

**Lucio Rodríguez**  
**Introdução à**  
**Geometria Diferencial**

COPYRIGHT © by LUCIO RODRIGUEZ

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,  
por qualquer processo, sem a permissão do autor.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Rua Luiz de Camões, 68  
20.000 - Rio de Janeiro - RJ

À Charisse



## PREFÁCIO

Estas notas têm como objetivo dar uma visão elementar de geometria diferencial. A partir de noções básicas de cálculo e álgebra linear fazemos um estudo de curvas e superfícies.

Nos aprofundaremos mais no estudo de curvas, especialmente de curvas no plano, pela seguinte razão. Numas notas introdutórias é muito fácil, e pouco realista, chegar aos teoremas mais interessantes e substanciais da geometria das superfícies, devido à necessidade de uma preparação mais detalhada e vagarosa. Por outro lado, com o mínimo de pré-requisitos no estudo de curvas, temos ao nosso alcance muitos problemas bonitos e sofisticados que nos darão uma boa idéia da força e da beleza de geometria diferencial.

Os primeiros dois capítulos tratam de curvas, no plano e no espaço. Exigiremos do leitor no começo somente as noções básicas de cálculo de uma variável e de álgebra linear, a maior parte das quais será relembrada na seção I.1, e à medida que forem surgindo. Na realidade, esta é uma boa oportunidade para relembrar e sedimentar os fatos elementares de cálculo e álgebra linear, que talvez pare-

ciam muito abstratos antes; é aconselhável ter por perto livros de referências para serem consultados à medida que apareçam as dúvidas. Mas nosso interesse nestes fatos é basicamente prático; assim sendo os conceitos só serão lembrados (ou introduzidos) quando se faça necessário usá-los. Já no capítulo III, que trata de superfícies, precisaremos usar o cálculo de funções de várias variáveis reais.

As seções básicas das notas são as seções de 1 a 7 do capítulo I, 1 a 5 do capítulo II, e 1 a 5 do capítulo III. Mas é fortemente recomendado estudar algumas das últimas seções do capítulo I sobre curvas no plano. Uma escolha poderia consistir das seções 8,9,12,13 e 14 deste capítulo; outra seria feita com as seções 8,11, 15 e 16. Claro, alguém que não tenha estudado ainda cálculo de várias variáveis poderá se restringir aos dois primeiros capítulos.

Alguns exercícios estão formulados de uma maneira um pouco ambígua; eles servem mais como ponto de partida para uma discussão sobre a matéria. De qualquer maneira, o leitor que achar um exercício ambíguo, difícil, ou simplesmente errado, deve sentir-se em completa liberdade para reformulá-lo de uma maneira razoável. De fato, o leitor é fortemente encorajado a redigir seus próprios exer-

cícios; a final de contas, uma parte importante do trabalho do pesquisador é achar problemas relevantes e interessantes.

Espero que o leitor estude estas notas com muita boa vontade, corrigindo os prováveis erros de português e matemática. Gostaria de receber comentários, sugestões, e correções.

Agradeço a Antonio Carlos Asperti, a Luquézio Petrola e Susana Fornari pela sua ajuda na revisão do texto. Agradeço também a Lais de Carvalho Ventura pelo trabalho de datilografia.

Lucio Rodríguez

Rio de Janeiro, abril de 1977.





ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
PREFÁCIO.....	i
CAPÍTULO I - Curvas no Plano .....	1
1. Cálculo vetorial .....	2
2. Curvas regulares .....	14
3. Reparametrização de curvas .....	21
4. Linhas tangentes e normais .....	28
5. Orientação de uma curva .....	33
6. Comprimento de arco .....	36
7. Curvatura; equações de Frenet.....	48
8. Teorema fundamental das curvas planas.....	50
9. Convexidade local .....	56
10. Isometrias de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ .....	64
11. Raio de curvatura. Evolutas e involutas de curvas planas.....	76
12. A indicatrix normal. A curvatura total...	87
13. Convexidade global.....	100
14. O teorema dos quatro vértices.....	113
15. Definição implícita de curvas planas.....	116
16. A envolvente de uma família de curvas Dois exemplos:	122
1) zona de barulho do Concorde.....	126
2) zona de tiro de um canhão.....	130

	pág.
CAPÍTULO II. Curvas no espaço.....	135
1. Tangentes, normais, e curvatura.....	136
2. Produto vetorial; orientação.....	138
3. O vetor binormal e a torção.....	141
4. Fórmulas de Frenet.....	144
5. Fórmulas da curvatura e da torção.....	145
6. Hélices.....	149
7. Significado geométrico da curvatura e da torção.....	152
CAPÍTULO III. Superfícies.....	163
1. Superfícies regulares parametrizadas.....	163
2. Reparametrização de superfícies.....	173
3. O vetor normal; a primeira forma fundamental; área.....	182
4. A curvatura Gaussiana .....	202
5. Curvas na superfície.....	217
6. Definição global de superfícies.....	242
7. Alguns teoremas.....	251
REFERÊNCIAS.....	259
ÍNDICE ALFABÉTICO.....	261

## CAPÍTULO I

### Curvas no Plano

Neste capítulo estudaremos as curvas do plano. Inicialmente veremos a geometria local das curvas, isto é, as propriedades geométricas de que uma curva goza numa vizinhança de um de seus pontos. Depois estudaremos algumas propriedades globais, isto é, as que dependem do conhecimento da curva como um todo. As primeiras sete seções estabelecem os fatos básicos sobre as curvas do plano. A análise feita em algumas destas seções servirá também para o estudo das curvas no espaço de três dimensões; a seção 10 que trata de isometrias também pode ser aproveitada tanto para duas como para três dimensões. Nas seções posteriores nos aprofundamos mais na geometria das curvas do plano. A geometria global das curvas planas é muito rica e interessante; para nós tem a vantagem de fornecer exemplos de problemas a nível de pesquisa matemática sem exigir muitos pré-requisitos. Vários dos tópicos apresentados são antigos, mas outros são mais recentes e tem servido de motivação para estudar alguns problemas de geometria diferencial em dimensões maiores. No prefácio sugerimos algumas escolhas destes tópicos para quem estiver com pouco tempo.

## 1. Cálculo vetorial

Nesta seção introduzimos rapidamente os elementos de álgebra linear e cálculo que precisaremos para iniciar nossos estudos. A análise feita aqui, a menos de modificações óbvias é a mesma para duas ou três dimensões; como precisaremos dela no capítulo II, falaremos logo em três dimensões. O leitor que tenha um pouco de experiência sobre estes assuntos pode começar logo na seção 2.

O espaço Euclideano de três dimensões  $R^3$  é o conjunto de termos ordenados de números reais  $v = (x_1, x_2, x_3)$ . Dizemos que  $v$  é um vetor com coordenadas retangulares  $x_1, x_2$  e  $x_3$ . Dois vetores  $v = (x_1, x_2, x_3)$  e  $w = (y_1, y_2, y_3)$  podem ser somados somando-se as coordenadas correspondentes, isto é,  $v+w$  é o vetor com coordenadas  $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ . Como a soma de números reais é comutativa, temos que

$$(1.1) \quad v+w = w+v$$

Geometricamente, essa soma pode ser ilustrada pela regra do paralelogramo, como na figura 1.1.

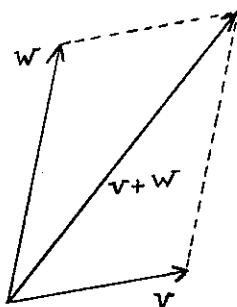


Figura 1.1

A soma de vetores também é associativa, i.e.,

$$(1.2) \quad (v+w) + z = v + (w+z) \quad ,$$

porque a soma de números reais também o é.

Um vetor  $v = (x_1, x_2, x_3)$  pode ser multiplicado por um número real  $\lambda$  pela regra  $\lambda v = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ . Geometricamente a multiplicação por  $\lambda$  equivale a aumentar ou diminuir o comprimento do vetor  $v$ , dependendo de  $|\lambda|$  ser maior ou menor a 1; mas também ela afeta a direção do vetor, dando a direção oposta se  $\lambda$  é negativo. Em particular  $(-1) \cdot v = -v = (-x_1, -x_2, -x_3)$  é claramente o vetor com o mesmo módulo (comprimento) de  $v$  mas que aponta na direção exatamente oposta. As seguintes regras valem para a multiplicação de escalares (números reais)

$\lambda$  e  $\beta$  e vetores  $v$  e  $w$ , onde  $\vec{0}$  é o vetor  $(0,0,0)$ ,

$$(1.3) \quad (\lambda + \beta)v = \lambda v + \beta v$$

$$(1.4) \quad \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$$

$$(1.5) \quad \lambda(\beta v) = (\lambda\beta)v = \beta(\lambda v)$$

$$(1.6) \quad 0.v = \vec{0}$$

$$(1.7) \quad v + \vec{0} = v$$

$$(1.8) \quad 1.v = v$$

Todas estas regras valem não somente para o espaço Euclidiano de três dimensões,  $\mathbb{R}^3$ , como também para o plano  $\mathbb{R}^2 = \{v = (x_1, x_2) : x_1 \text{ e } x_2 \text{ são números reais}\}$ . Algumas vezes será útil pensar em  $\mathbb{R}^2$  como o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dos termos  $(x_1, x_2, x_3)$  com  $x_3 = 0$ . Dizemos que dois vetores  $v$  e  $w$  do plano  $\mathbb{R}^2$  são linearmente independentes se não existem números reais  $\lambda$  e  $\beta$  não simultaneamente nulos tal que  $\lambda v + \beta w = 0$ . Isto equivale a dizer que os dois vetores não estão contidos numa mesma reta passando pela origem  $(0,0)$  de  $\mathbb{R}^2$ ; se este fosse o caso teríamos que um seria múltiplo do outro,  $v = \lambda w$ , ou seja,  $lv - \lambda w = 0$ . Dizemos que três vetores  $v, w$  e  $z$  de  $\mathbb{R}^3$  são linearmente independentes se não existem números reais  $\lambda, \alpha$  e  $\beta$  tais que  $\lambda v + \alpha w + \beta z = 0$ , a não ser

que  $\lambda = \alpha = \beta = 0$ ; isto equivale a exigir que os três vetores não estejam contidos num mesmo plano passando pela origem. Dados três vetores linearmente independentes  $v_1, v_2$  e  $v_3$  de  $\mathbb{R}^3$ , temos que qualquer outro vetor  $w$  de  $\mathbb{R}^3$  pode ser expresso de uma maneira única como uma combinação linear  $w = \alpha v_1 + \beta v_2 + \lambda v_3$  dos três vetores com  $\alpha, \beta$  e  $\lambda$  em  $\mathbb{R}$ . No plano, todo vetor é uma combinação linear de dois vetores linearmente independentes. No espaço  $\mathbb{R}^3$ , três vetores linearmente independentes aparecem naturalmente,  $u_1 = (1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 0)$ , e  $u_3 = (0, 0, 1)$ ; assim um vetor  $v = (x_1, x_2, x_3)$  pode ser expresso como  $v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$ .

Uma noção muito importante para o estudo de problemas geométricos em  $\mathbb{R}^3$  é a do produto escalar de dois vetores  $v = (x_1, x_2, x_3)$  e  $w = (y_1, y_2, y_3)$ , denotado  $v \cdot w$ , e definido como

$$(1.9) \quad v \cdot w = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Verifica-se facilmente que o produto escalar goza das seguintes propriedades

$$(1.10) \quad v \cdot w = w \cdot v$$

$$(1.11) \quad v \cdot (w+z) = v \cdot w + v \cdot z$$

$$(1.12) \quad (\lambda v) \cdot w = v \cdot (\lambda w) = \lambda v \cdot w$$

$$(1.13) \quad v \cdot v \geq 0$$

$$(1.14) \quad v \cdot v = 0 \quad \text{se e somente se} \quad v = \vec{0}$$

Dizemos que dois vetores  $v$  e  $w$  são ortogonais se

$$v \cdot w = 0$$

A norma do vetor  $v$ , denotada  $|v|$  é definida como  $\sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  se  $v = (x_1, x_2, x_3)$ ; ela representa a idéia de comprimento ou módulo de um vetor a que nos referimos anteriormente. Usando (1.13) e (1.14), vemos que  $|v| \geq 0$ , para todo  $v \in \mathbb{R}^3$ , e é igual a zero se e somente se  $v$  é o vetor zero. Os vetores  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , tem norma  $|u_i| = 1$ , e  $u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_3 = u_3 \cdot u_1 = 0$ ; um conjunto de vetores ortogonais entre si e de norma um é chamado ortonormal.

Outra maneira de ver o produto escalar de  $v$  e  $w$  é como  $v \cdot w = |v||w|\cos \theta$  onde  $\theta$  é o ângulo entre os dois vetores,  $0 \leq \theta \leq \pi$  (veja o exercício 10.12). Geometricamente, isto equivale a projetar  $v$  na reta gerada por  $w$  e depois multiplicar o módulo da projeção por  $|w|$ , considerando o resultado positivo se  $w$  e a projeção de  $v$  estão do mesmo lado da origem, negativo em caso contrário. Veja a figura 1.2.



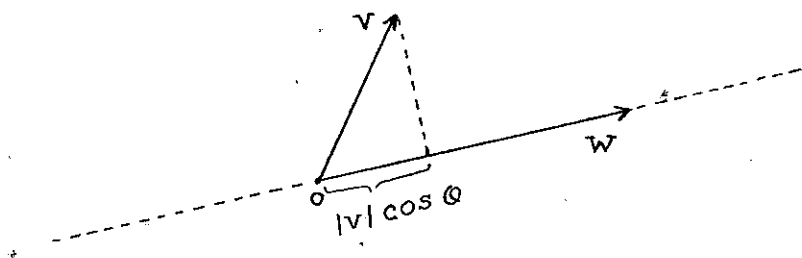


Figura 1.2

Usando a soma podemos definir agora a importante noção de distância entre dois pontos (vetores)  $v$  e  $w$  do espaço Euclidiano. A definimos como  $d(v,w) = |v-w|$ . Ela goza das seguintes propriedades.

$$(1.15) \quad d(v,w) \geq 0, \quad \text{sendo zero se e somente se} \\ v = w$$

$$(1.16) \quad d(v,w) = d(w,v)$$

$$(1.17) \quad d(v,z) \leq d(v,w) + d(w,z)$$

### Como derivar curvas no espaço

Desenvolvemos aqui o cálculo de curvas no espaço

a partir do cálculo das funções da reta na reta. Assumimos que o leitor está familiarizado com o cálculo elementar de funções reais de uma variável real; usaremos o teorema fundamental de cálculo, de mudança de variáveis, de expansão de Taylor, etc.

A idéia que temos de curvas no espaço é de que são objetos de uma dimensão em três dimensões. Analiticamente, a maneira mais útil de ver as curvas não é somente a de considerar o lugar geométrico que elas ocupam no espaço, senão a de olhar também a parametrização, que definiremos a seguir, que gerou elas; poderemos pensar em curvas como o caminho percorrido por uma partícula no espaço num determinado intervalo de tempo; é importante saber não só onde a partícula esteve mas também o roteiro de seu percurso.

Definimos uma curva como uma aplicação (parametrização da curva)  $v: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  (ou  $v: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) definida num intervalo da reta tomando valores vetoriais. Dizemos que a curva  $v(t)=(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  é contínua se as funções reais  $x_i: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas,  $i = 1, 2, 3$ . Dizemos que  $v(t)$  é diferencial se as funções  $x_i$  são diferenciáveis,  $i = 1, 2, 3$ . Neste caso definimos a derivada de  $v$  como

$$(1.18) \quad \frac{dv}{dt} = v'(t) = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right),$$

ou, em termos do sistema de vetores unitários ortogonais  $u_1, u_2, u_3$ , como

$$(1.19) \quad v'(t) = x'_1(t)u_1 + x'_2(t)u_2 + x'_3(t)u_3$$

A idéia é que  $v'(t_0)$  é um vetor paralelo à linha tangente a curva  $v(t)$  no ponto  $t = t_0$ , e que aponta (dentro desta linha) na direção em que a curva vai progredindo na medida em que o tempo  $t$  vai crescendo de  $a$  a  $b$ . Veremos mais detalhes sobre a linha tangente na seção 4. Veja a figura 1.3

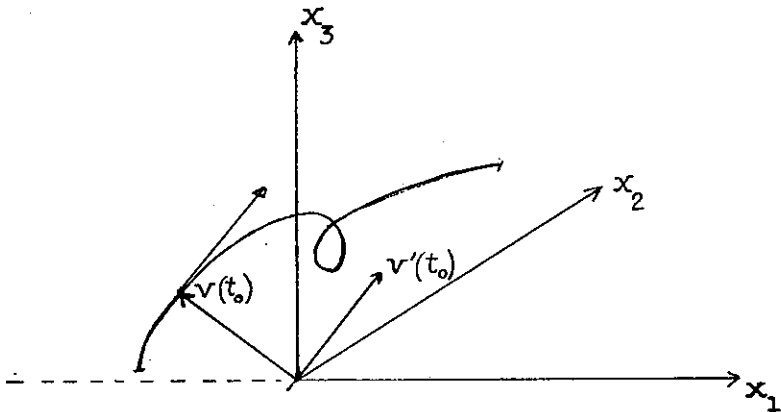


Figura 1.3

As derivadas de curvas satisfazem as seguintes regras:

$$(1.20) \quad \frac{d}{dt}(\lambda(t)v(t)) = \lambda'(t)v(t) + \lambda(t)v'(t)$$

$$(1.21) \quad \frac{d}{dt}(v(t) \cdot w(t)) = v'(t)w(t) + v(t)w'(t)$$

onde  $\lambda(t)$  é uma função com valores reais, e  $v(t)$  e  $w(t)$  são curvas. Estas duas fórmulas seguem da regra usual de diferenciação de produtos de funções reais, pois

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\lambda(t)v(t)) &= \frac{d}{dt}(\lambda(t)x_1(t), \lambda(t)x_2(t), \lambda(t)x_3(t)) = \\ &= \left( \frac{d}{dt}(\lambda(t)x_1(t)), \frac{d}{dt}(\lambda(t)x_2(t)), \frac{d}{dt}(\lambda(t)x_3(t)) \right) = \\ &= (\lambda'(t)x_1(t) + \lambda(t)x_1'(t), \lambda'(t)x_2(t) + \lambda(t)x_2'(t), \\ &\lambda'(t)x_3(t) + \lambda(t)x_3'(t)) = (\lambda'(t)x_1(t), \lambda'(t)x_2(t), \\ &\lambda'(t)x_3(t)) + (\lambda(t)x_1'(t), \lambda(t)x_2'(t), \lambda(t)x_3'(t)) = \\ &= \lambda'(t)v(t) + \lambda(t)v'(t). \end{aligned}$$

Para verificar (1.21), escrevemos  $w(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ ; estão  $v(t) \cdot w(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) y_i(t)$ , e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v(t) \cdot w(t)) &= x_1'(t)y_1(t) + x_1(t)y_1'(t) + x_2'(t)y_2(t) + \\ &+ x_2(t)y_2'(t) + x_3'(t)y_3(t) + x_3(t)y_3'(t) = \sum_{i=1}^3 x_i'(t)y_i(t) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^3 x_i(t) y_i'(t) = v'(t) \cdot w(t) + v(t) \cdot w'(t)$$

Pode-se definir a integral de uma curva da mesma maneira que definimos sua derivada, isto é, integrando cada função coordenada,

$$(1.22) \quad \int_a^b v(t) dt = \left( \int_a^b x_1(t) dt, \int_a^b x_2(t) dt, \int_a^b x_3(t) dt \right) = \\ = \left( \int_a^b x_1(t) dt \right) u_1 + \left( \int_a^b x_2(t) dt \right) u_2 + \left( \int_a^b x_3(t) dt \right) u_3$$

Também podemos definir a integral indefinida

$$(1.23) \quad w(t) = \int_a^t v(s) ds$$

que define uma nova curva. Pelo teorema fundamental do cálculo, aplicado a cada coordenada, temos que

$$(1.24) \quad w'(t) = v(t)$$

Também podemos definir o limite  $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t)$  como

$$\left( \lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} x_2(t), \lim_{t \rightarrow t_0} x_3(t) \right).$$

Tudo o que fizemos até agora vale obviamente para curvas no plano, usando duas ao invés de três coordenadas.

Podemos definir uma curva  $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  num

intervalo fechado  $[a, b]$  dizendo que ela é diferenciável se existe uma curva  $\tilde{v}: (a-\epsilon, b+\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferenciável, para algum  $\epsilon > 0$ , tal que  $\tilde{v}|_{[a, b]} = v$ . Dizemos que uma função real  $x_i(t)$  é diferenciável de classe  $C^k$  se todas suas derivadas  $x^{(n)}(t)$  existem e são contínuas para todo  $n \leq k$ . Da mesma forma dizemos que uma curva é diferenciável de classe  $C^k$  se cada função coordenada  $x_i(t)$  é diferenciável de classe  $C^k$  e escrevermos sua enésima derivada como

$$(1.25) \quad v^{(n)}(t) = (x_1^{(n)}(t), x_2^{(n)}(t), x_3^{(n)}(t)).$$

Dizemos que uma curva é de classe  $C^\infty$  se é de classe  $C^k$  para todo  $k$ . Quando falamos numa curva diferenciável sem especificar sua classe assumiremos que é de classe  $C^\infty$ .

Para o estudo global das curvas vamos precisar da seguinte noção. Dizemos que uma curva diferenciável de classe  $C^k$  (ou  $C^\infty$ )  $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é fechada se  $v(a) = v(b)$  e  $v^{(n)}(a) = v^{(n)}(b)$ , para todo  $n \leq k$ . Veja a figura 1.4.

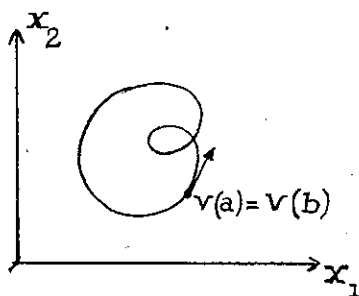


Figura 1.4. Uma curva fechada do plano

O traço de uma curva fechada não aparenta ter começo ou fim. Dizemos que uma curva  $v: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é simples se  $v(t_1) = v(t_2)$  com  $t_1$  e  $t_2$  em  $(a,b)$  implica que  $t_1 = t_2$ . A curva da figura 1.4 não é simples.

Usaremos também fatos sobre máximos e mínimos; por exemplo, precisaremos saber que uma função contínua  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  tem sempre um máximo e um mínimo, e que se  $f$  é diferenciável e  $f(a) = f(b)$  então  $f'(c) = 0$  para todo máximo ou mínimo  $c$  (mesmo que  $c$  seja só um mínimo local, i.e., que  $f(c) \leq f(x)$  se  $|x-c| < \delta$  para algum  $\delta > 0$ ).

O que vimos até agora já é suficiente para começar nosso estudo. Outros fatos de álgebra linear e cálculo serão introduzidos mais tarde no momento oportuno.

Exercício 1.1 - Suponha que  $v(t)$  é uma curva diferenciável tal que  $|v(t)| = 1$  para todo  $t$  em  $(a,b)$ . Demonstre que  $v(t)$  e  $v'(t)$  são ortogonais. Eles são ortonormais?

Exercício 1.2 - Sejam  $A$  e  $B$  vetores ortogonais constantes de  $\mathbb{R}^2$ . Demonstre que a curva  $v(t) = A \cos t + B \sin t$  representa uma elipse (i.e. que as coordenadas de  $v(t)$  satisfazem a equação de uma elipse).

Exercício 1.3 - Mostre que  $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = w$  se e somente se  $\lim_{t \rightarrow t_0} |v(t) - w| = 0$ .

Exercício 1.4 - Seja  $v(t)$  uma curva diferenciável. Demonstre que  $v'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$

Exercício 1.5 - Considere a curva  $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como  $v(t) = \begin{cases} (-t, 1) & \text{se } t < 0 \\ (\cos 2t, \sin 2t) & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

Esta curva é contínua? Faça um desenho dela.

Ela é diferenciável de Classe  $C^1$ ? de classe  $C^2$ ?

Exercício 1.6 - Mostre que os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  são traços de curvas diferenciáveis (i.e. ache  $v: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $v((a, b)) = C_i$ ).

(a)  $C_1 \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 4x^2 + y^2 = 1\}$

(b)  $C_2 \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = e^x\}$

(c)  $C_3 \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 3x + 4y = 1\}$

## 2. Curvas regulares

Nesta seção começamos propriamente nosso estudo de curvas planas. Vamos nos restringir em grande parte a um certo tipo de curvas, as regulares. Repetiremos várias



das coisas de que falamos na última seção na hipótese de que alguns leitores poderão prescindir de lê-la.

Uma curva plana é uma aplicação  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida num intervalo da reta que toma valores vetoriais no plano  $\mathbb{R}^2$ . A curva pode ser expressa usando suas funções coordenadas,  $C(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ ; pensamos em  $C(t)$  como um vetor do plano. Dizemos que  $C$  é contínua se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são contínuas. Dizemos que  $C$  é diferenciável de classe  $C^k$  se cada uma das funções  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  é diferenciável de classe  $C^k$ ; e de classe  $C^\infty$  se é de classe  $C^k$  para todo  $k$ . Em geral, quando não especificamos a classe de diferenciabilidade assumimos que é de classe  $C^\infty$ .

Observamos que não pensamos numa curva no plano simplesmente como um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ : A curva não é só sua imagem  $C([a, b])$ , seu traço, senão também a aplicação  $C$ , que parametriza o traço. Embora a imagem da curva, seu traço, seja uma noção mais geométrica, mais intuitiva, pois a podemos desenhar e ver, a aplicação é mais importante analiticamente pois sobre ela podemos aplicar o cálculo vetorial. A aplicação é importante também porque dá a direção da curva, nos dá o percurso da curva. Por exemplo, no caso da curva ser a figura de um 8, (veja a figura 2.1),

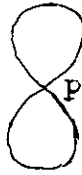


Figura 2.1. Um 8.

é a parametrização da curva que nos dirá, ao chegar ao ponto  $p$  de auto-interseção, por qual das quatro possíveis direções continuar. É elucidativo pensar na interpretação física de que uma curva descreve o caminho de um objeto no plano a medida que o tempo  $t$  passa. Assim o ponto  $p = C(t_1) = C(t_2)$  corresponde a dois tempos diferentes  $t_1$  e  $t_2$  do percurso.

O problema que surge é que um mesmo traço pode ser parametrizado de muitas maneiras diferentes; ou seja, podemos ter duas curvas  $C_1: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $C_2: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $C_1([a,b]) = C_2([c,d])$ . Por exemplo, sejam  $C_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas como  $C_n(t) = (\cos nt, \sin nt)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . A imagem de todas elas é o círculo unitário do plano  $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1^2 + x_2^2 = 1\} = \{v \in \mathbb{R}^2: |v| = 1\}$ ; veja a figura 2.2

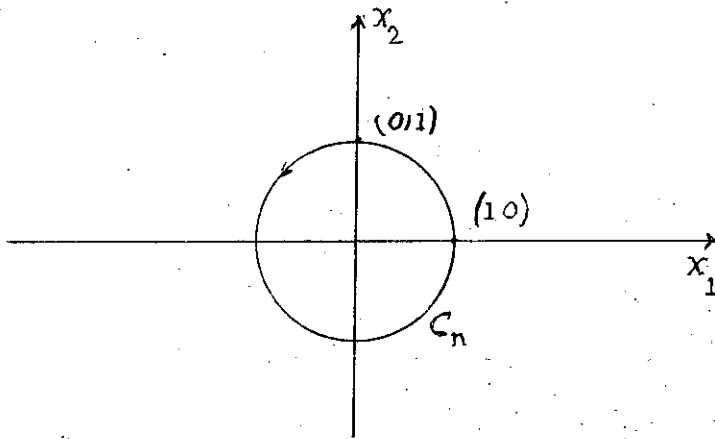


Figura 2.2

A diferença entre elas está na velocidade com que elas recobrem o círculo. Esses são exemplos de curvas que cobrem cada ponto de seu traço um número infinito de vezes; essa é uma informação que está incluída na parametrização e que não poderia ser obtida só ao olhar o traço. Considere as curvas  $C_1|[0, 4\pi]$ ,  $C_2|[0, 2\pi]$  e  $C_3|[0, 2\pi]$ . As primeiras recobrem o círculo duas vezes, a terceira três vezes; a imagem das três é o círculo. Mais tarde veremos uma maneira natural de parametrizar as curvas que nos permitirá concluir que as duas primeiras curvas são essencialmente a mesma.

Curvas no plano podem ser em geral muito arbitrárias. Por exemplo, existe uma curva contínua, a curva de Peano, cujo traço é todo o quadrado  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$  do  $\mathbb{R}^2$ ; logo é um subconjunto de dimen-

são 2. Queremos restringir nosso estudo de curvas a curvas razoáveis, que ocupem só uma dimensão, que sejam diferenciáveis, que não tenham quinas. Essas são as curvas que geralmente desenhamos. Para esse efeito fazemos a seguinte definição.

Definição. Uma curva regular é uma aplicação  $C:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de um intervalo da reta em  $\mathbb{R}^2$  tal que

- (i)  $C$  é diferenciável
- (ii)  $C'(t) \neq (0,0)$  para todo  $t$ .

Estamos sendo um pouco vagos com relação a classe de diferenciabilidade de  $C$ . A não ser que digamos algo em sentido contrário, pensaremos que a curva é suficientemente diferenciável para que tenham sentido os problemas do momento.

Quando estudamos o cálculo diferencial de funções reais, pensamos intuitivamente nas funções reais diferenciáveis de uma variável como as que não tem quinas; mas, aqui para garantir a não existência de quinas precisamos também da condição (ii). Como se explica isto? Acontece que quando dizemos que uma função real diferenciável não tem quinas, na realidade queremos dizer que seu gráfico é uma curva sem quinas. De fato, uma grande quantidade de exemplos de curvas regulares obtém-se como grá-

ficos de de funções diferenciáveis. Se  $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, então o seu gráfico é o traço da curva  $C(t) = (t, g(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ . Esta curva satisfaz (i) pois ambas as funções  $t$  e  $g(t)$  são diferenciáveis; ela também satisfaz a condição (ii), pois  $C'(t) = (1, g'(t)) \neq (0,0)$  para todo  $t$ . Veja a figura 2.3. Logo o gráfico

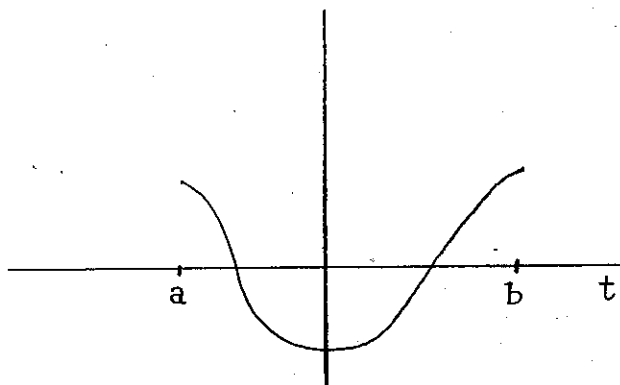


Figura 2.3. O gráfico como curva regular.

de  $g$  é regular se e somente se  $g$  é diferenciável. Por outro lado, considere o gráfico da função  $|t|$ , que é contínua mas não diferenciável (veja a figura 2.4). Ela tem uma quina. Agora

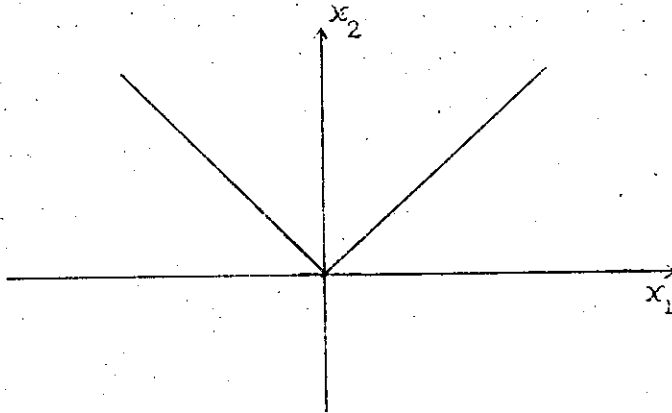


Figura 2.4. O gráfico do valor absoluto.

$$\text{a curva } C(t) = \begin{cases} (-t^4, +t^4) & \text{se } t \leq 0 \\ 0 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ ((1-t)^4, (1-t)^4) & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

parametriza esta curva e satisfaz (i). Logo diferenciabilidade não é suficiente para evitar quinas; o que está faltando é a condição (ii), pois  $C'(t) = (0,0)$ , se  $0 \leq t \leq 1$ . Na seção 3 veremos que a condição (ii) é suficiente para garantir que não tenhamos quinas. Observe que a curva da figura 2.1 não terá uma quina no ponto p se for apropriadamente parametrizada.

Exercício 2.1 - Verifique que a curva  $C(t)$  vista acima é diferenciável. Ela é de classe  $C^k$  pa

ra qual inteiro  $k$ ?

Exercício 2.2 - Mostre que a curva  $C(t) = \begin{cases} (-t^4, t^4) & \text{se } t \leq 0 \\ (t^4, t^4) & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$  é diferencial. De que classe  $C^k$ ? Qual é seu traço?

Exercício 2.3 - Mostre que a curva  $C: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como  $C(t) = (t^2, t^3)$  é regular. Faça um desenho.

Exercício 2.4 - A seguinte curva é chamada catenária,  $C(x) = (x, a \cosh x/a)$ ,  $-\infty < x < \infty$ . Faça um desenho e mostre que é regular.

Exercício 2.5 - Faça um desenho da seguinte curva  $C(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ ,  $-4 \leq t \leq 4$ . Mostre que é regular.

Exercício 2.6 - Faça um desenho da curva  $C(t) = \left( \frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$ .

### 3. Reparametrização de curvas

Considere uma curva  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida num intervalo  $[a, b]$ . Suponhamos que temos uma função real  $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  do intervalo  $c \leq t \leq d$  sobre o inter-

valo  $a \leq t \leq d$  que seja também biunívoca (estritamente monotônica). Nesta situação temos uma nova curva  $\tilde{C}: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como a aplicação composta  $\tilde{C} = C \circ \psi$ . Dizemos que  $\tilde{C}$  é uma reparametrização da curva

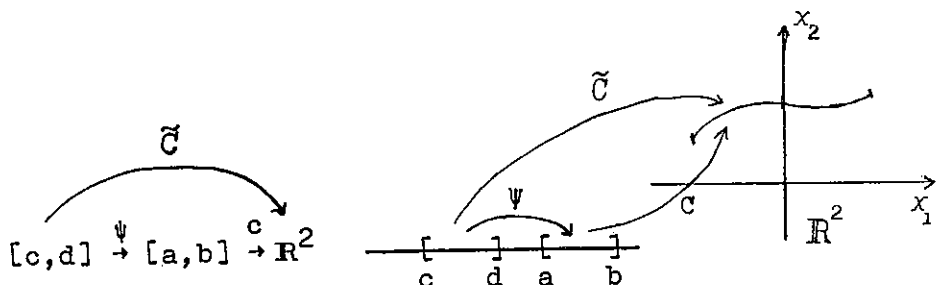


Figura 3.1. Uma reparametrização

$C$ . Observamos que  $C$  e  $\tilde{C}$  tem o mesmo traço, isto é,  $\tilde{C}([c,d]) = C([a,b])$ , e que  $C$  é também uma reparametrização de  $\tilde{C}$ .

As vezes pode acontecer que a curva  $C$  não é diferenciável, mas que uma reparametrização sua o seja. Por exemplo, no final da seção 2 consideramos o gráfico da função  $|t|$ ,  $D(t) = (t, |t|)$ , que não era diferenciável, mas depois vimos que tínhamos outra curva  $C$  diferenciável com o mesmo traço.

Exercício 3.1 - Verifique que a curva do exercício 2.2 é uma reparametrização da curva  $D(t) = (t, |t|)$ .



Mas, se a curva  $C$  já é diferenciável então vamos querer que a reparametrização continue sendo também diferenciável. Para esse efeito, vamos exigir que a função  $\psi$  que dá a mudança de parâmetros seja diferenciável. Para ver porque esta condição é importante, vamos obter uma generalização da regra da cadeia para derivar a função composta  $\tilde{C} = C \circ \psi$ . Lembremos que para funções reais diferenciáveis de uma variável,  $x_1$  e  $\psi$ , onde tenha sentido falar na função composta  $\tilde{x}_1 = x_1 \circ \psi$ , a regra da cadeia diz que

$$(3.1) \quad \frac{d(x_1 \circ \psi)}{d\tau} = \frac{dx_1}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{d\tau},$$

ou, mais especificamente,

$$(3.2) \quad \left. \frac{d(x_1 \circ \psi)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} = \left. \frac{dx_1}{dt} \right|_{t=\psi(\tau_0)} \cdot \left. \frac{d\psi}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0}$$

Logo, em nosso caso, usando a regra da cadeia duas vezes, temos que

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \tilde{C}'(\tau) &= \frac{d\tilde{C}}{d\tau} = \left( \frac{d\tilde{x}_1}{d\tau}, \frac{d\tilde{x}_2}{d\tau} \right) = \\ &= \left( \left. \frac{dx_1}{dt} \right|_{t=\psi(\tau)} \cdot \frac{d\psi}{d\tau}, \left. \frac{dx_2}{dt} \right|_{t=\psi(\tau)} \cdot \frac{d\psi}{d\tau} \right) = \\ &= \frac{d\psi}{d\tau} \left( \left. \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt} \right|_{t=\psi(\tau)} \right) = \frac{d\psi}{d\tau} \cdot \left. \frac{dC}{dt} \right|_{t=\psi(\tau)} = \frac{d\psi}{d\tau} C'(\psi(\tau)), \end{aligned}$$

onde  $x_i$  e  $\tilde{x}_i$  denotam as funções coordenadas de  $C$  e  $\tilde{C}$  respectivamente.

A seguinte proposição dá condições que evitam que a reparametrização seja qualitativamente diferente da curva original.

Proposição 3.1 - (i) se  $C$  é uma curva diferenciável e  $\psi$  é uma mudança de parâmetro diferenciável então  $\tilde{C} = C \circ \psi$  é diferenciável

(ii) se  $C$  é uma curva regular e  $\psi$  é uma mudança de parâmetro diferenciável com  $\frac{d\psi}{d\tau} \neq 0$  para todo  $\tau$  em  $[c,d]$ , então  $\tilde{C} = C \circ \psi$  é também regular.

Demonstração: (i) Vimos que a derivada de  $\tilde{C}$ ,  $\frac{d\tilde{C}}{d\tau} \cdot \frac{d\psi}{d\tau}$  existe se  $C$  e  $\psi$  são diferenciáveis; o mesmo acontece com as derivadas de ordem maior.  $\tilde{C}$  será diferenciável de classe  $C^k$  se  $C$  e  $\psi$  ambas o forem.

(ii) Se  $C$  é regular então  $C'(\tau) \neq 0$ .

Como  $\frac{d\psi}{d\tau} \neq 0$ , temos pela fórmula

3.3 que  $\tilde{C}'(\tau) = \frac{d\psi}{d\tau} C'(\psi(\tau)) \neq (0,0)$ ; logo  $\tilde{C}$  é também regular. C.Q.D.

Observamos que a condição  $\frac{d\psi}{d\tau} \neq 0$ ,  $c \leq \tau \leq d$ , já garante que  $\psi$  é uma mudança de parâmetros válida,

pois ela garante a monotonicidade de  $\psi$ .

Até aqui tudo o que fizemos vale para curvas no espaço  $\mathbb{R}^3$ ; basta simplesmente acrescentar uma outra coordenada. A seguir veremos uma propriedade particular de curvas no plano. Embora geralmente uma curva não seja globalmente o gráfico de uma função diferenciável, localmente podemos garantir este fato. Isto justificará que se diga que uma curva regular não tem quinas.

Proposição 3.2 - Seja  $C: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $t_0 \in (a,b)$ . Existe  $\delta > 0$  e uma função  $\psi: [c,d] \rightarrow [t_0-\delta, t_0+\delta]$  com  $\frac{d\psi}{d\tau} \neq 0$  para todo  $\tau \in [c,d]$  tal que a reparametrização  $\tilde{C} = C \circ \psi$  satisfaz as seguintes condições

- (i)  $\tilde{C}(s) = (s, f(s))$       ou
- (ii)  $\tilde{C}(s) = (f(s), s)$

onde  $f$  é uma função diferenciável definida em  $[c,d]$ .

Demonstração: Como  $C$  é regular  $C'(t_0) = (x'_1(t_0), x'_2(t_0)) \neq (0,0)$ , isto é, ou  $x'_1(t_0)$  ou  $x'_2(t_0)$  é diferente de zero. Assumindo que  $x'_1(t_0) \neq 0$  demonstraremos (i); analogamente, se  $x'_2(t_0) \neq 0$ , demonstraríamos (ii). Como  $x'_1(t)$  é contínua, existe  $\delta > 0$  tal que se  $t_0 - \delta \leq t \leq t_0 + \delta$  então  $x'_1(t)$  é diferente de zero. Isso implica que  $x_1$  é estritamente monótona em

$[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ ; se  $[c, d]$  é o intervalo coberto por  $x_1|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]}$ , então existe uma função inversa de  $x_1$ ,  $\psi: [c, d] \rightarrow [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ , (isto é  $x_1(\psi(s)) = s$  e  $\psi(x_1(t)) = t$ ). Decorre daí que  $\tilde{C} = C \circ \psi$  tem a propriedade requerida, pois  $\tilde{C}(s) = C(\psi(s)) = (x_1(\psi(s)), x_2(\psi(s))) = (s, f(s))$   $c \leq s \leq d$ , onde  $f$  é a função diferenciável  $x_2 \circ \psi$ . C.Q.D.

Exemplo 3.1 - A ciclóide. Considere a seguinte curva chamada ciclóide  $C(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ . Esta curva é construída de uma maneira muito geométrica. Faça um círculo unitário rodar no plano sobre o eixo  $y=0$ , sempre ficando tangente a ele. Quando o círculo fôr tangente ao eixo  $y=0$  no ponto  $(0,0)$  marque o ponto  $P$  do círculo que está em contato com o eixo. Agora fazendo o círculo rodar, o ponto  $P$  descreve a ciclóide. Veja a figura 3.2.

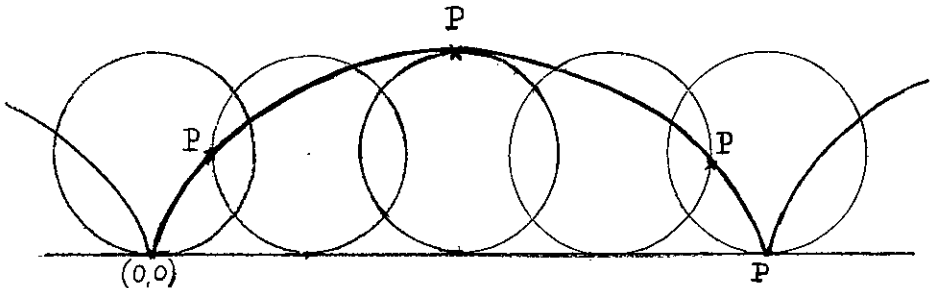


Figura 3.2. A ciclóide

Uma curva contínua  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  com  $C'(t) \neq (0, 0)$  exceto por um número finito de pontos,  $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$ , é chamada regular por partes. Estes pontos são chamados singularidades da curva. Acontece que um ponto pode aparecer como um ponto singular simplesmente por causa da parametrização. Por exemplo  $C(t) = (t^3, 0)$  e  $D(t) = (t, 0)$  são duas parametrizações da linha reta  $y=0$ ; a primeira tem uma singularidade no ponto  $C(0) = (0, 0)$  mas a segunda é regular. Dizemos que uma curva tem singularidade essencial num certo ponto se qualquer reparametrização tem uma singularidade nesse ponto também. As singularidades essenciais correspondem as verdadeiras quinas da curva.

Exercício 3.2 - Ache as mudanças de parâmetros que fazem com que as curvas  $C$  e  $D$  do parágrafo acima sejam obtidas como reparametrizações uma da outra.

Exercício 3.3 - Mostre que a cicloide  $C(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ,  $-\pi/2 \leq t \leq 2\pi + \pi/2$  é regular por partes. Quais são suas singularidades? Convença-se que a parametrização dada coincide com a interpretação geométrica.

Exercício 3.4 - Mostre que a curva cúspide  $C(t) = (t^2, t^3)$  é regular por partes.

Exercício 3.5 - Se  $C: [a, b]$  é uma curva regular e

$t_0 \in (a, b)$ , demonstre que existe um  $\delta > 0$  e um vetor  $w$  perpendicular (ortogonal) a  $C'(t_0)$  e uma função  $f: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  de tal maneira que  $C(t) = C(t_0) + tC'(t_0) + f(t)w$ , se  $|t - t_0| < \delta$ , com  $f(t_0) = 0$  e  $f'(t_0) = 0$ .

#### 4. Linhas tangentes e normais

Uma linha afim do plano  $\mathbb{R}^2$  é um subconjunto do tipo  $L = \{v + rw : r \in \mathbb{R}\}$  onde  $v$  e  $w$  são vetores de  $\mathbb{R}^2$ ; dizemos que  $L$  é uma linha que passa por  $v$  com direção  $w$ . Observe que  $L = \{v + r(-w) : r \in \mathbb{R}\}$ , pois se  $z = v_0 + r_1 w$  e  $v_0 = v + r_0 w$  então  $z = v + (r_1 + r_0)w$  está em  $L$ . Na realidade, temos que se  $v_1$  e  $v_2$  pertencem a  $L$  então  $v_2 - v_1 = \lambda w$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dizemos que duas linhas  $L_1$  e  $L_2$  de  $\mathbb{R}^2$  são paralelas se dados  $v_1$  e  $v_2$  em  $L_1$ , diferentes um do outro, e  $w_1$  e  $w_2$  em  $L_2$ , também diferentes, então  $v_2 - v_1 = \lambda(w_1 - w_2)$ , para algum  $\lambda$  em  $\mathbb{R}$ . Veja a figura 4.1

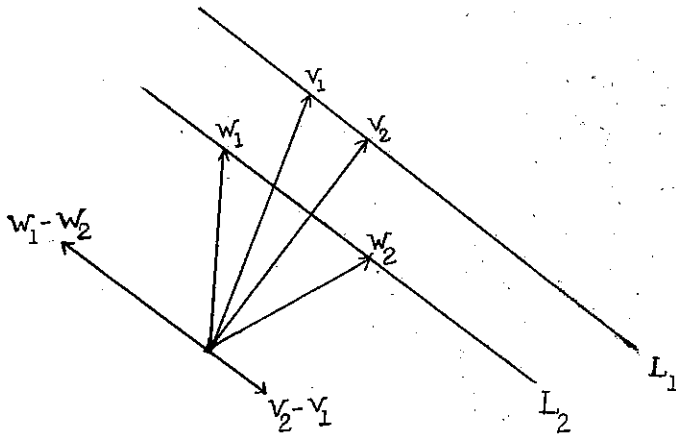


Figura 4.1. Linhas paralelas.

Exercício 4.1 - Dados  $w$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $c$  em  $\mathbb{R}$ , demonstre que o seguinte subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  é uma linha afim,  $L = \{v \in \mathbb{R}^2: v \cdot w = c\}$ , ( $L$  é a linha perpendicular a  $w$  do nível  $c$ ).

- Exercício 4.2
- (i) Duas linhas em  $\mathbb{R}^2$  se interceptam ou são paralelas
  - (ii) Duas linhas paralelas são iguais ou não se interceptam
  - (iii) Dada uma linha  $L_1$  em  $\mathbb{R}^2$  e um ponto  $w$  em  $\mathbb{R}^2 - L_1$ , existe uma única linha  $L_2$  paralela a  $L_1$  passando por  $w$ .

