

David Goldstein Costa
Equações Diferenciais
Hiperbólicas

COPYRIGHT © by DAVID GOLDSTEIN COSTA

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,
por qualquer processo, sem a permissão do autor.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Rua Luiz de Camões, 68
20.000 - Rio de Janeiro - RJ

Aos meus pais
Louis e Jacira.

INTRODUÇÃO

Estas notas foram escritas com o intuito de ser vir como um texto de nível médio para um curso de equações hiperbólicas lineares a ser ministrado no 11º Colóquio Brasileiro de Matemática. Ao mesmo tempo, esperamos que elas possam vir a ser de utilidade num curso regular de pós-graduação em equações diferenciais parciais em que o enfoque principal esteja no problema de Cauchy global.. Destacam-se, então, as equações hiperbólicas, caracterizadas como aquelas para as quais o mencionado problema é sempre bem-posto na classe das funções infinitamente diferenciáveis.

O texto consiste de 5 capítulos e um apêndice (dividido em duas partes), começando com um tratamento clássico, nos dois primeiros capítulos, da conhecida equação da onda, o protótipo das equações diferenciais hiperbólicas. No primeiro capítulo, considerando o problema de Cauchy global (em todo o espaço-tempo) para aquela equação com dados iniciais (no hiperplano $t=0$) que são C^∞ e "bastante regulares no infinito", mostramos que o mesmo admite uma única solução, a qual é C^∞ . O chamado método de energia, que lá desenvolvemos, desempenha um papel importante na unicidade bem como na propriedade de velocidade

finita de propagação (ou teorema do domínio de dependência). A partir daí, podemos remover a restrição no infinito para os dados iniciais e mostrar que o problema de Cauchy para a equação da onda com dados iniciais e segundo membro C^∞ arbitrários possui uma única solução também C^∞ (1). A clássica questão de dependência contínua da solução nos dados torna-se então uma mera consequência do teorema do gráfico fechado: isto é feito no segundo capítulo, onde também deduzimos fórmulas explícitas para as soluções, via a chamada transformada de Radon, fórmulas essas que nos permitam demonstrar uma primeira versão do famoso princípio de Huyghens, válido em dimensão (espacial) ímpar ≥ 3 .

No terceiro capítulo, o tratamento é mais moderno e exige por parte do leitor um certo conhecimento da teoria de espaços de Hilbert. Entre outras coisas, estudamos as soluções fracas da equação da onda, particularmente as chamadas soluções com energia finita e as soluções nos espaços de Sobolev. Ao leitor não familiarizado com um mínimo que seja da teoria das distribuições e espaços de Sobolev, recomendamos uma leitura paralela do apêndice nas

(1) Como veremos no capítulo 5, um tal resultado de existência e unicidade é equivalente à definição (algébrica) usual de hiperbolicidade.

partes em que se fizer necessário. A idéia de incluir um apêndice (dividido nas partes A e B) foi feita exatamente numa tentativa de tornar o texto o mais autosuficiente possível.

No capítulo 4 estudamos os chamados sistemas hiperbólicos simétricos, repetindo essencialmente as mesmas técnicas usadas até então. Como se poderia esperar, os resultados lá obtidos são de natureza análoga àqueles para a equação da onda. A razão para esta "coincidência" fica clara no capítulo 5, quando então consideramos o caso mais geral dos sistemas hiperbólicos.

Finalmente, gostaríamos de dizer que a nossa omissão de algumas partes importantes da teoria das equações hiperbólicas (como aquela referente a operadores com coeficientes variáveis, por exemplo) foi ditada pela nossa preocupação em não estender demasiadamente o presente texto. Ao leitor interessado em aprender mais sobre as equações hiperbólicas recomendamos consultar as referências listadas, especialmente [3], [5], [10], [13], [16], [21] e [26].

Queremos deixar aqui consignados os nossos agradecimentos à Comissão Organizadora pela oportunidade que nos proporcionou de ministrar o presente curso. Os nossos agradecimentos também ao Sr. José Pereira dos Santos pelo empenho e eficiência do seu trabalho datilográfico.

CONTEÚDO

	Pág.
INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - O Problema de Cauchy para a Equação da Onda. O Método da Energia. Domínio de Dependência	1
1.1 - Introdução	1
1.2 - Existência de Solução com Dados Iniciais no Espaço S	4
1.3 - O Método da Energia. Unicidade de Soluções Clássicas	6
1.4 - O Teorema do Domínio de Dependência ...	9
1.5 - O Caso de Dados Iniciais em C^∞	12
Exercícios	14
CAPÍTULO II - Dependência Contínua em Relação aos Dados Iniciais. A Transformada de Radon. Fórmulas Explícitas para as Soluções ..	17
2.1 - Dependência Contínua da Solução nos Dados Iniciais	17
2.2 - O Princípio de Duhamel	20
2.3 - A Transformada de Radon	23
2.4 - O Princípio de Huyghens	30
2.5 - Fórmulas Explícitas (Caso $n \geq 3$ Impar) ..	32
Exercícios	34
CAPÍTULO III - Soluções com Energia Finita da Equação da Onda. Soluções Fracas	37

	Pág.
3.1 - Soluções com Energia Finita	37
3.2 - Soluções em \mathcal{D}'	48
3.3 - Suporte da Função de Riemann	56
3.4 - Soluções Fundamentais	58
3.5 - Soluções em H^S	63
Exercícios	67
CAPÍTULO IV - Sistemas Hiperbólicos Simétricos. O Problema de Cauchy e o Método da Energia. Soluções com Energia Finita. A Função de Riemann e Soluções Fundamentais	71
4.1 - Introdução e Exemplos	71
4.2 - Velocidades Características. Ondas Planas	77
4.3 - Existência de Solução com Dado Inicial no Espaço S^k	79
4.4 - O Método da Energia. Aplicações	81
4.5 - Soluções com Energia Finita	87
4.6 - A Função de Riemann. Soluções em \mathcal{D}' ..	91
Exercícios	103
CAPÍTULO V - Sistemas Hiperbólicos Gerais. Problemas de Cauchy Bem-Postos e Polinômios Hiperbólicos. Existência de Soluções Fundamentais com Suporte num Cone Convexo.	105
5.1 - O Problema de Cauchy para Sistemas	105
5.2 - Polinômios Hiperbólicos. Propriedades..	111
5.3 - Existência de Solução Fundamental com Suporte em $\Gamma(N)$	121
5.4 - O Problema de Cauchy Bem-Posto	128

	Pág.
APÊNDICE A - Distribuições em \mathbb{R}^n	135
A.1 - Distribuições com Suporte Compacto em \mathbb{R}^n	135
A.2 - O Espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	139
A.3 - Distribuições em \mathbb{R}^n	141
A.4 - Distribuições Temperadas em \mathbb{R}^n	145
A.5 - Convolução e Regularização	148
A.6 - Soluções Fundamentais de Operadores Dife renciais	154
APÊNDICE B - Transformada de Fourier. Espaços de Sobolev	158
B.1 - Teoria em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Restrição a $S(\mathbb{R}^n)$...	158
B.2 - Transformada de Fourier de Distribuições Temperadas	164
B.3 - Teoria em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Espaços de Sobolev ..	169
B.4 - Os Teoremas de Paley-Wiener	174
REFERÊNCIAS	176

CAPÍTULO I

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA A EQUAÇÃO DA ONDA.

O MÉTODO DA ENERGIA.

DOMÍNIO DE DEPENDÊNCIA.

1.1 - Introdução

Uma equação diferencial ordinária bem conhecida e estudada nos cursos usuais de graduação é a chamada *equação do oscilador harmônico*

$$(1.1) \quad X_{tt} + \omega^2 X = 0$$

onde $\omega > 0$ é a *frequência* do oscilador. Sua solução $X = X(t)$ com dados iniciais $X(0) = X_0$, $X_t(0) = X_1$ é dada por

$$(1.2) \quad X = X_0 \cos \omega t + X_1 \frac{\text{sen } \omega t}{\omega}.$$

Em particular, destacam-se as soluções

$$(1.3) \quad X^{(0)} = \cos \omega t \quad \text{e} \quad X^{(1)} = \frac{\text{sen } \omega t}{\omega}$$

correspondendo aos dados iniciais $X_0=1$, $X_1=0$ e $X_0=0$, $X_1=1$, respectivamente. Por outro lado, entre as equações diferenciais parciais, existe uma equação também bastante conhecida e destacada na classe das *equações hiperbólicas*, a qual está intimamente ligada à equação (1.1). Trata-se da *equação da onda* (das ondas, das ondas acústicas, de

d'Alembert, etc.)

