes Melo que leu a versão manuscrita do presente texto e a Delza Cavalcanti Xavier Lima pelo excelente trabalho de datilografia.

Recife, 15 de abril de 1979.

Jorge Hounie

Capítulo I

§1. Funções generalizadas e soluções fracas.

O cálculo clássico para funções de várias variáveis é inadequado quando se deseja ter uma teoria simples e geral para equações diferenciais parciais. Assim por exemplo, as duas equações

$$(I.1.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 \quad ,$$

não têm as mesmas soluções. A primeira equação é satisfeita por $u(x,y)=|x|$ enquanto que $\frac{\partial u}{\partial x}$ não está definida para $x=0$. Existem duas formas, aparentemente opostas, de fazer com que as duas equações (I.1.1) tenham as mesmas soluções: restringir o espaço de soluções admissíveis a funções bastante regulares para que o Teorema de Schwarz possa ser aplicado ([10], p.53) ou suplementar as funções com novos objetos, "funções generalizadas", de modo que a derivação seja sempre possível. Assim, mesmo que $|x|$ não seja diferenciável no sentido clássico, $\frac{\partial u}{\partial x}$ será um objeto "independente de y " e portanto $u(x,y)=|x|$ também satisfará a segunda equação (I.1.1). A vantagem da segunda forma de agir deve-se, entre outras razões, a que é útil contar com o maior número possível de candidatos quando se deseja resolver uma equação. É claro que, ao fazer isto, é importante preservar tantas pro-

priedades dos espaços de funções quantas for possível.

Vejamos outras situações em que aparece a necessidade de derivar funções "a priori" não diferenciáveis. Consideremos o problema de minimizar o funcional

$$(I.1.2) \quad F(u) = \int_0^1 \int_0^1 (1+u_x^2+u_y^2) \, dx \, dy ,$$

onde $u \in C^1([0,1] \times [0,1])$ e u deve assumir valores prefixados no bordo ∂C de $C=(0,1) \times (0,1)$.

Suponhamos que u é um mínimo de (I.1.2) e seja v duas vezes diferenciável em C e nula numa vizinhança da fronteira de C . Então a função

$$(I.1.3) \quad \phi(t) = F(u+tv) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad ,$$

tem um mínimo em $t=0$, e conseqüentemente $\phi'(0)=0$. Com efeito, $u+tv$ tem os mesmos valores que u em ∂C , e nossa hipótese é que $F(u) \leq F(\omega)$ para qualquer $\omega \in C^1(\bar{C})$ tal que $\omega=u$ em ∂C .

Derivando sob o sinal de integração obtemos

$$(I.1.4) \quad 0 = \phi'(0) = 2 \iint_C (u_x v_x + u_y v_y) \, dx \, dy .$$

Se supusermos que u é duas vezes continuamente diferenciável em C , integrando por partes em (I.1.4), a primeira parcela em relação a x e a segunda em relação a y , teremos

$$(I.1.5) \quad 0 = \iint_C (u_{xx} + u_{yy})v \, dx \, dy.$$

Nesse caso, a densidade das funções C^∞ com suporte compacto em C (Teorema I.2.1), permite concluir que

$$(I.1.6) \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{em } C.$$

Isto é, uma condição necessária para que $u \in C^2(\bar{C})$, seja um mínimo de (I.1.2) é que $\Delta u = 0$. Entretanto, a condição $u \in C^2(\bar{C})$ é artificial já que (I.1.2) está definida para qualquer $u \in C^1(\bar{C})$.

Por outro lado, mesmo que u seja apenas C^1 , podemos integrar (I.1.4) por partes de outro modo, e obter

$$(I.1.7) \quad \iint_C u \Delta v \, dx \, dy = 0.$$

Para $u \in C^2(C)$ as equações (I.1.5) e (I.1.7) são equivalentes, mas a segunda está definida para u integrável, mesmo que u não seja diferenciável em nenhum ponto. Se $u \in L^1(C)$ satisfaz (I.1.7) para todo v duas vezes diferenciável com suporte compacto em C , dizemos que u é uma "solução fraca" de equação $\Delta u = 0$. Provaremos mais adiante que toda solução fraca de $\Delta u = 0$ é de fato C^∞ e então, também solução no sentido clássico de $\Delta u = 0$.

Este exemplo sugere como estender a noção de derivação a funções não diferenciáveis: para definir Δu , $u \in L^1(C)$, é preciso

estudar a forma linear

$$(I.1.8) \quad u \longmapsto \iint_C u \Delta v \, dx \, dy.$$

Para sermos capazes de estudar operadores diferenciais de qualquer ordem somos assim levados a considerar formas lineares definidas no espaço das funções indefinidamente diferenciáveis que se anulam fora de um conjunto compacto.

§2. As funções - teste.

Definição I.2.1 - *Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n . Denotaremos com $C_c^\infty(\Omega)$ o espaço das funções-teste em Ω , i.e., o conjunto das funções a valores complexos indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω .*

Lembramos que o suporte de uma função contínua $\phi(x)$, é o fecho do conjunto $\{x | \phi(x) \neq 0\}$, e se denota $S(\phi)$.

Um exemplo clássico de função-teste é fornecido por

$$(I.2.1) \quad \phi(x) = \begin{cases} \exp(|x|^2 - 1)^{-1} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

A diferenciabilidade de (I.2.1) segue da diferenciabilidade de $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$ se $t < 0$, $f(t) = 0$ se $t \geq 0$. Observe que todas

as derivadas existem se $t \neq 0$ e convergem a zero quando $t \rightarrow 0$, ou seja $f \in C^\infty$ (vide [10], p.28).

Multiplicando $\phi(x)$ por uma constante adequada obteremos uma nova função $\phi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(I.2.2) \quad \int \phi \, dx = 1, \quad \phi \geq 0, \quad S(\phi) = \text{suporte de } \phi \subseteq \{x \mid |x| \leq 1\}.$$

Definição I.2.2 - Se f é uma função complexa, mensurável Lebesgue, definida em Ω , tal que para cada compacto $K \subset \Omega$

$$(I.2.3) \quad \int_K |f| \, dx < \infty$$

dizemos que f é localmente integrável e escrevemos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Teorema I.2.1 - Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que (I.2.2) vale, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e definamos para $\epsilon > 0$

$$(I.2.4) \quad f_\epsilon(x) = \int f(x-\epsilon y) \phi(y) \, dy = \epsilon^{-n} \int f(y) \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \, dy.$$

Então

a) $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

b) se $f(x) = 0$ q.t.p fora do conjunto fechado A ,

$$S(f_\epsilon) \subseteq A + \{x \mid |x| \leq \epsilon\}$$

c) se f é contínua e $S(f)$ é compacto, $f_\epsilon \rightarrow f$ uniformemente

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração - A segunda expressão de f_ε mostra que

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x')| \leq \text{cte.} \sup_{\varepsilon |t-t'| \leq |x-x'|} |\phi(t) - \phi(t')|$$

e segue-se que f_ε é contínua. Também podemos diferenciar ϕ sob o sinal de integração, na mesma fórmula, qualquer número de vezes, o que prova a).

A primeira expressão de f_ε mostra que se $f(x) \neq 0$ deve existir $y \in S(\phi) \subseteq \{|y| \leq 1\}$ tal que $x - \varepsilon y \in A$. Isto prova b).

Se f é contínua com suporte compacto, podemos tomar $A = S(f)$ em b) e concluir que $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, já que

$$S(f_\varepsilon) \subseteq S(f) + \{|x| \leq \varepsilon\} = \text{compacto.}$$

Além disso

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| = \left| \int (f(x) - f(x - \varepsilon y)) \phi(y) dy \right| \leq \sup_y |f(x) - f(x - \varepsilon y)|.$$

O membro direito da última desigualdade tende a zero com ε , devido à continuidade uniforme de f , o que prova c).

Q.E.D.

Corolário I.2.1 - Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e f_ε é definido por (I.2.4) quando $\varepsilon > 0$,

$$\|f_\epsilon\|_1 = \int |f_\epsilon| dx \leq \|f\|_1, \text{ e } \|f_\epsilon - f\|_1 \rightarrow 0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Demonstração - O teorema de Fubini e a invariância por translações de dx permitem concluir que

$$\begin{aligned} \int |f_\epsilon| dx &\leq \int \left(\int |f(x-\epsilon y)| \phi(y) dy \right) dx = \int \phi(y) \left(\int |f(x-\epsilon y)| dx \right) dy = \\ &= \int \phi(y) dy \|f\|_1 = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Por outro lado, dado $\delta > 0$, existe g contínua e com suporte compacto tal que $\|f-g\|_1 < \delta$. Então

$$\begin{aligned} \|f-f_\epsilon\|_1 &\leq \|f-g\|_1 + \|g-g_\epsilon\|_1 + \|(g-f)_\epsilon\|_1 < \|f-g\|_1 + \|g-g_\epsilon\|_1 + \\ &+ \|f-g\|_1 < 2\delta + \|g-g_\epsilon\|_1. \end{aligned}$$

Ora, $g_\epsilon \rightarrow g$ uniformemente quando $\epsilon \rightarrow 0$ e $S(g_\epsilon) \subseteq$ compacto fixo, independente de ϵ , $0 < \epsilon < 1$. Em particular $\|g-g_\epsilon\|_1 < \delta$ se ϵ for suficientemente pequeno, e $\|f-f_\epsilon\|_1 < 3\delta$ se $0 < \epsilon < \epsilon_0$ para um certo ϵ_0 .

Q.E.D.

Corolário I.2.2 - Seja K um subconjunto compacto de um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Então existe $\psi_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi_\epsilon \leq 1$ e $\psi_\epsilon = 1$ numa vizinhança de K .

Demonstração - Seja $\delta = d(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = \inf\{|x-y|, x \in K, y \notin \Omega\}$; $\delta > 0$ por

tratar-se da distância entre um compacto e um fechado disjunto. Consideremos números positivos ϵ, ϵ_1 tais que $\epsilon < \epsilon_1 < \epsilon_1 + \epsilon < \delta$, e seja f a função característica de $K_1 = K + \{|x| \leq \epsilon_1\}$, isto é, a função que vale 1 em K_1 e zero fora de K_1 . Então $\psi = f_\epsilon$ definida por (2.4) satisfaz $S(f_\epsilon) \subseteq K_1 + \{|x| \leq \epsilon\} \subseteq K + \{|x| \leq \epsilon + \epsilon_1\} \subseteq \Omega$ o que permite concluir que $\psi_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$. Ainda, se $d(x, K) < \epsilon_1 - \epsilon$, segue que para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$ $|y| < 1$, $x - \epsilon y \in K_1$. Conseqüentemente

$$f_\epsilon(x) = \int f(x - \epsilon y) \phi(y) dy = \int_{|y| < 1} f(x - \epsilon y) \phi(y) dy = \int 1 \cdot \phi(y) dy = 1$$

Isto prova a última afirmação do corolário.

Q.E.D.

Observações - i) Para $n=1$ a função (1.2.1) é dada por $\alpha(x) = \exp(x^2 - 1)^{-1}$ no intervalo $I = (-1, 1)$ e por zero fora de I . A propriedade chave de $\alpha(x)$ é que todas suas derivadas tendem a zero quando $x \rightarrow \pm 1$, $|x| < 1$. Isto é claramente necessário para que $\phi(x)$ resulte C^∞ , já que ela é identicamente zero fora de I , e aqui reside a dificuldade de exibir exemplos de funções C_c^∞ por meio de uma expressão analítica. Observe que todas as derivadas de $\phi(x)$ são zero em $x = \pm 1$, e portanto a série de Taylor de $\phi(x)$ em $x = \pm 1$ é identicamente nula e em particular não converge a $\phi(x)$ em nenhuma vizinhança desses pontos.

ii) Uma vez que se acha uma função C_c^∞ , obtem-se outras pela fórmula (I.2.4) em número suficiente para aproximar funções integráveis em norma L^1 , funções contínuas uniformemente sobre compactos, para separar compactos de fechados disjuntos, etc.

Definição I.2.3 - Uma seqüência (ϕ_j) de funções $\in C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se

- i) existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subseteq K$, $j=1,2,\dots$
- ii) para todo inteiro positivo m , as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero quando $j \rightarrow \infty$.

Observação - É possível dotar $C_c^\infty(\Omega)$ com uma topologia de forma que a convergência nessa topologia coincida com a dada pela definição I.2.3. (vide [18], [23], [25]). Vejamos que essa topologia não provem de uma métrica. Suponhamos por absurdo que ρ é uma distância tal que $\rho(\phi, \phi_n) \rightarrow 0$ se e somente se $\phi_n - \phi \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Seja K_n uma seqüência de compactos cuja união seja Ω , e escolhamos $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n(x) = 1$ numa vizinhança de K_n (Corolário I.2.2). Como $\epsilon \phi_n \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ se n se mantém fixo e $\epsilon \rightarrow 0$, podemos escolher $\epsilon_n > 0$ tal que $\rho(\epsilon_n \phi_n, 0) < \frac{1}{n}$. Então $\rho(\epsilon_n \phi_n, 0) \rightarrow 0$, embora $\epsilon_n \phi_n \not\rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ já que $\bigcup_n S(\epsilon_n \phi_n) = \Omega$ e isto é incompatível com i) da Definição I.2.3.

§3. As distribuições.

Definição I.3.1 - Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Um funcional linear contínuo $u: C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ é dito uma distribuição em Ω . O espaço das distribuições em Ω se denota $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A definição significa que se $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e (ϕ_j) é uma seqüência em $C_c^\infty(\Omega)$,

$$u(\phi_1 + \lambda \phi_2) = u(\phi_1) + \lambda u(\phi_2) \quad (\text{linearidade})$$

$$\phi_j \rightarrow 0 \text{ em } C_c^\infty(\Omega) \implies u(\phi_j) \rightarrow 0 = u(0) \quad (\text{continuidade}).$$

Por vezes, é conveniente escrever $\langle u, \phi \rangle$ em vez de $u(\phi)$.

Exemplo I.3.1 - Considere $\Omega = \mathbb{R}^n$, e defina $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. O funcional δ é claramente linear e contínuo. Esta distribuição é chamada "delta de Dirac".

Exemplo I.3.2 - Definamos $\langle T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |t| |\phi'(t)| dt$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. A linearidade é clara, e se $S(\phi_j) \subseteq [-a, a]$ e $\phi_j'(t) \rightarrow 0$ uniformemente, segue que $|\langle T, \phi_j \rangle| \leq 2a^2 \sup_t |\phi_j'(t)| \rightarrow 0$.

Exemplo I.3.3 - Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, e defina

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int f \phi \, dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

A linearidade é clara, e a continuidade decorre da estimativa

$$|\langle T_f, \phi \rangle| \leq \sup |\phi(t)| \int_{S(\phi)} |f| dx.$$

É interessante notar que se $\langle T_f, \phi \rangle = \langle T_g, \phi \rangle$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $f=g$ q.t.p. Com efeito, se K é um compacto de Ω , $h=f-g$ e $\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$ vale um em $K, \alpha h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (estendendo por zero fora de Ω). Considere

$$(\alpha h)_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int (\alpha h)(y) \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = \langle T_f, \beta \rangle - \langle T_g, \beta \rangle = 0,$$

onde $\beta(y) = \varepsilon^{-n} \alpha(y) \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \in C_c^\infty(\Omega)$. Portanto, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ e aplicando Corolário I.2.1 concluímos que $\alpha h=0$ q.t.p e em particular $h(x)=0$ q.t.p em K . Tomando uma seqüência de compactos K_n , tais que $\bigcup K_n = \Omega$, concluímos que $f=g$ q.t.p

Abandonemos agora a notação provisória T_f e escrevamos simplesmente $\langle f, \phi \rangle = \int f \phi dx$. Isto equivale a identificar qualquer função localmente integrável f , com o funcional T_f definido no Exemplo I.3.3. Esta identificação permite considerar muitos espaços de funções, entre outros $L^p(\Omega)$ $1 \leq p < \infty$, $C^k(\Omega)$ $1 \leq k < \infty$ (espaço das funções k -vezes diferenciáveis com continuidade), como subespaços de $\mathcal{D}'(\Omega)$. É neste sentido que as distribuições são "funções generalizadas". De agora em diante a identificação $f \rightarrow T_f$ será feita sem maiores comentários.

Exemplo I.3.4 - Seja μ uma medida definida na σ -álgebra dos subconjuntos borelianos do aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, e suponhamos que $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset \Omega$ (ou seja que μ é localmente finita). Então $\langle \mu, \phi \rangle = \int_{\Omega} \phi \, d\mu$ define um funcional linear em $C_c^{\infty}(\Omega)$ e a estimativa

$$|\langle \mu, \phi \rangle| \leq \sup |\phi(t)| \cdot \mu(S(\phi))$$

prova a continuidade. Em outras palavras, as distribuições são suficientemente gerais para incluir todas as medidas localmente finitas. Um argumento semelhante ao do Exemplo I.3.3, porém mais técnico, prova que duas tais medidas que definam a mesma distribuição, são idênticas.

Exercícios

1) Quais das seguintes funções são funções-teste em \mathbb{R} ?

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} \exp(1/x(x-1)) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} \cos x \cdot \exp(4x^2 - \pi^2)^{-1} & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2) Quais das seguintes funções são localmente integráveis?

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ em \mathbb{R}

b) $f(x,y) = \frac{1}{x+iy}$ em \mathbb{R}^2

c) $f(x) = \frac{1}{|x|^{n - \frac{1}{2}}}$ em \mathbb{R}^n

3) Se f_j , $j=1,2,\dots$ é uma seqüência de funções em $L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, dizemos que $f_j \rightarrow 0$ em $L^1_{loc}(\Omega)$ se para todo compacto $K \subset \Omega$, $\int_K |f_j| dx \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$). Provar que toda $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ é limite em $L^1_{loc}(\Omega)$ de funções teste (isto é, existe $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ $j=1,2,\dots$ tal que $f - \phi_j \rightarrow 0$ em $L^1_{loc}(\Omega)$).

4) Se $1 < p < \infty$ defina $L^p_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, da maneira natural. Provar que $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

5) Defina convergência em $L^p_{loc}(\Omega)$ por analogia com o caso

$p=1$ e prove que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L_{loc}^p(\Omega)$ se $1 < p < \infty$, mas não é denso em $L^\infty(\Omega)$.

- 6) Prove que $\langle T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t) dt$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ é a distribuição nula.
- 7) Quais dos seguintes funcionais definidos em $C_c^\infty(\mathbb{R})$ são distribuições?
- a) $T(\phi) = \int \exp(t^2) \phi(t) dt$
- b) $T(\phi) = \int |\phi'(t)| dt$
- c) $T(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} n [\phi(1 + \frac{1}{n}) - \phi(1)]$
- 8) Prove que não existe $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\langle f, \phi \rangle = \phi(0)$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Sugestão - Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ deve verificar-se $\langle f, \phi \rangle = 0$, e o Exemplo I.3.3 mostra que $f=0$ q.t.p em $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Capítulo II

§1. Operações com distribuições.

A soma e o produto por escalares de distribuições define-se da maneira óbvia. Se $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\langle u_1 + u_2, \phi \rangle = \langle u_1, \phi \rangle + \langle u_2, \phi \rangle$$

$$\langle \lambda u_1, \phi \rangle = \lambda \langle u_1, \phi \rangle.$$

A filosofia geral para definir operações nas distribuições é a seguinte. Suponhamos que existam dois operadores lineares e contínuos L e L' de $C_c^\infty(\Omega)$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tais que

$$(II.1.1) \quad \int_{\Omega} (L\phi)\psi \, dx = \int_{\Omega} \phi(L'\psi) \, dx \quad \phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Quando isto acontece diz-se que L é o transporte formal de L' e vice versa. A continuidade de $L(L')$ significa naturalmente que $L\phi_j \rightarrow 0$ ($L'\phi_j \rightarrow 0$) em $C_c^\infty(\Omega)$ toda vez que $\phi_j \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Observe que por hipótese $\phi, L\phi, \psi, L\psi \in C_c^\infty(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ e portanto (II.1.1) pode também ser escrito da forma $\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L'\psi \rangle$. Neste caso é possível estender o operador L a um operador $\tilde{L}: \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. Com efeito, definamos

$$(II.1.2) \quad \langle \tilde{L}u, \psi \rangle = \langle u, L'\psi \rangle \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega), \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

É claro que $\tilde{L}u$ é um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$. Além disso, se $\psi_j \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ $L'\psi_j \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e portanto $\langle u, L'\psi_j \rangle \rightarrow 0$, o que significa que $\tilde{L}u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Finalmente, se $u \in C_c^\infty(\Omega)$, decorre de (II.1.1) que $\int (Lu)\psi \, dx = \langle \tilde{L}u, \psi \rangle$, isto é $\tilde{L}u \in L_{loc}^1$ e $Lu = \tilde{L}u$. Em outras palavras \tilde{L} é uma extensão de L . Frequentemente se usa a mesma notação L , tanto para o operador original quanto para sua extensão \tilde{L} .

Nos exemplos seguintes deixamos a verificação da continuidade de L e L' a cargo do leitor. A letra Ω designará sempre um aberto de \mathbb{R}^n .

Exemplo II.1.1 (Produto por uma função C_c^∞).

Seja $f \in C_c^\infty(\Omega)$ e definamos $L: C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C_c^\infty(\Omega)$ por $(L\phi)(x) = f(x)\phi(x)$. Naturalmente $L=L'$ satisfaz (II.1.1) e a operação "multiplicação por f " fica definida para qualquer distribuição por meio de

$$(II.1.3) \quad \langle fu, \phi \rangle = \langle u, f\phi \rangle.$$

Exemplo II.1.2 (Derivação)

Sejam (x_1, \dots, x_n) coordenadas cartesianas em Ω e definamos $L = \frac{\partial}{\partial x^j}$. Integrando por partes em relação à variável x_j obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \psi \, dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \, dx.$$

O termo não integrado é nulo porque as funções ϕ, ψ são nulas fora de um compacto. Então $-\frac{\partial}{\partial x^j}$ é o transposto formal de $\frac{\partial}{\partial x^j}$, e podemos definir

$$(II.1.4) \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^j}, \phi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right\rangle.$$

Exemplo II.1.3 (Operadores diferenciais)

Um operador diferencial linear com coeficientes C^∞ é uma combinação de derivações e multiplicação por funções C^∞ . Se L é um tal operador L é possível achar L' aplicando reiteradamente (II.1.3) e (II.1.4). Por exemplo, se $L = \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x^N}\right)^2$, duas aplicações de (II.1.4) dão

$$(II.1.5) \quad \langle \Delta u, \phi \rangle = \langle u, \Delta \phi \rangle, \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

como foi sugerido no §1 do Capítulo I.

Exemplo II.1.4 (Mudança de variáveis)

Seja $\phi: \Omega \rightarrow \Omega$ um difeomorfismo, isto é, uma bijeção de Ω sobre Ω , tal que ϕ e ϕ^{-1} são de classe C^∞ e definamos $L\phi = \phi \circ \phi$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Observe que $S(\phi \circ \phi) = \phi^{-1}(S(\phi))$ e portanto $L\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ (usar a regra da cadeia). Para encontrar L' aplicamos

o teorema de mudança de variáveis na integral

$$(II.1.6) \quad \int_{\Omega} \phi(\Phi(y)) \psi(y) dy = \int_{\Omega} \phi(x) \psi(\Phi^{-1}(x)) |J(\Phi^{-1})|(x) dx$$

onde $|J(\Phi^{-1})|$ denota o valor absoluto do determinante da matriz jacobiana de Φ^{-1} . Isto nos leva a definir $L'\psi = |J(\Phi^{-1})| \cdot \psi \circ \Phi^{-1}$. Lembremos que a matriz jacobiana de Φ^{-1} é não singular e seu determinante nunca nulo, assim $|J(\Phi^{-1})|$ resulta diferenciável. Quando $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos então

$$(II.1.7) \quad \langle u \circ \Phi, \phi \rangle = \langle u, (\phi \circ \Phi^{-1}) \cdot |J(\Phi^{-1})| \rangle.$$

Esta fórmula é útil porque, tornando independente a distribuição de sua expressão em coordenadas, permite definir distribuições em variedades diferenciáveis por meio de cartas. Para isto é preciso considerar o caso levemente mais geral de um difeomorfismo $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$. Outras aplicações simples seguem em baixo.

Exemplo II.1.5 (Translação)

Seja $a \in \mathbb{R}^n$, $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definido por $\Phi(x) = x + a$. Definimos a translação de $\phi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ como a função $\phi_a(x) = \phi(x - a)$. Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, a translação de u se define usando (II.1.7), ou seja:

$$(II.1.8) \quad \langle u_a, \phi \rangle = \langle u, \phi(x + a) \rangle$$

Exemplo II.1.6 (Reflexão)

Seja Ω um aberto simétrico em relação a origem e consideremos $\phi(x) = -x$. Definimos $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$ para $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, e

$$(II.1.9) \quad \langle \check{u}, \phi \rangle = \langle u, \check{\phi} \rangle, \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

§2. Derivadas distribucionais e derivadas clássicas.

Se $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, isto é, $f(x)$ é continuamente diferenciável, a fórmula de integração por partes prova que a derivada de f no sentido das distribuições dada pela fórmula (II.1.4) coincide com a distribuição definida pela função contínua (então localmente integrável) $\frac{df}{dx}$. Portanto, para funções suficientemente regulares as derivadas no sentido usual e no sentido das distribuições coincidem. Vejamos o que acontece com funções de uma variável que apresentam uma discontinuidade de primeira espécie na origem. Mais precisamente, suponhamos que $f \in C^1(\mathbb{R} - \{0\})$ e que os limites $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = f(0+)$, $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = f(0-)$ existem e são finitos. Denotemos com $\{f'\}$ a função definida como $\frac{df}{dx}$ para $x \neq 0$ e não definida para $x = 0$, e suponhamos ainda que $\{f'\} \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Para calcular f' (a derivada de f no sentido das distribuições) basta observar que se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $S(\phi) \subseteq [-N, N]$

$$(II.2.1) \quad \langle f', \phi \rangle = -\langle f, \phi' \rangle = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-N}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^N \right) f \phi' dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-N}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^N \right) f' \phi - \\ -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(f(x) \phi(x) \Big|_{-N}^{-\epsilon} + f(x) \phi(x) \Big|_{\epsilon}^N \right) = (f(0+) - f(0-)) \phi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \{f'\} \phi dx$$

Um caso particular importante se obtém quando $f(x) = H(x) =$ função de Heaviside, igual a 1 para $x > 0$ e igual a 0 para $x < 0$ (como função $\in L^1_{loc}$ não precisa estar definida na origem). É claro que $H(0+) = 1$, $H(0-) = 0$ e $\{H'\} = 0$. Assim

$$(II.2.2) \quad \langle H', \phi \rangle = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

Obtemos deste modo a distribuição do Exemplo I.3.1 como derivada de $H(x)$. Por conseguinte, a fórmula (II.2.1) pode ser escrita

$$(II.2.3) \quad f' = \{f'\} + [f(0+) - f(0-)] \delta.$$

Por vezes é possível fazer com que uma função não localmente integrável defina uma distribuição. Tal o caso de $f(x) = \frac{1}{x}$ em \mathbb{R} . A integral de $1/|x|$ em qualquer vizinhança da origem é infinita e $f \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Entretanto, para $x \neq 0$ $\frac{d}{dx} \log|x| = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \log|x|$ é localmente integrável já que

$$\left| \int_{-1}^1 \log|x| dx \right| = 2$$

e $\log|x|$ é contínua para $x \neq 0$. Podemos experimentar então com a distribuição $\langle g', \phi \rangle = -\langle g, \phi' \rangle$. Se $S(\phi) \subseteq [-N, N]$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$-\int \log|x| \phi'(x) dx = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-N}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^N \right) \log|x| \phi'(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi'(x)}{x} dx + (\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)) \log \epsilon \right).$$

A última igualdade foi obtida integrando por partes em ambos intervalos de integração. A desigualdade do valor médio permite concluir que $|\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)| \leq \sup_t |\phi'(t)| 2\epsilon$. Como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \epsilon = 0$, teremos

$$(II.2.4) \quad -\langle \log x, \phi' \rangle = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

A distribuição dada pelo membro direito de (II.2.4) se conhece com o nome de valor principal de $\frac{1}{x}$ e se denota v.p. $\frac{1}{x}$.

O produto de uma distribuição por uma função C^∞ foi definido no Exemplo II.1.1. Vejamos alguns exemplos. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle f\delta, \phi \rangle = \langle \delta, f\phi \rangle = f(0)\phi(0) = \langle f(0)\delta, \phi \rangle$$

o que significa que $f\delta = f(0)\delta$ e só o valor de f em $x=0$ é relevante no produto $f\delta$. Análogamente

$$\langle f\delta', \phi \rangle = \langle \delta', f\phi \rangle = -\langle \delta, f'\phi + f\phi' \rangle = \langle f(0)\delta' - f'(0)\delta, \phi \rangle$$

ou seja que $f\delta' = f(0)\delta' - f'(0)\delta$. Análogos resultados podem ser obtidos para derivadas de qualquer ordem de δ . Outro exemplo é xv.p. $\frac{1}{x} = 1$. Com efeito

$$\langle x \text{ v.p. } \frac{1}{x}, \phi \rangle = \langle \text{v.p. } \frac{1}{x}, x\phi(x) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{x\phi(x)}{x} dx = \int \phi dx = \langle 1, \phi \rangle.$$

É fácil ver que a regra de Leibniz para a derivada do produto de duas funções se mantém quando um dos fatores é uma distribuição. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial}{\partial x^j}(uf), \phi \rangle &= -\langle uf, \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \rangle = -\langle u, f \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \rangle = -\langle u, \frac{\partial}{\partial x^j}(f\phi) - \phi \frac{\partial f}{\partial x^j} \rangle = \\ &= \langle f \frac{\partial u}{\partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^j} u, \phi \rangle, \end{aligned}$$

ou seja

$$(II.2.5) \quad \frac{\partial}{\partial x^j}(fu) = f \frac{\partial u}{\partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^j} u, \quad f \in C^\infty(\Omega), \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Vejamos agora que a observação feita no início do §2 pode se estender a funções contínuas se a derivada distribucional também resultar contínua.