Observe que se  $C(t)$  é uma curva contida numa

linha  $L$ , então  $C'(t)$  e  $C''(t)$  estão contidos numa linha paralela a  $L$ . De fato,  $C'(t) =$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{C(t) - C(t_0)}{t - t_0}; \text{ mas } C(t) = z + r(t)w, \text{ onde}$$
$$L = \{z + rw : r \in \mathbb{R}\}. \text{ Logo, } C'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{r(t) - r(t_0)w}{t - t_0} =$$

$r'(t)w$ ; isto é  $C'(t)$  está na linha passando por  $(0,0)$  na direção  $w$ . Como  $C''(t) = (C'(t))'$ , temos que o mesmo acontece com  $C''(t)$ .

Observe que uma linha afim que passa pela origem  $(0,0)$  de  $\mathbb{R}^2$  é um subespaço vetorial  $\{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$  de dimensão um de  $\mathbb{R}^2$ .

Exercício 4.3 - Verifique que uma linha afim é uma curva regular.

Exercício 4.4 - Se a  $n$ -ésima derivada de  $C(t)$ ,  $C^{(n)}(t)$  é indenticamente nula  $(C^{(n)}(t) = 0$  para todo  $t$ ) então  $C(t) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i v_i$ , onde os  $v_i$ 's são vetores constantes (sugestão: use indução sobre  $n$ ).

Definição: Dada uma curva regular  $C: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  podemos definir a linha tangente a  $C$  no tempo  $t_0$  em  $[a,b]$  como  $T_{t_0} = \{C(t_0) + rC'(t_0) : r \in \mathbb{R}\}$ , e a linha normal a  $C$  em  $t_0$  como  $N_{t_0} = \{v \in \mathbb{R}^2 : v \cdot C'(t_0) = C'(t_0) \cdot C(t_0)\}$ .



Dizemos que duas linhas afins  $L_1$  e  $L_2$  são perpendiculares se dados  $v_1$  e  $v_2$  em  $L_1$ , e  $w_1$  e  $w_2$  em  $L_2$ , diferentes,  $(v_2 - v_1) \cdot (w_2 - w_1) = 0$ .

Temos que a linha tangente e a linha normal a uma curva  $C$  em  $t_0$  são perpendiculares, pois se  $w_1$  e  $w_2$  são pontos diferentes em  $N_{t_0}$  então  $(w_2 - w_1) \cdot C'(t_0) = C'(t_0) \cdot C(t_0) - C'(t_0) \cdot C(t_0) = 0$ . Por outro lado, se  $v_1$  e  $v_2$  estão em  $T_{t_0}$ , então  $v_2 - v_1 = \lambda C'(t_0)$ ; logo  $(w_2 - w_1) \cdot (v_2 - v_1) = \lambda (w_2 - w_1) \cdot C'(t_0) = 0$

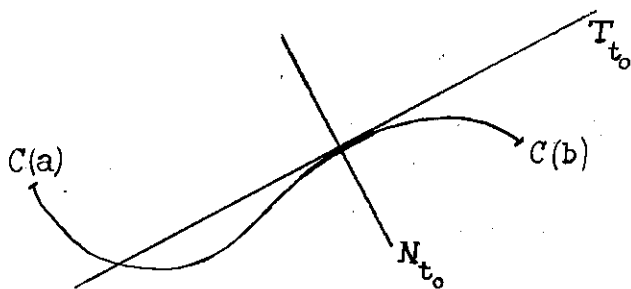


Figura 4.2. Linha tangente e normal

Podemos pensar no vetor tangente à curva  $C(t)$  no ponto  $C(t_0)$  como o vetor que é paralelo a  $C'(t_0)$  mas que tem sua extremidade inicial no ponto  $C(t_0)$ . Podemos denotá-lo como  $C'(t_0)_{C(t_0)}$ . Mas, analiticamente será mais útil usar o vetor  $C'(t_0)$  que sai da origem

$(0,0)$ . Veja a figura 4.2

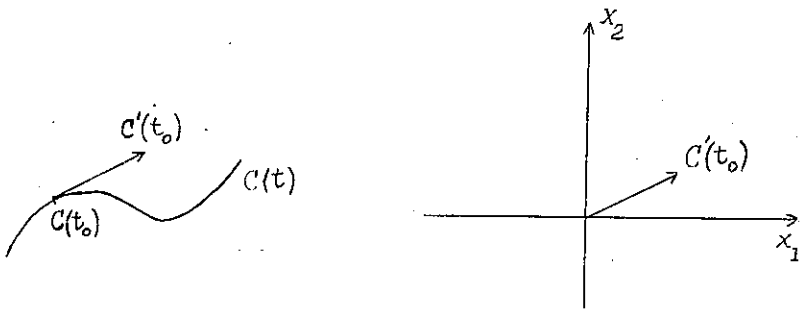


Figura 4.2. Vetor tangente

Exercício 4.5 - Mostre que o conjunto  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: ax+by = c\}$  é uma linha afim, onde  $a$  e  $b$  são números constantes.

Exercício 4.6 - Seja  $C: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $L$  uma linha reta passando pelo ponto  $C(t_0)$ . Mostre que se  $L$  não é a linha tangente a  $C$  no ponto  $C(t_0)$  então existe  $\delta > 0$  tal que  $C((t_0-\delta, t_0))$  esta de um lado da linha  $L$  e  $C((t_0, t_0+\delta))$  do outro lado. (Se  $w$  é um vetor perpendicular a  $L$  em  $C(t_0)$ , então  $\{v \in \mathbb{R}^2: v \cdot w > C(t_0) \cdot w\}$  e  $\{v \in \mathbb{R}^2: w \cdot v < w \cdot C(t_0)\}$  são os dois lados a que nos referimos). Sugestão: mostre

que a função  $f(t) = C(t) \cdot w$  tem derivada  $f'(t_0) \neq 0$ , o que implica que perto de  $t_0$  é estritamente crescente.

Observe que se uma curva regular  $C$  tem uma auto-interseção, i.e.,  $C(t_1) = C(t_2)$  então temos duas linhas tangentes bem definidas nesse ponto, cada uma correspondendo a um tempo diferente. Esta é outra vantagem de parametrizar a curva. Veja a figura 4.3.

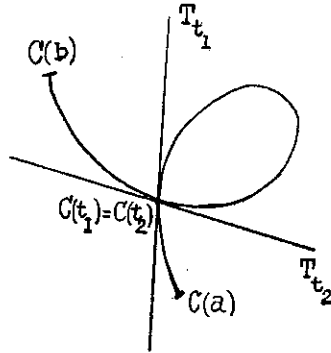


Figura 4.3. Uma auto-interseção

## 5. Orientação de uma curva

Podemos pensar que uma curva no plano é um caminho percorrido por uma partícula ou objeto, a medida que o tempo passa. Mas a curva fornece mais informações pois nos diz em que direção o caminho é seguido. A orientação de uma curva é a direção em que a curva vai percorrendo o

seu traço, à medida que o tempo  $t \in [a, b]$  vai passando, com a convenção de que se  $t_1 > t_0$  então  $t_1$  é um tempo posterior a  $t_0$ . Numa curva regular no plano podemos botar uma seta no seu traço para indicar sua orientação.

Analiticamente, esta orientação é dada pelo vetor tangente  $C'(t_0)_{C(t_0)}$ , que determina uma direção particular na linha tangente  $T_{t_0}$  e que nos dá a direção que a curva toma. Para justificar esta observação, demonstraremos a seguinte proposição. Antes observamos que a linha normal divide o plano  $\mathbb{R}^2$  em dois subconjuntos disjuntos

$$A^+ = \{v \in \mathbb{R}^2: v \cdot C'(t_0) > C'(t_0) \cdot C(t_0)\} \quad e$$

$$A^- = \{v \in \mathbb{R}^2: v \cdot C'(t_0) < C'(t_0) \cdot C(t_0)\} .$$

Proposição 5.1 - Seja  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $t_0$  em  $(a, b)$ . Então existe  $\delta > 0$  tal que  $C(t)$  está em  $A^+$  para todo  $t$  em  $(t_0, t_0 + \delta)$

Demonstração: Considere a função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(t) = (C(t) - C(t_0)) \cdot C'(t_0)$ . Observamos que  $C(t)$  está em  $A^+$  se e somente se  $f(t) > 0$ . Agora,  $f'(t) = C'(t) \cdot C'(t_0)$  e  $f'(t_0) = |C'(t_0)|^2 > 0$ , pois  $C$  é regular. Isto implica que  $f$  é monótona crescente numa vizinhança de  $t_0$ , ou seja, existe  $\delta > 0$  tal

que  $f((t_0, t + \delta)) > 0$ , se  $0 < t < \delta$ , como desejávamos  
C.Q.D.

Exercício 5.1 - Considere a curva  $C(t) = (\cos 3t \cos t,$   
 $\cos 3t \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

- (i) Faça um desenho dela, assinalando com setas sua orientação. Localize alguns pontos (por exemplo  $C(\pi/2)$ )
- (ii) Verifique que ela é regular
- (iii) Verifique que ela é fechada
- (iv) Quais são os pontos de auto-interseção ( $C(t_i) = C(t_j)$ ). Descreva as linhas tangentes nesses pontos.

Se  $\tilde{C}$  é uma reparametrização regular de  $C$  então  $\tilde{C}'(t) = \frac{d\psi}{ds} C'(\psi(s))$ . Logo as direções dos vetores tangentes  $\tilde{C}'(s)$  e  $C'(\psi(s))$  coincidem ou são contrários dependendo de que  $\frac{d\psi}{ds}$  seja positivo ou negativo. Como  $\frac{d\psi}{ds}$  é sempre diferente de zero e contínua, se é positiva num ponto então é positiva em todo seu intervalo de definição. Dizemos que a mudança de parâmetros preserva a orientação se  $\frac{d\psi}{ds} > 0$ , e que reversa a orientação se  $\frac{d\psi}{ds} < 0$ . Dizemos que duas parametrizações regulares de uma curva tem a mesma orientação se a mudança de parâmetro  $\psi$

preserva a orientação, e orientação contrária se reverte a orientação. Isto justifica dizer que existem duas possíveis orientações para uma curva; geometricamente também vemos que há duas maneiras de botar uma seta na curva.

Exercício 5.2 - Verifique que  $C_1, C_2: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $C_2$  definida como  $C_2(t) = C_1(a+b-t)$  são duas parametrizações com orientação contrária.

Exercício 5.3 - Considere as curvas  $C(t) = (\text{sen } t, \text{cos } t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , e  $D(t) = (\text{cos } t, \text{sen } t)$ ,  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ ; mostre que elas são parametrizações da mesma curva, e que tem orientação contrária.

## 6. Comprimento de arco

Uma noção fundamental em geometria é a da distância entre dois pontos. Já definimos a distância entre dois pontos  $v$  e  $w$  de  $\mathbb{R}^2$  como a norma  $|v-w|$ . Dada uma curva  $C: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  vamos definir uma distância entre  $C(a)$  e  $C(b)$ , mas que será medida ao longo da curva e não será em geral  $|C(b) - C(a)|$ . A situação é análoga à de um mapa rodoviário: a distância entre duas cidades é medida ao longo da estrada percorrida, e, a não ser que a estrada não tenha curvas, é diferente da distância percorrida por um helicóptero que viaje em linha reta.

A melhor maneira de descrever essa noção de distância entre  $C(a)$  e  $C(b)$  é a seguinte: Dada uma curva diferenciável  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definimos seu comprimento

$l$  como a integral  $\int_a^b |C'(t)| dt$ . Esta integral existe pois  $|C'(t)|$  é uma função contínua. Este comprimento  $l$  goza das seguintes propriedades, que não demonstraremos: (i) dado qualquer  $\epsilon > 0$ , existem números  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  tais que  $l - \epsilon < \sum_{i=1}^n |C(t_i) - C(t_{i-1})| \leq l$ ; (ii) para qualquer número finito de números  $a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = b$ , temos que

$\sum_{i=1}^n |C(t_i) - C(t_{i-1})| \leq l$ . Há uma interpretação geométrica para esta soma  $\sum_{i=1}^n |C(t_i) - C(t_{i-1})|$ ; ela equivale ao comprimento de um polígono inscrito na curva  $C$  com vértices os pontos  $C(t_i)$ ,  $i=0, 1, \dots, n$ . (Veja a figura 6.1)

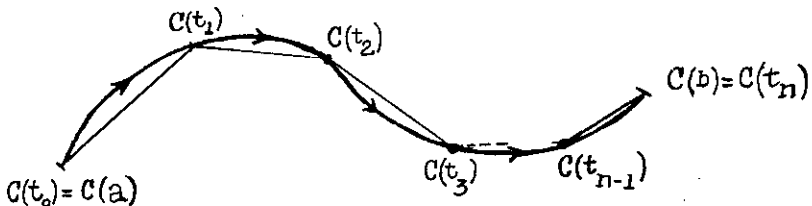


Figura 6.1. Um polígono inscrito na curva

Exercício 6.1 - Calcule o comprimento das seguintes curvas

(i)  $C(t) = w+tv$ ,  $2 \leq t \leq 5$ , onde  $v$  e  $w$  são vetores constantes de  $\mathbb{R}^2$ .

(ii)  $C(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

(iii)  $C(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$   $0 \leq t \leq 2\pi$

(iv)  $C(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$

Proposição 6.1 - Se  $\tilde{C}$  é uma reparametrização regular de  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , então o comprimento  $\ell$  de  $\tilde{C}$  é igual ao comprimento  $\ell$  de  $C$ .

Demonstração: Seja  $\tilde{C} = C \circ \psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Sabemos que

$$\frac{d\tilde{C}}{d\tau} = \frac{dC}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{d\tau} \quad \text{com} \quad \frac{d\psi}{d\tau} \neq 0. \quad \text{Agora}$$
$$\tilde{\ell} = \int_c^d |\tilde{C}'(\tau)| d\tau = \int_c^d |C'(\psi)| \left| \frac{d\psi}{d\tau} \right| d\tau = \int_{a=\psi(c)}^{b=\psi(d)} |C'(t)| dt = \ell,$$

onde a penúltima igualdade decorreu do teorema de cálculo sobre mudança de variáveis. C.Q.D.

Uma consequência da proposição acima é que o comprimento não é alterado por uma mudança de orientação. De fato, a mudança de orientação corresponde a reparametrização dada por  $\psi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ ,  $\psi(t) = a+b-t$ .

Agora vamos introduzir uma parametrização muito especial, que usaremos em inúmeras ocasiões; considere a



função  $s(t) = \int_{t_0}^t |c'(u)| du$ . Se  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva regular, então usando o teorema fundamental de cálculo, temos que  $s'(t) = |c'(t)| > 0$ . Logo a função  $s: [a, b] \rightarrow [c, d]$  é estritamente monótona e tem uma função inversa  $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  com derivada  $\left. \frac{d\psi}{d\tau} \right|_{\tau=s(t)} = \frac{1}{s'(t)} \neq 0$ . Segue-se que  $\tilde{C}(s) = (C \circ \psi)(s)$  é uma reparametrização regular de  $C$ .

Proposição 6.2 - A reparametrização  $\tilde{C}(s)$ ,  $c \leq s \leq d$ , goza das seguintes propriedades

- (i)  $|\tilde{C}'(s)| = 1$
- (ii) o comprimento  $\tilde{\ell}$  de  $\tilde{C}$  é igual a  $d-c$ .

Demonstração: Pela regra da cadeia  $\tilde{C}'(s) = \frac{d\psi}{ds} C'(\psi(s))$ .

Por outro lado,

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|C'(t)|} = \frac{1}{|C'(\psi(s))|}$$

Logo,

$$\tilde{C}'(s) = \frac{1}{|C'(\psi(s))|} |C'(\psi(s))|;$$

consequentemente,  $|\tilde{C}'(s)| = 1$ . Finalmente, temos que

$$\tilde{\ell} = \int_c^d |\tilde{C}'(s)| ds = \int_c^d ds = d-c.$$

C.Q.D.

Quando uma curva  $D(s)$  está parametrizada como a

curva da proposição 6.2, isto é, com  $|D'(s)| = 1$ , para todo  $s$ , dizemos que ela está parametrizada pelo comprimento de arco. Com esta parametrização o tempo usado no percurso da curva corresponde exatamente ao comprimento da curva, isto é, à distância percorrida.

Proposição 6.3 - Se  $D_2: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma reparametrização de  $D_1: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , e ambas as curvas estão parametrizadas pelo comprimento de arco, então a mudança de parâmetros é da forma  $t = \psi(s) = \pm s + \iota$ , onde  $\iota$  é uma constante.

Demonstração: Temos que  $D_2 = D_1 \circ \psi: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Pela regra da cadeia,  $|D_2'(f)| = |D_1'(t)| |\psi'(s)|$ , onde  $t = \psi(s)$ . Como  $|D_2'(s)| = |D_1'(t)| = 1$ , temos que  $|\psi'(s)| = 1$ ; se  $D_1$  e  $D_2$  tem a mesma orientação então  $\psi'(s) = 1$ , e integrando, obtemos que

$$\psi(s) = \psi(c) + \int_c^s \psi'(u) du = a + s - c = s + (a - c)$$

O caso em que as orientações são contrárias é análogo.

Observação. Uma curva regular por partes também pode ser parametrizada pelo comprimento de arco.

Exercício 6.2 - Dê um exemplo de uma curva  $\mathbb{R}^2$  (i.e.

$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ni |C(t)| \leq \lambda, \forall t$ ) que tenha compr

mento não limitado. Um tal exemplo tem que ter auto-interseções obrigatoriamente?

Exercício 6.3 - Um submarino e um caça-submarino se encontram no mesmo ponto  $P$  do mar ( $\mathbb{R}^2$ ). O submarino sai de  $P$  em linha reta a uma velocidade constante de 20 km/h. O caça-submarino sai em busca dele sem saber a direção que ele tomou, mas sabendo que vai em linha reta a uma velocidade 20km/h. Supondo que o caça-submarino só tenha combustível para navegar 2.000 kms, qual deverá ser o percurso do caça-submarino para ter certeza de ficar sobre o submarino de novo antes de que acabe seu combustível. (Ache a curva que parametriza seu percurso onde o parâmetro  $t$  denota o tempo percorrido em horas).

Exercício 6.4 - Calcule o comprimento da curva  $C(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ .

Faça um desenho dela.

Exercício 6.5 - Demonstre que uma curva regular por parte tem uma singularidade essencial se e somente se sua parametrização pelo comprimento de arco tem uma singularidade.

Exercício 6.6 - (i) Parametrize a cicloide (Exemplo 3.1) pelo comprimento de arco. (ii) Usando

o exercício 6.5, mostre que tem singularidades essenciais

Exercício 6.7 - Convença-se que calcular o comprimento da elipse  $(C(t) = (a \cos t, b \sin t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $a, b > 0$  é difícil.

## 7. Curvatura; equações de Frenet

Nesta seção definimos a noção de curvatura de curvas planas e desenvolvemos as fórmulas de Frenet para essas curvas. A curvatura é uma função que mede em cada ponto quanto a curva deixa de ser uma linha reta, quanto ela se desvia da linha tangente.

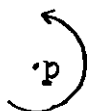
Precisaremos introduzir a noção de referenciais ao longo de uma curva. Já vimos que podemos dar uma orientação natural à linha tangente de uma curva num ponto  $C(t_0)$  i.e., a direção de  $C'(t_0)$ . Podemos fazer o mesmo com a linha normal, mas primeiro precisamos introduzir alguns conceitos interessantes. Um referencial num ponto  $p$  de  $\mathbb{R}^2$  é um par ordenado de vetores linearmente independentes  $\{v_1, v_2\}_p$  com base em  $p$ . Uma orientação de  $\mathbb{R}^2$  em  $p$  é uma maneira de dar a volta ao redor de  $p$ . Há duas maneiras, uma no sentido anti-horário e outra no sentido horário (veja a figura 7.1); a primeira é chamada a positiva, ou natural, e a segunda negativa. A dupla

de vetores  $\{v_1, v_2\}$  que define um referencial em  $p$ ,

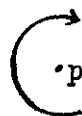
(a) Anti-horário (positiva)                      (b) horário (negativa)

Figura 7.1 Orientação

define também uma orientação em  $p$ , a que vai de  $v_1$  a  $v_2$  pelo menor ângulo que eles definem (veja a figura 7.2).



(a) positiva



(b) negativa

Figura 7.2 Orientações induzidas por  $\{v_1, v_2\}$

A orientação induzida pode ser anti-horária (figura 7.2 (a)), ou horária (figura 7.2 (b)). Observe que a orientação de  $\{v_1, v_2\}$  é a contrária de  $\{v_2, v_1\}$ .

Analiticamente podemos pensar na orientação de um referencial da seguinte maneira. Se  $v_1 = \{x_1, y_1\}$

e  $v_2 = (x_2, y_2)$  então dizemos que o par ordenado  $\{v_1, v_2\}$  induz a orientação positiva (negativa) se o determinante da matriz  $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$  é positivo (negativo). Observe que esta definição é coerente com a definição geométrica dada antes.

Exercício 7.1 - Considere a matriz ortogonal

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \text{ que define}$$

uma rotação de ângulo  $\theta$  em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $\{v_1, v_2\}$  um referencial ortonormal (isto é  $v_1$  e  $v_2$  são vetores perpendiculares de norma 1). Demonstre que o par  $\{v_1, v_2\}$  induz a orientação positiva (negativa) se, e somente se  $v_2 = A_{\pi/2} v_1$  ( $v_1 = A_{\pi/2} v_2$ ).

Exercício 7.2 - (i) Mostre que  $A_\theta(v_1) \cdot A_\theta(v_2) = v_1 \cdot v_2$   
para qualquer  $\theta \in \mathbb{R}$  e qualquer  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

$$(ii) v_1 \cdot A_{\pm\pi/2} v_1 = 0$$

$$(iii) v_1 \cdot A_\pi v_1 = -\|v_1\|^2$$

Dada uma curva regular  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  vamos definir um referencial muito especial ao longo de  $C$ . Isto é, em cada ponto  $C(t)$  vamos escolher um par de vetores

linearmente independentes (neste caso serão na realidade ortonormais). Estes vetores tem sua origem no ponto  $C(t)$ , mas, para efeito de cálculos, geralmente pensaremos neles como centrados na origem  $(0,0)$  de  $\mathbb{R}^2$  {isto é, os identificamos com os vetores centrados na origem paralelos a eles}. Definimos  $T(t)$  como o vetor tangente a  $C$  em  $C(t)$  normalizado, ou seja,  $T(t) = \frac{C'(t)}{|C'(t)|}$ , e  $N(t)$ , o vetor normal a  $C(t)$ , como  $N(t) = A_{\pi/2}(T(t))$ , (vejam a definição de  $A_{\pi/2}$  no exercício 7.1). Em cada ponto  $C(t)$  temos então um referencial ortonormal  $\{T(t), N(t)\}$  que é chamado o referencial de Frenet em  $C(t)$ .

Dada uma curva regular  $C: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco, definimos sua curvatura  $k(s)$  no ponto  $C(t)$  como

$$(7.1) \quad k(s) = C''(s) \cdot N(s)$$

Como  $C'(s) \cdot C'(s) = |C'(s)|^2 = 1$ , temos que

$$(C'(s) \cdot C'(s))' = 2C''(s) \cdot C'(s) = 0.$$

Segue-se que  $C''(s) = \lambda N(s)$  pois  $T(s) = C'(s)$ . Logo,

$$(7.2) \quad |k(s)| = |C''(s)|$$

e,

$$(7.3) \quad C''(s) = (C''(s) \cdot T(s))T(s) + \\ + (C''(s) \cdot N(s))N(s) = k(s)N(s)$$

Exemplo 7.1 - Seja  $C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  a seguinte parametrização do círculo unitário,  $C(t) =$

$= (\cos t, \sin t)$ . O vetor tangente ao círculo é  $T(t) =$   
 $= (-\sin t, \cos t) = C'(t)$ . O vetor normal unitário é

$$N(t) = A_{\pi/2}(T(t)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = -C(t)$$

Agora, para calcular a curvatura, só precisamos achar  $C''(t)$ , pois  $C$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Temos que  $C''(t) = (-\cos t, -\sin t) = N(t)$ . Logo a curvatura do círculo é  $S(t) = C''(t) \cdot N(t) = 1$ , para todo  $t$ .

Exercício 7.3 - Calcule a curvatura do círculo de raio  $a$ ,  $a > 0$ . Primeiro ache uma parametrização pelo comprimento de arco, e depois veja qual é o vetor  $N(t)$ .

Outra maneira de olhar a curvatura é a seguinte,

$$(7.4) \quad k(s) = T'(s) \cdot N(s),$$

onde  $s$  é o parâmetro de comprimento de arco. De fato, neste caso,  $T(s) = C'(s)$ ; logo (7.4) é simplesmente ou-



tra maneira de escrever (7.1). Mas esta fórmula (7.4) sugere a seguinte reformulação da curvatura.

Proposição 7.1 - As derivadas dos vetores  $T(s)$  e  $N(s)$  de uma curva parametrizada pelo comprimento de arco satisfazem as seguintes equações de Frenet.

$$(7.5) \quad T'(s) = 0 + k(s)N(s)$$

$$(7.6) \quad N'(s) = -k(s)T(s) + 0$$

Demonstração: Como  $|T(s)| = |N(s)| = 1$ , temos que

$T'(s) \cdot T(s) = N'(s) \cdot N(s)$ . Como  $T(s) \cdot N(s) = 0$ , também temos que  $T'(s) \cdot N(s) = -N'(s) \cdot T(s)$ . Lembramos agora que dados vetores ortonormais  $T(s)$  e  $N(s)$ , qualquer vetor  $w$  (centrado em  $C(s)$ ) pode ser escrito como

$$w = (w \cdot T(s))T(s) + (w \cdot N(s))N(s)$$

Logo, pela fórmula 7.4,

$$\begin{aligned} T'(s) &= (T'(s) \cdot T(s))T(s) + (T'(s) \cdot N(s))N(s) = \\ &= 0 + k(s)N(s). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} N'(s) &= (N'(s) \cdot T(s))T(s) + (N'(s) \cdot N(s))N(s) = \\ &= (-T'(s) \cdot N(s))T(s) + 0 = -k(s)T(s) \end{aligned}$$

C.Q.D.

Finalmente vamos calcular a curvatura de uma curva em termos de uma parametrização arbitrária, pois na prática a função  $\psi$ , que dá a reparametrização pelo comprimento de arco, não é, em geral, fácil de determinar. Seja  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular arbitrária, e seja  $\tilde{C}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sua reparametrização pelo comprimento de arco. Lembramos a regra da cadeia obtida anteriormente,

$$\tilde{C}'(s) = \frac{d\psi}{ds} C'(\psi(s)), \quad \text{com} \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{|C'(\psi(s))|}$$

Então,

$$C''(s) = \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 C''(\psi(s)) + \frac{d^2\psi}{ds^2} C'(\psi(s))$$

Logo, temos a seguinte fórmula

$$(7.7) \quad k(s) = \frac{C''(\psi(s)) \cdot N(s)}{|C'(\psi(s))|^2}$$

Mais explicitamente, escrevendo  $C(t) = (x_1(t), x_2(t))$ , temos que  $C'(t) = (x_1'(t), x_2'(t))$  e

$$\begin{aligned} N(t) &= A_{\pi/2}(T(t)) = A_{\pi/2} \left( \frac{(x_1'(t), x_2'(t))}{(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2)^{1/2}} \right) = \\ &= \frac{(-x_2'(t), x_1'(t))}{(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Então podemos escrever (7.7) da seguinte maneira

$$(7.8) \quad k(t) = \frac{x_1'(t)x_2''(t) - x_2'(t)x_1''(t)}{(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2)^{3/2}}$$

pois  $C''(\psi(s)) = C''(t) = (x_1''(t), x_2''(t))$ .

Então podemos escrever (7.7) da seguinte maneira

$$(7.9) \quad k(t) = \frac{x_1'(t)x_2''(t) - x_2'(t)x_1''(t)}{(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2)^{3/2}},$$

pois  $C''(\psi(s)) = C''(t) = (x_1''(t), x_2''(t))$ .

Exercício 7.4 - Demonstre que uma curva  $C(t)$  é um pedaço de linha reta se e somente se sua curvatura é identicamente nula.

Exercício 7.5 - Considere a curva  $C(t) = (a \cos t, b \sin t)$   $a, b > 0$   $0 \leq t \leq \pi$ . Faça um desenho. Dê as equações da linha tangente e normal no ponto  $C(\pi/4)$ . Dê os vetores  $T(\pi/4)$  e  $N(\pi/4)$ ; incorpore-os ao desenho. Calcule as curvaturas de  $C(t)$ . Diga onde é que as curvaturas atingem seus máximos e mínimos locais; quantos destes máximos e mínimos há? Este número depende dos valores de  $a$  e  $b$ ?

Exercício 7.6 - Como ficam as equações de Frenet se não pedimos que a curva esteja parametrizada pe-

lo comprimento de arco?

Exercício 7.7 - Faça o desenho de uma curva fechada com exatamente um ponto de auto-interseção, um intervalo onde a curvatura é positiva, e um intervalo onde a curvatura é negativa. Diga qual é a orientação da curva e marque os intervalos.

Exercício 7.8 - Faça o desenho de uma curva regular com  $C(t_1) = C(t_2)$  e  $C'(t_1) = -N'(t_2)$ .

Exercício 7.9 - Faça o desenho de uma curva fechada  $C$  tal que exista  $t_1$  e  $t_2$  satisfazendo as seguintes condições

- (i)  $C(t_1) = C(t_2)$
- (ii)  $C''(t_1) = C'(t_2) < 0$
- (iii)  $C''(t_2) \cdot (C'(t_1)) < 0$

Exercício 7.10 - Ache a curvatura da cicloide (definida no exemplo 3.1).

Exercício 7.11 - Calcule a curvatura da catenária  $C(t) = (t, a \cosh(t/a))$ ,  $a > 0$

## 8. Teorema fundamental das curvas planas

O seguinte teorema nos dá uma idéia da importân-

cia da curvatura de uma curva. Ele nos diz que a curvatura determina a curva.

Teorema 8.1 - Se  $k(s)$ ,  $s_0 \leq s \leq s_1$ , é uma função contínua arbitrária, então existe uma curva regular, única a menos de uma isometria do plano, para a qual  $k(s)$  é sua curvatura e  $s$  o seu parâmetro de comprimento de arco.

Antes de passarmos a demonstração, lembramos que as isometrias de  $\mathbb{R}^2$ , as aplicações de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  que preservam as distâncias (i.e.  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ ), são combinações de (i) translações, (ii) rotações, e (iii) reflexões do plano. Este fato será estudado em detalhe na seção 10. Mas, agora só precisamos saber que as translações  $T(w) = v+w$  e que as rotações  $A_\theta$  (veja o exercício 7.1) são isometrias, o que se verifica, o que se verifica facilmente. Observamos também que a curva que obteremos a partir de  $k(s)$  será diferenciável de classe  $C^2$ .

Dada uma curva regular  $C: [a, b]$  parametrizada pelo comprimento de arco, podemos considerar a seguinte função

$$(8.1) \quad \theta(s) = \theta(a) + \int_a^s k(u) du$$

onde  $\theta(a)$  é um número tal que

$$C'(a) = \cos \theta(a)e_1 + \text{sen } \theta(a)e_2 ,$$

onde  $e_1 = (1,0)$  e  $e_2 = (0,1)$  é a base usual de  $\mathbb{R}^2$ .

Afirmamos o seguinte:

$$(8.2) \quad C'(s) = \cos \theta(s)e_1 + \text{sen } \theta(s)e_2$$

Para demonstrar isto, basta demonstrar que  $\cos \theta(s) = x_1'(s)$  e  $\text{sen } \theta(s) = x_2'(s)$ , onde  $C(s) = (x_1(s), x_2(s))$ , ou, equivalentemente, que  $\text{arccotan}(x_2(s)/x_1'(s)) = \theta(s)$  (como basta demonstrar isso localmente, se  $x_1'(s_0)$  fosse zero, então usaríamos nesse ponto arcocotangente). Agora, temos que

$$\begin{aligned} & (\text{arccotan}(x_2'(s)/x_1'(s)))' = \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2'(s)}{x_1'(s)}\right)^2} \frac{(x_2''(s)x_1'(s) - x_1''(s)x_2'(s))}{(x_1'(s))^2} = k(s) = \theta'(s) \end{aligned}$$

pela fórmula (7.8), já que  $x_1'(s)^2 + x_2'(s)^2 = |C'(s)|=1$ .

Logo,  $\text{arccotan}(x_2'(s)/x_1'(s))$  é igual localmente a  $\theta(t)$  a menos de uma constante; mas a definição de  $\theta(a)$  garante nossa afirmação.

Esta função  $\theta(s)$ , que mede o ângulo que  $C'(s)$

faz com o vetor fixo  $e_1$ , aparecerá em outras seções também. Sua propriedade mais importante é que está globalmente definida como uma função contínua.

Demonstração: Como fizemos acima, definimos uma função

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k(s) du$$
 (a constante não é relevante aqui); também definimos uma função  $f(s)$  tomando valores vetoriais da seguinte maneira.

$$(8.3) \quad f(s) = \cos \theta(s)e_1 + \sin \theta(s)e_2$$

Finalmente, integrando a fórmula (8.2) definimos (8.4)

$$(8.4) \quad C(s) = +\left(\int_{s_0}^s \cos \theta(r) dr\right) e_1 + \\ + \left(\int_{s_0}^s \sin \theta(r) dr\right) e_2 .$$

Verificamos a seguir que  $C$  satisfaz as condições especificadas. Primeiro observamos que  $C'(s) = f(s)$ ; conseqüentemente,  $C'(s) \cdot C'(s) = \cos^2 \theta(s) + \sin^2 \theta(s) = 1$ , ou seja,  $C$  está parametrizada pelo comprimento de arco, e é regular. Também temos que

$$C''(s) = \frac{d\theta}{ds} (-\sin \theta(s)e_1 + \cos \theta(s)e_2) = \\ = \frac{d\theta}{ds} N(s) = k(s)N(s) ,$$

o que implica que  $k(s)$  é realmente a curvatura de  $C(s)$ .

Como sabemos só que  $k(s)$  é contínua, somente podemos garantir que  $C$  é de classe de diferenciabilidade  $C^2$ .

Por último, devemos demonstrar a unicidade a menos de isometrias do plano. Sejam  $C_1(s)$  e  $C_2(s)$ ,  $s_0 \leq s \leq s_1$ , duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco  $s$  e com a mesma curvatura  $k(s)$ . Usando uma translação  $\varphi$  do plano podemos assumir que  $C_1(s) = C_2(s_0)$ . Ao mesmo tempo, por uma rotação  $A_\lambda$ , podemos também assumir que  $C'_1(s_0)$  é igual a  $C'_2(s_0)$ . Como a curvatura é a mesma para as duas curvas e  $C'_1(s_0)$  é igual a  $C'_2(s_0)$  temos que as funções  $\theta_1$  e  $\theta_2$  da fórmula (8.1) são iguais. Logo, usando a fórmula (8.2), tem que  $C'_1(s) = C'_2(s)$  para todo  $s$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} C_1(s) &= C_1(s_0) + \int_{s_0}^s C'_1(u) du = C_2(s_0) + \int_{s_0}^s C'_2(u) du = \\ &= C_2(s) \end{aligned}$$

C.Q.D.

Observação. Foi dito que podemos supor  $C_1(0) = C_2(0)$  e  $C'_1(0) = C'_2(0)$ , i.e. podemos identificar estes pontos e vetores via uma translação  $\varphi$  seguida de uma rotação  $A_\lambda$ . Outra maneira de enunciar o resultado seria dizendo que existe uma isometria  $A_\lambda \circ \varphi$  tal que  $C_2(s) = (A_\lambda \circ \varphi)_0 C_1(s)$ . O leitor pode tentar demonstrar o teorema



deste jeito (isto ficará mais claro na seção 10).

Observação. Mais tarde será útil destacar que qualquer curva regular pode se escrever como na fórmula (8.3), com a função  $\theta$  definida em termos da curvatura pela fórmula (8.1), fixando  $\theta(0)$  pela igualdade  $A_{\theta(0)}(e_1) = T(0)$  (identificando  $T(0)$  com seu vetor paralelo passando pela origem). Mais tarde também usaremos o fato de que  $k(s) = \frac{d\theta}{ds}$ .

Exercício 8.1 - Quais são as curvas que tem curvatura constante? Demonstre sua resposta.

Exercício 8.2 - Calcule a curvatura da curva do exercício 5.1. Ela é positiva sempre?, zero em alguns pontos? Onde é  $\frac{dk}{ds} = 0$ ?

Exercício 8.3 - Descreva a curva  $C(s)$  parametrizada pelo comprimento de arco, cuja curvatura é dada por  $\frac{1}{k(s)} = c_1 s + c_2$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são números reais positivos (e constantes).

Exercício 8.4 - Mostre que dada uma função contínua  $k(s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura igual a  $k(t)$ , tal que  $C(0) = (0,1)$  e  $C'(0) = (1,0)$ .

Exercício 8.5 - Se uma curva fechada  $C: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tem curvatura  $k(t)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , tal que  $k'(s) \geq 0$ , que podemos concluir sobre essa curva? (Lembre-se que uma curva fechada é uma curva com  $C(0) = C(1)$  e  $C^{(n)}(0) = C^{(n)}(1)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ )

Exercício 8.6 - Qual é a curva parametrizada pelo comprimento de arco cuja curvatura é dada pela função  $k(s) = a/(a^2+s^2)$ , com  $C(0) = 0$ , e  $C'(0) = (1, 0)$ ?

## 9. Convexidade local

Num exercício da última seção vimos que a curvatura  $k(s)$  de uma curva  $C(s)$  ser identicamente zero implicava que ela era uma linha reta. Agora vamos dar uma interpretação geométrica do fato de uma curva ter curvatura  $k(s) \neq 0$ .

Definição. Dizemos que uma curva  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é convexa em  $C(s_0)$  se existe um  $\delta > 0$  tal que  $C((s_0 - \delta, s_0 + \delta))$  esteja contido num dos dois semiplanos fechados em que a linha tangente a  $C$  em  $C(s_0)$  divide o plano. Dizemos que  $C$  é estritamente convexa em  $C(s_0)$  se  $C$  é convexa em  $C(s_0)$  e se existe  $\delta > 0$  tal que  $C((s_0 - \delta, s_0 + \delta)) \cap L_{C(s_0)} = \{C(s_0)\}$ , onde  $L_{C(s_0)}$  é a

linha tangente de  $C$  em  $C(s_0)$ .

Observação. No ponto  $C(s_0)$  temos o referencial de Frenet  $\{T(s_0), N(s_0)\}$ . A linha tangente a  $C$  em  $C(s_0)$  é o subconjunto  $L_{C(s_0)} = \{v \in \mathbb{R}^2; v = C(s_0) + rC'(s_0), r \in \mathbb{R}\} = \{v \in \mathbb{R}^2: v \cdot N(s_0) = C(s_0) \cdot N(s_0)\}$ .

Logo,  $L_{C(s_0)}$  divide o plano em dois semiplanos fechados

$\bar{B}^+ = \{v \in \mathbb{R}^2: v \cdot N(s_0) \geq C(s_0) \cdot N(s_0)\}$  e  $\bar{B}^- = \{v \in \mathbb{R}^2: v \cdot N(s_0) \leq C(s_0) \cdot N(s_0)\}$ , e em dois semiplanos abertos  $B^+ = \{v \in \mathbb{R}^2: v \cdot N(s_0) > C(s_0) \cdot N(s_0)\}$  e  $B^- = \{v \in \mathbb{R}^2: v \cdot N(s_0) < C(s_0) \cdot N(s_0)\}$ .

Exercício 9.1 - Mostre que

$$\bar{B}^+ \cap \bar{B}^- = L_{C(s_0)}$$

$$B^+ \cap B^- = \emptyset$$

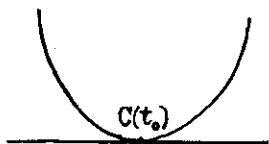
$$B^+ \cap L_{C(s_0)} = B^- \cap L_{C(s_0)} = \emptyset$$

$$B^+ \cup B^- \cup L_{C(s_0)}$$

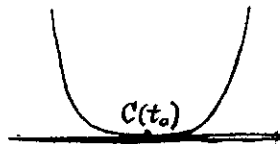
Com esta notação dizer que  $C$  é convexa em  $C(s_0)$  equivale a exigir que existe  $\delta > 0$  tal que ou

$C((s_0 - \delta, s_0 + \delta)) \subset \bar{B}^+$  ou  $C((s_0 - \delta, s_0 + \delta)) \subset \bar{B}^-$ . E  $C$  é

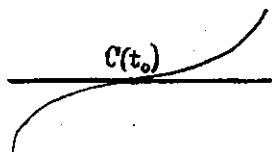
estritamente convexa em  $C(s_0)$  se existe  $\delta > 0$  tal que  $C((s_0 - \delta, s_0 + \delta)) - \{C(s_0)\}$  esteja totalmente contido em  $B^+$  ou em  $B^-$ . Veja a figura 9.1.



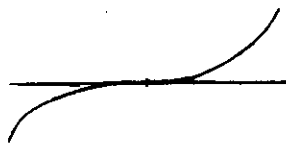
a) estritamente convexa



b) convexa



c) não convexa



d) convexa em  $C(t_0)$

Figura 9.1. Convexidade em  $C(s_0)$

Proposição 9.1. Seja  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular.

Se para  $s_0 \in (a, b)$   $k(s_0) \neq 0$  então

$C$  é estritamente convexa em  $C(s_0)$ .

Demonstração: Assumamos que  $k(s_0) > 0$ ; o caso em que

$k(s_0) < 0$  pode ser demonstrado analogamente.

De acordo com a observação feita acima, basta demonstrar

que a função  $f(s) = (C(s) - C(s_0)) \cdot N(s_0)$  é positiva se

$0 < |s - s_0| < \delta$ . A existência de um  $\delta$  com estas proprie-

dades implicará a existência de um  $\delta'$  com estas proprie-

dades para uma reparametrização de  $C$ , e viceversa. Logo

podemos assumir que  $C$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Agora  $f'(s) = C'(s) \cdot N(s_0)$  e  $f'(s_0) = 0$ ; também temos que  $f''(s) = C''(s) \cdot N(s_0)$ , pois  $N(s_0)$  é constante, e  $f''(s_0) = C''(s_0) \cdot N(s_0) = k(s_0)$ . Como  $f(s_0) = (C(s_0) - C(s_0)) \cdot N(s_0) = 0$ , temos pela fórmula de Taylor que numa vizinhança de  $s$

$$(9.2) \quad f(s) = \frac{1}{2}(s-s_0)^2 k(s_0) + \frac{1}{6}(s-s_0)^3 h(s)$$

onde  $k(s)$  é uma função contínua. Logo

$$f(s) = \frac{1}{2}(s-s_0)^2 [k(s_0) + \frac{1}{3}(s-s_0)k(s)] .$$

Como  $k(s)$  é contínua ela é limitada numa vizinhança de  $s_0$  e  $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{3}(s-s_0)k(s) = 0$ , o que implica que existe um  $\delta$  tal que  $|\frac{1}{3}(s-s_0)k(s)| \leq \frac{1}{4}k(s_0)$  se  $|s-s_0| < \delta$ . Logo se  $|s-s_0| < \delta$ ,  $f(s) \geq \frac{1}{2}(s-s_0)^2 [\frac{3}{4}k(s_0)]$ , e  $f(s) > 0$ , se  $0 < |s-s_0| < \delta$ . C.Q.D.

Exercício 9.2 - Descreva a curva  $C(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ . Faça um desenho. Esta curva vai para o infinito no plano? Ela tem comprimento finito ou infinito? Ela é convexa?

Exercício 9.3 - Seja  $A: [a, b] \rightarrow \{\text{espaço das matrizes } 2 \times 2\}$  uma função matricial de uma variável, isto é, para cada  $t$ ,  $A_t$  é uma matriz  $2 \times 2$ . Suponha que

esta matriz seja diferenciável de classe  $C^\infty$ , isto é, se  $a_{ij}(t)$  são coeficientes da matriz  $A_t$  então essas funções  $a_{ij}: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  são  $C^\infty$ . Seja  $D: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva diferencial. Demonstre que  $C(t) = A_t(D(t))$  é uma curva diferencial. Se  $D(t)$  é regular então  $C(t)$  o é também? Explique sua resposta. Calcule  $C'(t)$  em termos das derivadas de  $A$  e de  $D$ .

Exercício 9.4 - Faça um desenho de uma curva  $C: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  fechada (i.e.  $C(a) = C(b)$  e  $C^{(n)}(a) = C^{(n)}(b)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) localmente estritamente convexa tal que existam uma linha  $L \subset \mathbb{R}^2$  e exatamente seis pontos ( $C(a) = C(b)$  conta como um ponto) na curva cujas linhas tangentes sejam paralelas a  $L$ . Dada essa curva e outra linha arbitrária  $K \subset \mathbb{R}^2$ , que podemos dizer sobre o número de pontos de  $C$  com linhas tangentes paralelas a  $K$ ?

Exercício 9.5 - Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas curvas regulares. Se  $C_1(t_1) = C_2(t_2)$ , e  $C'_1(t_1)$  e  $C'_2(t_2)$  são linearmente independentes então  $\exists \delta > 0$  tal que  $C_1((t_1 - \delta, t_1 + \delta)) \cap C_2((t_2 - \delta, t_2 + \delta)) = \{C(t_1)\}$ . Sugestão: Use o teorema da função inversa para funções diferenciáveis de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Se não conseguir chegar a uma solução, faça o exercício assumindo que uma das curvas é uma linha

reta.

Exercício 9.6 - Mostre que não existe uma curva localmente convexa satisfazendo as condições do exercício 7.9.

Proposição 9.2. Seja  $C$  uma curva regular. Suponhamos que para  $s \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ ,  $k(s) \geq 0$  então  $C$  é convexa em  $t_0$ , (na direção  $N(t_0)$ ).

Demonstração: Queremos demonstrar que existe  $\delta > 0$  tal que  $h(t) = C(t) \cdot N(t_0) \geq C(t_0) \cdot N(t_0) = h(t_0)$  se  $|t - t_0| < \delta_1$ . Suponhamos por simplicidade que  $C$  está parametrizada pelo comprimento de arco, que  $C'(t_0) = e_1$  e que, conseqüentemente,  $N(t_0) = e_2$ . Temos que  $h'(t) = C'(t) \cdot N(t_0)$ . Na seção 8 vimos que  $C'(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ , onde  $\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t k(s) ds = \int_{t_0}^t k(s) ds$ , o que implica que  $h'(t) = \sin(\int_{t_0}^t k(s) ds)$ . Logo, existe  $\delta_1 < \delta$ ,  $\delta_1 > 0$  tal que  $\sin(u) \geq 0$  se  $t_0 < u < t_0 + \delta_1$  e que  $\sin(u) \leq 0$ , se  $t_0 - \delta_1 < u < t_0$ , pois  $\sin u$  é uma função crescente em  $(-\pi/2, \pi/2)$ ; conseqüentemente,  $h(t) = h(t_0) + \int_{t_0}^t h'(u) du \geq h(t_0)$ , pois, se  $u \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ , então  $k(u) \geq 0$  e portanto  $h'(u) \geq 0$ . C.Q.D.

Observação. Vimos que qualquer curva regular  $C$  é localmente o gráfico de uma função real (veja a proposição 3.2), i.e.,  $C(t) = (t, f(t))$ , onde  $f$  é uma função diferenciável. Se por simplicidade, assumirmos que  $C'(t_0) = (1, 0)$  e que  $C(t_0) = (t_0, 0)$  então a conclusão da Prop. 9.1 (Prop. 9.2) é que existe um  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |t - t_0| < \delta$  então  $f(t) > 0$  ( $f(t) \geq 0$ ). A curva  $C$  divide uma vizinhança  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times (-\epsilon, \epsilon)$  de  $C(t_0)$  em duas partes  $D^+ = \{(x, y) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times (-\epsilon, \epsilon) : y > f(x)\}$  e  $D^- = \{(x, y) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times (-\epsilon, \epsilon) : y < f(x)\}$ . Veja a figura 9.2. Temos que  $N(t_0)$  aponta na direção de  $D^+$ .