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

onde $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial^2 / \partial x_j^2$ é o Laplaciano em \mathbb{R}^n e $c > 0$ é uma constante. Quando $n=3$, por exemplo, ela representa o modelo mais simples para o estudo de propagação de ondas acústicas em um meio *homogêneo e isotrópico*, onde c é a velocidade de propagação (1). Este e os dois capítulos seguintes serão dedicados ao estudo do problema de Cauchy para a equação da onda com dados iniciais no hiperplano $\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t=0\}$:

$$(1.5) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

Como veremos na seção 1.5, se u_0 e u_1 são funções em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, o problema (1.4)-(1.5) tem uma única solução $u=u(t, x)$ em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. De fato, este resultado de existência (global) e unicidade continua válido para a equação da onda não-homogênea, com uma função $f=f(t, x)$ no segundo membro de (1.4), desde que f esteja também em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Portanto, em vista do que dissemos há pouco na Introdução, a equação da onda é hiperbólica!

Agora, aplicando formalmente a transformada de Fourier na variável x à equação da onda (1.4), obtemos

(1) Quando $n=1$, obtemos a chamada *equação da corda vibrante*, que governa as vibrações transversais de uma corda.

$$(1.6) \quad \tilde{u}_{tt} + c^2 |p|^2 \tilde{u} = 0.$$

Se considerarmos a variável dual p como um parâmetro, a equação acima é uma equação diferencial ordinária do tipo (1.1) onde $\omega = c|p|$ e $X = \tilde{u}(\cdot, p)$. Os dados iniciais são agora $X_0 = \tilde{u}_0(p)$ e $X_1 = \tilde{u}_1(p)$ de sorte que, em vista de (1.2), obtemos

$$(1.7) \quad \tilde{u}(t, p) = \tilde{u}_0(p) \cos(c|p|t) + \tilde{u}_1(p) \frac{\text{sen}(c|p|t)}{c|p|}.$$

Portanto, tomando a transformada de Fourier inversa (na variável p) da expressão acima, somos naturalmente levados ao seguinte candidato a solução do problema de Cauchy (1.4) - (1.5):

$$(1.8) \quad u(t, x) = F^{-1}[\tilde{u}(t, \cdot)](x) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot p} [\tilde{u}_0(p) \cos(c|p|t) + \\ + \tilde{u}_1(p) \frac{\text{sen}(c|p|t)}{c|p|}] dp.$$

O único problema com o raciocínio acima é que o nosso procedimento for puramente formal. Entretanto, tudo funciona se assumirmos que u_0 e u_1 são "bem comportados", por exemplo, u_0 e u_1 no espaço de Schwartz $S = S(\mathbb{R}^n)$ das funções rapidamente decrescentes no infinito:

$$S = \{h \in C^\infty \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^k |D^\alpha h(x)| < \infty \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}.$$

1.2 - Existência de Solução com Dados Iniciais no Espaço S.

Teorema 1.1. Se $u_0, u_1 \in S(\mathbb{R}^n)$ então $u = u(t, x)$ definido por (1.8) pertence a $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ e é solução da equação da onda (1.4) com dados iniciais $u(0, \cdot) = u_0$, $u_t(0, \cdot) = u_1$.

Demonstração. Observemos inicialmente que as funções

$$(1.9) \quad \tilde{R}_0(t, p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cos(c|p|t), \quad \tilde{R}_1(t, p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\operatorname{sen}(c|p|t)}{c|p|}$$

são infinitamente diferenciáveis. Além disso, temos as seguintes estimativas para as derivadas de \tilde{R}_0 e \tilde{R}_1 em relação a t :

$$|\tilde{R}_1(t, p)| \leq C(1 + |t|)$$

(1.10)

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{k+1} \tilde{R}_1(t, p) \right| = \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \tilde{R}_0(t, p) \right| \leq C_k (1 + |p|)^k,$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Por outro lado, como u_0 e u_1 estão em S segue-se que o mesmo é verdade para as suas transformadas de Fourier \tilde{u}_0 e \tilde{u}_1 (V. apêndice). Em particular, dado um inteiro positivo m qualquer, existe $D_m > 0$ tal que

$$|\tilde{u}_j(p)| \leq \frac{D_m}{(1+|p|)^m}, \quad j=0,1.$$

Portanto, o integrando $e^{ix \cdot p} \tilde{u}(t,p)$ de (1.8) é infinitamente diferenciável e valem as estimativas

$$|(\frac{\partial}{\partial t})^k D_x^\alpha [e^{ix \cdot p} \tilde{u}(t,p)]| \leq C_{k,\alpha,m} (1+|p|)^{|\alpha|+k-m} (1+|t|) \quad (1),$$

quaisquer que sejam $k, m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Como podemos fazer $m \in \mathbb{Z}_+$ acima arbitrariamente grande e $\int (1+|p|)^{-\ell} dp < \infty$ se $\ell > n$, estas estimativas nos mostram que $u(t,x)$ dado em (1.8) está bem definido e é, de fato, uma função infinitamente diferenciável. (Podemos derivar sob o sinal de integração em (1.8)!). Em particular, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot p} [\tilde{u}_{tt} + c^2 |p|^2 \tilde{u}] dp = 0.$$

As condições iniciais são também facilmente verificadas.

Q.E.D.

O teorema que acabamos de demonstrar nada diz sobre unicidade da solução do problema de Cauchy (1.4)-(1.5). Apenas exhibe uma solução da maneira mais natural possível. Um dos modos de se mostrar unicidade é através do chamado *método da energia*, um método muito comum no estudo das equações hiperbólicas e que consideramos a seguir para o

(1) O fator $(1+|t|)$ pode ser omitido se $k > 0$.

nosso caso especial da equação da onda.

1.3 - O Método da Energia. Unicidade de Soluções Clássicas.

Seja $u(t,x)$ uma solução (basta ser de classe C^2) da equação da onda. Multiplicando esta última por \bar{u}_t obtemos a identidade

$$(u_{tt} - c^2 \Delta u) \bar{u}_t = 0.$$

Observando que $\operatorname{Re} u_{tt} \bar{u}_t = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |u_t|^2$ e $\operatorname{Re} \bar{u}_t \Delta u = \operatorname{Re} \operatorname{div}_x (\bar{u}_t \nabla u) - \operatorname{Re} (\nabla \bar{u}_t \cdot \nabla u) = \operatorname{Re} \operatorname{div}_x (\bar{u}_t \nabla u) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2$ (1), a identidade acima pode ser escrita na seguinte forma de divergência (nas variáveis t,x)

$$(1.11) \quad \operatorname{div}_{(t,x)} (E, F) = 0,$$

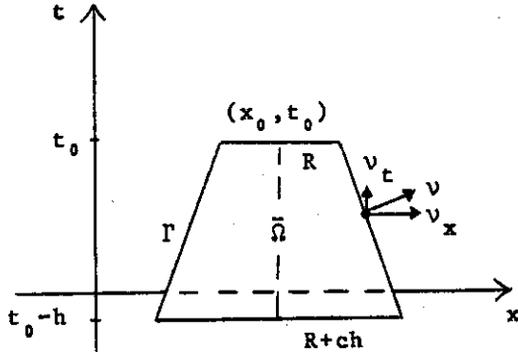
onde

$$E = \frac{1}{2} (|u_t|^2 + c^2 |\nabla u|^2) \quad \text{e} \quad F = -\operatorname{Re}(c^2 \bar{u}_t \nabla u).$$

A idéia que surge imediatamente é a de integrar a identidade (1.11) sobre uma região Ω no espaço tempo (i.e., no espaço \mathbb{R}^{n+1} das variáveis t,x) com fronteira $\partial\Omega$, para a qual possamos aplicar o teorema da divergência. Para os nossos propósitos aqui, escolhemos o tronco de cone $\bar{\Omega} =$

(1) Estamos usando as notações $u_t = \partial u / \partial t$, $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n)$, $|\nabla u|^2 = \sum_{j=1}^n |\partial u / \partial x_j|^2$.