Teorema II.2.1 - Se u e f são contínuas em $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e $\frac{\partial}{\partial x^j} = f$ então

u é diferenciável em relação a x^j e $\frac{\partial u}{\partial x^j} = f$ no sentido clássico.

Demonstração - Suponhamos primeiro que $S(u)$ é compacto. Usando a notação do Teorema I.2.1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^j} u_\epsilon(x) &= \epsilon^{-n} \int u(y) \frac{\partial}{\partial x^j} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy = -\epsilon^{-n} \int u(y) \frac{\partial}{\partial y^j} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy = \\ &= \epsilon^{-n} \int f(y) \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy = f_\epsilon(x).\end{aligned}$$

Observe que a penúltima igualdade é consequência da definição de derivada no sentido das distribuições. Decorre do Teorema I.2.1 que $u_\epsilon \rightarrow u$ e $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x^j} \rightarrow f$ uniformemente quando $\epsilon \rightarrow 0$. Então $\frac{\partial u}{\partial x^j} = f$ no sentido usual (vide por exemplo [10], Proposição 7, p. 41).

No caso geral, seja $x_0 \in \Omega$ e consideremos uma função $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, igual a 1 numa vizinhança de x_0 (vide Corolário I.2.2). Então $S(\psi u)$ é compacto e $\frac{\partial}{\partial x^j}(\psi u) = \frac{\partial \psi}{\partial x^j} u + \psi \frac{\partial u}{\partial x^j} = \frac{\partial \psi}{\partial x^j} u + \psi f$ é contínua. Raciocinando como antes, concluímos que $\frac{\partial}{\partial x^j}(\psi u) = \frac{\partial \psi}{\partial x^j} u + \psi f$ no sentido clássico. Na vizinhança onde ψ vale 1, esta última igualdade se reduz a $\frac{\partial u}{\partial x^j} = f$. Como x_0 é arbitrário, o teorema está provado.

Q.E.D.

No Cálculo de Variações clássico se considera uma função de três variáveis $F(\alpha, \beta, \gamma)$ suficientemente diferenciável e se procura minimizar a integral

$$I(u) = \int_a^b F(u(x), u'(x), x) dx$$

na classe das funções $u(t)$, continuamente diferenciáveis em $[a, b]$. Se u é uma solução do problema e $\phi \in C_C^\infty(a, b)$, a função

$$g(t) = I(u+t\phi) \quad t \in \mathbb{R},$$

tem um mínimo em $t=0$, e por conseguinte $g'(0)=0$. Derivando sob o sinal de integração obtemos

$$(II.2.6) \quad g'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \phi + \frac{\partial F}{\partial u'} \phi' \right) dx = 0, \quad \phi \in C_C^\infty(a, b).$$

As funções de x , $\frac{\partial F}{\partial u}(u(x), u'(x), x)$, $\frac{\partial F}{\partial u'}(u(x), u'(x), x)$ são contínuas e a equação (II.2.6) significa que a primeira é a derivada no sentido das distribuições da segunda. O Teorema II.2.1 afirma que, de fato, é uma derivada no sentido clássico. Então a função minimal $u(t)$, se existir, deve verificar a equação de Euler-Lagrange

$$(II.2.7) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial u'} = \frac{\partial F}{\partial u}.$$

Este resultado foi obtido por Du Bois-Reymond no século passado. Por exemplo se quisermos achar uma curva plana $u(x)$, de comprimento mínimo, que ligue a origem com o ponto $(1,b)$, devemos considerar a integral

$$\int_0^1 \sqrt{1+u'^2} dt.$$

A equação (II.2.7) se reduz neste caso a $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1+u'^2}} \right) = 0$. Segue que u' deve ser constante e o gráfico de $u(x)$ será uma reta.

§3. Derivadas e primitivas.

Se f é diferenciável num intervalo (a,b) e f' é zero o teorema do valor médio implica que f é constante em (a,b) . É significativo que o mesmo resultado valha para distribuições.

Teorema II.3.1 - Se $u \in \mathcal{D}'(a,b)$ e $u'=0$ então $u=cte$.

Demonstração - Qualquer constante $\in L^1_{loc}$ e é nesse sentido que $u=c$. Observe que uma função - teste $\phi \in C_c^\infty(a,b)$ é a derivada de outra função teste ψ se e somente se $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 0$. Com efeito,

se $\phi(x) = \psi'(x)$ e $S(\psi) \subseteq [-N, N]$, $0 = \psi(N) - \psi(-N) = \int_{-N}^N \psi'(t) dt = \int \phi dt$.

Recíprocamente se ϕ tem integral zero, $\psi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt \in C_c^\infty(a, b)$

e $\psi' = \phi$.

Para provar o teorema basta tomar uma função $\phi_0 \in C_c^\infty(a, b)$ tal que $\int \phi_0 = 1$. Dada $\phi \in C_c^\infty(a, b)$ escrevemos

$$\begin{aligned} \text{(II.3.1)} \quad \phi(x) &= [\phi(x) - (\int \phi dt) \phi_0(x)] + (\int \phi dt) \phi_0(x) = \\ &= \psi'(x) + (\int \phi dt) \phi_0(x) \end{aligned}$$

visto que o termo entre colchetes tem integral nula. Por hipóte se $\langle u, \psi' \rangle = -\langle u', \psi \rangle = -\langle 0, \psi \rangle = 0$, e por conseguinte

$$\langle u, \phi \rangle = \int \phi dt \langle u, \phi_0 \rangle = \langle u, \phi_0 \rangle \int \phi dt = c \langle 1, \phi \rangle = \langle c, \phi \rangle,$$

ou seja que $u = c$ com $c = \langle u, \phi_0 \rangle$.

Q.E.D.

Corolário II.3.1 - Se $u \in \mathcal{D}'(a, b)$ e $u^{(k)} = 0$, então u é um polinômio de grau $\leq k-1$.

Demonstração - O teorema II.3.1 prova o caso $k=1$. Se o resultado é válido para $k-1$ e $u^{(k)} = 0$, então escrevendo $v = u^{(k-1)}$ e aplicando o teorema a v concluímos que existe uma constante c tal

que $v=c$. Então $(u-c \frac{x^{k-1}}{(k-1)!})^{(k-1)} = u^{(k-1)} - c = v - c = 0$ e pela hipótese indutiva, $u - c \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{k-2} \alpha_j x^j$, para certas constantes α_j , $j=0, \dots, k-2$.

Q.E.D.

Corolário II.3.2 - Toda distribuição $u \in \mathcal{D}'(a,b)$ tem uma primitiva.

Demonstração - Seja ϕ_0 a função da demonstração do Teorema II.3.1 e defina

$$\langle v, \phi \rangle = -\langle u, \int_{-\infty}^x [\phi(t) - (\int \phi ds) \phi_0(t)] dt \rangle.$$

A verificação de que $v \in \mathcal{D}'(a,b)$ e $v'=u$ é imediata.

Q.E.D.

Consideremos uma função crescente $\alpha(x)$ num intervalo finito $[a,b]$ e $\phi \in C_c^\infty(a,b)$. Toda função de variação limitada define uma integral de Stieltjes e tal é o caso de α e ϕ ; a primeira por ser crescente e a segunda por ser continuamente diferenciável. Aplicando a fórmula de integração por partes ([20], Teorema 6.30, p. 134) para integrais de Stieltjes, segue que

$$(II.3.2) \quad \int_a^b \phi \, d\alpha = f(b)\phi(b) - f(a)\phi(a) - \int_a^b \alpha \, d\phi = - \int_a^b \alpha \, d\phi = - \int_a^b \alpha \phi' \, dx.$$

A última igualdade é o teorema 6.17 de [20]. Na linguagem das distribuições podemos escrever (II.3.2)

$$(II.3.3) \quad \langle \alpha', \phi \rangle = \int \phi \, d\alpha$$

que expressa o fato que a derivada de uma função crescente (no sentido das distribuições) é uma medida positiva. Recíprocamente, se $u \in \mathcal{D}(a,b)$ tem derivada positiva no sentido que $\langle u', \phi \rangle \geq 0$ se $\phi \in C_c^\infty(a,b)$, $\phi \geq 0$, o teorema de Riesz ([21], p.40) afirma que existe uma medida μ , finita sobre compactos, tal que

$$(II.3.4) \quad \langle u', \phi \rangle = \int \phi \, d\mu \quad \phi \in C_c^\infty(a,b).$$

Esta última integral coincide com a integral de Stieltjes gerada pela função monótona crescente $\alpha(x) = \mu[c, x]$ se $x \geq c$, $\alpha(x) = \mu(x, c]$ se $x < c$, $a < c < b$, $\mu(\{c\}) = 0$, ou seja $\int \phi \, d\mu = \int \phi \, d\alpha$. Integrando por partes como em (II.3.2), podemos escrever (II.3.4) na forma

$$(II.3.5) \quad \langle u', \phi \rangle = - \int_a^b \alpha(x) \phi'(x) \, dx = \langle \alpha', \phi \rangle.$$

Por conseguinte, $(u-\alpha)' = 0$ e $u = \alpha + c$. Desta forma obtemos

Teorema II.3.2 - *Seja $u \in \mathcal{D}'(a,b)$. Então $u' \geq 0$ (i.e. $\langle u', \phi \rangle \geq 0$ se $\phi \in C_c^\infty(a,b), \phi \geq 0$) se e somente se u é uma função monótona crescente.*

Q.E.D.

Um caso particular interessante se dá quando tomamos como α uma função contínua e não decrescente em $[0,1]$ que é constante em cada componente do complementar do conjunto de Cantor C_0 , sem ser constante (vide [21], p.168). Se $\phi \in C_c^\infty(p,q)$ onde (p,q) é uma componente de $\mathcal{C}C_0$, segue que

$$\langle \alpha', \phi \rangle = - \int_p^q \alpha(x) \phi'(x) dx = - \int_p^q \alpha(p) \phi'(x) dx = -\alpha(p) (\phi(q) - \phi(p)) = 0.$$

Portanto α' é uma medida cuja integral se anula em qualquer função suportada em $\mathcal{C}C_0$. Segue que α' é uma medida concentrada em C_0 , em particular é uma medida singular com respeito à medida de Lebesgue. Isto mostra a vantagem da derivação distribucional em relação à derivação q.t.p. de funções f de variação limitada, já que na derivação q.t.p. só a parte completamente contínua de f' é obtida ([21], p.167). No caso da função de Cantor $\alpha'(t) = 0$ q.t.p. sem que α seja constante.

Exercícios

1) Seja $\phi: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ um difeomorfismo entre abertos de \mathbb{R}^n . Defina $u \circ \phi$ para $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ e calcule $u \circ \phi$ quando $u = \delta$.

2) Calcular as seguintes expressões no sentido das distribuições

a) $(\frac{d}{dx} - a)H(x)e^{ax}$

b) $\frac{d^k}{dx^k} |x|$

c) $(\frac{d}{dx} + a^2) \frac{H(x)\cos ax}{a}$

3) Defina v.p. $\frac{\cos x}{x}$ convenientemente e prove que é uma distribuição.

4) Defina $\langle Pf \frac{1}{x^2}, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty}) \frac{\phi(x)}{x^2} dx - \frac{2\phi(0)}{\epsilon}]$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

e prove que $Pf \frac{1}{x^2}$ é uma distribuição. Compare com $\frac{d}{dx}$ v.p. $\frac{1}{x}$.

5) Calcular $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(x)H(y)$.

6) Seja $\phi(x,y) = (x+y, x-y)$, $v = u \circ \phi$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

- a) Calcule v se $u=\delta$ e calcule u se $v=\delta$.
- b) Suponha que $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2})u=F$ e prove que $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}v = F \circ \Phi$.
- c) Procure u tal que $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2})u=\delta$.
- 7) Provar que se $\dot{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $u'=\delta$, então $u=H(x)+c$.
- 8) Calcule $\frac{\partial}{\partial x}u$ se u é a função característica do quadrado $[0,1] \times [0,1]$ em \mathbb{R}^2 , e verifique que $S(\frac{\partial u}{\partial x})=\{0,1\} \times [0,1]$.
- 9) Seja $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ a distribuição do exercício anterior. Prove que $v \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Capítulo III

§1. Partições da unidade.

Definição III.1.1 - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Uma seqüência $\phi_1, \dots, \phi_n, \dots$ de funções $\in C_c^\infty(\Omega)$ se diz uma partição da unidade se

i) Todo ponto $x \in \Omega$ possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de $S(\phi_j)$'s.

$$\text{ii) } \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \equiv 1, \quad x \in \Omega$$

$$\text{iii) } 0 \leq \phi_i(x) < 1, \quad x \in \Omega, \quad i=1,2,\dots$$

Observe que para cada x fixo, se $U(x)$ é a vizinhança garantida por i) da definição acima, a soma $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(y)$ tem um número finito e fixo de parcelas não nulas. Isto é, localmente a série é uma soma finita. Em particular a série é convergente, pode ser diferenciada termo a termo, e se pode obter por exemplo $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k}(x) \equiv 0$. As condições ii) e iii) explicam o nome de "partição da unidade".

Definição III.1.2 - Dada uma cobertura aberta $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha \in A}$ de Ω ,

dizemos que uma partição da unidade (ϕ_i) está subordinada a \mathcal{V} , se para todo $\alpha \in A$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $S(\phi_i) \subseteq V_\alpha$.

Teorema III.1.1 - Toda cobertura aberta \mathcal{V} de um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, admite uma partição da unidade subordinada a \mathcal{V} .

Demonstrações do Teorema III.1.1 podem ser encontradas em [11], p.237 e [25], p.161. Provaremos uma versão mais fraca do Teorema III.1.1 que é suficiente para nossas necessidades.

Teorema III.1.2 - Seja K um compacto de \mathbb{R}^n , e consideremos abertos V_1, \dots, V_ℓ tais que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{\ell} V_j$. Então existem funções $\phi_j \in C_c^\infty(V_j)$ tais que

i)
$$\sum_{j=1}^{\ell} \phi_j(x) \leq 1$$

ii)
$$\sum_{j=1}^{\ell} \phi_j(x) = 1 \text{ numa vizinhança de } K.$$

iii)
$$0 \leq \phi_j \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad j=1,2,\dots$$

Demonstração - Para cada $j=1, \dots, \ell$ escolhemos compactos $K_j \subseteq V_j$ de forma que $\bigcup_{j=1}^{\ell} K_j \supset K$. Usando o corolário I.2.2 construímos funções $\psi_j \in C_c^\infty(V_j)$, $j=1, \dots, \ell$ tais que $0 \leq \psi_j \leq 1$ e $\psi_j = 1$ numa vizi -

nhança de K_j . Basta agora definir $\phi_1 = \psi_1$, $\phi_2 = \psi_2(1 - \psi_1)$, ..., $\phi_\ell = \psi_\ell(1 - \psi_1) \dots (1 - \psi_{\ell-1})$ para obter

$$(III.1.1) \quad \sum_{j=1}^{\ell} \phi_j = 1 - (1 - \psi_1)(1 - \psi_2) \dots (1 - \psi_\ell),$$

fórmula que pode ser facilmente verificada por indução em ℓ . Por conseguinte, as funções ϕ_j verificam ii), como se deduz de (III.1.1) e as propriedades i) e iii) são de verificação imediata.

Q.E.D.

Dadas duas funções contínuas f_1 e f_2 em Ω , dizemos que f_1 e f_2 são iguais no ponto $p \in \Omega$ se $f_1(p) = f_2(p)$. Se f_1 e f_2 fossem distribuições em Ω , não existe forma de comparar f_1 e f_2 "em p ", já que o valor de uma distribuição num ponto não está definido. Isto não é uma perda muito grande, levando em conta que o mesmo acontece com muitos espaços funcionais. De fato, se $f_1, f_2 \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, f_1 e f_2 são classes de equivalência de funções que coincidem em quase toda parte, e portanto o valor num ponto depende do representante. Se f_1 contem um representante contínuo, este é único e neste caso podemos definir $f_1(p)$ como o valor que toma em p o único representante contínuo de f_1 , mas em geral não existe um critério para escolher um representante. Entretanto, podemos dizer que duas distribuições $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ são iguais num aberto $U \subseteq \Omega$ se e somente se

$\langle u_1, \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle$ para todo $\phi \in C_c^\infty(U)$ (observe que $C_c^\infty(U) \subset C_c^\infty(\Omega)$).

Teorema III.1.3 - Sejam u_1 e $u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tais que todo ponto de Ω tem uma vizinhança onde $u_1 = u_2$. Então $u_1 = u_2$ em Ω .

Demonstração - Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $K = S(\phi)$. Existe uma cobertura finita V_1, \dots, V_ℓ de K formada por abertos onde u_1 e u_2 coincidem. Escolhendo $\phi_j \in C_c^\infty(V_j)$ como no Teorema III.1.2, podemos escrever $\phi(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \phi_j(x)\phi(x)$ e é claro que cada parcela está suportada por algum V_j . Por conseguinte

$$\langle u_1, \phi \rangle = \langle u_1, \sum_j \phi_j \phi \rangle = \sum_j \langle u_1, \phi_j \phi \rangle = \sum_j \langle u_2, \phi_j \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle.$$

Q.E.D.

Definição III.1.3 - Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos suporte de u , $S(u)$, como a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é nulo.

Observação - Se F é um fechado relativo de Ω , $\Omega - F$ é aberto, e dizer que u se anula em $\Omega - F$ quer dizer que as distribuições $u_1 = u$ e $u_2 = 0$ coincidem em $\Omega - F$. Conseqüentemente o Teorema III.1.3 implica que a união de abertos onde u se anula é um aberto onde u se anula. Portanto existe um maior aberto onde u se anula. Este

aberto é precisamente $\Omega - S(u)$. Em particular $S(u)$ é um subconjunto relativamente fechado de Ω .

Se u é uma função contínua em Ω , u define uma distribuição como elemento de $L^1_{loc}(\Omega)$, e temos duas definições de $S(u)$ como função (fecho de $\{u(x) \neq 0\}$) e como distribuição. É fácil ver que as duas definições coincidem.

Uma definição análoga é a seguinte.

Definição III.1.4 - Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos o suporte singular de u , $SS(u)$, como a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é C^∞ .

Naturalmente, dizer que u é C^∞ num aberto U significa dizer que existe uma função $f \in C^\infty(U)$ tal que $\langle u, \phi \rangle = \int f \phi \, dx = \langle f, \phi \rangle$ para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$.

§2. Distribuições com suporte compacto.

Definição III.2.1 - Denotamos com $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, o subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.

Teorema III.2.1 - Seja $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Existe um único funcional linear $\tilde{u}: C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

i) $\tilde{u}(\phi) = u(\phi)$ para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$

ii) $\tilde{u}(\phi) = 0$ se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi) \cap S(u) = \emptyset$.

Demonstração - Suponhamos que existam dois funcionais lineares \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 que verifiquem i) e ii) e seja $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ igual a 1 numa vizinhança de $S(u)$ (vide Corolário I.2.2). Se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi = \psi\phi + (1-\psi)\phi = \phi_1 + \phi_2$, onde $\phi_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_2) \cap S(u) = \emptyset$. Então $\tilde{u}_1(\phi) = \tilde{u}_1(\phi_1) + \tilde{u}_1(\phi_2) = u(\phi_1) = \tilde{u}_2(\phi_1) + \tilde{u}_2(\phi_2) = \tilde{u}_2(\phi)$, o que prova a unicidade.

Para provar a existência basta definir para $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\langle \tilde{u}, \phi \rangle = \langle u, \phi_0 \rangle$ onde $\phi = \phi_0 + \phi_1$ é qualquer decomposição de ϕ com $\phi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_1) \cap S(u) = \emptyset$. Se $\phi = \phi'_0 + \phi'_1$ é outra decomposição $\phi_0 - \phi'_0 = \phi'_1 - \phi_1$ e segue que $S(\phi_0 - \phi'_0) \cap S(u) = \emptyset$. Como $\phi_0 - \phi'_0$ está suportada num aberto onde u se anula $u(\phi_0 - \phi'_0) = 0$, ou seja $\langle u, \phi_0 \rangle = \langle u, \phi'_0 \rangle$ e a definição de \tilde{u} resulta independente da decomposição.

Q.E.D.

Definição III.2.2 - Uma seqüência (ϕ_j) de funções $C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero se para todo compacto K e todo inteiro positivo m , as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero em K quando $j \rightarrow \infty$.

Observação - Se uma seqüência (ϕ_j) de funções $\in C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ (Definição I.2.3) é claro que também converge

a zero em $C^\infty(\Omega)$. O recíproco é falso, como mostra o exemplo em $\Omega = \mathbb{R}$ dado por $\phi_n(x) = 2^{-n}\phi_0(nx)$ onde $S(\phi_0) \subseteq [-1, 1]$ e $\phi_0(x) = 1$ se $|x| \leq \frac{1}{2}$. É claro que $|\phi_n^{(k)}(x)| = |2^{-n}n^k\phi_0^{(k)}(nx)| \leq Cn^k 2^{-n} \rightarrow 0$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, $S(\phi_n(x)) \supseteq [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$ e os suportes das ϕ_n não estão contidos num compacto fixo.

Introduzimos agora uma notação muito difundida e que resulta prática quando é preciso escrever derivadas de funções de várias variáveis de uma maneira eficiente. Denotamos com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice, isto é uma n-upla de inteiros não negativos. A soma $\sum_{j=1}^n \alpha_j$ será denotada $|\alpha|$. Escrevemos $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j}$ onde $i = \sqrt{-1}$ (isto é conveniente no estudo da transformação de Fourier) e denotamos

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Analogamente, se $x = (x_1, \dots, x_n)$ escrevemos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

e também $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$. Esta notação permite escrever a fórmula de Taylor de forma compacta.

Teorema III.2.2 - Seja u um funcional linear em $C^\infty(\Omega)$. As condições seguintes são equivalentes:

i) u é contínuo.

ii) Existem um compacto $K \subset \Omega$, uma constante positiva C e um inteiro positivo m tais que

$$(III.2.1) \quad |\langle u, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \phi|, \quad \phi \in C^\infty(\Omega).$$

Demonstração - Se ii) vale e $\phi_j \rightarrow 0$ em $C^\infty(\Omega)$ segue que $\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \phi_j| \rightarrow 0$, já que as derivadas de ϕ_j até ordem m tendem a zero uniformemente em qualquer compacto. Temos então que $\langle u, \phi_j \rangle \rightarrow 0$.

Recíprocamente, suponhamos que (III.2.1) é falso para qualquer escolha de c, K, m , e consideremos $K_n = \{x \mid |x| \leq n \text{ e } d(x, \mathcal{C}\Omega) \geq \frac{1}{n}\}$. Os K_n 's são compactos e todo compacto $K \subset \Omega$ está contido em algum K_n já que K deve ser limitado e estar a uma distância positiva do complementar de Ω . Tomando $C=n$, $m=n$, $K=K_n$ existe uma função $\phi_n \in C^\infty(\Omega)$ que viola (III.2.1) ou seja

$$(III.2.2) \quad r_n = |\langle u, \phi_n \rangle| > n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{K_n} |D^\alpha \phi_n|,$$

em particular $r_n > 0$.

Ora, se $\psi_n = \frac{\phi_n}{r_n}$ é imediato que $\psi_n \rightarrow 0$ em $C^\infty(\Omega)$. Com efeito, sejam $K \subset \Omega$ compacto, β um multi-índice e escolhamos $n > |\beta|$ tal que $K \subseteq K_n$. Então usando (III.2.2)

$$\sup_K |D^\beta \psi_n| \leq \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{K_n} |D^\alpha \psi_n| = \frac{1}{r_n} \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{K_n} |D^\alpha \phi_n| < \frac{1}{n}.$$

Entretanto $|\langle u, \psi_n \rangle| = |r_n^{-1} \langle u, \phi_n \rangle| = 1$, o que contradiz a continuidade de u .

Q.E.D.

A continuidade dos funcionais de $C_c^\infty(\Omega)$ pode ser caracterizada de forma análoga.

Teorema III.2.3 - *Seja u um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$. As seguintes condições são equivalentes:*

- i) u é contínuo.
- ii) Para cada compacto $K \subset \Omega$, existem um inteiro positivo m e uma constante positiva C tais que

$$(III.2.3) \quad |\langle u, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha \phi|, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad S(\phi) \subseteq K.$$

Demonstração - Se $\phi_j \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_j) \subseteq K_0$, $j=1, 2, \dots$, basta

usar (III.2.3) com $K=K_0$ para ver que $\langle u, \phi_j \rangle \rightarrow 0$.

Se (III.2.3) for falsa para $C=m=n$, podemos encontrar ψ_n tal que $|\langle u, \psi_n \rangle| = 1$, $S(\psi_n) \subseteq K$ e $\sum_{|\alpha| \leq n} \sup |D^\alpha \psi_n| < \frac{1}{n}$. Então $\psi_n \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e $\langle u, \psi_n \rangle \not\rightarrow 0$, o que contradiz i).

Q.E.D.

A relação entre os funcionais lineares contínuos de $C_c^\infty(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$ está dada pelo resultado seguinte.

Teorema III.2.4 - *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. As seguintes condições são equivalentes:*

- i) $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, isto é, $S(u)$ é compacto.
- ii) Existe um funcional linear contínuo v em $C^\infty(\Omega)$ tal que a restrição $v|_{C_c^\infty(\Omega)} = u$.

Demonstração - i) \implies ii)

Se $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ podemos estender u a um funcional \tilde{u} em $C^\infty(\Omega)$ como no Teorema III.2.1. Se $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ é 1 numa vizinhança de $S(u)$, segue que $\tilde{u}(\phi) = u(\phi\psi)$ para toda $\phi \in C^\infty(\Omega)$. Aplicando o Teorema III.2.3 a u com $K_0 = S(\psi)$ obtemos para certos $c > 0$, $m \in \mathbb{N}^+$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ arbitrária

$$(III.2.4) \quad |\langle \tilde{u}, \phi \rangle| = |\langle u, \psi\phi \rangle| < c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha(\psi\phi)| < c' \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{K_0} |D^\alpha \phi|.$$

A última desigualdade se obtém calculando $D^\alpha(\psi\phi)$ pela regra de Leibniz. Os supremos das derivadas de ψ até ordem m são absorvidos na constante c' . Decorre do Teorema III.2.2 que \tilde{u} é contínuo em $C^\infty(\Omega)$ e basta então definir $v = \tilde{u}$ para obter i).

ii) \implies i)

Pelo Teorema III.2.2, existem c, m, K tais que

$$(III.2.5) \quad |\langle v, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \phi|, \quad \phi \in C^\infty(\Omega).$$

Se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi) \cap K = \emptyset$, segue de (III.2.5) que

$$|\langle u, \phi \rangle| = |\langle v, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \phi| = 0.$$

Então $S(u) \subseteq K$ e $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Q.E.D.

Observações - Se K_n é uma seqüência de compactos que "esgotam" Ω como na demonstração do Teorema III.2.2 e $\psi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ vale 1 numa vizinhança de K_n , é fácil ver que dada $\phi \in C^\infty(\Omega)$, a seqüência $\phi_n = \psi_n \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\phi_n \rightarrow \phi$ em $C^\infty(\Omega)$ (i.e. $\phi - \phi_n \rightarrow 0$ em $C^\infty(\Omega)$). Segue que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C^\infty(\Omega)$ e portanto o funcional v do Teorema III.2.4 que estende $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ é único (funcionais contínuos que coincidem num conjunto denso são idênticos). Isto permite identificar $\mathcal{E}'(\Omega)$ com o espaço dos funciou

nais lineares contínuos em $C^\infty(\Omega)$.

Exemplo III.2.1 - Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $f(x)$ é zero q.t.p. fora de um compacto K , segue que $S(f) \subseteq K$ e $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Recíprocamente se $S(f) = K$, f é zero no aberto $\Omega - K$ e decorre do Exemplo I.3.3 que $f = 0$ q.t.p. em $\Omega - K$:

Exemplo III.2.2 - Se μ é uma medida de Borel localmente finita; concentrada num compacto K , no sentido que $\mu(E) = \mu(E \cap K)$ para todo boreliano E , segue que $S(\mu) \subseteq K$. Por exemplo se $d\theta$ denota a medida de Lebesgue na circunferência unitária

$$S^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) \quad 0 < \theta < 2\pi\}$$

de \mathbb{R}^2 , e para qualquer boreliano E de \mathbb{R}^2 definimos $\mu(E) = \int_{S^1 \cap E} d\theta$, μ é uma medida finita e $S(\mu) = S^1$. Se

$$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \quad , \quad \langle \mu, \phi \rangle = \int_0^{2\pi} \phi(\cos \theta, \sin \theta) d\theta.$$

Exemplo III.2.3 - A distribuição $\delta(\phi) = \phi(0)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tem suporte $S(\delta) = \{0\}$. Análogamente, qualquer combinação linear de derivadas de δ ,

$$(III.2.6) \quad u = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta,$$

verifica $S(u) = \{0\}$. É interessante constatar que, reciprocamente, se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, tem suporte $S(u) = \{0\}$, então é da forma (III.2.6).