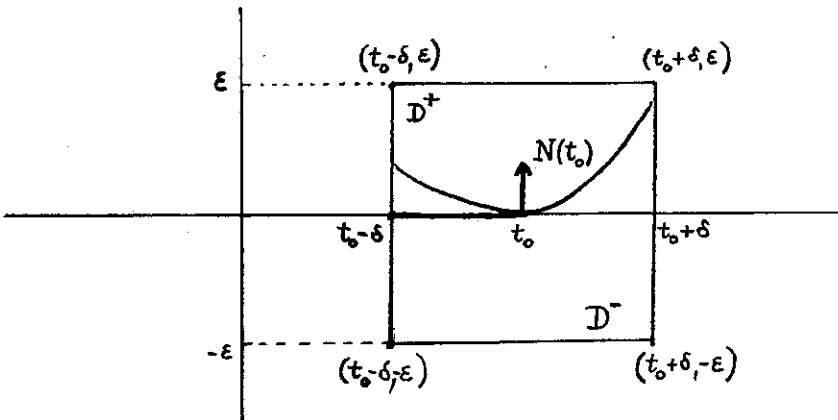


Figura 9.2

Agora é fácil ver que se o segmento da linha tangente  $(t_0 - \delta, t_0) \times \{0\}$  não intersecta  $C((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$  então ele está totalmente contido em  $D^-$ .



Exercício 9.7 - (Teorema de Fabricius-Bjene). Consideremos

a seguinte classe  $S$  de curvas regulares fechadas de  $\mathbb{R}^2$ . Uma curva  $C$  está em  $S$  se satisfaz as seguintes condições: (i) tem um número finito  $A$  de pontos de auto-interseção  $p = C(t_1) = C(t_2)$ , onde  $C'(t_1)$  e  $C'(t_2)$  são linearmente independentes, (ii) tem um número finito  $\ell$  de pontos onde  $k = 0$ , e nestes pontos  $k' \neq 0$  (estes pontos são chamados pontos de inflexão), (iii) qualquer linha afim de  $\mathbb{R}^2$  é tangente a  $C$  em no máximo dois pontos; estas linhas tangentes em dois pontos são chamados tangentes duplas; nos pontos de contato exigimos que  $k \neq 0$ . Também exigimos que existam no máximo um número finito delas. Se a curva está localmente, ao redor dos dois pontos de contato, do mesmo lado da tangente dupla dizemos que ela é uma tangente dupla externa. Caso contrário, a chamamos de interna. Seja  $I$  o número de tangentes duplas internas e  $E$  o número de tangentes duplas externas.

O teorema de Fabricius-Bjene afirma que existem números racionais  $p_1, p_2, p_3$  e  $p_4$ , constantes, tal que para qualquer curva  $C$  em  $S$  temos que

$$p_1 A + p_2 \ell + p_3 I + p_4 E = 0$$

Assumindo que o teorema é verdadeiro, ache os números  $p_1, p_2, p_3$  e  $p_4$ . Sugestão: estude muitos exemplos.

## 10. Isometrias de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Uma isometria do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  (ou  $\mathbb{R}^2$ ) é uma aplicação  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (ou  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) que preserva distâncias, isto é, tal que  $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$ , para todo  $p$  e  $q$  em  $\mathbb{R}^3$  (ou  $\mathbb{R}^2$ ). Na geometria euclidiana clássica do plano é importante o conceito de figuras congruentes. A idéia é que duas figuras congruentes diferem só na sua posição no plano. Por exemplo, dois triângulos congruentes têm os mesmos ângulos e seus lados correspondentes têm o mesmo comprimento. Para nós, dois objetos geométricos serão congruentes se existe uma isometria do espaço que manda uma na outra; por exemplo, dadas duas curvas  $C_1, C_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , diremos que elas são congruentes (ou que são iguais a menos de uma isometria) se existe uma isometria  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $C_1(t) = \varphi(C_2(t))$ , para todo  $t$  em  $[a, b]$ . Na seção 8 vimos que duas curvas no plano com a mesma função curvatura são congruentes.

Como as demonstrações não dependem da dimensão do espaço euclidiano, estudamos logo o caso de  $\mathbb{R}^3$  que nos será útil quando estudarmos as curvas em  $\mathbb{R}^3$  e as superfícies. Obviamente os resultados valerão para o plano  $\mathbb{R}^2$  também.

Nesta seção as técnicas usadas são de álgebra linear. Em parte incluímos uma versão (ou introdução) das

aplicações ortogonais.

Primeiro demonstraremos que as isometrias são aplicações lineares (ortogonais) compostas com translações do espaço euclidiano. Depois veremos que muitas propriedades das curvas são preservadas por isometria.

Uma translação  $T_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação da forma  $T_v(w) = w+v$ . Ela é isométrica pois  $d(T_v(w), T_v(z)) = |T_v(w) - T_v(z)| = |v+w-v-z| = |w-z| = d(w, z)$ .

Uma aplicação ortogonal  $C: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação linear que preserva o produto escalar, isto é,  $C(v) \cdot C(w) = v \cdot w$ .

Proposição 10.1. Uma aplicação ortogonal é uma isometria.

Demonstração:  $d(C(v), C(w))^2 = |C(v) - C(w)|^2 = |C(v-w)|^2 = C(v-w) \cdot C(v-w) = (v-w) \cdot (v-w) = |v-w|^2 = d(v, w)^2$ . C.Q.D.

Inversamente, queremos caracterizar as isometrias de  $\mathbb{R}^3$  em termos de translações e de aplicações ortogonais. Temos uma resposta completa no seguinte resultado.

Teorema 10.2. Se  $F$  é uma isometria então existe uma única translação  $T$  e uma única aplicação ortogonal  $C$  tal que

$$F = T \circ C .$$

Este fato é surpreendente no sentido de que a priori não sabemos sequer que uma isometria é contínua. Precisaremos o seguinte lema.

Lema 10.3 - Se  $F$  é uma isometria tal que  $F(0) = 0$ , então  $F$  é uma aplicação ortogonal.

Demonstração: Primeiro demonstraremos que  $F$  preserva o produto escalar, e depois que é linear.

Observamos primeiro que  $F$  preserva normas pois  $|F(v)| = d(0, F(v)) = d(F(0), F(v)) = d(0, v) = |v|$ .

Por outro lado,

$$|F(v)-F(w)| = d(F(v), F(w)) = d(v, w) = |v-w|$$

Mas

$$|F(v)-F(w)|^2 = |F(v)|^2 - 2F(v) \cdot F(w) + |F(w)|^2$$

e 
$$|v-w|^2 = |v|^2 - 2v \cdot w + |w|^2$$

Como  $|F(v)| = |v|$  e  $|F(w)| = |w|$ , temos que  $F(v) \cdot F(w) = v \cdot w$  como desejávamos.

Agora demonstramos que  $F$  é linear. Se  $e_1, e_2, e_3$  são os três vetores que definem os eixos ortonormais usuais de  $R^3$ , então  $F(e_1), F(e_2)$  e  $F(e_3)$  são também ortonormais. Logo,  $F(\lambda v + w) = \sum_{i=1}^3 [F(\lambda v + w) \cdot F(e_i)] \cdot F(e_i) = \sum_{i=1}^3 [(\lambda v + w) \cdot e_i] F(e_i) =$

$$= \lambda \sum_{i=1}^3 (v \cdot e_i) F(e_i) + \sum_{i=1}^3 (w \cdot e_i) F(e_i) = \lambda \sum_{i=1}^3 [F(v) \cdot F(e_i)] F(e_i) + \\ + \sum_{i=1}^3 [F(w) \cdot F(e_i)] F(e_i) = \lambda F(v) + F(w),$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v$  e  $w \in \mathbb{R}^3$ .

C.Q.D.

Demonstração do teorema 10.2: Seja  $T$  a translação

$$T_{F(0)} = w + F(0). \text{ A inversa}$$

de  $T$ ,  $T^{-1}$  é a translação  $T_{-F(0)}$  pois  $TT^{-1}(w) = \\ = T(w - F(0)) = w - F(0) + F(0) = w$ . Temos que  $T^{-1}F$  é uma isometria tal que  $T^{-1}F(0) = T^{-1}(F(0)) = F(0) - F(0) = 0$ . Logo  $T^{-1}F$  satisfaz as condições do lema 10.3. Segue-se que  $T^{-1}F$  é uma aplicação ortogonal  $C$ , e  $F = T(T^{-1}F) = TC$ , como queríamos.

Para demonstrar a unicidade, suponha que  $F$  pode ser escrita também como a composta  $\tilde{T}\tilde{C}$  de outra translação  $\tilde{T}$  e de outra aplicação ortogonal  $\tilde{C}$ . Temos então que  $C = (T^{-1}\tilde{T})\tilde{C}$ . Mas  $C$  e  $\tilde{C}$  são aplicações lineares que mandam a origem na origem; logo  $T^{-1}\tilde{T}(0) = 0$ . Mas  $T^{-1}\tilde{T}$  é uma translação  $\tilde{T}_v(w) = v+w$  e  $\tilde{T}_v(0) = 0$  implica que  $v=0$ , ou seja  $T^{-1}\tilde{T}(w) = w = I(w)$ , onde  $I$  é a aplicação identidade. Consequentemente,  $T = \tilde{T}$ . Finalmente  $F = TC = \tilde{T}\tilde{C}$  e  $C = T^{-1}(T\tilde{C}) = \tilde{C}$ . C.Q.D.

Como são estas aplicações ortogonais?

Seja  $(C_{ij})_{ij=1,2,3}$  a matriz que representa a aplicação

ortogonal  $C$ . Temos que se  $v = (a_1, a_2, a_3)$  então

$$C(v) = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 C_{ij} a_j \right) e_i = \left( \sum_{j=1}^3 C_{1j} a_j, \sum_{j=1}^3 C_{2j} a_j, \sum_{j=1}^3 C_{3j} a_j \right).$$

Da mesma forma, se  $w = (b_1, b_2, b_3)$ ,

$$C(w) = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 C_{ij} b_j \right) e_i$$

Logo

$$C(v) \cdot C(w) = \sum_{i=1}^3 \left[ \left( \sum_{j=1}^3 C_{ij} a_j \right) \left( \sum_{k=1}^3 C_{ik} b_k \right) \right] = \sum_{i,j,k=1}^3 C_{ij} a_j C_{ik} b_k.$$

A transposta de  $C$  é a matriz  ${}^t C$  com coeficientes

$({}^t C)_{ij} = C_{ji}$ . Temos então que

$$\begin{aligned} (10.1) \quad C(v) \cdot C(w) &= \sum_{j,k} \left[ \left( \sum_{i=1}^3 C_{ij} C_{ik} \right) a_j b_k \right] = \\ &= \sum_{j,k} ({}^t C C)_{jk} a_j b_k = \sum_j \left( \sum_{k=1}^3 ({}^t C C)_{jk} b_k \right) a_j = \\ &= v \cdot ({}^t C C) w. \end{aligned}$$

A fórmula (10.1) vale para qualquer matriz mas no nosso caso podemos dizer mais pois nós sabemos que  $C$  preserva o produto escalar. Logo temos que

$$(10.2) \quad {}^t C C(w) \cdot v = C(w) \cdot C(v) = w \cdot v, \quad \text{para todo } v \text{ e } w.$$

Logo como vale para todo  $v$ , temos que

$${}^t C C(w) = w,$$

ou seja

$$(10.3) \quad {}^t_{CC} = I$$

ou

$$(10.4) \quad {}^t_C = C^{-1}$$

Observação: Muitas vezes a equação (10.3) é usada para definir as aplicações ortogonais.

Exercício 10.1 - Demonstre que  $CT_v = T_{C(v)} C$ , onde  $C$  é ortogonal.

Exercício 10.2 - Se

$$C = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v = (3, 1, -6) \\ w = (1, 0, 3) \end{cases}$$

demonstre que  $C$  é ortogonal, calcule  $C(v)$  e  $C(w)$  e verifique que  $C(v) \cdot C(w) = v \cdot w$ .

Exercício 10.3 - Se  $F = T_a C$  onde  $a = (1, 3, -1)$  e

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e se  $v = (2, -2, 8)$ , então ache as coordenadas de (a)  $w = F(v)$ , (b)  $w = F^{-1}(v)$ , e (c)  $w = CT_a(v)$ .

Exercício 10.4 - Em cada um dos seguintes casos diga se

$F$  é uma isometria. Em caso afirmativo ache sua componente de translação e sua componente ortogonal.

(a)  $F(v) = -v$

(b)  $F(v) = (v \cdot w)w$ , onde  $|w| = 1$

(c)  $F((a_1, a_2, a_3)) = (a_3^{-1}, a_1^{-2}, a_2^{-3})$

(d)  $F((a_1, a_2, a_3)) = (a_1, a_2, a_1 + a_2)$

A seguir daremos uma descrição mais detalhada das matrizes ortogonais. Se  $v_1, v_2$  e  $v_3$  são os vetores colunas da matriz  $C$  (e, conseqüentemente, os vetores linhas da matriz  ${}^tC$ ), então a matriz  ${}^tCC$  pode-se escrever como

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & v_1 \cdot v_3 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3 \\ v_3 \cdot v_1 & v_3 \cdot v_2 & v_3 \cdot v_3 \end{pmatrix}.$$

Logo temos que  $C$  é ortogonal se e somente se  ${}^tCC = I$  se e somente se  $v_1, v_2$  e  $v_3$  formam um referencial ortogonal (isto é  $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$ ) de  $\mathbb{R}^3$ . O mesmo vale para os vetores linhas.

No caso de  $\mathbb{R}^2$ , as aplicações ortogonais  $C$  tem uma forma muito simples. Se  $C = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ , então



temos que  $a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$  e que  $ac+bd = 0$ . Ou seja,

$$c^2 = \frac{b^2 d^2}{a^2} = \frac{b^2(1-c^2)}{1-b^2}, \text{ ou } c^2 - b^2 c^2 = b^2 - b^2 c^2, \text{ o que impli}$$

ca que  $c = \pm b$ . Então temos dois casos (1)  $b = c$  e  $a = d$ , ou (2)  $b = -c$  e  $d = -a$ . Como  $a^2+b^2 = 1$ , podemos escrever  $a = \cos \theta$  e  $b = \sin \theta$  para algum ângulo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . No caso (1) então temos que

$$(10.5) \quad C = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = A_\theta,$$

uma rotação de ângulo  $\theta$ ; no caso (2) temos que

$$(10.6) \quad C = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

uma reflexão seguida de uma rotação de ângulo  $\theta$ .

Observação: No caso (1)  $\det C=1$  e no caso (2)

$\det C=-1$ . Nesta análise identificamos (confundimos) a aplicação linear  $C$  é sua matriz com referência à base usual  $e_1(1,0)$  e  $e_2 = (0,1)$ .

A situação das aplicações ortogonais  $C$  de  $\mathbb{R}^3$  não é muito mais complicada. Acontece que existe um vetor  $v_1 \in \mathbb{R}^3$  tal que  $C(v_1) = \pm v_1$ ,  $|v_1| = 1$  pois a dimensão é ímpar (verifique este fato num texto de álgebra

linear;  $v_1$  é um autovetor de  $C$ ). Mas, se  $P$  é o plano ortogonal à linha  $L = \{\lambda v_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$  então  $C(P) = P$ , pois  $C$  é ortogonal. Seja  $\{v_2, v_3\}$  um referencial ortonormal de  $P$ . Seja  $D$  a restrição  $C/P$ . Com relação à base ortonormal  $\{v_1, v_2, v_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  (em geral diferente da base usual  $\{e_1, e_2, e_3\}$ ) a matriz de  $C$  é da forma

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & D \end{pmatrix},$$

onde, pelo que vimos acima  $D$  é da forma (10.5) ou (10.6).

Agora veremos que algumas propriedades das curvas no plano são preservadas por isometrias. Dada uma curva  $C(t)$  e uma isometria  $F$  consideremos a nova curva  $D = F \circ C$ . Temos o seguinte fato:  $D'(t) = A(C'(t))$ , se  $F = T_v \cdot A$  ( $T_v$  é a translação e  $A$  a aplicação ortogonal).

De fato

$$\begin{aligned} D'(t) &= \frac{d}{dt} (A(C(t)) + v) = \frac{d}{dt} A(C(t)) = \\ &= \frac{d}{dt} (a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)) = \\ &= (a_{11}x'_1(t) + a_{12}x'_2(t), a_{21}x'_1(t) + a_{22}x'_2(t)) = A(C'(t)). \end{aligned}$$

onde  $C(t) = (x_1(t), x_2(t))$  e  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

Proposição 10.4 - Se  $F$  é uma isometria e  $C$  está parametrizada pelo comprimento de arco, então  $D = F \cdot C$  também está parametrizada pelo comprimento de arco.

Demonstração: Seja  $F = T_{\mathbf{v}}A$ , onde  $A$  é ortogonal. Como  $A$  preserva a norma, temos que  $|D'(t)| = |A(C'(t))| = |C'(t)| = 1$ . C.Q.D.

Dizemos que uma isometria  $F = T_{\mathbf{v}}A$  preserva a orientação se  $\det A > 0$ . (Observe que na realidade o determinante de uma matriz ortogonal só pode ser  $\pm 1$ ).

Proposição 10.5 - A curvatura de uma curva plana é preservada por isometrias que preservam a orientação.

Demonstração: Sejam  $C$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e  $F = T_{\mathbf{v}}A$  uma isometria, com  $\det A > 0$ . Queremos provar que a curva  $D(t) = F(C(t))$  tem a mesma curvatura que  $C$ , nos pontos correspondentes. Vimos que  $D'(t) = A(C'(t))$ ; pela mesma razão  $D''(t) = A(C''(t))$ . Agora  $N(t) = A_{\pi/2}(T(t))$ . Se denotamos por  $\{\tilde{T}(t), \tilde{N}(t)\}$  o referencial de Frenet da curva  $D(t)$ , então temos que

$$\begin{aligned}\tilde{T}(t) &= \frac{D'(t)}{|D'(t)|} = \frac{A(C'(t))}{|A(C'(t))|} = \frac{A(C'(t))}{|C'(t)|} = \\ &= A \left( \frac{C'(t)}{|C'(t)|} \right) = A(T(t)) .\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\tilde{N}(t) = A_{\pi/2}(\tilde{T}(t)) = A_{\pi/2}(A(T(t))) .$$

Como  $\det A > 0$  e  $A$  é ortogonal temos que vale a fórmula (10.5), i.e.,  $A = A_{\theta}$ . Mas rotações comutam, isto é,  $A_{\pi/2}A_{\theta} = A_{\theta}A_{\pi/2}$ , logo

$$\tilde{N}(t) = A_{\pi/2}(A(T(t))) = A(A_{\pi/2}(T(t))) = A(N(t)) .$$

Finalmente temos que

$$\begin{aligned}\tilde{k}(t) &= D''(t) \cdot \tilde{N}(t) = A(C''(t)) \cdot A(N(t)) = C''(t) \cdot N(t) = \\ &= k(t) ,\end{aligned}$$

pois  $A$  é ortogonal.

Exercício 10.5 - Sejam  $C$  uma curva regular e  $F$  uma isometria que inverte a orientação. Se  $k$  é a curvatura de  $C$  e  $\tilde{k}$  a curvatura da curva  $D = F \circ C$ , demonstre que  $\tilde{k}(t) = -k(t)$ .

Exercício 10.6 - Demonstre que a convexidade local de uma

curva é preservada por isometrias.

Exercício 10.7 - Demonstre que uma isometria manda linhas retas e linhas paralelas em linhas paralelas.

Exercício 10.8 - Considere a aplicação  $B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida pela equação  $B(v) = \lambda v$ , onde  $\lambda$  é uma constante positiva (uma homotetia). Dada uma curva regular  $C$ , calcule a curvatura de  $D = B \circ C$  em termos da curvatura de  $C$ .

Exercício 10.9 - Sejam  $C, D: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  curvas regulares tais que  $D(t) = C(1-t)$ . Seja  $k$  a curvatura de  $C$  e  $\tilde{k}$  a curvatura de  $D$ ; há alguma relação entre  $\tilde{k}(t)$  e  $k(1-t)$ ? Existe alguma isometria  $F$  tal que  $D = F \circ C$ ? Explique.

Exercício 10.10 - Considere a curva  $C(t) = (t^2, t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Faça um desenho dela. Calcule sua curvatura  $k(t)$ ? ela é limitada ou tende ao infinito? Quando é  $k'(t) = 0$ ? Existe algum ponto  $C(t)$  onde a linha tangente à curva seja paralela à linha  $y=0$ ? A curva é localmente convexa? Diga qual é a isometria que manda a curva  $C$  na curva  $D(t) = (t^2, (t-1)^2)$ ,  $-\infty < t < \infty$ .

Exercício 10.11 - Seja  $C: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular tal que para todo  $s$  em  $\mathbb{R}$  existe uma isometria do plano  $F_s$  tal que  $F_s(C(t)) = C(t+s)$ , para todo  $t$  em  $\mathbb{R}$ . Que podemos concluir sobre esta curva?

Exercício 10.12 - Mostre que  $v \cdot w = |v||w| \cos \theta$ .

Exercício 10.13 - Mostre que o produto de matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

11. Raio de curvatura. Evolutas e involutas de curvas planas.

O centro de curvatura de uma curva regular  $C(t)$ , com curvaturas diferentes de zero, é o ponto  $D(t)$  localizada na linha normal a  $C$  no ponto  $C(t)$  a uma distância  $p(t) = 1/k(t)$ , na direção  $N(t)$ , do ponto  $C(t)$ . Mais explicitamente,

$$(11.1) \quad D(t) = C(t) + 1/k(t)N(t)$$

A nova curva  $D(t)$  é chamada a evoluta de  $C(t)$ . Suponhando agora que  $C$  está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que a derivada da evoluta é

$$(11.2) \quad D'(s) = C'(s) + (1/k(s))'N(s) + 1/k(s)N'(s)$$

Pela fórmula (7.5),  $N'(s) = -k(s)T(s) = -k(s)C'(s)$ ;

logo temos.

$$(11.3) \quad D'(s) = (1/k(s))' N(s) = \frac{-k'(s)}{k(s)^2} N(s).$$

Segue-se então que a evoluta é uma curva regular se e somente se  $k'(s)$  é diferente de zero. Um ponto onde  $k'(s) = 0$  será um ponto singular da evoluta.

Uma observação interessante e importante que podemos tirar da fórmula (11.3) é que a linha normal a  $C$  no ponto  $C(s_0)$  é igual à linha tangente a  $D$  no ponto  $D(s_0)$ . De fato, a linha normal a  $C$  é

$$\begin{aligned} \{C(s_0) + \lambda N(s_0) : \lambda \in \mathbb{R}\} &= \{D(s_0) + \beta N(s_0) : \beta \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{D(s_0) + \lambda D'(s_0) : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad , \end{aligned}$$

pelas fórmulas (11.1) e (11.3). De outro ponto de vista podemos dizer que a evoluta de  $C$  é uma curva que é tangente a cada instante a uma das linhas normais a  $C$ . Esta situação será examinada em maiores detalhes na seção 16. (Diremos que a curva  $D$  é a envolvente da família de linhas normais a  $C$ ).

Observe que a curva  $D$  não está em geral parametrizada pelo comprimento de arco. O comprimento de um segmento regular de  $D$ , digamos de  $D(s_0)$  a  $D(s_1)$  é dado

por

$$(11.4) \quad \int_{s_0}^{s_1} |D'(s)| ds = \int_{s_0}^{s_1} |(1/k(f))'| ds = \\ = |1/k(s_1) - 1/k(s_0)| \cdot$$

Aqui usamos o teorema fundamental de cálculo e o fato que  $k'(s)$  não é zero em  $[s_0, s_1]$ .

A curva  $C$  pode ser obtida de volta da curva  $D$  pela seguinte fórmula

$$(11.5) \quad C(s) = D(s) + 1/k(s) \left( \frac{D'(s)}{|D'(s)|} \right) \cdot$$

Estas duas últimas fórmulas sugerem a seguinte interpretação geométrica da relação entre  $C$  e  $D$ . Vamos construir  $C$  a partir de  $D$  da seguinte maneira. Cobrimos  $D$  com uma corda inextensível com uma extremidade fixa em  $D(s_0)$ . Desenrole a corda até o ponto  $D(s_1)$ . Isto é, neste instante uma parte da curva continuará recobrendo  $D$ , de  $D(s_0)$  a  $D(s_1)$ , e a outra sai pela linha tangente a  $D$  no ponto  $D(s_1)$  na direção  $D'(s_1)$ . (Para simplificar vamos assumir que  $k$  e  $k'$  são sempre positivas.) Agora marque um ponto  $P$  na corda, na parte que está sobre a li nha tangente a  $D$  em  $D(s_1)$ , a distância  $d = 1/k(s_1)$  de  $D(s_1)$ . (Lembre-se que  $k$  é sempre a função curvatura



de  $C$ ). Obviamente neste instante  $P$  é o ponto  $C(s_1)$ . À medida que enrolamos ou desenrolamos a corda sobre  $D$  o ponto  $P$  descreve uma curva no plano. Afirmamos que esta curva é  $C$ . De fato, quando tivermos desenrolado a corda até o ponto  $D(s_2)$ ,  $s_0 < s_2 < s_1$ , uma parte  $D([s_0, s_2])$  continuará enrolada e a outra parte que vai de  $D(s_2)$  até  $P$  estará na linha tangente a  $D$ . Queremos mostrar que o comprimento desta última parte é igual a  $1/k(s)$ . Mas este comprimento é igual ao comprimento que ia de  $D(s_1)$  até  $P$ , igual a  $d = 1/k(s_1)$ , mais o comprimento da curva  $D$  entre  $s_2$  e  $s_1$ , que pela fórmula (11.4) é igual a  $(1/k(s_2) - 1/k(s_1))$ . Finalmente, observando que a nova curva é perpendicular à corda vemos que

$$P = D(s_2) + \frac{1}{k(s_2)} \left( \frac{D'(s_2)}{|D'(s_2)|} \right) = C(s_2) \quad ,$$

pela fórmula (11.5).

Dizemos que  $C$  é uma involuta de  $D$ . Se no processo de desenrolar a corda, ao invés de especificar a distância inicial  $d$  como sendo igual a  $1/k(s_1)$  tivéssemos escolhido uma constante arbitrária, teríamos obtido outra curva que chamaríamos também de involuta de  $D$ . Por isso, embora exista uma só evoluta existem uma infinidade de involutas de uma dada curva (Observe então que podemos definir as involutas de qualquer curva  $D$ ).

Exercício 11.1 - Uma involuta de uma curva é perpendicular a corda geratriz em todo ponto.

Exercício 11.2 - Se  $C$  é uma involuta de  $D$  então  $D$  é a evoluta de  $C$ .

Exercício 11.3 - Pode-se concluir que dada uma curva  $D$  todas as suas involutas diferem apenas por isometrias de  $\mathbb{R}^2$ ? Explique.

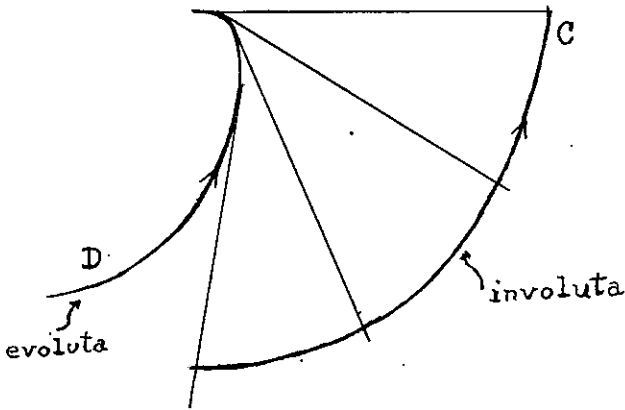


Figura 11.1 Evoluta e involuta

EXEMPLOS:

Exemplo 11.1 - Considere a cicloide  $C(t)=(t-\text{sen } t, 1-\text{cost})$ ;

veja o exemplo 3.2. Queremos achar sua evoluta. Para uma parametrização arbitrária de  $C$  temos que sua evoluta é dada por

$$(11.6) \quad D(t) = C(t) + 1/k(t)N(t) = C(t) + \frac{|C'(t)|^2 N(t)}{C''(t) \cdot N(t)},$$

usando as fórmulas (7.6) e (11.1). Ou, mais explicitamente, se  $C(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,

$$(11.7) \quad D(t) = (x_1(t), x_2(t)) + \frac{(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2)(-x_2'(t), x_1'(t))}{x_1'(t)x_2''(t) - x_2'(t)x_1''(t)}$$

No caso particular da cicloide temos então que

$$(11.8) \quad D(t) = (t - \text{sen } t, 1 - \text{cos } t) + \frac{2-2 \text{cos } t}{\text{cos } t - 1}(-\text{sen } t, 1 - \text{cos } t) = (t + \text{sen } t, \text{cos } t - 1)$$

Afirmamos que  $D(t)$  é outra cicloide; de fato, se  $T_v$  é a translação  $w \rightarrow w+v$ , onde  $v = (\pi, 2)$  então temos que  $C(\pi+t) = T_v(D(t))$ , pois

$$T_v(t + \text{sen } t, \text{cos } t - 1) = (\pi + t + \text{sen } t, \text{cos } t + 1) = (\pi + t - \text{sen}(\pi + t), 1 - \text{cos}(\pi + t)) = C(\pi + t).$$

Logo  $D$  e  $C$  são iguais a menos de uma reparametrização e de uma isometria. Veja a figura 11.2.

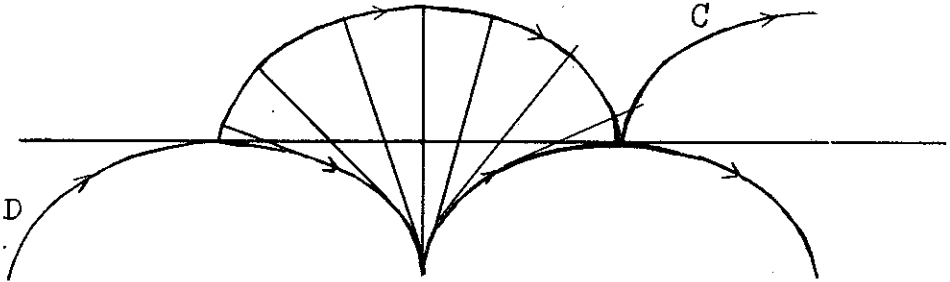


Figura 11.2. A cicloide  $C$  e sua evoluta  $D$ .

Exemplo 11.2: A elipse  $C(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  
 $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq b$ . Vamos estudar sua evoluta. Usando a equação (11.7) vemos que

(11.9)

$$\begin{aligned} D(t) &= (a \cos t, b \sin t) + \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} (-b \cos t, -a \sin t) \\ &= \left( \frac{a^2 \cos t + a^2(1 - \cos^2 t)(-\cos t) - b^2 \cos^3 t}{a}, \frac{b^2 \sin t - a^2 \sin^2 t - b^2(1 - \sin^2 t) \sin t}{b} \right) \\ &= \left( \frac{1}{a}(a^2 - b^2) \cos^3 t, \frac{1}{b}(b^2 - a^2) \sin^3 t \right). \end{aligned}$$

A evoluta da elipse, a curva  $D$ , é chamada astroide; veja a figura 11.3. Da fórmula (11.9).

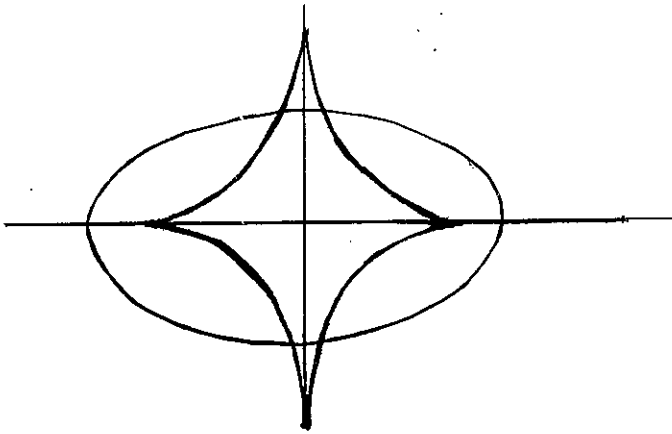


Figura 11.3. A elipse e sua evoluta, o astroide.

conclui-se que a curva  $D$  deixa de ser regular exatamente quando  $\cos t$  ou  $\sin t$  são zero, o que acontece em quatro pontos, que são chamados vértices. Na seção 14 veremos que para qualquer curva convexa a evoluta deve ter pelo menos quatro vértices.

Exercício 11.4 - Dê razões para acreditar que os vértices da evoluta da elipse são singularidades essenciais.

Exercício 11.5 - Qual é a curva evoluta do círculo unitário?

### Raio de curvatura e círculo osculador

Seja  $C$  uma curva com curvatura  $k \neq 0$  em todo ponto. A distância entre  $C(t)$  e seu centro de curvatura  $D(t) = C(t) + 1/k(t)N(t)$ , ou seja  $|1/k(t)|$ , é chamada raio de curvatura, denotado  $R(t)$ . O círculo de centro  $D(t)$  e raio  $R(t)$  é chamado o círculo osculador de  $C$  em  $C(t)$ ; veja a figura 11.4.

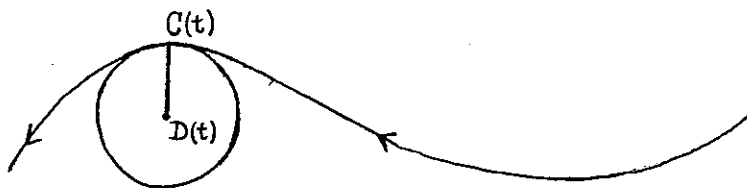


Figura 11.4. Círculo osculador no ponto  $C(t)$

O círculo osculador tem a propriedade de ser o círculo tangente a  $C$  em  $C(t)$  que melhor aproxima a curva  $C$ . A linha tangente em  $C(t)$  é a linha reta que melhor aproxima a curva perto de  $C(t)$ . O círculo osculador é uma curva que além de ter a mesma tangente a  $C$  em  $C(t)$  tem a mesma curvatura de  $C$  em  $C(t)$ . Por esta razão podemos dizer que o círculo osculador tem contato de ordem

dois com  $C$  em  $C(t)$ .

Geometricamente temos a seguinte proposição que generaliza o teorema 9.1. O leitor deve fazer vários desenhos para acreditar intuitivamente na proposição.

Proposição 11.1 - Seja  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular com  $k(t_0) > 0$ . Seja  $B_\lambda$  um círculo de raio  $|\lambda| \neq 0$  com centro  $p = C(t_0) + \lambda N(t_0)$

(i) Se  $\lambda < R(t_0)$  então existe  $\delta > 0$  tal que  $C(t)$  está fora do disco fechado determinado por  $B_\lambda$ , se  $0 < |t - t_0| < \delta$

(ii) Se  $\lambda > R(t_0)$  então existe  $\delta > 0$  tal que  $C(t)$  está dentro do disco aberto limitado por  $B_\lambda$ , se  $0 < |t - t_0| < \delta$ .

Demonstração: Considere a função  $f(t) = d(C(t), p)^2 = |C(t) - p|^2 = (C(t) - p) \cdot (C(t) - p)$ .

Temos que  $f'(t) = 2C'(t) \cdot (C(t) - p)$  e  $f''(t) = 2C'(t) \cdot C'(t) + 2C''(t) \cdot (C(t) - p)$ . Logo em  $t_0$ ,

$f(t_0) = \lambda^2$ ,  $f'(t_0) = C'(t_0) \cdot (-\lambda N(t_0)) = 0$  e  $f''(t_0) = 2|C'(t_0)|^2 + 2C''(t_0) \cdot (-\lambda N(t_0))$ , ou

$$(11.10) \quad \frac{f''(t_0)}{2|C'(t_0)|^2} = 1 - \lambda \frac{C''(t_0) \cdot N(t_0)}{|C'(t_0)|^2} = 1 - \lambda k(t_0)$$

Como  $B = f^{-1}(\lambda^2)$  e  $f(t) > 0$  implica que  $C(t)$  está fora de  $B$ , o que precisamos mostrar para concluir (i) é que  $f''(t_0) > 0$ , pois com este fato podemos usar o teorema de Taylor como no teorema 9.1 para concluir que existe um  $\delta > 0$  tal que  $f(t) > 0$  se  $0 < |t - t_0| < \delta$ . Mas pela fórmula (11.10)  $f''(t_0) > 0$  se e somente se  $1 - \lambda k(t_0) > 0$  ou seja,  $\lambda < 1/k(t_0) = R(t_0)$ .

O item (ii) é demonstrado analogamente observando que  $\lambda > R(t_0)$  implica que  $f''(t_0) < 0$ . C.Q.D.

Observação. A condição  $k > 0$  não é inicial pois mudando a orientação da curva uma curvatura negativa torna-se positiva.

Exercício 11.6 - Demonstre que se  $k(t_0) = 0$  então o item (i) vale para qualquer  $\lambda \neq 0$ .

Exercício 11.7 - Demonstre o teorema 9.1 usando a proposição 11.1.

Exercício 11.8 - Para a elipse quais são os maiores e menores círculos osculadores? Fixando um círculo osculador, qual é o maior  $\delta$  (da Proposição 11.1) possível?

Exercício 11.9 - Seja  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva com  $k > 0$



e  $k' > 0$ . Mostre que os círculos osculadores não se interceptam.

Exercício 11.10 - Demonstre que se  $k'(t_0) \neq 0$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $C((t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \cap B = \{C(t_0)\}$ , onde  $B$  é o círculo osculador no ponto  $C(t_0)$ .

Exercício 11.11 - Diremos que uma curva  $C$  tem a propriedade dos dois pedaços com relação a círculos (P.D.P.C.) se dado qualquer círculo  $B$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $B$  separa  $C$  no máximo em dois pedaços. Como esta frase, embora seja bem geométrica e intuitiva, é um pouco vaga, daremos uma versão analítica dela:  $C$  tem a P.D.P.C. se\* dado qualquer círculo  $B$  de  $\mathbb{R}^2$   $C^{-1}(\mathbb{R}^2 - B)$  consiste no máximo de dois intervalos; se a curva  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é fechada, dois intervalos do tipo  $[a, t_1]$  e  $[t_2, b]$  contam como um.

Demonstre que se uma curva regular fechada  $C: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ , tem a P.D.P.C. então ela é um círculo (claro, a parametrização pode ser arbitrária).

## 12. A indicatrix normal. A curvatura total

Nesta seção introduzimos para curvas planas con-

ceitos de caráter global. Um deles, a curvatura total, tem sentido somente para curvas no plano. O outro, a curvatura absoluta total, aparecerá também no estudo das curvas no espaço de três dimensões.

Seja  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Considere a seguinte aplicação diferenciável, chamada a indicatrix normal,  
 $g: [a, b] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ,  $g(t) = N(t)$ , onde  $S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2: |v|=1\}$  é o círculo unitário, que a cada ponto da curva associa seu vetor normal (com base na origem  $(0,0)$  de  $\mathbb{R}^2$ ). Sabemos pelas fórmulas de Frenet que a derivada desta função  $g$  é  $g'(t) = -k(t)T(t)$ . Temos também outra função  $h: [a, b] \rightarrow S^1$ ,  $h(t) = T(t)$  com derivada  $h'(t) = k(t)N(t)$  que chamamos a indicatrix tangencial. Como  $g(t) = A_{\pi/2}(h(t))$ , muito do que vale para uma destas funções vale para a outra.

Um exemplo do tipo de pergunta que estas funções nos ajudarão a responder é o seguinte: dada uma direção  $v$  (um vetor  $v \in S^1$ ) existe um ponto da curva  $C$  onde sua linha normal (ou tangente) seja paralela à direção  $v$ ? Em termos mais analíticos poderíamos reformular esta pergunta da seguinte maneira: existe  $t_1$  tal que  $g(t_1) = v$  ( $h(t_1) = v$ )? A proposição seguinte nos dá uma resposta

parcial. Lembremos que  $C$  é fechada se  $C(a) = C(b)$ ,  
 $C^{(n)}(a) = C^{(n)}(b)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Proposição 12.1 - Se  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva fechada  
então para toda direção  $v$  existe  
 $t_1 \in [a, b]$  tal que  $g(t_1) = \pm v$ , e  $t_2 \in [a, b]$  tal que  
 $h(t_2) = \pm v$ .

Demonstração: Considere a função altura  $p(t) = C(t) \cdot v$ .  
Temos que  $p'(t) = C'(t) \cdot v$ . Logo  
precisamos demonstrar que existe  $t_1$  tal que  $p'(t_1) = 0$ ,  
o que implicaria que  $v = \pm N(t_1) = g(t_1)$ . Mas, acontece  
que  $p$  é uma função tal que  $p(a) = p(b)$ ; logo nosso re-  
sultado segue então do teorema de Rolle de cálculo de uma  
variável. Para demonstrar o caso de  $h$  basta aplicar o  
caso acima para a curva  $A_{\pi/2} \circ C$  (os detalhes ficam por  
conta do leitor). C.Q.D.

Exercício 12.1 - Verdadeiro ou falso: Se  $C$  é uma curva  
regular fechada então para todo  $v \in S'$   
existe  $t_1$  tal que  $g(t_1) = v$ . Demonstre ou dê um con-  
traexemplo.

Exercício 12.2 - Verdadeiro ou falso: Se  $C$  é uma curva  
regular fechada com  $k(t) \neq 0$ , para to-  
do  $t$  em  $[a, b]$ , então a aplicação  $g$  é sobre. Dmons-

tre ou dê um contraexemplo.

Se  $e_1 = (1,0)$  e  $e_2 = (0,1)$  são os vetores unitários que definem o referencial usual de  $\mathbb{R}^2$  já vimos na seção 8 que podemos escrever

$$(12.1) \quad C'(t) = \cos \theta(t)e_1 + \text{sen } \theta(t)e_2$$

para qualquer curva regular  $C$  parametrizada pelo comprimento de arco, onde

$$(12.2) \quad \theta(t) = \theta_0 + \int_a^t k(s)ds \quad ,$$

para qualquer  $\theta_0$  tal que

$$(12.3) \quad C'(a) = (\cos \theta_0, \text{sen } \theta_0)$$

Observe que, como  $\theta_0 + 2\pi n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  também satisfaz (12.3) a função  $\theta$  não é única. O ângulo  $\theta(t)$  mede, a menos de múltiplos de  $2\pi$ , o ângulo que o vetor tangente faz com a direção constante  $e_1$ . A função  $\theta$  vai somando todos estes ângulos.

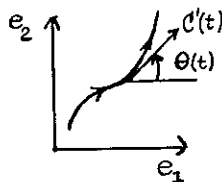


Fig. 12.1

Definimos a curvatura total de  $C$ , denotada como a integral de suas curvaturas pontuais,

$$(12.4) \quad \tau(C) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(s) ds .$$

O próximo teorema diz que a curvatura total de uma curva fechada é um inteiro o que, a primeira vista é surpreendente pois  $\tau(c)$  mede quantas voltas o vetor tangente dá no círculo unitário. Ele também ajuda a responder a pergunta feita antes da proposição 12.1.

Teorema 12.2 - Se  $C$  é uma curva regular fechada então sua curvatura total é um inteiro  $n$ , i.e.,

$$(12.5) \quad \tau(C) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(t) dt = n .$$

Cada vetor  $v$  em  $S^1$  é recoberto pelo menos  $n$  vezes pela aplicação  $g$  - a indicatrix normal- e pela aplicação  $h$  - a indicatrix tangencial.

Demonstração: Pela fórmula (12.2) temos que  $\tau(C) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$ , independentemente da constante  $\theta_0$ . Mas  $C'(b) = (\cos \theta(b), \sin \theta(b)) = C'(a) = (\cos \theta(a), \sin \theta(a))$ , pois  $C$  é fechada. Isto implica que  $\theta(b) = \theta(a) + 2\pi n$ , para algum inteiro  $n$ . Logo  $\tau(C) = n$ .

Agora para ver que um vetor  $v \in S^1$  é recoberto pelo menos  $n$  vezes pela indicatrix tangencial  $h$ , observamos que como a função  $\theta$  é contínua, pelo teorema do valor médio  $\theta([a,b])$  cobre todo o intervalo  $[\theta(a), \theta(b)]$ . Podemos escrever  $v = (\cos a, \text{sen } a)$ ; como  $[\theta(a), \theta(b)]$  tem comprimento  $2\pi n$ , existem  $n$  números da forma  $a + 2\pi i$  em  $[\theta(a), \theta(b)] \subset \theta([a,b])$ , ou seja, existem  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  em  $[a,b]$  tal que  $\theta(t_i) = a + 2\pi i$ ; mas  $h(t_i) = C'(t_i) = (\cos \theta(t_i), \text{sen } \theta(t_i)) = (\cos(a + 2\pi i), \text{sen}(a + 2\pi i)) = v$ . Finalmente, para ver que  $g$  também recobre o círculo  $S^1$  pelo menos  $n$  vezes basta observar que  $g(t) = A_{\pi/2}(h(t))$ . C.Q.D.

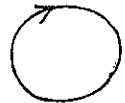
Exemplos: Veja na figura 12.2 exemplos de curvas com diferentes curvaturas total



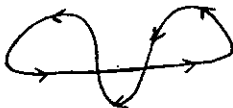
a)  $\bar{\tau}(C) = 0$



b)  $\bar{\tau}(C) = 2$



c)  $\bar{\tau}(C) = -1$



d)  $\bar{\tau}(C) = 1$



e)  $\bar{\tau}(C) = 2$

Figura 12.2. Curvatura total

Exercício 12.3 - (a) Para todo inteiro  $n$ , ache uma curva fechada com  $\tau(C) = n$ .

(b) Faça um desenho de uma curva fechada com  $\tau(C) = 3$  e dois pontos de auto-interseção (equivalente a quatro tempos em  $[a, b]$ ).

Exercício 12.4 - Ache uma curva fechada  $C$  com  $\tau(C) = 0$  e com a propriedade que  $g$  e  $h$  recobrem o círculo  $S^1$  duas vezes exatamente (i.e.  $g^{-1}(v)$  contém dois elementos para todo  $v \in S^1$ ). Faça um desenho.

Observamos que o conceito da curvatura total se aplica para uma curva em qualquer intervalo  $(a, b)$ ,  $(-\infty, \infty)$ ,  $[a, \infty)$ , etc. desde que a integral convirja.

Exercício 12.5 - Calcule  $\tau(C)$  onde  $C: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  
 $C(t) = (t, t^2)$ .

Exercício 12.6 - Suponha que  $\tau(C) = 1$  onde  $C$  é fechada. Podemos concluir que  $C$  é conexa?

Exercício 12.7 - Suponha que  $C$  é fechada e simples (sem auto-interseções) com  $k \geq 0$ . Ela é obrigatoriamente convexa? Que podemos dizer sobre  $\tau(C)$  neste caso?

Exercício 12.8 - Verdadeiro ou falso: Se  $\theta$  é a função

da fórmula (12.1) então  $\theta([a,b]) \subset [\theta(a), \theta(b)]$ . Demonstre ou dê um contraexemplo.

Exercício 12.9 - Ache curvas de comprimento infinito com  $\tau(C) = 1/2$ ,  $\tau(C) = 1/4$ . Faça desenhos.

Exercício 12.10 - Demonstre que uma curva fechada não pode ter exatamente um ponto de inflexão. (Um ponto de inflexão é um ponto onde  $k = 0$ , mas  $k' \neq 0$ ).

Exercício 12.11 - Verifique que quando  $k(t) > 0$   $h(t)$  dá a volta ao círculo na direção contra o relógio.