$\{(t, x) \mid |x-x_0| \leq R+c(t_0-t), t_0-h \leq t \leq t_0\}$, onde $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $h, R > 0$ são fixos.



Então, obtemos

$$(1.12) \quad \int_{\partial\Omega} (E v_t + F \cdot v_x) dS = 0,$$

onde $v = (v_t, v_x)$ designa a normal exterior (unitária) a $\partial\Omega^{(1)}$. Como $v = (1, 0)$ e $v = (-1, 0)$ na "parte superior" e "inferior" de $\partial\Omega$, respectivamente, (1.12) fornece

$$(1.13) \quad \int_{B(x_0, R)} \frac{1}{2} (|u_t(t_0, x)|^2 + c^2 |\nabla u(t_0, x)|^2) dx - \int_{B(x_0, R+ch)} \frac{1}{2} (|u_t(t_0-h, x)|^2 + c^2 |\nabla u(t_0-h, x)|^2) dx$$

(1) Observe que v só não está definida nos pontos de $\partial\Omega$ da forma (t_0, x) com $|x-x_0|=R$ e (t_0-h, x) com $|x-x_0|=R+ch$.

$$= - \int_{\Gamma} (E v_t + F \cdot v_x) dS,$$

onde Γ é a "parte lateral" de $\partial\Omega$. Agora, observando que $v_t = c|v_x|$ em Γ e lembrando as definições de E e F , é fácil ver que $E v_t + F \cdot v_x \geq 0$ em Γ . Portanto, o primeiro membro de (1.13) é ≤ 0 .

Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável, a quantidade

$$E_M[u; t] = \frac{1}{2} \int_M (|u_t(t, x)|^2 + c^2 |\nabla u(t, x)|^2) dx$$

(que pode ser infinita) é chamada de *energia de u contida em M no tempo t*. Assim, acabamos de mostrar:

Teorema 1.2 Sejam $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $h, R > 0$ dados. Se $u = u(t, x)$ é uma solução de classe C^2 da equação da onda (1.4), então a energia de u contida na bola $B(x_0, R)$ no tempo t_0 é menor ou igual à energia de u contida na bola $B(x_0, R+ch)$ no tempo t_0-h , i.e.

$$(1.14) \quad E_{B(x_0, R)}[u; t_0] \leq E_{B(x_0, R+ch)}[u; t_0-h].$$

Observação 1.1 De uma maneira análoga, considerando o tronco de cone $\{(t, x) \mid |x-x_0| \leq R+c(t-t_0), t_0-h \leq t \leq t_0\}$ com $R-ch > 0, h > 0$, podemos mostrar que

$$(1.15) \quad E_{B(x_0, R-ch)} [u; t_0 - h] \leq E_{B(x_0, R)} [u; t_0].$$

Em particular, (1.14) e (1.15) fornecem

$$(1.16) \quad E_{B(0, R)} [u; t] \leq E_{B(0, R+c|t|)} [u; 0],$$

onde $R > 0$ e $t \in \mathbb{R}$ são arbitrários.

Corolário 1.1 Se $u = u(t, x)$ é uma solução (de classe C^2) da equação da onda com dados iniciais $u_0 \equiv 0$, $u_1 \equiv 0$, então $u \equiv 0$.

Demonstração. Em vista de (1.16), $E_{B(0, R)} [u; t] = 0$ para $R > 0$ e $t \in \mathbb{R}$ arbitrários. Logo, $u_t = u_{x_j} \equiv 0$ ($1 \leq j \leq n$). Mas, então, u é uma constante, a qual deve ser zero em virtude dos dados iniciais o serem.

Q.E.D.

1.4 - O Teorema do Domínio de Dependência.

Teorema 1.3 Para cada $T > 0$, o valor de $u(T, x)$ ⁽¹⁾ num ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ só depende dos valores dos dados iniciais $u_0(x) = u(0, x)$ e $u_1(x) = u_t(0, x)$ na bola $\overline{B(x_0, cT)}$. Mais geralmente, os valores de $u(T, x)$ num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ dependem

(1) Novamente, estamos assumindo que $u(t, x)$ é uma solução de classe C^2 da equação da onda.

apenas dos valores de u_0 e u_1 em $U + \overline{B(0, cT)}$. (Um resultado análogo é válido para $T < 0$. Enuncie-o!).

Demonstração. Basta mostrarmos que se $u_0(x) = u_1(x) = 0$ para $|x - x_0| \leq cT$, então $u(T, x_0) = 0$. Com efeito, de (1.14) obtemos

$$E_{B(x_0, cT-ct)}[u; t] \leq E_{B(x_0, cT)}[u; 0] = 0$$

para todo $0 < t < T$, de sorte que $u_t = u_{x_j} = 0$ ($i \leq j \leq n$) no cone $\bar{\Omega} = \{(t, x) \mid |x - x_0| \leq c(T-t), 0 \leq t \leq T\}$. Portanto, $u \equiv$ constante em Ω de onde se conclui que $u \equiv 0$ em $\bar{\Omega}$, em face da continuidade de u e dos dados iniciais serem zero na "base" de $\bar{\Omega}$. Em particular, $u(T, x_0) = 0$. Finalmente, a segunda parte do teorema segue do fato que $U + \overline{B(0, cT)} = \bigcup_{x \in U} \overline{B(x, cT)}$.

Observação 1.2 O resultado acima é comumente conhecido como o *teorema do domínio de dependência*. Em palavras correntes, "o que acontece em U no tempo $T > 0$ é independente do que aconteceu fora de $U + \overline{B(0, cT)}$ no tempo $t = 0$ ". É claro que podemos inverter esta maneira de interpretar o teorema 1.3 e perguntar sobre os possíveis pontos x do espaço que serão influenciados no tempo $T > 0$ por algo que aconteceu num conjunto M no tempo $t = 0$. Neste sentido, temos o seguinte resultado que nos diz que "sinais originados no

tempo $t=0$ se propagam com velocidade $\leq c$ ":

Corolário 1.2 Seja $u(t,x)$ uma solução de classe C^2 da equação da onda. Se $M = \text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1$ (onde u_0 e u_1 são os dados iniciais de u) então, para cada $T>0$,

$$(1.17) \quad \text{supp } u(T, \cdot) \subset M + \overline{B(0, cT)}.$$

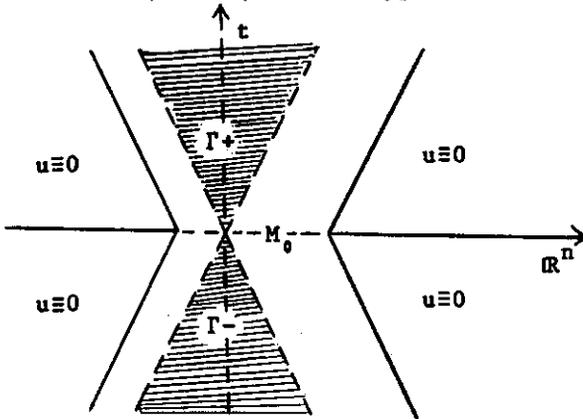
Demonstração. Queremos mostrar que $u(T,x)=0$ para x no complemento Ω_T de $M + \overline{B(0, cT)}$. Isto segue do teorema anterior uma vez que $\Omega_T + \overline{B(0, cT)} \subset M^c$ e $u_0 = u_1 = 0$ em M^c .