Com efeito, consideremos a bola de raio ϵ e centro na origem, $B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq \epsilon\}$ e escolhamos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que verifique (I.2.2). Agindo como na demonstração do Corolário I.2.2, definamos

$$(III.2.7) \quad f_\epsilon = \epsilon^{-n} \int_{B_{2\epsilon}} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy.$$

Então $f_\epsilon = 1$ em B_ϵ e $S(f_\epsilon) \subseteq B_{3\epsilon}$. Além disso

$$(III.2.8) \quad \langle u, \psi \rangle = \langle u, f_\epsilon \psi \rangle, \quad \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

já que $S(\psi(1-f_\epsilon))$ e $\{0\}$ são disjuntos. Usando a estimativa (III.2.3) com $K = B_1$ e tomando $\epsilon < \frac{1}{3}$, teremos

$$(III.2.9) \quad |\langle u, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha (f_\epsilon \psi)| \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{3}, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Por outro lado, o desenvolvimento de Taylor de ψ se escreve

$$(III.2.10) \quad \psi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha \psi(0)}{\alpha!} x^\alpha + R_{m+1}(x)$$

e a estimativa de Lagrange para o resto fornece

$$(III.2.11) \quad |D^\beta R_{m+1}(x)| \leq M |x|^{m+1-|\beta|}, \quad |x| < 1, \quad |\beta| \leq m+1,$$

para uma certa constante M que depende de ψ e m mas não de x , $|x| < 1$.

Em virtude de (III.2.8) e (III.2.10) podemos escrever

$$(III.2.12) \quad \begin{aligned} \langle u, \psi \rangle &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha \psi(0)}{\alpha!} \langle u, x^\alpha \rangle + \langle u, R_{m+1} \rangle = \\ &= \langle \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta, \psi \rangle + \langle u, R_{m+1} \rangle. \end{aligned}$$

Observemos que $\langle u, x^\alpha \rangle$ está bem definido já que $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Decorre de (III.2.12) que para obter $u = \sum c_\alpha D^\alpha \delta$ será suficiente provar que $\langle u, R_{m+1} \rangle = 0$. Aplicando (III.2.9) com $\psi = R_{m+1}$, teremos

$$(III.2.13) \quad |\langle u, R_{m+1} \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha (f_\epsilon R_{m+1})|.$$

A estimativa (III.2.11) mostra que

$$(III.2.14) \quad \sup_{|x| \leq 3\epsilon} |D^\beta R_{m+1}(x)| = O(\epsilon^{m+1-|\beta|}), \quad |\beta| \leq m+1, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Por outro lado, segue da definição de f_ϵ que

$$(III.2.15) \quad \sup |D^\alpha f_\epsilon(x)| = O(\epsilon^{-|\alpha|}).$$

Assim, aplicando a regra de Leibniz ao membro direito de (III.2.13) e usando (III.2.14) e (III.2.15), obtemos $\langle u, R_{m+1} \rangle = 0(\epsilon)$. Visto que R_{m+1} é independente de ϵ , concluímos que $\langle u, R_{m+1} \rangle = 0$, o que prova nossa afirmação.

É claro que nesta demonstração o fato de u estar suportada na origem é irrelevante. Se $S(u) = \{a\}$, $a \in \mathbb{R}^n$, aplicando a translação $x \mapsto x-a$ à distribuição u (vide Exemplo II.1.5) recaímos no caso anterior e resultará $u = \sum_{|\alpha| < m} c_\alpha D^\alpha \delta_a$, onde

$$\langle \delta_a, \psi \rangle = \psi(a).$$

§3. Divisão de distribuições.

Dados uma distribuição u e uma função $C^\infty f$, o problema da divisão consiste em encontrar outra distribuição v tal que $fv = u$. Se f não se anula em nenhum ponto, a solução óbvia é $v = \frac{1}{f}u$ e a solução é única. O problema pode às vezes ter solução mesmo que f se anule. Por exemplo se $u=1$ e $f(x)=x$, $x \in \mathbb{R}$, uma solução é $v_0 = v.p. \frac{1}{x}$. Mais geralmente, $v = v_0 + c\delta$ também é solução. Se w satisfaz $xw=1$ é claro que $x(w-v_0)=0$. Então $w-v_0$ se anula para $x \neq 0$ e $S(w-v_0) = \{0\}$. Segue do Exemplo III.2.3 que $w-v_0$ é uma combinação linear de δ e suas derivadas e um cálculo simples mostra que qualquer combinação que contiver derivadas de δ de ordem

positiva não se anula quando multiplicada por $f(x)=x$. Em conclusão, $v = v.p. \frac{1}{x} + c\delta$ é a solução geral da equação $xv=1$.

Consideremos agora o problema $xv = u$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Se $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\alpha(0)=0$, segue do teorema fundamental do cálculo que $\alpha(x) = \int_0^x \alpha'(t)dt = x \int_0^1 \alpha'(tx)dt = x\beta(x)$, e $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Fixando uma função $\gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\gamma(0)=1$ e aplicando o raciocínio anterior a $\phi(x) - \phi(0)\gamma(x)$ com $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ concluímos que

$$\phi(x) = \phi(0)\gamma(x) + x\beta(x)$$

e $\beta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Assim a fórmula

$$(III.3.1) \quad \langle v, \phi \rangle = \langle u, \beta \rangle = \langle u, \frac{\phi - \phi(0)\gamma}{x} \rangle \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

define uma distribuição v que satisfaz $xv=u$ e a solução geral se obtém adicionando um múltiplo de δ .

Se $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ tem um único zero simples em $x = 0$ então $f(x)=xg(x)$ com $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e a função g não se anula nunca. A divisão por f se obtém então dividindo sucessivamente por g e por x . Se f tem um único zero de ordem finita m em $x=0$, $f(x) = x^m g(x)$, $g(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, e poderemos dividir sucessivamente por g e por x (m vezes). Finalmente, usando partições da unidade, é fácil estender o argumento ao caso em que $f(x)$ tem vários zeros

de ordem finita (portanto isolados), por exemplo quando $f(x)$ é analítica real.

O problema da divisão de distribuições por funções analíticas reais em dimensão $n > 1$ é muito mais envolvido, já que para dividir é necessário estudar com cuidado o comportamento de uma função numa vizinhança do conjunto onde ela se anula. Isto é simples em \mathbb{R} , mas extremamente complicado em \mathbb{R}^n se $n > 1$. O problema da divisão por uma função analítica real foi resolvido afirmativamente por Lojasiewicz ([15]). O teorema tinha sido conjecturado por L. Schwartz que havia resolvido o problema de divisão por uma função holomorfa em \mathbb{C}^n ([2]). O leitor interessado pode consultar também [9] para o caso da divisão por polinômios, [17] como exposição geral do teorema da divisão, e [1] onde se dá uma demonstração usando o teorema de resolução de singularidades de Hironaka.

A divisão por funções C^∞ , não analíticas, é em geral impossível, mesmo no caso de uma variável. Por exemplo a equação
$$e^{-\frac{1}{x}} v = 1$$
 não tem solução em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Com efeito, suponhamos que v é uma solução. O Teorema III.2.3 afirma que existe uma estimativa

$$(III.3.2) \quad |\langle v, \phi \rangle| \leq C \sum_{\alpha=0}^m \sup |D^\alpha \phi|, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad S(\phi) \subseteq [0, 4].$$

Se $\phi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ verifica $\phi_0(x) > 0$, $S(\phi_0) \subseteq [1, 4]$ e $\phi_0(x) = 1$ em $[2, 3]$, então $\phi_n(x) = \phi_0(nx)$ $n=1, 2, \dots \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e $S(\phi_n) \subseteq [1/n, 4/n]$. Aplicando (III.3.2) obtemos

$$(III.3.3) \quad |\langle v, \phi_n \rangle| \leq C \sum_{\alpha=0}^m \sup |D^\alpha \phi_n| \quad n=1, 2, \dots$$

Ora,

$$\begin{aligned} \langle v, \phi_n \rangle &= \langle \exp(-x^{-2})v, \exp(x^{-2})\phi_n \rangle = \langle 1 \exp(x^{-2})\phi_n \rangle = \\ &= \int \exp(x^{-2})\phi_0(nx) dx \geq \int_{2/n}^{3/n} \exp(x^{-2}) dx \geq n^{-1} \exp(n^2/9). \end{aligned}$$

Entretanto, o membro direito de (III.3.3) verifica

$$C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha \phi_0(nx)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha n^\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Chegamos assim à desigualdade $\exp n^2/9 \leq C \sum_{q=0}^m c_\alpha n^{\alpha+1}$ que é obviamente falsa quando n cresce.

Exercícios

- 1) Provar que se u é uma função contínua em $\hat{\Omega}$, as duas no =

ções de suporte de u , como função e como distribuição, coincidem.

- 2) Construir uma função $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que suas transladas $\phi_k(t) = \phi(t-k)$ $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ constituam uma partição da unidade.

Sugestão - Partir de $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(t) = 1$ se $|t| < \frac{1}{2}$ e considerar

$$\phi(t) = \psi(t) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(\cdot - k) \right)^{-1}.$$

- 3) Determinar o suporte e o suporte singular de u nos seguintes casos.

i) $u(x) = |x|$

ii) $u = H(x)$ (função de Heaviside)

iii) $u(x) = \cos x$ se x irracional $u(x) = e^x$ se x racional

iv) $u = \text{v.p.} \frac{1}{x}$

v) $\langle u, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(0, y) dy$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

- 4) Seja $f(x) = x$, $u = \sum_{i=0}^{\ell} a_i D^i \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $a_i \in \mathbb{C}$. Provar que

se $fu = 0$, então $a_1 = a_2 = \dots = a_\ell = 0$.

5) Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\phi(0)=1$ e defina $\phi_j(x)=\phi(x/j)$. Estudar a convergência da seqüência ϕ_j em $C_c^\infty(\mathbb{R})$ e em $C^\infty(\mathbb{R})$.

6) Usando a fórmula de Taylor podemos escrever $\phi(x)=\phi(0)+x\phi'(0)+x^2\alpha(x)$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, e então a somabilidade da série $\sum \frac{1}{n^2}$ mostra que

$$\langle u, \phi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\phi\left(\frac{1}{n}\right) - \phi(0) - \frac{1}{n}\phi'(0) \right] \text{ é finito}$$

Provar que u assim definida pertence a $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ e determinar $S(u)$ e $SS(u)$.

7) Mostrar, usando a distribuição do exercício anterior, que não é possível em geral tomar $K=S(u)$ na estimativa (III.2.1) do teorema III 2.2.

Sugestão - Suponha que (III.2.1) vale com $K=S(u)$ e use as funções $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ se $x \geq \frac{1}{n}$, $\phi_n(x)=0$ se $x < \frac{1}{n+1}$ para violar esta estimativa.

8) Uma função $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se anula de ordem ∞ num conjunto K se $D^\alpha \phi(x)=0$ para todo $x \in K$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.

Usando as técnicas do Exemplo III.2.3, prove que se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e ϕ se anula de ordem ∞ em $S(u)$, então $\langle u, \phi \rangle = 0$. Estender ao caso $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

9) Defina

$$\langle \text{Pf} \frac{1}{x^2}, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\phi(0)}{\epsilon} \right], \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

e prove que $\text{Pf} \frac{1}{x^2}$ ("pseudo-função $\frac{1}{x^2}$ ") $\in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

10) Achar todas as distribuições $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tais que $x^2 u = 1$.

Capítulo IV

§1. Convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição IV.1.1 - Dizemos que uma seqüência $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $j=1, 2, \dots$ converge a $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se $\langle u_j, \phi \rangle$ converge a $\langle u, \phi \rangle$ para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Neste caso escrevemos $u_j \longrightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo IV.1.1 - Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, r um número real e considere mos a translação u_r de u : $\langle u_r, \phi \rangle = \langle u, \phi_r \rangle$, $\phi_r(x) = \phi(r+x)$. Podemos formar o "quociente de Newton" $v_r = \frac{u_r - u}{r}$ e verificar que $\lim_{r \rightarrow 0} v_r = \frac{d}{dx} u = u'$. Com efeito, dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle v_r, \phi \rangle = \frac{1}{r} (\langle u, \phi_r \rangle - \langle u, \phi \rangle) = \langle u, \frac{\phi_r - \phi}{r} \rangle.$$

Ora se consideramos uma seqüência $r_j \longrightarrow 0$ é fácil verificar que

$\phi_j = \frac{\phi_{r_j} - \phi}{r_j}$ converge a $-\phi'$ em $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Então

$$\lim_{r \rightarrow 0} \langle v_r, \phi \rangle = \langle u, -\phi' \rangle = \langle u', \phi \rangle.$$

Este exemplo mostra que a derivada no sentido das distribuições é ainda o limite de quocientes de Newton, num certo sen-

tido. A generalização a \mathbb{R}^n é trivial.

Exemplo IV.1.2 - (continuidade da derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$). Seja

$$u_j \rightarrow u \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n. \text{ Então } \lim_j \frac{\partial u_j}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \lim_j u_j = \frac{\partial}{\partial x^i} u.$$

Isto quer dizer que diferente do que acontece com seqüências de funções e com a derivação usual, sempre é possível trocar a ordem das operações de derivação e limite numa seqüência de distribuições. Por exemplo $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ converge uniformemente a zero, em particular, $f_n \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. A seqüência $f'_n(x) = \cos nx$ é não convergente para quase todo x . Entretanto $\cos nx \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\frac{d}{dx} f_n \rightarrow \frac{d}{dx} 0 = 0$.

Exemplo IV.1.3 - Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi \geq 0$ e $\int \phi dx = 1$, então quando $\epsilon \rightarrow 0$, $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \phi(x/\epsilon) \rightarrow \delta$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, se $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\langle \phi_\epsilon, \psi \rangle = \epsilon^{-n} \int \psi(x) \phi(x/\epsilon) dx \rightarrow \psi(0)$ em virtude do Teorema I.2.1 c). O gráfico das funções $\phi_\epsilon(x)$ tem forma de sino, o suporte decresce com ϵ e a altura cresce de forma que a integral $\int \phi_\epsilon dx = 1$. Isto corresponde com a descrição heurística de δ introduzida por Dirac ([4]) como uma função igual a zero fora da origem, igual a ∞ em $x=0$ e "tal que $\int \delta(x) dx = 1$ ". Mais geralmente, uma modificação simples da demonstração do Teorema I.2.1 permite verificar que uma seqüência de funções posi

tivas $f_j \in L^1$ tais que i) $\int f_j dx \rightarrow 1, j \rightarrow \infty$, ii) $\int_{|x|>a} f_j dx \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$, para todo $a > 0$ fixo, converge a δ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, i.e., $\langle f_j, \phi \rangle \rightarrow \phi(0)$. Com efeito,

$$\int f_j \phi dx = \int_{|x|<a} f_j(x) (\phi(x) - \phi(0)) dx + \phi(0) \int_{|x|<a} f_j dx + \int_{|x|\geq a} f_j \phi dx.$$

O primeiro termo pode se fazer arbitrariamente pequeno se a é pequeno, o segundo converge a $\phi(0)$ e o terceiro converge a zero.

Exemplo IV.1.4 - Seja $f_n \in L^1_{loc}(\Omega)$, $n=1, 2, \dots$ e suponhamos que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p e que existe $0 \leq g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$. Segue do teorema da convergência dominada que $\langle f_n, \phi \rangle \rightarrow \langle f, \phi \rangle$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, isto é, $f_n \rightarrow f$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Em particular, muitas das convergências naturais dos espaços de funções (convergência uniforme, convergência em média p $1 < p < \infty$, etc.) implicam a convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$ via a inclusão

$$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Exemplo IV.1.5 - Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $K_n = \{x \in \Omega \mid |x| \leq n, d(x, \mathcal{C}\Omega) \leq \frac{1}{n}\}$ e consideremos uma seqüência de funções $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n(x) = 1$ numa vizinhança de K_n (veja Corolário I.2.2). Dada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a seqüência $u_n = \phi_n u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Concluimos que

toda distribuição é limite de distribuições de suporte compacto.

Suponhamos que u_n é uma seqüência de distribuições em $\mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $u_n(\phi)$ é convergente para cada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Se denotamos $u(\phi) = \lim_n u_n(\phi)$ é claro que u é um funcional linear. De fato u resulta contínuo em $C_c^\infty(\Omega)$, isto é, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Teorema IV.1.1 - *Seja (u_n) uma seqüência de distribuições em Ω , e suponhamos que para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\langle u_n, \phi \rangle$ é uma seqüência numérica de Cauchy. Então (u_n) é convergente em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração - Decorre do fato de \mathbb{C} ser completo que $\lim_n \langle u_n, \phi \rangle$ existe. Escrevamos $\langle u, \phi \rangle = \lim_n \langle u_n, \phi \rangle$. Se provarmos que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ teremos provado que $u_n \rightarrow u$. Se $\phi_j \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ deve existir um compacto $K \subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subseteq K$, $j=1,2,\dots$. Consideremos o espaço $C_c^\infty(K) = \{\phi \in C_c^\infty(\Omega) \mid S(\phi) \subseteq K\}$. A convergência natural em $C_c^\infty(K)$ é a da convergência uniforme das funções e suas derivadas. Ao contrário do que acontece com $C_c^\infty(\Omega)$, $C_c^\infty(K)$ é metrizável. A distância pode ser definida por

$$d(\phi, \psi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m(\phi - \psi)}{2^m(1 + p_m(\phi - \psi))}, \quad \phi, \psi \in C_c^\infty(K),$$

$$p_m(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha \phi|.$$

É simples verificar que $d(\psi_j, \psi) \rightarrow 0$ se e somente se $p_m(\phi_j - \psi) \rightarrow 0$ para todo m e este último fato acontece se e somente se para todo α $D^\alpha \psi_j \rightarrow \psi$ uniformemente. Se (ψ_j) é uma seqüência de Cauchy, isto é, $\sup_{p \geq 0} d(\psi_j, \psi_{j+p}) \rightarrow 0$, quando $j \rightarrow \infty$, então para cada α , $D^\alpha \psi_j$ converge uniformemente a uma função contínua ψ_α . Como a convergência uniforme implica a convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$ segue que $D^\alpha \psi_0 = D^\alpha \lim_j \psi_j = \lim_j D^\alpha \psi_j = \psi_\alpha$. Aplicando reiteradamente o Teorema II.2.1 concluímos que $\psi_0 \in C_c^\infty(K)$ e $D^\alpha \psi_0 = \psi_\alpha$ no sentido clássico, ou seja que $D^\alpha \psi_j \rightarrow D^\alpha \psi_0$ uniformemente para cada α e $C_c^\infty(K)$ é completo. Consideremos as funções contínuas definidas em $C_c^0(K)$, $\rho_n(\phi) = |\langle u_n, \phi \rangle|$. Uma aplicação comum do teorema de Baire ([6], Ex. 3, p. 300) afirma que sendo $(\rho_n(\phi))$ limitada para cada ϕ fixa, existe uma esfera $B(\phi_0, r) = \{\phi \mid d(\phi, \phi_0) < r\}$ onde ρ_n é uniformemente limitada. Ora $\rho_n(\phi) = \rho_n(-\phi)$ portanto $|\rho_n(\phi)| \leq M$ se $\phi \in B(\phi_0, r)$ ou $-\phi \in B(\phi_0, r)$. Seja $d(\psi, 0) < \epsilon$, então $\psi = \frac{1}{2}[(\psi + \phi_0) + (\psi - \phi_0)]$, $d(\psi + \phi_0, \phi_0) = d(\psi, 0) < r$, $d(\psi - \phi_0, \phi_0) = d(\psi, 0) < r$, e portanto $\rho_n(\psi + \phi_0) \leq M$, $\rho_n(\psi - \phi_0) \leq M$. Ou seja que $\rho_n(\psi) \leq \frac{1}{2}(\rho_n(\psi + \phi_0) + \rho_n(\psi - \phi_0)) \leq M$ se $d(\psi, 0) < r$. Estamos agora em condições de provar que $\langle u, \phi_j \rangle \rightarrow 0$. Com efeito, $\phi_j \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(K)$ e o mesmo acontece com $\lambda \phi_j$ para qualquer constante fixa λ . Dado $\epsilon > 0$, escolhamos j_0 tal que $d(2M \epsilon^{-1} \phi_j, 0) < r$ se $j \geq j_0$. Consideremos, $|\langle u, \phi_j \rangle| \leq |\langle u_n - u, \phi_j \rangle| + |\langle u_n, \phi_j \rangle|$. Se $j \geq j_0$, $|\langle u_n, 2M \epsilon^{-1} \phi_j \rangle| \leq M$

e por conseguinte $|\langle u_n, \phi_j \rangle| < \epsilon/2$. Por outro lado podemos escolher n tal que $|\langle u_n - u, \phi_j \rangle| < \epsilon/2$ e portanto $|\langle u, \phi_j \rangle| < \epsilon$ se $j \geq j_0$.

Q.E.D.

§2. Prolongamento analítico de distribuições.

Às vezes é conveniente associar uma distribuição a uma função não localmente integrável. Isto já foi feito no caso da função $\frac{1}{x}$ no capítulo II. Vamos descrever agora um método que pode ser aplicado com sucesso em vários casos. Seja G um aberto do z -plano complexo \mathbb{C} e para cada $z \in G$ seja u_z uma distribuição em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u_z \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que u_z depende analiticamente de z se para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $z \mapsto \langle u_z, \phi \rangle$ é uma função analítica (complexa) em G . Sejam $v_h = (u_{z_0+h} - u_{z_0})h^{-1}$, $h \in \mathbb{C}$ os quocientes de Newton. Se u depende analiticamente de z , $\langle v_h, \phi \rangle$ terá um limite quando $z \rightarrow 0$ igual a $\left. \frac{d}{dz} \langle u_z, \phi \rangle \right|_{z=z_0}$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Pelo teorema IV.1.1

v_h converge para uma distribuição que será denotada $\frac{du}{dz}$, ou seja $\left. \frac{du}{dz} \right|_{z_0}, \phi = \left. \frac{d}{dz} \langle u_z, \phi \rangle \right|_{z_0}$.

Analogamente, para cada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ podemos considerar a série de Taylor $\langle u_z, \phi \rangle = \sum a_k(\phi)(z-z_0)^k$. Os coeficientes estão dados por

$$a_k(\phi) = \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{dz}\right)^k \langle u_z, \phi \rangle \Big|_{z_0} = \langle \left(\frac{d}{dz}\right)^k u \Big|_{z_0}, \phi \rangle.$$

Por conseguinte os coeficientes são distribuições em Ω e u_z é o limite em $\mathcal{D}'(\Omega)$ da série $\sum_k \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{dz}\right)^k u_z \Big|_{z_0} (z-z_0)^k$. Os resultados usuais relativos a funções analíticas numéricas se estendem sem dificuldade a distribuições que dependem analiticamente de z . Por exemplo se G é simplesmente conexo, γ é um arco fechado em G e o índice de $a \notin \gamma$ relativo a γ é 1, vale a fórmula de Cauchy

$$u_a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{u_z}{z-a} dz$$

onde a integral denota a distribuição definida por

$$\phi \longmapsto \int_{\gamma} \frac{\langle u_z, \phi \rangle}{z-a} dz.$$

Se G_1 é um aberto do plano que contém propriamente G e todas as funções analíticas numéricas $\langle u_z, \phi \rangle$ são prolongáveis a G_1 , então u_z pode ser prolongável a G_1 . Vejamos um exemplo.

Exemplo IV.2.1 - Seja $\Omega = \mathbb{R}$, e consideremos as funções $f_{\lambda}(x) = H(x)x^{\lambda-1}$,

$\lambda \in \mathbb{C}$, onde $H(x)$ é a função de Heaviside. Se $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $f_\lambda \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e é claro que f_λ define uma distribuição que depende analiticamente de λ no semiplano $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Usando a série finita de Taylor para uma função $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, podemos escrever

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^N g(x) \quad , \quad g \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Então

$$\begin{aligned} \text{(IV.2.1)} \quad \int_0^\infty x^{\lambda-1} \phi(x) dx &= \int_1^\infty x^{\lambda-1} \phi(x) dx + \int_0^1 x^{N+\lambda-1} g(x) dx + \\ &+ \int_0^1 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} x^{k+\lambda-1} dx. \end{aligned}$$

A função da esquerda em (IV.2.1) é analítica em $\operatorname{Re} \lambda > 0$. A primeira parcela do membro direito é uma função inteira, a segunda é analítica em $\operatorname{Re} \lambda > -N$ e a terceira pode ser calculada explicitamente e é igual a uma função racional de λ

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} \frac{\phi^{(k)}(0)}{\lambda+k} ,$$

que se estende a \mathbb{C} menos $\{0\}, \{-1\}, \dots, \{-N+1\}$.

Como N e ϕ são arbitrários podemos estender $H(x)x^{\lambda-1}$ ao plano todo com exceção dos inteiros não positivos, onde haverá polos simples. Como esses polos são exatamente os da função Γ , podemos considerar a distribuição $u_\lambda = H(x)x^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$ que será uma função inteira de λ . Para λ real >1 , u_λ satisfaz a equação $\frac{d}{dx} u_\lambda = u_{\lambda-1}$ e por prolongamento analítico, a equação é válida para todo λ . Se $\lambda=1$ $u_1 = H(x)$ então, $u_0 = \frac{d}{dx} u_1 = \delta$, e em geral $u_{-k} = \delta^{(k)}$ $k=0,1,\dots$.

§3. Convolução.

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas em \mathbb{R}^n e uma delas tem suporte compacto, a convolução de f e g se define como

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int g(x-y)f(y)dy.$$

Isto leva à seguinte definição

Definição IV.3.1 - Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ($u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$) denotaremos com $u * \phi$ a função definida por

$$u * \phi(a) = \langle u, \check{\phi}_a \rangle$$

onde $\check{\phi}_a(x) = \phi(a-x)$.

Exemplo IV.3.1 - Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(\delta * \phi)(a) = \langle \delta, \phi(a-x) \rangle = \phi(a)$, ou

seja $\delta * \phi = \phi$. Se $p \in \mathbb{R}^n$ e $\delta_p = \delta(x-p)$, isto é $\langle \delta_p, \phi \rangle = \phi(p)$, então

$$(\delta_p * \phi)(a) = \phi(a-p).$$

Teorema IV.3.1 - Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então

i) $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e suas derivadas estão dadas por

$$(IV.3.1) \quad D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * D^\alpha \phi.$$

ii) $S(u * \phi) \subset S(u) + S(\phi) = \{x + y \mid x \in S(u), y \in S(\phi)\}$

Demonstração - Se $a_j \rightarrow a$ é claro que $\phi(a_j - x) \rightarrow \phi(a - x)$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, o que prova que $u * \phi$ é uma função contínua. Provemos IV.3.1 para $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$. Para começar consideremos o quociente de Newton na direção do vetor unitário $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$$\begin{aligned} r^{-1}(u * \phi(a + re_1) - u * \phi(a)) &= r^{-1} \langle u, \phi(a + re_1 - x) - \phi(a - x) \rangle = \\ &= \langle r^{-1}(u_{re_1} - u), \phi(a - x) \rangle. \end{aligned}$$

Ora, $r^{-1}(u_{re_1} - u) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x^1}$, de acordo com o Exemplo IV.1.1.

Em particular $\frac{\partial}{\partial x^1}(u * \phi)(a) = \langle \frac{\partial u}{\partial x^1}, \phi(a - x) \rangle$. Como o membro direito é uma função contínua de a , segue que $u * \phi \in C^1$ (já que o mesmo raciocínio vale para as variáveis x^2, \dots, x^n). Agindo indutivamente,

$u * \phi \in C^\infty$ e $D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi$. Por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} u * \phi &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} u, \phi(x-a) \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial}{\partial x^i} \phi(a-x) \right\rangle = \\ &= \left\langle u, \frac{\partial}{\partial a^i} \phi(a-x) \right\rangle = u * \frac{\partial}{\partial a^i} \phi, \end{aligned}$$

o que prova a segunda igualdade de (IV.3.1).

Finalmente, se $a \notin S(u) + S(\phi)$ $S(u) \cap S(\check{\phi}_a) = \emptyset$ e $\langle u, \check{\phi}_a \rangle = 0$.

Como $u * \phi$ se anula fora de $S(u) + S(\phi)$ segue que $S(u * \phi) \subseteq S(u) + S(\phi)$.

Q.E.D.

Observação - Os mesmos resultados do teorema anterior valem se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema IV.3.2 - Se ϕ, ψ pertencem a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi).$$

Demonstração - Consideremos, para $\varepsilon > 0$, as somas de Riemann

$$s_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \sum_m \phi(x - \varepsilon m) \psi(\varepsilon m)$$

onde $m = (m_1, \dots, m_n)$ percorre os pontos de coordenadas inteiras.