Exercício 12.12 - Seja  $C: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e regular. Se  $\epsilon d > 0$  e  $v \in S^1$  tal que  $v \cdot C'(t) = 0$  quando  $|t| > d$ , demonstre que  $\tau(C) = 0$ . Faça desenhos de tais curvas.

Agora vamos associar a uma curva outro número que nos dará também muitas informações sobre a geometria global das curvas planas (e, mais tarde, das curvas em  $\mathbb{R}^3$ ). Definimos a curvatura absoluta total de uma curva  $C: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  como a integral do valor absoluto da curvatura de  $C$ , ou seja,

$$(12.6) \quad \varphi(C) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b |k(t)| dt .$$



Quando  $C$  está parametrizada pelo comprimento de arco temos que  $\frac{d\theta}{ds} = k(s)$ , onde  $h(s) = C'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ ; veja a seção 8. Segue-se que

$$(12.7) \quad |h'(s)| = |C''(s)| = |k(s)|.$$

Logo, considerando  $h(s)$ ,  $a \leq s \leq b$ , como uma curva diferenciável temos que

$$(12.8) \quad 2\pi\varphi(C) = L_a^b(h),$$

onde  $L_a^b(h)$  denota o comprimento da curva  $h$ . (Observe que  $h$  deixará de ser regular nos pontos onde  $k$  for igual a zero). Em outras palavras, o comprimento da indicatrix tangencial é igual a curvatura absoluta total multiplicada por  $2\pi$ .

Demonstramos que a curvatura total  $\tau(C)$  de uma curva fechada  $C$  é sempre um inteiro. Não podemos fazer a mesma afirmação sobre sua curvatura absoluta total  $\varphi(C)$ , mas o seguinte teorema nos garante que não é muito pequena.

Teorema 12.3 - Seja  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular fechada. Temos que

$$(12.9) \quad \varphi(C) \geq 1$$

Demonstração: Vamos assumir que  $C$  está parametrizada pe

lo comprimento de arco, pois o valor  $\varphi(C)$  não depende da parametrização. A demonstração do teorema seguirá do seguinte fato sobre curvas fechadas: existem  $t_0$  e  $t_1$ , em  $[a, b]$  tal que  $C'(t_0) = -C'(t_1)$ . De fato, temos então que  $h(t_0)$  e  $h(t_1)$  são pontos diametralmente opostos no círculo  $S^1$ . Logo  $L_{t_0}^{t_1}(h) \geq \pi$ , pois qualquer curva que cubra um semicírculo tem comprimento maior ou igual a  $\pi$ . Da mesma maneira  $h|([t_1, b] \cup [a, t_0])$  liga  $h(t_1)$  e  $h(t_0)$ ; logo,  $L_{t_1}^b(h) + L_a^{t_0}(h) \geq \pi$ , o que implica que  $L_a^b(h) \geq 2\pi$ ; o teorema segue, então, da fórmula (12.8).

Agora, vamos demonstrar o fato usado acima. Como já vimos antes  $C'(t) = (\cos \theta(t), \text{sen } \theta(t))$ , onde  $\theta$  é uma função diferenciável. Seja  $d_3 = \min\{\theta(t) : t \in [a, b]\}$  e  $d_4 = \max\{\theta(t) : t \in [a, b]\}$ ; eles existem pois  $[a, b]$  é um intervalo fechado. Se não existissem  $t_0$  e  $t_1$  com  $C'(t_1) = -C'(t_0)$ , teríamos que  $d_4 - d_3 < \pi$ ; veremos que isto nos levaria a uma contradição. De fato, seja  $w = (\cos \frac{1}{2}(d_3 + d_4), \text{sen } \frac{1}{2}(d_3 + d_4))$ ; veja a figura 12.3. Então temos que,

$$\begin{aligned} w \cdot C'(t) &= w \cdot (\cos \theta(t), \text{sen } \theta(t)) = \\ &= \cos \theta(t) \cos \frac{1}{2}(d_3 + d_4) + \text{sen } \theta(t) \text{sen } \frac{1}{2}(d_3 + d_4) \\ &= \cos\left(\frac{1}{2}(d_3 + d_4) - \theta(t)\right) > 0, \end{aligned}$$

pois

$$\left| \frac{1}{2}(d_3 + d_4) - \theta(t) \right| < \pi/2 .$$

Logo, a função altura  $p(t) = w \cdot C(t)$  é sempre crescente, pois  $p'(t) = w \cdot C'(t) > 0$ . Mas isto contradiz o fato de que  $w \cdot C(a) = w \cdot C(b)$ . C.Q.D.

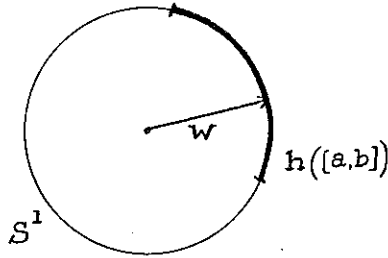


Figura 12.3

Exercício 12.13 - Diga aproximadamente quais são as curvaturas absoluta total das curvas da figura 12.2.

Exercício 12.14 - Se  $C(t) = (t_1, t^2)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , calcule  $\varphi(C)$ .

Exercício 12.15 - Convença-se que  $\varphi(C)$  não depende da parametrização de  $C$ .

Exercício 12.16 - Dada qualquer função diferenciável

$f: [a, b] \rightarrow S^1$  podemos escrevê-la como  $f(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$  onde  $\theta$  é uma função diferenciável. De fato, seguindo o exemplo do que fizemos para a indicatrix tangencial, se  $f = (f_1, f_2)$ , então  $\theta(t) = \theta_0 + \int_a^t (f_2' f_1 - f_1' f_2) dt$  serve. Podemos então definir se  $f(a) = f(b)$  o grau de  $f$  como  $\tau(f) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$ , que é um inteiro. Como um caso particular podemos definir o número de rotação de uma curva fechada  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ao redor de um ponto  $p \notin C([a, b])$  como o grau da seguinte função  $f$ ,

$$f(t) = \frac{C(t) - p}{|C(t) - p|}$$

- (a) Verifique os detalhes do que afirmamos acima
- (b) Considere a curva  $C$  da figura 12.4.

Diga quais são os possíveis números de rotação dependendo do ponto  $p \notin C([a, b])$  escolhido.



Figura 12.4. A figura 8.

Exercício 12.17 - Calcule  $\tau(c)$  para a curva da figura

12.4. Delimite no círculo unitário  $S^1$  a imagem da indicatrix tangencial, e da indicatrix normal.

Exercício 12.18 - Sejam  $C$  e  $\tilde{C}$  duas curvas regulares definidas em  $[a, b]$  tal que  $C(b) = \tilde{C}(b)$ ,  $C'(b) = \tilde{C}'(b)$ , e  $C'(a) = \tilde{C}'(a)$ . Suponha que sempre que  $g(t_1) = \tilde{g}(t_2) = v$  temos que  $k(t_1) > k(t_2) > 0$ , onde  $g$  e  $\tilde{g}$  são as indicatrizes normais. Veja a figura 12.5

(a) Mostre que  $g([a, b]) = \tilde{g}([a, b])$ .

(b) Podemos concluir que o comprimento de  $C$  é menor que o de  $\tilde{C}$ ?

(c) Podemos concluir que  $C(a)$  esta "à direita" de  $\tilde{C}(a)$ , isto é, que  $(C(a) - \tilde{C}(a)) \cdot C'(a) > 0$ ?

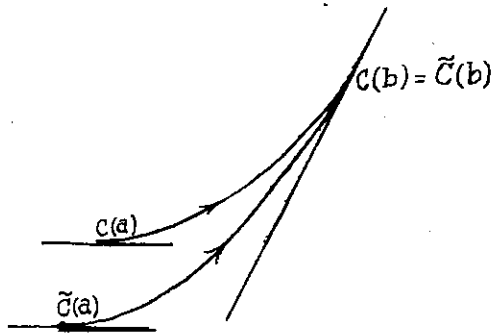


Figura 12.5

(d) Podemos concluir que  $(C(a) - \tilde{C}(a)) \cdot N(a) > 0$ ?

Exercício 12.19 - Olhando as curvas das figuras desta seção e desenhando outras, veja se existe alguma relação entre as curvaturas totais e o número de auto-interseções (pontos duplos).

### 13. Convexibilidade global

Na seção 9 vimos que certas condições sobre a curvatura de uma curva plana implicavam que ela estava localmente de um lado de sua linha tangente. Agora veremos que certas condições globais sobre curvas fechadas simples, como a de que a curvatura não mude de sinal ou de que a curvatura absoluta total seja mínima, nos permitem juntar os resultados locais para chegar à conclusão de que a curva é globalmente convexa. Precisaremos introduzir alguns conceitos novos. Também usaremos, sem demonstrá-lo, o teorema de curvas de Jordan; este resultado antigo e interessante garante que uma curva simples fechada separa o plano em duas partes.

Dados pontos  $p$  e  $q$  em  $\mathbb{R}^2$  considere o segmento de linha reta  $\overline{pq} = \{tq + (1-t)p : t \in [0,1]\}$  que os liga; dizemos que  $B \subset \mathbb{R}^2$  é um conjunto convexo de  $\mathbb{R}^2$  se dados quaisquer pontos  $p$  e  $q$  em  $B$  temos que  $\overline{pq} \subset B$ ; veja a figura 13.1

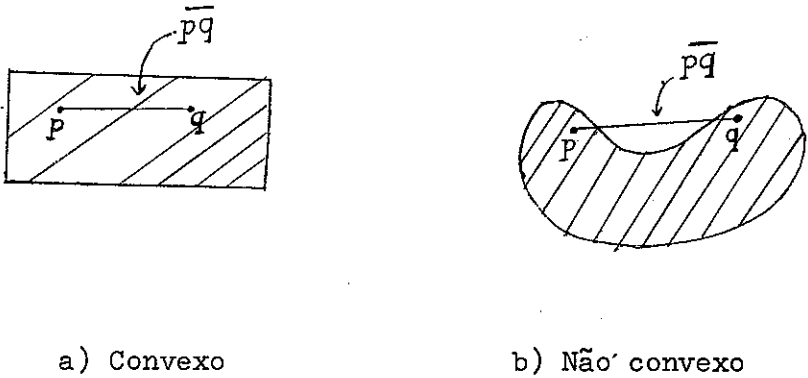


Figura 13.1

Exercício 13.1 - Demonstre que  $L = \{tp + (1-t)q : t \in \mathbb{R}\}$  é a linha reta que passa por  $p$  e  $q$ .

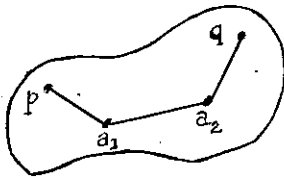
O conjunto  $B(p,r) = \{v \in \mathbb{R}^2 : |p-v| < r\}$  é chamado a bola aberta de centro  $p$  e raio  $r$ . Dizemos que um conjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  (de  $\mathbb{R}^3$ ) é aberto se para todo  $x \in A$  existe um  $r > 0$  tal que  $B(x,r) \subset A$ . Dizemos que  $x$  é um ponto da fronteira de  $A$  se para todo  $r > 0$  temos que  $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$  e  $B(x,r) \cap (\mathbb{R}^2 - A) \neq \emptyset$ .

Exercício 13.2 - Mostre que o conjunto  $\{v \in \mathbb{R}^2 : v \cdot w > 0\}$  é aberto e convexo, e ache sua fronteira.

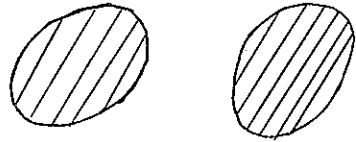
Exercício 13.3 - Mostre que a bola  $B(x,r)$ ,  $r > 0$  é aberta e convexa, e ache sua fronteira.

Dizemos que um conjunto aberto é conexo se da-

dos pontos arbitrários  $p$  e  $q$  de  $A$  existem um número finito de vetores  $a_1, \dots, a_n$ , tal que  $\overline{pa_1}, \overline{a_1a_2}, \dots, \overline{a_{n-1}a_n}, \overline{a_nq}$  estejam todos contidos totalmente em  $A$ . Veja a figura 13.2.



(a) Conexo



(b) Não conexo

Figura 13.2

A seguir daremos um teorema clássico que é fácil de enunciar e de acreditar e difícil de demonstrar. Ele diz que uma curva fechada simples divide o plano em duas partes.

Teorema (da curva de Jordan) 13.1: Se  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva contínua fechada simples, então  $\mathbb{R}^2 - C([a, b]) = A_1 \cup A_2$ , onde  $A_1$  e  $A_2$  são conjuntos abertos conexos disjuntos. Mais ainda, temos que a fronteira de  $A_1$  e também a de  $A_2$ , é exatamente  $C([a, b])$ . Um dos dois conjuntos é limitado e o ou-



tro é ilimitado.

Dizemos que uma curva simples fechada é convexa se o conjunto limitado que ela limita (dado pelo teorema 13.1) é um conjunto convexo. Nesta seção assumiremos sempre que as curvas são regulares e estão parametrizadas pelo comprimento de arco. Nosso objetivo é demonstrar os seguintes teoremas:

Teorema 13.2. - Seja  $C$  uma curva regular simples fechada.

Esta curva é convexa se e somente se sua curvatura não muda de sinal.

Teorema 13.3 - Seja  $C$  uma curva regular fechada. Sua curvatura absoluta total satisfaz  $\varphi(C) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_a^b |k(t)| dt = 1 \quad \text{se e somente se ela é convexa.}$$

Observações.

- 1) A curva da figura 12.2 (c) mostra que a condição de ser simples é essencial no teorema 13.2.
- 2) Observe que o teorema 13.3 não exige que a curva seja simples para garantir que ela seja convexa. Mas é claro que uma curva convexa é simples.
- 3) O teorema 12.3 que afirma que  $\tau(C) \geq 1$  para toda curva fechada complementa o teorema 13.3. Em vista des

te fato podemos dizer que uma curva fechada é convexa se e somente se ela tem curvatura absoluta total mínima (entre todas as curvas no plano).

Primeiro vamos demonstrar alguns lemas e proposições que serão úteis na demonstração dos teoremas sobre convexidade global. Todavia, eles podem ser interessantes em si.

Lema 13.4 - Seja  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular com  $C(a) = C(b)$  (mas não necessariamente fechada).

Temos que

$$(13.1) \quad \int_a^b |k(t)| > \pi$$

Demonstração: Considere a função  $f(t) = d(C(a), C(t))^2 = |C(t) - C(a)|^2$ . Ela tem um máximo em  $t_1$ ; como  $C$  não é constante,  $t_1 \in (a, b)$ . Temos que  $f'(t_1) = 2C'(t_1) \cdot (C(t_1) - C(a)) = 0$ . Agora a função  $\tilde{h}(t) = C'(t_1) \cdot C(t)$  tem um máximo  $t_2$  e um mínimo  $t_0$  (Veja a figura 13.3),

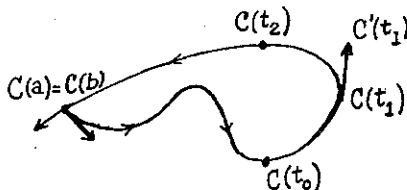


Figura 13.3

e  $C'(t_0) \cdot C'(t_1) = C'(t_2) \cdot C'(t_1) = 0$ . Na seção anterior vimos que  $\int_{t_0}^{t_1} |k(t)| dt$  é igual ao comprimento  $L_{t_0}^{t_1}(h)$  da indicatrix tangencial  $h$  de  $C$ , entre  $t_0$  e  $t_1$ . Mas  $h(t_1) \cdot h(t_0) = 0$ , logo a curva  $h([t_0, t_1])$  tem que recobrir um quarto de círculo; consequentemente  $\int_{t_0}^{t_1} |k(t)| dt \geq \pi/2$ . Analogamente  $\int_{t_1}^{t_2} |k(t)| dt \geq \pi/2$ . Finalmente, observamos que  $C(t_2) \cdot C'(t_1) > C(b) \cdot C'(t_1) = C(t_1) \cdot C'(t_1)$ , pois pela proposição 5.1,  $(C(t_1 + \epsilon) - C(t_1)) \cdot C'(t_1) > 0$ , para  $\epsilon > 0$  pequeno. Isto implica que  $\int_{t_2}^b |k(t)| dt > 0$ , pois, do contrário, teríamos que  $C|[t_2, b]$  seria uma linha reta igual à linha tangente de  $C$  em  $C(t_2)$ , o que implicaria que  $(C(b) - C(t_2)) \cdot C'(t_1) = 0$ ; mas isto contradiz a observação feita acima. C.Q.D.

Dada uma curva  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  fechada e simples, temos, pelo teorema da curva de Jordan, que  $C$  separa  $\mathbb{R}^2$  em dois abertos conexos  $L$  e  $I$ , onde  $L$  é limitado. Se num ponto  $N(t)$  aponta na direção do conjunto  $I$  então por continuidade aponta sempre na direção de  $I$ . Com a orientação oposta apontaria sempre para  $L$ .

Proposição 13.5 - Seja  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada simples. Existe uma orientação de  $C$  tal que

$$(13.2) \quad \int_J k(t) dt \geq 2\pi$$

onde  $J = \{t \in [a, b] : k(t) \geq 0\}$ .

Demonstração: Suponha que  $C$  está orientada de maneira que seu vetor normal  $N(t)$  aponta sempre na direção do conjunto aberto limitado  $L$  determinado por  $C$  (de acordo com o teorema da curva de Jordan). Vamos demonstrar que  $h(J) = S^1$ , onde  $h$  é a indicatrix tangencial de  $C$ . Com este fato teremos que o comprimento de  $h|J$  é maior ou igual a  $2\pi$ ; por outro lado, na seção anterior, vimos que o comprimento de  $h|J$  é igual a

$$\int_J |k(t)| dt = \int_J k(t) dt, \quad \text{o que demonstra a proposição.}$$

Vamos ver então que  $h(J) = S^1$ . Seja  $v$  um vetor arbitrário do círculo unitário  $S^1$ . Considere a função altura  $p(t) = w \cdot C(t)$  onde  $w = A_{\pi/2}(v)$ ; esta função tem um mínimo global  $t_w$ . Como  $p'(t_w) = w \cdot C'(t_w) = 0$ ,  $w = \pm N(t_w)$ . Mas, como  $t_w$  é um mínimo global de  $p(t)$ , temos que  $-w$  aponta para o conjunto ilimitado  $I$ . Logo  $w = N(t_w)$ . Afirmamos que  $t_w \in J$ . Do contrário, teríamos que  $k(t_w) < 0$ ; mas pelo raciocínio da demonstração da proposição 9.1 teríamos que existiria  $\delta > 0$  tal que  $C(t) \cdot N(t_w) < C(t_w) \cdot N(t_w)$ , se  $0 < |t - t_w| < \delta$ , contradi-

zendo o fato de que  $t_w$  é o mínimo global de  $p(t)$ . Logo  $k(t_w) \geq 0$  e  $t_w \in J$ . C.Q.D.

Observações:

- 1) A proposição 13.5 nos dá o teorema 12.3 no caso de curvas simples.
- 2) A exigência de que a curva seja simples é essencial como podemos ver olhando a curva da figura 12.4.

Demonstração do teorema 13.2: Pelo teorema da curva de Jordan  $C$  delimita duas regiões abertas e conexas de  $\mathbb{R}^2$ ,  $L$  e  $I$ , a primeira sendo limitada. Orientamos  $C$  de tal maneira que o vetor normal  $N$  aponta sempre na direção de  $L$  (por continuidade, se aponta num ponto aponta em todo ponto). Afirmamos que com esta escolha  $k \geq 0$ . De fato, seja  $w$  qualquer vetor unitário e considere a função altura  $p(t) = C(t) \cdot w$ . Ela tem um mínimo global  $t_0$ , onde  $w = N(t_0)$ . Se tivéssemos  $k \leq 0$ , então pelos argumentos da proposição 9.2, teríamos que existiria  $t_1$  tal que  $p(t_1) < p(t_0)$ , pois  $k$  não poderia ser identicamente nula.

Sejam  $p$  e  $q$  dois pontos quaisquer de  $L$ . Queremos demonstrar que o segmento  $\overline{pq}$  está contido em  $L$ . Como  $L$  é conexo existem pontos  $v_1, v_2, \dots, v_n$  em  $L$

com a propriedade de que  $\overline{pv_1}, \overline{v_1 v_2}, \dots, \overline{v_n q}$  estão todos contidos em  $L$ . Seja  $k$  o maior inteiro que satisfaz i)  $\overline{pv_k} \subset L$  e ii)  $\overline{pv_{k+1}} \not\subset L$  (com a convenção de que  $v_{n+1} = q$ ). Se  $\overline{pq} \not\subset L$  então existe tal  $k$ ; vamos mostrar que isto nos leva a uma contradição.

Seja  $t_1 = \sup\{t \in [0,1]: p(tv_{k+1} + (1-t)v_k) \in L\}$ . Como  $L$  é aberto  $t_1 > 0$ , mas como  $\overline{pv_{k+1}} \not\subset L$ ,  $t_1 < 1$ . Seja  $D(t) = t(t_1 v_{k+1} + (1-t_1)v_k) + (1-t)p$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , o segmento correspondente ao  $\sup t_1$ . Ele tem que interseccionar  $C$  pois, do contrário,  $t_1$  não seria o  $\sup$  já que nesse caso  $D(t)$  estaria totalmente contido em  $L$  (observe que  $D$  não poderia conter pontos de  $I$  pois uma curva contínua não pode ligar dois subconjuntos disjuntos sem passar por suas fronteiras). Seja

$$t_2 = \inf\{t \in [0,1]: D(t) \in C([a,b])\}.$$

Temos que  $t_2 \in (0,1)$  pois  $D(0)=p$  e  $D(1) = t_1 v_{k+1} + (1-t_1)v_k$  estão em  $L$ . Afirmamos que  $D$  é tangente a  $C$  no ponto  $D(t_2)$ ; do contrário teríamos que  $D$  atravessaria a curva  $C$  (veja o exercício 4.5), isto é, o segmento  $D$  interseccionaria  $I$ ; mas, como  $I$  é aberto, teríamos que segmentos perto de  $D$  também interseccionariam  $I$ , o que implicaria que  $t_1$  não era o  $\sup$ .

Seja  $C(s_3) = D(t_2)$  esse primeiro ponto de in-

terseção tangencial de  $C$  e  $D$  que existe pelo que acabamos de ver. Como a curva  $C$  numa vizinhança de  $s_3$  está, pela proposição 9.2, do lado (fechado) da linha tangente determinado por  $N(s_3)$ , temos que o segmento  $D((t_2 - \delta, t_2))$  da linha tangente a  $C$ , que são intersesta  $C$ , deve estar contida em  $I$  (Veja a observação feita depois da proposição 9.2). Mas o segmento todo  $D([0, t_2))$  não intersesta  $C$ , pois  $t_2$  é o primeiro ponto de interseção, logo ele todo está contido em  $I$  (um segmento não pode ir de  $p = D(0)$  em  $L$  até um ponto de  $I$  sem passar pela fronteira  $C$ ). Logo, chegamos a uma contradição (Veja a figura 13.4)

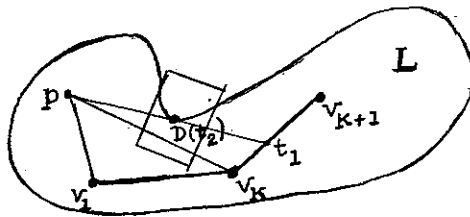


Figura 13.4

Inversamente, devemos demonstrar que se  $C$  é convexa então sua curvatura não muda de sinal. Oriente  $C$  de tal forma que num ponto arbitrário  $N$  aponte para o conjunto limitado convexo  $L$ ; então por continuidade  $N$  apontará sempre para  $L$ . Afirmamos que  $k(t) \geq 0$  para todo  $t$ . Suponhamos o contrário, isto é, que existe  $t_0$  com

$k(t_0) < 0$ . Pela proposição 9.1, temos que  $N(t_0) \cdot C(t) < N(t_0) \cdot C(t_0)$  se  $0 < |t - t_0| < \delta$ . Se por simplicidade, assumirmos que  $C(t_0) = (t_0, 0)$ ,  $C'(t_0) = (1, 0)$  e que  $C(t) = (t, f(t))$  é localmente o gráfico de uma função, então  $f(t) > 0$  se  $0 < |t - t_0| < \delta_1$ , e  $\{(x, y) : 0 < |t - t_0| < \delta_1 \text{ e } y < f(x)\} \subset L$ . Veja a fig. 13.5.

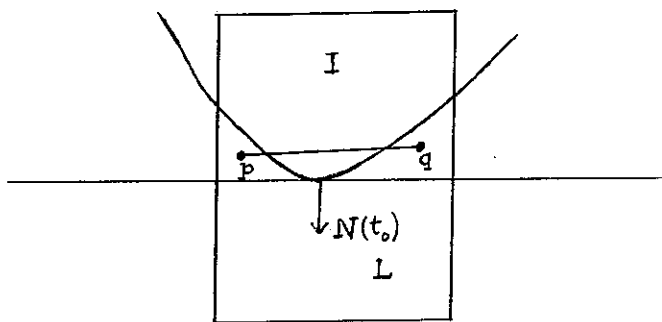


Figura 13.5

Então, temos que  $p = (t_0 - \frac{1}{2}\delta_1, \frac{f(t_0 - \frac{1}{2}\delta_1)}{2})$  e

$q = (t_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \frac{f(t_0 + \frac{1}{2}\delta_1)}{2})$  estão em L; e

$(0, \frac{f(t_0 - \frac{1}{2}\delta_1) + f(t_0 + \frac{1}{2}\delta_1)}{4}) \in \overline{pq}$ , mas não está em L,

pois  $\frac{f(t_0 - \frac{1}{2}\delta_1) + f(t_0 + \frac{1}{2}\delta_1)}{4} < f(0) = 0$ . Isto é um absurdo, pois C é convexa.

C.Q.D.

Demonstração do teorema 13.3: Se  $\int_a^b |k(s)| ds = 2\pi$  então,



pelo lema 13.4, a curva  $C$  é simples. Logo podemos aplicar a proposição 13.5 para obter

$$2\pi = \int_a^b |k(s)| ds \geq \int_J |k(s)| ds = \int_J k(s) \geq 2\pi,$$

para a orientação adequada de  $C$ , o que implica que  $k(s) \geq 0$  para todo  $t \in [a, b]$ . Segue-se então, pelo teorema 13.2, que  $C$  é convexa.

Inversamente, se  $C$  é convexa, usando o teorema 13.2, podemos orientá-la de tal maneira que  $k(s) \geq 0$ , para todo  $s \in [a, b]$ . Pelo teorema 12.2,  $\int_a^b k(s) ds = 2\pi n$ , onde  $n$  é um inteiro. Queremos demonstrar que  $n$  é igual a 1. Seja  $t_0$  um ponto com  $k(t_0) > 0$ . Se  $u \geq 2$  então existe  $t_1$  tal que  $\theta(t_1) = \theta(t_0) \pm 2\pi$ . Seja  $p = C(t_0) + \epsilon N(t_0)$  e  $q = C(t_1) + \epsilon N(t_1)$ . Então existiria  $\epsilon > 0$  e  $p, q \in L$  com  $pq \notin L$ , contradizendo a convexidade (verifique os detalhes). C.Q.D.

Exercício 13.4 - Dizemos que duas curvas se cortam transversalmente se toda vez que  $C(t_1) = D(t_2)$  temos que  $C'(t_1) \neq \pm D'(t_2)$ . Demonstre que uma curva  $C$  é convexa se e somente se toda linha reta que intersesta  $C$  transversalmente a intersesta em exatamente dois pontos.

Exercício 13.5 - Demonstre que uma curva fechada

$C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é convexa se e somente se  $C([a, b])$  está em cada ponto totalmente contido num dos dois semiplanos fechados determinados pela linha tangente nesse ponto.

Exercício 13.6 - Cada uma das curvas da figura 12.2 divide o plano em diversos abertos conexos do plano. Escolhendo pontos nessas diversas regiões, calcule (sem muitos detalhes) os números de rotações dessas curvas com relação a esses pontos (Veja o exercício 12.16).

Exercício 13.7 - Sejam  $L$  e  $I$  os dois abertos conexos do plano determinados por uma curva simples fechada  $C$  de acordo com o teorema de Jordan sobre curvas. Demonstre que se  $p \in L$  e  $q \in I$  então o segmento  $\overline{pq} = \{tq + (1-t)p: t \in [0, 1]\}$  intersecta  $C$  (Sugestão: considere o  $\inf\{t \in [0, 1]: tq + (1-t)p \in I\}$  e chegue a uma contradição).

Exercício 13.8 - (teorema de Stoker).- Considere uma curva

$$C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ com curvatura sempre positiva, sem auto-interseções, tal que}$$

$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |C(t)| = \infty$ . Demonstre as seguintes afirmações:

- (a)  $C$  tem comprimento infinito
- (b) A curvatura total de  $C$  é no máximo igual a  $\pi$
- (c) A menos de uma isometria do plano,  $C$  é o gráfico de uma função  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (d)  $C$  é a fronteira de um conjunto convexo (Veja o exercício 12.9).

#### 14. O teorema dos quatro vértices

Veremos agora um teorema clássico sobre a geometria global de curvas no plano. Este teorema nos garante que qualquer curva fechada convexa tem pelo menos quatro pontos onde a curvatura tem um ponto crítico, i.e., onde  $k' = 0$ . Estes pontos são chamados vértices. Uma justificativa para este nome encontra-se no estudo da evoluta da curva, pois vimos na seção 11 que a evoluta deixará de ser regular só nos pontos onde  $k' = 0$ . Logo os vértices correspondem às singularidades da evoluta. Como a elipse tem exatamente quatro vértices, a conclusão do seguinte teorema não pode ser melhorada.

Teorema 14.1 - Seja  $C$  uma curva fechada convexa. Então existem pelo menos quatro pontos onde  $k'(t) = 0$ .

Demonstração: Demonstraremos o teorema demonstrando algo um pouco mais forte: que a curva tem quatro pontos onde  $k'$  muda de sinal (a não ser que  $k'$  seja zero uma infinidade de pontos, o que resolveria o teorema trivialmente). Sejam  $t_1$  e  $t_2$  o máximo e mínimo da função

$k$ ; eles existem pois  $C$  é fechada. Temos que  $k'(t_1) = k'(t_2) = 0$ . Afirmamos que  $k'$  muda de sinal em  $t_1$  e  $t_2$ . Suponhamos o contrário, por exemplo, que  $k' \geq 0$  numa vizinhança de  $t_1$ . Neste caso teríamos  $k(t) = k(t_1) + \int_{t_1}^t k'(s)ds > k(t_1)$ , a não ser que  $k'$  seja zero num intervalo; mas neste caso o teorema seria trivial. Os outros casos são análogos. Logo, temos dois pontos onde  $k'$  muda de sinal. Como  $C$  é uma curva fechada,  $k(a) = k(b)$ ,  $k'(a) = k'(b)$ ,  $k''(a) = k''(b)$ , etc. e temos que  $k'$  muda de sinal sempre um número par de vezes (se este número for finito). Então, para demonstrar o teorema basta demonstrar que  $k'$  não pode mudar de sinal exatamente duas vezes.

Suponhamos que  $k'$  só muda de sinal em  $t_1$  e  $t_2$  e que  $k'=0$  num número finito de pontos. Escolha a origem de  $\mathbb{R}^2$  como sendo  $C(t_1)$  e o eixo dos  $x$ 's de tal forma que  $C(t_2) = (x(t_2), 0)$ ; estamos escrevendo  $C(t) = (x(t), y(t))$ . Na seção 8 vimos que botando  $\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t k(s)ds$ , podemos escrever  $C'(t) = (x'(t), y'(t)) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ ; temos também que  $k(s) = \theta'(s)$ , e  $k'(s) = \theta''(s)$ .

Agora vamos demonstrar que o integral

$$\int_a^b y(s) \theta''(s)ds \text{ é zero, assumindo que } C(a) = C(b) =$$

$= C(t_1) = (0,0)$ . Usando integração por partes temos que

$$\begin{aligned} \int_a^b y(s) \theta''(s) ds &= y\theta' \Big|_a^b - \int_a^b y'(s)\theta'(s) ds \\ &= \int_a^b y'(s) \theta'(s) ds, \end{aligned}$$

pois  $y(a) = y(b)$ . Por outro lado  $y'(s) = \text{sen } \theta(s)$ ,

logo

$$\begin{aligned} - \int_a^b y'(s)\theta'(s) ds &= - \int_a^b (\text{sen } \theta(s))\theta'(s) ds = \\ &= \int_a^b \frac{d}{ds}(\cos \theta(s)) ds = \cos \theta \Big|_a^b = 0, \end{aligned}$$

usando a regra da cadeia e o teorema fundamental de cálculo, a curva  $C$  é convexa; logo  $y(s) \leq 0$  se  $a=t_1 \leq s \leq t_2$ , e  $y(s) \geq 0$  se  $t_2 \leq s \leq b$ . Veja a figura 14.1. Como  $k'$  só muda de sinal em  $t_1$  e  $t_2$ , temos dois casos

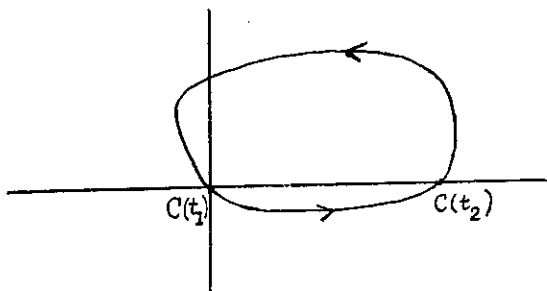


Figura 14.1

Caso 1 -  $k'(s) \geq 0$  se  $s \in [t_1, t_2]$ ,  $k'(s) \leq 0$ , se  $s \in [t_2, b]$ .

Caso 2 -  $k'(s) \leq 0$  se  $s \in [t_1, t_2]$ ,  $k'(s) \geq 0$ , se  $s \in [t_2, b]$ .

Veremos que os dois casos nos levam a um absurdo. No caso

1, temos que  $\int_{a=t_1}^{t_2} y(s)\theta''(s)ds \leq 0$  e

$\int_{t_2}^b y(s)\theta''(s)ds \leq 0$ ; como  $\int_a^b y(s)\theta''(s)ds = 0$  temos que

esses dois integrais também são iguais a zero. Isso implica que, para todo  $s$ ,  $y(s)k'(s) = 0$ . Como estamos assumindo que  $k'$  é zero no máximo num número finito de pontos, teríamos que  $y$  é identicamente zero o que é um absurdo. O caso 2 é similar. C.Q.D.

### 15. Definição implícita de curvas planas

Como já vimos anteriormente certas curvas satisfazem alguma equação de duas variáveis: por exemplo, os pontos do círculo  $C(t) = (\cos t, \sin t)$  satisfazem a equação  $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ . O problema que abordaremos agora é o inverso. Consideremos uma função diferenciável  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Quando é que o conjunto

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}$  é a imagem de uma curva regular  $C: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ? Uma solução positiva para este problema encontra-se no seguinte teorema:

Teorema 15.1 - Seja  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável definida num aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  e

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2_{(x_0, y_0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2_{(x_0, y_0)} \neq 0, \quad F(x_0, y_0) = 0. \quad \text{Então}$$

existe um aberto  $u \subset V$  de  $\mathbb{R}^2$  contendo  $(x_0, y_0)$  e uma curva regular  $C: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

- 1)  $F(C(t)) = 0$  se  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$
- 2) se  $F(x,y) = 0$  com  $(x,y) \in u$  então existe  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  tal que  $C(t) = (x,y)$ .

Além do mais, a curva é biunívoca e seu vetor normal é

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)_{C(t)}}{\left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)_{C(t)}\right|}$$

Corolário 15.2: Se  $F^{-1}(0)$  é compacto e conexo e para  $t_0$

do  $(x,y) \in F^{-1}(0)$  temos que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2_{(x,y)} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2_{(x,y)} \neq 0, \quad \text{então existe uma curva fecha-$$

da simples  $C: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $C([a,b]) = F^{-1}(0)$ .

Exercício 15.1 - Usando o teorema 15.1, demonstre o coro-

lário 15.2.

A demonstração do teorema 15.1 usará o seguinte teorema de cálculo.

Teorema 15.3 (teorema da função implícita)- Se  $F: u \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável definida num aberto  $u$  de  $\mathbb{R}^2$  e

$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}$  ou  $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}$  é diferente de zero, então

existe  $\delta > 0$  tal que

- 1) existe uma função diferenciável  $g: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(x, g(x)) = 0$ ; e se  $F(x, y) = 0$  com  $(x, y) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$  então  $y = g(x)$

ou então

- 2) existe uma função diferenciável  $g: (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(g(y), y) = 0$ ; e se  $F(x, y) = 0$  com  $(x, y) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$  então  $x = g(y)$ .

Demonstração do teorema 15.1: O teorema da função implícita nos garante a existência de uma função diferenciável  $g$ ; nossa curva será  $C(t) = (t, g(t))$ ,  $t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  (ou  $C(t) = (g(t), t)$ ). Logo,  $C$  é biunívoca e regular. Por outro lado  $F(C(t)) = 0$



implica que  $\frac{d}{dt} F(C(t)) = x'(t) \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{C(t)} + y'(t) \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{C(t)} = 0$ .

Como  $C'(t) = (x'(t), y'(t))$ , isto implica que

$\left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{C(t)} \cdot C'(t) = 0$ . Logo,  $\left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{C(t)}$ , que é cha-

mado de vetor gradiente de  $F$ , é perpendicular a  $C(t)$ .

C.Q.D.

Exercício 15.2 - Seja  $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ . Qual é a  
função  $g$  do teorema 15.3 ao redor do  
ponto  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ?

A seguir demonstraremos o teorema da função im-  
plicita a partir do teorema da função inversa. Esta parte  
pode ser omitida já que não é indispensável para as próximas  
seções, mas será útil para quem quiser se familiarizar com  
estes teoremas clássicos de cálculo.

Teorema 15.4 (teorema da função inversa) - Seja  $G: u \rightarrow \mathbb{R}^2$   
uma aplicação  
diferenciável definida num aberto  $u$  de  $\mathbb{R}^2$ . Se

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{para um ponto } (x_0, y_0) \in u,$$

então existe  $\delta > 0$  tal que  $G|(x_0-\delta, x_0+\delta) \times (y_0-\delta, y_0+\delta)$  é biunívoca e tem uma aplicação inversa diferenciável  $H$  definida em  $G((x_0-\delta, x_0+\delta) \times (y_0-\delta, y_0+\delta))$ .

Este teorema, que não demonstraremos nestas notas será útil também no estudo das superfícies em  $\mathbb{R}^3$ .

Demonstração do teorema 15.3: Vamos supor que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} \neq 0 \quad (\text{O caso em}$$

que  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} \neq 0$  é análogo). Considere a aplicação

$G(x, y) = (x, F(x, y))$ . Temos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)} = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema 15.4, existe uma aplicação diferenciável  $H = (H_1, H_2)$  com a propriedade de que

$$G(H(x, y)) = (x, y),$$

ou seja

$$(H_1(x, y), F(H_1(x, y), H_2(x, y))) = (x, y);$$

e, então,

$$(x, F(x, H_2(x, y))) = (x, y), \quad \text{para todo } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Definimos agora uma função  $g$  como  $g(t) = H_2(t_1, 0)$ ,  
 $x_0 - \delta < t < x_0 + \delta$ . Ela é diferenciável pois é composta de  
duas aplicações diferenciáveis. Temos que

$$(x, F(x, g(x))) = (x, F(x, H_2(x, 0))) = (x, 0), \quad \text{ou seja,}$$
$$F(x, g(x)) = 0. \quad \text{Por outro lado, se } F(x_1, y_1) = 0 \quad \text{com}$$
$$(x_1, y_1) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta), \quad \text{então temos que}$$

$$H(x_1, F(x_1, y_1)) = H(G(x_1, y_1)) = (x_1, y_1),$$

ou seja,  $H(x_1, 0) = (x_1, y_1)$ . Temos também, por defini-  
ção, que  $H(x_1, 0) = (x_1, g(x_1))$ . Isto implica que  
 $y_1 = g(x_1)$ , pois  $H$  é biunívoca.

Exercício 15.3 - Ache a curvatura de uma curva dada pela  
equação  $F(x, y) = 0$ , onde  $F$  satisfaz  
as condições do teorema 15.1.

Exercício 15.4 - Ache as equações das linhas tangentes e  
normal de uma curva dada implicitamente  
por  $F(x, y) = 0$ .

Exercício 15.5 - Considere a curva

$$C(t) = (\cos 3t \cos t, \text{ sen } 3t \text{ sen } t),$$

$0 \leq t \leq \pi$ . Mostre que é uma curva fechada e que satisfaz

a seguinte equação

$$x^3 - 3xy^2 = (x^2 + y^2)^2$$

Exercício 15.6 - Considere a função  $F: \mathbb{R}^2 - \{0,0\} \rightarrow \mathbb{R}$   
definida com  $F(x,y) = (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 - a^4$ . Mostre que  $F^{-1}(0)$  é uma curva regular.  
Faça um desenho.

16. A envolvente de uma família de curvas

Dois exemplos: 1) zona de barulho do Concorde  
2) zona de tiro de um canhão

Na seção 11 estudamos a evoluta de uma curva com curvatura  $k \neq 0$ . Esta nova curva goza da propriedade de ser em cada ponto tangente a alguma linha normal da curva original. Neste caso poderemos pensar que as linhas normais à curva original formam uma família de curvas. Outro exemplo de uma família de curvas é a família de círculos osculadores de uma curva  $C$  com  $k \neq 0$ . A curva  $C$  também goza da propriedade de ser tangente em cada ponto a algum dos círculos da família. Nesta seção vamos estudar esta situação: uma curva é tangente a uma família de curvas, envolvendo-a no processo. Também daremos duas aplicações in

interessantes e bonitas deste fenômeno a problemas de física. Primeiro calcularemos a zona na terra já atingida num certo momento pelo barulho do avião supersônico Concorde. Depois acharemos a zona que pode ser atingida por um canhão que pode variar sua direção de tiro num plano perpendicular à terra.

A primeira tarefa a nos dedicar será a de definir precisamente uma família de curvas. A cada curva da família associamos um número  $\alpha \in \mathbb{R}$ , seu parâmetro; para parâmetros que estejam pertos vamos querer que as respectivas curvas e suas derivadas estejam próximas. Vamos definir uma família de curvas de uma maneira implícita usando os argumentos da última seção. Seja  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável real definida num aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^3$ , tal que para todo  $(x, y, \alpha) \in V$ ,  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2_{(x, y, \alpha)} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2_{(x, y, \alpha)} \neq 0$ .

A função  $F_\alpha(x, y) = F(x, y, \alpha)$ , obtida fixando  $\alpha$ , satisfaz as condições do teorema 15.1; logo, obtemos uma curva  $D_\alpha$  no plano cujos pontos  $p$  satisfazem  $F(p, \alpha) = 0$ . As curvas  $D_\alpha$  obtidas desta maneira formam uma família de curvas. Dizemos que uma curva  $C$  é uma envolvente da família  $D_\alpha$ , se para cada  $t$  existe um parâmetro  $\alpha(t)$  tal que a curva  $C$  seja tangente a  $D_{\alpha(t)}$  no ponto  $C(t)$ , onde  $\alpha(t)$  é diferenciável com  $\alpha'(t) \neq 0$ , para todo  $t$ .

Exemplo 16.1: Seja  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $F(x, y, \alpha) = (x - \alpha)^2 + y^2 - R^2$ , onde  $R$  é uma constante. As curvas  $D_\alpha$ , da família gerada por  $F$ , são círculos de raio  $R$  e centro  $(\alpha, 0)$  no plano. Esta família tem duas envolventes, as retas  $y=R$  e  $y=-R$ . A reta  $C(t) = (t, R)$  é tangente à curva  $D_{t_1}$  no ponto  $C(t_1) = (t_1, R)$ . Logo, neste caso,  $\alpha(t) = t$  e  $\alpha'(t) = 1 \neq 0$ . Faça um desenho.

Como  $\alpha'(t) \neq 0$ , podemos reparametrizar  $C$  usando o parâmetro  $\alpha$ . Isto é, definimos a reparametrização  $\tilde{C}$  pela equação  $\tilde{C}(\alpha(t)) = C(t)$ . Agora daremos condições para saber se um ponto está na envolvente da família.

Teorema 61.1 - Um ponto da envolvente  $\tilde{C}(\alpha)$  satisfaz as equações

$$(16.1) \quad F(\tilde{C}(\alpha), \alpha) = 0$$

$$(16.2) \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\tilde{C}(\alpha), \alpha) = 0$$

Inversamente, se uma curva  $\tilde{C}(\alpha)$  satisfaz as equações (16.1) e (16.2) então  $\tilde{C}$  é a envolvente da família  $F$ .

Demonstração: Escrevendo  $\tilde{C}(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$  e usando a regra da cadeia na composição

$$\alpha \rightarrow (x(\alpha), y(\alpha), \alpha) \rightarrow F(x(\alpha), y(\alpha), \alpha),$$

temos que  $\tilde{C}(\alpha)$  satisfaz (16.1) e (16.2) se e somente se

$$x'(\alpha) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\tilde{C}(\alpha), \alpha)} + y'(\alpha) \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\tilde{C}(\alpha), \alpha)} + 1 \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_{(\tilde{C}(\alpha), \alpha)} =$$

$$x'(\alpha) \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + y'(\alpha) \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) \cdot \tilde{C}'(\alpha) = 0 .$$

Lembremos que pelo teorema 15.1  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\tilde{C}(\alpha), \alpha)}$  é um vetor perpendicular a curva  $D_\alpha$  no ponto  $\tilde{C}(\alpha)$ . Logo neste ponto  $\tilde{C}$  e  $D_\alpha$  são tangentes. C.Q.D.

Exemplo 16.2: Considere a família de curvas geradas por

$$F(x, y, \alpha) = \alpha x - p y - \frac{\alpha^2}{2}, \text{ onde } p \text{ é uma cons-}$$

tante diferente de zero. As curvas  $D_\alpha$  são linhas retas. Para achar a envolvente de  $\{D_\alpha\}$  precisamos resolver as equações (16.1) e (16.2), ou seja

$$\alpha x - p y = \frac{\alpha^2}{2}, \text{ e } \frac{\partial F}{\partial \alpha} = x - \alpha = 0 .$$

Isto é, substituindo  $\alpha$  vemos que a envolvente satisfaz a equação  $y = \frac{x^2}{2p}$ . Logo a envolvente é uma parábola de  $\mathbb{R}^2$ . Veja a figura 16.1. Observe que  $\frac{\partial F}{\partial y} = -p \neq 0$ .

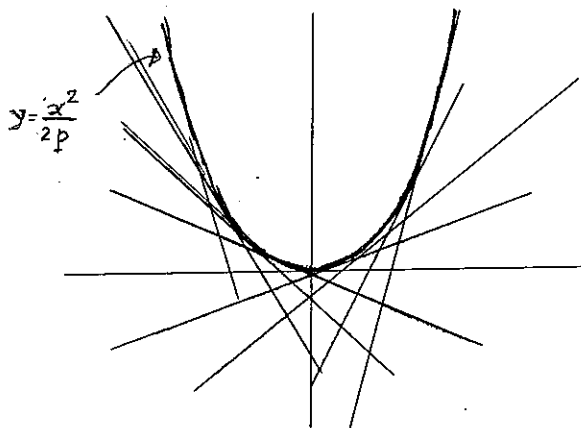


Figura 16.1

Exercício 16.1 - Ache as envolventes da família do exemplo 16.1 usando o teorema 16.1.

Exercício 16.2 - Na introdução desta seção dissemos que a evoluta de uma curva era a envolvente da família de linhas normais desta curva. Ache a função  $F$  que gera esta família.

Exercício 16.2 - Ache explicitamente a função  $F$  que define a família de círculos osculadores de uma curva  $C$  com  $k \neq 0$  e  $k' \neq 0$ . (Veja a seção 11.)