Observação 1.3 Novamente, um resultado análogo é válido para $T<0$ (com $\overline{B(0, cT)}$ substituído por $\overline{B(0, c|T|)}$ em (1.17)), de sorte que temos

$$(1.18) \quad \text{supp } u(t, \cdot) \subset M + \overline{B(0, c|t|)}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, o suporte de u em \mathbb{R}^{n+1} (i.e., como função de t e x) está contido em $M_0 + \Gamma$, onde $M_0 = \{(0, x) \mid x \in M\}$ e $\Gamma = \{(t, x) \mid |x| \leq c|t|\}$. Γ é comumente chamado de *cone de luz*. Voltaremos a este ponto novamente na seção 3.4, quando relacionaremos Γ , $\Gamma_+ = \Gamma \cap \{(t, x) \mid t \geq 0\}$ e $\Gamma_- = \Gamma \cap \{(t, x) \mid t \leq 0\}$ com certas soluções (fracas) especiais da equação da onda. Na seção 3.3 veremos também que, no caso de n ser ímpar ≥ 3 , o resultado acima pode ser

melhorado para $\text{supp } u \subset M_0 + \partial\Gamma$, onde $\partial\Gamma$ é a fronteira de Γ : este é o célebre princípio de Huyghens.



1.5 - O Caso de Dados Iniciais em C^∞ .

Em virtude do teorema 1.1 e do corolário 1.1, já sabemos que o problema de Cauchy para a equação da onda com dados iniciais no espaço $S(\mathbb{R}^n)$ tem uma única solução em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, a qual é dada por (1.8). De fato, o teorema 1.3 (ou, o corolário 1.2) nos permite remover a restrição no infinito para os dados iniciais de sorte que estes últimos possam ser funções arbitrárias em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Com efeito, seja $\{U_k | k=1,2,\dots\}$ um recobrimento aberto, localmente finito, de \mathbb{R}^n (i.e., os U_k 's são abertos cuja união é \mathbb{R}^n e tais que todo conjunto compacto intersesta apenas um número finito d'êles). Assumindo ainda que cada \bar{U}_k é compacto, vamos considerar uma partição da

unidade $\{\phi_k\}$ subordinada a $\{U_k\}$ (i.e., $\phi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\phi_k \geq 0$, $\text{supp } \phi_k \subset U_k$ e $\sum_{k=1}^\infty \phi_k(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$) (1). Agora, dados u_0 e u_1 em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, seja $u^{(k)}(t, x)$ a única solução da equação da onda com dados iniciais $u^{(k)}(0, x) = u_0(x) \phi_k(x)$, $u_t^{(k)}(0, x) = u_1(x) \phi_k(x)$. (Observe que, para cada k , $u_0 \phi_k$ e $u_1 \phi_k$ têm suporte compacto e $u_0 = \sum_{k=1}^\infty u_0 \phi_k$, $u_1 = \sum_{k=1}^\infty u_1 \phi_k$). Então, usando o teorema 1.3, não é difícil mostrar (Exercício 1.7) que

$$(1.19) \quad u(t, x) = \sum_{k=1}^\infty u^{(k)}(t, x)$$

está bem definida. Além disso, vê-se também que u está em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ e é solução da equação da onda com dados iniciais $u(0, x) = u_0(x)$, $u_t(0, x) = u_1(x)$. Finalmente, sabemos que u é única em vista do corolário 1.1. Acabamos de provar o

Teorema 1.4. O problema de Cauchy para a equação da onda com dados iniciais em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ possui uma única solução em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Observação 1.4. Usando a identificação $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \simeq C^\infty(\mathbb{R}, C^\infty(\mathbb{R}^n))$ (onde $u = u(t, x) \longleftrightarrow (t \longmapsto u(t, \cdot))$), o teorema acima diz que se os dados iniciais estão em $X = C^\infty(\mathbb{R}^n)$, então temos uma única solução em $C^\infty(\mathbb{R}, X)$. De fato, mostraremos no capítulo 3 que este resultado continua válido se considerarmos

(1) V. [29], por exemplo.

dados iniciais os mais gerais possíveis, p.e., no espaço $X = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ das distribuições em \mathbb{R}^n .

Exercícios

1.1 Mostre que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{R}_0(t, p)$ e $\tilde{R}_1(t, p)$ definidas em (1.9) são funções analíticas de p .

1.2 Assuma $n=1$. Para cada $t \neq 0$, calcule as transformadas de Fourier inversas $R_0(t, \cdot)$ e $R_1(t, \cdot)$ das funções $\tilde{R}_0(t, p)$ e $\tilde{R}_1(t, p)$ definidas em (1.9) ($R_1(t, \cdot)$ é uma função enquanto que $R_0(t, \cdot)$ é uma distribuição). Mostre que, dados $u_0, u_1 \in C^\infty$, a fórmula (fórmula de d'Alembert)

$$u(t, \cdot) = R_0(t, \cdot) * u_0 + R_1(t, \cdot) * u_1$$

fornece a solução da equação da onda com dados iniciais $u(0, x) = u_0(x)$, $u_t(0, x) = u_1(x)$.

1.3 Seja $u = u(t, x)$ a solução da equação da onda com dados iniciais $u_0(x) = u(0, x)$ e $u_1(x) = u_t(0, x)$ em $S(\mathbb{R}^n)$. Mostre que $u(t, \cdot) \in S(\mathbb{R}^n)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

1.4 Demonstre a desigualdade de energia (1.15) e conclua que (1.16) é válido para $t < 0$.

1.5 Seja $u = u(t, x)$ a solução da equação da onda com da

dos iniciais $u_0(x)=u(0,x)$ e $u_1(x)=u_t(0,x)$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Mostre que se

$$E = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|u_1(x)|^2 + c^2 |\nabla u_0(x)|^2) dx$$

é finito então, para cada t , $u(t, \cdot)$ tem energia finita (em todo o \mathbb{R}^n) e igual a E , i.e.,

$$E_{\mathbb{R}^n}[u;t] = E \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

1.6 Seja $u=u(t,x)$ a solução da equação da onda com da dos iniciais $u_0, u_1 \in S(\mathbb{R}^n)$. Em vista do exercício anterior, temos que

$$E[u;t] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|u_t(t,x)|^2 + c^2 |\nabla u(t,x)|^2) dx = E[u;0]$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Costuma-se chamar de energia cinética e energia potencial (de u no tempo t) às parcelas

$$K[u;t] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t(t,x)|^2 dx$$

e

$$P[u;t] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} c^2 |\nabla u(t,x)|^2 dx,$$

respectivamente. Assumindo $n=1$, mostre que temos o seguinte "equipartição assintótica de energia":

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} K[u;t] = \lim_{|t| \rightarrow \infty} P[u;t] = \frac{1}{2} E[u;0].$$

(De fato, pode-se mostrar que este resultado é v \tilde{a} lido tamb \tilde{e} m para $n \geq 2$).

- 1.7 Mostre que (1.19) est \tilde{a} bem definida e \tilde{e} solu \tilde{c} o infinitamente diferenci \tilde{a} vel da equa \tilde{c} o da onda com dados iniciais u_0 e u_1 .

CAPÍTULO II

DEPENDÊNCIA CONTÍNUA EM RELAÇÃO AOS DADOS INICIAIS.

A TRANSFORMADA DE RADON.

FÓRMULAS EXPLÍCITAS PARA AS SOLUÇÕES.

2.1 - Dependência Contínua da Solução nos Dados Iniciais.

Na seção anterior, mostramos que o problema de Cauchy

$$(2.1) \quad u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^{n+1}$$

$$(2.2) \quad u(0, \cdot) = u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad u_t(0, \cdot) = u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

tem uma única solução em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Nada mais natural do que perguntar se u depende continuamente de u_0 e u_1 , i.e., se a aplicação linear

$$(2.3) \quad \phi: (u_0, u_1) \longmapsto u$$

de $C^\infty(\mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ é contínua. A resposta, como veremos logo mais, é sim!