Então $S(s_\varepsilon) \subseteq S(\phi) + S(\psi) = \text{compacto fixo}$, e para cada multi índice α

$$D^\alpha s_\epsilon(x) = \epsilon^n \sum_m (D^\alpha \phi)(x - \epsilon m) \psi(\epsilon m) \longrightarrow (D^\alpha \phi * \psi)(x) = D^\alpha (\phi * \psi)(x)$$

Então, $(u * (\phi * \psi))(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u * s_\epsilon)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_m (u * \phi)(x - m\epsilon) \psi(\epsilon m) = (u * \phi) * \psi(x)$.

Q.E.D.

Teorema IV.3.3 - *Seja* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int \phi = 1$ e escreva $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \phi(x/\epsilon)$. Então $u * \phi_\epsilon \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demonstração - Com a notação $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$, podemos escrever $\langle u, \psi \rangle = (u * \check{\psi})(0)$. Então

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle u * \phi_\epsilon, \psi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u * \phi_\epsilon) * \check{\psi}(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u * (\phi_\epsilon * \check{\psi})(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle u, (\phi_\epsilon * \check{\psi})^\vee \rangle = \langle u, \psi \rangle.$$

A última igualdade decorre de $\phi_\epsilon * \check{\psi} \rightarrow \check{\psi}$ em $C_c^\infty(\Omega)$, consequência do Teorema I.2.1.

Corolário IV.3.1 - $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Demonstração - Em virtude do Exemplo IV.1.5 é suficiente ver que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $\mathcal{E}'(\Omega)$. Seja ϕ_ϵ como no Teorema IV.3.3 e $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Segue do Teorema IV.3.1 que $S(u * \phi_\epsilon) \subseteq S(u) + S(\phi_\epsilon) \subseteq S(u) + \{(x) \leq C \cdot \epsilon\}$. Então $u * \phi_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ para ϵ pequeno e $u * \phi_\epsilon \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Q.E.D.

Observação - O Corolário IV.3.1 permite estender a $\mathcal{D}'(\Omega)$ re-

gras formais válidas para funções pelo processo de aproximação. Por exemplo da regra de Leibniz para a segunda derivada, $(\phi\psi)'' = \phi''\psi + 2\phi'\psi' + \phi\psi''$ conhecida para funções C^∞ passamos a $(\phi u)'' = \phi''u + 2\phi'u' + \phi u''$ fazendo tender ϕ para u .

No seguinte teorema denotaremos T_h o operador de translação $(T_h u)(x) = u(x-h)$.

Teorema IV.3.4 - Seja $U: C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ um operador contínuo que comuta com todas as translações T_h , $h \in \mathbb{R}^n$. Então existe uma única $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $U\phi = u * \phi$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração - Por hipótese, $\phi \mapsto (U\check{\phi})(0)$ é um funcional linear contínuo. Definindo $\langle u, \phi \rangle = (U\check{\phi})(0)$ e usando $UT_h = T_h U$ obtemos

$$U\phi(h) = T_{-h}U\phi(0) = U(T_{-h}\phi)(0) = \langle u, (T_{-h}\phi)^\vee \rangle = \langle u, \phi(h-x) \rangle = u * \phi(h).$$

A unicidade é trivial.

Q.E.D.

Definição IV.3.2 - Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e suponhamos que uma das duas tem suporte compacto. Definimos $v = u_1 * u_2$ como a única distribuição v tal que $u_1 * (u_2 * \phi) = v * \phi$.

Observe que $V(\phi) = u_1 * (u_2 * \phi)$ define um operador que satisfaz as hipóteses do Teorema IV.3.4 e por conseguinte $V(\phi) = v * \phi$ para uma $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bem definida.

A convolução para vários fatores dos quais todos com possível de um, têm suporte compacto, define-se análogamente e é por construção associativa. O Teorema IV.3.2 mostra que a Definição IV.3.2 generaliza a Definição IV.3.1 se u_2 tem suporte compacto. Análogamente se prova que esta definição coincide com a Definição IV.3.1 se $u_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $u_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo IV.3.2 - Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\langle u * \delta, \phi \rangle = (u * \delta) * \check{\phi}(0) = u * (\delta * \check{\phi})(0) = u * \check{\phi}(0) = \langle u, \phi \rangle$, isto é, $u * \delta = u$. Um cálculo similar mostra que $\delta * u = u$. De fato isto não é surpreendente em vista do seguinte Teorema.

Teorema IV.3.5 - Sejam $u_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Então $S(u_1 * u_2) \subseteq S(u_1) + S(u_2)$ e $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$.

Demonstração - Sejam $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então usando a comutatividade da convolução de funções

$$\begin{aligned} (u_1 * u_2) * (\phi * \psi) &= u_1 * (u_2 * (\phi * \psi)) = u_1 * [(u_2 * \phi) * \psi] = \\ &= u_1 * [\psi * (u_2 * \phi)] = (u_1 * \psi) * (u_2 * \phi). \end{aligned}$$

$$\text{Da mesma forma } (u_2 * u_1) * (\phi * \psi) = (u_2 * u_1) * (\psi * \phi) = (u_2 * \phi) * (u_1 * \psi) =$$

= $(u_1 * \psi) * (u_2 * \phi)$. Combinando ambos resultados, $(u_1 * u_2) * (\phi * \psi) =$
= $(u_2 * u_1) * (\phi * \psi)$. Fazendo $\phi * \psi \rightarrow \phi$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (veja Teorema I.2.1)
obtemos $(u_1 * u_2) * \phi = (u_2 * u_1) * \phi$ que em $x=0$ se escreve $\langle u_1 * u_2, \check{\phi} \rangle =$
= $\langle u_2 * u_1, \check{\phi} \rangle$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Para provar a afirmação relativa aos suportes, seja ϕ_ϵ
como no Teorema IV.3.3 e consideremos $(u_1 * u_2) * \phi_\epsilon$. Então

$$S[(u_1 * u_2) * \phi_\epsilon] = S[u_1 * (u_2 * \phi_\epsilon)] \subseteq S(u_1) + S(u_2 * \phi_\epsilon) \subseteq S(u_1) + S(u_2) + S(\phi_\epsilon).$$

Quando $\epsilon \rightarrow 0$; o diâmetro de $S(\phi_\epsilon)$ tende para zero e concluímos que $S(u_1 * u_2) \subseteq S(u_1) + S(u_2)$.

Q.E.D.

Exemplo IV.3.3 - Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então, usando o Teorema IV.3.1, $(D^\alpha u) * \phi = u * D^\alpha \phi = u * D^\alpha \phi * \delta = u * \phi * D^\alpha \delta = u * D^\alpha \delta * \phi$. Isto mostra que $D^\alpha u = D^\alpha \delta * u$. Em particular obtemos

$$(IV.3.1) \quad D^\alpha (u_1 * u_2) = (D^\alpha u_1) * u_2 = u_1 * D^\alpha u_2$$

usando a expressão de D^α como convolução com $D^\alpha \delta$ e as propriedades associativa e comutativa da convolução.

Exemplo IV.3.4 - Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e suponhamos que $S(u_1) \cup S(u_2) \subseteq [0, \infty)$. Como em princípio $u_1, u_2 \notin \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $u_1 * u_2$ não está definido. Entretanto é possível dar um significado a $u_1 * u_2$

por meio da fórmula $\langle u_1 * u_2, \phi \rangle = u_1 * (u_2 * \phi)$. Observemos que é possível estender u_1 ao espaço $C_+^\infty(\mathbb{R})$ das funções C^∞ com suporte superiormente limitado, na mesma forma que quando u tem suporte compacto, se estende a todas as funções C^∞ . Se $\phi \in C_+^\infty(\mathbb{R})$ e $S(\phi) \subseteq (-\infty, a]$, seja $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ igual a um numa vizinhança de $S(u_1) \cap S(\phi) \subseteq [0, a]$. Podemos definir

$$\langle \tilde{u}_1, \phi \rangle = \langle u_1, \alpha \phi \rangle \quad , \quad \phi \in C_+^\infty(\mathbb{R}) \quad ,$$

e como no Teorema III.2.1 esta é a única extensão de u_1 com a propriedade $\langle \tilde{u}, \phi \rangle = 0$ se $\phi \in C_+^\infty(\mathbb{R})$ e $S(\phi) \cap [0, \infty) = \emptyset$.

Ora, como $S(u_2) \subseteq [0, \infty)$, $S(u_2 * \phi) \subseteq [-a, \infty)$ e por conseguinte $f(y) = u_2 * \phi(x-y) \in C_+^\infty(\mathbb{R})$ para todo x e

$$\tilde{u}_1 * (u_2 * \phi)(x) = \langle \tilde{u}_1, (u_2 * \phi)(x-y) \rangle$$

está bem definido. É fácil ver que $\phi \mapsto (\tilde{u}_1 * (u_2 * \phi))$ é contínuo de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ em $C^\infty(\mathbb{R})$ e comuta com translações. O Teorema IV.3.4 permite definir $u_1 * u_2$. A propriedade $S(u_1 * u_2) \subseteq S(u_1) + S(u_2)$ se mantém, portanto $S(u_1 * u_2) \subseteq [0, \infty)$.

Exemplo IV.3.5 - Seja $u_\lambda = \frac{H(x)x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, a distribuição do

Exemplo IV.3.1. Então $S(u_\lambda) \subseteq [0, \infty)$ e pretendemos calcular $u_\alpha * u_\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Suponhamos que α e β são números reais maiores

que um de maneira que u_α, u_β são funções contínuas. Então convolucionando u_α, u_β como funções

$$\begin{aligned} u_\alpha * u_\beta(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} dt = \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Esta última integral é igual a $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ ([24], p.315). Obtemos assim

$$(IV.3.2) \quad u_\alpha * u_\beta = u_{\alpha+\beta}.$$

A fórmula (IV.3.2) se estende para valores complexos arbitrários α, β por prolongamento analítico. Observe que (IV.3.2) confere com os resultados obtidos anteriormente, $u_0 = \delta$, $\delta * u_\alpha = u_\alpha$, $u_{-1} = \delta'$, $u_{\alpha-1} = \delta' * u_\alpha = \frac{d}{dx} u_\alpha$.

Exercícios

- 1) Seja (a_k) , $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ uma seqüência de números complexos que verificam a estimativa

$$|a_k| \leq M|k|^N \quad k \neq 0, k \in \mathbb{Z},$$

onde M, N são certas constantes. Provar que a série

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{itk}$$

é convergente em $\mathcal{D}'(-\pi, \pi)$.

Sugestão - Considere primeiro a série $\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{a_k}{(ik)^{N+2}} e^{ixk}$ e prove

que converge uniformemente a uma função contínua v . A série original deve convergir a $(\frac{d}{dx})^{N+2} v + a_0$ em $\mathcal{D}'(-\pi, \pi)$.

2) Se $f \in L^1[-\pi, \pi]$ e $a_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt$, então $|a_k(f)| \leq \|f\|_1$. Provar que se $\phi \in C_c^\infty(-\pi, \pi)$, $\sum |a_k(\phi)| k^N < \infty$ para todo $N=1, 2, \dots$.

Sugestão - $|(ik)^{N+2} a_k(\phi)| = |a_k(\phi^{(N+2)})| \leq \|\phi^{(N+2)}\|_1 < \infty$.

3) Usar o exercício anterior para dar outra demonstração do exercício 1), verificando que as somas $\sum_{k=-k}^k a_k e^{ixk}, \phi$ convergem para todo $\phi \in C_c^\infty(-\pi, \pi)$.

- 4) Seja $u \in \mathcal{E}'(-\pi, \pi)$ e defina $a_k = \frac{1}{2\pi} \langle u, e^{-ikt} \rangle$. Discutir a convergência da série $\sum a_k e^{ikt}$ em $\mathcal{D}'(-\pi, \pi)$
- 5) Considerar a função $f_\lambda(x) = |x|^{\lambda-2}$ em \mathbb{R}^2 . Se $\text{Re } \lambda > 0$ e $P(x)$ é o desenvolvimento de Taylor de ϕ até ordem $N-1$, podemos escrever
- $$\langle f_\lambda, \phi \rangle = \int_{|x|>1} f_\lambda \phi \, dx + \int_{|x|<1} f_\lambda (\phi - P) \, dx + \int_{|x|<1} f_\lambda P \, dx.$$
- Provar que $\int_{|x|<1} f_\lambda P \, dx = \sum_{|\alpha|<N-1} c_\alpha \frac{D^\alpha \phi(0)}{\alpha!}$ e computar c_α usando coordenadas polares. Verificar que $c_\alpha = 0$ se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ contem um inteiro ímpar.
- 6) Usar as técnicas do Exemplo IV.2.1 para prolongar analiticamente a distribuição f_λ do exercício anterior ao plano complexo menos $\{0, -2, -4, \dots\}$
- 7) Provar que as duas definições de $u_1 * \phi$ $u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ isto é, considerando ϕ como função e como distribuição, coincidem.
- 8) Fazer o mesmo para o caso $u_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}), \phi \in C^\infty(\mathbb{R})$.
- 9) Seja \mathcal{D}'_+ o subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ das distribuições com

suporte contido em $[0, \infty)$ com a soma usual e o produto de convolução. Provar que \mathcal{D}'_+ é uma álgebra comutativa com identidade.

10) Provar que se $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'_+$ $\frac{d}{dx}(u_1 * u_2) = (\frac{d}{dx}u_1) * u_2 = u_1 * \frac{d}{dx}u_2$

11) Seja $L = \frac{d}{dx} - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $E = H(x)e^{\lambda x}$. Provar que se $f \in \mathcal{D}'_+$, a equação $Lu=f$ tem uma única solução em \mathcal{D}'_+ dada por $E*f$. Por que a solução não seria única se procurarmos soluções $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$?

Capítulo V

§1. A transformação de Fourier em \mathcal{S} .

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de f se define por

$$(V.1.1) \quad \mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $x \cdot \xi = x^1 \xi_1 + \dots + x^n \xi_n$. Uma aplicação simples do teorema da convergência dominada mostra que $\hat{f}(\xi)$ é contínua e também é claro que $\sup |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 = \int |f| dx$.

Já vimos no capítulo II que sempre é possível estender a \mathcal{D}' um operador contínuo definido em C_c^∞ que possua um transposto formal. Entretanto, se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\hat{\phi}(\xi)$ não tem suporte compacto a menos que $\phi \equiv 0$. Trata-se então de encontrar um espaço que contenha $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e seja invariante pela transformação de Fourier. Isto permitirá, por dualidade, estender \mathcal{F} aos funcionais desse espaço. Quanto menor o espaço mais funcionais serão transformáveis. Estas condições são satisfeitas pelo espaço \mathcal{S} das funções de decrescimento rápido.

Definição V.1.1 - Denotamos com \mathcal{S} (ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quando queremos destacar a dimensão do espaço euclidiano) o subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções ϕ tais que

$$(V.1.2) \quad \sup_x |x^\alpha D^\beta \phi| < \infty \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Dizemos que uma seqüência $\phi_j \in \mathcal{S}$ $j=1,2,\dots$ converge para zero em \mathcal{S} , $\phi_j \rightarrow 0$ em \mathcal{S} se para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ $x^\alpha D^\beta \phi(x) \rightarrow 0$ uniformemente.

Em outras palavras tanto as funções de \mathcal{S} quanto as suas derivadas decrescem no infinito mais rapidamente que qualquer potência negativa de $|x|$

Exemplo V.1.1 - É claro que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}$ e se $\phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\phi_n \rightarrow 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então $\phi_n \rightarrow 0$ em \mathcal{S} . Uma função de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que não tem suporte compacto é $f(x) = e^{-|x|^2}$. Qualquer derivada de $f(x)$ é da forma $D^\alpha f(x) = p_\alpha(x)f(x)$ com $p_\alpha(x)$ um polinômio, e claramente (IV.1.2) é satisfeita. É importante notar que \mathcal{S} é invariante por derivação e por multiplicação por polinômios.

Teorema V.1.1 - A transformada de Fourier é um operador contínuo de \mathcal{S} em \mathcal{S} e valem as fórmulas

$$(V.1.3) \quad \widehat{D^\alpha \phi}(\xi) = i^{|\alpha|} \widehat{\xi^\alpha \phi}(\xi), \quad \phi \in \mathcal{S}$$

$$(V.1.4) \quad \mathcal{F}(x^\alpha \phi(x))(\xi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{\phi}(\xi), \quad \phi \in \mathcal{S}$$

Demonstração - Começamos provando as fórmulas (V.1.3) e (V.1.4). Derivando sob a integral em (V.1.1) obtemos

$$D^\alpha \hat{\phi}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} (-x)^\alpha \phi(x) dx.$$

Isto é lícito em virtude das integrais serem finitas devido a estimativa (V.1.2).

Integrando por partes $|\alpha|$ vezes obtemos

$$\int e^{-ix \cdot \xi} D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int D^\alpha (e^{-ix \cdot \xi}) \phi(x) dx = \int \xi^\alpha e^{-ix \cdot \xi} \phi(x) dx.$$

O termo não integrado da integração por partes é nulo porque ϕ e todas suas derivadas são zero no infinito. Como $\mathcal{S} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ (pois se $\phi \in \mathcal{S}$ $|\phi(x)| < c(1+|x|)^{-n-1}$ para uma certa constante $c > 0$) e a transformada de uma função integrável é contínua, segue de (V.1.4) que $\hat{\phi} \in C^\infty$ quando $\phi \in \mathcal{S}$. Combinando as fórmulas (V.1.3) e (V.1.4) vemos que

$$\xi^{\alpha} D^{\beta} \hat{\phi}(\xi) = (-1)^{\beta} \mathcal{F} [D_x^{\alpha} (x^{\beta} \phi(x))] (\xi)$$

e por conseguinte $\sup |\xi^{\alpha} D^{\beta} \hat{\phi}(\xi)| \leq \|D_x^{\alpha} (x^{\beta} \phi(x))\|_1 < \infty$. Esta estimativa pode ser usada para verificar que se $\phi_j \rightarrow 0$ em \mathcal{S} , então

$$|\xi^{\alpha} D^{\beta} \hat{\phi}_j(\xi)| \leq \sup_x |(1+|x|)^{n+1} D_x^{\alpha} (x^{\beta} \phi_j(x))| \int (1+|x|)^{-n-1} dx = c_j.$$

Como $c_j \rightarrow 0$ segue que $\hat{\phi}_j \rightarrow 0$ em \mathcal{S} .

Q.E.D.

Corolário V.1.1 (Lema de Riemann-Lebesgue) - Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$

quando $|\xi| \rightarrow \infty$.

Demonstração - Se $f_N(x) = f(x)$ para $|x| < N$ e $f_N(x) = 0$ para $|x| \geq N$, é claro que $f_N(x) \rightarrow f$ em L^1 quando $N \rightarrow \infty$. Segue agora do Teorema I.2.1 aplicado a f_N , que existe uma sequência $\phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_n \rightarrow f_N$ em $L^1(\mathbb{R})$ e conseqüentemente $\hat{\phi}_n \rightarrow \hat{f}_N$ uniformemente. Como $\hat{\phi}_n \in \mathcal{S}$ todas as $\hat{\phi}_n$ tendem a zero quando $|\xi| \rightarrow 0$ e o mesmo deve acontecer com \hat{f}_N . Basta agora observar que $\hat{f}_N \rightarrow \hat{f}$ uniformemente.

Q.E.D.

Exemplo V.1.2 - Seja $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$ e tratemos de calcular $\hat{\phi}(\xi)$. Em vez de calcular a integral (V.1.1), o que pode ser feito deslocando o caminho de integração no plano complexo, usaremos um método indireto. É imediato que ϕ satisfaz a equação diferencial linear

$$(V.1.5) \quad \begin{cases} \phi'(x) + x \phi(x) = 0 \\ \phi(0) = 1 \end{cases}$$

Como $\phi \in \mathcal{S}$, aplicando \mathcal{F} a equação (V.1.5) e usando as regras do Teorema V.1.1 teremos

$$0 = i\xi \hat{\phi}(\xi) - \frac{1}{i} \frac{d\hat{\phi}}{d\xi}(\xi) = i \left(\frac{d\hat{\phi}}{d\xi}(\xi) + \xi \hat{\phi}(\xi) \right)$$

ou seja que $\hat{\phi}(\xi)$ satisfaz a mesma equação que $\phi(x)$ e por conseguinte $\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(0)\phi(\xi) = \int \phi(x)dx \cdot \phi(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}$.

Para calcular a transformada de $\phi(x) = e^{-|x|^2/2}$ em \mathbb{R}^n , escrevemos a integral V.1.1 como produto de integrais unidimensionais obtendo

$$(V.1.6) \quad \hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \phi(\xi) = (2\pi)^{n/2} \exp(-|\xi|^2/2).$$

Teorema V.1.2 - A transformação de Fourier é continuamente inversível de \mathcal{S} em \mathcal{S} e

$$(V.1.7) \quad \mathcal{F}^{-1}\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \phi(\xi) d\xi, \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

Demonstração - Quando $\phi = \hat{\psi}$ devemos obter em (V.1.7)

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} dx \left(\int e^{-iy \cdot \xi} \psi(y) dy \right).$$

Nesta integral não podemos trocar a ordem de integração, já que $e^{i(x-y) \cdot \xi} \psi(y)$ não é integrável em ξ quando $\psi(y) \neq 0$. Para evitar esta dificuldade, introduzimos uma função de ξ que permitirá trocar a ordem de integração e que depois faremos convergir a 1. Serve a este propósito a função $\phi_\epsilon(x) = \phi_1(\epsilon x)$ onde $\phi_1(x) = \exp(-|x|^2/2)$.

Usando a fórmula (V.1.6), $\hat{\phi}_1 = \phi_1(2\pi)^{n/2}$ e a mudança de

variáveis $x' = \epsilon x$ na definição de $\hat{\phi}_\epsilon$, é fácil obter

$$\hat{\phi}_\epsilon(\xi) = \epsilon^{-n} \phi_1(x/\epsilon) (2\pi)^{n/2}.$$

Agora, trocando a ordem de integração na integral em baixo,

$$\begin{aligned} \int \hat{\phi}_\epsilon(\xi) e^{ix \cdot \xi} \hat{\psi}(\xi) d\xi &= \int \psi(y) dy \int e^{i(x-y) \cdot \xi} \hat{\phi}_\epsilon(\xi) d\xi \\ (V.1.8) \quad &= \int \psi(y) \hat{\phi}_\epsilon(y-x) dy = \int \psi(y+x) \hat{\phi}_\epsilon(y) dy = (2\pi)^{n/2} \int \psi(y+x) \epsilon^{-n} \phi_1(y/\epsilon) dy \\ &= (2\pi)^{n/2} \int \psi(x+z/\epsilon) \phi_1(z) dz. \end{aligned}$$

Quando $\epsilon \rightarrow 0$, $\phi_\epsilon(z) \rightarrow 1$ e $\psi(x+z/\epsilon) \rightarrow \psi(x)$. Portanto, o teorema da convergência dominada, aplicado à primeira e à última igualdades de (V.1.8), fornece

$$\int e^{ix \cdot \xi} \hat{\psi}(\xi) d\xi = \psi(x) (2\pi)^{n/2} \int \phi_1(z) dz = (2\pi)^n \psi(x)$$

o que prova (V.1.7). A demonstração da continuidade de \mathcal{F}^{-1} em \mathcal{S} é análoga à de \mathcal{F} .

Q.E.D.

Teorema V.1.3 - Se $\phi, \psi \in \mathcal{S}$, então

$$(V.1.9) \quad \int \hat{\phi} \psi dx = \int \phi \hat{\psi} dx$$

$$(V.1.10) \quad \int \phi \bar{\psi} dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{\phi} \widehat{\bar{\psi}} dx$$

$$(V.1.11) \quad \widehat{\phi * \psi} = \hat{\phi} * \hat{\psi}$$

$$(V.1.12) \quad \widehat{\phi\psi} = (2\pi)^{-n} \widehat{\phi} * \widehat{\psi}.$$

Demonstração - A primeira fórmula se obtém trocando a ordem de integração, $\int \widehat{\phi}(\xi)\psi(\xi)d\xi = \iint e^{-ix\xi}\phi(x)\psi(\xi)dx d\xi = \int \phi(x)\widehat{\psi}(x)dx$.

Para obter a segunda, basta aplicar (V.1.9) com $\psi=\alpha$ e $\widehat{\phi}=\bar{\beta}$ e observar que $\mathcal{F}^{-1}\bar{\beta} = (2\pi)^{-n}\bar{\widehat{\beta}}$ segundo decorre facilmente de (V.1.7).

A fórmula (V.1.11) pode ser obtida assim

$$\begin{aligned} \widehat{\phi*\phi}(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi} dx \int \phi(x-y)\psi(y)dy = \int \psi(y)dy \int e^{-ix\cdot\xi}\phi(x-y)dx = \\ &= \int \psi(y)dy \int e^{-i(x+y)\cdot\xi}\phi(x)dx = \psi(\xi)\phi(\xi). \end{aligned}$$

Finalmente, (V.1.12) obtém-se a partir de (V.1.11) usando a fórmula de inversão (V.1.7).

Q.E.D.

§2. A transformação de Fourier em \mathcal{S}' .

Definição V.2.1 - Um funcional linear e contínuo em \mathcal{S} é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas se denota com \mathcal{S}' .

Observemos que todo elemento de \mathcal{S}' define por restrição a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição em \mathbb{R}^n . Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (se $\alpha(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e igual a um, numa vizinhança da origem e $\phi \in \mathcal{S}$ é fácil ver que $\phi(x)\alpha(\varepsilon x) \rightarrow \phi(x)$ em \mathcal{S} quando $\varepsilon \rightarrow 0$) \mathcal{S}' pode assim ser identificado com um subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Existe um Teorema análogo aos Teoremas III.2.2 e III.2.3 para distribuições temperadas. A demonstração também é análoga e será deixada a cargo do leitor.

Teorema V.1.4 - *Seja u um funcional linear em \mathcal{S} . As seguintes condições são equivalentes*

- a) u é contínuo.
- b) existem inteiros M, m tais que

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq M \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_x |(1+|x|^2)^m D^\alpha \phi(x)|.$$

Exemplo V.2.1 - É claro que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'$. Outras distribuições temperadas são as medidas de Borel localmente finitas tais que $\int (1+|x|)^{-m} du < \infty$ para um certo m . Em particular se $f \in L^1_{loc}$ e $|f(x)| \leq A(1+|x|)^B$ quando $|x| > C$ para certas constantes positivas A, B, C então $f \in \mathcal{S}'$. Por conseguinte $L^p \subseteq \mathcal{S}'$, $1 \leq p < \infty$. Quando uma função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ está dominada por $A(1+|x|)^B$ para $|x|$ grande, dizemos que f cresce lentamente no infinito. Esta

condição é suficiente para que $f \in \mathcal{S}'$, mas não é necessária. Com efeito, $f(x) = e^x \cos(e^x)$ não cresce lentamente no infinito, porém, se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$|\langle f, \phi \rangle| = \left| \int e^x \cos(e^x) \phi(x) dx \right| = \left| \int \sin(e^x) \phi'(x) dx \right| \leq \|\phi'\|_1.$$

Isto mostra que $\phi_n \rightarrow 0$ em \mathcal{S} implica que $\langle f, \phi_n \rangle \rightarrow 0$.

Definição V.2.2 - Se $u \in \mathcal{S}'$, a transformada de Fourier \hat{u} de u , se define por

$$\langle \hat{u}, \phi \rangle = \langle u, \hat{\phi} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

Observemos que pelo Teorema V.1.1 a definição é correta e determina uma nova distribuição temperada. Segue do Teorema (V.1.2) que \mathcal{F} resulta contínua e inversível em \mathcal{S}' .

Exemplo V.2.2 - Se $u = \delta$, $\langle \delta, \phi \rangle = \langle \delta, \hat{\phi} \rangle = \hat{\phi}(0) = \int \phi(x) dx = \langle 1, \phi \rangle$, ou seja $\hat{\delta} = 1$.

Teorema V.2.1

- i) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada \hat{f} de f como distribuição temperada coincide com a transformada de f dado por (V.1.1).
- ii) Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{f}\|_2^2$
- iii) Se $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, \hat{f} é uma função C^∞ e está dada por

$$(V.2.13) \quad \hat{f}(\xi) = \langle u_x, e^{-ix \cdot \xi} \rangle$$

$$iv) \quad \text{se } u \in \mathcal{S}, \widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}, \widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \hat{u}, \hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \check{u}.$$

Demonstração - i) Se $\psi \in \mathcal{S}$ as duas definições de $\hat{\psi}$ coincidem em virtude de (V.1.9). Quando $f \in L^1$, basta tomar $\psi_j \in \mathcal{S}, \psi_j \rightarrow f$ em L^1 , para obter

$$\int \hat{f} \phi = \lim_j \int \hat{\psi}_j \phi = \lim_j \int \psi_j \hat{\phi} = \int f \hat{\phi}, \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

ii) Seja $\psi_j \in \mathcal{S}, \psi_j \rightarrow f$ em L^2 . Segue de V.1.10 que $\|\hat{\psi}_j - \hat{\psi}_k\|_2^2 = (2\pi)^n \|\psi_j - \psi_k\|_2^2$. Portanto $(\hat{\psi}_j)$ é uma seqüência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$, convergente então a uma certa $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim

$$\langle \hat{f}, \phi \rangle = \langle f, \hat{\phi} \rangle = \lim_j \langle \psi_j, \hat{\phi} \rangle = \lim_j \langle \hat{\psi}_j, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle.$$

Isto prova que $\hat{f} = g \in L^2$. Por outro lado .