Zona de barulho do Concorde (um problema ecológico).

Um avião supersônico viaja a uma velocidade constante  $v$  maior do que a velocidade do som  $\mu$ , em linha re



ta, a uma altitude constante  $h$  sobre a terra. O problema é o seguinte: achar a região da terra que já foi atingido pelo barulho do Concorde quando o avião encontra-se sobre um determinado ponto  $p$  da terra.

Para simplificar a solução do problema pensaremos que a terra é o plano  $z=0$  e, que o ponto  $p$  é a origem  $(0,0)$  deste plano, e que o Concorde viaja da direita para a esquerda sobre o eixo dos  $x$ 's. Neste instante o avião está no ponto  $(0,0,h)$  e a um tempo  $\alpha$  antes achava-se no ponto  $(v\alpha,0,h)$  de  $\mathbb{R}^3$  (a velocidade é medida em km/horas e o tempo em horas). O som propaga-se a uma velocidade constante  $\mu$ , irradiando-se em esferas concêntricas no ponto onde se origina o som. Logo, o barulho que o Concorde faz quando estava no ponto  $(v\alpha,0,h)$  tem sido ouvido até agora dentro da esfera de raio  $\mu\alpha$  e centro  $(v\alpha,0,h)$ , i.e.,  $\{w \in \mathbb{R}^3: d(w, (v\alpha,0,h)) \leq \mu\alpha\}$ . Se  $\mu\alpha \geq h$ , o som atingiu a terra e "cobriu" o interior de um círculo  $D_\alpha$  de centro  $(v\alpha,0)$  e raio  $\sqrt{(\mu\alpha)^2 - h^2}$  na terra. Veja a figura 16.2.

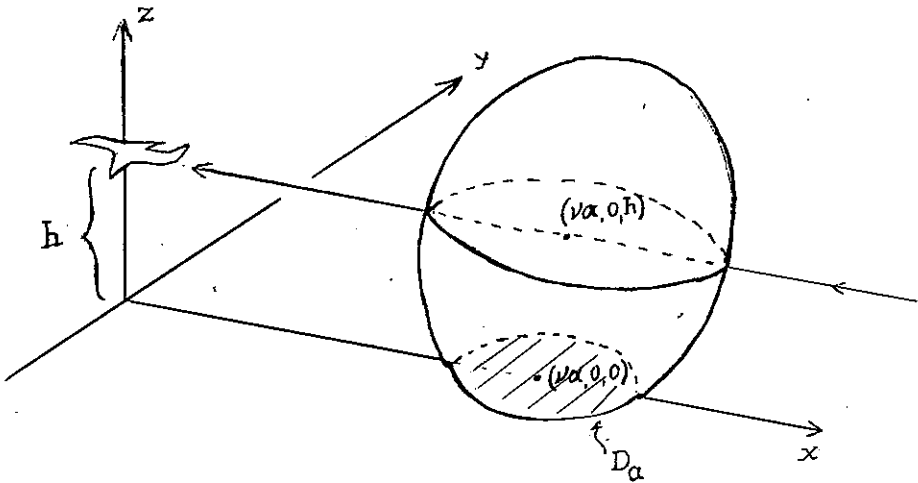


Figura 16.2

Estes círculos  $D_\alpha$  satisfazem a seguinte equação em  $\mathbb{R}^2$  ( $z=0$ )

$$(16.3) \quad (x-v\alpha)^2 + y^2 = (\mu\alpha)^2 - h^2.$$

O problema então reduz-se a achar a envolvente desta família de círculos: os pontos de um lado da envolvente terão sido atingidos pelo barulho, enquanto que os do outro lado ainda não.

Esta família está dada pela função

$$(16.4) \quad F(x, y, \alpha) = (x-v\alpha)^2 + y^2 - (\mu\alpha)^2 + h^2, \quad \alpha \geq 0.$$

Pelo teorema 16.1, a envolvente satisfaz as seguintes equações:

$$(16.5) \quad (x-v-\alpha)^2 + y^2 = (\mu-\alpha)^2 - h^2$$

$$(16.6) \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = -2xv + 2v^2\alpha - 2\mu^2\alpha = 0$$

ou seja,

$$(16.7) \quad x^2 - 2xv\alpha + v^2\alpha^2 - \mu^2\alpha^2 + y^2 = -h^2$$

$$(16.8) \quad \alpha = \frac{xv}{v^2 - \mu^2} .$$

Substituindo (16.8) em (16.7), obtemos:

$$(16.9) \quad x^2 = \frac{2x^2v^2}{v^2-\mu^2} + \frac{v^4x^2}{(v^2-\mu^2)^2} - \frac{\mu^2v^2x^2}{(v^2-\mu^2)^2} + y^2 = -h^2$$

ou seja,

$$(16.10) \quad \frac{x^2}{(v^2-\mu^2)^2} (v^4 - 2\mu^2v^2 + \mu^4 - 2v^4 + 2\mu^2v^2 + v^4 - \mu^2v^2) + y^2 = -h^2$$

ou

$$(16.11) \quad \frac{x^2(\mu^4 - \mu^2v^2)}{(v^2 - \mu^2)^2} + y^2 = -h^2$$

Em resumo, temos que a curva envolvente satisfaz a seguinte equação

$$(16.12) \quad \frac{\mu^2}{(v^2 - \mu^2)} x^2 - y^2 = h^2, \quad x \geq 0,$$

isto é, a envolvente é parte de uma hipérbole. Logo, os pontos da terra atingidos pelo som (barulho!) do Concorde

são  $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0 \text{ e } \frac{u^2}{v^2 - u^2} x^2 - y^2 \geq h^2\}$

Veja a figura 16.3.

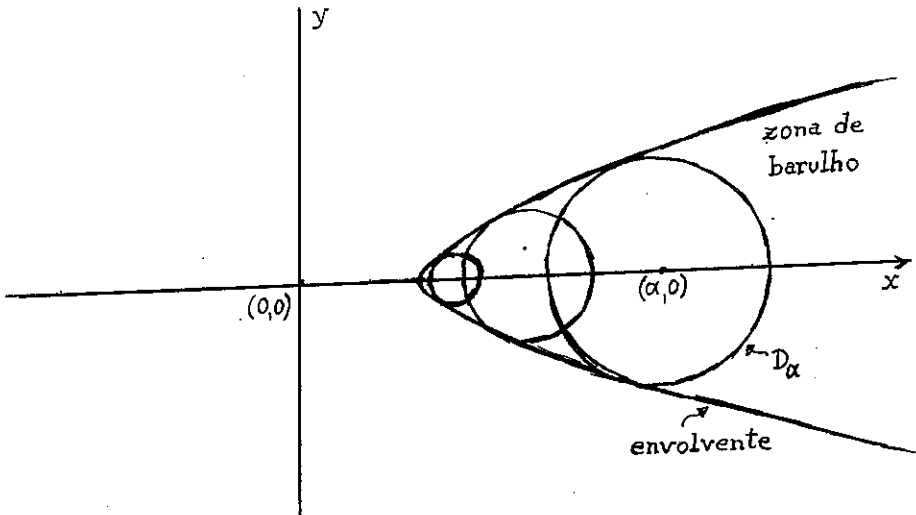


Figura 16.3. Zona de barulho

Exercício 16.3 - Quanto demorará o ponto (0,2) a ser atingido pelo barulho?

### Zona de tiro de um canhão

A situação é a seguinte: temos um sujeito com um canhão que pode apontá-lo em qualquer direção num plano perpendicular à terra. Nós queremos nos deslocar num avião (não necessariamente o Concorde) de um ponto A de um lado desse plano a outro ponto B do outro lado. Para fazer esse percurso com segurança é indispensável conhecer

a região desse plano que pode ser atingida pelo canhão. Nosso objetivo será achar essa zona de tiro do canhão.

Pensaremos que a terra é o plano  $z=0$  no espaço de três dimensões  $\mathbb{R}^3$  cujos pontos tem coordenadas  $(x,y,z)$ , com o céu apontando na direção dos  $z$ 's positivos. O canhão acha-se no ponto  $(0,0,0)$  e seu dono pode apontá-lo em qualquer direção contida no plano  $y=0$ . Veja a figura 16.4. Qualquer que seja a direção apontada pelo canhão o projétil sai com a mesma velocidade (magnitudo). Para cada direção apontada o projétil descreve uma curva no plano  $y=0$ . O problema então é descrever a região do plano  $y=0$  coberta por todas as possíveis trajetórias obtidas variando a direção apontada pelo canhão. Em termos geométricos, temos uma família de curvas (trajetórias) e queremos achar sua envolvente; a região estará delimitada pela envolvente e pelo eixo dos  $x$ 's.

Descreveremos agora explicitamente a família de trajetórias. O vetor  $v$  que dá a direção apontada pelo canhão pode ser escrito como  $v = (\beta, 0, \alpha)$ , ou  $(\beta, \alpha)$  se considerarmos o plano  $y=0$  como nosso  $\mathbb{R}^2$  usual. Como a potência do canhão independe da direção a norma de  $v$  é constante,  $\alpha^2 + \beta^2 = |v|^2 = C^2$ ;  $\alpha > 0$ , pois o canhão aponta só para cima. Este vetor  $v$  dá a velocidade inicial

da curva. Agora lembraremos um pouco de física. A velocidade de um projétil que descreve uma curva  $C(t)$ , onde  $t$  é o tempo, é dada a cada instante pelo vetor tangente  $C'(t)$ . A aceleração é dada por  $C''(t)$ . Assumindo que a resistência do ar à bala é um fator desprezível, pensaremos que a única força atuando sobre o projétil é a da gravidade, isto é, força = massa  $\times$  aceleração =  $mg$ . A aceleração da gravidade em pontos perto da terra pode ser tomada como uma constante  $g = 9.8 \text{ m/seg}^2$ . A aceleração só tem uma componente vertical que aponta na direção da terra.

Se  $D_\alpha$  denota a curva que descreve a trajetória quando o canhão aponta na direção  $v = (\beta, \alpha)$ , então temos que  $D''(t) = (0, -g)$ , qualquer que seja a curva. Também para  $t_0$  das elas  $D_\alpha(0) = (0, 0)$ . O que faz as trajetórias diferentes é que  $D'_\alpha(0) = (\beta, \alpha)$  depende de  $\alpha$  (observe que  $\beta = \sqrt{c^2 - \alpha^2}$ ). Integrando temos que

$$(16.13) \quad \begin{aligned} D'_\alpha(t) &= D'_\alpha(0) + \int_0^t D''_\alpha(s) ds \\ &= D'_\alpha(0) + (0, -gt) = (\beta, \alpha - gt). \end{aligned}$$

Logo,

$$(16.14) \quad \begin{aligned} D_\alpha(t) &= D_\alpha(0) + \int_0^t (\beta, \alpha - gs) ds \\ &= (\beta t, \alpha t - g \frac{t^2}{2}) = (\sqrt{c^2 - \alpha^2} t, \alpha t - g \frac{t^2}{2}). \end{aligned}$$

Vemos facilmente que os pontos da curva  $D_\alpha$  satisfazem a equação

$$(16.15) \quad y = \frac{\sqrt{c^2 - \alpha^2}}{\alpha} x - \frac{g}{2\alpha^2} x^2$$

$$(16.16) \quad gx^2 - 2\alpha \sqrt{c^2 - \alpha^2} x + 2\alpha^2 y = 0$$

(Observe que botamos  $y$  em vez de  $z$  para usar a notação do teorema 16.1).

Nossa família de curvas esta então gerada pela seguinte função diferenciável,

$$(16.17) \quad F(x, y, \alpha) = gx^2 - 2\alpha \sqrt{c^2 - \alpha^2} x + 2\alpha^2 y .$$

Pelo teorema 16.1, os pontos da envolvente desta família satisfazem a seguinte equação

$$(16.18) \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = -2\sqrt{c^2 - \alpha^2} x + \frac{4\alpha^2}{\sqrt{c^2 - \alpha^2}} x + 4\alpha y = 0 .$$

Neste exemplo as equações (16.1) e (16.2) do teorema ficam

$$(16.19) \quad gx^2 - 2\alpha \sqrt{c^2 - \alpha^2} x + 2\alpha^2 y = 0$$

$$(16.20) \quad -2(c^2 - \alpha^2) x + 2\alpha^2 x + 4\alpha(c^2 - \alpha^2)y = 0 .$$

Esta última pode ser escrita como

$$(16.21) \quad [\alpha^2 - (c^2 - \alpha^2)] x + 2\alpha \sqrt{c^2 - \alpha^2} y = 0 .$$

Multiplicando (16.19) por  $\sqrt{c^2 - \alpha^2}$  e (16.21) por  $-\alpha$ ,

e somando-as, obtemos

$$(16.22) \quad g\sqrt{c^2 - \alpha^2} x^2 - \alpha c^2 x = 0$$

ou

$$(16.23) \quad \alpha = g / c^2 \sqrt{c^2 - \alpha^2} x$$

Botando este valor de  $\alpha$  na equação (16.21), obtemos

$$(16.24) \quad \left[ g^2 \frac{(c^2 - \alpha^2)}{c^4} x^2 - (c^2 - \alpha^2) \right] x + 2g \frac{(c^2 - \alpha^2)}{c^2} xy = 0$$

Cancelando  $(c^2 - \alpha^2)x$ , obtemos finalmente

$$(16.25) \quad y = \frac{c^2}{2g} - g / c^2 x^2 ;$$

donde concluímos que a envolvente é também uma parábola.

Logo a zona de tiro do canhão consiste dos pontos do seguinte conjunto

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \text{ e } 0 \leq z \leq \frac{c^2}{2g} - \frac{g}{c^2} x^2\}.$$

Exercício 16.4 - Qual é a altura máxima atingida pela bala do canhão quando  $D'_\alpha(0) = (c/\sqrt{2}, c/\sqrt{2})$ ?

Exercício 16.5 - Qual é o ponto na terra atingido pelo mais longe deste? Ele pode ser realmente atingido?



## CAPÍTULO II

### Curvas no Espaço

Neste capítulo faremos um estudo da geometria das curvas no espaço euclideo de três dimensões. Como muito do que fizemos para curvas no plano vale, com pequenas modificações para estas curvas, daremos mais ênfase às diferenças entre curvas no plano e curvas no espaço. A diferença mais importante está na definição da curvatura e na introdução da torção nas novas fórmulas de Frenet.

Escreveremos uma curva  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  como  $C(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ . Como no caso de curvas no plano  $C$  é diferenciável de classe  $C^k$  se e somente se cada função coordenada  $x_i$  o é. Ela é regular se seu vetor tangente  $C'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t))$  é sempre diferente de zero. Como no caso de curvas planas definimos o comprimento de  $C$  como o integral  $\int_a^b |C'(t)| dt$ . Também podemos reparametrizar  $C$  usando o comprimento de arco  $s(t) = \int_a^t |C'(u)| du$  de tal maneira que se  $\phi$  é a função inversa de  $s$  então  $C(t) = \tilde{C}(\phi(t))$ . Em geral usaremos muito do que foi desenvolvido nas primeiras seções do capítulo I.

### 1. Tangentes, normais e curvatura

Nesta seção definiremos a curvatura de curvas espaciais. Como no caso de curvas no plano, temos o vetor tangente  $C'(t)$ , que podemos pensar que tem sua origem no ponto  $(0,0,0)$  ou no ponto  $C(t)$ , segundo nossa conveniência. No tempo  $t_0$  temos a linha tangente

$L_{t_0} = \{C(t_0) + \lambda C'(t_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ; esta é a linha que aproxima melhor a curva perto de  $t_0$ .

Ao contrário das curvas no plano, não existe uma maneira automática de escolher um vetor normal a uma curva em  $\mathbb{R}^3$  a partir do vetor tangente usando a orientação usual (como fizemos na seção I.7). O que acontece é que o conjunto  $\{v \in \mathbb{R}^3 : v \cdot C'(t_0) = 0\}$ , que no caso de  $\mathbb{R}^2$  é uma linha, agora é um plano. Este conjunto é chamado de plano normal da curva  $C$  no ponto  $C(t_0)$ . Dentro deste plano poderemos escolher, em certas circunstâncias, um referencial de vetores especiais.

Suponhamos agora que a curva  $C$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Se a segunda derivada  $C''(t_0)$  é diferente de zero, podemos escolher um vetor normal especial pela seguinte fórmula

$$(1.1) \quad N(t_0) = \frac{C''(t_0)}{|C''(t_0)|}$$

Este vetor é chamado normal principal. O plano passando por  $C(t_0)$  e paralelo ao plano gerado por  $N(t_0)$  e

$T(t_0) = \frac{C'(t_0)}{|C'(t_0)|}$  (o vetor tangente unitário) é chamado

de plano osculador de  $C$  em  $C(t_0)$ . A curvatura da curva  $C$  é definida como  $h(t) = |C''(t)|$ .

Observações:

1)  $k(t) \geq 0$

2) O valor absoluto da curvatura (no plano) de uma curva no plano é igual a curvatura da curva considerada como uma curva no espaço

3) Se  $k(t_0) = 0$ , então não podemos definir  $N(t_0)$ .

Podemos definir o círculo osculador com o círculo contido no plano osculador com centro  $C(t_0) + \frac{C''(t_0)}{k(t_0)^2}$  e raio  $1/k(t_0)$ . Ele aproxima a curva de ordem dois.

Exercício 1.1 - Mostre que se  $C''(t_0) \neq 0$  e  $0 < r < 1/k(t_0)$ , então existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} C((t_0 - \delta, t_0 + \delta)) - \{C(t_0)\} &\subset B_r = \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3: d(v, C(t_0) + \frac{rC''(t_0)}{k(t_0)}) > r\} \end{aligned}$$

Exercício 1.2 - Demonstre que se  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular então  $\mathbb{R}^3 - C([a, b])$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^3$  cuja fronteira é  $C([a, b])$ .

Exercício 1.3 - Considere a curva hélice definida como  $C(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes positivas. Faça um desenho. Ache o comprimento de  $C|_{[0, 2\pi]}$ . Qual é a curvatura de  $C$ ? Esta curva está contida em algum plano de  $\mathbb{R}^3$ ? Por que? O que é que os vetores normais têm em comum?

## 2. Produto vetorial, orientação

Quem estiver familiarizado com os fatos básicos sobre o produto vetorial de dois vetores pode passar rapidamente para a próxima seção.

Sejam  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  e  $e_3 = (0, 0, 1)$  os três vetores que definem o referencial usual de  $\mathbb{R}^3$ . Considere três vetores linearmente independente  $v_1, v_2$  e  $v_3$  em  $\mathbb{R}^3$ . Podemos escrevê-los como  $v_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} e_j$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Dizemos que o trio  $(v_1, v_2, v_3)$  induz a orientação positiva de  $\mathbb{R}^3$  se  $\det(a_{ij}) > 0$ , e negativa se  $\det(a_{ij}) < 0$ .

Exercício 2.1 - (i) O trio  $(e_1, e_2, e_3)$  induz a orientação positiva; (ii)  $(v_1, v_3, v_2)$  induz a orientação contrária à induzida por  $(v_1, v_2, v_3)$ .

Definimos o produto vetorial de dois vetores  $u$  e  $w$  de  $\mathbb{R}^3$  da seguinte maneira, se  $u = (u_1, u_2, u_3)$  e  $w = (w_1, w_2, w_3)$ ,

$$(2.1) \quad uxw = (u_2w_3 - u_3w_2)e_1 + (u_3w_1 - u_1w_3)e_2 + (u_1w_2 - u_2w_1)e_3 .$$

Ele possui as seguintes propriedades:

$$(2.2) \quad uxw = -wxu$$

$$(2.3) \quad w \cdot (uxv) = v \cdot (wxu) = u \cdot (vwx) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$(2.4) \quad (u, v, uxv) \text{ induz a orientação positiva.}$$

Se  $v(t)$  e  $w(t)$  são curvas diferenciais, temos

$$(2.5) \quad (v(t) \times w(t))' = v'(t) \times w(t) + v(t) \times w'(t)$$

Exercício 2.2 - Verifique (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5).

Exercício 2.3 - Seja  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco

e  $k(t)$  a curvatura de  $C$  como curva no plano. Mostre que

$$C'(t) \times C''(t) = k(t) e_1 \times e_2 .$$

Exercício 2.4 -  $uxw = 0$  se e somente se  $u$  e  $w$  são linearmente independentes.

Exercício 2.5 - Mostre que  $|uxw|^2 = \det \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot w \end{pmatrix}$

Suponha que, dados vetores linearmente independentes  $v$  e  $w$  de  $\mathbb{R}^3$  fazendo um ângulo  $\theta$ , o vetor unitário  $u$  é tal que o trio  $(u, v, w)$  induz a orientação positiva de  $\mathbb{R}^3$  com  $u \cdot v = u \cdot w = 0$ ; então

$$(2.6) \quad v \times w = (|v| |w| \text{ sen } \theta) u .$$

Observação: A maneira intuitiva de obter a direção de  $u$  é usar a regra da mão direita: se os quatro primeiros dedos da mão dão a volta no plano de  $v$  e  $w$  na direção de  $v$  a  $w$ , então o dedo polegar aponta na direção  $u$  (Veja a figura 2.1).

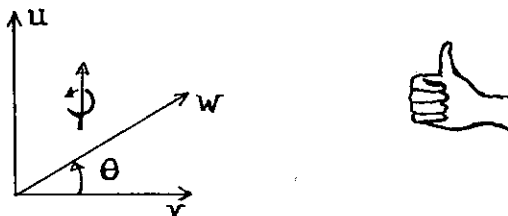


Figura 2.1

Exercício 2.6 - (i) se  $|u| = |v| = 1$  e  $u \cdot v = 0$ , então  $|uxv| = 1$ , (ii)  $(uxv) \cdot u = 0$ ,  
(iii)  $e_3 = e_1 \times e_2$ ,  $e_2 = e_3 \times e_1$ .

Exercício 2.7 - Se  $|C(t)| = \lambda$ , onde  $\lambda$  é constante, então  $k(t) = 1/\lambda$ .

### 3. O vetor binormal e a torção

Para uma curva regular  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  com curvatura sempre positiva, já obtemos os vetores  $T(t)$  e  $N(t)$ . Podemos então definir um auto vetor normal a curva,  $B(t)$ , o vetor binormal, como

$$(3.1) \quad B(t) = T(t) \times N(t)$$

Este é um vetor normal do plano osculador (veja o exercício 2.6). Logo sua variação mede a variação do plano osculador. Como  $T(t) \cdot B(t) = 0$  e  $T'(t) \cdot B(t) = -k(t) N(t) \cdot B(t) = 0$ , temos que

$$(3.2) \quad 0 = (T(t) \cdot B(t))' = T'(t) \cdot B(t) + B'(t) \cdot T(t) = B'(t) \cdot T(t).$$

Como também  $B'(t) \cdot B(t) = 0$ , concluímos que  $B'(t)$  só tem uma componente na direção da normal principal  $N(t)$  i.e.

$$(3.3) \quad B'(t) = -\tau(t) N(t) .$$

A função  $\tau(t)$  assim definida é chamada de torção da curva  $C$ ; o significado do sinal negativo será esclarecido mais tarde. A idéia geométrica de que  $\tau$  mede a variação do plano osculador será usada na seguinte proposição.

Proposição 3.1 - Seja  $C$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura  $k > 0$ . A torção  $\tau$  é identicamente nula ( $\tau \equiv 0$ ) se e somente se a curva está contida num plano.

Demonstração:  $\tau \equiv 0$  se e somente se  $B'(t) \equiv 0$  se e somente se  $B(t) = v$ , um vetor constante, se e somente se  $v \cdot C'(t) = B(t) \cdot T(t) = 0$ . Logo a proposição segue do seguinte fato: todos os vetores tangentes a uma curva estão contidos num plano se e somente se a curva está contida num plano. Mostraremos agora esta última afirmação. Se  $v \cdot C'(t) \equiv 0$  então temos que

$$\begin{aligned} C(t) \cdot v &= (C(t_0) + \int_{t_0}^t C'(u) du) \cdot v = C(t_0) \cdot v + \int_{t_0}^t (C'(u) \cdot v) du = \\ &= C(t_0) \cdot v. \end{aligned}$$

Logo a curva  $C(t)$  está contida no plano perpendicular a  $v$  e passando por  $C(t_0)$ . A afirmação inversa é trivial.

C.Q.D.



Observação: Considere a curva  $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida como  
$$C(t) = (t, e^{-1/t^2}, 0) \quad \text{se } t < 0, \quad C(t) =$$
$$= (t, 0, 0) \quad \text{se } 0 \leq t \leq 1, \quad \text{e } C(t) = (t, 0, e^{-1/(1-t)^2}) \quad \text{se}$$
$$t > 1.$$
 Mostre que  $C$  é diferenciável, e que se  $k > 0$  então  $\tau=0$ . Logo, definindo  $\tau=0$  quando  $k=0$ , obtemos uma curva com  $\tau=0$  mas que não é plana.

Exercício 3.1 - Demonstre que

$$\int_a^b w(t) \cdot v dt = \left( \int_a^b w(t) dt \right) \cdot v$$

Exercício 3.2 - Ache a torção da hélice

$$C(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a, b > 0.$$

Exercício 3.3 - Como muda a torção quando mudamos a orientação da curva?

Exercício 3.4 - Demonstre que  $C$  é uma curva plana se e somente se  $v \cdot C'''(t) = 0$ , para todo  $t$ , onde  $v$  é algum vetor fixo.

Exercício 3.5 - Seja  $F$  uma isometria de  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $C$  uma curva de  $\mathbb{R}^3$  com  $k > 0$ . Demonstre que  $C$  e  $F \circ C$  tem a mesma torção em pontos correspondentes.

#### 4. Fórmulas de Frenet

Nesta seção vamos generalizar as fórmulas de Frenet obtidas na seção I.7. Aqui, além da curvatura, entrará em jogo a torção. Consideraremos uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura positiva em todo ponto.

Ao longo desta curva temos um referencial que é o trio de vetores  $(T(t), N(t), B(t))$  definido nas últimas seções, chamado referencial de Frenet. Vimos que  $T'(t) = C''(t) = k(t)N(t)$  e que  $B'(t) = -\tau(t)N(t)$ . Como

$$|N(t)|^2 \equiv 1, \quad N'(t) \cdot N(t) = 0.$$

Também temos que,

$$\begin{aligned} 0 &= (N(t) \cdot B(t))' = N'(t) \cdot B(t) + B'(t) \cdot N(t) = \\ &= N'(t) \cdot B(t) - \tau(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= (N(t) \cdot T(t))' = N'(t) \cdot T(t) + N(t) \cdot T'(t) = \\ &= N'(t) \cdot T(t) + k(t) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} N'(t) &= (N'(t) \cdot T(t))T(t) + (N'(t) \cdot N(t))N(t) + \\ &= (N'(t) \cdot B(t))B(t) = -k(t)T(t) + \tau(t)B(t) \end{aligned}$$

Em resumo, chegamos às fórmulas de Frenet

$$(4.1) \quad T'(t) = 0 + k(t)N(t) + 0$$

$$(4.2) \quad N'(t) = -k(t)T(t) + 0 + \tau(t)B(t)$$

$$(4.3) \quad B'(t) = 0 + (-\tau(t)N(t)) + 0$$

Observe que os nove coeficientes no lado direito das equações formam uma matriz  $3 \times 3$  antisimétrica.

Exercício 4.1 - Como seriam as fórmulas de Frenet se a curva não estivesse parametrizada pelo comprimento de arco.

Exercício 4.2 - Demonstre que se todas as linhas tangentes de  $C$  passam por um ponto fixo de  $\mathbb{R}^3$  então  $C$  é uma linha reta.

Exercício 4.3 - Ache a curvatura e a torção da curva

$$C(t) = \left( t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right).$$

Exercício 4.4 - Ache a curvatura e a torção da curva

$$C(t) = (t - \text{sen } t, 1 - \text{cos } t, bt); \quad b > 0.$$

## 5. Fórmulas da curvatura e da torção

Geralmente uma curva não é dada já parametrizada

pelo comprimento de arco; por esta razão será útil desenvolver algumas fórmulas da curvatura e da torção de uma curva arbitrária. Seja  $C(t)$  uma tal curva e  $\tilde{C}$  sua reparametrização pelo comprimento de arco. Temos que

$$C(t) = \tilde{C}(s(t)) \quad \text{e} \quad C'(t) = \tilde{C}'(s(t)) \frac{ds}{dt}, \quad \text{onde}$$

$$s(t) = \int_a^t |C'(u)| du. \quad \text{Também temos que} \quad T(t) = \frac{C'(t)}{|C'(t)|},$$

e que

$$\begin{aligned} C''(t) &= \tilde{C}''(s(t)) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \tilde{C}'(s(t)) \frac{d^2s}{dt^2} = \\ &= k(t) |C'(t)|^2 N(t) + \frac{d^2s}{dt^2} T(t) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} C'(t) \times C''(t) &= (|C'(t)| T(t)) \times (k(t) |C'(t)|^2 N(t) + \frac{d^2s}{dt^2} T(t)) + \\ &= k(t) |C'(t)|^3 T(t) \times N(t) + |C'(t)| \frac{d^2s}{dt^2} T(t) \times T(t) = \\ &= k(t) |C'(t)|^3 T(t) \times N(t) = k(t) |C'(t)|^3 B(t) \end{aligned}$$

Segue-se que

$$(5.1) \quad B(t) = \frac{C'(t) \times C''(t)}{k(t) |C'(t)|^3}$$

Como  $k(t)$  é positiva, tomando normas,

$$(5.2) \quad k(t) = \frac{|C'(t) \times C''(t)|}{|C'(t)|^3}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 c'''(t) \cdot B(t) &= \left( \frac{d^2 s}{dt^2} T(t) + k(t) |c'(t)|^2 N(t) \right)' \cdot B(t) = \\
 &= \frac{d^2 s}{dt^2} T(t) \cdot B(t) + \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{ds}{dt} T'(t) \cdot B(t) + \\
 &+ \frac{d}{dt} (k(t) |c'(t)|^2) N(t) \cdot B(t) + \\
 &+ k(t) |c'(t)|^2 \frac{ds}{dt} N'(t) \cdot B(t) = \\
 &= k(t) |c'(t)|^3 \tau(t)
 \end{aligned}$$

Observe que acima identificamos  $T(t)$  com  $\tilde{T}(s(t))$ ,  $N(t)$  com  $N(s(t))$ ; por isso  $T'(t) = \tilde{T}'(s(t))s'(t)$ , etc. Finalmente, usando (5.1) e (5.2) obtemos

$$\begin{aligned}
 (5.3) \quad \tau(t) &= \frac{c'''(t) \cdot B(t)}{k(t) |c'(t)|^3} = \frac{c'''(t) \cdot (c''(t) \times c'(t))}{k(t)^2 |c'(t)|^3} \\
 &= \frac{c'''(t) \cdot (c'(t) \times c''(t))}{|c'(t) \times c''(t)|^2}
 \end{aligned}$$

Exemplo 5.1: Considere a curva  $C(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ .

Suas derivadas são

$$C'(t) = 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$$

$$C''(t) = 6(-t, 1, t)$$

$$C'''(t) = 6(-1, 0, 1)$$

e  $|C'(t)| = \sqrt{18} (1+t^2)$ . Temos também que

$$C'(t) \times C''(t) = 18(-1+t^2, -2t, 1+t^2)$$

e que

$$|C'(t) \times C''(t)|^2 = 2(18)^2(1+t^2)^2 .$$

Logo,

$$C'''(t) \cdot (C'(t) \times C''(t)) = 6 \cdot 18 \cdot 2, \quad e$$

$$k(t) = \tau(t) = \frac{1}{3(1+t^2)^2} .$$

Exercício 5.1 - Seja  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Considere a curva  $D(t) = T(t)$ , onde  $T(t)$  é o vetor tangente unitário de  $C$ . Demonstre que a curvatura de  $D$  é dada pela fórmula  $\tilde{k} = \sqrt{1+(\tau/k)^2}$ , onde  $k$  e  $\tau$  são a curvatura e a torção de  $C$ .

Exercício 5.2 - Calcule a curvatura e a torção da curva  $C(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ .

Exercício 5.3 - Seja  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva com  $|C(t)|=1$  para todo  $t$  em  $[a, b]$ , e com  $k$  e  $\tau$  sempre diferentes de zero. Demonstre que  $\tau/k = (k'/\tau k^2)'$ .

Sugestão: Seja  $D(s) = C(s) + 1/k(s)N(s) - k'/\tau k^2 B(s)$ ;

$D(s)$  é o centro da esfera tangente a  $C$  em  $C(s)$  que aproxima melhor a curva de ordem 3. A curva está contida numa esfera se e somente se  $D'(s) = 0$  para todo  $s$ .

Exercício 5.4 - Demonstre que as únicas curvas planas com curvatura constante contidas numa esfera de  $\mathbb{R}^3$  são círculos (Lembre-se, uma esfera e um conjunto do tipo  $\{v \in \mathbb{R}^3: d(p,v) = r\}$ ).

Exercício 5.5 - Faça o exercício 3.5 usando as fórmulas desta seção.

Exercício 5.6 - Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta: Se  $C: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular com  $C'''(t) \cdot (C'(t) \times C''(t)) = 0$  para todo  $t \in [a,b]$ , então  $C$  é uma curva plana.

Exercício 5.7 - Seja  $C$  uma curva com a propriedade de que o vetor  $C'(t)$  é sempre normal a curva. Mostre que  $C(t) \in \{v \in \mathbb{R}^3: |v-p| = r\}$ , para algum  $p \in \mathbb{R}$  e algum  $r \in \mathbb{R}^+$

## 6. Hélices

Agora estudaremos um tipo especial de curvas de  $\mathbb{R}^3$ . Uma curva é chamada uma hélice cilíndrica se o vetor

tangente  $T(t)$  faz um ângulo constante  $\theta$  com um vetor fixo unitário  $v$ , isto é,  $T(t) \cdot v = \cos \theta$ , para todo  $t$ . A seguinte proposição caracteriza este tipo de curvas.

Proposição 6.1 - Uma curva regular  $C(t)$  com curvatura positiva é uma hélice cilíndrica se e somente se  $\tau/k$  é constante.

Demonstração: Basta considerar curvas parametrizadas pelo comprimento de arco pois o vetor  $T(t)$  não depende da parametrização.

Suponha que  $C$  é uma hélice cilíndrica com  $T(s) \cdot v = \cos \theta$ . Temos então que

$$0 = (T \cdot v)' = T' \cdot v = k N \cdot v$$

Como  $k \neq 0$ ,  $N \cdot v = 0$ . Isto implica que  $v$  é uma combinação linear de  $T(s)$  e  $B(s)$ . Usando o fato de  $v$  ser unitário e a condição sobre  $T(s)$ , temos que

$$(6.1) \quad v = \cos \theta T(s) \pm \sin \theta B(s)$$

Diferenciando (6.1) e usando as fórmulas de Frenet, obtemos

$$(6.2) \quad 0 = v' = \cos \theta N(s) \mp \sin \theta \tau(s)N(s)$$

o que implica que



$$(6.3) \quad \frac{\tau(s)}{k(s)} = \pm \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \pm \cot \theta ,$$

é uma constante que não depende de  $s$ .

Inversamente, se  $\tau(s)/k(s)=c$ , uma constante, achamos um ângulo  $\theta$  tal que  $c = \cot \theta$ . Considerando a função  $V(s) = \cos \theta T(s) + \sin \theta N(s)$ , temos que

$$(6.4) \quad V'(s) = (k(s)\cos \theta - \tau(s)\sin \theta)N(s)=0,$$

pelas fórmulas de Frenet; mas, isto implica que  $V(s)=v$ , um vetor constante, e temos que  $v.T(s) = \cos \theta$ . Logo  $C$  é uma hélice cilíndrica. C.Q.D.

Exercício 6.1 - Seja  $C$  uma curva de  $\mathbb{R}^3$  com  $k$  e  $\tau$  sendo constantes e diferentes de zero.

Demonstre que os pontos de  $C$ , a menos de uma isometria de  $\mathbb{R}^3$ , satisfazem a equação  $x^2+y^2 = d^2$ , com  $d$  constante. Uma tal curva é chamada uma hélice circular.

Exercício 6.2 - Seja  $C$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, com curvatura e torção constantes diferentes de zero. Demonstre que todas as linhas geradas pelos vetores normais principais cortam uma linha fixa de  $\mathbb{R}^3$ .

Exercício 6.3 - Mostre que a curva formada pelos centros de curvatura de uma hélice é também uma hélice.

Exercício 6.4 - Mostre que a curva  $C(t) = (at, bt, t^3)$  é uma hélice se e somente se  $2b^2 = 3a$ .

### 7. Significado geométrico da curvatura e da torção

Na seção I.9 vimos que a curvatura de uma curva plana ser diferente de zero garante a convexidade local da curva. Nesta seção vamos obter resultados de caráter local sobre o significado da curvatura e da torção serem diferentes de zero. Para curvas no espaço  $\mathbb{R}^3$  vimos que três planos surgem naturalmente em cada ponto da curva, o plano osculador, o plano normal, e o plano retificante. No começo veremos como a curva atravessa estes planos; depois estudaremos a projeção da curva nestes planos.

Primeiro, usaremos o teorema de expansão de Taylor para achar uma expressão canônica da curva  $C(t)$ , que assumiremos que é de classe de diferenciabilidade  $C^5$ . Lembramos que dada uma função real  $x_i(t)$  de uma variável real, suficientemente diferenciável, podemos escrevê-la, usando o teorema de Taylor, como

$$(7.1) \quad \begin{aligned} x_i(t) &= x_i(t_0) + (t-t_0) x_i'(t_0) + \\ &+ \frac{(t-t_0)^2}{2} x_i''(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} x_i^{(n)}(t) + \\ &+ \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} g_i(t) \end{aligned}$$

onde  $\lim_{t \rightarrow t_0} g_i(t) = x_i^{(n+1)}(t_0)$ , (em particular,  $g$  é localmente limitada). Se escrevermos a curva  $C(t)$  como  $C(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , então temos que sua  $k$ -ésima derivada é  $C^{(k)}(t_0) = (x_1^{(k)}(t_0), x_2^{(k)}(t_0), x_3^{(k)}(t_0))$ , e, usando (7.1) três vezes, obtemos

$$C(t) = (C(t_0) + (t-t_0)C'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2} C''(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} C^{(n)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n+1)!} g(t))$$

onde

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} (g_1(t), g_2(t), g_3(t)) = \\ (7.2) \quad &= (\lim_{t \rightarrow t_0} g_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} g_2(t), \lim_{t \rightarrow t_0} g_3(t)) = \\ &= (x_1^{(n+1)}(t_0), x_2^{(n+1)}(t_0), x_3^{(n+1)}(t_0)) = C^{(n+1)}(t_0) \end{aligned}$$

Agora vamos aplicar esta fórmula a uma curva  $C(t)$ , parametrizada pelo comprimento de arco, com curvatura positiva e referencial de Frenet  $(T(t), N(t), B(t))$ . Temos que  $C'(t_0) = T(t_0)$ ,  $C''(t_0) = k(t_0) N(t_0)$ , e  $C'''(t) = (C''(t))' = (k'(t)N(t) + k(t)(-k(t)T(t) + \tau(t)B(t)))$ , usando as fórmulas de Frenet. Agora, usando a fórmula (7.2), para  $n=3$ , obtemos

$$(7.3) \quad C(t) - C(t_0) = (1 - k(t_0))^2 \frac{(t - t_0)^2}{6} T(t) + \\ + \left( \frac{k}{2}(t_0) + \frac{k'}{6}(t_0)(t - t_0) \right) (t - t_0)^2 N(t_0) + \\ + \frac{k(t_0) \uparrow}{6} (t_0) (t - t_0)^3 B(t_0) + g(t) \frac{(t - t_0)^4}{24}$$

onde  $g$  é uma função contínua com  $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = C'''(t_0)$ .

Olhando esta expressão da curva vemos que uma aproximação de primeira ordem da curva, isto é, esquecendo os termos  $(t - t_0)^n$  de ordem  $n \geq 2$ , segue a linha tangente. A aproximação de segunda ordem da curva,

$$C(t) \approx C(t_0) + (t - t_0) + T(t_0) + k(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2} N(t_0)$$

(que esquece os termos  $(t - t_0)^n$  com  $n > 2$ ) está contida no plano osculador, com a curvatura dizendo-nos quanto a curva desvia-se da linha tangente. Finalmente a torção entra na aproximação de terceira ordem, que nos diz que, esquecendo os termos de ordem maior do que três,

$$(C(t) - C(t_0)) \cdot B(t_0) \approx \frac{k(t_0) \uparrow(t_0)}{6} (t - t_0)^3$$

Dáí concluímos que se a torção é positiva a curva corta o plano osculador na direção  $B(t_0)$ . Veremos estes fatos com maiores detalhes na próxima proposição.

Lembramos que o plano perpendicular a  $B(t_0)$  é

o plano osculador, que o plano perpendicular a  $T(t_0)$  é o plano normal a curva em  $C(t_0)$ . O plano perpendicular a  $N(t_0)$  chama-se plano retificante. A seguinte proposição explica o comportamento da curva com relação a estes planos.

Proposição 7.1 - Seja  $C$  uma curva de  $\mathbb{R}^3$  parametrizada pelo comprimento de arco.

- (a)  $C$  corta localmente o plano normal a  $C$  em  $C(t_0)$ .
- (b) Se  $k(t_0) > 0$  então existe  $\delta > 0$  tal que o conjunto  $C((t_0 - \delta, t_0 + \delta)) - \{C(t_0)\}$  está contido num dos semiespaços abertos em que o plano retificante em  $C(t_0)$  separa  $\mathbb{R}^3$ .

(c) Se  $k(t_0)$  e  $\tau(t_0)$  são ambas positivas então a curva corta (localmente) o plano osculador em  $C(t_0)$ . (Isto é,  $C(t)$  está no semiespaço  $\{v \in \mathbb{R}^3: v \cdot B(t_0) > C(t_0) \cdot B(t_0) \text{ se } t_0 < t < t_0 + \delta\}$ ).

Demonstração: (a) A função  $h(t) = C(t) \cdot T(t_0)$  tem derivada  $h'(t_0) = C'(t_0) \cdot T(t_0) = 1$ ; logo existe  $\delta > 0$  tal que  $h(t) > h(t_0)$  se  $t_0 < t < t_0 + \delta$ ,  $h(t) < h(t_0)$  se  $t_0 - \delta < t < t_0$ , como queríamos.

(b) Como o plano retificante é igual ao conjunto

$\{v \in \mathbb{R}^3: (v-C(t_0)) \cdot N(t_0) = 0\}$ , basta mostrar que a função  $f(t) = (C(t) - C(t_0)) \cdot N(t_0) > 0$  se  $0 < |t-t_0| < \delta$ , para algum  $\delta > 0$ . Mas, pela fórmula (7.3)

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{k(t_0)}{2} + \frac{k'(t_0)}{6}(t-t_0)\right)(t-t_0)^2 + \\ &+ g(t) \cdot N(t_0) \frac{(t-t_0)^4}{24} = \\ &= (t-t_0)^2 \left[ \frac{k(t_0)}{2} + h(t)(t-t_0) \right] \end{aligned}$$

onde  $h(t) = \frac{k'(t_0)}{6} + g(t) \cdot N(t_0) \frac{(t-t_0)}{24}$  é contínua;

como  $k(t_0) > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{k(t_0)}{2} + h(t)(t-t_0) > 0 \quad \text{se } |t-t_0| < \delta.$$

Logo, como  $(t-t_0)^2 > 0$  se  $t \neq t_0$ , temos que  $f(t) > 0$  se  $0 < |t-t_0| < \delta$ .

(c) O plano osculador em  $C(t_0)$  é o conjunto

$\{v \in \mathbb{R}^3: (v-C(t_0)) \cdot B(t_0) = 0\}$ . Logo, basta demonstrar que a função  $f(t) = (C(t)-C(t_0)) \cdot B(t_0)$  é positiva se  $t_0 < t < t_0 + \delta$  e negativa se  $t_0 - \delta < t < t_0$ .

Como na demonstração do item (b), usamos a fórmula (7.3) e obtemos que

$$f(t) = (t-t_0)^3 \left[ \frac{k(t_0) \cdot \tau(t_0)}{6} + \frac{g(t) \cdot B(t_0)}{24} (t-t_0) \right]$$

Sabemos que  $g$  é contínua; logo,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) \cdot B(t_0)}{24} (t-t_0) = 0.$$

Mas  $k(t_0) \neq 0$ ; logo, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left[ \frac{k(t_0) \neq 0}{6} + \frac{g(t) \cdot B(t_0)}{24} (t-t_0) \right] > 0, \quad \text{se } |t - t_0| < \delta.$$

Isto implica que  $f(t)$  muda de sinal exatamente como  $(t-t_0)^3$ . C.Q.D.

Observação: O item (c) justifica o sinal dado a torção  $\tau$  na fórmula (4.3).

Exercício 7.1 - Demonstre que o plano osculador é o único plano contendo a linha tangente em  $C(t_0)$  que é cortado pela curva (localmente); isto é, demonstre que para qualquer destes planos existe um  $\delta > 0$  tal que  $C((t_0-\delta, t_0+\delta)) - \{C(t_0)\}$  está totalmente de um lado do plano. Faça um desenho desta situação.

Agora vamos observar de outro ponto de vista as relações existentes entre a curva e esses planos. Usando outra vez a fórmula (7.3) vamos estudar as projeções da curva nesses planos. Para simplificar a discussão vamos assumir que  $C(t_0) = (0,0,0)$ ,  $C'(t_0) = T(t_0) = (1,0,0)$ ,  $N(t_0) = (0,1,0)$  e  $B(t_0) = (0,0,1)$ , e, ainda, que  $t_0=0$ .

Desta maneira podemos escrever as coordenadas da fórmula

(7.3) como

$$(7.4) \quad x_1(t) = \left(1 - \frac{kt^2}{6}\right) t + g_1(t) \frac{t^4}{24}$$

$$(7.5) \quad x_2(t) = \left(\frac{k}{2} + \frac{k't}{6}\right) t^2 + g_2(t) \frac{t^4}{24}$$

$$(7.6) \quad x_3(t) = \frac{k''}{6} t^3 + g_3(t) \frac{t^4}{24}$$

ou, como

$$(7.7) \quad x_1(t) = t + p_1(t) t^3$$

$$(7.8) \quad x_2(t) = \frac{k}{2} t^2 + p_2(t) t^3$$

$$(7.9) \quad x_3(t) = \frac{k''}{6} t^3 + p_3(t) t^4$$

onde  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  são funções contínuas

A projeção de  $C$  no plano osculador é dado pela curva  $(x_1(t), x_2(t))$ . Mas, temos que

$$\frac{k}{2} (x_1(t))^2 = \frac{k}{2} t^2 + kp_1(t) t^3 + \frac{k}{2} t^6$$

Logo, usando a equação (7.8) obtemos

$$(7.10) \quad x_2(t) = \frac{k}{2} (x_1(t))^2 + k_1(t) t^3,$$

onde  $k_1$  é uma função contínua. Concluimos que, exceto por um termo que tende para zero rapidamente, de ordem 3,



$k_1(t)t^3$ , a projeção no plano osculador satisfaz a equação

$$(7.11) \quad x_2 = \frac{k}{2} x_1^2$$

Veja a figura 7.1 (a)

A projeção de  $C$  no plano retificante é  $(x_1(t), x_3(t))$ . Pela fórmula (7.7), temos que

$$\frac{k\tau}{6}(x_1(t))^3 = \frac{k\tau}{6} t^3 + p_4(t) t^5$$

onde  $p_4$  é uma função contínua; usando a fórmula (7.9), obtemos

$$(7.12) \quad x_3(t) = \frac{k\tau}{6}(x_1(t))^3 + h_3(t)t^4$$

onde  $h_3$  é contínua. Logo, exceto por um termo que tende a zero de ordem 4, a projeção no plano osculador satisfaz a equação

$$(7.13) \quad x_3 = \frac{k\tau}{6} x_1^3$$

Veja a figura 7.1 (b).