É claro que estamos considerando o espaço vetorial $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ munido de sua topologia usual, a qual é gerada, por exemplo, pelas seminormas

$$v_{K,j}(\phi) = \sup_{x \in K, |\alpha| \leq j} |D^\alpha \phi(x)|,$$

onde $K \subset \mathbb{R}^N$ é um compacto arbitrário e j um inteiro não negativo qualquer. Assim, $\phi^{(k)} \rightarrow \phi$ em $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ se, e somente se, para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ e multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, $D^\alpha \phi^{(k)} \rightarrow D^\alpha \phi$ uniformemente em K . Também vale observar que $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Fréchet (i.e., metrizável e completo) com uma métrica d invariante por translação: $d(\phi+\theta, \psi+\theta) = d(\phi, \psi) \quad \forall \phi, \psi, \theta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (1). Um tal espaço é algumas vezes chamado de um F-espaço ([19], pg. 8). Finalmente, vale salientar também o seguinte resultado, conhecido como *teorema do gráfico fechado* (ou melhor, uma de suas versões):

Teorema 2.1. Seja $\Phi: X \rightarrow Y$ uma aplicação linear, onde X e Y são F-espaços. Se Φ é fechada (i.e., gráfico $(\Phi) \subset X \times Y$ é fechado) então Φ é contínua.

Demonstração. Veja [19] e [29], por exemplo.

Agora, de volta à nossa aplicação (2.3), se $u^{(k)} = \Phi(u_0^{(k)}, u_1^{(k)})$, i.e., $u^{(k)}$ é a solução da equação da onda (2.1) com os dados iniciais $u^{(k)}(0, \cdot) = u_0^{(k)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u_t^{(k)}(0, \cdot) = u_1^{(k)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, e se $u_0^{(k)} \rightarrow v_0$, $u_1^{(k)} \rightarrow v_1$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ en-

(1) Podemos tomar, por exemplo, $d(\phi, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{v_{K_j, j}(\phi - \psi)}{1 + v_{K_j, j}(\phi - \psi)}$

onde $K_j = \overline{B(0, j)}$.

quanto que $u^{(k)} \rightarrow v$ em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ então $v = \Phi(v_0, v_1)$, i.é., v é a solução de (2.1) com os dados iniciais $v(0, \cdot) = v_0$, $v_t(0, \cdot) = v_1$. Com efeito, $u^{(k)}(0, x) \rightarrow v(0, x)$, $u_0^{(k)}(x) \rightarrow v_0(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, de sorte que $v(0, \cdot) = v_0$. Por outro lado, em vista do lema abaixo, $0 = u_{tt}^{(k)} - \Delta_x u^{(k)} \rightarrow v_{tt} - \Delta_x v$ e, portanto, v é solução de (2.1). A outra condição inicial $v_t(0, \cdot) = v_1$ é também facilmente verificada.

Lema 2.1 Um operador diferencial $P(D): C^\infty(\mathbb{R}^N) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^N)$ é contínuo.

Demonstração. Fica como um exercício (fácil) para o leitor.

Mostramos acima que o gráfico de $\Phi: (u_0, u_1) \mapsto u$ é fechado. Portanto, pelo teorema 2.1, Φ é contínua e podemos enunciar o

Teorema 2.2 Soluções em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ da equação da onda dependem continuamente dos dados iniciais.

Observação 2.1. Observe que na demonstração que demos acima, o fato de estarmos lidando com a equação da onda foi totalmente irrelevante. O importante foi o fato do problema de Cauchy (2.1)-(2.2) ter solução única em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, de maneira a podermos definir a aplicação $\Phi: (u_0, u_1) \mapsto u$.

O teorema do gráfico fechado fez o resto! Assim, se $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ (com $D = (\partial/\partial x_0, \partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, $a_{(m,0,\dots,0)} \neq 0$) é um operador diferencial (com coeficientes constantes) de ordem m em \mathbb{R}^{n+1} tal que, quaisquer que sejam as funções $u_0, u_1, \dots, u_{m-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, o problema de Cauchy

$$(2.4) \quad Pu = f \quad \text{em } \mathbb{R}^{n+1}$$

$$(2.5) \quad \frac{\partial^j u}{\partial x^j} = u_j \quad \text{para } x_0 = 0 \quad (j=0, \dots, m-1)$$

tem uma única solução $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, então a aplicação linear $\Phi: (u_0, u_1, \dots, u_{m-1}, f) \mapsto u$ de $[C^\infty(\mathbb{R}^n)]^m \times C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ é contínua. A não-homogeneidade de (2.4) não constitui nenhum problema adicional e a demonstração de que Φ acima é contínua é feita exatamente como antes. Concluindo: "Se temos um teorema de existência e unicidade em C^∞ para o problema de Cauchy (2.4)-(2.5), então a dependência contínua da solução u nos dados u_0, \dots, u_{m-1}, f decorre automaticamente como um bonus extra".

2.2 - O Princípio de Duhamel

Até agora, temos considerado sempre a equação da onda homogênea. Nesta seção, veremos um análogo do método de variação dos parâmetros (em equações diferenciais ordi

nárias), comumente chamado de *princípio de Duhamel*, o qual permite reduzir o problema de Cauchy para a equação da onda não-homogênea

$$(2.6) \quad v_{tt} - \Delta_x v = f$$

a um problema de Cauchy do tipo (2.1)-(2.2). Trata-se do

Teorema 2.3 Dado $f=f(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, seja $u^{(\tau)}$ a solução de (2.1)-(2.2) com $u_0=0$, $u_1=f(\tau, \cdot)$. Então,

$$(2.7) \quad v(t,x) = \int_0^t u^{(\tau)}(t-\tau, x) d\tau$$

é a única solução em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ de (2.6) com dados iniciais nulos.

Demonstração. Uma vez que $f(\tau, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ depende continuamente de $\tau \in \mathbb{R}$ (1), o mesmo é verdade para $u^{(\tau)} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$; em particular, a integral que define $v(t,x)$ faz sentido. Além disso, também está claro que $v \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ e, lembrando que $u^{(t)}(0,x)=0$, $u_t^{(t)}(0,x)=f(t,x)$, temos:

$$(2.8) \quad v_t(t,x) = \int_0^t u_t^{(\tau)}(t-\tau, x) d\tau$$

$$v_{tt}(t,x) = \int_0^t u_{tt}^{(\tau)}(t-\tau, x) d\tau + f(t,x) = \Delta_x v(t,x) + f(t,x).$$

(1) De fato, $\mathbb{R} \ni \tau \mapsto f(\tau, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é de classe C^∞ pois $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Logo, v satisfaz (2.6). E, de (2.7) e (2.8) vem $v(0, \cdot) = v_t(0, \cdot) = 0$. Finalmente, a unicidade de v também é evidente. Q.E.D.

Observação 2.2 Mais geralmente, se o problema (2.4)-(2.5) homogêneo (com $f=0$) tem uma única solução em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ para cada $u_0, \dots, u_{m-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, então o problema (2.4)-(2.5) com $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $u_0 = \dots = u_{m-1} = 0$, tem também uma única solução em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, a qual é dada por (2.7), onde agora $u^{(\tau)}$ representa a única solução da equação homogênea $Pu=0$ com dados iniciais $u_0 = \dots = u_{m-2} = 0$, $u_{m-1} = f(\tau, \cdot)$. A demonstração é novamente tão imediata quanto aquela para a equação da onda, e deixamos como exercício para o leitor (Exercício 2.1).

Na seção 1.1, considerando o problema de Cauchy para a equação da onda com dados iniciais em S , obtivemos uma fórmula para a solução em termos das transformadas de Fourier dos dados iniciais (V. (1.8)). Uma das maneiras de obtermos uma fórmula explícita, em termos dos próprios dados iniciais, envolveria calcular as transformadas inversas das funções $\hat{R}_0(t, p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cos(c|p|t)$ e $\hat{R}_1(t, p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\text{sen}(c|p|t)}{c|p|}$, de sorte a podermos escrever

$$u(t, \cdot) = R_0(t, \cdot) * u_0 + R_1(t, \cdot) * u_1.$$

Como, em geral, R_0 e R_1 vão ser distribuições, preferimos (por enquanto) usar um outro método, o método de decomposição em ondas planas (V. [3], [11]), que também nos fornecerá uma tal representação explícita. Este método é baseado na chamada Transformada de Radon (V. [9], [12], [14]) que estudaremos a seguir.

2.3 - A Transformada de Radon.