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \lim_j \|\hat{\psi}_j\|_2^2 = (2\pi)^n \lim_j \|\psi_j\|_2^2 = (2\pi)^n \|f\|_2^2.$$

iii) Sejam ϕ, ϕ_ϵ como no Teorema IV.3.3 e escrevamos $u_\epsilon = u * \phi_\epsilon$. Como $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ $u_\epsilon \rightarrow u$ em \mathcal{E}' e em particular $u_\epsilon \rightarrow u$ em \mathcal{S}' . Por conseguinte $\hat{u} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{u}_\epsilon$. Ora $\hat{u}_\epsilon \in L^1$ e decorre de i) que

$$\hat{u}_\epsilon(\xi) = \langle u * \phi_\epsilon, e^{-ix \cdot \xi} \rangle = \langle u, \check{\phi}_\epsilon * e^{-ix \cdot \xi} \rangle = \hat{\phi}(\epsilon \xi) \langle u, e^{-ix \cdot \xi} \rangle.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ segue que $\hat{\phi}(\varepsilon\xi) \rightarrow 1$ em $C^\infty(\mathbb{R})$ e então $\hat{u}_\varepsilon(\xi) \rightarrow \langle u, e^{-ix \cdot \xi} \rangle$ em C^∞ , em particular $\hat{u}_\varepsilon \rightarrow \langle u, e^{-ix \cdot \xi} \rangle$ em \mathcal{S}' . Pela unicidade do limite obtemos (V.2.13).

iv) As primeiras fórmulas seguem do Teorema V.1.1 e da definição de \mathcal{F} em \mathcal{S}' . A última segue da fórmula V.1.7.

Q.E.D.

Exemplo V.2.3 - É possível calcular explicitamente as transformadas de Fourier de numerosas distribuições que aparecem em análise e suas aplicações (vide [12]).

Quando $u \notin L^1$ tenta-se geralmente aproximar u com funções $u_\varepsilon \in L^1$ cujas transformadas se conhecem. Por exemplo se $u_\varepsilon(x) = H(x)e^{-\varepsilon x}$ é claro que $u_\varepsilon \in L^1$ e $u_\varepsilon \rightarrow H(x)$ em \mathcal{S}' quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por outro lado

$$\hat{u}_\varepsilon(\xi) = \int_0^\infty e^{-(\varepsilon+i\xi)x} dx = - \frac{e^{-(\varepsilon+i\xi)x}}{\varepsilon+i\xi} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\varepsilon+i\xi} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2} - i \frac{\xi}{\varepsilon^2+\xi^2}.$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$ as funções $g_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2}$ tem integral 1 e $\int_{|x|>a} g_\varepsilon d\xi \rightarrow 0$ para todo $a>0$. Por conseguinte (Exemplo IV.1.3) $\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2} \rightarrow \pi\delta$. Também é fácil ver que $\frac{\xi}{\varepsilon^2+\xi^2} \rightarrow v.p.1/\xi$. Concluimos que

$$(V.2.14) \quad \widehat{H}(\xi) = \pi\delta(\xi) - i \text{ v.p. } 1/\xi.$$

Usando o fato de que $\widehat{u} = \check{u}$ onde $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$ (veja Exemplo III.1.6) obtemos $\widehat{H} = \pi\delta + i \text{ v.p. } 1/\xi$. Então

$$(V.2.15) \quad \widehat{1} = \mathcal{F}(H + \check{H}) = 2\pi\delta$$

o que confere com $\widehat{\delta} = 1$ e a fórmula de inversão (V.1.7).

Analogamente, considerando a função "sinal de x", $\text{sn}(x) = H(x) - H(-x)$ obteremos

$$(V.2.16) \quad \widehat{\text{sn}}(x) = -2i \text{ v.p. } 1/\xi.$$

Aplicando iv) do Teorema (V.2.1) a (V.1.6) obtemos

$$(V.2.17) \quad \mathcal{F}(\text{v.p. } 1/x)(\xi) = -i\pi(H - \check{H}) = -i\pi\text{sn}(\xi).$$

Exemplo V.2.4 - Às vezes é possível aplicar as fórmulas do Teorema V.2.1 para obter uma transformada de integração difícil. Por exemplo, se $f(x) = \ln|x|$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, cresce lentamente no infinito e portanto $f \in \mathcal{S}'$. Como $f'(x) = \text{v.p. } 1/x$ (capítulo II, §2) podemos aplicar (V.2.17) para obter

$$(V.2.18) \quad i\xi\widehat{f}(\xi) = i\pi\text{sn}(\xi).$$

A equação (V.2.18) para $\widehat{f}(\xi)$ constitui um problema de divisão que pode ser resolvido (Capítulo II, §3), sendo que duas soluções

de (V.1.18) diferem num múltiplo de δ . Se $a > 0$, é fácil ver que a fórmula

$$(V.2.19) \quad \langle h_a, \phi \rangle = - \int_{|\xi| < a} \frac{\pi(\phi(\xi) - \phi(0)) d\xi}{|\xi|} - \int_{|\xi| \geq a} \frac{\pi\phi(\xi) d\xi}{|\xi|}, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

define uma distribuição que satisfaz a equação $\xi h_a(\xi) = -\pi \operatorname{sn}(\xi)$. Um cálculo simples mostra que se $a, b > 0$

$$h_a - h_b = 2\pi \ell n\left(\frac{a}{b}\right) \delta.$$

Isto mostra que h_a é a solução geral do problema de divisão e por conseguinte

$$\hat{f}(\xi) = h_a(\xi)$$

para um certo $a > 0$. O valor de a fica determinado pela equação $\langle \ell n|x|, \hat{\phi} \rangle = \langle h_a, \phi \rangle$, $\phi \in \mathcal{S}$, tomando $\phi = \exp(-x^2/2)$ cuja transformada é conhecida.

Exemplo V.2.5 - Consideremos um exemplo mais elaborado. Pretendemos calcular $\hat{f}(\xi)$ quando $f(x) = \operatorname{Th}x = (e^x - e^{-x}) (e^x + e^{-x})^{-1}$.

Para começar observemos que se $\log z$ é o ramo do logaritmo definido no plano complexo menos o eixo imaginário negativo, que é real nos reais positivos, $a \in \mathbb{C}$, $-1 < \operatorname{Re} a < 1$ e $z^a = \exp(a \log z)$, então

$$(V.2.20) \quad A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^a}{z^2+1} dz = \pi e^{i\frac{\pi}{2}a}.$$

A integral (V.2.20) pode ser calculada por resíduos, por integração de função z^a/z^2+1 no contorno da região do semiplano $\text{Im } z > 0$, limitada pelos círculos $|z|=\epsilon$ e $|z|=R$, $\epsilon < 1 < R$. Quando $\epsilon \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$, a integral nos arcos de circunferência tende para zero pela escolha de $\text{Re } a$. Todas as regiões contem um único polo simples do integrando, $z=i$, e obtemos assim (V.2.20).

Consideremos agora

$$A_1 = \int_0^{\infty} \frac{z^a}{z^2+1} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ta}}{e^{2t}+1} e^t dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ta}}{e^t+e^{-t}} dt, \quad (z=e^t)$$

(V.2.21)

$$A_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{z^a}{z^2+1} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-z)^a}{z^2+1} dz = e^{i\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ta}}{e^t+e^{-t}} dt, \quad (z=-e^t)$$

Segue de (V.2.20) e (V.2.21) que

$$(V.2.22) \quad F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ta}}{e^t+e^{-t}} dt = \pi \frac{e^{i\frac{\pi}{2}a}}{1+e^{i\pi a}}, \quad -1 < \text{Re } a < 1.$$

Podemos definir $f_{\epsilon}(x) = \frac{e^{\epsilon x} - e^{-\epsilon x}}{e^x + e^{-x}}$, $0 < \epsilon < 1$. É claro que $f_{\epsilon} \in L^1$

e $f_\varepsilon \rightarrow f$ em \mathcal{S}' quando $\varepsilon \rightarrow 1$. A transformada $f_\varepsilon(x)$ se calcula facilmente por meio de (V.2.22)

$$\hat{f}_\varepsilon(\xi) = F(\varepsilon - i\xi) - F(-\varepsilon - i\xi) \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Quando $\xi \neq 0$, $\hat{f}_\varepsilon(\xi)$ converge pontualmente a

$$F(1 - i\xi) - F(1 - i\xi) = 2\pi i e^{\frac{\pi\xi}{2}} (1 - e^{\pi\xi}) = -i\pi (\text{Sh} \frac{\pi\xi}{2})^{-1}.$$

Isto mostra que $\hat{f}(\xi) + i\pi \text{ v.p. } (\text{Sh} \frac{\pi\xi}{2})^{-1}$ é uma distribuição com suporte contido na origem, ou seja uma combinação linear de derivadas de δ . Por outro lado é claro que $f(x) - \text{sn}(x)$ (veja Exemplo V.2.13) é integrável e portanto

$$\hat{f}(\xi) - \widehat{\text{sn}}(\xi) = \hat{f}(\xi) + 2i \text{ v.p. } 1/\xi$$

deve ser contínua. Finalmente $2/\xi - \pi (\text{Sh} \frac{\pi\xi}{2})^{-1}$ é contínua, já que as partes singulares de $2/\xi$ e $\pi (\text{Sh} \frac{\pi\xi}{2})^{-1}$ se cancelam. Concluimos que $\hat{f}(\xi) + i\pi \text{ v.p. } (\text{Sh} \frac{\pi\xi}{2})^{-1}$ é contínua e portanto identicamente zero, ou seja

$$(V.2.23) \quad \widehat{\text{Th}}_\xi = -i\pi \text{ v.p. } (\text{Sh} \frac{\pi\xi}{2})^{-1}.$$

Existem classes de distribuições para as quais é possível dar uma descrição bastante detalhada de suas transformadas

de Fourier. Por exemplo as distribuições homogêneas, generalização das funções homogêneas estão nesta situação. O leitor interessado pode consultar [5], p.154 e [2], p.49.

§3. Transformação parcial de Fourier.

Consideremos um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e uma função $f(t,x) \in L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ $t=(t_1, \dots, t_n) \in \Omega$, $x=(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Se para todo compacto $K \subset \Omega$ a integral

$$(V.3.1) \quad \int_K dt \int_{\mathbb{R}^N} |f(t,x)| dx < \infty$$

é finita, segue do teorema de Fubini que $f(t,x)$ é integrável em x para quase todo $t \in \Omega$ e podemos definir a transformada de Fourier de $f(t,x)$ nas variáveis x :

$$(V.3.2) \quad \tilde{f}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix \cdot \xi} f(t,x) dx.$$

Além disso, $\tilde{f}(t,x) \in L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}^N)$. Em outras palavras, a transformada de Fourier parcial se obtém congelando algumas das variáveis, considerando a função como função das variáveis restantes e exigindo crescimento moderado (integrabilidade) nessas variáveis. Para definir a transformada parcial de Fourier

de uma distribuição não podemos agir exatamente da mesma forma, já que em geral, "fixar uma variável" carece de sentido para uma distribuição. É natural, então, considerar funções C^∞ com suporte compacto em t e de decrescimento rápido em x , já que este espaço será invariante por $\phi \longmapsto \tilde{\phi}$. Neste parágrafo $\pi: \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \Omega$ denotará a projeção $(t, x) \longmapsto t$, D_t significará derivação em relação às variáveis $t = (t_1, \dots, t_n)$ e D_x derivação em relação a x .

Definição V.3.1 - Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $n, N \geq 1$. Denotamos com $C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ o subespaço de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ das funções ϕ tais que $\pi S(\phi)$ é um compacto de Ω . Dizemos que uma seqüência $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ converge para zero em $C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$, e escrevemos $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ se existe um compacto fixo $K \subseteq \Omega$ tal que

$$(V.3.3) \quad S(\phi_j) \subseteq K \times \mathbb{R}^N$$

e $\phi_j \longrightarrow 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$.

Teorema V.3.1 - A transformada parcial de Fourier, definida por (V.3.2) é um operador continuamente inversível em $C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ e valem as fórmulas

$$(V.3.4) \quad \widetilde{D_x^\alpha \phi}(t, x) = \xi^\alpha \tilde{\phi}(t, \xi) \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$$

$$(V.3.5) \quad (\widetilde{x^\alpha \phi}(t, x))(t, \xi) = (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \widetilde{\phi}(t, \xi) \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$$

$$(V.3.6) \quad D_t^\beta \widetilde{\phi} = D_t^\beta \widetilde{\phi} \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$$

$$(V.3.7) \quad \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^N} \widetilde{\phi} \psi \, dt dx = \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^N} \phi \widetilde{\psi} \quad \phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$$

Demonstração - A transformada inversa está dada por

$$(V.3.8) \quad f(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int e^{ix \cdot \xi} \widetilde{f}(t, \xi) \, d\xi$$

As fórmulas (V.3.4) e (V.3.5) decorrem do Teorema V.1.1 (aplicado nas variáveis x) e (V.3.6) é obtido por derivação sob o sinal de integração. Estas fórmulas permitem provar, como foi feito no Teorema (V.3.1) que $\phi \longmapsto \widetilde{\phi}$ e portanto também sua inversa são contínuas. Finalmente, aplicando (V.1.9) obtemos, para cada t fixo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\phi}(t, x) \psi(t, x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(t, x) \widetilde{\psi}(t, x) \, dx,$$

e integrando agora em relação a t obtemos (V.3.7).

Q.E.D.

Definição V.3.2 - Um funcional linear e contínuo em $C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ é dito uma distribuição temperada em $x \in \mathbb{R}^N$. O espaço das distri

buições temperadas em x se denota $\mathcal{D}'(\Omega; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$.

Observemos que todo funcional de $\mathcal{D}'(\Omega; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$ define, por restrição a $C_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ uma única distribuição em $\Omega \times \mathbb{R}^N$. A unicidade segue da densidade de $C_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ em $C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$. Isto permite considerar $\mathcal{D}'(\Omega; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$ como um subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}^N)$.

Exemplo V.3.1 - Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$, a restrição de u a $C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$ é uma distribuição temperada em x . Em particular

$$\mathcal{E}'(\Omega \times \mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)).$$

Se μ é uma medida de Borel localmente finita e tal que para todo compacto $K \subset \Omega$, e para um certo m $\iint_{K \times \mathbb{R}^N} (1+|x|)^{-m} d\mu < \infty$, então μ é uma distribuição temperada em x .

Definição V.3.3 - Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$, a transformada parcial de Fourier \tilde{u} se define por

$$\langle \tilde{u}, \phi \rangle = \langle u, \tilde{\phi} \rangle \quad \text{se } \phi \in C_c^\infty(\Omega; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)).$$

É claro que, como acontece no caso da transformação de Fourier, a transformada parcial de Fourier mantém suas propriedades formais quando estendida a $\mathcal{D}'(\Omega; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$. Deixamos a cargo do leitor a formulação da demonstração do análogo do Teorema V.2.1 para a transformada parcial.

Exemplo V.3.2 - Consideremos $u = \delta = \delta(t, x)$ em \mathbb{R}^2 que é claramente temperada em x . Então

$$\langle \tilde{\delta}, \phi \rangle = \langle \delta, \tilde{\phi} \rangle = \tilde{\phi}(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(0, x) dx.$$

Esta distribuição pode ser denotada $\delta(t)$ para significar que atua como δ só em t . Na segunda variável atua como a função 1 (integração simples). Observemos que $S(\delta) = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Exercícios

- 1) Calcular a transformada de Fourier da função $e^{-x^2/2}$ por integração.

Sugestão - Escrevendo $z = x + i\xi$, $\int e^{-ix\xi - \frac{x^2}{2}} dx = \int e^{-\frac{z^2}{2} - \frac{\xi^2}{2}} dz$. Usar o teorema de Cauchy.

- 2) Se f, g são funções de \mathcal{S} $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$. O que acontece no caso $f, g \in \mathcal{E}'$? E no caso $f \in \mathcal{E}', g \in \mathcal{S}'$?

- 3) Usar o lema de Riemann-Lebesgue para provar que se $u \in \mathcal{S}', \widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $|\xi| \widehat{u}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\frac{\partial u}{\partial x^j}(x) \longrightarrow 0$ quando $|x| \longrightarrow \infty$, $j = 1, \dots, n$.

- 4) Considere as equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \phi'(x) + ix\phi(x) = 0 \\ \phi(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \psi'(x) - ix\psi(x) = 0 \\ \psi(0) = 1 \end{cases}$$

e use-as para calcular $\mathcal{F}(e^{-i\frac{x^2}{2}})$, $\mathcal{F}(e^{i\frac{x^2}{2}})$.

- 5) Demonstre o Teorema V.1.4.

- 6) Achar as transformadas de Fourier das seguintes distribuições δ_a (δ concentrado em $x=a$), e^{ix} , $\cos x$, $\sin x$.

- 7) Seja $H^1 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tal que } \frac{d}{dx}f \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$ onde $\frac{df}{dx}$ deve ser entendida no sentido das distribuições. Provar que se $u \in \mathcal{S}$ então $u \in H^1$ se e somente se $\hat{u}(\xi)(1+\xi^2)^{1/2} \in L^2(\mathbb{R})$.

- 8) Usar $\widehat{v.p.}(\frac{1}{x})(\xi) = -i\pi \operatorname{sen}(\xi)$ para avaliar a integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi$

- 9) Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ definida por

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s^2, s) ds.$$

Provar que u é temperada na primeira variável e calcular

a transformada de Fourier parcial nessa variável. Que acontecê se trocarmos a primeira variável pela segunda?

- 10) Seja K um compacto de \mathbb{R}^n , χ sua função característica. Provar que $\hat{\chi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e mostrar com um exemplo que em geral $\hat{\chi} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Capítulo VI

§1. Os teoremas de Paley-Wiener.

As fórmulas do Teorema V.2.1 permitem provar que se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $x^j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $j=1, \dots, n$ então $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi^j}$ existe no sentido clássico e é contínuo. Com efeito, $\hat{f}(\xi)$ é contínua e sua derivada em relação a ξ^j no sentido das distribuições é contínua por ser transformada de função integrável $x^j f(x)$. É suficiente agora aplicar o Teorema II.2.1 para provar nossa afirmação. Mais geralmente, se $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq m$ segue que $\hat{f} \in C^m(\mathbb{R}^n)$. Neste sentido a transformação de Fourier converte "decréscimo no infinito" em regularidade. Heuristicamente, se $x^\alpha f(x)$ é integrável, $f(x)$ deve tender a zero no infinito para compensar o crescimento de x^α . Isto, é claro, não deve entender-se literalmente já que é possível que $f(x)$ seja integrável e ainda $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Observações análogas valem para a transformada inversa.

Quando f tem suporte compacto (que é o máximo que se pode pedir em matéria de tender a zero no infinito) obtém-se a máxima regularidade. Isto será estudado com maior detalhe nos Teoremas VI.1.1 e VI.1.2 que são conhecidos com o nome genéri-

co de teoremas de Paley e Wiener.

Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, \hat{u} é a função C^∞ dada por $\hat{u}(\xi) = \langle u_x, e^{-ix \cdot \xi} \rangle$. Existe uma maneira natural de estender $\hat{u}(\xi)$ de \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n : se $\zeta = \xi + i\eta$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ e $x \cdot \zeta = x^1 \zeta_1 + \dots + x^n \zeta_n$, a função $\hat{u}(\zeta) = \langle u_x, e^{-ix \cdot \zeta} \rangle$ está bem definida em \mathbb{C}^n . Se escrevemos

$$e_j(x, \zeta) = \sum_{k=0}^j \frac{(-ix \cdot \zeta)^k}{k!}$$

é claro que $e_j(x, \zeta) \rightarrow \exp(-ix \cdot \zeta)$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Então, $\hat{u}(\zeta) = \lim_j \langle u, e_j(x, \zeta) \rangle$. Ora, é claro $e_j(x, \zeta)$ é um polinômio em (x, ζ) e por conseguinte $\langle u, e_j(x, \zeta) \rangle$ é um polinômio em ζ . Além disso, u verifica uma estimativa do tipo (III.2.1) (Teorema II.2.2) para certos inteiros positivos C, m e um certo K compacto que podemos supor contido numa bola de centro 0 e raio R . Em consequência

$$\begin{aligned} \text{(VI.2.1)} \quad \left| \sum_{k=0}^{\infty} \langle u_x, \frac{(-ix \cdot \zeta)^k}{k!} \rangle \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \langle u_x, \frac{(-ix \cdot \zeta)^k}{k!} \rangle \right| \leq \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{|x| \leq R} |D_x^\alpha (-ix \cdot \zeta)^k / k!|. \end{aligned}$$

Para estimar o membro direito de (VI.2.1) convem observar que $|D^\alpha(-ix.\zeta)^k| = k(k-1)\dots(k-|\alpha|+1)|x.\zeta|^{k-|\alpha|}|\zeta^\alpha|$ se $|\alpha| \leq k$, e zero se $|\alpha| > k$. Por conseguinte,

$$(VI.2.2) \quad \sup_{|x| \leq R} |D^\alpha(-ix.\zeta)^k/k!| < \frac{R^{k-|\alpha|}}{(k-|\alpha|)!} |\zeta|^k.$$

As estimativas (VI.1.1) e (VI.1.2) implicam f\u00e1cilmente que os polin\u00f4mios $\langle u_x, e_j(x, \zeta) \rangle$ convergem para $\hat{u}(\zeta)$ uniformemente em compactos de \mathbb{C}^n . Isto mostra que $\hat{u}(\zeta)$ \u00e9 uma fun\u00e7\u00e3o holomorfa em \mathbb{C}^n , ou seja uma fun\u00e7\u00e3o inteira.

Defini\u00e7\u00e3o VI.1.1 - Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. A fun\u00e7\u00e3o inteira $\hat{u}(\zeta) = \langle u_x, e^{-ix.\zeta} \rangle$ \u00e9 dita a transformada de Fourier-Laplace de u . Sua restri\u00e7\u00e3o a \mathbb{R}^n \u00e9 a transformada de Fourier de u .

Observemos que a transforma\u00e7\u00e3o de Fourier-Laplace tem propriedades an\u00e1logas \u00e0 de Fourier em rela\u00e7\u00e3o \u00e0 deriva\u00e7\u00e3o, convolu\u00e7\u00e3o, etc.

Teorema VI.1.1 (Paley-Wiener) - Uma fun\u00e7\u00e3o $U(\zeta)$ inteira em \mathbb{C}^n \u00e9 transformada de Fourier-Laplace de uma distribui\u00e7\u00e3o $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ com $S(u) \subseteq \{x \mid |x| \leq R\}$ se e somente se existem constantes C e N tais que

$$(VI.1.3) \quad |U(\zeta)| \leq C (1+|\zeta|)^N \exp(R|\operatorname{Im} \zeta|).$$

Teorema VI.1.2 - Uma função inteira $U(\zeta)$ em \mathbb{C}^n é a transformada de Fourier-Laplace de uma função $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $S(u) \subseteq \{x \mid |x| \leq R\}$ se e somente se para cada inteiro positivo N , existe uma constante C_N tal que

$$(VI.1.4) \quad |U(\zeta)| \leq C_N (1+|\zeta|)^{-N} \exp(R|\operatorname{Im} \zeta|).$$

É conveniente começar com o segundo teorema.

Demonstração do Teorema VI.1.2 - Se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ já vimos que $\hat{u}(\zeta)$ é uma função inteira. Por outro lado

$$(VI.1.5) \quad |\hat{u}(\zeta)| \leq \int_{|x| \leq R} |e^{-ix \cdot \zeta}| |u(x)| dx \leq \|u\|_1 e^{R|\operatorname{Im} \zeta|}$$

$$(VI.1.6) \quad |D_j^N \hat{u}(\zeta)| = |\zeta_j^N \hat{u}(\zeta)| \leq \|D_j^N u\|_1 e^{R|\operatorname{Im} \zeta|} \quad j=1, \dots, n$$

Somando (VI.1.5) e (VI.1.6) com $j=1, 2, \dots, n$ obtemos $(1+|\zeta_1|^N + \dots + |\zeta_n|^N) \hat{u}(\zeta) \leq \text{constante} \cdot e^{R|\operatorname{Im} \zeta|}$. Como $(1+|\zeta|)^N \leq B(1+|\zeta_1|^N + \dots + |\zeta_n|^N)$ para uma certa constante que só depende de N , a condição (VI.1.4) é necessária para que $U = \hat{u}$ com $u \in C_c^\infty(|x| \leq R)$.

Suponhamos agora que $U(\zeta)$ satisfaz (VI.1.4). Quando $\zeta = \xi \in \mathbb{R}^n$, esta estimativa mostra que para qualquer $\ell \in \mathbb{N}^n$, $\xi_j^\ell U(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, $|\xi^\ell U(\xi)| \leq C_N |\xi|^\ell (1+|\xi|)^{-N} \leq C_N (1+|\xi|)^{|\ell|-N}$, e o membro

direito é integrável se $|\ell| - N < -n$. Então $\mathcal{F}^{-1}(U/\mathbb{R}^n)$ é C^∞ . Escrevamos $u(x) = \mathcal{F}^{-1}(U/\mathbb{R}^n)$ e provemos que é nulo se $|x| > R$. Seja $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ e consideremos a integral em uma variável

$$(VI.1.7) \quad I_A = \int_{-A}^A e^{ix_1 \zeta_1} U(\zeta) d\zeta_1.$$

Considerando a integral da função analítica da variável ζ_1 $h(\zeta_1) = \exp(ix_1 \zeta_1) U(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ no contorno do retângulo de vértices $-A, A, A+i\eta_1, A+i\eta_1$, vemos que

$$(VI.1.8) \quad I_A = \int_0^{\eta_1} h(-A+it) dt + \int_{-A}^A h(\xi_1+i\eta_1) d\xi_1 + \int_{\eta_1}^0 h(A+it) dt$$

Quando $A \rightarrow \infty$ a primeira e a terceira integrais do segundo membro de VII.1.8 tendem para zero em virtude de (VI.1.4) e combinando (VI.1.7) e (VI.1.8) obtemos

$$(VI.1.9) \quad \int e^{ix_1 \eta_1} e^{ix \cdot \xi} U(\xi_1+i\eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 = \int e^{ix \cdot \xi} U(\xi) d\xi_1.$$

Reiterando o argumento nas demais variáveis é possível obter

$$(VI.1.10) \quad \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot (\xi+i\eta)} U(\xi+i\eta) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} U(\xi) d\xi = u(x).$$

Usando mais uma vez (VI.1.4) com $N=n+1$, concluímos que

$$(VI.1.11) \quad |u(x)| \leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-x \cdot \eta} e^{R|\eta|} (1+|\xi|)^{-n-1} d\xi = C e^{R|\eta|-x \cdot \eta}$$

Tomando $\eta = tx$, $|u(x)| \leq C e^{t|x|(R-|x|)}$ e assim $u(x) = 0$ quando $|x| > R$ como é fácil comprovar fazendo $t \rightarrow \infty$. Finalmente, resta verificar que $\hat{u}(\zeta) = U(\zeta)$. Para isso observemos que se $\zeta = \xi + i\eta$, a fórmula (VI.1.10) pode escrever-se.

$$(VI.1.12) \quad u(x) = e^{-x \cdot \eta} \mathcal{F}^{-1}[U(\xi + i\eta)](x)$$

$$\text{Então, } \hat{u}(\xi + i\eta) = \mathcal{F}(e^{x \cdot \eta} u(x))(\xi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}U(\xi + i\eta)) = U(\xi + i\eta).$$

Q.E.D.

Observação VI.1.1 - Na demonstração anterior poderíamos ter evitado o cálculo para verificar que $\hat{u}(\zeta) = U(\zeta)$ observando que duas funções inteiras em \mathbb{C}^n que coincidem em \mathbb{R}^n são idênticas. Isto se prova sem dificuldade por indução no número de variáveis. O que permite esta demonstração é a situação especial do subespaço real de dimensão real n \mathbb{R}^n dentro de \mathbb{C}^n . Por exemplo $F = \mathbb{C} \times \{0\}$ também é um subespaço de \mathbb{C}^2 de dimensão real 2, entretanto as funções inteiras $h(z_1, z_2) = z_1 z_2$, $g(z_1, z_2) = 0$ coincidem em F sem ser idênticas.

Demonstração do Teorema VI.1.1 - Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $S(u) = \{|x| \leq R\}$. A estimativa (III.2.1) do Teorema III.2.2 mostra que para cer -

tos inteiros positivos C, m

$$(VI.1.13) \quad |\langle u, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha \phi|, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Seja $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ igual a 1 em $(-\infty, \frac{1}{2})$ e zero em $(1, \infty)$. Então a função $\phi_\zeta(x) = \alpha(|\zeta|(|x| - R)) \exp(-ix \cdot \zeta) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ se $\zeta \neq 0$ e coincide com $\exp(-ix \cdot \zeta)$ numa vizinhança de $S(u)$. Então

$$(VI.1.14) \quad |\hat{u}(\zeta)| = |\langle u_x, e^{-ix \cdot \zeta} \rangle| = \langle u, \phi_\zeta \rangle \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha \phi_\zeta|.$$

Ora, se $x \in S(\phi_\zeta)$ segue que $|x| \leq R + \frac{1}{|\zeta|}$ e por conseguinte

$$\sup_{S(\phi_\zeta)} |e^{-ix \cdot \zeta}| \leq e^{R|\operatorname{Im} \zeta| + 1}. \text{ Esta observação permite dominar } \sup |D^\alpha \phi_\zeta|$$

com $e^{R|\operatorname{Im} \zeta|} (1 + |\zeta|)^{|\alpha|}$. Isto mostra que $|\hat{u}(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^m e^{R|\operatorname{Im} \zeta|}$ e a condição (VI.1.3) é necessária para que $U(\zeta) = \hat{u}(\zeta)$ com $S(u) \subseteq \{|x| \leq R\}$.