Finalmente, a projeção de  $C$  no plano normal é dada pela curva  $(x_2(t), x_3(t))$ . Mas, temos

$$(x_2(t))^3 = \frac{k^3}{8} t^6 + p_5(t) t^7$$

$$(x_3(t))^2 = \frac{k^2\tau^2}{36} t^6 + p_6(t) t^7$$

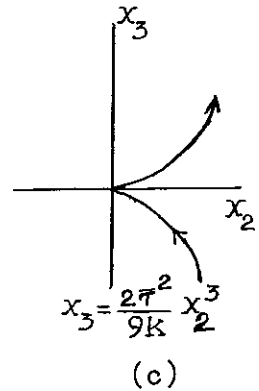
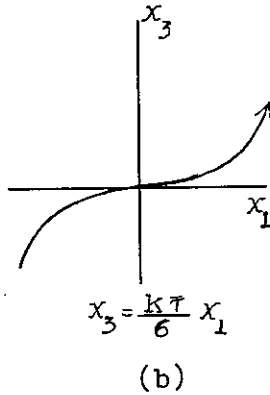
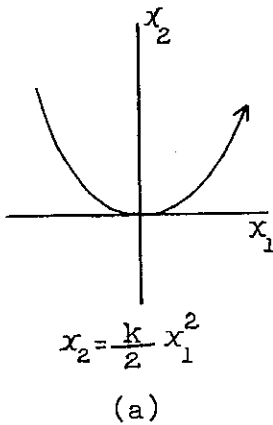
Logo,

$$(7.14) \quad (x_3(t))^2 = \frac{2\pi^2}{9k}(x_2(t))^3 + h_2(t) t^7$$

Isto é, exceto por um termo que tende a zero de ordem 7, a projeção no plano normal satisfaz

$$(7.15) \quad x_3^2 = \frac{2\pi^2}{9k} x_2^3$$

Veja a figura 7.1 (c). Neste último caso temos uma singularidade essencial tipo cúspide.



Plano Osculador

Plano Retificante

Plano Normal

Figura 7.1 As projeções

Exercício 7.2 - Convença-se que os fatores  $h_2(t)t^7$ ,  $h_1(t)t^3$ , etc., são na verdade negligíveis não afetando a geometria das projeções.

Exercício 7.3 - Que acontece quando mudamos um dos planos um pouquinho? As projeções mudam qualitativamente?

Exercício 7.4 - Demonstre que  $C$  é uma curva plana se e somente se todos os seus planos osculadores passam por um ponto fixo de  $\mathbb{R}^3$ .

Exercício 7.5 - Demonstre que  $C$  é uma curva plana se e somente se todos os planos osculadores são paralelos.



## CAPÍTULO III

### Superfícies

Neste capítulo daremos as noções e técnicas básicas a um estudo das superfícies de  $\mathbb{R}^3$ . Infelizmente não teremos oportunidade de nos aprofundarmos muito; mas o que é feito aqui dará ao leitor uma base sólida para continuar os estudos de geometria em um nível mais avançado. Na última seção são enunciados alguns teoremas com o objetivo de dar uma visão mais ampla sobre os problemas importantes de geometria diferencial.

#### 1. Superfícies regulares parametrizadas

Vamos começar nosso estudo de superfícies de  $\mathbb{R}^3$  usando uma definição análoga à de curvas parametrizadas. A definição que daremos a seguir é essencialmente local, mas servirá amplamente para desenvolver o estudo local das superfícies. Noutra seção daremos uma definição global de superfícies de  $\mathbb{R}^3$ .

Lembramos que uma função  $h: u \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida num aberto  $u$  de  $\mathbb{R}^2$  é diferenciável de classe  $C^k$

se todas as derivadas parciais  $\frac{\partial^j h}{\partial x^i \partial y^{j-i}}$  existem e são

contínuas para todo  $j \leq k$ . Também dizemos que uma aplicação  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$  é diferenciável de classe  $C^k$  se cada uma de suas funções coordenadas,  $f_1, f_2$  e  $f_3$ , é diferenciável de classe  $C^k$ . Se  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  é pelo menos de classe  $C^1$  então em cada ponto  $(x,y)$  de  $u$  temos sua matriz Jacobiana

$$(1.1) \quad J(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x,y)}$$

Definição: Uma superfície regular parametrizada de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) é uma aplicação diferenciável de classe  $C^k$ ,  $f: u \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida num aberto  $u$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que para todo ponto  $p$  em  $u$ , a matriz Jacobiana  $J(f)_p$  tem posto 2. A imagem  $f(u)$  é chamada o traço da superfície parametrizada.

Exemplo 1.1 - O gráfico de uma função. Se  $h: u \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável de classe  $C^k$  então  $f: u \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida como  $f(x,y) = (x,y,h(x,y))$  é uma superfície regular parametrizada. De fato, as fun-

ções  $f_1(x,y) = x$  e  $f_2(x,y) = y$  são também de classe  $C^k$  e o jacobiano de  $f$  em  $p$  é a matriz

$$(1.2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}$$

que sempre tem posto 2. O traço de  $f$  é o gráfico de  $h$ .

Exemplo 1.2 - O parabolóide é o gráfico da função  $h(x,y) = x^2 + y^2$ . A superfície regular parametrizada que ela gera  $f(x,y) = (x,y, x^2 + y^2)$  está definida em todo o plano. Faça um desenho.

Exemplo 1.3 - Cilindros. Seja  $C: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular do plano. Considere a aplicação  $f: (a,b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida como  $f(t,s) = (C_1(t), C_2(t), s)$  onde  $C(t) = (C_1(t), C_2(t))$ . Temos que  $f$  é diferenciável e que seu Jacobiano é dado por

$$(1.3) \quad J(f) = \begin{pmatrix} C'_1(t) & 0 \\ C'_2(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que tem posto 2 pois  $C'_1(t)$  ou  $C'_2(t)$  é diferente de zero. Veja a figura 1.1. Observe que uma superfície parametrizada pode ter pontos de auto-interseção, correspondendo a pontos diferentes de  $u$ .

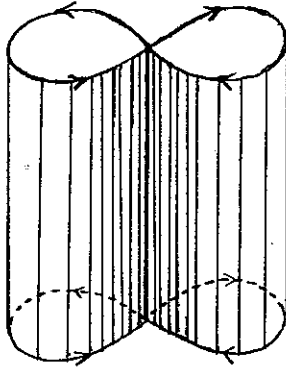


Figura 1.1. Um Cilindro

Observações:

1) Como no caso de curvas definidas em  $[a,b]$ , podemos definir uma superfície parametrizada  $f: \bar{u} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida no fecho de  $u$  se existe  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida num aberto  $V$  contendo  $\bar{u}$ , que é diferenciável e tem posto 2, tal que  $g|_{\bar{u}} = f$ .

2) A condição de que o jacobiano de  $f$  tenha posto 2 é análoga à de que uma curva seja regular,  $C'(t) \neq 0$ , (ou seja, que o jacobiano de  $C: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tenha posto 1). Esta propriedade do posto, como no caso de curvas, será fundamental no estudo das superfícies.

3) Mais tarde definiremos globalmente uma superfície regular com um conjunto de  $\mathbb{R}^3$  que é localmente o traço de uma superfície regular parametrizada.



Exercício 1.1 - Considere a aplicação  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f(x,y) = (x,y, ax + by + c) \quad a,b,c \in \mathbb{R},$$

$a$  e  $b$  diferentes de zero. Mostre que  $f$  é uma superfície regular parametrizada e que seu traço é um plano afim de  $\mathbb{R}^3$ .

Exercício 1.2 - Mostre que o traço do parabolóide é um conjunto fechado de  $\mathbb{R}^3$  que separa o espaço  $\mathbb{R}^3$  em dois abertos conexos disjuntos (Veja a seção I.13).

Exercício 1.3 - Calcule o Jacobiano do parabolóide no ponto  $p = (1,2)$ .

Definimos o plano tangente a uma superfície regular parametrizada  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  em  $p$  como o plano passando por  $f(p)$  paralelo a  $J(f)_p(\mathbb{R}^2)$  - a imagem do jacobiano de  $f$  em  $p$ . Nós o denotaremos por  $T_p$ .

Exemplo 1.4. Achamos o plano tangente  $T_{(1,3)}$  da superfície do exemplo 1.2. O jacobiano

$$J(f)_{(1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}_{(1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Como o } \mathbb{R}^2 \text{ é}$$

gerado pelos vetores  $e_1 = (1,0)$  e  $e_2 = (0,1)$ , temos que  $J(f)_{(1,3)}(\mathbb{R}^2)$  é gerado por  $v = J(f)_{(1,3)}(e_1) = (1,0,2)$  e  $w = J(f)_{(1,3)}(e_2) = (0,1,6)$ . Logo

(1.4)

$$\begin{aligned} T_{(1,3)} &= f(1,3) + J(f)_{(1,3)}(\mathbb{R}^2) = \{f(1,3) + xv + yw : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \\ &= \{(1+x, 3+y, 10 + 2x + 6y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 6y - z = 10\} \end{aligned}$$

Usando curvas podemos olhar o plano tangente em  $p$  com outro ponto de vista. Fixemos um ponto  $p = (p_1, p_2)$  em  $u$ ; consideremos agora uma curva  $C: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow u \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $C(0) = p$ . Temos que  $D = f \circ C: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva diferenciável cuja imagem está contida no traço da superfície parametrizada. Usando a regra da cadeia para composições de funções diferenciáveis temos que

$$(1.5) \quad D'(t) = J(f)_{D(t)}(C'(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C'_1(t) \\ C'_2(t) \end{pmatrix}$$

escrevendo  $C(t) = (C_1(t), C_2(t))$ . Logo  $D'(t)$  está na imagem de  $J(f)$ . Por outro lado a imagem de  $J(f)_p$  está gerada pelos vetores

$$(1.6) \quad f_x = J(f)(e_1) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$(1.7) \quad f_y = J(f)(e_2) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Qualquer vetor  $v$  em  $J(f)_p(\mathbb{R}^2)$  pode ser expresso como  $v = r f_x + s f_y$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$ . Agora observamos que  $v = D'(0)$  onde  $D = f \circ C$ , com  $C(t) = (p_1 + tr, p_2 + ts)$ . De fato,

$$(1.8) \quad D'(0) = J(f)_p(C'(0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(0) \\ C'_2(0) \end{pmatrix} =$$

$$= (C'_1(0) \frac{\partial f_1}{\partial x} + C'_2(0) \frac{\partial f_1}{\partial y}, C'_1(0) \frac{\partial f_2}{\partial x} + C'_2(0) \frac{\partial f_2}{\partial y}, C'_1(0) \frac{\partial f_3}{\partial x} + C'_2(0) \frac{\partial f_3}{\partial y}) = C_1(0) f_x + C_2(0) f_y = r f_x + s f_y = v.$$

Concluindo, podemos dizer que o plano tangente  $T_p$  consiste dos vetores tangentes a curvas do tipo  $D = f \circ C$ , ou seja, as curvas passando por  $f(p)$  contidas no traço de  $f$ . Veja a figura 1.2.

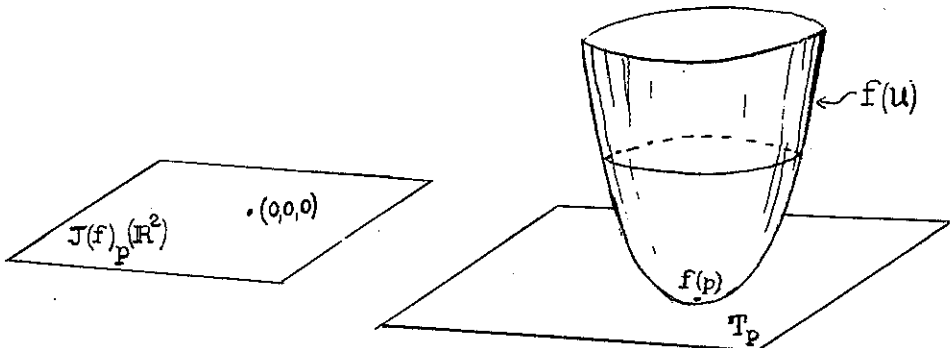


Figura 1.2

Exercício 1.4 - Mostre usando a definição de derivada parcial que  $(f_x)_p = D'(0)$  onde  $D = f \circ C$  e  $C(t) = (p_1+t, p_2)$ .

Exercício 1.5 - Considere a superfície  $f(x,y) = (x,y,x^2-y^2)$ . Ache  $T(10,15)$ .

Exemplo 1.5. A esfera  $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3: |v| = 1\}$  de raio 1. Este conjunto de  $\mathbb{R}^3$  não pode ser o gráfico de uma função, mas um subconjunto pode. De fato, a aplicação  $f: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2+y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida como  $f(x,y) = (x,y, \sqrt{1-x^2-y^2})$  tem como traço o subconjunto  $\{(x,y,z) \in S^2: z > 0\}$ . Faça um desenho.

Exercício 1.6 - Mostre que a aplicação  $f$  do exemplo 1.5 é uma superfície regular parametrizada. Ache o plano tangente  $T(1/4, 1/4)$ .

Exercício 1.7 - Mostre que o conjunto  $\{(x,y,z) \in S^2: x > 0\}$  é o traço de uma superfície regular parametrizada.

Observação. Como no caso de curvas, muitas vezes pensaremos no plano tangente  $T_p$  como sendo  $J(f)_p(\mathbb{R}^2)$ , ou seja passando pela origem e não por  $f(p)$ . A escolha dependerá das circunstâncias.

Exemplo 1.6 - Superfícies regradas. Estas são superfícies caracterizadas pela propriedade de que por cada um de seus pontos passa um pedaço de linha reta. Considere a seguinte aplicação  $f: (a,b) \times (c,d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida como

$$(1.9) \quad f(t,r) = C(t) + r D(t)$$

onde  $C$  e  $D$  são curvas diferenciáveis de  $(a,b)$  em  $\mathbb{R}^3$ . Claro que em geral esta aplicação  $f$  não será regular; em cada caso particular devemos verificar a regularidade da superfície parametrizada. Um exemplo de superfície regradada é o cilindro do exemplo 1.3 onde  $D(t) \equiv (0,0,1)$ . Outro exemplo é o cone, com  $C(t) \equiv p$  e  $D(t) = p + (\cos t, \sin t, 1)$ .

Exemplo 1.7 - O helicóide, uma superfície regradada. Considere a hélice  $C(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  estudada na seção II.6, e sua normal  $D(t) = N(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$ ; o helicóide é a superfície definida pela fórmula (1.9), para todo  $t$  e  $r$ . Veja a figura 1.3. Temos que

$$f_t = ((r-a)\sin t, (a-r)\cos t, b) .$$

$$f_r = (\sin t, -\cos t, 0)$$

Um dos determinantes das submatrizes  $2 \times 2$  de  $J(f)$  é

$b \sin t$ , e outro  $-b \cos t$ ; como os dois não são simultaneamente zero temos que  $f$  é regular.

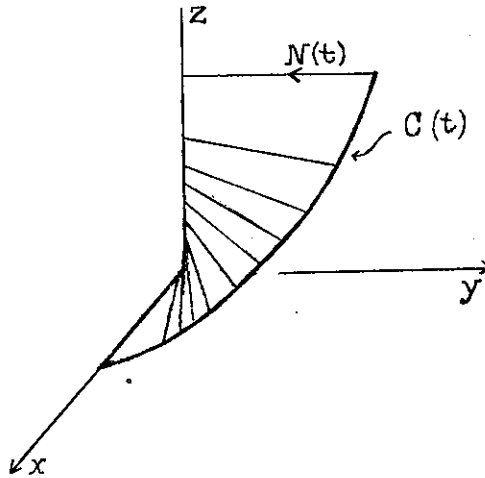


Figura 1.3. Um pedaço de helicóide

Exercício 1.8 - Qual é o domínio de definição do cone como superfície regular?

Exercício 1.9 - Dada uma curva regular em  $\mathbb{R}^3$   $C(t)$ ,  
 $a < t < b$ , com curvatura  $k(t)$  sempre positiva, podemos definir sua superfície tangencial como  
 $f: (a, b) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(1.10) \quad f(t, r) = C(t) + rC'(t).$$

Mostre que  $f$  é regular. Faça um desenho. Ache a equação do plano tangente no ponto  $(t, r)$ .

Exercício 1.10 - Mostre que a aplicação  $f(t,r)=(t,r,tr)$ , o gráfico da função  $z=y$ , é uma superfície regrada (é chamada o parabolóide hiperbólico).

## 2. Reparametrização de superfícies

Como no caso de curvas podemos reparametrizar uma superfície regular parametrizada  $f: u \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Dizemos que  $h: V \rightarrow u$ , onde  $u$  e  $V$  são abertos de  $\mathbb{R}^2$ , é um difeomorfismo se  $h$  é diferenciável biunívoca e sobre e sua aplicação inversa  $h^{-1}: u \rightarrow V$  é também diferenciável. Dado um tal difeomorfismo  $h$  dizemos que a composição  $\tilde{f} = f \circ h: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma reparametrização de  $f$ . O difeomorfismo  $h$  é chamado uma mudança de parâmetros.

Primeiro observamos que  $h^{-1} \circ h(p) = p = \text{id}(p)$ , onde  $\text{id}$  é a função identidade. Pela regra da cadeia temos que

$$(2.1) \quad J(h^{-1})_{h(p)} \cdot J(h)_p = J(\text{id})_p = I,$$

onde  $I$  é a matriz identidade de  $\mathbb{R}^2$ . Como  $I$  tem posto 2, as matrizes jacobianas  $J(h^{-1})$  e  $J(h)$  têm ambas posto 2. Logo

$$(2.2) \quad J(\tilde{f})_p = J(f)_{h(p)} \cdot J(h)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

tem posto 2, pois é a composição de matrizes com posto 2, onde  $h(u,v) = (h_1(u,v), h_2(u,v))$ . Concluimos, então, que  $\tilde{f}$  é também uma superfície regular parametrizada. Obviamente, os traços de  $f$  e  $\tilde{f}$  coincidem.

Acontece que para resolver alguns problemas locais não precisamos reparametrizar toda a superfície, basta olhar perto de um ponto. Uma vizinhança aberta de um ponto é um aberto que contém o ponto. Seja  $f: u \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regular parametrizada e  $p$  um ponto em  $u$ . Dizemos que  $\tilde{f}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma reparametrização ao redor de  $p$  se existe um difeomorfismo  $h: V \rightarrow u'$  de um aberto  $V$  sobre uma vizinhança aberta  $u' \subset u$  de  $p$  de tal maneira que  $\tilde{f} = f \circ h$ .

Exemplo 2.1 - Duas parametrizações do cilindro. Primeiro consideramos a aplicação  $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida como  $f(v) = \left( \frac{v}{|v|}, |v| \right) = \left( \frac{v_1}{|v|}, \frac{v_2}{|v|}, |v| \right)$ , para todo  $v = (v_1, v_2)$  em  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ . Verifica-se que  $f$



é uma superfície regular parametrizada cujo traço é o cilindro  $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x^2+y^2 = 1, z>0\}$ . Consideremos também a superfície regular parametrizada

$g: (-\pi, 3\pi) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como  $g(t,s) = (\cos t, \sin t, s)$  cujo traço é também o cilindro  $C$ .

Acontece que, embora  $f$  e  $g$  tenham o mesmo traço, uma superfície não é uma reparametrização da outra, pois, por razões topológicas, não existe um difeomorfismo entre os abertos  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  e  $(-\pi, 3\pi) \times (0, \infty)$ . Mas, localmente

uma é reparametrização da outra. Por exemplo, fixemos o ponto  $p = (4,0)$  em  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ . Mostraremos que existe um aberto  $V \subset (-\pi, 3\pi) \times (0, \infty)$  tal que  $g|_V$  é uma reparametrização de  $f$  ao redor de  $p$ . De fato, botemos

$V = (-\pi/2, \pi/2) \times (0, \infty)$  e  $u' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x>0\}$ . Temos que  $u'$  é uma vizinhança aberta de  $p$ . A aplicação

$h: V \rightarrow u'$  definida como  $h(t,s) = (s \cos t, s \sin t)$  é um difeomorfismo de  $V$  sobre  $u'$ . A aplicação inversa de

$h$  é a aplicação  $h^{-1}$  definida como  $h^{-1}(x,y) = (\text{arccotangente } y/x, \sqrt{x^2+y^2})$ ; observe que  $h^{-1}$  é a aplicação

que dá as coordenadas polares de um ponto  $(x,y)$  do plano. Finalmente, vemos que para todo  $(t,s)$  em  $V$ ,

$f(h(t,s)) = f(s \cos t, s \sin t) = (\cos t, \sin t, s) = g(t,s)$

como queríamos mostrar.

Exercício 2.1 - Mostre que a aplicação  $f$  do exemplo 2.1 é uma superfície regular parametrizada.

Exercício 2.2 - Mostre que a aplicação  $h$  do exemplo 2.1 é um difeomorfismo.

Exercício 2.3 - Seja  $p = (-5, 0)$  em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Mostre que existe um aberto  $V$  de  $(-\pi, 3\pi) \times (0, \infty)$  tal que  $g|_V$  é uma reparametrização de  $f$  ao redor de  $p$  (Veja o exemplo 2.1).

Exemplo 2.2.- Projeção estereográfica. Considere a esfera

$$S^2_{(0,0,1)} = \{v \in \mathbb{R}^3 : |v - (0, 0, 1)| = 1\} \text{ com}$$

centro no ponto  $q = (0, 0, 1)$ . Definimos uma aplicação  $\pi: S^2 - \{(0, 0, 2)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , chamada projeção estereográfica, da seguinte maneira,  $\pi(x, y, z) = (\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z})$ . Esta aplicação tem a seguinte interpretação geométrica: Seja  $L$  a

linha reta que passa pelo polo norte da esfera, o ponto  $(0, 0, 2)$ , e pelo ponto  $(x, y, z)$  na esfera. Então

$(\pi(x, y, z), 0)$  é o ponto de interseção de  $L$  com o plano  $\mathbb{R}^2 \times 0$ . A aplicação inversa de  $\pi$ ,  $g(x, y) =$

$$= \left( \frac{4x}{x^2+y^2+4}, \frac{4y}{x^2+y^2+4}, \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2+4} \right), \text{ é uma superfície regular}$$

parametrizada cujo traço é  $S^2_{(0,0,1)} - (0, 0, 2)$ . Veja a figura 2.1.

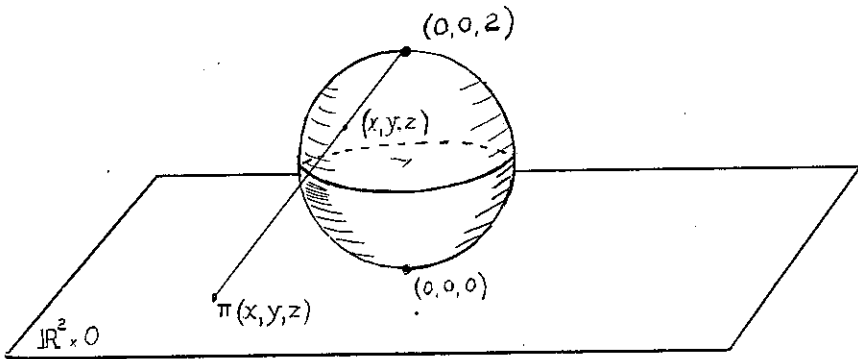


Figura 2.1. Projecção estereográfica

Exercício 2.4 - Verifique no exemplo 2.2 que

- (i)  $\pi \circ f(x,y) = (x,y)$
- (ii)  $f$  é diferenciável e tem posto 2.

Exercício 2.5 - Considere a aplicação  $f$  do exemplo 1.5 restrita ao aberto  $u = \{v \in \mathbb{R}^2 : 0 < |v| < 1\}$ .

Mostre que existe um aberto  $V$  do plano  $\mathbb{R}^2$  tal que a aplicação  $g$  do exemplo 2.2 restrita a  $V$  seja uma reparametrização de  $f|_u$ ; i.e., ache o tal  $V$  e o difeomorfismo apropriado que faz a mudança de parâmetros.

A seguir mostraremos que o plano tangente não muda quando reparametrizamos a superfície. Isto é, se  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular parametrizada e  $\tilde{f} = f \circ h: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma reparametrização de  $f$ , então

$$(2.3) \quad \tilde{T}_p = T_{h(p)}$$

onde  $\tilde{T}$  e  $T$  denotam os planos tangentes de  $\tilde{f}$  e  $f$ , respectivamente. Já vimos na seção anterior que  $\tilde{T}_p$  é o plano passando por  $\tilde{f}(p) = f(h(p))$  paralelo a  $J(\tilde{f})_p(\mathbb{R}^2)$  e que  $T_{h(p)}$  é o plano passando por  $f(h(p))$  paralelo a  $J(f)_{h(p)}(\mathbb{R}^2)$ ; logo, basta mostrar que

$$(2.4) \quad J(\tilde{f})_p(\mathbb{R}^2) = J(f)_{h(p)}(\mathbb{R}^2).$$

Também temos pela regra da cadeia que

$$(2.5) \quad J(f)_p(\mathbb{R}^2) = J(f)_{h(p)} \cdot J(h)_p(\mathbb{R}^2);$$

mas pela fórmula (2.1) temos que  $J(h)$  tem sempre posto 2, logo  $J(h)_p(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ , o que nos dá a fórmula (2.4).

Os cálculos do último parágrafo ficaram um pouco abstratos. Agora vamos fazer umas contas mais específicas sobre a relação entre as duas bases do plano tangente. Na primeira seção vimos que uma base do plano tangente  $T_{h(p)}$  é formada pelos vetores  $(f_x)_{h(p)}$  e  $(f_y)_{h(p)}$ . Pela mesma razão  $(\tilde{f}_x)_p$  e  $(\tilde{f}_y)_p$  geram  $\tilde{T}_p$ . Temos que

$$(2.6) \quad \tilde{f}_x = J(\tilde{f})_p(e_1) = J(f)_{h(p)} J(h)_p(e_1) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} \\ \frac{\partial h_1}{\partial u} \\ \frac{\partial h_1}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{\partial h_1}{\partial u} f + \frac{\partial h_2}{\partial u} f
 \end{aligned}$$

De maneira análoga obtemos que

$$(2.7) \quad \tilde{f}_y = \frac{\partial h_1}{\partial v} f_x + \frac{\partial h_2}{\partial v} f_y$$

Assim vemos que  $\tilde{f}_x$  e  $\tilde{f}_y$  são combinações lineares de  $f_x$  e  $f_y$ . Como  $J(h)$  é uma matriz invertível temos que  $\tilde{f}_x$  e  $\tilde{f}_y$  são linearmente independentes, e obtemos outra vez a fórmula (2.3).

Seja  $v$  um vetor no plano tangente  $\tilde{T}_p = T_{h(p)}$ .

Se  $v = rf_x + sf_y = \tilde{r}\tilde{f}_x + \tilde{s}\tilde{f}_y$ , que relação há entre as coordenadas  $(r, s)$  com relação a uma base e as coordenadas  $(\tilde{r}, \tilde{s})$  com relação à outra? Ora, é só usar as fórmulas (2.6) e (2.7),

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad v &= \tilde{r}f_x + \tilde{s}f_y = \tilde{r} \frac{\partial h_1}{\partial u} f_x + \tilde{r} \frac{\partial h_2}{\partial u} f_y \\
 &\quad + \tilde{s} \frac{\partial h_1}{\partial v} f_x + \tilde{s} \frac{\partial h_2}{\partial v} f_y
 \end{aligned}$$

Logo,

$$(2.9) \quad r = \tilde{r} \frac{\partial h_1}{\partial u} + \tilde{s} \frac{\partial h_1}{\partial v}$$

$$(2.10) \quad s = \tilde{r} \frac{\partial h_2}{\partial u} + \tilde{s} \frac{\partial h_2}{\partial v}$$

ou, em forma matricial

$$(2.11) \quad \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{s} \end{pmatrix}$$

Isto é, a matriz jacobiana do difeomorfismo de mudança de parâmetros é a matriz da mudança de base.

Exercício 2.6 - Considere a superfície  $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\tilde{f}(x,y) = (y \cos x, y \sin x, x). \text{ Mostre}$$

que a função  $f$  do exemplo 1.7, a helicóide, é uma reparametrização de  $\tilde{f}$ .

Como no caso de curvas no plano, as superfícies não são geralmente gráficos de curvas. A seguir mostraremos que a superfície restrita a uma vizinhança de qualquer de seus pontos é o gráfico de uma função diferenciável.

Proposição 2.1 - Seja  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regular parametrizada e  $p$  um ponto de  $u$ . Então, existe uma reparametrização  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  ao redor de  $p$  tal que, a menos de uma isometria de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$(2.12) \quad g(x,y) = (x,y, h(x,y))$$

onde  $h$  é uma função diferenciável definida em  $V$ .

Demonstração: Usando isometrias de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , podemos assumir que  $p = (0,0)$ ,  $f(p) = (0,0,0)$ , e que o vetor normal a superfície em  $p$  é  $m_p = (0,0,1)$ . Considere agora a aplicação  $\iota: u \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como  $\iota(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ . Temos que  $\iota(0,0) = (0,0)$ , e que

$$(2.13) \quad J(\iota)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,0)}$$

Afirmamos que  $J(\iota)_{(0,0)}$  tem posto 2. De fato, como o vetor normal em  $(0,0)$  é  $m_{(0,0)} = (0,0,1)$ , temos que  $m_{(0,0)} \cdot f_x = \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0$  e que  $m_{(0,0)} \cdot f_y = \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$ ; logo o posto de  $J(\iota)_{(0,0)}$  é igual ao posto de  $J(f)_{(0,0)}$  que é 2. Agora podemos aplicar a  $\iota$  o teorema da função inversa (introduzido na seção I.15) que afirma que existem vizinhanças  $W$  de  $(0,0)$  e  $V$  de  $\iota(0,0) = (0,0)$  e um difeomorfismo  $k: V \rightarrow W$  inverso a  $\iota$ , i.e., tal que  $\iota \circ k(x,y) = (x,y)$  para todo  $(x,y)$  em  $V$ .

Finalmente definimos  $h$  como  $f_3 \circ k: V \rightarrow \mathbb{R}$ , e

$g: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  como  $g = f \circ k$ , que é uma reparametrização válida. Estas aplicações  $g$  e  $h$  gozam das propriedades requeridas, pois

$$\begin{aligned} g(x,y) &= (f_1(k(x,y)), f_2(k(x,y)), f_3(k(x,y))) = \\ &= (x,y,h(x,y)), \end{aligned}$$

já que  $k$  é a função inversa de  $\iota = (f_1, f_2)$ . C.Q.D.

### 3. O vetor normal; a primeira forma fundamental; área

Nesta seção introduziremos o conceito geométrico de área de uma superfície, que é análogo ao de comprimento de uma curva. Mostraremos que a área não depende da parametrização.

Seja  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regular parametrizada. Vimos que em cada ponto os vetores  $f_x$  e  $f_y$  geram o plano tangente a  $M$  em cada ponto  $p$ . O produto vetorial destes dois vetores é (veja a seção II.2)

$$\begin{aligned} f_x \times f_y &= \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) e_1 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) e_2 + \\ (3.1) \quad &+ \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) e_3 \end{aligned}$$

onde  $e_1 = (1,0,0)$ ,  $e_2 = (0,1,0)$ , e  $e_3 = (0,0,1)$ . As co-



ordenadas do vetor  $f_x \times f_y$  são, a menos de sinal, os determinantes das submatrizes  $2 \times 2$  da matriz jacobiana de  $f$ .

Logo, como esta matriz tem posto 2, vemos que o vetor  $f_x \times f_y \neq 0$ . Podemos então definir uma aplicação diferenciável  $\mathfrak{m}: u \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  do aberto  $u$  à esfera  $S^2 =$

$= \{v \in \mathbb{R}^3: |v| = 1\}$  como

$$(3.2) \quad \mathfrak{m}_p = \frac{(f_x)_p \times (f_y)_p}{|(f_x)_p \times (f_y)_p|}$$

Sabemos que  $\mathfrak{m}_p$  é um vetor ortogonal a  $f_x$  e a  $f_y$ . Logo,  $\mathfrak{m}_p$  é ortogonal ao plano tangente  $T_p$ . Por isso  $\mathfrak{m}_p$  é chamado o vetor normal a superfície no ponto  $p$ . A aplicação  $\mathfrak{m}$  é chamada a aplicação normal de Gauss. O estudo desta aplicação dará muitas informações sobre a geometria das superfícies, mas deixaremos este trabalho para outras seções.

Agora vamos calcular o comprimento de uma curva na superfície. Seja  $C: [a, b] \rightarrow u \subset \mathbb{R}^2$  uma curva diferencial e  $D = f \circ C$  a curva correspondente no traço de  $f$ . Queremos calcular o comprimento de  $D$ . Se escrevermos  $C(t) = (x(t), y(t))$ , temos, usando a fórmula (1.8), que

$$(3.3) \quad D'(t) = x'(t)(f_x)_{C(t)} + y'(t)(f_y)_{C(t)}.$$

Logo, o comprimento de um segmento de  $D$  é igual a

$$(3.4) \quad s(t) = \int_a^t |D'(u)| du = \\ = \int_a^t \sqrt{x'(u)^2 f_x \cdot f_x + 2x'(u) y'(u) f_x \cdot f_y + y'(u)^2 f_y \cdot f_y} du.$$

Vamos escrever esta fórmula de uma maneira diferente. Definimos funções diferenciáveis  $g_{ij}: u \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, 2$ , como

$$(3.5) \quad g_{11}(p) = (f_x)_p \cdot (f_x)_p \\ g_{12}(p) = g_{21}(p) = (f_x)_p \cdot (f_y)_p = (f_y)_p \cdot (f_x)_p \\ g_{22}(p) = (f_y)_p \cdot (f_y)_p.$$

Definimos em cada ponto  $p$  de  $u$  uma forma quadrática  $ds_p^2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte maneira

$$(3.6) \quad ds_p^2(r, s) = r^2 g_{11}(p) + 2rs g_{12}(p) + s^2 g_{22}(p).$$

Agora podemos reescrever a fórmula (3.4) como

$$(3.7) \quad s(t) = \int_a^t \sqrt{ds_C^2(u)(x'(u), y'(u))} du.$$

A forma quadrática  $ds^2$  é chamada a primeira forma fundamental da superfície  $f$ . Podemos concluir que para obter os comprimentos de curvas na superfície basta conhecer as curvas correspondentes no plano e a primeira forma funda-

mental, isto é, podemos ficar em  $u$ .

Podemos escrever a fórmula (3.6) como

$$(3.8) \quad ds_p^2(r,s) = (r,s) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

Segue-se, então, que  $(g_{ij})_{i,j=1,2}$  é a matriz que representa a forma quadrática  $ds_p^2$  (toda forma quadrática pode ser expressa como na fórmula (3.8); a matriz usada é sempre simétrica). Observe, que se  $v = rf_x + sf_y$  é um vetor em  $T_p$ , então

$$(3.9) \quad |v|^2 = ds^2(r,s).$$

A norma  $||$  é a norma de  $\mathbb{R}^3$  restrita a  $T_p$  (identificado com o plano paralelo a ele passando pela origem).

Classicamente, as funções  $g_{ij}$ 's são denotadas como

$$(3.10) \quad \begin{aligned} E &= g_{11} \\ F &= g_{12} = g_{21} \\ G &= g_{22}. \end{aligned}$$

Dizemos que duas superfícies  $f_1: u \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $f_2: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  são isométricas se existe um difeomorfismo  $h: u \rightarrow V$  tal que para todo ponto  $p$  em  $u$ ,

$$(3.11) \quad (ds_2^2)_{h(p)} (J(h)_p(w)) = (ds_1^2)_p(w) ,$$

para todo vetor  $w$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Exemplo 3.1 - O plano e o cilindro. A aplicação

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x,y) = (x,y,0)$  é uma superfí-

cie regular parametrizada cujo traço é o plano  $z = 0$ .

Temos que  $(f_x)_p = (1,0,0) = e_1$ , para todo  $p$  em  $\mathbb{R}^2$ , e

que  $f_y = (0,1,0) = e_2$ . Logo  $E = g_{11} = 1$ ,  $F = g_{12} =$

$= g_{21} = 0$ , e  $G = g_{22} = 1$ . Consequentemente,  $ds^2(r,s) =$

$= r^2 + s^2$ . As vezes escrevemos  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , onde

$dx^2(v) = v_1^2$  e  $dy^2(v) = v_2^2$ , se  $v = (v_1, v_2)$ . A apli-

cação  $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\tilde{f}(x,y) = (\lambda \cos x, \lambda \sin x, y)$  é uma

superfície parametrizada cujo traço é o cilindro, já intro-

duzido nas primeiras seções. Temos que

$\tilde{f}_x = (-\lambda \sin x, \lambda \cos x, 0)$  e que  $\tilde{f}_y = (0,0,1)$ . Logo

$E = \lambda^2$ ,  $F = 0$ , e  $G = 1$ . Consequentemente,

$$\tilde{ds}^2(x,y) = \lambda^2 x^2 + y^2 \quad \text{ou} \quad \tilde{ds}^2 = \lambda^2 dx^2 + dy^2.$$

Mostraremos agora que o plano e o cilindro são isométricos.

Considere o difeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$ ,  $h(x,y) = (\lambda x, y)$ . Temos

que  $J(h) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Daí, segue-se que se  $w = (w_1, w_2)$

então,

$$(3.12) \quad ds^2(J(h)(w)) = ds^2(\lambda w_1, w_2) = \lambda^2 w_1^2 + w_2^2 + \\ = \tilde{ds}^2(w_1, w_2)$$

e obtemos que o plano e o cilindro são isométricos.

Observe que a aplicação  $\tilde{f}$  do exemplo acima não é uma reparametrização de  $f$ , pois os traços são diferentes. Este exemplo mostra também que duas superfícies podem ser isométricas sem que exista uma isometria de  $\mathbb{R}^3$  (definida na seção I.10) que manda o traço de uma no traço da outra.

Exercício 3.1 - Mostre que uma superfície é isométrica a qualquer uma das suas reparametrizações.

Exercício 3.2 - Seja  $f$  uma superfície regular parametrizada e  $F$  uma isometria de  $\mathbb{R}^3$  (definida na seção I.10). Mostre que  $f$  e  $\tilde{f} = F \circ f$  são isométricas.

Exercício 3.3 - Considere a aplicação  $f$  do exemplo 1.5 e sua reparametrização  $\tilde{f} = f \circ A_\theta$ , onde  $A_\theta$  é uma rotação de ângulo  $\theta$  (definida no capítulo I). Mostre que no ponto  $p = (0,0)$ ,  $\tilde{ds}^2 = ds^2$ , mas que  $(\tilde{g}_{ij})_{i,j=1,2} = {}^t A_\theta (g_{ij}) A_\theta$ , onde aqui  $A_\theta$  é considerada como matriz e  ${}^t A_\theta$  é a sua transposta.

Exercício 3.4 - Ache  $ds^2$  no ponto  $(1/4, 1/4)$  da parametrização da esfera do exemplo 1.5.

Exercício 3.5 - Mostre que, embora a aplicação  $f$  do exemplo 2.1 não seja isométrica a aplicação  $\tilde{f}$  do exemplo 3.1, temos que existem abertos  $u$  e  $V$  tal que  $f|u$  e  $\tilde{f}|V$  sejam isométricas. Dizemos neste caso que  $f$  e  $\tilde{f}$  são localmente isométricas.

Observação. Não é em geral fácil mostrar que duas superfícies não são isométricas (pelo menos com os conhecimentos desenvolvidos nestas primeiras seções).

Dizemos que  $u \subset \mathbb{R}^2$  é um domínio de  $\mathbb{R}^2$  se  $u$  é um aberto conexo tal que o bordo  $\bar{u}-u$  consiste de curvas regulares por partes. Dizemos que o domínio é limitado se existe um número  $M$  tal que  $|q| \leq M$  para todo ponto  $q$  no domínio. Sabemos que a integral dupla  $\int_u h(x,y)dx dy$  de uma função continua definida num domínio limitado sempre existe e é finito. Dada uma superfície  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida sobre um domínio limitado  $u$ , definimos sua área como a seguinte integral:

$$(3.13) \quad A(f) = \int_u |f_x \times f_y| dx dy$$

Observe que o integrando  $|f_x \times f_y| = |f_x| |f_y| \sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $f_x$  e  $f_y$ , representa a área do paralelogramo gerado por  $f_x$  e  $f_y$ . Na seção II.2 vimos que para quaisquer vetores  $v, w, u, z$  de  $\mathbb{R}^3$  vale a seguinte

te identidade de Lagrange

$$(3.14) \quad (vxw) \cdot (uxz) = (v \cdot u)(w \cdot z) - (v \cdot z)(w \cdot u) .$$

Desta fórmula, segue-se que,

$$(3.15) \quad |f_x \times f_y|^2 = (f_x \cdot f_x)(f_y \cdot f_y) - (f_x \cdot f_y)(f_y \cdot f_x) =$$

$$= g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = EG - F^2$$

Logo podemos reescrever a área como

$$(3.16) \quad A(f) = \int_u \sqrt{g} \, dx dy = \int_u \sqrt{EG-F^2} \, dx dy$$

onde  $g = \det(g_{ij})$ .

Se  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma superfície definida num aberto  $V$  que é uma reunião disjunta de um número finito de domínios limitados  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , podemos definir a área de  $f$  como  $A(f) = \sum_{i=1}^n A(f|u_i)$ .

Exemplo 3.2 - A área de um cilindro. Considere o seguinte cilindro de altura  $b$  e raio  $r$ ,

$$f: (0, 2\pi) \times (0, b) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(t, s) = (r \cos t, r \sin t, s).$$

Calculemos sua área. No exemplo 3.1 vimos  $E = r^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = 1$ . Logo,

$$A(f) = \int_u r dx dy = r \int_0^{2\pi} \int_0^b dx dy = 2\pi br .$$

Observe que  $f(u) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x^2+y^2 = r^2, 0 < z < b\} - L$ , onde  $L$  é o segmento de reta que une os pontos  $(1,0,0)$  e  $(1,0,b)$ . Logo,  $f(u)$  não é exatamente o cilindro; está faltando  $L$ . Acontece que linhas, e, mais geralmente, curvas regulares por partes, não acrescentam nada a área de uma superfície; por isso, ao calcular a área, podemos ignorá-las.

Na prática nos é dado um traço de superfície para calcular sua área. O que fazemos então é achar uma superfície regular parametrizada que, a menos de curvas regulares por partes, cubra uma vez o conjunto dado. Mas precisamos saber que a área não depende da parametrização escolhida.

Proposição 3.1 - Sejam  $u$  e  $V$  dois domínios limitados,  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regular parametrizada,  $h: V \rightarrow u$  um difeomorfismo e  $\tilde{f} = f \circ h: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma reparametrização de  $f$ . Então

$$(3.17) \quad A(f) = A(\tilde{f})$$

Demonstração: Usando as fórmulas (2.6) e (2.7), obtemos

$$(3.18)$$

$$\tilde{f}_x \times \tilde{f}_y = \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_1}{\partial y} f_x \times f_x + \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} f_x \times f_y + \frac{\partial h_2}{\partial x} \frac{\partial h_1}{\partial y} f_y \times f_x +$$



$$+ \frac{\partial h_2}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} f_y \times f_y = \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial x} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) f_x \times f_y = \det J(h) f_x \times f_y.$$

Logo, usando o teorema de mudança de variáveis para integrais duplos, temos que

$$\begin{aligned} A(\tilde{f}) &= \int_V |\tilde{f}_x \times \tilde{f}_y| dx dy = \int_V |f_x \times f_y| |\det J(h)| dx dy \\ &= \int_{h(V)=u} |f_x \times f_y| dx dy = A(f) \end{aligned} \quad \text{C.Q.D.}$$

Observação. Esta proposição vale também para superfícies  $f: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  definidas num aberto  $W$  que é uma reunião disjunta de domínios limitados  $u_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , (com  $A(f) = \sum_{i=1}^n A(f(u_i))$ ).

Exemplo 3.3 - Superfícies de revolução. Considere uma curva regular  $C(t) = (r(t), s(t))$  no semiplano  $y=0$ ,  $x > 0$  de  $\mathbb{R}^3$ . À medida que fazemos uma rotação deste semiplano ao redor do eixo dos  $z$ 's, a curva vai descrevendo uma superfície, que chamamos de superfície de revolução (veja a figura 3.1). Digamos que  $C$  está definida no intervalo  $(a, b)$ , então nossa superfície gerada por  $C$  será  $f: (a, b) \times (\theta_1, \theta_2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido como

$$(3.19) \quad f(t, u) = (r(t)\cos u, r(t)\sen u, s(t))$$

É fácil verificar que  $f$  é uma superfície regular. De fato,

$$(3.20) \quad f_t = (r'(t)\cos u, r'(t)\sin u, s'(t))$$

e

$$(3.21) \quad f_u = (-r(t)\sin u, r(t)\cos u, 0)$$

Logo,

$$(3.22) \quad |f_t \times f_u|^2 = r(t)^2 s'(t)^2 \cos^2 u + \\ + r(t)^2 s'(t)^2 \sin^2 u + r'(t)^2 r(t)^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) \\ = r(t)^2 (s'(t)^2 + r'(t)^2) = r(t)^2 |C'(t)|^2$$

é diferente de zero, pois  $C$  é regular e  $r(t) > 0$ . Se-  
gue-se, então, que o jacobiano de  $f$  tem posto 2.

Se o intervalo  $(\theta_1, \theta_2)$  for muito grande então  $f$  recobrirá o mesmo traço várias vezes, pois as funções  $\cos u$  e  $\sin u$  são periódicas. Em geral usamos o intervalo  $(\theta_1, \theta_2) = (0, 2\pi)$  que deixaria de cobrir somente uma curva regular (i.e.  $D(t) = (r(t), 0, s(t))$ ,  $a < t < b$ ). Logo para calcular a área podemos considerar  $f: (a, b) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Como a área não depende de reparametrização podemos assumir que  $C(t)$  está parametrizada pelo comprimento de arco (Verifique esta afirmação). Logo, usando (3.22), temos que

$$(3.23) \quad A(f) = \int_a^b \int_0^{2\pi} |f_t \times f_u| dt du = \int_a^b \int_0^{2\pi} r(t) dt du = \\ = 2\pi \int_a^b r(t) dt$$

Esta última expressão da área de uma superfície de revolução é conhecida como o teorema de Pappus.

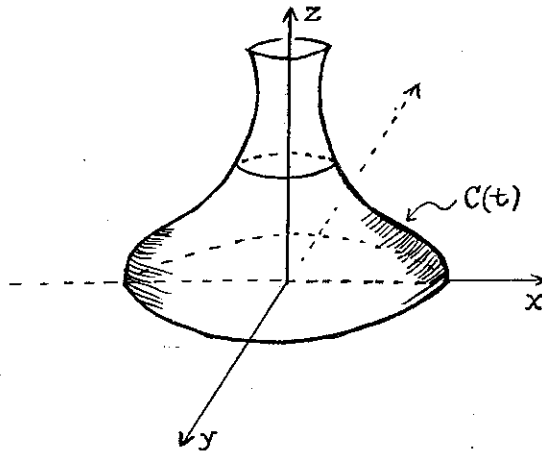


Figura 3.1. Uma superfície de revolução

Exemplo 3.4 - O toro, uma superfície de revolução. A curva que gera o toro é o círculo  $C(t) = (a + b \cos t, b \sin t)$ . Uma parametrização que cobre exceto por uma curva regular por partes é

$$(3.24) \quad f(t,u) = ((a+b \cos t) \cos u, \\ (a+b \cos t) \sin u, b \sin t) .$$

Calculemos agora a área do toro  $f|(0,2\pi) \times (0,2\pi)$ . Usaremos a fórmula (3.23); mas devemos observar que a curva que gera a superfície deve estar parametrizada pelo comprimento do arco, o que não acontece com  $C$ . Uma reparametrização de  $C$  pelo comprimento de arco é

$\tilde{C}(t) = (a + b \cos t/b, b \sin t/b), \quad 0 < t < 2\pi b.$  A reparametrização correspondente de  $f$  será

$$(3.25)$$

$$\tilde{f}(t, u) = ((a+b \cos t/b)\cos u, (a+b \cos t/b)\sin u, b \sin t/b),$$

$(t, u) \in (0, 2\pi b) \times (0, 2\pi).$  Agora, pela fórmula (3.23),

$$(3.26) \quad A(\tilde{f}) = 2\pi \int_0^{2\pi b} (a + b \cos t/b) dt = 4\pi^2 ba$$

Exercício 3.6 - Calcule a área do toro diretamente usando a parametrização dada pela fórmula (3.24).