Se $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$, a transformada de Radon de f é a função $\hat{f} = Rf$ definida em $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ através da fórmula

$$(2.9) \quad \hat{f}(s, \omega) = \int_{x \cdot \omega = s} f(x) dS_x, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \omega \in S^{n-1},$$

onde dS_x é o elemento de área do hiperplano $H(s, \omega) = \{x \mid x \cdot \omega = s\}$. Em outras palavras, $\hat{f}(s, \omega)$ é a integral de f sobre o hiperplano que passa pelo ponto $s\omega$ e é perpendicular a ω . Observando que os hiperplanos $H(-s, -\omega)$ e $H(s, \omega)$ coincidem e que, para um inteiro não negativo k , podemos escrever $\int_{\mathbb{R}^n} (x \cdot \omega)^k f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} s^k \left(\int_{H(s, \omega)} f(x) dS_x \right) ds$, obtemos imediatamente que a transformada de Radon $\phi(s, \omega) = \hat{f}(s, \omega)$ de uma função $f \in S$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$(2.10) \quad \phi(s, \omega) \text{ é uma função par}$$

(2.11) $\int_{-\infty}^{\infty} s^k \phi(s, \omega) ds$ pode ser escrito como um polinômio em ω de grau k , para cada $k=0, 1, \dots$.

De fato, pode-se mostrar (v. [9], [14]) que $R(S(\mathbb{R}^n))$ é o subespaço de $S(\mathbb{R} \times S^{n-1})$ consistindo precisamente daquelas funções $\phi \in S(\mathbb{R} \times S^{n-1})$ que satisfazem (2.10) e (2.11) acima. O lema a seguir nos diz que, sob a transformada de Radon, funções com suporte compacto são levadas em funções com suporte compacto e, a operação de diferenciação em relação a x_j corresponde a diferenciação em relação a s seguida de multiplicação por ω_j .

Lema 2.2 (i) $\text{supp } \hat{f} \subset [-R, R] \times S^{n-1}$ se $\text{supp } f \subset \overline{B(0, R)}$

$$(ii) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^{\sim}(s, \omega) = \omega_j \frac{\partial \hat{f}}{\partial s}(s, \omega).$$

Demonstração. (i) é imediato uma vez que, se $\text{supp } f \subset \overline{B(0, R)}$, o hiperplano $H(s, \omega)$ não intersecta $\text{supp } f$ para $|s| > R$. Quanto a (ii), observamos apenas que, dados $\omega \in S^{n-1}$ e $j=1, \dots, n$, podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial e_j} = (e_j \cdot \omega) \frac{\partial}{\partial \omega} + (e_j \cdot \theta) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

para algum $\theta \in S^{n-1}$ ortogonal a ω (estamos denotando diferenciação na direção de um vetor unitário σ por $\partial/\partial \sigma$:

$\frac{\partial f}{\partial \sigma}(x) = \nabla f(x) \cdot \sigma$. Deixamos o resto da demonstração a cargo do leitor (Exercício 2.2).

Q.E.D.

Observação 2.3. Segue-se de (ii) que, sob a transformada de Radon, o Laplaciano Δ é mandado no operador $\frac{\partial^2}{\partial s^2}$, i.e.,

$$(\Delta f)^\sim(s, \omega) = \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial s^2}(s, \omega).$$

Ainda assumindo $f \in S$, vejamos a relação entre a transformada de Fourier $\hat{f} = Ff$ e $\tilde{f} = Rf$. Temos:

$$\tilde{f}(p) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip \cdot x} f(x) dx, \quad p \in \mathbb{R}^n,$$

de sorte que, usando coordenadas polares $p = \rho\omega$ e escrevendo a integral $\int_{\mathbb{R}^n}$ como uma integral iterada $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{H(s, \omega)}$, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\rho\omega) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho s} \int_{H(s, \omega)} f(x) dS_x ds \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho s} \hat{f}(s, \omega) ds. \end{aligned}$$

Portanto, F é "fatorada" por R no sentido de que

$$(2.12) \quad Ff(\rho\omega) = c_n F_1[(Rf)(\cdot, \omega)](\rho),$$

onde $c_n = (2\pi)^{(1-n)/2}$ e F_1 denota transformada de Fourier na variável s .

Finalmente, vamos agora obter uma fórmula de inversão para a transformada de Radon. Dado $f \in \mathcal{S}$, podemos escrever

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot p} \check{f}(p) dp.$$

Usando coordenadas polares $p = \rho\omega$ na integral acima, temos

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{|\omega|=1} \int_0^\infty e^{i\rho x \cdot \omega} \check{f}(\rho\omega) \rho^{n-1} d\rho d\omega,$$

i.e.,

$$(2.13) \quad f(x) = \int_{|\omega|=1} g(x \cdot \omega, \omega) d\omega,$$

onde

$$g(s, \omega) = (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty e^{is\rho} \rho^{n-1} \check{f}(\rho\omega) d\rho.$$

Como a integral em (2.13) não se altera pela mudança de variável $\omega \mapsto -\omega$, podemos substituir $g(s, \omega)$ por sua parte par $h(s, \omega) = \frac{1}{2} [g(s, \omega) + g(-s, -\omega)]$, obtendo

$$f(x) = \int_{|\omega|=1} h(x \cdot \omega, \omega) d\omega,$$

onde

$$\begin{aligned} h(s, \omega) &= 2^{-1} (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^\infty e^{is\rho} |\rho|^{n-1} \check{f}(\rho\omega) d\rho \\ &= a_n F_1^{-1} [|\cdot|^{n-1} \check{f}(\cdot \omega)](s), \end{aligned}$$

$a_n = 2^{-1} (2\pi)^{(1-n)/2}$. Logo, usando (2.12), podemos melhor identificar a função h como

$$h = K\hat{f},$$

onde K é o operador que, sob a transformada de Fourier F_1 , corresponde a multiplicação pela função $b_n |\rho|^{n-1}$, $b_n = 2^{-1} (2\pi)^{1-n}$, i.e.,

$$K = b_n F_1^{-1} |\cdot|^{n-1} F_1$$

Concluindo: Se $f \in S$, vale a fórmula de inversão

$$f(x) = \int_{|\omega|=1} (K\hat{f})(x \cdot \omega, \omega) d\omega.$$

Alguns comentários sobre a paridade da dimensão n devem ser feitos: se n é ímpar temos $|\rho|^{n-1} = \rho^{n-1}$ e, como $\partial/\partial s$ corresponde (sob a transformada de Fourier F_1) a multiplicação pela função $i\rho$, concluímos que K é o operador diferencial $i^{n-1} b_n (\partial/\partial s)^{n-1}$; por outro lado, se n é par temos $|\rho|^{n-1} = (\text{sgn } \rho) \rho^{n-1}$ e concluímos que K é o operador diferencial $i^{n-1} b_n (\partial/\partial s)^{n-1}$ seguido da transformada de Hilbert $H = F_1^{-1} \text{sgn}(\cdot) F_1$. Portanto, podemos enunciar o

Teorema 2.4 Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$.

(i) Se n é ímpar,

$$f(x) = \alpha_n \int_{|\omega|=1} \frac{\partial^{n-1} \hat{f}}{\partial s^{n-1}}(x \cdot \omega, \omega) d\omega, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Se n é par,

$$f(x) = \beta_n \int_{|\omega|=1} H\left(\frac{\partial^{n-1} \hat{f}}{\partial s^{n-1}}\right)(x \cdot \omega, \omega) d\omega, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$(\alpha_n = 2^{-1}(2\pi i)^{1-n}, \beta_n = i\alpha_n).$$