Para provar que (VI.1.3) é suficiente, observemos que U/\mathbb{R}^n está dominada por um polinômio. Isto mostra que $U/\mathbb{R}^n \in \mathcal{S}'$ e por conseguinte existe $u \in \mathcal{S}'$ tal que $\hat{u} = U/\mathbb{R}^n$. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi \geq 0$, $\int \phi = 1$, $S(\phi) = \{|x| \leq 1\}$, $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi(x/\varepsilon)$, $u_\varepsilon = u * \phi_\varepsilon$. Temos que

$$\begin{aligned} \hat{u}_\varepsilon(\zeta) &= \langle u * \phi_\varepsilon, e^{-ix \cdot \zeta} \rangle = [u * (\phi_\varepsilon * e^{-ix \cdot \zeta})](0) = [u * (e^{ix \cdot \zeta} \hat{\phi}_\varepsilon(\zeta))](0) = \\ &= \hat{\phi}_\varepsilon(\zeta) (u * e^{ix \cdot \zeta})(0) = \hat{\phi}_\varepsilon(\zeta) \hat{u}(\zeta) = \hat{\phi}_\varepsilon(\zeta) U(\zeta). \end{aligned}$$

Usando as estimativas (VI.1.4) para $\hat{\phi}_\varepsilon(\zeta)$ e (VI.1.3) para $U(\zeta)$ vemos que para cada $\ell=1,2,\dots$ existem constantes C_ℓ tais que

$$|\hat{u}_\varepsilon(\zeta)| \leq C.C_\ell(1+|\zeta|)^{N-\ell} \exp((R+\varepsilon)\text{Im}|\zeta|).$$

Pelo Teorema VI.1.2, isto permite afirmar que $S(u_\varepsilon) \subseteq \{|x| < R+\varepsilon\}$. Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ e isto implica que $S(u) \subseteq \{|x| < R\}$.

Q.E.D.

§2. A transformada de Laplace.

A transformada de Fourier-Laplace de uma distribuição com suporte compacto u pode ser descrita da forma seguinte: a) multiplicação de u pela função $e^{\eta \cdot x}$, b) transformação de Fourier do produto $e^{\eta \cdot x}u$. Isto é possível devido a que $e^{\eta \cdot x}u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'$. Se $u \in \mathcal{D}'$ mas não tem suporte compacto $e^{\eta \cdot x}u$ não estará definida. Naturalmente, podemos estender as operações a) e b) àquelas distribuições que resultem temperadas depois de multiplicadas por $e^{\eta \cdot x}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Tal o caso de $u(x) = \exp(-|x|^2)$. Porém, isto não melhora muito a situação, já que a condição " $e^{\eta \cdot x}u \in \mathcal{D}'$ para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$ " é na prática quase tão restritiva quanto " $u \in \mathcal{E}'$ ". Entretanto, se reduzimos o conjunto de η 's para o qual $e^{\eta \cdot x}u \in \mathcal{D}'$, o conjunto de distribuições que satisfazem esta condição pode aumentar significativamente. Fixada $u \in \mathcal{D}'$, $\{\eta \in \mathbb{R}^n | e^{\eta \cdot x}u \in \mathcal{D}'\}$ é

um conjunto convexo ([23], p.300). É então natural considerar as distribuições u tais que $e^{\eta \cdot x} u \in \mathcal{S}'$, para todo $\eta \in \Gamma$ com $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Esta situação é particularmente simples quando $n=1$ pois neste caso os convexos são intervalos, e se simplifica ainda mais se consideramos distribuições suportadas em $[0, \infty)$. Chegamos assim à transformação de Laplace (em uma variável).

Quando $f(t)$ é uma função localmente integrável, tal que $e^{-at} f(t) \in L^1([0, \infty))$ para algum $a \in \mathbb{R}$, a transformada de Laplace de $f(t)$ se define por

$$(VI.2.1) \quad \mathcal{L}f(\xi+in) = \int_0^{\infty} e^{-(\xi+in)t} f(t) dt \quad \xi > a.$$

É clássico escrever $p = \xi+in$ e $F(p) = \mathcal{L}f(\xi+in)$. Se estendemos $f(t)$ por zero para $t < 0$, a integral (VI.2.1) pode escrever-se $\int_{-\infty}^{\infty}$ e assim $\mathcal{L}f(\xi+in) = \mathcal{F}(e^{-\xi t} f(t))$.

Definição VI.2.1 - Denotamos \mathcal{D}'_+ o espaço $\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}); S(u) \subseteq [0, \infty)\}$.

Definição VI.2.2 - Dizemos que $u \in \mathcal{D}'_+$ é transformável Laplace se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $e^{-at} u \in \mathcal{S}'$. Neste caso definimos

$$(VI.2.2) \quad \mathcal{L}u(\xi+in) = \mathcal{F}(e^{-\xi t} u)(\eta) \quad , \quad \xi > a.$$

O número $a_0 = \inf\{a \mid e^{-at}u \in \mathcal{S}'\}$ é chamado *abscissa de convergência* de $\mathcal{L}u$.

Observemos que se $\xi > a$, $e^{-\xi t}u = e^{(a-\xi)t}e^{-at}u \in \mathcal{S}'$, pois $e^{-at}u \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{D}'_+$ e $e^{(a-\xi)t}$ é limitada numa vizinhança do suporte de $e^{-at}u$. Isto faz com que (VI.2.2) esteja definida para $\xi > a$ como uma distribuição em \mathbb{R} que depende do parâmetro ξ . Que essa distribuição é uma função de ξ , decorre do seguinte lema e justifica a notação (VI.2.2).

Lema VI.2.1 - Seja $u \in \mathcal{D}'_+ \cap \mathcal{S}'$. Então $\mathcal{L}u(p) = \mathcal{L}u(\xi + i\eta)$ é uma função analítica no semiplano $\text{Re } p > 0$, que verifica

$$(VI.2.3) \quad |\mathcal{L}u(p)| \leq C(1+|p|)^m, \quad \text{Re } p > a > 0,$$

para certas constantes positivas C, m, a .

Demonstração - Seja $\alpha(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha(t) = 0$ se $t < -1$, $\alpha(t) = 1$ se $t > \frac{1}{2}$ e escrevamos $\alpha_n(t) = \alpha(t-n)$, $n = 1, 2, \dots$, $\beta_n = 1 - \alpha_n$, $u_n = \beta_n u$. Então $u_n \rightarrow u$ em \mathcal{S}' e segue que $U_n(p) = \langle u_n, \alpha(t)e^{-pt} \rangle$ converge a $U(p) = \langle u, \alpha(t)e^{-pt} \rangle$ quando $\text{Re } p > 0$, já que $\alpha(t)e^{-pt} \in \mathcal{S}$ se $\text{Re } p > 0$. Além disso decorre do Teorema V.1.4 que existem inteiros M, m tais que

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq M \sum_{\alpha=0}^m \sup | (1+|t|)^m | D^\alpha \phi(t) | \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

Seja a um real positivo e suponhamos que $\operatorname{Re} p > 0$. Podemos escrever $U(p) - U_n(p) = \langle u - u_n, \alpha e^{-pt} \rangle = \langle u, \alpha \alpha_n e^{-pt} \rangle = \langle u, \alpha_n e^{-pt} \rangle$ já que $\alpha_n = \alpha \alpha_n$. Aplicando (VI.2.4) com $\phi = \alpha_n e^{-pt}$ e observando que $S(\alpha_n) \subseteq [n-1, \infty)$ obtemos

$$|U(p) - U_n(p)| \leq M \sum_{\alpha \leq m} \sup | (1+t)^m D^\alpha (\alpha_n e^{-pt}) | \leq$$

$$\leq M_1 \sup_{t \geq n-1} (1+t)^m (1+|p|)^m e^{-at} \leq$$

$$\leq M_1 e^{-\frac{a}{2}(n-1)} (1+|p|)^m \sup_{t \geq n-1} (1+t)^m e^{-\frac{a}{2}t} \leq$$

$$\leq M_2 (1+|p|)^m e^{-\frac{an}{2}}.$$

Isto mostra que $U_n(p) \rightarrow U(p)$ uniformemente em compactos do semi-plano $\operatorname{Re} p > 0$. Em particular, para cada $\xi > 0$ considerando $U_n(\xi + in)$ como função de n , $U_n(\xi + in) \rightarrow U(\xi + in)$ em \mathcal{D}' . Como por outro lado $U_n(\xi + in) = \mathcal{F}(e^{-\xi t} \alpha u_n) = \mathcal{F}(e^{-\xi t} u_n) \rightarrow \mathcal{F}(e^{-\xi t} u)$ em \mathcal{D}' , segue-se que $U(\xi + in) = \mathcal{F}(e^{-\xi t} u)(n) = \mathcal{L}u(p)$.

Orá, $u_n \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ e tem uma transformada de Fourier-Laplace $\hat{u}_n(p)$ que verifica $\hat{u}_n(p) = \langle u_n, e^{-ipt} \rangle = \langle u_n, \alpha(t) e^{-ipt} \rangle = U_n(ip)$. Então $U_n(p)$ é uma função inteira e $U(p)$ resulta analítica em $\operatorname{Re} p > 0$.

Finalmente, aplicando (VI.2.4) com $\phi(t) = \alpha(t)e^{-pt}$ obtemos (VI.2.3) (observe que $a > 0$ pode ser tomada arbitrariamente mas C depende de a).

Q.E.D.

Exemplo VI.2.1 - A demonstração do lema VI.2.1 fornece uma fórmula para calcular $\mathcal{L}u(p)$ quando $u \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{D}'_+$, $\mathcal{L}u(p) = \langle u, \alpha e^{-pt} \rangle$, com $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, $S(\alpha)$ limitado inferiormente e $\alpha = 1$ numa vizinhança de $S(u)$. Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ ou $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ a introdução de α não é necessária. Temos assim

$$(VI.2.5) \quad \mathcal{L}H(p) = \int_0^\infty H(t)e^{-pt} dt = 1/p \quad \text{Re } p > 0$$

$$\mathcal{L}\delta(p) = \langle \delta, e^{-pt} \rangle = 1$$

$$\mathcal{L}\delta'(p) = \langle \delta', e^{-pt} \rangle = p$$

$$\mathcal{L}\delta^{(m)}(p) = p^m$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-t_0))^\bullet(p) = e^{-t_0 p}$$

Se $a \in \mathbb{C}$, $e^{-\xi t} e^{at}$ é temperada para $\xi > \text{Re } a$ e

$$(VI.2.6) \quad \mathcal{L}(e^{at})(p) = 1/p-a, \quad \text{Re } p > \text{Re } a.$$

Mais geralmente, se $\mathcal{L}u$ existe com abscissa de convergência a_0 , $\mathcal{L}(e^{at}u)(p) = \mathcal{L}u(p-a)$, $\text{Re } p > \text{Re}(a+a_0)$.

Exemplo VI.2.2 - Seja $u \in \mathcal{D}'_+$, e suponhamos que a abscissa de convergência de $\mathcal{L}u$ é a_0 . Então $\frac{d}{dt}u$ é transformável Laplace, com a mesma abscissa de convergência e

$$(VI.2.7) \quad \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}u\right)(p) = p \mathcal{L}u(p).$$

Com efeito, se $\xi > a_0$, $e^{-\xi t}u \in \mathcal{D}'$, e portanto

$$e^{-\xi t} \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{-\xi t}u) + \xi e^{-\xi t}u \in \mathcal{D}'.$$

Se $\alpha(t)$ é a função do Lema VI.2.1 e $a_0 < a < \text{Re } p$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u')(p) &= \langle e^{-at}u', \alpha(t)e^{(a-p)t} \rangle = \\ &= \langle (e^{-at}u)', \alpha(t)e^{(a-p)t} \rangle + \langle ae^{-at}u, \alpha(t)e^{(a-p)t} \rangle = \\ &= -\langle e^{-at}u, \alpha(t)(a-p)e^{(a-p)t} \rangle + \langle ae^{-at}u, \alpha(t)e^{(a-p)t} \rangle = \\ &= p \langle e^{-at}u, e^{(a-p)t} \rangle = p \mathcal{L}u(t). \end{aligned}$$

Observe que usamos o fato de $\alpha'(t)$ se anular numa vizinhança de $S(u)$.

É interessante observar que todas as soluções homogêneas

das equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes são transformáveis Laplace desde que multiplicadas por $H(t)$. Este fato unido à relação (VI.2.7) permite resolver equações diferenciais ordinárias em forma puramente algébrica (cálculo simbólico de Heaviside). Um exemplo simples: Para resolver $u' = \delta$, $u \in \mathcal{D}'_+$, teremos $\mathcal{L}(u')(p) = p \mathcal{L}u(p) = \mathcal{L}(\delta) = 1$. Então $\mathcal{L}u(p) = \frac{1}{p}$ ou seja $u = H(t)$ em vista de (VI.2.5).

Exemplo VI.2.3 - Seja $u \in \mathcal{D}'_+$, transformável Laplace com abscissa de convergência a_0 . Então tu é transformável Laplace com a mesma abscissa e

$$(VI.2.8) \quad \mathcal{L}(tu) = - \frac{d}{dp} \mathcal{L}u.$$

Suponhamos para simplificar que $a_0 = 0$ e $\alpha(t)$ é como no Lema VI.2.1. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(tu)(p) &= \langle tu, \alpha(t)e^{-pt} \rangle = \langle u, \alpha(t)te^{-pt} \rangle = \\ &= \langle u, - \frac{d}{dp} \alpha(t)e^{-pt} \rangle = - \frac{d}{dp} \langle u, \alpha(t)e^{-pt} \rangle = - \frac{d}{dp} \mathcal{L}u(p). \end{aligned}$$

O teorema de Paley-Wiener tem um análogo para a transformação de Laplace.

Teorema VI.2.2 - Seja $U(p)$ uma função analítica no semiplano

Re $p > b$. As condições seguintes são equivalentes:

i) Existe uma distribuição $u \in \mathcal{D}'_+$ transformável Laplace tal que $\mathcal{L}u(p) = U(p)$.

ii) Existe um número real $a > b$, e inteiros positivos C, m tais que

$$(VI.2.9) \quad |U(p)| \leq C (1+|p|)^m, \quad \text{Re } p > a.$$

Demonstração - i) \implies ii). Seja a_0 a abscissa de convergência de $\mathcal{L}u$. Se $a_0 < 0$ ii) decorre do lema VI.2.1. Se $a_0 \geq 0$ $v = e^{-a_0 t} u$ tem abscissa de convergência zero e $\mathcal{L}u(p) = \mathcal{L}v(p-a_0)$. Por conseguinte

$$|\mathcal{L}u(p)| = |\mathcal{L}v(p-p_0)| \leq C(1+|p-p_0|)^m \leq C_1(1+|p|)^m \quad (\text{Re } p > a_0).$$

ii) \implies i). Seja $\xi > a$ fixo, e consideremos $u_\xi = e^{\xi t} \mathcal{F}^{-1}U(\xi+in)$, onde $\mathcal{F}^{-1}U(\xi+in)$ é a transformada de Fourier inversa de $U(\xi+in)$ como função de n , que atua como distribuição temperada na variável t . Que $n \mapsto U(\xi+in)$ é temperada é consequência da estimativa (VI.2.9). Seja $\phi(t) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e consideremos

$$(VI.2.10) \quad \langle u_\xi, \phi \rangle = \langle e^{\xi t} \mathcal{F}^{-1}U(\xi+in), \phi \rangle = \langle U(\xi+in), (2\pi)^{-1} e^{\widehat{\xi t}} \phi(-n) \rangle = \\ = (2\pi)^{-1} \int U(\xi+in) \widehat{\phi}(-n+i\xi) dn =$$

$$\begin{aligned}
 &= (2\pi)^{-1} \int U(\xi+i\eta) \hat{\phi}[i(\xi+i\eta)] d\eta = \\
 &= (2\pi i)^{-1} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} U(z) \hat{\phi}(iz) dz
 \end{aligned}$$

A transformada de Fourier-Laplace $\hat{\phi}$, de ϕ , é uma função inteira de tipo exponencial que satisfaz a estimativa (VI.1.4) com $\hat{\phi}(\zeta) = U(\zeta)$. Então o integrando que aparece na integral complexa de (VI.2.10) verificará

$$|U(\xi+i\eta) \hat{\phi}(-\eta+i\xi)| \leq K_N (1+|\eta|)^m (1+|\eta|)^{-N} \exp(r|\xi|) \quad , \quad N=1,2,\dots$$

Quando $N=m+2$ o teorema de Cauchy permite deslocar a reta de integração paralelamente ao eixo η sem que o resultado varie. Concluimos então que u_ξ é independente de $\xi > a$, e escrevemos $u = u_\xi$. Em particular $e^{-\xi t} u$ é temperada para todo $\xi > a$ e $\mathcal{F}(e^{-\xi t} u) = U(\xi+i\eta)$. Vejamos agora que u assim definido pertence a \mathcal{D}'_+ . Se $S(\phi) \in (-\infty, \epsilon]$, $\epsilon > 0$, e escolhemos ξ positivo e maior que a é fácil ver que

$$|\hat{\phi}(-\eta+i\xi)| = |\widehat{e^{\xi t} \phi}(-\eta)| = \left| \int_{t < -\epsilon} e^{\xi t} e^{-i\eta t} \phi(t) dt \right| \leq C_1 e^{-\xi \epsilon}.$$

Por conseguinte, usando (VI.2.10) obtemos

$$(VI.2.11) \quad |\langle u, \phi \rangle| = |\langle u_\xi, \phi \rangle| \leq C_2 (1+|\xi+i\eta|)^m e^{-\xi \epsilon} \quad , \quad \xi > a.$$

O membro da esquerda de (VI.2.11) é independente de ξ , e quando $\xi \rightarrow \infty$ o membro direito tende para zero. Concluimos que u se anula em $(-\infty, 0)$.

Q.E.D.

Observemos que a distribuição $u \in \mathcal{D}'$ tal que $\mathcal{L}u = U$ garantida pelo Teorema VI.2.1 é única pois se obtem a partir de U pela fórmula $u = e^{\xi t} \mathcal{F}^{-1}(\xi + i\eta)$.

A relação existente entre as transformadas de Laplace e Fourier permite as vezes encontrar a transformada de Fourier de uma distribuição a partir da série transformada de Laplace. Por exemplo (vide V.1.14)

$$\mathcal{F}(H(t))(n) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \mathcal{L}(H(t))(\xi + i\eta) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi + i\eta} = \pi \delta - i \text{ v.p. } \frac{1}{\eta}$$

Um grande número de transformadas de Laplace de distribuições pode achar-se em [12].

Exercícios

- 1) Prove a seguinte versão do teorema de Paley-Wiener. Uma função inteira $U(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, é a transformada de Fourier-Laplace de uma função de $L^2(\mathbb{R}^n)$ com $S(u) \subseteq \{x; |x| \leq R\}$ se e somente se existe uma constante C tal que $|U(\zeta)| \leq C e^{R|\text{Im } \zeta|}$ e

além disso $\int_{-\infty}^{\infty} |U(\xi)|^2 d\xi < \infty$.

Sugestão - Pelo Teorema VI.1.1 existe $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ $S(u) \subseteq \{|x| \leq R\}$ tal que $\hat{u}(\zeta) = U(\zeta)$. Use o Teorema V.2.1 para concluir que $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

2) A função inteira $U(z) = \text{Sen } z/z$, $z \in \mathbb{C}$ verifica as hipóteses do teorema anterior? Que pode dizer de $\mathcal{F}^{-1}(\text{Sen } x/x)$?

3) Prove o seguinte teorema de tipo Paley-Wiener para a transformada de Laplace. *Seja $U(p)$ uma função analítica no semi-plano $\text{Re } p > 0$. As condições seguintes são equivalentes*

i) Existe $M > 0$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(\xi + in)|^2 d\eta \leq M, \quad \xi > 0.$$

ii) Existe $u \in L^2(0, \infty)$ tal que $\mathcal{L}u(p) = U(p)$

Sugestão - Considere para $\xi > 0$ a distribuição $u_\xi = e^{\xi t} \mathcal{F}^{-1}U(\xi + in)$, onde \mathcal{F}^{-1} atua nas funções de η . Prove, como no Teorema VI.2.1 que u_ξ é independente de ξ e $S(u_\xi) \subseteq [0, \infty)$. Escreva $u = u_\xi$ e conclua que $e^{-\xi t} u \in L^2(0, \infty)$ e $\|e^{-\xi t} u\|_2^2 \leq M/2\pi$. Se $\phi \in C_c^\infty(0, \infty)$

$$|\langle u, \phi \rangle| = \lim_{\xi \rightarrow 0} |\langle e^{-\xi t} u, \phi \rangle| \leq \left(\frac{M}{2\pi}\right)^{1/2} \|\phi\|_2.$$

Isto prova que $u \in L^2(0, \infty)$.

- 4) Sejam $S, T \in \mathcal{D}'_+$. Provar que

$$\mathcal{L}S(p) \cdot \mathcal{L}T(p) = \mathcal{L}(S * T)(p).$$

(comparar com o Exemplo IV.3.4).

- 5) Calcular deslocando o caminho de integração no plano complexo, a integral

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-pt} dt, \quad \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

e concluir que $\mathcal{L}(H(t)t^{\alpha-1})(p) = \Gamma(\alpha)/p^\alpha$ onde o ramo de p^α é escolhido de forma de ser positivo no eixo real positivo do plano complexo.

- 6) Seja u_λ a função do Exemplo IV.2.1 que está definida $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ e coincide com $H(t)t^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$ se $\operatorname{Re} \lambda > 1$. Utilizar o exercício anterior e o princípio do prolongamento analítico para concluir que

$$\mathcal{L}(u_\lambda) = \frac{1}{p^\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

- 7) Usar os exercícios 4) e 6) para dar uma demonstração diferente do Exemplo IV.3.5.

Capítulo VII

§1. O exemplo de Chi Min-You

No capítulo I vimos a necessidade de considerar soluções generalizadas da equação $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. Entretanto mencionamos que toda solução fraca desta equação é de fato uma função C^∞ e, em particular, uma solução clássica. Neste exemplo, a introdução das distribuições facilita as operações mas não introduz novas soluções. Por outro lado há situações em que as distribuições permitem resolver equações diferenciais que não admitem solução clássica, mesmo partindo de dados bastante regulares, devido a uma perda de regularidade. No caso de equação de onda em duas variáveis $(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = 0$ com condições iniciais $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, devemos requerer que u seja de classe C^2 para que a equação seja satisfeita no sentido clássico e portanto $f(x)$ deve ser C^2 e $g(x)$ deve ser C^1 . Recíprocamente se $f \in C^2$ e $g \in C^1$ a fórmula

$$u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(\tau) d\tau$$

resolve o problema no sentido clássico. Entretanto pode acontecer que as soluções de uma certa equação não sejam diferenciá -

veis mesmo que os dados iniciais sejam tão diferenciáveis quanto a ordem de equação. O exemplo que descrevemos a seguir foi observado por Chi Min-You ([3]). Consideremos a equação

$$(VII.1.1) \quad Y_n(u) = u_{tt} - t^2 u_{xx} - (4n+1)u_x = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

com as condições iniciais

$$(VII.1.2) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= \mu(x) \\ u_t(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

onde n é um inteiro não negativo.

Consideremos os operadores diferenciais de primeira ordem

$$(VII.1.3) \quad \begin{aligned} X^+ &= \partial_t + t\partial_x \\ X^- &= \partial_t - t\partial_x. \end{aligned}$$

Um cálculo imediato mostra que

$$(VII.1.4) \quad \begin{aligned} X^+ X^- &= \partial_t^2 - t^2 \partial_x^2 - \partial_x \\ X^- X^+ &= \partial_t^2 - t^2 \partial_x^2 + \partial_x \\ [X^-, X^+] &= X^- X^+ - X^+ X^- = 2\partial_x. \end{aligned}$$

Em particular, vemos que se $n=0$, o operador (VII.1.1) pode ser

escrito assim

$$(VII.1.5) \quad Y_0 = \partial_t^2 - t^2 \partial_x^2 - \partial_x = X^+ X^-.$$

Esquecendo por enquanto as condições iniciais, vemos que toda solução de $X^- u = 0$ será também uma solução de $Y_0 u = 0$. O operador X^- é de primeira ordem com coeficientes reais e estes operadores podem ser sempre reduzidos localmente, por meio de uma mudança de variáveis, a um operador que só contém derivadas com respeito a uma variável apenas. Em nosso caso a mudança $S = x + \frac{1}{2}t^2$, $t = t'$ leva X^- ao operador $\frac{\partial}{\partial t'}$ e as soluções deste último são as funções (ou distribuições) que só dependem de $S = x^2 + \frac{1}{2}t^2$. Concluímos que dada qualquer função diferenciável $\mu(x)$, a função $u(x, t) = \mu(x + \frac{1}{2}t^2)$ satisfaz $Y_0 u = 0$ e além disso verifica as condições iniciais $u(x, 0) = \mu(x)$ $u_t(x, 0) = t\mu'(x + \frac{1}{2}t^2) \Big|_{t=0} = 0$. Obtemos assim a solução de (VII.1.1) (VII.1.2) com u tão regular quanto μ .

Agora estamos interessados em resolver $Y_0(u) = 0$, com as condições iniciais

$$(VII.1.6) \quad u(x, 0) = 0$$

$$u_t(x, 0) = v(x)$$

Para obter alguma informação neste novo problema, vamos supor que $v(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e que a solução u é temperada em x . Isto permite realizar uma transformada parcial de Fourier em relação a x e nosso problema se transforma em

$$(VII.1.7) \quad \tilde{u}_{tt} + t^2 \xi^2 \tilde{u} - i\xi \tilde{u} = 0$$

$$\tilde{u}(\xi, 0) = 0$$

$$\tilde{u}_t(\xi, 0) = \hat{v}(\xi)$$

que é uma equação diferencial ordinária em t que depende de um parâmetro ξ . Uma solução da equação está dada por $e^{-i\xi t^2/2}$ que é precisamente a transformada parcial de $u(x + \frac{t^2}{2})$ quando $u(x) = \delta$. Podemos encontrar outra solução linearmente independente da anterior pelo método de variação dos parâmetros, isto é, procurando uma solução da forma $\tilde{u}(\xi, t) = e^{-i\xi t^2/2} \tilde{v}(\xi, t)$.

Substituindo esta expressão de \tilde{u} na equação concluímos que $\tilde{v}(t, \xi)$ deve satisfazer

$$(VII.1.8) \quad \tilde{v}_{tt} + 2i\xi t \tilde{v}_t = 0.$$

Esta é uma equação de primeira ordem em \tilde{v}_t e pode ser integrada, usando as condições iniciais, para obter

$$\tilde{v}(\xi, t) = \hat{v}(\xi) \int_0^t e^{-i\xi s^2} ds,$$

ou seja

$$(VII.1.9) \quad \tilde{u}(\xi, t) = \hat{v}(\xi) \int_0^t \exp(i\xi(t^2/2 - s^2)) ds.$$

Para calcular $u(t, x)$ tomamos a transformada inversa

$$(VII.1.10) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix \cdot \xi} d\xi \int_0^t \hat{v}(\xi) \exp i\xi(t^2/2 - s^2) ds =$$

$$= \int_0^t \left(\frac{1}{2\pi} \int e^{i(x+t^2/2 - s^2)\xi} \hat{v}(\xi) d\xi \right) ds =$$

$$= \int_0^t v(x+t^2/2 - s^2) ds.$$

Uma vez obtida a solução desta forma já não é mais preciso supor que $v \in \mathcal{S}$ pois a fórmula faz sentido para qualquer função contínua. Usando o princípio de superposição de soluções concluímos que uma solução do problema

$$(VII.1.11) \quad Y_0 u = (\partial_t^2 - t^2 \partial_x^2 - \partial_x) u = 0$$

$$u(x, 0) = u(x)$$

$$u_t(x, 0) = v(x)$$

está dada por

$$(VII.1.12) \quad u(x,t) = \mu(x+t^2/2) + \int_0^t v(x+t^2/2-s^2) ds.$$

Para passar ao caso geral fazemos uso do seguinte lema.

Lema VII.1.1 - Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ satisfaz $Y_n u = 0$ então $v = X^+ u$ satisfaz $(Y_n - 2\partial_x)v = 0$.