Exemplo 3.5 - Área da esfera; coordenadas esféricas. Vamos parametrizar a esfera de raio  $r$  usando

dois ângulos  $\theta$  e  $\varphi$ , que darão a latitude e a longitude de um ponto da esfera. A aplicação será

$$f: (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(3.27) \quad f(\theta, \varphi) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$$

Veja a figura 3.2. Obviamente as funções coordenadas são diferenciáveis de classe  $C^\infty$ . Temos que

$$(3.28) \quad f_\theta = (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

$$(3.29) \quad f_\varphi = (-r \cos \theta \sin \varphi, r \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

Logo,

$$(3.30) \quad \mathbf{f}_\theta \times \mathbf{f}_\varphi = (-r^2 \cos^2 \theta \cos \varphi, -r^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \varphi, -r^2(\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) \operatorname{sen} \theta \cos \theta)$$

e

$$(3.31) \quad |\mathbf{f}_\theta \times \mathbf{f}_\varphi| = r^2 \sqrt{\cos^4 \theta \cos^2 \varphi + \cos^4 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta} \\ = r^2 \sqrt{\cos^2(\cos^2 + \operatorname{sen}^2)} = r^2 \cos \theta$$

pois  $\cos \theta > 0$ , se  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

Finalmente, obtemos a área

$$(3.32)$$

$$A(f) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = 2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ = 2\pi r^2(1+1) = 4\pi r^2$$

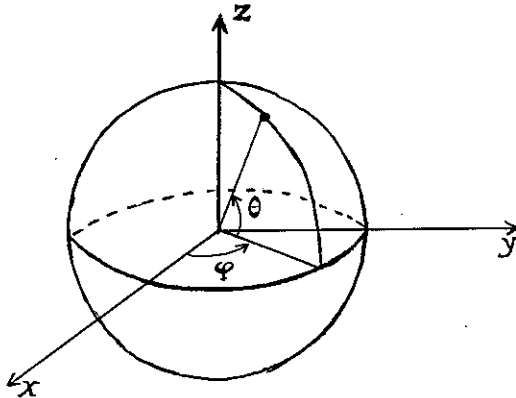


Figura 3.2. Coordenadas esféricas

Observe que  $f$  é biunívoca e que só deixa de cobrir um se micrculo da esfera.

Exercício 3.7 - Calcule a área do seguinte subconjunto da esfera  $S^2$ ,  $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2 = 1, 0 < z < 1/2\}$ .

Exercício 3.8 - O cone é o seguinte subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ :  
 $\mathbb{R}^3: C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: z^2 = x^2+y^2, z > 0\}$ .  
Seja  $u = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ . Mostre que  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  
 $f(v_1, v_2) = (v_1, v_2, \sqrt{v_1^2 + v_2^2})$  é uma superfície regular cujo traço é  $C$ . Ache a área do cone truncado  $C_4 = \{(x,y,z) \in C: z < 4\}$ ; pode usar outra parametrização mais conveniente, se quiser.

Exercício 3.4 - Mostre que o cone e o plano são localmente isométricos, i.e., que dado  $p \in C$  existe um aberto do plano e uma vizinhança de  $p$  que são isométricas.

Exemplo 3.6 - O catenoide é a superfície de revolução gerada pela curva catenária  $C(t) = (\cosh t, 0, t)$ . Sua expressão como aplicação está dada por

$$(3.33) \quad f(t,u) = (\cosh t, \cosh t \sin u, t)$$

Neste caso calcular a área de um pedaço de superfície torna-se fácil se usarmos a fórmula (3.23). Por exemplo se restringirmos  $f$  a  $(-b,b) \times (0, 2\pi)$ , temos que

$$A(f) = 2\pi \int_{-b}^b \cosh v \, dv = 2\pi \sinh v \Big|_{-b}^b = 4\pi \sinh b.$$

Exercício 3.10 - Sejam  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  superfícies regulares, e  $L$  uma isometria de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $L(V) = u$ . Mostre que se  $(E_f)_{L(p)} = (E_g)_p$ ,  $(F_f)_{L(p)} = (F_g)_p$ , e  $(G_f)_{L(p)} = (G_g)_p$ , então  $f$  e  $g$  são isométricas.

Exercício 3.11 - Mostre que o catenoide (exemplo 3.6) e o helicoido (exemplo 1.7) são localmente isométricos.

Sugestão: Considere a parametrização  $\tilde{f}$  do helicoido dada no exercício 2.6 restrita a  $u = (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$  e a parametrização  $f$  do catenoide (exemplo 3.6) restrita ao aberto  $V = (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$ . Mostre que  $\tilde{f}|_u$  e  $f|_V$  são isométricos usando o difeomorfismo  $h: V \rightarrow u$ ,  $h(u, v) = (u, \sinh v)$ ; use o fato de que  $1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y$ .

Este exercício mostra que duas superfícies isométricas podem ser bem diferentes, pois o helicoido é uma superfície regular, mas o catenoide não contém nenhum segmento de reta.

Exercício 3.12 - Mostre que, se  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ , então  $g_{11} = ds^2(e_1)$ ,  $g_{22} = ds^2(e_2)$ , e  $g_{12} = g_{21} = \frac{1}{2}(ds^2(e_1 + e_2) - ds^2(e_1) - ds^2(e_2))$ .

Exercício 3.13 - Seja  $f$  uma superfície regular e  $\tilde{f} = f \circ h$  uma reparametrização de  $f$ . Sejam  $(g_{ij})$  e  $(\tilde{g}_{ij})$  as matrizes  $2 \times 2$  que representam as primeiras formas fundamentais de  $f$  e  $\tilde{f}$ , respectivamente. Mostre que

$$(3.34) \quad (\tilde{g}_{ij}) = {}^t J(h) (g_{ij})_{h(p)} J(h)$$

onde  ${}^t J(h)$  é a transposta da matriz jacobiana  $J(h)$  de  $h$  no ponto  $p$ .

Sugestão: use as fórmulas (2.6) e (2.7).

Exercício 3.14 - Utilize as fórmulas (3.16) e (3.34) para demonstrar a Proposição 3.1.

Exercício 3.15 - Suponha que  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  são duas superfícies isométricas através de um difeomorfismo  $h: V \rightarrow u$ . Sejam  $(g_{ij})$  e  $(\tilde{g}_{ij})$  as matrizes  $2 \times 2$  que representam as primeiras formas fundamentais de  $f$  e  $g$ , respectivamente. Mostre que

$$(3.35) \quad (\tilde{g}_{ij})_p = {}^t J(h) (g_{ij})_{h(p)} J(h),$$

onde  ${}^t J(h)$  é a matriz transposta da matriz jacobiana  $J(h)$  de  $h$  no ponto  $p$ .

Sugestão: use o exercício 3.12 e a fórmula (3.11).

Proposição 3.2 - Duas superfícies isométricas tem a mesma área.



Demonstração: Temos duas superfícies  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  que são isométricos, i.e., existe um difeomorfismo  $h: V \rightarrow u$  satisfazendo (3.11). Considere agora a aplicação  $\tilde{f} = f \circ h$ ; esta aplicação  $\tilde{f}$  é uma reparametrização de  $f$ . Logo, pela proposição 3.1,

$$A(f) = A(\tilde{f}) = \int_V \sqrt{g} \, dx dy \quad ,$$

onde  $\sqrt{g}$  é a raiz quadrada do determinante da matriz  $(\tilde{g}_{ij})$  que representa a primeira forma fundamental de  $\tilde{f}$ . Pelos exercícios 3.13 e 3.15, temos que  $(\tilde{g}_{ij})$  é igual a  $(\tilde{\tilde{g}}_{ij})$ , a matriz que representa a primeira forma fundamental de  $g$ . Logo,

$$A(f) = A(\tilde{f}) = \int_V \sqrt{g} \, dx dy = \int_V \sqrt{g} \, dx dy = A(g) \quad \text{C.Q.D.}$$

Outra noção métrica importante que podemos definir a partir da primeira forma fundamental  $ds^2$  é a distância entre dois pontos  $p$  e  $q$  em  $u$  numa superfície  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Esta distância, denotada de  $d(p, q)$  é definida como o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por parte que ligam os pontos  $p$  e  $q$  em  $u$  ao longo da curva. Lembre que se  $D$  é uma curva ligando  $p$  e  $q$  ao longo da superfície, então  $D = f \circ C$  onde  $C: [a, b] \rightarrow u$  é uma curva tal que  $C(a) = p$  e  $C(b) = q$ ; e o comprimento de  $D$  é dado pelo integral  $\int_a^b \sqrt{ds^2(C'(t))} dt$ .

Conclui-se que para conhecer as distâncias entre os pontos da superfície basta conhecer a primeira forma fundamental e as curvas em  $u$ . Observe que  $d(p,q)$  é diferente da distância entre  $p$  e  $q$  em  $u$  e diferente de  $|f(p)-f(q)|$ , a distância em  $\mathbb{R}^3$ ; de fato, a superfície pode ter auto-interseções, i.e., pontos  $p \neq q$  com  $f(p)=f(q)$ , mas a distância  $d(p,q)$  entre os pontos de auto-interseção será diferente de zero.

Exercício 3.16 - Mostre que se  $f$  e  $g$  são isométricas com difeomorfismo  $h$ , então  $d_g(p,q) = d_f(h(p),h(q))$ .

Exercício 3.17 - Dizemos que uma superfície regrada (exemplo 1.6) é uma superfície desenvolvível se ao longo de cada reta a aplicação normal de Gauss  $m$  é constante. Mostre que as seguintes superfícies são superficiais desenvolvíveis

- (a) o plano
- (b) o cilindro
- (c) o cone
- (d) uma superfície tangencial (veja o exercício 1.9)

Exercício 3.18 - Mostre que o helicóide não é uma superfície desenvolvível.

Exercício 3.19 - Ache a imagem da aplicação de Gauss das seguintes superfícies.

- (a) o plano
- (b) o cilindro
- (c) o cone
- (d) a esfera
- (e) a catenoide

Exercício 3.20 - Considere a curva  $C(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ . A superfície de revolução que ela gera é quase uma esfera; use esse fato para achar de novo a área da esfera.

Exercício 3.21 - Ache a imagem da aplicação de Gauss  $m$  do parabolóide hiperbólico (exercício 1.10) restrita a uma das linhas retas (escolha qualquer uma).

Dada a primeira forma fundamental  $(g_{ij})$  podemos definir um produto escalar em  $T_p$  abstratamente, isto é, esquecendo que ele está contido em  $\mathbb{R}^3$ . De fato, este produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  pode ser definido da seguinte maneira: se  $v_1 = r_1 f_x + s_1 f_y$  e  $v_2 = r_2 f_x + s_2 f_y$ , então

$$\langle v_1, v_2 \rangle = (r_1, s_1)(g_{ij}) \begin{pmatrix} r \\ s \\ z \end{pmatrix}$$

Também podemos definir o ângulo  $\theta$  entre dois vetores pela fórmula

$$\langle v_1, v_2 \rangle = |v_1| |v_2| \cos \theta$$

onde  $|v_1| = \langle v_1, v_1 \rangle^{1/2}$ . Esta definição seria a usada num estudo de superfícies abstratas. Em nosso caso de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , podemos fazer uso do produto escalar de  $\mathbb{R}^3$ , pois  $\langle v_1, v_2 \rangle = v_1 \cdot v_2$ .

Exercício 3.22 - Seja  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície e

$h: u \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Defina o integral

$\int_{f(u)} h$  como  $\int_u h(x,y) |f_x \times f_y| dx dy$ . Mostre que não depende da parametrização.

Exercício 3.23 - Seja  $f$  a aplicação dada pela fórmula

$$(3.24) \text{ que define o toro. Calcule a}$$

área de  $f|(-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi)$ . Faça um desenho desta superfície. Esta área corresponde a mais da metade da área do toro?

#### 4. A curvatura Gaussiana

Definimos a curvatura de uma curva usando a com-

ponente normal da segunda derivada da parametrização da curva. Definiremos a curvatura Gaussiana de uma superfície de uma maneira análoga, usando a matriz das componentes normais das segundas derivadas parciais da aplicação  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  que define a superfície. Depois veremos a relação entre a curvatura Gaussiana e a derivada da aplicação normal de Gauss. Na próxima seção daremos outra definição equivalente da curvatura Gaussiana em termos das curvaturas das curvas na superfície.

Consideremos as segundas derivadas parciais da aplicação  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  que define uma superfície,

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \text{e} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}. \quad (\text{por}$$

exemplo,  $f_{xy} = \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} \right)$ ). Agora definimos para cada ponto  $p$  em  $u$  uma matriz  $2 \times 2$ ,  $(h_{ij})$ , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} h_{11} &= f_{xx} \cdot m_p \\ h_{12} &= f_{xy} \cdot m_p \\ h_{21} &= f_{yx} \cdot m_p \\ h_{22} &= f_{yy} \cdot m_p \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $m_p$  é o vetor normal a superfície no ponto  $p$ . Lembremos que se  $f$  é de classe  $C^2$  então as derivadas mix-

tas comutam, i.e.,  $f_{xy} = f_{yx}$ ; logo a matriz  $(h_{ij})$  é simétrica. Agora, definimos uma forma quadrática em cada ponto  $p$  de  $u$ , denotada  $II$  e chamada segunda forma fundamental, de uma maneira análoga a usada para definir  $ds^2$ ,

$$(4.2) \quad II_p(r,s) = r^2 h_{11} + 2rs h_{12} + s^2 h_{22} ,$$

para todo  $(r,s)$  em  $R^2$ . Também podemos escrever (4.2) em forma matricial,

$$(4.3) \quad II(r,s) = (r,s) \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

Na próxima seção daremos uma relação entre a curvatura de uma curva  $D(t) = f(C(t))$  na superfície e  $II(C'(t))$ .

Para todo ponto  $p$  em  $u$ , definimos a curvatura Gaussiana da superfície no ponto  $p$ ,  $K_p$  como

$$(4.4) \quad K_p = \frac{\det(h_{ij})_p}{\det(g_{ij})_p}$$

onde  $(g_{ij})$  é a matriz que representa a primeira forma fundamental. Lembre-se que  $\det(g_{ij}) = |f_x \times f_y|^2$  é diferente de zero pois  $f$  é regular. Como os coeficientes das matrizes variam diferencialmente, temos que  $K$  é uma função contínua em  $u$ . Classicamente os coeficientes da matriz  $(h_{ij})$  são denotados como

$$(4.5) \quad \begin{aligned} L &= h_{11} \\ M &= h_{12} = h_{21} \\ N &= h_{22} \end{aligned}$$

Nesta notação, podemos escrever

$$(4.6) \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Exemplo 4.1 - O parabolóide  $f(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$ . Calculemos sua curvatura Gaussiana no ponto  $p = (0,0)$ . Observemos que  $f_x = (1,0,2x)$  e  $f_y = (0,1,2y)$ . Logo,  $(f_x)_{(0,0)} = (1,0,0)$ ,  $(f_y)_{(0,0)} = (0,1,0)$  e  $m_{(0,0)} = (0,0,1)$ ; segue-se que  $\det(g_{ij}) = 1$ . Por outro lado,  $f_{xx} = (0,0,2)$ ,  $f_{xy} = (0,0,0)$  e  $f_{yy} = (0,0,2)$ . Então,  $h_{11} = f_{xx} \cdot m = (0,0,2) \cdot (0,0,1) = 2$ ,  $h_{12} = 0$ , e  $h_{22} = 2$ . Consequentemente,

$$K(0,0) = \frac{2 \cdot 2}{1} = 4$$

Veja a figura 4.1.

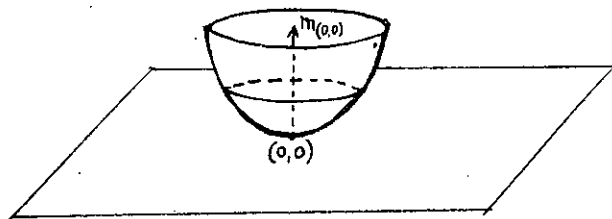


Figura 4.1. O parabolóide elíptico

Exercício 4.1 - Considere o parabolóide  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$f(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$ . Mostre que sua curvatura é positiva em todo ponto.

Exercício 4.2 - Considere a superfície  $f(x,y) =$

$(x, -y, x^2+y^2)$ . Mostre que  $K_{(0,0)}=4$ .

Exemplo 4.2 - O parabolóide hiperbólico  $f(x,y) = x^2-y^2$ .

Temos que  $f_x = (1,0,2x)$ ,  $f_y = (0,1,-2y)$ ;  
logo  $(EG-F^2)_{(0,0)} = 1$ . Temos que  $f_{xx} = (0,0,2)$ ,  $f_{xy}=0$   
e  $f_{yy} = (0,0,-2)$ . Logo

$$K_{(0,0)} = \frac{2(-2)}{1} = -4$$

Veja a figura 4.2.

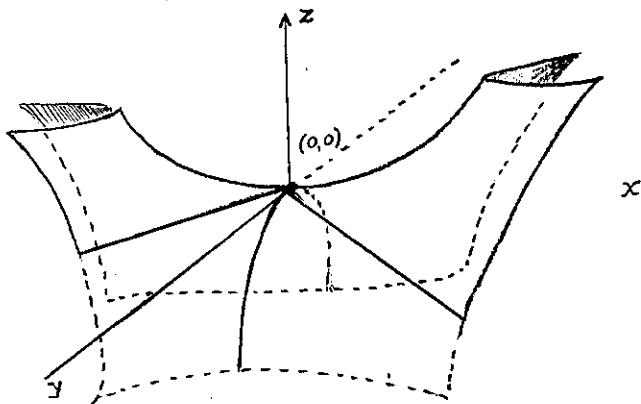


Figura 4.2. O parabolóide hiperbólico.

Exercício 4.3 - Mostre que o parabolóide hiperbólico tem curvatura negativa em todo ponto. Ache a



curvatura no ponto  $p = (1/2, 1/4)$ . Qual é o comportamento da função curvatura quando o ponto  $p$  tende para infinito (i.e. quando  $|p| \rightarrow \infty$ )?

Exemplo 4.3 - O plano  $f(x,y) = (x,y,0)$ . Calculemos sua curvatura  $K_p$  num ponto arbitrário  $p = (p_1, p_2)$ .  $(f_x)_p = (1,0,0)$ ,  $(f_y)_p = (0,1,0)$  e  $m_p = (0,0,1)$ . Logo  $EG - F^2 = 1$ . Mas, como  $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$ , temos que

$$K = \frac{0}{1} = 0$$

Exemplo 4.4 - Um cilindro  $f(x,y) = (x,y,y^2)$ . Temos que  $f_x = (1,0,0)$ ,  $f_y = (0,1,2y)$  e

$$m = \frac{f_x \times f_y}{|f_x \times f_y|} = \frac{1}{\sqrt{1+4y^2}} (0, -2y, 1). \text{ Também temos que}$$

$$L = f_{xx} \cdot m = 0, \quad N = f_{yy} \cdot m = 1/\sqrt{1+4y^2}, \quad M = f_{yx} \cdot m = 0.$$

Logo, para todo ponto  $(x,y)$  temos que

$$K(x,y) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{0}{EG - F^2} = 0$$

Observe que o plano e o cilindro tem ambas curvatura zero, mas que suas segundas formas fundamentais são diferentes. De fato, a segunda forma fundamental do plano anula-se identicamente, mas a do cilindro é igual

$$\pi(x,y)(r,s) = \frac{s^2}{\sqrt{1+4y^2}},$$

ou

$$\pi(x,y) = \frac{dy^2}{\sqrt{1+4y^2}}$$

Exemplo 4.5 - A esfera  $S^2$ . Vamos calcular sua curvatura usando a parametrização do exemplo 3.5,

$$f: (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$f(\theta, \varphi) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta).$$

Pela fórmula (3.30) temos que,

$$m_{(\theta, \varphi)} = \frac{f_{\theta} \times f_{\varphi}}{|f_{\theta} \times f_{\varphi}|} = \frac{-r \cos \theta f(\theta, \varphi)}{|f_{\theta} \times f_{\varphi}|} = -\frac{1}{r} f(\theta, \varphi)$$

Por outro lado, diferenciando as fórmulas (3.28) e (3.29), obtemos que

$$f_{\theta\theta} = (-r \cos \theta \cos \varphi, -r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta)$$

$$f_{\varphi\theta} = (r \sin \theta \sin \varphi, -r \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

$$f_{\varphi\varphi} = (-r \cos \theta \cos \varphi, -r \cos \theta \sin \varphi, 0)$$

Segue-se que

$$L = h_{11} = f_{\theta\theta} \cdot m = r \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r \sin^2 \theta = r$$

$$N = h_{22} = f_{\varphi\varphi} \cdot m = r \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r \cos^2 \theta \sin^2 \varphi = r \cos^2 \theta$$

$$M = h_{21} = f_{\varphi\theta} \cdot m = -r \sin \theta \sin \varphi \cos \theta \cos \varphi + \\ + r \sin \theta \cos \varphi \cos \theta \sin \varphi = 0 .$$

Agora, pela fórmula (3.31), vemos que

$$EG - F^2 = |f_{\theta} \times f_{\varphi}|^2 = r^4 \cos^2 \theta$$

Logo,

$$K(\theta, \varphi) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^4 \cos^2 \theta} = \frac{1}{r^2} .$$

Concluimos que a curvatura Gaussiana de uma esfera de raio  $r$  é igual a  $1/r^2$ . O inverso é verdadeiro, isto é, se uma superfície tem curvatura igual a uma constante  $\lambda > 0$  então ela é uma esfera; mas, este fato não será demonstrado nestas notas.

Exercício 4.4 - Calcule as curvaturas do helicóide (Exemplo 1.7).

Exercício 4.5 - Calcule as curvaturas do cone (Exemplo 1.6).

Exercício 4.6 - Calcule as curvaturas do toro (Exemplo 3.4).

Em todos os exemplos calculamos a curvatura Gaussiana a partir de uma parametrização. Que acontece se usarmos outra parametrização? A seguinte proposição garante que a curvatura Gaussiana não depende da parametrização

da superfície.

Proposição 4.1 - Seja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regular parametrizada e  $\tilde{f} = f \circ h: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma reparametrização de  $f$ . Então

$$(4.7) \quad \tilde{K}_p = K_{h(p)}$$

para todo  $p \in V$ , onde  $K$  e  $\tilde{K}$  denotam as curvaturas Gaussianas de  $f$  e  $\tilde{f}$ , respectivamente.

Demonstração: Considere as matrizes  $(h_{ij})$  e  $(\tilde{h}_{ij})$  que representam as segundas formas fundamentais de  $f$  e  $\tilde{f}$ , respectivamente. A fórmula (4.7) seguirá da seguinte fórmula

$$(4.8) \quad (\tilde{h}_{ij}) = {}^t J(h) (h_{ij}) J(h).$$

Antes de demonstrar esta fórmula, vejamos porque com ela podemos terminar a demonstração.

Ora,

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{h(p)} &= \frac{\det(\tilde{h}_{ij})}{\det(\tilde{g}_{ij})} = \frac{\det({}^t J(h)) \det(h_{ij}) \det(J(h))}{\det({}^t J(h)) \det(g_{ij}) \det(J(h))} = \\ &= \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = K_p, \end{aligned}$$

usando a fórmula 3.34.

Agora demonstramos a fórmula (4.8). Temos que

$\tilde{f}(u, v) = f(h(u, v))$ . Usando as fórmulas (2.6) e (2.7) obtemos que

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{11} &= f_{uu} \cdot \tilde{m} = \left( \frac{\partial}{\partial u} \tilde{f}_u \right) \cdot \tilde{m} = \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial h_1}{\partial u} f_x + \frac{\partial h_2}{\partial u} f_y \right) \right] \cdot \tilde{m} = \\ &= \left[ \frac{\partial^2 h_1}{\partial u^2} f_x + \frac{\partial h_1}{\partial u} \frac{\partial f_x}{\partial u} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial u^2} f_y + \frac{\partial h_2}{\partial u} \frac{\partial f_y}{\partial u} \right] \cdot \tilde{m} = \\ &= \left[ \frac{\partial h_1}{\partial u} \frac{\partial f_x}{\partial u} + \frac{\partial h_2}{\partial u} \frac{\partial f_y}{\partial u} \right] \cdot \tilde{m} \end{aligned}$$

pois  $f_x \cdot \tilde{m} = f_y \cdot \tilde{m} = 0$  (a normal não depende da parametrização). Logo, usando a regra da cadeia outra vez, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{11} &= \left[ \frac{\partial h_1}{\partial u} \left( \frac{\partial h_1}{\partial u} f_{xx} + \frac{\partial h_2}{\partial u} f_{yx} \right) + \frac{\partial h_2}{\partial u} \left( \frac{\partial h_1}{\partial u} f_{xy} + \frac{\partial h_2}{\partial u} f_{yy} \right) \right] \cdot \tilde{m} \\ &= \frac{\partial h_1}{\partial u} \left( \frac{\partial h_1}{\partial u} h_{11} + \frac{\partial h_2}{\partial u} h_{21} \right) + \frac{\partial h_2}{\partial u} \left( \frac{\partial h_1}{\partial u} h_{12} + \frac{\partial h_2}{\partial u} h_{22} \right) \cdot \tilde{m} \end{aligned}$$

Mas esta expressão de  $\tilde{h}_{11}$  é a mesma que obteríamos usando a fórmula (4.8). Fazendo o mesmo para  $\tilde{h}_{12}$ ,  $\tilde{h}_{21}$  e  $\tilde{h}_{22}$ , obtemos (4.8) C.Q.D.

Assim, vemos que para calcular a curvatura de uma superfície podemos escolher uma parametrização que simplifique os cálculos. Nos exemplos vimos que quando a superfície era o gráfico de uma função o cálculo de  $EG-F^2$  tornava-se simples.

A seguinte proposição diz que se a curvatura é

positiva num ponto então a superfície é conexa nesse ponto; esta proposição é análoga a proposição 9.1 da seção I.9 para curvas planas.

Proposição 4.2 - Seja  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regular.

Se  $K_p > 0$  então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $u$ , tal que  $f|_V$  está estritamente de um lado do plano tangente  $T_p$ .

Demonstração: Podemos assumir, usando reparametrizações e isometrias, que  $p = (0,0)$ ,  $f(p) = (0,0,0)$ , que  $m_p = (0,0,1)$  e que  $f$  está parametrizada numa vizinhança de  $p$  como o gráfico de uma função diferenciável  $h$ . Veja a proposição 2.1. Neste caso, é fácil verificar que  $\det(g_{ij})_p = (EG-F^2)_p = 1$ . Logo

$$K_p = \det(h_{ij})_p > 0$$

Temos também que

(4.9)

$$(h_{11})_p = f_{xx} \cdot (0,0,1) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x,y,h(x,y)) \right) \cdot (0,0,1) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

$$(h_{12})_p = f_{xy} \cdot (0,0,1) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (x,y,h(x,y)) \right) \cdot (0,0,1) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$$

$$(h_{21})_p = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$$

$$(h_{22})_p = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

Logo,

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} ;$$

esta segunda matriz é chamada a hessiana da função. Mas, em cálculo, demonstra-se que se  $h$  tem um ponto crítico em  $p$ , o que é o caso pois  $\frac{\partial h}{\partial x} = f_x \cdot m_p = 0$  e  $\frac{\partial h}{\partial y} = f_y \cdot m_p = 0$ , e o determinante da hessiana é positivo, então  $h$  tem um máximo estrito em  $p$ , ou um mínimo estrito em  $p$ . Como  $h(q)$  é zero se e somente se  $f(q)$  está em  $T_p$ , obtemos nosso resultado. C.Q.D.

Exercício 4.7 - Mostre que a superfície  $f(x,y) = x^3(1+y^2)$  não é convexa no ponto  $(0,0)$  embora

$K_q \geq 0$  numa vizinhança de  $(0,0)$ . Conclua que a proposição para superfícies análoga à proposição 9.2 do capítulo I não é verdadeira.

Exercício 4.8 - Seja  $f(x,y) = (x,y, h(x,y))$  o gráfico de uma função diferenciável  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Mostre que a curvatura  $K$  é positiva, negativa ou zero se e somente se  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y})^2$  é positivo, negativo, ou zero.

Agora veremos a relação entre a curvatura Gaussiana e a derivada da aplicação de Gauss  $m$ . Temos que  $m$

tem sempre norma igual a 1. Logo,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(m \cdot m) = m_x \cdot m + m \cdot m_x = 2m \cdot m_x$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}(m \cdot m) = 2m \cdot m_y$$

Concluimos que  $m_x$  e  $m_y$  são combinações lineares de  $f_x$  e  $f_y$ , i.e., para todo  $p \in u$ , existem números  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  e  $a_{22}$ , tais que

$$(4.10) \quad m_x = a_{11}f_x + a_{21}f_y$$

$$(4.11) \quad m_y = a_{12}f_x + a_{22}f_y$$

Esta matriz  $(a_{ij})$  é a matriz jacobiana da aplicação normal de Gauss  $m: u \rightarrow S^2$ ; isto será mais esclarecido na seção 6.

Como  $m \cdot f_x = m \cdot f_y = 0$ , diferenciando temos que

$$(4.12) \quad \begin{aligned} m_x \cdot f_x &= -m \cdot f_{xx} = -h_{11} \\ m_x \cdot f_y &= -m \cdot f_{xy} = -h_{12} \\ m_y \cdot f_x &= -m \cdot f_{yx} = -h_{21} \\ m_y \cdot f_y &= -m \cdot f_{yy} = -h_{22} \end{aligned}$$

Logo,



$$\begin{aligned} -h_{11} &= m_x \cdot f_x = a_{11}g_{11} + a_{21}g_{21} \\ -h_{12} &= m_x \cdot f_y = a_{11}g_{12} + a_{21}g_{22} \\ -h_{21} &= m_y \cdot f_x = a_{12}g_{11} + a_{22}g_{21} \\ -h_{22} &= m_y \cdot f_y = a_{12}g_{12} + a_{22}g_{22} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Estas últimas quatro equações são equivalentes à seguinte equação matricial

$$-\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

ou

$$-(h_{ij}) = {}^t(a_{ij})(g_{ij}) \tag{4.15}$$

Como a determinante de  $-(h_{ij})$  é igual ao determinante de  $h_{ij}$ , obtemos a seguinte proposição:

Proposição 4.3 - A curvatura Gaussiana é igual ao determinante da matriz jacobiana da aplicação normal de Gauss, i.e.

$$K = \det(a_{ij}) \tag{4.16}$$

Exercício 4.9 - Calcule diretamente o jacobiano da aplicação de Gauss das seguintes superfícies.

(a) a esfera do exemplo 3.5

- (b) o plano
- (c) um cilindro
- (d) o toco do exemplo 3.4.

Exercício 4.10 - Se  $f_x \cdot f_y = 0$  então a matriz jacobiana da aplicação normal de Gauss  $(a_{ij})$  é simétrica?

Exercício 4.11 - Mostre que  $f$  e  $F \circ f$  tem as mesmas curvaturas Gaussianas, se  $F$  é uma isometria de  $\mathbb{R}^3$ .

Exercício 4.12 - Seja  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização da esfera de raio  $r$  menos alguns pedaços de curvas. Calcule a integral

$$\int_{f(u)} K$$

onde  $K$  é a curvatura Gauss da esfera. (Veja o exercício 3.22; pode escolher a parametrização que quiser).

Exercício 4.13 - Calcule a integral da curvatura Gaussiana

$$\int_{f(u)} K$$

onde  $f$  é o toro do exemplo 3.4.

Exercício 4.14 - Calcule a integral  $\int_{f(u)} K$  da superfície do exercício 3.23. (Compare este resulta

do com o do exercício 4.13.

### 5. Curvas na superfície

Nesta seção interpretamos a curvatura Gaussiana em termos das curvaturas de curvas na superfície. Também estudamos certos tipos especiais de curvas que nos ajudarão a estudar a geometria das superfícies.

Consideremos uma curva regular  $D(t) = f \circ C(t)$  na superfície  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  onde  $C: (a,b) \rightarrow U$  é uma curva no plano com coordenadas  $C(t) = (x(t), y(t))$ . Nosso objetivo imediato é expressar a curvatura de  $D$  em termos da segunda forma fundamental II de  $f$ . Primeiro consideremos uma reparametrização pelo comprimento de arco  $\tilde{D}: (c,d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\tilde{D}(s(t)) = D(t)$ , onde  $s$  é o parâmetro de comprimento de arco. Escrevemos  $\tilde{C}(s(t)) = C(t) = (\tilde{x}(s(t)), \tilde{y}(s(t)))$ , embora  $\tilde{C}$  não seja uma reparametrização de  $C$  pelo comprimento de arco.

Temos que

$$(5.1) \quad \tilde{D}'(s) = \tilde{x}'(s)\tilde{f}_x + \tilde{y}'(s)\tilde{f}_y$$

Logo,

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \tilde{D}''(s) = & \tilde{x}''(s)\tilde{f}_x + \tilde{x}'(s)^2\tilde{f}_{xx} + \tilde{x}'(s)\tilde{y}'(s)\tilde{f}_{yx} + \\ & + \tilde{y}''(s)\tilde{f}_y + \tilde{y}'(s)\tilde{x}'(s)\tilde{f}_{xy} + \tilde{y}'(s)^2\tilde{f}_{yy} \end{aligned}$$

E, em termos da segunda forma fundamental (veja a fórmula (4.2)),

$$(5.3) \quad \tilde{D}(s) \cdot m_{\tilde{C}(s)} = \tilde{x}'(s)^2 h_{11} + 2\tilde{x}'(s)\tilde{y}'(s)h_{12} + \tilde{y}'(s)^2 h_{22} \\ = II_{\tilde{C}(s)}(\tilde{x}'(s), \tilde{y}'(s)) = II_{\tilde{C}(t)}(\tilde{C}'(s))$$

Como  $\tilde{D}''(s) = \tilde{k}(s) \tilde{N}(s)$ , onde  $\tilde{N}$  é o vetor curvatura principal da curva  $\tilde{D}$  e  $\tilde{k}(s)$  é a sua curvatura (considerando  $\tilde{D}$  como uma curva em  $\mathbb{R}^3$ ), podemos escrever (5.3) da seguinte maneira

$$(5.4) \quad \tilde{k}(s) \cos \theta = \tilde{k}(s) \tilde{N}(s) \cdot m_{\tilde{C}(s)} = II_{\tilde{C}(s)}(\tilde{C}'(s))$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\tilde{N}(s)$  e  $m_{\tilde{C}(s)}$ .

Como  $\tilde{x}(s(t)) = x(t)$  temos que  $x'(t) = \tilde{x}'(s(s)) s'(t) = \tilde{x}'(s(t)) |D'(t)|$ . Segue-se que

$$\tilde{x}'(s)^2 h_{11} + 2\tilde{x}'(s)\tilde{y}'(s)h_{12} + \tilde{y}'(s)^2 h_{22} = \\ = \frac{x'(t)^2 h_{11} + 2x'(t) y'(t) h_{12} + y'(t)^2 h_{22}}{|D'(t)|^2}$$

Logo, usando as fórmulas (5.3) e (5.4) obtemos que

$$(5.5) \quad k(t) \cos \theta = \tilde{k}(s(t)) \cos \theta = \frac{II_{\tilde{C}(t)}(x'(t), y'(t))}{I_{\tilde{C}(t)}(x'(t), y'(t))} = \\ = \frac{II_{\tilde{C}(t)}(C'(t))}{I_{\tilde{C}(t)}(C'(t))}$$

pois

$$I_{C(t)}(x'(t), y'(t)) = |x'(t)f_x + y'(t)f_y|^2 = |D'(t)|^2.$$

Proposição 5.1 - Todas as curvas numa superfície que num ponto têm os mesmos planos osculadores tem a mesma curvatura nesse ponto, se esse plano é diferente do plano tangente.

Demonstração: Para calcular a curvatura podemos assumir que as curvas estão parametrizadas pelo comprimento de arco; sejam  $D_1$  e  $D_2$  duas curvas que em  $f(p)$  tem o mesmo plano osculador. Como o plano osculador é diferente do plano tangente no ponto  $D_1(s_1)=D_2(s_2)=f(p)$  temos que  $D'_1(s_1) = \pm D'_2(s_2)$ . Observemos que  $II(v)=II(-v)$ . Como as duas curvas têm o mesmo plano osculador temos que  $N(s_1) = N(s_2)$ , o que implica que  $\theta_1 = \theta_2$  ou  $\theta_1 = \pi - \theta_2$ . Logo,  $|\cos \theta_1| = |\cos \theta_2|$ , pois  $\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$ . Concluimos, usando a fórmula (5.3), que

$$k_1(s_1) = \frac{|II(D'_1(s_1))|}{|\cos \theta_1|} = \frac{|II(D'_2(s_2))|}{|\cos \theta_2|} = k_2(s_2)$$

C.Q.D.

Dada uma curva na superfície  $D = f \circ C$ , associamos a cada ponto dela um número  $k_n(t) = \frac{II_{C(t)}(C'(t))}{I_{C(t)}(C'(t))}$ , chamada a curvatura normal da curva  $D$ . O valor  $k_n$  de-

$k_1 \leq k_2$ , vemos que

$$k_1 = k_1 \cos^2 \varphi + k_1 \sin^2 \varphi \leq k_n \leq k_2 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi = k_2.$$

Os vetores  $w_1 = r_1 \tilde{f}_x + s_1 \tilde{f}_y$  e  $w_2 = r_2 \tilde{f}_x + s_2 \tilde{f}_y$  em  $T_p$ , onde  $v_1 = (r_1, s_1)$  e  $v_2 = (r_2, s_2)$ , são chamadas as direções principais da superfície. Eles são ortonormais, pois  $\langle r_1 \tilde{f}_x + s_1 \tilde{f}_y, r_2 \tilde{f}_x + s_2 \tilde{f}_y \rangle = (r_1, s_1) (g_{ij}) \begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = (r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = A((1,0)) \cdot A((0,1)) = (1,0) \cdot (0,1) = 0$ , já que  $A$  é ortogonal. Se  $k_1 = k_2$ , então dizemos que todas as direções são direções principais. Observe que  $w_1$  e  $w_2$  em  $T_p$  não dependem da parametrização.

A curvatura Gaussiana de  $f$  em  $p$   $K_p$  não depende da parametrização; logo

$$K_p = \frac{\det(\tilde{h}_{ij})}{\det(\tilde{g}_{ij})} = \det(h_{ij}) = \det \left( A \cdot \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \cdot {}^t A \right)$$

Como  $A$  é ortogonal,  $A {}^t A =$  identidade, e  $1 = 1 = \det(\text{identidade}) = \det A \det {}^t A = (\det A)^2$ . Logo temos

$$(5.8) \quad K_p = k_1 k_2$$

Como uma aplicação da teoria desenvolvida até agora, demonstramos o seguinte fato.

Proposição 5.2 - Toda superfície regrada tem curvatura Gaussiana  $K \leq 0$ .

Demonstração: Por todo ponto passa uma curva que é uma linha reta, que tem curvatura  $k$  igual a zero; logo sua curvatura normal  $k_n = k \cos \theta$  é também zero. Isto implica que  $k_1 \leq 0 \leq k_2$ , pois  $k_1$  é o mínimo e  $k_2$  o máximo das curvaturas normais. Logo  $K = k_1 k_2 \leq 0$ .

Observação. Na demonstração vemos que  $k=0$  implica  $k_1$  ou  $k_2=0$ , o que implica que a linha reta é uma direção principal.

Relacionaremos agora a curvatura normal de curvas na superfície  $f$  com a aplicação normal de Gauss  $m$ . Na seção 4 estudamos a matriz jacobiana da aplicação normal de Gauss,  $(a_{ij})$ ; ela representa uma aplicação linear  $dm: T_p \rightarrow T_p$  (identificando o plano tangente da superfície no ponto  $p$  e da esfera  $S^2$  no ponto  $m_p$ ). Isto é, se  $v = rf_x + sf_y$  estão  $dm(v) = (a_{11}r + a_{12}s)f_x + (a_{21}r + a_{22}s)f_y$ .

Usando a fórmula (4.15), obtemos

$$(5.9) \quad (h_{ij}) = {}^t(h_{ij}) = -{}^t(g_{ij})(a_{ij}) = -(g_{ij})(a_{ij}).$$

Daí, segue-se que

$$II(r,s) = (r,s)(h_{ij}) \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = -(r,s)(g_{ij})(a_{ij}) \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}.$$

Finalmente, usando a definição do produto escalar em  $T_p$  (veja a seção 3), temos que

$$(5.10) \quad II(r,s) = \langle rf_x + sf_y, -dm(rf_x + sf_y) \rangle$$

Se  $D = f \circ C$  é uma curva na superfície então

$$(5.11) \quad II(C'(t)) = \langle D'(t), -dM(D'(t)) \rangle$$

Logo, se  $D$  é uma curva na superfície então sua curvatura normal é

$$(5.12) \quad k_n = \frac{\langle D'(t), -dM(D'(t)) \rangle}{I(D'(t))} = \frac{\langle D'(t), -dM(D'(t)) \rangle}{|D'(t)|^2}$$

Observação. Usando a fórmula 5.9 e o fato de  $(h_{ij})$  ser simétrico obtemos que, se  $u_1 = r_1 f_x + s_1 f_y$  e  $u_2 = r_2 f_x + s_2 f_y$ ,

$$\begin{aligned} \langle u_2, dM(u_1) \rangle &= -(r_2, s_2)(h_{ij}) \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = -(r_1, s_1)(h_{ij}) \begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = \\ &= \langle u_1, dM(u_2) \rangle \end{aligned}$$

Uma aplicação linear  $dM$  com essa propriedade é chamada auto-adjunta; tem a propriedade de ter (pelo menos) dois auto-vetores (Esse fato daria outra demonstração da existência de  $w_1$  e  $w_2$ , e de  $k_1$  e  $k_2$ ).

Dizemos que uma curva  $D = f \circ C$  é uma linha de curvatura se, para todo  $t$ ,  $D'(t)$  é uma direção principal. Temos o seguinte fato.

Proposição 5.3 - (Olinde Rodrigues): Uma curva

$D = f \circ C$  é uma linha de curvatura se e



somente se  $d\mathfrak{m}(D'(t)) = \lambda(t) D'(t)$ , para todo  $t$ , onde  $\lambda$ , é uma função com valores reais. Temos que  $-\lambda$  é uma curvatura principal.

Demonstração: Se  $k_1 \neq k_2$ , temos duas direções principais ortonormais. Se  $k_1 = k_2$  todas as direções são principais. Logo, em qualquer caso, temos duas direções principais  $w_1$  e  $w_2$  que são ortonormais. Temos que

$$d\mathfrak{m}(w_1) = \langle du(w_1), w_1 \rangle w_1 + \langle d\mathfrak{m}(w_1), w_2 \rangle w_2$$

$$d\mathfrak{m}(w_2) = \langle d\mathfrak{m}(w_2), w_1 \rangle w_1 + \langle d\mathfrak{m}(w_2), w_2 \rangle w_2$$

Acontece que, pelas fórmulas (5.7) e (5.12),

$$\begin{aligned} & \langle d\mathfrak{m}(w_1), w_2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \langle d\mathfrak{m}(w_1+w_2), w_1+w_2 \rangle - \langle d\mathfrak{m}(w_1), w_1 \rangle - \langle d\mathfrak{m}(w_2), w_2 \rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ -(k_1 \cos^2 \pi/4 + k_2 \cos^2 \pi/4) |w_1+w_2|^2 + k_1 + k_2 \right] = 0 \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$(5.13) \quad d\mathfrak{m}(w_1) = -k_1 w_1$$

$$d\mathfrak{m}(w_2) = -k_2 w_2$$

pois como vimos acima  $\langle d\mathfrak{m}(w_2), w_1 \rangle = \langle d\mathfrak{m}(w_1), w_2 \rangle$ .

No caso em que  $k_1 = k_2$ , qualquer vetor  $v$  é uma direção principal. Bote  $w_1 = v/|v|$  e  $w_2$  um vetor ortonormal a  $w_1$ . Pelas contas acima temos que

$$(5.14) \quad \begin{aligned} d\mathbb{m}(v) &= d\mathbb{m}(|v|w_1) = |v|d\mathbb{m}(w_1) = \\ &= |v| \left( -k_1 \frac{v}{|v|} \right) = -k_1 v \end{aligned}$$

para todo  $v$  em  $T_p$ , se  $k_1 = k_2$ .

Exemplo 5.1 - Superfícies desenvolvíveis (veja o exercício 3.17); estas são superfícies regradas com a propriedade de que a aplicação normal de Gauss  $\mathbb{m}$  é constante ao longo das retas que regram a superfície. Afirmamos que  $K=0$  para estas superfícies. De fato, se  $f(t,r) = C(t) + rD(t)$ , então  $\mathbb{m}_r = 0$ , ou seja  $d\mathbb{m}(f_r) = 0 = 0 \cdot f_r$ , o que implica que 0 é um autovalor de  $d\mathbb{m}$ ; pelo que vimos na demonstração da última proposição 0 é um autovalor de  $d\mathbb{m}$  e  $k_1 = 0$  ou  $k_2 = 0$ , ou seja,  $K=0$ .

Exemplo 5.2 - Superfícies de revolução. As linhas de curvatura de uma superfície são seus paralelos e meridianos. Para confirmar este fato lembramos a parametrização de uma superfície de revolução gerada por uma curva  $C(t) = (r(t), s(t))$ ,

$$f(t,u) = (r(t)\cos u, r(t)\sin u, s(t)).$$

Os meridianos são as curvas  $t \rightarrow f(t_1, u_0)$ , com  $u_0$  constante. Usando as fórmulas (3.20) e (3.21) obtemos que

$$f_t \times f_u = (-r(t)s'(t)\cos u, -r(t)s'(t)\sin u, r'(t)r(t)).$$

Logo, usando (3.22), temos que

$$m = \frac{f_t \times f_u}{r(t) |C'(t)|}$$

e

$$m_t \cdot f_u = \frac{(-(r(t)s'(t))' \cos u, -(r(t)s'(t))' \operatorname{sen} u, (r'(t)r(t))')}{r(t) |C'(t)|} \cdot f_u = 0$$

Como  $f_t \cdot f_u = 0$ ,

$$m_t = \frac{(m_t \cdot f_t)}{|f_t|^2} f_t + \frac{(m_t \cdot f_u)}{|f_u|^2} f_u = \frac{(m_t \cdot f_t)}{|f_t|^2} f_t$$

Observe que  $m_t = dM(f_t)$ . Logo

$$dM(f_t) = \frac{(m_t \cdot f_t)}{|f_t|^2} f_t$$

Usando a proposição (5.3), concluímos que o meridiano  $f(t, u)$  é uma linha de curvatura com curvatura principal

(5.15)

$$k_1 = \frac{-m_t \cdot f_t}{|f_t|^2} = - \frac{(-r'(t)(r(t)s'(t))' + s'(t)(r'(t)r(t))')}{r(t) |C'(t)|^3}$$

ou,

(5.16)

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{[-r'(t)r(t)s'(t) - r'(t)r'(t)s'(t) + s'(t)r'(t)r'(t) + s'(t)r(t)r''(t)]}{r(t)(r'(t)^2 + s'(t)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{r'(t)s'(t) - s'(t)r''(t)}{(r'(t)^2 + s'(t)^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Finalmente, usando as fórmulas da seção I.7, vemos que

$$(5.17) \quad k_1 = k$$

onde  $k$  é a curvatura plana da curva  $C(t)$ , que pode ser positiva ou negativa.