Seja, agora, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ a solução da equação da onda (2.1) com dados iniciais $u(0, \cdot) = u_0$, $u_t(0, \cdot) = u_1$ em $S(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Como sabemos (V. Exercício (1.3)), para cada $t \in \mathbb{R}$, $u(t, \cdot)$ também pertence a $S(\mathbb{R}^n)$. Logo, podemos definir a sua transformada de Radon

$$\hat{u}(t, s, \omega) = \int_{x \cdot \omega = s} u(t, x) dS_x$$

e, uma vez que as derivadas $(\partial/\partial t)^j u(t, \cdot)$ novamente pertencem a $S(\mathbb{R}^n)$ (Por que?), podemos derivar em relação a t sob o sinal de integração acima, obtendo $(\partial/\partial t)^j \hat{u}(t, s, \omega) = (\partial^j u / \partial t^j)^\wedge(t, s, \omega)$, $j=0, 1, \dots$. Em particular, temos $(u_{tt})^\wedge = \hat{u}_{tt}$. Por outro lado, em vista da Observação 2.3, temos também $(\Delta_x u)^\wedge = \hat{u}_{ss}$. Portanto, para cada $\omega \in S^{n-1}$ fixado, $\hat{u}(t, s, \omega)$ é solução da equação da onda numa variável espacial s (1):

$$\hat{u}_{tt} - c^2 \hat{u}_{ss} = 0.$$

Os dados iniciais passam a ser agora $\hat{u}(0, s, \omega) = \hat{u}_0(s, \omega)$, $\hat{u}_t(0, s, \omega) = \hat{u}_1(s, \omega)$, de sorte que a fórmula de d'Alembert (V. Exercício 1.2) nos fornece

$$\hat{u}(t, s, \omega) = \frac{1}{2} [\hat{u}_0(s+ct, \omega) + \hat{u}_0(s-ct, \omega)] + \frac{1}{2c} \int_{s-ct}^{s+ct} \hat{u}_1(\tau, \omega) d\tau$$

(1) Consideraremos $\omega \in S^{n-1}$ como um parâmetro.

Portanto, usando a fórmula de inversão (Teorema 2.4), obtemos

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \alpha_n \int_{|\omega|=1} \left(\frac{\partial^{n-1} \hat{u}_0}{\partial s^{n-1}}(x \cdot \omega + ct, \omega) + \frac{\partial^{n-1} \hat{u}_0}{\partial s^{n-1}}(x \cdot \omega - ct, \omega) \right) d\omega + \frac{1}{2c} \alpha_n \int_{|\omega|=1} \left(\frac{\partial^{n-2} \hat{u}_1}{\partial s^{n-2}}(x \cdot \omega + ct, \omega) - \frac{\partial^{n-2} \hat{u}_1}{\partial s^{n-2}}(x \cdot \omega - ct, \omega) \right) d\omega$$

no caso de n ser ímpar, com uma fórmula análoga (envolvendo a transformada de Hilbert H) sendo válida no caso de n ser par. Observe que, como \hat{u}_0 e \hat{u}_1 são funções pares ((2.10)), as funções $\partial^{n-1} \hat{u}_0 / \partial s^{n-1}$ e $\partial^{n-2} \hat{u}_1 / \partial s^{n-2}$ nas integrais acima são par e ímpar, respectivamente. Logo, fazendo a mudança de variável $\omega \mapsto -\omega$ nos primeiro e terceiro termos dessas integrais, obtemos a representação

$$(2.14) \quad u(t, x) = \alpha_n \int_{|\omega|=1} \left(\frac{\partial^{n-1} \hat{u}_0}{\partial s^{n-1}}(x \cdot \omega - ct, \omega) - \frac{1}{c} \frac{\partial^{n-2} \hat{u}_1}{\partial s^{n-2}}(x \cdot \omega - ct, \omega) \right) d\omega,$$

i.e.,

$$(2.15) \quad u(t, x) = \alpha_n \int_{|\omega|=1} \phi(x \cdot \omega - ct, \omega) d\omega,$$

$$\text{onde } \phi = \frac{\partial^{n-1} \hat{u}_0}{\partial s^{n-1}} - \frac{1}{c} \frac{\partial^{n-2} \hat{u}_1}{\partial s^{n-2}}.$$

Observação 2.4. Cada uma das funções $\phi_\omega(t, x) = \phi(x \cdot \omega - ct, \omega)$,

$\omega \in S^{n-1}$, é uma solução da equação da onda de um tipo bem especial: ϕ_ω é constante em cada hiperplano $\{(t, x) \mid (t, x) \cdot (-c, \omega) = s\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $s \in \mathbb{R}$. Portanto, ϕ_ω é o que poderíamos chamar de uma "onda plana propagando-se na direção de ω com velocidade c ". Neste sentido, a fórmula (2.15) (ou (2.14)) nos fornece u como uma "superposição de ondas planas" (1).

2.4 - O Princípio de Huyghens

A partir da representação (2.15) vamos agora demonstrar o seguinte resultado, conhecido como o *Princípio de Huyghens* (2):

Teorema 2.5 Seja $n \geq 3$ ímpar. Se $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ é solução da equação da onda com dados iniciais $u_0 = u(0, \cdot)$ e $u_1 = u_t(0, \cdot)$ tendo suportes contidos na bola $B = \overline{B(x_0, R)}$ então

$$\text{supp } u \subset \overline{B_0} + \partial\Gamma,$$

onde $B_0 = \{(0, x) \mid x \in B\}$ e $\partial\Gamma = \{(t, x) \mid |x| = c|t|\}$ é a fronteira do cone da luz $\Gamma = \{(t, x) \mid |x| \leq c|t|\}$.

(1) Evidentemente, substituindo ϕ por $H\phi$, a mesma conclusão é válida para n par.

(2) Uma formulação mais geral será dada na seção 3.3.

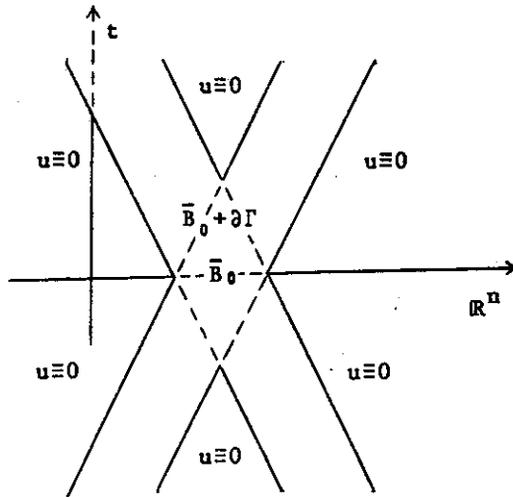
Demonstração. Podemos assumir $x_0=0$, considerando $u(t, x+x_0)$ ao invés de $u(t, x)$, se necessário. Queremos mostrar que $u(T, x)=0$ para $(T, x) \notin \bar{B}_0 + \partial\Gamma$, i.e., para (T, x) tal que $|x-y| \neq c|T| \quad \forall |y| \leq R$. Temos duas possibilidades:

(i) $|x-y| > c|T| \quad \forall |y| \leq R$

(ii) $|x-y| < c|T| \quad \forall |y| \leq R. \quad (1)$

O primeiro caso corresponde a (T, x) fora de $\bar{B}_0 + \Gamma$ e, como sabemos, $\text{supp } u \subset \bar{B}_0 + \Gamma$. Quanto a (ii), observe que devemos ter necessariamente $|T| > R/c$ e, neste caso, é equivalente a $|x| < c|T| - R$. Logo, $|x \cdot \omega - cT| \geq c|T| - |x| > R \quad \forall |\omega| = 1$ e (2.15) nos mostra que $u(T, x)=0$, pois $\phi(s, \omega)=0$ para $|s| \geq R$.

Q.E.D.



(1) Observe que, em vista da convexidade da bola $|y| \leq R$, não podem existir y_1 e y_2 com $|x-y_1| > c|T|$ e $|x-y_2| < c|T|$.

2.5 - Fórmulas Explícitas (Caso $n \geq 3$ Ímpar).

Observando que $\Delta_x [\widehat{f}(x \cdot \omega - ct)] = \frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial s^2}(x \cdot \omega - ct)$

e $\frac{\partial}{\partial t} [\widehat{f}(x \cdot \omega - ct)] = (-c) \frac{\partial \widehat{f}}{\partial s}(x \cdot \omega - ct)$, podemos reescrever

(2.14) como

$$(2.16) \quad u(t, x) = \alpha_n \Delta_x^{(n-1)/2} \int_{|\omega|=1} \widehat{u}_0(x \cdot \omega - ct, \omega) d\omega \\ + \frac{\alpha_n}{c^2} \Delta_x^{(n-3)/2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|\omega|=1} \widehat{u}_1(x \cdot \omega - ct, \omega) d\omega,$$

onde $n \geq 3$ é ímpar.