Demonstração - Observemos que $X^+ \partial_x = \partial_x X^+$. Então

$$\begin{aligned} (Y_n - 2\partial_x)(X^+ u) &= (X^+ X^- - (4n+2)\partial_x)X^+ u = X^+ (X^- X^+ - (4n+2)\partial_x)u = \\ &= X^+ (X^- X^+ - 2\partial_x - 4n\partial_x)u = X^+ (X^+ X^- - 4n\partial_x)u = X^+ Y_n u = X^+(0) = 0. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Então para encontrar soluções de $Y_1 v = 0$ devemos partir de soluções de $Y_0 u = 0$ e aplicar X^+ a estas soluções duas vezes. Como sabemos resolver $Y_0 u = 0$ com condições iniciais arbitrárias dispomos de um número suficiente de soluções para resolver $Y_1 v = 0$ com condições iniciais também arbitrárias. Com o auxílio de lema VII.1.1 é possível provar facilmente o seguinte teorema

Teorema VII.1.1 - Seja $\mu(x)$ uma função contínua. Então a distribuição

$$(VII.1.13) \quad u(x,t) = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{\pi} t^{2k}}{k! (n-k)! \Gamma(k+\frac{1}{2})} \frac{\partial^k \mu(x+t^2/2)}{(\partial x)^k}$$

satisfaz (VII.1.1) e (VII.1.2).

Observemos que a distribuição u do Teorema VII.1.1 perde regularidade com n . Por exemplo se $u(x)=|x|$ e $n=0$ u dado por (VII.1.13) será contínua, se $n=1$ u será localmente integrável, se $n=2$ u será apenas uma medida concentrada na parábola $x+t^2/2=0$ e por conseguinte ortogonal à medida de Lebesgue, se $n=3$ u será a derivada de uma medida, etc. Em todos estes casos $SS(u)=\{2x+t^2=0\}$. Mesmo quando $\mu(x) \in C^2$ como seria clássico, a solução pode não ser contínua se $n \geq 3$. É possível provar que a solução dada pelo Teorema VII.1.1 é única. Porém isto não é consequência dos teoremas clássicos de unicidade para problemas hiperbólicos por tratar-se de um problema hiperbólico degenerado. O leitor interessado pode consultar [19] e a bibliografia ali citada.

§2. O exemplo de Grushin-Garabedian.

Os teoremas de Picard e Peano sobre equações diferenciais ordinárias dão condições muito gerais para a existência local de soluções. No caso das equações diferenciais parciais o pro -

blema adota a seguinte forma.

Definição VII.2.1 - Dizemos que o operador diferencial $P(x, D_x) =$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha \text{ com coeficientes em } C^\infty(\Omega) \text{ é localmente resolúvel}$$

em Ω se, todo ponto de Ω tem uma vizinhança U tal que para todo $f \in C_c^\infty(U)$ existe $u \in \mathcal{D}'(U)$ tal que

$$Pu = f.$$

Em 1957 Hans Lewy ([14]) apresentou o notável exemplo de um operador em \mathbb{R}^3 ,

$$(VII.2.1) \quad P = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) + i(x+iy)\partial_z$$

que não é localmente resolúvel. Isto mostra que mesmo na situação mais favorável em que o membro direito da equação $Pu=f$ se escolhe entre funções muito regulares e só se pretende uma solução local, isto é, definida numa vizinhança de um ponto e as soluções se escolhem na classe das distribuições, o problema pode não ter solução.

Descrevemos agora o exemplo de Grushin-Garabedian. Trata-se do operador

$$(VII.2.2) \quad P = \partial_x + ix\partial_y.$$

Consideremos discos D_n , $n=1,2,\dots$, fechados e disjuntos no semiplano direito do plano (x,y) com centros $(x_n,0)$, $x_n > 0$, e $x_n \rightarrow 0$. Seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma função par em relação a x , isto é $f(x,t)=f(-x,t)$, que se anula fora dos discos D_n para $x > 0$ e tal que

$$(VII.2.3) \quad \iint_{D_n} f \, dx \, dy \neq 0 \quad n=1,2,\dots$$

No exercício 4) deste capítulo está indicada uma forma de construir uma função com essas características.

Teorema VII.2.1 - Se f satisfaz às condições anteriores e P está dado por (VII.2.2), não existe solução continuamente diferenciável de $Pu=f$ em nenhuma vizinhança da origem.

A demonstração pode ser estendida ([8]) para mostrar que não existem soluções distribucionais em qualquer vizinhança da origem.

Demonstração - Suponhamos que w satisfaz à equação em alguma vizinhança Ω da origem. Decompondo $w=u+v$ como soma das partes par e ímpar em relação a x e recordando que f é par em x , vemos que a parte par da equação é

$$(VII.2.4) \quad u_x + ix u_y = f.$$

Em particular (VII.2.4) é válida em $x > 0$ e além disso $u(0,y)=0$. Na região $x > 0$, podemos introduzir as novas variáveis $s=x^2/2$, $y=y$, de forma que $\partial_s = (1/x)\partial_x$ e (VII.2.4) toma a forma

$$(VII.2.5) \quad \partial_s u + i\partial_y u = \frac{1}{\sqrt{2s}} f(\sqrt{2s}, y), \quad s > 0,$$

$$u=0 \quad \text{se} \quad s=0.$$

Então, fora dos discos D_n , u satisfaz a equação de Cauchy-Riemann, $\frac{1}{2}(\partial_s + i\partial_y)u=0$ e é portanto uma função holomorfa da variável complexa $s+iy$ (vide §1 do capítulo VIII). Como o complementar da união dos discos D_n é conexo, u é contínua em $s > 0$ e se anula em $s=0$, podemos deduzir do princípio de identidade das funções analíticas que $u \equiv 0$ fora da união dos D_n . Em particular u se anula na fronteira ∂D_n dos discos D_n . Aplicando o teorema de Green a (VII.2.4) obtemos:

$$\iint_{D_n} f \, dx \, dy = \iint_{D_n} (u_x + i x u_y) \, dx \, dy = \int_{\partial D_n} u \, dy - i x u \, dx = 0.$$

Isto contradiz (VII.2.3).

Q.E.D.

§3. Regularidade das soluções.

Em contraste com o que acontece com a equação $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$,

já vimos que soluções da equação $u_{xx} - u_{yy} = 0$ podem ser não regulares, isto é, distribuições que não são funções infinitamente diferenciáveis.

A regularidade das soluções fracas para o Laplaciano foi provada originalmente por Weyl ([28]) e resultados deste tipo são chamados freqüentemente extensões do lema de Weyl. O elemento decisivo que faz com que as soluções fracas da equação $Du = f$ sejam regulares se f é regular, é a elipticidade do operador de Laplace.

Definição VII.3.1 - Um operador diferencial $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$

definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se diz elíptico no ponto $x_0 \in \Omega$ se

$$P_m(x_0, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0) \xi^\alpha \neq 0 \text{ para todo } \xi \neq 0, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Se $P(x, D)$ é elíptico em todos os pontos de Ω , dizemos que $P(x, D)$ é elíptico em Ω .

No caso de $\Delta = -D_x^2 - D_y^2$, $\Delta_m(\xi) = -\xi_1^2 - \xi_2^2$ e vemos que Δ é elíptico. Uma extensão do lema de Weyl afirma que se $P(x, D)$ é elíptico em Ω , então

$$SS(u) = SS(P(x, D)u)$$

para qualquer $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se $P(x,D)u=f$, u é C^∞ precisamente onde f é C^∞ . Os operadores diferenciais que satisfazem esta propriedade são ditos hipoelepticos.

Definição VII.3.2 - Um operador $P(x,D)$ definido em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito hipoeleptico se $SS(Pu) \subseteq SS(u)$ para toda $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Observemos que a inclusão $SS(Pu) \subseteq SS(u)$ é válida para qualquer operador diferencial e só a outra inclusão é relevante. Em outras palavras, um operador é hipoeleptico se $u \in C^\infty(V)$ toda vez que $Pu \in C^\infty(V)$, qualquer que seja $V \subseteq \Omega$, aberto.

Exemplo VII.3.1 - O operador $\frac{d}{dx}$ é hipoeleptico em \mathbb{R} . Com efeito, se $f \in C^\infty(a,b)$, $u \in \mathcal{D}'(a,b)$ e $u'=f$, então escrevendo $g(x) = \int_c^x f(t)dt$ $a < c < b$ vemos que $(u-g)'=0$ e decorre do Teorema II.3.1 que $u=g + \text{constante}$ e portanto $u \in C^\infty(a,b)$.

Por outro lado, o operador $x \frac{d}{dx}$ não é hipoeleptico em \mathbb{R} já que $u=H(x) \notin C^\infty(\mathbb{R})$ mas $x \frac{d}{dx}H(x)=x \delta=0$. É interessante observar que $\frac{d}{dx}$ é elíptico em \mathbb{R} e $x \frac{d}{dx}$ deixa de ser elíptico em $x=0$.

Exemplo VII.3.2 - O operador das ondas $P = \frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^2$ não é hipoeleptico. Se $u(x,t)=f(x_1+t)$ com $f \in C^2$, é claro que $Pu=0$ mas $u \notin C^\infty$ se $f \notin C^\infty$. Um exemplo seria $f(x)=|x|^3$.

Exemplo VII.3.3 - O operador de Grushin-Garabedian, $P = \partial_x + ix\partial_y$ não é hipoeĺıptico. Se \mathcal{F}_1 denota a transformaçaõ parcial de Fourier em relaçaõ a y e definimos $u = \mathcal{F}_1^{-1}v$ com

$$(VII.3.1) \quad v(x, \eta) = H(-\eta) \exp(x^2\eta/2)$$

entãõ $Pu=0$ e $SS(u)=\{(0,0)\}$. Com efeito, $v(x,\eta)$ é uma funçaõ limitada, jã que $H(-\eta)=0$ se $\eta>0$ e $\exp(x^2\eta/2)\leq 1$ se $\eta\leq 0$, e admite uma transformada inversa \mathcal{F}_1^{-1} . Aplicando as regras de cãlculo para a transformaçaõ de Fourier obtemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ix\frac{\partial}{\partial y}\right)u = \mathcal{F}_1^{-1}(v_x - x\eta v) = \mathcal{F}_1^{-1}(0) = 0.$$

Quando $x\neq 0$, $v(x,\eta)$ decresce rapidamente em η e concluímos que $u \in C^\infty(\mathbb{C}(\{0\} \times \mathbb{R}))$. Quando $x=0$, $v(0,\eta)=H(-\eta)$ e $\mathcal{F}_1^{-1}(v(0,x)) = \frac{\delta(x)}{2} - \frac{i}{2\pi}$ v.p. $\frac{1}{x}$. Em particular u nãõ é C^∞ em nenhuma vizinhança da origem.

É interessante observar que P é elĺıptico quando $x\neq 0$. Com efeito $P_1(x,y,\xi,\eta) = i\xi - x\eta$ e portanto $i\xi - x\eta = 0$, $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$, implica que $\xi=0$ e $x\eta=0$. Por outro lado quando $x>0$ (ou $x<0$) uma simples mudança de variãveis, $s=x^2/2$, $y=y$, transforma P num múltiplo do operador de Cauchy-Riemann que é hipoeĺıptico (§1, Capítulo VIII).

§4. Soluções fundamentais.

Definição VII.4.1 - Seja $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, um operador

com coeficientes constantes em \mathbb{R}^n . Dizemos que $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é uma solução fundamental de P se

$$(VII.4.1) \quad P(D)(E) = \delta.$$

O conhecimento das soluções fundamentais de um operador com coeficientes constantes proporciona uma enorme informação sobre este operador, daí o nome de fundamental. Os dois teoremas que seguem ilustram esta afirmação.

Teorema VII.4.1 - Se E é uma solução fundamental de $P(D)$ e $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, a equação $P(D)u=v$ tem uma solução dada por $E*v$. Além disso, se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $P(D)u=v$, então $u=E*v$.

Demonstração - Se $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ $E*v$ está bem definida. Aplicando o Teorema VI.3.5 obtemos

$$P(D)(E*v) = (P(D)E)*v = \delta*v = v.$$

Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ então

$$u = \delta*u = P(D)E*u = P(D)(E*u) = E*P(D)u = E*v.$$

Q.E.D.

Este teorema mostra que se $P(D)$ tem uma solução fundamental, ele é localmente resolúvel. De fato, um resultado central da teoria geral das equações diferenciais parciais afirma que *todo operador diferencial com coeficientes constantes admite uma solução fundamental*. Isto foi provado pela primeira vez com toda generalidade por Ehrempreis [7] e Malgrange [16]. Portanto, somente os operadores com coeficientes variáveis podem não ser localmente resolúveis.

Teorema VII.4.2 - Se o operador com coeficientes constantes $P(D)$ admite uma solução fundamental E que é C^∞ fora da origem, então $P(D)$ é hipoeelíptico. Reciprocamente se $P(D)$ é hipoeelíptico e E é uma solução fundamental de $P(D)$, E é C^∞ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Demonstração - Seja U um aberto de \mathbb{R}^n e suponhamos que $u \in \mathcal{D}'(U)$ e $P(D)u = f \in C^\infty(U)$. Será suficiente provar que todo ponto $x_0 \in U$ tem uma vizinhança onde u é C^∞ . Seja W uma vizinhança relativamente compacta em U de x_0 , e escolhamos $g \in C_c^\infty(V)$ tal que $g=1$ em W . Podemos escrever

$$(VII.4.2) \quad P(D)(gu) = g P(D)u + v = gf + v.$$

Aplicando a regra de Leibniz ao produto gu vemos que cada parcela na expressão de v contém derivadas de g de ordem ≥ 1 e por -

tanto v se anula em W . Aplicando o Teorema VII.4.1 à equação (VII.4.2) e observando que $gu \in \mathcal{E}'$, obtemos

$$(VII.4.3) \quad gu = E*(gf) + E*v.$$

Como $gf \in C_c^\infty(U)$, $E*gf \in C^\infty$ e só resta provar que $E*v$ é regular numa vizinhança de x_0 .

Seja $\epsilon > 0$ tal que

$$V_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n, d(x, W) > \epsilon\}$$

seja uma vizinhança de x_0 e consideremos uma função $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $h(x) = 1$ se $|x| < \epsilon/2$, $h(x) = 0$ se $|x| > \epsilon$. Podemos escrever

$$(VII.4.4) \quad E*v = (hE)*v + [(1-h)E]*v.$$

De acordo com as hipóteses $(1-h)E \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e a segunda parcela do membro direito de VII.4.4 resulta C^∞ . Por outro lado, usando o Teorema IV.3.5 vemos que

$$S((hE)*v) \subseteq S(hE) + S(v) \subseteq \{|x| < \epsilon\} + S(v).$$

Como v se anula em W podemos concluir que $hE*v$ se anula em V_ϵ e por conseguinte $E*v \in C^\infty(V_\epsilon)$.

Q.E.D.

Exemplo VII.4.1 - Consideremos o operador $L = \frac{d}{dx} - a$ em \mathbb{R} , $a \in \mathbb{C}$. Se

definimos $E(x) = H(x)e^{ax}$ é claro que $E \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ e

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right)E = (H(x)e^{ax})' - aH(x)e^{ax} = e^{ax}\delta + H(x)ae^{ax} - aH(x)e^{ax} = \delta.$$

Como $SS(E) = \{0\}$, L é hipoeĺıptico. Em particular as soluções fracas de $L(u) = 0$ são funções diferenciáveis e portanto múltiplos de e^{ax} . Em particular a solução fundamental geral é

$$E(x) = (H(x) + C)e^{ax}, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Exemplo VII.4.2 - Consideremos o operador $L = \left(\frac{d}{dx}\right)^m + a_{m-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} + \dots + a_0$, $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{C}$. Seja $U(x)$ a solução da equação

$$(VII.4.5) \quad \begin{aligned} L(U) &= 0 \\ U(0) &= 0, \dots, U^{(m-2)}(0) = 0, U^{(m-1)}(0) = 1 \end{aligned}$$

e definamos $E(x) = U(x)H(x)$. Levando em conta que as derivadas até ordem $m-2$ se anulam em $x=0$, é fácil ver que

$$(VII.4.6) \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^j U(x)H(x) = H(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^j U(x) \quad \text{se } 0 \leq j < m-1$$

$$(VII.4.7) \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^m U(x)H(x) = \delta + H(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^m U(x).$$

Usando (VII.4.5), (VII.4.6) e (VII.4.7) vemos que $E(x)$ assim definida é uma solução fundamental de L . É um resultado conhecido da teoria das equações diferenciais ordinárias lineares que $U(x)$

é uma combinação linear de funções da forma $x^k e^{\lambda x}$ onde λ é uma raiz do polinômio característico, $\lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_0 = 0$, e k é um inteiro não negativo e menor ou igual que a multiplicidade de λ . Em particular $U(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $SS(E) = \{0\}$ e L é hipoeĺıptico.

Exercícios

1) Seja $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ definida por

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(-s^2/2, s) ds$$

Provar que $(\partial_t^2 - t^2 \partial_x^2 - \partial_x)T = 0$ e determinar $S(T)$ e $SS(T)$.

Sugestão - Se $\phi(x, t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $\alpha(s) = \phi_t(-s^2/2, s) + s\phi_x(-s^2/2, s)$ então

$$\langle LT, \phi \rangle = \langle T, {}^tL\phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_{tt} - s^2 \phi_{xx} + \phi_x)(-s^2/2, s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha'(s) ds = 0.$$

2) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ uma função contĺınua, isto é, se $t_n \rightarrow t_0$ $f(t_n) \rightarrow f(t_0)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Então f define uma distribuiçã o \tilde{f} em \mathbb{R}^2 da seguinte forma

$$\langle \tilde{f}, \phi(t, x) \rangle = \int \langle f(t), \phi(t, x) \rangle dt.$$

Mostrar que se $f(t) = \delta(x + t^2/2) = \text{delta}$ concentrada no ponto $x = -t^2/2$, então $\tilde{f} = T$ sendo T a distribuição do exercício anterior. Isto permite dar sentido à afirmação seguinte: T é solução de

$$(\partial_t^2 - t^2 \partial_x^2 - \partial_x) T = 0$$

$$T|_{t=0} = \delta$$

$$\partial_t T|_{t=0} = 0$$

- 3) Seja $D(x_n, r_n)$ uma seqüência de discos de centro x_n e raio r_n como na construção da função f do Teorema VII.2.1 e seja $\phi(x, y) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\phi(x, y) = 0$ se $x^2 + y^2 > 1$, e $\int \phi \neq 0$. Escrevamos $\phi_n(x, y) = \xi_n \phi(r_n^{-1}(x - x_n), r_n^{-1}y)$. Provar que se $\xi_n^{-1} = n^2 2^{-1/r_n}$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$ converge em $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ a uma função $g(x, y)$ e $S(g) \subseteq \bigcup D_n$. A função $f(x, y) = g(x, y) + g(-x, y)$ satisfaz as hipóteses do Teorema VII.2.1.
- 4) Resolver explicitamente a equação

$$(\partial_t^2 - \Delta_x)u = 0$$

$$u(x, 0) = u(x)$$

$$u_t(x, 0) = v(x).$$

- 5) Verificar quais dos seguintes operadores são elípticos:

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^2 \text{ em } \mathbb{R}^n, P = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \text{ em } \mathbb{R}^{n+1}, L = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

- 6) Provar que não existem operadores diferenciais elípticos de primeira ordem em \mathbb{R}^n se $n \geq 3$.

- 7) Provar que se P é hipoelíptico toda solução fundamental de P é C^∞ fora da origem.

- 8) Usar a expressão da primitiva de uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (Corolário II.3.2) para demonstrar que se u é soma de derivadas de ordem $\leq m$ de funções contínuas, isto é, $u =$

$$= \sum_{j=0}^m \left(\frac{d}{dx}\right)^j f_j, \quad f_j \in C^0(\mathbb{R}), \text{ e } v' = u, \text{ então } v \text{ é soma de derivadas de ordem } \leq m-1 \text{ de funções contínuas.}$$

- 9) Suponhamos que $u \in C^0(\mathbb{R})$ e $\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m + a_{m-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} + \dots + a_0(x)\right] u = f$
 $a_n, \dots, a_0, f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Provar que $u \in C^\infty(\mathbb{R})$.

- 10) Seja $x \neq 0$, $u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \exp(x^2\eta/2 + i x \eta) d\eta$. Demonstrar que

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x,y) = -i/2\pi x.$$

Capítulo VIII

§1. O operador de Cauchy-Riemann.

Neste capítulo construiremos soluções fundamentais para os operadores diferenciais clássicos.

Consideremos o operador diferencial em $R^2 = \mathbb{C}$

$$(VIII.1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Se escrevermos $u = \text{Re } u + i \text{Im } u = \alpha + i\beta$, então a equação

$$(VIII.1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

pode ser escrita em forma de um sistema de equações

$$(VIII.1.3) \quad \begin{aligned} \alpha_x &= \beta_y \\ \alpha_y &= -\beta_x \end{aligned}$$

que constituem as equações de Cauchy-Riemann para as partes real e imaginária de uma função analítica. Por isto o operador (VIII.1.1) é chamado operador de Cauchy-Riemann. Para encontrar uma solução fundamental E de $\frac{\partial}{\partial z}$ devemos resolver a equação

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\partial E}{\partial y} \right) = \delta(x, y).$$

Se admitimos que E é temperada em y , realizando uma transformação de Fourier parcial na segunda variável obtemos

$$(VIII.1.4) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} - \eta \partial \tilde{E} \right) = \delta(x),$$

já que $\tilde{\delta}(x, y) = \delta(x)$ como foi observado no Exemplo V.3.2.

Esta última equação diferencial é ordinária e depende do parâmetro η . Já vimos no Exemplo VII.4.1 como obter uma solução fundamental particular desta equação. Adicionando a esta solução particular uma solução da equação homogênea, isto é, uma função da forma $C(\eta)e^{\eta x}$ obtemos a solução fundamental geral de (VIII.1.4),

$$(VIII.1.5) \quad \tilde{E} = (2H(x) + C(\eta))e^{\eta x}.$$

E preciso agora escolher $C(\eta)$ convenientemente para que \tilde{E} resulte realmente temperada em η . Para isto será suficiente que $\tilde{E}(x, \eta)$ seja limitada, o que pode ser obtido tomando $C(\eta) = -2$ se $\eta > 0$, $C(\eta) = 0$ se $\eta \leq 0$ ou seja $C(\eta) = -2H(\eta)$. Considerando então

$$(VIII.1.6) \quad \tilde{E}(x, \eta) = 2(H(x) - H(\eta))e^{\eta x}$$

obtemos uma solução temperada de (VIII.1.4). Sua antitransformada parcial está dada por

$$(VIII.1.7) \quad E(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\eta} \tilde{E}(x, \eta) d\eta = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{\pi z} \quad (x \neq 0),$$

se convencionarmos em escrever $z=x+iy$. Observemos que $E(x,y)$ é C^∞ fora da origem e que $E(x,y) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Teorema VIII.1.1 - O operador de Cauchy-Riemann é hipoeĺiptico. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ e $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$ entˆao u é uma fun˜o holomorfa da variável complexa $z=x+iy$.

Demonstra˜o - Em virtude do Teorema VII.4.2 e (VIII.1.7) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ é hipoeĺiptico. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfaz $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$ u deve ser uma fun˜o C^∞ e satisfazer (VIII.1.2) no sentido clássico. As partes real e imaginária de u , α e β , satisfazem (VIII.1.3) e segue que u é holomorfa.

Q.E.D.

Corolário VIII.1.1 - Toda solu˜o fundamental de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$   da forma $\frac{1}{\pi z} + U(z)$ com $U(z)$ inteira.

Demonstra˜o - Se E   uma solu˜o fundamental de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ segue que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{1}{\pi z} - E(z)) = 0$ e portanto $U(z) = \frac{1}{\pi z} - E(z)$ deve ser inteira.

Q.E.D.

Vejamos uma conseq u ncia simples e clássica do teorema VIII.1.1.

Teorema VIII.1.2 - Seja u uma fun˜o contínua em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ e

analítica em $\{(x,y) \in \Omega, y \neq 0\}$. Então u é analítica em Ω .

Demonstração - Em vista do Teorema VIII.1.1 é suficiente provar que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$ no sentido das distribuições. Se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$(VIII.1.8) \quad \langle \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \phi \rangle = - \iint u \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} dx dy = - \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int_{|y| > \epsilon} u \cdot (\phi_x + i\phi_y) dy dx.$$

Integrando por partes em $\mathbb{R} \times \{(-\infty, -\epsilon) \cup (\epsilon, \infty)\}$ obtemos

$$(VIII.1.9) \quad - \int_{|y| > \epsilon} dy \int u \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} dx = \int \frac{u(x, \epsilon)\phi(x, \epsilon) - u(x, -\epsilon)\phi(x, -\epsilon)}{2} dx + \\ + \int \int_{|y| > \epsilon} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \phi dx dy = \int \frac{(u\phi)(x, \epsilon) - (u\phi)(x, -\epsilon)}{2} dx.$$

A última igualdade decorre do fato de u ser analítica em $y \neq 0$. Quando $\epsilon \rightarrow 0$, $(u\phi)(x, \epsilon) - (u\phi)(x, -\epsilon) \rightarrow 0$ dominadamente e portanto o membro direito de (VIII.1.9) tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$. Voltando a (VIII.1.8) obtemos

$$\langle \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \phi \rangle = 0 \quad \text{para todo } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Q.E.D.

A prova clássica deste teorema se utiliza do teorema de Morera que por sua vez depende da fórmula integral de Cauchy. Aqui a demonstração se reduz a uma simples integração por partes.

Corolário VIII.1.2 (Princípio de reflexão de Schwarz) - Seja Δ um disco centrado na origem de \mathbb{C} , $U(z)$ uma função contínua em $\Delta \cap \{y \geq 0\}$, real em $y=0$ e analítica em $\Delta^+ = \Delta \cap \{y > 0\}$. Então existe \tilde{U} analítica em Δ tal que $\tilde{U}/\Delta^+ = U$.

Demonstração - Basta definir $\tilde{U}(x,y) = U(x,y)$ se $y \geq 0$, $\tilde{U}(x,y) = \bar{U}(x,-y)$ se $y < 0$ e verificar que \tilde{U} assim definida satisfaz as condições do Teorema VIII.1.2.

Q.E.D.

Vejamos agora uma aplicação às funções analíticas de várias variáveis. Uma função de classe C^1 , $U(z) = U(z_1, \dots, z_n)$ definida num aberto de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ se diz uma função holomorfa se satisfaz às equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_1} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_n} &= 0 \end{aligned}$$

(VIII.1.10)

É natural então estudar a resolubilidade do problema no homogêneo, isto é, o sistema super-determinado (mais equações do que incógnitas)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_1} &= f_1 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_n} &= f_n \end{aligned}$$

(VIII.1.11)

onde $f_1, \dots, f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Se (VIII.1.12) admite uma solução concluimos que as funções f_1, \dots, f_n devem satisfazer as condições de compatibilidade

$$\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_i}$$

(VIII.1.12)

já que ambos membros de (VIII.1.12) devem ser iguais a $\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j}$.

Recíprocamente, suponhamos que f_1, \dots, f_n satisfazem (VIII.1.12) e escrevamos

$$U = \frac{1}{\pi z_1} * f_1$$

(VIII.1.13)

onde a convolução se realiza na primeira variável z_1 , e as variáveis restantes atuam como parâmetros. Suponhamos agora que $n \geq 2$ e escrevamos $z = (z_1, z')$, $z' = (z_2, \dots, z_n)$. Como $f_1(z_1, z') = 0$ se $|z'| > R$ concluimos que $U(z_1, z') = 0$ se $|z'| > R$. Seja $j \geq 2$ e consideremos

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{\partial \bar{z}_j} \left(\frac{1}{\pi z_1} * f_1 \right) = \frac{1}{\pi z_1} * \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{\pi z_1} * \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_1} = f_j,$$

onde usamos o Teorema VII.4.1 com $P(D) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}$, $E = \frac{1}{\pi z_1}$ e o fato de f_j ter suporte compacto. Isto mostra que U satisfaz às equações (VIII.1.11). Além disso, como U tem suporte compacto em relação a $j \geq 2$, $U = \frac{1}{\pi z_j} * \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{\pi z_j} * f_j$ e esta nova expressão de U mostra que U tem suporte compacto também em z_1 . Formalizando esta discussão obtemos

Lema VIII.1.1 - Se $f_1, \dots, f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $n \geq 2$, satisfazem as equações de compatibilidade (VIII.1.12), as equações (VIII.1.11) admitem uma solução $U \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Além disso, se $f_j(z) = 0$ $j=1, \dots, n$ quando $\max(|z_j|) > R$, então $U(z) = 0$ para $\max(|z_j|) > R$.

Este lema permite uma demonstração fácil do seguinte teorema de Hartogs.

Teorema VIII.1.3 - Seja $K \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ compacto e suponhamos que $n \geq 2$ e $\mathbb{C}K$ é conexo. Se U é uma função holomorfa em $\mathbb{C}K$ existe \tilde{U} inteiro em \mathbb{C}^n e tal que $\tilde{U} = U$ em $\mathbb{C}K$.

Demonstração - Seja $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ igual a 1 numa vizinhança de K e definamos $f_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} ((g-1)U)$. Observemos que $(g-1)U$ pode ser es -

tendida como função C^∞ a \mathbb{R}^{2n} se escrevermos $((g-1)U)(z)=0, z \in K$. Então as f_j satisfazem as condições do Lema VIII.1.1 e existe V tal que $\frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} = f_j$. Definamos $\tilde{U} = V+(1-g)U$. Segue da definição que $\tilde{U} \in C^\infty$ e $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \bar{z}_j} = 0$ em \mathbb{C}^n , isto é, \tilde{U} é inteira. Além disso, $\tilde{U}=U$ para $|z|$ suficientemente grande e como \mathbb{C}^K é conexo $\tilde{U}=U$ em \mathbb{C}^K .