Por outro lado  $m_u \cdot f_t = 0$ , e, de uma maneira análoga, verificamos que  $f_u$  é também uma direção principal com curvatura principal  $k_2 = \frac{-m_u \cdot f_u}{|f_u|^2}$ . (Aqui  $k_2$  não é necessariamente maior que  $k_1$ ). Temos que

$$(5.18)$$

$$k_2 = \frac{-m_u \cdot f_u}{|f_u|^2} = \frac{-(r(t)s'(t)\text{sen } u, -r(t)s'(t)\text{cos } u, 0)}{r(t)^3|c'(t)|} \cdot (-r(t)\text{sen } u, r(t)\text{cos } u, 0) = \frac{s'(t)}{r(t)(r'(t)^2 + s'(t)^2)^{1/2}}$$

Logo a curvatura de uma superfície de revolução  $f$  é dada por

$$(5.19) \quad K(t, u) = \frac{s'(t) k(t)}{r(t)\sqrt{r'(t)^2 + s'(t)^2}}$$

Exemplo 5.3 - A Pseudo-esfera; uma superfície com curvatura constante negativa. Ela é a superfície

de revolução gerada pela curva plana  $C(t) = (r(t), s(t)) = (e^{-t}, \int_0^t \sqrt{1-e^{-2w}} dw)$ ,  $t > 0$ , o que é chamada a

tractrix. Esta curva goza da propriedade de que a distância entre  $C(t)$  e o ponto em que a linha tangente passando por  $C(1)$  corta o eixo dos  $y'$ s é constante igual a 1. Temos que

$$\begin{aligned} r'(t) &= -e^{-t} & r''(t) &= e^{-t} \\ s'(t) &= \sqrt{1-e^{-2t}} & s''(t) &= \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \end{aligned}$$

Logo,  $|C'(t)| = (r'(t)^2 + s'(t)^2)^{1/2} = 1$  e a curvatura da tractrix é igual a

$$\begin{aligned} (5.20) \quad k(t) &= \frac{-e^{-t} e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} - e^{-t} \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} = \\ &= \frac{-e^{-3t} - e^{-t}(1-e^{-2t})}{\sqrt{1-e^{-2t}}} = \frac{-e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \end{aligned}$$

Finalmente, usando a fórmula (5.19), obtemos

$$(5.21) \quad K(t,u) = \frac{\sqrt{1-e^{-2t}}}{e^{-t}} \cdot \frac{-e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} = -1$$

Dizemos que a curva  $D = f \circ C$  é uma linha assintótica da superfície se para todo  $t$ ,  $II(C'(t)) = 0$ . O vetor  $C'(t)$  (ou  $D'(t)$ ) é chamado uma direção assintótica. Em virtude da fórmula (5.5), vemos que uma curva é assintótica se e somente se ou sua curvatura é zero ou seu

plano osculador coincide com o plano tangente. Por exemplo, as linhas retas de uma superfície regrada são linhas assintóticas. Outro exemplo é o círculo superior do toro  $u \rightarrow f(\pi/2, u)$ , onde  $f$  é dada pela fórmula (3.24) (verifique esta afirmação). Se um ponto na superfície tem curvatura positiva então esse ponto não possui direções assintóticas. De fato,  $k_1 \leq \frac{II(C'(t))}{I(C'(t))} \leq k_2$  onde  $k_1$  e  $k_2$  são as duas curvaturas principais; como  $K = k_1 k_2 > 0$ ,  $II(C'(t))$  não pode ser zero. Num plano, onde  $K \equiv 0$ , todas as curvas são linhas assintóticas pois o plano osculador é sempre tangente ao plano. No cilindro  $f(t, r) = (\cos t, \sin t, r)$ , as únicas linhas assintóticas são as linhas retas; logo por cada ponto passa uma única linha assintótica. Finalmente, no caso de um ponto com  $K < 0$ , temos exatamente duas direções assintóticas, como verificaremos a seguir; precisamos observar que como  $II(\lambda v) = \lambda^2 II(v)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , contamos todas as direções  $\lambda v$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , com  $II(\lambda v) = 0$  como uma "direção". Por isso nos restringimos aos vetores com  $I(v) = 1$ . Se  $k_n(\varphi)$  é a curvatura normal na direção  $\cos \varphi v_1 + \sin \varphi v_2$ , onde  $v_1$  e  $v_2$  são as direções principais, então temos,

$$k_n(\varphi) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi = 0$$

quando  $\tan^2 \varphi = \frac{-k_1}{k_2} > 0$ , ou seja, quando  $\tan \varphi = \pm \sqrt{\frac{-k_1}{k_2}}$ .

Logo as direções são  $z_1 = \lambda(\cos(\operatorname{arccotan} \sqrt{\frac{-k_1}{k_2}}) v_1 + \operatorname{sen}(\operatorname{arccotan} \sqrt{\frac{-k_1}{k_2}}) v_2)$  e  $z_2 = \lambda(\cos(\operatorname{arccotan} -\sqrt{\frac{-k_1}{k_2}}) v_1 + \operatorname{sen}(\operatorname{arccotan} -\sqrt{\frac{-k_1}{k_2}}) v_2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A média das curvaturas médias  $H = \frac{1}{2}(k_1+k_2)$  é chamada a curvatura média da superfície. A seguinte fórmula interpreta  $H$  como a média das curvaturas normais  $k_n(\varphi)$ ,

$$(5.22) \quad H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(\varphi) d\varphi$$

Esta fórmula é fácil de obter pois

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(\varphi) d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} k_1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2\pi} k_2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} k_1 \pi + \frac{1}{2\pi} k_2 \pi = H \end{aligned}$$

pois

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = 2\pi,$$

e

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \frac{1}{3} \sin^2(\varphi + \pi/2) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 u du.$$

Uma superfície na qual  $H$  é identicamente nula é chamada uma superfície mínima. Elas têm a seguinte propriedade geométrica, que não demonstraremos: seja  $f: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície mínima e  $C$  uma curva "pequena" simples fechada em  $u$  que é a fronteira de um aberto  $V \subset u$ ; então  $f(V)$  é a superfície que tem a menor área entre todas as superfícies  $g: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que o traço de  $g$  (fronteira de  $W$ ) seja igual ao de  $f(C)$ . Aqui a palavra ambígua "pequena" representa alguma condição razoável sobre a superfície; um exemplo de uma condição suficiente é que  $f$  seja o gráfico de uma função. Hoje em dia há muitos pesquisadores, inclusive no Brasil, interessados em superfícies mínimas.

A seguinte proposição relaciona a curvatura média com as direções assintóticas.

Proposição 5.4 - Seja  $f$  uma superfície e  $p$  um ponto com  $K_p \neq 0$ . Então  $p$  tem duas direções assintóticas que são ortogonais se e somente se  $H = 0$  em  $p$ .

Demonstração: Como  $H = 0$ ,  $k_1$  e  $k_2$  tem sinais opostos,



logo  $K_p < 0$ . Agora como vimos acima  $\cos \varphi v_1 + \sin \varphi v_2$  é uma direção assintótica se e somente se  $\tan^2 \varphi = \frac{-k_1}{k_2}$ .

Mas,  $k_1 + k_2 = 0$  implica que  $\tan^2 \varphi = 1$ , ou seja,  $\varphi = \pm \pi/4$ ; temos então duas direções assintóticas que fazem um ângulo de  $\pi/2$ . C.Q.D.

Observe que a demonstração diz mais ainda: as direções assintóticas fazem um ângulo de  $45^\circ$  com as direções principais.

Exemplo 5.4 - O helicóide como superfície mínima. Considere a parametrização  $f(x,y) = (y \cos x, y \sin x, x)$  do helicóide (veja o exercício 2.6). Temos que

$$f_x = (-y \sin x, y \cos x, 1)$$

$$f_y = (\cos x, \sin x, 0)$$

$$m = \frac{f_x \times f_y}{|f_x \times f_y|} = \frac{(-\sin x, \cos x, -y)}{\sqrt{1+y^2}}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{II(1,0)}{I(1,0)} &= \langle -d\mathfrak{m}(f_x), f_x \rangle = -m_x \cdot f_x = \\ &= - \frac{(-\cos x, -\sin x, 0)}{\sqrt{1+y^2}} \cdot (-y \sin x, y \cos x, 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{II(0,1)}{I(0,1)} &= \langle -d\mathfrak{m}(f_y), f_y \rangle = -m_y \cdot f_y = \\ &= - \frac{(0,0,-1)}{\sqrt{1+y^2}} \cdot (\cos x, \sin x, 0) = 0 \end{aligned}$$

Isto é,  $f_x$  e  $f_y$  são direções assintóticas. Como  $f_x \cdot f_y = 0$ , pela proposição 5.4,  $H = 0$  se  $K \neq 0$ . Mas isto se verifica facilmente, pois

$$m_y \cdot f_y = \frac{(0,0,-1)}{\sqrt{1+y^2}} \cdot (-y \sin x, y \cos x, 1) = \frac{-1}{\sqrt{1+y^2}}$$

Logo, como  $f_x \cdot f_y = 0$ ,

$$m_y = \frac{m_y \cdot f_x}{|f_x|^2} f_x + \frac{m_y \cdot f_y}{|f_y|^2} f_y = \frac{m_y \cdot f_x}{|f_x|^2} f_x$$

e, conseqüentemente (veja as fórmulas (4.10) e (4.11),

$$a_{12} = \frac{-1}{(1+y^2)^{3/2}}$$

$$a_{11} = 0$$

$$a_{22} = 0$$

$$a_{21} = \frac{m_x \cdot f_y}{|f_y|^2} = \frac{m_y \cdot f_x}{|f_y|^2} = m_y \cdot f_x = - \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

Logo, pela Proposição 4.3,

$$K(x,y) = \det(a_{ij}) = - \frac{1}{(1+y^2)^2}$$

Observe que mesmo se  $f_x \cdot f_y = 0$  a matriz  $(a_{ij})$  não é necessariamente simétrica.

Definimos a curvatura geodésica de uma curva  $D$  na superfície, denotada  $k_g$ , como

$$(5.23) \quad k_g = T' \cdot (m \times T)$$

onde  $T$  é o vetor tangente unitário da curva  $D$ . Dizemos que uma curva  $D$  é uma geodésica se  $k_g(t) = 0$  para todo  $t$ . As geodésicas são muito importantes porque elas são as curvas de menor comprimento entre dois pontos (um não muito longe do outro). Mais explicitamente, se  $D$  é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, então a distância entre dois pontos  $D(t_1)$  e  $D(t_2)$  é igual à  $(D(t_1), D(t_2)) = t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} |D'(u)| du$ , se  $|t_2 - t_1| < m$ , para algum  $m$ . Este fato de que as geodésicas minimizam comprimentos de curvas não será demonstrado nestas notas, mas não podíamos deixar de defini-las e dar a alguns exemplos.

Pela fórmula (5.23), vemos que  $k_g = 0$  se e somente se  $T' = 0$  ou se  $T' = \lambda m$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Isto é, uma curva é uma geodésica se e somente se ou sua curvatura é zero ou seu plano osculador é perpendicular ao

plano tangente (i.e.  $\cos \theta = \pm 1$ ). Podemos escrever

$$T' = (T' \cdot m)m + (T' \cdot (m \times T)) \cdot (m \times T) = k_n m + k_g (m \times T).$$

Concluimos que

$$(5.24) \quad k^2 = k_n^2 + k_g^2$$

Deduzimos desta fórmula que no caso de uma geodésica

$k = |k_n|$ , e que no caso de uma linha assintótica  $k = |k_g|$ .

Exemplo 5.5 - A esfera. As geodésicas da esfera são os círculos máximos. De fato, um círculo máximo é obtido intersecando a esfera com um plano passando por seu centro. Logo este plano é o plano osculador do círculo máximo; como este plano contém a linha normal à esfera, pois esta passa pelo centro, temos que o plano osculador é perpendicular ao plano tangente, e o círculo máximo é uma geodésica.

Exemplo 5.6 - O cilindro. As geodésicas do cilindro

$f(x,y) = (\cos x, \sin x, y)$  são as linhas retas  $t \rightarrow (\cos x_0, \sin x_0, t)$  e as hélices  $t \rightarrow (\cos t, \sin t, bt)$ . De fato, uma linha reta é sempre uma geodésica pois  $k = 0$ . Por outro lado uma hélice  $C(t) = (\cos t, \sin t, bt)$  tem derivadas  $C'(t) = (-\sin t, \cos t, b)$  e  $C''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) = -m$ .

Logo o plano osculador de  $C$  é perpendicular ao plano tangente do cilindro; logo todas as hélices são geodésicas.

Observações:

1) De cada ponto do cilindro sai uma geodésica em toda direção; basta variar as constantes  $b$ . Isto vale para toda superfície.

2) Na seção 3 vimos que o plano é isométrico ao cilindro e que a isometria manda linhas retas (geodésicas do plano) em hélices. Este fato é geral: uma isometria manda geodésicas em geodésicas.

Um ponto  $p$  numa superfície é chamado um ponto elíptico se  $K_p > 0$ , um ponto hiperbólico se  $K_p < 0$ . Quando  $K_p = 0$  temos dois casos, um quando  $k_1 = k_2 = 0$ , um ponto planar, e outro quando  $H \neq 0$ , um ponto parabólico. Por exemplo, um cilindro consiste de pontos parabólicos. Dizemos que um ponto é umbílico se  $k_1 = k_2$ . Exemplos de pontos umbílicos são os pontos do plano  $k_1 = k_2 = 0$ , e os pontos da esfera de raio  $r$ ,  $k_1 = k_2 = 1/r$ . A seguinte proposição mostra que esses são os dois únicos exemplos. Observemos primeiro o caso  $k_1 = k_2$ .

Proposição 5.5 - Seja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regular

parametrizada definida num aberto conexo  $u$  de  $R^2$ . Se a superfície consiste inteiramente de pontos umbílicos, então o seu traço está contido num plano ou numa esfera.

Demonstração: Pela fórmula (5.14) temos que  $dm(v) = \beta v$ , para todo  $v$  em  $T_{(x,y)}$ . Mas observe que em princípio  $\beta$  pode variar com o ponto  $(x,y)$ , isto é, temos uma função diferenciável  $\beta(x,y)$  definida em  $u$ . Demonstraremos que  $\beta$  é uma função constante. Temos que

$$m_x = dm(f_x) = \beta f_x$$

$$m_y = dm(f_y) = \beta f_y$$

Diferenciando a primeira equação com relação a  $y$  e a segunda com relação a  $x$ , temos que

$$m_{yx} = \frac{\partial \beta}{\partial y} f_x + \beta f_{yx}$$

$$m_{xy} = \frac{\partial \beta}{\partial x} f_y + \beta f_{xy}$$

Como  $m_{yx} = m_{xy}$  e  $f_{yx} = f_{xy}$ , obtemos que

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} f_x = \frac{\partial \beta}{\partial x} f_y$$

Mas  $f_x$  e  $f_y$  são linearmente independente; logo

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$$

Agora usaremos o seguinte fato de cálculo: uma

função definida num aberto conexo cujas derivadas parciais se anulam identicamente é constante. Verifiquemos esta afirmação. Seja  $p$  e  $q$  dois pontos quaisquer de  $u$ . Pela definição de aberto conexo (veja a seção I.13), temos que existe uma curva  $D$  regular por parte ligando  $p$  e  $q$ . Se  $C(t) = (x(t), y(t))$  é um trecho regular de  $D$  então  $f(t) = \beta(C(t))$  tem derivada

$$f'(t) = x'(t) \left. \frac{\partial \beta}{\partial x} \right|_{C(t)} + y'(t) \left. \frac{\partial \beta}{\partial y} \right|_{C(t)} = 0$$

Mas uma função real definida num intervalo com derivada identicamente zero é constante. Logo,  $\beta(p) = \beta(q)$ , pois  $D$  é contínua.

Então  $\beta(x, y)$  é igual a uma constante, que chamaremos também  $\beta$ .

Caso 1  $\beta=0$ . Temos que  $m_x = m_y = 0$ . Aplicando a afirmação feita acima a cada função coordenada de  $m$ , vemos que  $m$  é constante. Consideremos agora a função

$g(x, y) = f(x, y) \cdot m$ . Verifica-se que  $\frac{\partial g}{\partial x} = f_x \cdot m = 0$  e

$\frac{\partial g}{\partial y} = f_y \cdot m = 0$ ; logo pela mesma razão  $g$  é constante.

Então  $f(u)$  está contida no plano  $\{w \in \mathbb{R}^3: w \cdot m = f(x_0, y_0) \cdot m\}$  de  $\mathbb{R}^3$ , onde  $(x_0, y_0)$  é um ponto arbitrário de  $u$ .

Caso 2  $\beta \neq 0$ . Considere a função  $g(x, y) = f(x, y) - \frac{1}{\beta} m(x, y)$ .

Temos que

$$g_x = f_x - \frac{1}{\beta} m_x = 0$$

$$g_y = f_y - \frac{1}{\beta} m_y = 0$$

Logo,  $g$  é igual a um vetor constante  $v$ . Finalmente, chegamos a conclusão de que  $f(u)$  está contida na esfera  $\{w \in \mathbb{R}^3: |w-v| = 1/\beta\}$ , uma esfera de centro  $v$  e raio  $\beta$ .

C.Q.D.

Exercício 5.1 - Mostre com um exemplo que os valores das curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  dependem da parametrização. Mas, verifique que  $|k_1|$  e  $|k_2|$  não dependem da parametrização; o mesmo acontece com  $H$ .

Exercício 5.2 - Qual é a imagem pela aplicação de Gauss do helicóide?

Exercício 5.3 - Ache as curvaturas do catenoide.

Exercício 5.4 - Ache as curvaturas do toro.

Exercício 5.5 - Considere a parametrização  $f$  do cilindro dada no exemplo 2.1. Mostre que existe uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco  $C(t)$  na superfície tal que  $d(C(t_1), C(t_2)) < |t_2 - t_1|$ .

Exercício 5.6 - Mostre que os meridianos de uma superfície



de revolução são geodésicas. Mostre também que os paralelos ao longo dos quais o plano tangente é paralelo ao eixo de rotação são também geodésicas.

Exercício 5.7 - Ache uma linha assintótica do toro que não seja linha de curvatura.

Exercício 5.8 - Mostre que uma linha de curvatura que é ao mesmo tempo uma linha assintótica é uma curva plana.

Exercício 5.9 - Se uma linha de curvatura é ao mesmo tempo uma linha assintótica, então  $K=0$  ao longo dela.

Exercício 5.10 - Ache as linhas de curvatura do cone.

Exercício 5.11 - Seja  $D = f \circ C$  uma linha assintótica com curvatura  $k(t) > 0$ . Mostre que

$$|\tau| = \sqrt{-K}$$

onde  $\tau$  é a torção de  $D$ . Sugestão: o vetor normal à curva  $N(t)$  é tangente e o binormal  $B(t)$  é igual a  $\pm m$ . Ache a matriz de  $dm$  na base  $T(t), N(t)$ , e observe que a curvatura é igual ao determinante desta matriz.

Exercício 5.12 - Mostre que o catenoide é uma superfície mínima.

Exercício 5.13 - Mostre que a superfície  $f(x,y) = (x,y, x^2+y^2)$  possui um ponto umbílico.

Exercício 5.14 - Mostre que a superfície  $f(x,y) = (x,y, x^4+y^4)$  possui um ponto planar.

Exercício 5.15 - Ache a integral  $\int_{f(u)} H$ , onde  $f$  é o toro do exemplo 3.4, e  $H$  é sua curvatura média (veja o exercício 3.22).

## 6. Definição global de superfícies

Agora veremos superfícies como subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  que são localmente o traço de uma superfície regular parametrizada. Daremos maneiras equivalentes de definir as superfícies e métodos de construir exemplos.

Lembramos que um aberto de  $\mathbb{R}^3$  e um conjunto  $u \subset \mathbb{R}^3$  que goza da propriedade de que para todo ponto  $p \in u$  existe uma bola de centro  $p$  e raio  $r > 0$ ,  $\{v \in \mathbb{R}^3: |v-p| < r\}$ , totalmente contida em  $u$  (veja a seção I.13). Dizemos que uma aplicação  $h: u \rightarrow V$  entre dois abertos de  $\mathbb{R}^3$  é um difeomorfismo se é diferenciável, biunívoca, sobrejetiva, e sua aplicação inversa  $h^{-1}: V \rightarrow u$  é diferenciável.

Definição. Uma superfície é um subconjunto  $M$  de  $\mathbb{R}^3$

que goza da propriedade de que para cada um de seus pontos  $x$  existe um aberto  $u$  de  $\mathbb{R}^3$  contendo  $x$  e um difeomorfismo  $h: u \rightarrow V$  sobre outro aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que

$$(6.1) \quad h(u \cap M) = \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(x, y, z) \in V: z = 0\}$$

Esta definição sugere a idéia intuitiva de que uma superfície é um pedaço do plano que foi deformado (pe-lo difeomorfismo  $h^{-1}$ ). Na proposição 6.2 veremos que uma superfície é localmente o traço de uma superfície regular parametrizada; esta propriedade de que gozam as superfícies poderia ser tomada como a definição de superfícies.

Exemplo 6.1 - A esfera  $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3: |v| = 1\}$ . Seja

$p = (p_1, p_2, p_3)$  um ponto de  $S^2$ . Temos que um dos números  $p_i$  é diferente de zero. Suponha que  $p_3 > 0$ ; os outros casos são análogos. Segue-se que

$p_1^2 + p_2^2 < 1$ . Por continuidade existe  $\delta > 0$  tal que se  $|x - p_1| < \delta$  e  $|y - p_2| < \delta$  então  $x^2 + y^2 < 1$ . Considere o aberto  $u = (p_1 - \delta, p_1 + \delta) \times (p_2 - \delta, p_2 + \delta) \times (p_3 - 1, p_3 + 1)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Definamos  $h: u \rightarrow \mathbb{R}^3$  como  $h(x, y, z) =$

$= (x, y, z - \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ . Temos que  $h$  é biunívoca e que  $h^{-1}(x, y, z) = (x, y, z + \sqrt{1 - x^2 - y^2})$  definida em  $V = h(u)$

é diferenciável; logo  $h$  é um difeomorfismo. Finalmente observamos que se  $q \in u \cap S^2$  então  $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$  e  $h(q) = (q_1, q_2, 0)$ . Inversamente se  $(x, y, 0) \in V$  então  $h^{-1}(x, y, 0) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \in u \cap S^2$ . Logo a esfera é uma superfície.

Usando superfícies parametrizadas não podíamos antes estudar a esfera toda de uma vez.

Exercício 6.1 - No exemplo acima ache  $u$ ,  $V$  e  $h$  para o ponto  $p = (-1/2, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ .

Uma maneira fácil de obter superfícies, usando o teorema da função implícita (veja a seção I.15), é dada pela seguinte proposição.

Proposição 6.1 - Seja  $A \subset \mathbb{R}^3$  um aberto de  $\mathbb{R}^3$  e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Se, para todo  $(x, y, z)$  em  $A$  com  $f(x, y, z) = 0$  temos que o gradiente de  $f$   $(\text{grad } f)_{(x, y, z)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x, y, z)}$ , é diferente de zero, então  $f^{-1}(0)$  é uma superfície.

Demonstração: Seja  $p = (p_1, p_2, p_3)$  um ponto de  $f^{-1}(0)$ .

Suponha por simplicidade que  $\frac{\partial f}{\partial z}|_p \neq 0$ .

Neste caso, o teorema da função implícita garante que existe um aberto  $W$  de  $\mathbb{R}^2$  contendo  $(p_1, p_2)$  e um intervalo

$I$  de  $\mathbb{R}$  contendo  $p_3$  tal que para todo  $(x,y)$  em  $W$  existe um único número  $g(x,y)$  em  $\mathbb{R}$  satisfazendo  $f(x,y,g(x,y)) = 0$ , onde  $g$  é diferenciável. Agora, defina  $h^{-1}: V \rightarrow h(V) = u$  como  $h^{-1}(x,y,z) = (x,y,z+g(x,y))$ , onde  $V = W \times I$ . Obviamente  $h = (h^{-1})^{-1}$  é diferenciável. Temos que  $V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = W \times \{0\}$ . Verifica-se facilmente que  $h^{-1}(W \times \{0\}) = u \cap f^{-1}(0)$ . C.Q.D.

Exercício 6.2 - Considere a função  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x,y,z) = (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - 1$ . Mostre que  $f^{-1}(0)$  é uma superfície. Faça um desenho. Reconhece esta superfície?

Exercício 6.3 - Considere a função  $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z - \alpha$ . Para que  $\alpha$  é  $f^{-1}(0)$  uma superfície? Faça desenhos.

Exercício 6.4 - Considere a função  $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - \alpha$ . Para quais  $\alpha$  é  $f^{-1}(0)$  uma superfície? Faça desenhos.

A seguinte proposição nos dá uma definição equivalente de superfícies em termos de superfícies regulares parametrizados.

Proposição 6.2 - Um subconjunto  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  é uma superfí-

cie se e somente se para todo  $p$  em  $M$  existe um aberto  $u$  de  $\mathbb{R}^3$  contendo  $p$ , um aberto  $W$  de  $\mathbb{R}^2$  e uma aplicação diferenciável biunívoca  $f: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  satisfazendo as seguintes condições:

$$(6.2) \quad f(W) = M \cap u$$

(6.3) a matriz jacobiana de  $f$  tem posto 2 em todo ponto  $y \in W$ .

Demonstração: Se  $M$  é uma superfície, então, pela definição, existem abertos  $u$  e  $V$ , com  $p \in u$ , e um difeomorfismo  $h: u \rightarrow V$  satisfazendo (6.1). Tome  $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: (x,y,0) \in h(u)\}$ . Defina  $f: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  como  $f(x,y) = h^{-1}(x,y,0)$ . É claro que  $f(W) = M \cap u$ . Vejamos agora que  $f$  tem posto máximo. Considere a aplicação  $H(x,y,z) = (h_1(x,y,z), h_2(x,y,z))$ . Temos que  $H \circ f =$   
 $=$  identidade. Logo pela regra da cadeia  $J(H) \cdot J(f) =$   
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , onde  $J(H)$  e  $J(f)$  representam as matrizes jacobianas. Segue-se que  $J(f)$  tem posto 2.

Inversamente, suponha que  $f: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  satisfaz

$$(6.2) \text{ e } (6.3). \text{ Suponhamos que } \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}_q \neq 0;$$

os outros casos são análogos. Defina  $p: W \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

como  $p(x,y,z) = f(x,y) + (0,0,r)$ . O jacobiano de  $p$  é

$$J(p)_{(q,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & 1 \end{pmatrix}_{(q,0)}$$

Logo,  $\det J(p) \neq 0$ . Agora, pelo teorema da função inversa para funções de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}^3$  (veja a seção I.15), existe um aberto  $V$  contendo o ponto  $(q,0)$  e um aberto  $u$  contendo:  $p(q,0) = f(q)$  tal que  $p: V \rightarrow u$  e  $h = p^{-1}: u \rightarrow V$  são difeomorfismos. Mas, acontece que

$$\begin{aligned} h(u \cap M) &= p^{-1}(u \cap M) = p^{-1}\{p(x,y,0) : (x,y,0) \in V\} = \\ &= V \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\} \end{aligned}$$

C.Q.D.

Uma aplicação diferenciável e biunívoca

$f: w \rightarrow \mathbb{R}^3$  satisfazendo (6.2) e (6.3) é chamada uma parametrização local de  $M$ . É claro que uma parametrização local é uma superfície regular parametrizada. Se

$f_1: w_1 \rightarrow u_1$  e  $f_2: w_2 \rightarrow u_2$  são duas parametrizações locais de  $M$ , com  $p \in u_1 \cap u_2 \cap M$ , então é fácil verificar que a aplicação  $h: f_1^{-1}(u_1 \cap u_2) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow f_2^{-1}(u_1 \cap u_2) \subset \mathbb{R}^2$  é um difeomorfismo. Segue-se que  $f_1|_{f_1^{-1}(u_1 \cap u_2)} = f_2 \circ h$

é uma reparametrização de  $f_1$ , como superfícies regulares parametrizadas. Consequentemente, podemos definir numa superfície todas as noções geométricas de superfícies regulares parametrizadas que não dependem da parametrização. Por exemplo, para definir o plano tangente num ponto  $q$  de  $M$  usamos uma parametrização local  $f_1: u_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f_1(p) = q$  e definimos o plano tangente a  $M$  em  $q$  como  $TM_q = T_p$ . Pelo que vimos acima esta definição não depende da parametrização local escolhida. De fato, outra parametrização local  $f_2$  ao redor de  $q$  é uma reparametrização de  $f_1$ . Logo, pelo que vimos na seção 2 o plano tangente obtido por intermédio de  $f_2$  é igual a  $T_p$ . Desta maneira podemos estudar a geometria de uma superfície.

Exercício 6.5 - Seja  $p \in M$  e  $f_1: w_1 \rightarrow u_1$  e  $f_2: w_2 \rightarrow u_2$  duas parametrizações locais com  $p \in u_1 \cap u_2$ . Mostre que  $f_2^{-1} \circ f_1: f_1^{-1}(u_1 \cap u_2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  é diferenciável e tem posto 2.

Exercício 6.6 - Explique como podemos definir a curvatura de uma superfície.

Exercício 6.7 - Ache uma parametrização local da superfície  $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1\}$  ao redor do ponto  $(0,0,1)$ .



Exercício 6.8 - Mostre, sem fazer uso da proposição 6.2, que o gráfico de uma função é uma superfície.

Exercício 6.9 - Demonstre que se  $M$  é uma superfície então  $\mathbb{R}^3 - M$  é um aberto de  $\mathbb{R}^3$ .

Vimos que podemos definir globalmente os planos tangentes de uma superfície  $M$ . Logo, temos uma linha normal bem definida em cada ponto. Mas, pode não ser possível definir um vetor normal unitário  $m$  de uma maneira global e contínua. De fato, na faixa de Moebius

$$M = f((0, 6\pi) \times (-1, 1)) = \left\{ \left( (1+y \cos \frac{x}{2}) \cos x, (1+y \cos \frac{x}{2}) \sin x, y \sin \frac{x}{2} \right); x \in (0, 2\pi), y \in (-1, 1) \right\}$$

normal. Este problema sugere a seguinte definição: uma orientação de uma superfície  $M$  é uma aplicação que associa a cada ponto  $p$  de  $M$  um vetor normal unitário  $m_p$  de tal forma que para todo ponto  $q$  de  $M$  existe uma parametrização local  $f: U \rightarrow M$  tal que  $q \in f(U)$  e

$$m_p = \frac{f_x \times f_y}{|f_x \times f_y|}, \text{ para todo } p \in f(U). \text{ Dizemos que uma}$$

superfície é orientável se ela admite uma orientação; caso contrário é chamada não orientável. Observamos que numa superfície orientável existem duas orientações,  $m$  e  $-m$ . Se uma superfície é orientável então existe a aplicação de

Gauss  $m: M \rightarrow S^2$  (na verdade existem duas).

O problema é que a aplicação normal  $\frac{f_x \times f_y}{|f_x \times f_y|}$

depende da parametrização; de fato, se  $\tilde{f} = f \circ h$  é uma reparametrização de  $f$  então, pelas fórmulas (2.6) e (2.7) temos que

$$\tilde{f}_x \times \tilde{f}_y = \det J(h) f_x \times f_y .$$

Logo,  $\tilde{m} = m$  ou  $\tilde{m} = -m$  dependendo de  $\det J(h)$  ser positivo ou negativo.

Exercício 6.10 - Mostre que uma superfície obtida pelo método da proposição 6.1 é sempre orientável.

Exercício 6.11 - Mostre que uma superfície  $M$  é orientável se e somente se existe uma família  $f_\lambda: u_\lambda \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\lambda \in L$ , de parametrizações locais tal que  $M = \bigcup_{\lambda \in L} f_\lambda(u_\lambda)$ , e que sempre que  $f_{\lambda_1}(u_{\lambda_1}) \cap f_{\lambda_2}(u_{\lambda_2}) \neq \emptyset$  a aplicação  $h = f_{\lambda_2}^{-1} \circ f_{\lambda_1} | f_{\lambda_1}^{-1}(f_{\lambda_1}(u_{\lambda_1}) \cap f_{\lambda_2}(u_{\lambda_2}))$  satisfaça  $\det J(h)_p > 0$ , para todo  $p$ .

Devemos observar que uma superfície  $M$  não tem auto-interseção. Neste sentido as superfícies regulares parametrizadas eram mais gerais. Uma maneira de admitir auto-interseções é considerar a seguinte definição. Uma

imersão de uma superfície é uma aplicação  $g: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que, para todo  $p \in M$ , existe uma parametrização  $f: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  com  $p \in f(U)$  tal que  $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular parametrizada.

Outra variante da definição dada aqui é considerar superfície em  $\mathbb{R}^4$ , ou em  $\mathbb{R}^n$ ; a definição é facilmente modificada. Existem algumas superfícies não orientáveis que existem em  $\mathbb{R}^4$  mas não em  $\mathbb{R}^3$ .

Exercício 6.12 - Escreva uma definição de superfície em  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que

$$M = \{(x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz) \in \mathbb{R}^6 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície de  $\mathbb{R}^6$ . Ela é uma superfície não orientável no sentido do exercício 6.11) chamada o plano projetivo.

## 7. Alguns teoremas

No capítulo I chegamos a estudar alguns teoremas interessantes e profundos sobre curvas. Infelizmente, numa nota introdutória, não nos é possível fazer o mesmo no caso de superfícies. Na verdade, preparamos toda a maquinaria, mas não chegamos a usá-la. Agora vamos mencionar alguns teoremas clássicos interessantes. Não vamos

demonstrá-los, mas, pelo menos, entender seus enunciados é um passo a frente.

Começaremos com um teorema que, na realidade, estamos em condições de demonstrar sem muito trabalho. Um subconjunto fechado e limitado do  $\mathbb{R}^3$  é chamado um subconjunto compacto. Uma propriedade útil que eles têm é que uma função contínua definida sobre ele sempre tem um máximo e um mínimo. Uma superfície é sempre fechada; logo, será compacta se e somente se for limitada. Um teorema similar ao das curvas de Jordan (Veja a seção I.13) diz que toda superfície compacta divide o espaço  $\mathbb{R}^3$  em dois abertos conexos disjuntos, um dos quais é limitado. A fronteira deles dois seria a superfície. Outro fato é que uma superfície compacta é orientável. Dizemos que uma superfície é convexa se ela é a fronteira de um conjunto convexo do  $\mathbb{R}^3$ .

Teorema de Hadamard. Uma superfície compacta com curvatura Gaussiana sempre positiva é convexa.

A demonstração deste teorema é quase idêntica a do teorema I.13. A idéia é primeiro mostrar, como naquele teorema (esta parte é idêntica), que se o conjunto limitado pela superfície não for convexo então existe um seg-

mento de linha reta tangente a superfície e dentro deste conjunto limitado. Mas, esse fato contradiz o resultado da proposição 4.2, que garante a convexidade local da superfície. O leitor deve tentar dar uma demonstração detalhada deste teorema.

Este teorema vale também se só pedíssemos que  $K > 0$ . A mesma demonstração não vale pois o exercício 4.7 mostra que a informação para superfícies análoga à feita na proposição I.9.2 não é verdadeira. A demonstração usa a noção análoga a da curvatura absoluta total de uma curva; no caso de superfícies estuda-se o número  $\int_M |K| \cdot$ . Mostra-se que este número é igual ao mínimo possível  $(4\pi)$  se e somente se  $M$  é convexa.

Dizemos que duas superfícies  $M_1$  e  $M_2$  são isométricas se existe um difeomorfismo  $h: M_1 \rightarrow M_2$  tal que para todo  $p \in M_1$ , existem parametrizações locais  $f_1: U \rightarrow M_1$ , com  $p \in f_1(U)$  e  $h(p) \in f_2(U)$ , que são isométricas como superfícies parametrizadas (veja a seção 3).

Teorema Egregium de Gauss. se  $h: M_1 \rightarrow M_2$  é uma isometria então  $K_p = K_{h(p)}$ , para todo  $p \in M$ .

Este teorema é demonstrado mostrando que a curva

tura  $K$  de uma superfície pode ser expressa em termos dos coeficientes  $E$ ,  $F$  e  $G$  da primeira forma fundamental e de suas derivadas.

A seguir falaremos de um teorema que relaciona a curvatura de uma superfície com sua topologia. Uma triangulação de uma superfície é uma divisão da superfície em triângulos por meio de curvas regulares. Isto é, temos um número de curvas regulares biunívocas  $C_\lambda: [a_\lambda, b_\lambda] \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ , tal que  $C_\lambda((a_\lambda, b_\lambda)) \cap C_\mu((a_\mu, b_\mu)) = \emptyset$ , se  $\lambda \neq \mu$ , e que quando três delas formam uma curva fechada elas limitam um conjunto  $T_i$ , chamado triângulo, que é a imagem por uma parametrização local de uma bola aberta de  $\mathbb{R}^2$ . Exigimos também que  $M - \cup_\lambda C_\lambda([a_\lambda, b_\lambda])$  seja uma união finita de triângulos disjuntos. As curvas são chamadas lados, e os pontos  $C(a_\lambda)$  e  $C(b_\lambda)$  são chamados vértices. Se  $V$  = número de vértices,  $L$  = número de lados, e  $T$  = número de triângulos, chamamos o número  $\chi(M) = T - L + V$  de característica de Euler de  $M$ . Este número  $\chi(M)$  tem duas propriedades importantes. Uma é que não depende da triangulação. A outra é que se  $h: M_1 \rightarrow M_2$  é um difeomorfismo entre duas superfícies compactas então  $\chi(M_1) = \chi(M_2)$ . Como um exemplo o leitor deve mostrar que a característica de Euler da esfera é igual a 2.

Teorema de Gauss-Bonnet. Se  $M$  é uma superfície compacta (orientável) do  $\mathbb{R}^3$ , então

$$\int_M K = 2\pi\chi(M)$$

Este teorema é surpreendente pois superfícies geometricamente diferentes tem a mesma característica de Euler. Ele é demonstrado usando a seguinte fórmula, chamada de Gauss-Bonnet,

$$\int_{f(u)} K + \sum_{i=1}^3 \int_{a_i}^{b_i} K_g(t) dt + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi$$

onde  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma superfície parametrizada contendo o fecho de um aberto  $u$  de  $\mathbb{R}^2$  difeomorfo a uma bola aberta do  $\mathbb{R}^2$ . Pedimos que a fronteira de  $u$  consiste de três curvas biunívocas regulares  $C_i: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que seus vetores normais apontam para dentro de  $u$ , que  $C_1(b_1) = C_2(a_2)$ ,  $C_2(b_2) = C_3(a_3)$ , e  $C_3(b_3) = C_1(a_1)$ . Os ângulos  $\theta_i$ , chamados ângulos externos, estão definidos pelas seguintes equações,

$$D'_1(b_1) \times D'_2(a_2) = |D'_1(b_1)| |D'_2(a_2)| \text{sen } \theta_1 m$$

$$D'_2(b_2) \times D'_3(a_3) = |D'_2(b_2)| |D'_3(a_3)| \text{sen } \theta_2 m$$

$$D'_3(b_3) \times D'_1(a_1) = |D'_3(b_3)| |D'_1(a_1)| \text{sen } \theta_3 m$$

onde  $D_i = f \circ C_i$ , e  $m$  é o vetor normal nos pontos corres

pondentes e  $K_g$  é a curvatura geodésica, estudada na seção 5. Observe que  $\int_{f(u)} K = \int_u K(x,y) |f_x \times f_y| dx dy$ . O conjunto  $f(u)$  é um triângulo. Um triângulo é chamado geodésico se seus lados são geodésicos; esta é uma generalização geométrica de triângulos do plano, cujos lados são retas, i.e., geodésicas. Se  $f(u)$  é um triângulo geodésico então a fórmula de Gauss-Bonnet diz que a soma dos ângulos internos  $\beta_i = \pi - \theta_i$ , é

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i = \pi \int_{f(u)} K$$

Dai, segue-se que se  $K=0$  a soma é igual a  $\pi$ , se  $K>0$  a soma é maior do que  $\pi$ , e se  $K < 0$  ela é menor do que  $\pi$ .

Dizemos que uma superfície  $M$  é completa se dado qualquer geodésia parametrizada pelo comprimento de arco  $C: [a,b] \rightarrow M$ , existe outra geodésica  $D: [c,d] \rightarrow M$  também parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $c < a, d > b$ , e  $D|_{[a,b]} = C$ . Isto é,  $M$  é completa se toda geodésica pode ser estendida indefinidamente. Uma superfície compacta é completa. Um exemplo: o gráfico de uma função  $h: u \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é completa se e somente se  $u = \mathbb{R}^2$ . O diâmetro  $d(M)$  de uma superfície  $M$  é o supremum de todas as distâncias  $d(p,q)$  entre pontos da super-



ficie. Claro que esta distância é ao longo da superfície, i.e.,  $d(p,q)$  é igual ao infimum dos comprimentos de todas as curvas sobre a superfície que ligam  $p$  e  $q$ .

Teorema de Hopf-Rinow: Seja  $M$  uma superfície completa.

Dados dois pontos quaisquer  $p$  e  $q$  em  $M$  existe uma geodésica ligando  $p$  e  $q$  com comprimento igual a  $d(p,q)$ .

Para ver que a condição de  $M$  ser completa é fundamental, considere  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  como uma superfície; ela não é completa. Os pontos  $(-1,0)$  e  $(1,0)$  não podem ser ligados por nenhuma geodésica. Mais ainda, não existe nenhuma curva em  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  ligando esses pontos com comprimento igual a  $d((1,0),(-1,0))$ .

O seguinte teorema relaciona a curvatura e a distância.

Teorema de Bonnet. Seja  $M$  uma superfície completa. Se existe um  $\delta > 0$  tal que  $K > \delta$ , então  $M$  é compacta e  $d(M) \leq \pi/\sqrt{\delta}$ .

Na seção 5 estudamos a pseudo-esfera (exemplo 5.3). Vimos que ela tem curvatura negativa constante, mas ela não é completa. O próximo teorema mostra que não há maneira de estende-la a uma superfície completa.

Teorema de Hilbert: Não existe superfície completa  $M \subset \mathbb{R}^3$   
com curvatura negativa constante.

Temos enunciado alguns teoremas clássicos. Porém a pesquisa continua. Por isso daremos dois exemplos mais recentes; Claro que a escolha é arbitrária, pois há muitos exemplos interessantes. O primeira generaliza o teorema de Hilbert.

Teorema de Effimov. Não existe superfície completa  $M \subset \mathbb{R}^3$   
com curvaturas  $K \leq \delta \leq 0$ , onde  $\delta$  é constante.

Teorema de Hartman e Nirenberg. Se  $M$  é uma superfície completa com  $K \equiv 0$  então  $M$  é um cilindro, i.e., a menos de uma isometria de  $\mathbb{R}^3$ ,  $M = C \times \mathbb{R}$  onde  $C$  é uma curva em  $\mathbb{R}^2$ . (veja o exemplo 1.3).

REFERÊNCIAS

- Carmo, Manfredo do, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- , Elementos de Geometria Diferencial, do Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1971.
- , Introdução à Geometria Diferencial Global, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1970.
- Carvalho, João Pitombeira de, Introdução à Álgebra Linear, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1974.
- Goetz, Abraham, Introduction to Differential Geometry, Addison Wesley, Reading, Mass., 1970.
- Harle, C.E., Geometria Diferencial, 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1973.
- Hoffman, K., e Kunze, R. Álgebra Linear, Ed.Univ. de S. Paulo e Pológono, São Paulo, 1971.
- Lang, Serge, Álgebra Linear, Ed. Edgar Blücher, São Paulo, 1971.

Lang, Serge, Cálculo, Livro Técnico Científico, Rio de Janeiro, 1975.

O'Neill, Barrett, Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York, 1966.

Stoker, J.J., Differential Geometry, Wiley-Interscience, New York, 1969.

Williamson, R., Gowell, R., e Trotter, H. Cálculo de Funções vetoriais, vols. 1 e 2, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1974 e 1975.

ÍNDICE ALFABÉTICO

- Aplicação, Diferenciável de Classe  $C^k$ , 163, 12  
Normal de Gauss, 183
- Área, 188
- Bola aberta, 101
- Catenária, 21
- Catenoide, 196
- Centro de curvatura, 76
- Cicloide, 26
- Cilindro, 165, 186, 236
- Círculo osculador, 137, 84
- Comprimento de arco, 37  
parametrizado pelo, 40
- Cone, 196
- Conjunto aberto, 101  
conexo, 101  
convexo, 100
- Curvatura, normal, 219  
principal, 221  
geodésica, 235  
média, 231  
de curva, 45  
total, 91  
absoluta total, 94
- Difeomorfismo, 173, 242
- Direção, principal, 222  
assintótica, 229
- Distância, 199, 7

- Envolvente, 123  
Equação de Frenet, 47  
Esfera, 208, 194, 236  
Evoluta, 76
- Família de curvas, 123  
Fórmula de Euler, 221
- Geodésica, 235
- Hélice, 138, 149, 155  
Helicoide, 171, 233  
Hessiano, 203
- Imersão, 251  
Indicatrix, normal, 88  
                  tangencial, 88
- Involuta, 79  
Isometria, de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , 64  
          local de uma superfície, 188  
          de superfícies, 185
- Linhas, afim, 28  
          normais, 30  
          paralelas, 28  
          tangentes, 30  
          de curvatura, 224  
          assintótica, 229
- Matriz, ortogonal, 44  
          transposta, 68
- Números de rotação, 98

- Orientação, 138
  - de curvas, 42,33
  - de isometrias, 73
  - de superfícies, 249
  - do  $\mathbb{R}^3$ , 64
  
- Paraboloide, 165
  - hiperbólico, 173
- Parametrização, de curvas, 8
  - local, 247
- Plano, 186
  - afim do  $\mathbb{R}^3$ , 176
  - normal, 136, 155
  - osculador, 137, 155
  - projetivo, 251
  - retificante, 155
  - tangente, 167
- Ponto, elíptico, 237
  - hiperbólico, 237
  - parabólico, 237
  - planar, 237
  - umbílico, 237
- Primeira forma fundamental, 184
- Produto, escalar, 5
  - vetorial, 139
- Projeção estereográfica, 176
- Pseudo-esfera, 229
  
- Raio de curvatura, 84
- Referencial de Frenet, 144, 45
- Reparametrização, de curvas, 22
  - de superfícies, 173

- Segunda forma fundamental, 204
- Singularidades, 27
- Superfícies, 243
- de revolução, 191, 226
  - desenvolvíveis, 200, 226
  - isométricas, 185
  - mínima, 232
  - regradas, 171
  - regulares parametrizadas, 164
  - tangencial, 172
- Teorema, fundamental das curvas, 50
- dos quatro vértices, 113
  - da função implícita, 118
  - da função inversa, 119
  - de Jordan, 102
  - de Pappus, 193
  - Hadamard, 252
  - egregium de Gauss, 253
  - Gauss-Bonnet, 255
  - Hopf, 257
  - Bonnet, 257
  - Hilbert, 258
  - Effimov, 258
  - Hartman e Niremberg, 258
- Torção, 142
- fórmula da 147
- Toro, 193
- Traço de uma superfície parametrizada, 164
- Tractrix, 229



Vetores, linearmente independentes, 4  
  combinação linear de, 5  
  norma de, 6  
  ortogonais, 6  
  ortonormais, 6  
  normais, 45  
  normal principal, 137  
  tangente unitário, 137  
  binormal, 141  
  normal, 183  
Vizinhança aberta, 174.