Q.E.D.

É interessante destacar que em contraste com o que acontece numa variável, este teorema mostra que as singularidades isoladas das funções analíticas de várias variáveis são sempre evitáveis.

§2. O operador do calor

O operador do calor em \mathbb{R}^{n+1} está dado por

$$(VIII.2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)^2$$

e é usado para descrever fenômenos de transferência de calor em meios isotrópicos. O operador do calor é o paradigma dos operadores hiperbólicos.

Para encontrar uma solução da equação

$$(VIII.2.2) \quad \frac{\partial E}{\partial t} - \Delta_x E = \delta$$

realizamos uma transformação parcial de Fourier em relação a x , que transforma (VIII.2.2) em

$$(VIII.2.3) \quad \left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + |\xi|^2\right)\tilde{E} = \delta(t).$$

Uma solução fundamental da equação diferencial ordinária (VIII.2.3) que resulta temperada em ξ , será

$$(VIII.2.4) \quad \tilde{E}(t, \xi) = H(t)\exp(-t|\xi|^2).$$

Para $t > 0$, $\tilde{E}(t, \xi)$ decresce rapidamente em ξ e podemos aplicar a fórmula da inversão

$$(VIII.2.5) \quad E(t, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi - t|\xi|^2} d\xi, \quad t > a$$

Escrevendo $ix \cdot \xi - t|\xi|^2 = -t[(\xi_1 - ix^1/2t)^2 + \dots + (\xi_n - ix^n/2t)^2] - |x|^2/4t$, podemos exprimir VIII.2.5 da forma

$$(VIII.2.6) \quad E(t, x) = \frac{e^{-|x|^2/4t}}{(2\pi)^n} \int \exp[-t(\xi_1 - ix^1/2t)^2 - \dots - t(\xi_n - ix^n/2t)^2] d\xi, t > 0.$$

Esta integral é produto das integrais complexas

$$(VIII.2.7) \quad I_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\xi_j - ix^j/2t)^2} d\xi_j = \int_{-ix^j/2t}^{\infty - ix^j/2t} \exp(-t\zeta_j^2) d\zeta_j.$$

onde $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$. Deslocando o caminho de integração por meio do teorema de Cauchy podemos escrever

$$(VIII.2.8) \quad I_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\xi_j^2} d\xi_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2} \frac{ds}{\sqrt{2t}} = \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Combinando (VIII.2.6), (VIII.2.7) e (VIII.2.8) chegamos a

$$(VIII.2.9) \quad E(t, x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} H(t) \exp(-|x|^2/4t).$$

Quando $t \neq 0$, é claro que $E(t, x)$ é uma função C^∞ . Por outro lado, numa vizinhança do ponto $(0, x_0)$, $x_0 \neq 0$, a função $E(t, x)$ também é C^∞ já que $t^{-r} \exp(-|x|^2/4t)$ tende a zero quando t tende a zero pela direita, qualquer que seja o número real r . Isto permite provar que todas as derivadas de $E(x, t)$ convergem para zero quando $(t, x) \rightarrow (0, x_0)$. Em definitiva $E(t, x)$ é C^∞ fora da origem e aplicando o Teorema VII.4.2 obtemos

Teorema VIII.2.1 - *O operador do calor é hipoeĺiptico.*

Q.E.D.

Uma propriedade interessante de $E(t, x)$ é a seguinte. Se fixamos $t > 0$ vemos que, como função de x , $E(t, x)$ satisfaz

(VIII.2.10)

$$E(t,x) \geq 0$$

$$\int E(t,x) dx = 1$$

$$\int_{|x| > a} E(t,x) dx \rightarrow 0 \text{ se } t \rightarrow 0+ \text{ e } a > 0, \text{ fixo.}$$

Levando em conta estas propriedades, e o Exemplo IV.1.3 concluímos que $E(t,x) \rightarrow \delta(x)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $t \rightarrow 0+$. De fato a mesma técnica permite provar que se $f(x)$ é uma função contínua que verifica a estimativa $|f(x)| \leq A \exp(B|x|)$, podemos definir a convolução em x

$$(VIII.2.11) \quad (E*f)(x,t) = \int E(x-y,t)f(y)dy, \quad t > 0,$$

e concluir que

$$(VIII.2.12) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} (E*f)(x,t) = f(x).$$

Por outro lado, para $t > 0$

$$(\partial_t - \Delta_x)(E*f) = (\partial_t - \Delta_x)E*f = 0*f = 0$$

já que $(\partial_t - \Delta_x)E$ é nula se $t \neq 0$. Temos então

Teorema VIII.2.2 - Seja $f(x)$ contínua em \mathbb{R}^n , $|f(x)| \leq A e^{|x|^B}$ então a equação

$$(VIII.2.13) \quad \begin{cases} (\partial_t - \Delta_x)u = 0 & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

admite uma solução contínua em $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ e diferenciável em $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, definida por $E * f$ se $t > 0$.

A solução fornecida por este teorema não é única, embora haja unicidade se considerarmos soluções contínuas $u(t, x)$ que verifiquem, por exemplo, a condição de crescimento $|u(t, x)| \leq A \exp(B|x|)$. Um contraexemplo à unicidade quando $n=1$ é fornecido por

$$(VIII.2.14) \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(t) x^{2n} / (2n)!$$

$$f(t) = \exp(-1/t^2) \quad t \neq 0, \quad f(0) = 0$$

Derivando termo a termo, $u_t = u_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n+1)}(t) x^{2n} / (2n)!$ e $u(x, 0) = 0$, já que todas as derivadas de f se anulam em $t=0$. A justificação da derivação termo a termo requer um estudo mais detalhado do crescimento de $\sup |f^{(n)}(t)|$. O leitor interessado pode consultar [27], p. 48.

§3. O operador das ondas.

O operador das ondas em \mathbb{R}^{n+1} está definido por

$$(VIII.3.1) \quad \square = \partial_t^2 - \Delta_x = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^2,$$

e descreve a propagação de ondas em meios elásticos. Para encontrar uma solução fundamental podemos começar realizando uma transformação parcial de Fourier nas variáveis x para obter a equação

$$(VIII.3.2) \quad \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} + |\xi|^2 \tilde{E} = \delta(t).$$

A solução $U(t, \xi)$ da equação diferencial homogênea associada a (VIII.3.2) com valores iniciais $U(0, \xi) = 0$, $U_t(0, \xi) = 1$ é $U(t, \xi) = \text{Sen}(t|\xi|)/|\xi|$. Portanto (veja Exemplo VII.4.2) obtemos uma solução fundamental de (VIII.3.2) pela fórmula

$$(VIII.3.3) \quad \tilde{E}_+(t, \xi) = H(t) \text{Sen}(t|\xi|).$$

Esta solução é limitada, portanto temperada, e admite uma transformada parcial inversa. Outra solução fundamental interessante é dada pela fórmula

$$(VIII.3.4) \quad \tilde{E}_-(t, \xi) = -H(-t) \text{Sen}(t|\xi|).$$

Estas soluções fundamentais não são integráveis em ξ e portanto não é possível aplicar diretamente a fórmula de inversão. Entretanto, podem ser aproximadas por funções integráveis como.

$$\tilde{E}_+^\varepsilon(t, \xi) = H(t) \operatorname{sen}(t|\xi|) \exp(-\varepsilon|\xi|)$$

e obter

$$(VIII.3.5) \quad E_+(t, \xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(t) \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \tilde{E}_+^\varepsilon(t, \xi) d\xi.$$

Em geral é difícil obter fórmulas explícitas para E_+ a partir de (VIII.3.5), mas isto é possível no caso de $n=1, 2, 3$, obtendo-se as seguintes expressões

$$(VIII.3.6) \quad E_+(t, x) = \frac{1}{2} H(t-x) H(t+x) \quad , \quad n=1$$

$$(VIII.3.7) \quad E_+(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} (t^2 - |x|^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{se } |x| < t \\ 0 & \text{se } |x| \geq t \end{cases} \quad n=2$$

$$(VIII.3.8) \quad E_+(t, x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\xi|} \delta(t - |x|) \quad n=3$$

Um cálculo detalhado destas fórmulas pode ser achado em [26], p.62.

Uma conseqüência de (VIII.3.6), (VIII.3.7) e (VIII.3.8) é que para $n=1, 2, 3$

$$(VIII.3.9) \quad S(E_+(t,x)) \subseteq \{t \geq 0; |x| \leq t\}$$

$$(VIII.3.10) \quad S(E_-(t,x)) = S(E_+(-t,x)) \subseteq \{t \leq 0; |x| \leq |t|\}$$

De fato esta propriedade pode ser provada diretamente a partir da expressão (VIII.2.5) e é válida para todo n.

Vejamos agora como as soluções fundamentais, E_+ e E_- podem ser usadas para resolver o problema de Cauchy

$$(VIII.3.11) \quad \begin{aligned} \square u &= 0 && \text{em } \mathbb{R}^{n+1} \\ u(0,x) &= f(x) && \text{em } \mathbb{R}^n \\ u_t(0,x) &= g(x) && \text{em } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Para simplificar a análise podemos supor que u é temperada em x e que $f, g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$; mais tarde eliminaremos estas restrições. A transformada parcial \tilde{u} de u deve satisfazer

$$(VIII.3.12) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + |\xi|^2 \tilde{u} &= 0 \\ \tilde{u} &= \hat{f} && \text{em } t=0 \\ \tilde{u}_t &= \hat{g} && \text{em } t=0. \end{aligned}$$

A solução desta equação diferencial linear é

$$(VIII.3.13) \quad \tilde{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cos(t|\xi|) + \hat{g}(\xi) \text{Sen}(|\xi|t)/|\xi|$$

Escrevendo $\cos(t|\xi|) = \frac{\partial}{\partial t}(\text{Sen}|\xi|t/|\xi|)$, $H(t)+H(-t)=1$ e utilizando as fórmulas (VIII.3.3) e (VIII.3.4) podemos exprimir

(VIII.3.13) da seguinte forma

$$(VIII.3.14) \quad \tilde{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{E}_+ - \tilde{E}_-)(t, \xi) + \hat{g}(\xi) (\tilde{E}_+ - \tilde{E}_-)(t, \xi)$$

Decorre da fórmula de inversão que

$$(VIII.3.15) \quad u(t, x) = f * \frac{\partial}{\partial t} (E_+ - E_-) + g * (E_+ - E_-)$$

onde * indica convolução em relação à variável x . Observe que estamos usando uma extensão de (V.1.11) do Teorema V.1.3, isto é, a fórmula $\widehat{\phi * \psi} = \hat{\phi} \hat{\psi}$ ainda vale se $\phi \in \mathcal{E}'$ e $\psi \in \mathcal{S}'$.

Por outro lado, como para t fixo, E_+ e E_- tem suporte compacto em relação a x (em virtude de (VIII.3.9) e (VIII.3.10)) a fórmula (VIII.3.15) faz sentido quando f e g pertencem a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e define uma função diferenciável de t com valores em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. É natural se perguntar se neste caso, u definido por (VIII.3.15) satisfaz (VIII.3.11). Com efeito

$$\square u = f * \partial_t (\square E_+ - \square E_-) + g * (\square E_+ - E_-) = f * (\delta_t - \delta_t) + g * (\delta - \delta) = 0$$

Finalmente se f_j e g_j é uma seqüência de distribuições em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tais que $f_j \rightarrow f$ e $g_j \rightarrow g$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e escrevemos $u_j = f_j * \partial_t (E_+ - E_-) + g_j * (E_+ - E_-)$, teremos que $u_j \rightarrow u$, $u_j(x, 0) = f_j$, $\partial_t u_j(x, 0) = g_j$, e por conseguinte $u(x, 0) = \lim u_j(x, 0) = f(x)$, $\partial_t u(x, 0) = g(x)$.

Teorema VIII.3.1 - Sejam $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. O problema de Cauchy

(VIII.3.1) com condições iniciais f, g , admite a solução $u(x, t)$ dada por (VIII.3.15), que é uma função diferenciável de t com valores em $D'(\mathbb{R}^n)$.

Q.E.D.

§4. O operador de Laplace.

O operador de Laplace (ou laplaciano) em \mathbb{R}^n está definido por

$$(VIII.4.1) \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)^2.$$

As soluções de equação $\Delta u = 0$ são ditas funções armônicas. O operador é usado para descrever fenômenos em meios homogêneos de tipo estacionário. Isto se reflete na propriedade de Δ ser invariante por rotações. Mais precisamente, se $y = Tx$ é uma transformação linear ortogonal em \mathbb{R}^n dado pela matriz (a_j^m) onde o índice superior indica a fila, teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} &= \sum_{\ell} a_k^{\ell} \frac{\partial}{\partial y^{\ell}} \\ \frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2} &= \sum_{\ell, p} a_k^{\ell} a_k^p \frac{\partial^2}{\partial y^{\ell} \partial y^p} \\ \Delta_x &= \sum_k \frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2} = \sum_{\ell, p, k} a_k^{\ell} a_k^p \frac{\partial^2}{\partial y^{\ell} \partial y^p} = \sum_p \left(\frac{\partial}{\partial y^p} \right)^2 = \Delta_y \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre de que as filas de uma matriz ortogonal são vetores ortogonais e unitários.

É natural então procurar soluções fundamentais de Δ que sejam invariantes por rotações. Se procuramos soluções introduzindo uma transformada de Fourier parcial como foi feito em §1, §2 e §3 obteremos soluções não invariantes por rotações devido à escolha de uma variável privilegiada (aquela não transformada). Tentaremos então soluções fundamentais que para $x \neq 0$ possam ser expressas como $E(x) = f(|x|)$ onde $f(r)$ é uma função conveniente de uma variável. Levando em conta que $E(x)$ deve ser armônica quando $x \neq 0$ e escrevendo $|x| = r$, devemos ter para $x \neq 0$

$$\frac{\partial E}{\partial x^k} = \frac{\partial r}{\partial x^k} f'(r) = \frac{x^k}{r} f'(r)$$

$$\frac{\partial^2 E}{(\partial x^k)^2} = \frac{f'(r)}{r} + x^k \frac{\partial(f'(r)/r)}{\partial x^k} = \frac{f'(r)}{r} + (x^k)^2 \frac{f''(r)r - f'(r)}{r^3}, \quad k=1,2,\dots,n$$

Somando estas igualdades de 1 até n chegamos a

$$\Delta E = f'' + \frac{n-1}{r} f'$$

Como $\Delta E = 0$ se $x \neq 0$, $f(r)$ deve satisfazer

$$(VIII.4.2) \quad f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0, \quad 0 < r < \infty.$$

A solução geral de (VIII.4.2) é

$$(VIII.4.3) \quad f(r) = a r^{2-n} + b, \quad n \geq 3$$

$$f(r) = a \log r + b, \quad n = 2$$

onde a e b são constantes arbitrárias. Em particular notamos que definindo $E(x) = f(|x|)$ com $f(r)$ dado por (VIII.4.3), $E(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e consequentemente define uma distribuição.

Para verificar que com uma escolha adequada da constante a , $E(x)$ é realmente uma solução fundamental, é conveniente lembrar a seguinte identidade

$$(VIII.4.4) \quad \phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi = \operatorname{div}(\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi)$$

onde $\nabla \phi$ é o gradiente de ϕ e div denota a divergência.

Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(VIII.4.5) \quad \langle E, \phi \rangle = \int E(x) \phi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} E(x) \phi dx$$

e por conseguinte para provar que $\Delta E = \delta$ devemos verificar que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} E(x) \Delta \phi = \langle E, \Delta \phi \rangle = \langle \Delta E, \phi \rangle = \phi(0)$. Ora, se $B_\epsilon = \{x; \epsilon \leq |x| \leq R\}$ e

$\phi(x) = 0$ quando $|x| \geq R$, o teorema da divergência permite escrever

$$(VIII.4.6) \quad \int_{|x| \geq \epsilon} E \Delta \phi = \int_{B_\epsilon} E \Delta \phi = \int_{B_\epsilon} \operatorname{div}(E \nabla \phi - \phi \nabla E) dx = \\ = \int_{\partial B_\epsilon} (E \nabla \phi - \phi \nabla E) \cdot n \, d\sigma$$

onde n é o vetor normal unitário exterior a ∂B_ϵ e $d\sigma$ é o elemento de área em B_ϵ . Observemos que para obter (VIII.4.6) usamos que E é armônica em $|x| > \epsilon$. Como $S(\phi) \subseteq \{|x| < R\}$ só a esfera de raio ϵ participa na integral sobre ∂B_ϵ .

Se \dot{x} denota a variável em $S^{n-1} = \{|x|=1\}$ e $d\dot{\sigma}$ denota o elemento de área em S^{n-1} , $d\sigma = \epsilon^{n-1} d\dot{\sigma}$ na esfera de raio ϵ e podemos escrever

$$(VIII.4.7) \quad \int_{|x| \geq \epsilon} E \Delta \phi = \int_{S^{n-1}} [f(\epsilon) \frac{\partial \phi}{\partial n}(\epsilon \dot{x}) + f'(\epsilon) \phi(\epsilon \dot{x})] \epsilon^{n-1} d\dot{\sigma}$$

onde usamos as expressões $\nabla \phi \cdot n = \frac{\partial \phi}{\partial n}$, $\nabla E = -f'(r)n$, $-n = \dot{x}$. Quando $\epsilon \rightarrow 0$, segue de (VIII.4.3) que

$$(VIII.4.8) \quad \begin{aligned} \epsilon^{n-1} f(\epsilon) &\rightarrow 0 \\ f'(\epsilon) \phi(\epsilon \dot{x}) \epsilon^{n-1} &\rightarrow a(2-n) \phi(0) \text{ uniformemente em } S^{n-1}. \end{aligned}$$

Combinando (VIII.4.5), (VIII.4.6), (VIII.4.7) e (VIII.4.8) obtemos

$$(VIII.4.9) \quad \langle E, \Delta \phi \rangle = a(2-n) \phi(0) \int_{S^{n-1}} d\dot{\sigma}.$$

Teorema VIII.4.1 - Seja $E(x) = |x|^{2-n} / (2-n) \omega_n$ se $n \geq 3$, $E(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|$ se $n=2$, onde ω_n denota a área de S^{n-1} . Então $E(x)$ é uma solução fundamental do operador de Laplace em \mathbb{R}^n .

Demonstração - Observando que $E(x)=f(|x|)$ com $f(r)$ dado por (VIII.4.3) onde tomamos $a=1/\omega_n(2-n)$ e $b=0$, a fórmula (VIII.4.9) pode ser escrita $\langle \Delta E, \phi \rangle = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Q.E.D.

Teorema VIII.4.2 (Lema de Weyl) - *O operador de Laplace é hipoe-líptico.*

Demonstração - As soluções fundamentais dadas pelo teorema (VIII.4.1) são regulares fora da origem.

Q.E.D.

Corolário VIII.4.1 - *Duas soluções fundamentais do laplaciano, invariantes por rotações, diferem por uma constante.*

Demonstração - Sejam F, G duas soluções fundamentais de Δ tais que $F \circ T = F, G \circ T = G$ para toda transformação ortogonal T (a composição $F \circ T$ foi definida no Exemplo II.1.4). Então $f = F - G$, satisfaz $\Delta f = 0$ e $f \circ T = f$ para todo T . Como f é uma função regular, esta última condição implica que f é uma função de $|x|=r$ somente e deve satisfazer $f'' + \frac{n-1}{r} f' = 0$. Como f é contínua em $x=0$, f deve ser uma solução de (VIII.4.2) que permanece limitada quando $r \rightarrow 0$. Decorre de (VIII.4.3) que $f(r) = b = \text{cte}$.

Q.E.D.

Corolário VIII.4.2 - Se $n \geq 3$ e $g(x) = \frac{1}{|x|^2}$, $\hat{g}(\xi) = -\frac{(2\pi)^n}{(2-n)\omega_n} |\xi|^{2-n}$.

Demonstração - Observemos que se $n \geq 3$ $|x|^{-2}$ é localmente integrável e limitado quando $x \rightarrow \infty$ e em conseqüência $g \in \mathcal{S}'$ e admite uma transformada de Fourier, $\hat{g}(\xi)$. Usando as regras do cálculo (Teorema V.2.1)

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \hat{g}(\xi)}{\partial \xi_j^2} = -\mathcal{F}((x_1^2 + \dots + x_n^2)g(x))(\xi) = -\mathcal{F}(1) = -(2\pi)^n \delta$$

Então $-\hat{g}/(2\pi)^n$ é uma solução fundamental do laplaciano. Como g é invariante por rotações o mesmo deve acontecer com \hat{g} já que se T é uma transformação ortogonal, $T^{-1} = T^t$ e $\det(T)=1$. Com efeito, se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \hat{g} \circ T, \phi \rangle = \langle \hat{g}, \phi \circ T^{-1} \rangle = \langle g, \mathcal{F}(\phi \circ T^{-1}) \rangle = \langle g, \hat{\phi} \circ T^{-1} \rangle = \langle g \circ T, \hat{\phi} \rangle = \langle g, \hat{\phi} \rangle = \langle \hat{g}, \phi \rangle$$

onde usamos a fórmula

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\phi \circ T^{-1})(\xi) &= \int \exp(x \cdot \xi) \phi(T^{-1}x) dx = \int \exp(Ty \cdot \xi) \phi(y) dy = \\ &= \int \exp(y \cdot T^t \xi) \phi(y) dy = \hat{\phi}(T^t \xi) = \hat{\phi}(T^{-1} \xi). \end{aligned}$$

Aplicando o Corolário (VIII.4.1) concluímos que

$$(VIII.4.10) \quad -\hat{g}(\xi)/(2\pi)^n = |\xi|^{2-n}/(2-n)\omega_n + \text{constante.}$$

Como g é positivamente homogêneo de grau -2 , \hat{g} deve ser positivamente homogêneo de grau $n-2$, e a constante do membro direito de (VIII.4.10) deve ser nula.

Q.E.D.

Exercícios

- 1) Provar por cálculo direto que $\frac{1}{\pi z}$ é uma solução fundamental de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Sugestão - Escrever $\langle \frac{1}{\pi z}, \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{|z| > \epsilon} \frac{1}{\pi z} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} dx dy$ e usar

coordenadas polares e o teorema de Green em $\{\epsilon < |z| < R\}$, com R grande.

- 2) Sejam a_{m-1}, \dots, a_0 números complexos e consideremos o operador em $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

$$P(\partial_x, \partial_y) = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m + a_{m-1} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m-1} + \dots + a_0$$

Descrever as soluções fundamentais de $P(\partial_x, \partial_y)$ e provar que é hipoeĺıptico.

- 3) Seja D o disco unitário de \mathbb{C} , u uma função C^1 numa vizi-

nhança de D e χ a função característica de D . Podemos es
crever

$$\chi u = \frac{1}{\pi z} * \frac{\partial(\chi u)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\pi z} * \chi \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\pi z} * u \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}$$

Calcular $\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}$ no sentido das distribuições usando coordena.

das polares e derivar a fórmula de Cauchy generalizada

$$u(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{u(z)}{z-a} dz + \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial u / \partial \bar{z}}{z-a} dx dy, \quad |a| < 1.$$

4) Na demonstração do Teorema VII.2.1 foi usado o seguin -
te argumento: se $f(z)$ é analítica em $\text{Re } z > 0$ contínua em
 $\text{Re } z \geq 0$ e nula no eixo $\text{Re } z = 0$, então $f \equiv 0$. Prove esta afir
mação.

5) Seja $f(x)$ contínua em \mathbb{R}^n tal que $|f(x)| \ll A \exp(B|x|)$, e
definamos $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ por

$$\langle F, \phi \rangle = \int f(x) \phi(0, x) dx, \quad \phi(t, x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Provar que é possível definir $u = E * F$ (convolução em \mathbb{R}^{n+1}).

Qual a relação com o Teorema VIII.3.3.?

6) Usar os exercícios 5 e 6 do capítulo II para obter uma
solução fundamental de $\square = \partial_t^2 - \Delta_x^2$ quando $n=1$.

7) Provar que a solução fundamental E_+ dada por (VIII.3.7) para $n=2$ é localmente integrável (usar coordenadas polares em \mathbb{R}^2).

8) Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ se diz (positivamente) homogênea de grau m se para todo $r > 0$

$$u \circ T_r = r^m u$$

onde $T_r(x) = rx$, $x \in \mathbb{R}^n$. Provar que se $u \in \mathcal{S}'$ é homogênea de grau m , \hat{u} é homogênea de grau $-m-n$.

9) Consideremos a distribuição em \mathbb{R}^2 definida por

$$\langle h_a, \phi \rangle = \int_{|x| \leq a} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x| > a} \frac{\phi(x)}{|x|^2} dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Calcular \hat{h} observando que h é homogênea de grau 2 e que $|x|^2 h_a = 1$. Comparar com o exemplo V.2.4.

10) Encontrar uma solução fundamental de Δ realizando uma transformação de Fourier nas variáveis x_2, \dots, x_n .

11) Seja $n \geq 3$ e definamos $E = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right)$. Provar diretamente que E é C^∞ fora da origem.

Sugestão - Seja $\alpha(r) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha(r) = 1$ se $|r| \leq 1$, $\beta(r) = 1 - \alpha(r)$ e consideremos

$$E_1 = \mathcal{F}^{-1}(\beta(|\xi|)/|\xi|^2) ; E_2 = \mathcal{F}^{-1}(\alpha(\xi)/|\xi|^2).$$

Como $\alpha(\xi)/|\xi|^2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $E_2 \in C^\infty$. Por outro lado, para qualquer inteiro positivo ℓ

$$(ix^1)^\ell E_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\xi_1}^\ell (e^{ix \cdot \xi}) \frac{\beta(\xi)}{|\xi|^2} d\xi = \frac{(-1)^{|\ell|}}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} D_{\xi_1}^\ell \left(\frac{\beta(\xi)}{|\xi|^2} \right) d\xi$$

Ora, $|D_{\xi_1}^\ell (\beta(\xi)/|\xi|^2)| \leq M_\ell |\xi|^{-2-\ell}$ e portanto $(x^1)^\ell E_1(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)$

se $k-2-\ell < -n$. Isto prova que $E_1 \in C^\infty$ fora da origem.

REFERÊNCIAS

- [1] Atiyah, M. "Resolution of Singularities and Division of Distributions", Comm. Pure Appl. Math, vol.23, 1970.
- [2] Calderón, A. "Lecture notes on pseudo-differential operators and elliptic boundary value problems, I". Cursos de Matemática, I.A.M, 1976.
- [3] Chi Min-you. "On the Cauchy problem for a class of hyperbolic equations with initial data on the parabolic degenerating line", Acta Math. Sinica, vol.8, 1958.
- [4] Dirac, P. "The physical interpretation of the quantum dynamics", Proc. of the Royal Society, London, 1927.
- [5] Donoghue, W. "Distributions and Fourier transforms", Academic Press, 1969.
- [6] Dugundji, J. "Topology", Allyn and Bacon, 1966.
- [7] Ehrenspreis, L. "Solutions of some problems of division I", Am. Journal of Math, 76, 1954.
- [8] Grushin, V. "A certain example of a differential equation without solutions", Mat. Zametki, 10, 1971.

- [9] Hormander, L. "On the division of distribution by polynomials", Ark. Mat. 3, 1958.
- [10] Lages Lima, E. "Análise no \mathbb{R}^n ", Editora Universidade de Brasília, 1970.
- [11] Lages Lima, E. "Variedades diferenciáveis", Monografias de Matemática, 15, IMPA, 1973.
- [12] Lavoine, J. "Transformation de Fourier des pseudo - fonctions", Centre Nat. Recherche Scient.. Paris, 1963.
- [13] Lavoine, J. "Calcul symbolique des distributions et pseudo-fonctions", Centre Nat. Recherche Scient., Paris, 1959.
- [14] Lewy, H. "An example of a smooth linear partial differential equation without solution", Ann. of Math. 64, 1956.
- [15] Lojasiewicz, S. "Sur le problème de division", Studia Math. 18, 1959.
- [16] Malgrange, B. "Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution", Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 6, 1955-56.
- [17] Malgrange, B. "Division des distributions", Exposés 21/25 Seminaire Schwartz, 1959-60.

- [18] Nachbin, L. "Lectures on the theory of distributions", Textos de Matemática, nº 15, UFPE, 1964.
- [19] Oleinik, O. "On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations", Comm. Pure Appl. Math., vol.23, 1970.
- [20] Rudin, W. "Principios de Analisis Matemático", Mc Graw-Hill, 1966.
- [21] Rudin, W. "Real and Complex Analysis", Mc Graw-Hill, 1966.
- [22] Schwartz, L. "Division par une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe", Summa Brasiliensis Mathematicae, vol.3, 1955.
- [23] Schwartz, L. "Théorie des distributions", Hermann, 1966.
- [24] Schwartz, L. "Mathematics for the physical sciences", Hermann, 1966.
- [25] Treves, F. "Topological vector spaces, distributions and kernels", Academic Press, 1967.
- [26] Treves, F. "Basic linear partial differential equations", Academic Press, 1975.
- [27] Widder, D. "The heat equation", Academic Press, 1975.