Lema 2.3 Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$ (não necessariamente ímpar).

Então, para cada $s > 0$, $F(s, x) = \int_{|\omega|=1} \widehat{f}(x \cdot \omega - s, \omega) d\omega$ pode ser representado como uma convolução

$$F(s, x) = \frac{1}{s} [I(\frac{\cdot}{s}) * f](x),$$

onde I é a função definida por $I(y) = 0$, se $|y| \leq 1$, e $I(y) = \Omega_{n-2} |y|^{-1} (1 - |y|^{-2})^{(n-3)/2}$, se $|y| > 1$ (Ω_{n-2} = área de $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$).

Demonstração. Vamos definir

$$(2.17) \quad J(s, y) = \frac{d}{ds} \int_{|\omega|=1} Y(s - y \cdot \omega) d\omega, \quad s > 0, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

onde $Y(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma < 0 \\ 1, & \sigma \geq 0 \end{cases}$ $\int_{|\omega|=1}$ é a função de Heaviside. Está claro que

$J(s, y) = 0$ para $|y| < s$. Para $|y| > s$, é um mero exercício de Cálculo escrever $\int_{|\omega|=1} \dots d\omega$ como uma integral iterada da $\int_{-1}^1 \int_{L(\tau)} \dots d\ell d\tau$ (onde $L(\tau) = \{\omega \in S^{n-1} | \omega \cdot y = |y|\tau\}$, $-1 \leq \tau \leq 1$), obtendo

$$\begin{aligned} \int_{|\omega|=1} Y(s-y \cdot \omega) d\omega &= \Omega_{n-2} \int_{-1}^1 Y(s-\tau|y|) (1-\tau^2)^{(n-3)/2} d\tau \\ &= \Omega_{n-2} \int_{-1}^{s/|y|} (1-\tau^2)^{(n-3)/2} d\tau, \end{aligned}$$

onde Ω_{n-2} é a área de $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Portanto, em vista de (2.17), temos

$$J(s, y) = \begin{cases} 0, & |y| < s \\ \Omega_{n-2} |y|^{-1} (1-s^2|y|^{-2})^{(n-3)/2}, & |y| > s \end{cases}$$

isto é, $J(s, y) = \frac{1}{s} I\left(\frac{y}{s}\right)$ com I definido no enunciado.

Por outro lado, dado $h \in S(\mathbb{R}^n)$, usando o teorema de Fubini e observando que $\hat{h}(s, \omega) = (d/ds) \int_{y \cdot \omega \leq s} h(y) dy = (d/ds) \int_{\mathbb{R}^n} h(y) Y(t-y \cdot \omega) dy$, podemos escrever

$$\int_{|\omega|=1} \hat{h}(s, \omega) = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) J(s, y) dy = \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}^n} h(y) I\left(\frac{y}{s}\right) dy.$$

A demonstração está completa uma vez que $\hat{f}(x \cdot \omega - s, \omega) = \hat{h}_x(s, \omega)$ onde $h_x(y) = f(x-y)$. Q.E.D.

Observação 2.5. Observe que $I(y)$ é uma função radial. Observe também que, para $s < 0$, obtemos facilmente a representação $F(s, x) = \frac{1}{|s|} [I(\frac{\cdot}{s}) * f](x)$.

Agora, usando o lema acima em (2.16), resulta a seguinte fórmula explícita para u em termos dos dados iniciais $u_0, u_1 \in S(\mathbb{R}^n)$, quando $n \geq 3$ é ímpar:

$$(2.18) \quad u(t, \cdot) = P_0 \left[\frac{1}{c|t|} I\left(\frac{\cdot}{ct}\right) * u_0 \right] + P_1 \left[\frac{1}{c|t|} I\left(\frac{\cdot}{ct}\right) * u_1 \right],$$

$t \neq 0,$

onde $P_0 = P_0\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right)$ é o operador diferencial $\alpha_n \Delta_x^{(n-1)/2}$ e $P_1 = P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right)$ é o operador diferencial $\frac{\alpha_n}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_x^{(n-3)/2}$.

Exercícios

2.1 Assuma que o problema de Cauchy (2.4)-(2.5) com $f=0$ tem uma única solução $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ para cada $u_0, \dots, u_{m-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então, mostre que (2.4)-(2.5) com $f=f(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $u_0 = \dots = u_{m-1} = 0$, tem também uma única solução v em $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, a qual é dada por (2.7), i.e.,

$$v(t, x) = \int_0^t u(\tau)(t-\tau, x) d\tau,$$

onde agora $u^{(\tau)}$ representa a única solução da equação homogênea $Pu=0$ com dados iniciais $u_0 = \dots = u_{m-2} = 0$, $u_{m-1} = f(\tau, \cdot)$.

2.2 Seja $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial em \mathbb{R}^n com coeficientes constantes. Dado $f \in S(\mathbb{R}^n)$, verifique que

$$[P(D)f]^\wedge(s, \omega) = P(\omega \frac{\partial}{\partial s}) \widehat{f}(s, \omega).$$

2.3 Quando $n=1$, vê-se da Fôrmla de d'Alembert (V. exercício 1.2)

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\tau) d\tau$$

que, se $u_1 \equiv 0$ então $u(t, x)$ é uma função par de t . Mais geralmente, mostre que este resultado continua válido quando $n \geq 3$ é ímpar.

2.4 Considere as distribuições (V. (2.18))

$$R_0 = P_0 \left[\frac{1}{c|t|} I\left(\frac{x}{ct}\right) \right] \quad \text{e} \quad R_1 = P_1 \left[\frac{1}{c|t|} I\left(\frac{x}{ct}\right) \right],$$

onde $P_0 = P_0(\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ e $P_1 = P_1(\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ são os operadores diferenciais $\alpha_n \Delta_x^{(n-1)/2}$ e $\frac{\alpha_n}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_x^{(n-3)/2}$, respectivamente, e I é a função definida no lema 2.3.

Mostre que R_0 e R_1 são iguais a zero no aberto $\{(t, x) \mid |x| > c|t|\}$ (verifique por cálculo direto que $\Delta^{(n-1)/2} I(y) = 0 \quad \forall |y| > 1$, etc.). Logo, como por definição R_0 e R_1 são zeros no cone aberto $\{(t, x) \mid$

$|x| < c|t|$ (pois $I(y) \equiv 0$ para $|y| < 1$), conclua que $\text{supp } R_j \subset \partial\Gamma = \{(t, x) \mid |x| = c|t|\}$, $j=0,1$. O que se pode dizer sôbre o suporte $\text{supp } u$ de uma solução $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ em relação aos suportes dos dados iniciais?

2.5 Seja $u = u(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, uma solução da equação da onda com dados iniciais em $S(\mathbb{R}^3)$. Mostre que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} |u(t, x)| \leq \frac{C}{1+|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2.6 Assuma $n=3$. Mostre que se u é uma solução da equação da onda $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ e se $\Omega(t) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq bt\}$, onde $0 < b < c$, então, para cada inteiro positivo m existe uma constante $C_m > 0$ tal que

$$E_{\Omega(t)}[u; t] \leq \frac{C_m}{t^m}, \quad \forall t > 0.$$

CAPÍTULO III

SOLUÇÕES COM ENERGIA FINITA DA EQUAÇÃO DA ONDA.

SOLUÇÕES FRACAS.

3.1 - Soluções com Energia Finita.

Seja $u(t, x)$ uma solução da equação da onda cujos dados iniciais $f_0 = u(0, \cdot)$ e $f_1 = u_t(0, \cdot)$ estão em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Neste caso, sabemos que (V. Exercício 1.5), em cada instante t , u tem energia finita em todo o \mathbb{R}^n a qual se mantém constante:

$$(3.1) \quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|u_t(t, x)|^2 + c^2 |\nabla_x u(t, x)|^2) dx = \\ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|f_1(x)|^2 + c^2 |\nabla f_0(x)|^2) dx$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, se considerarmos o espaço normado X dos pares $f = (f_0, f_1)$ de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a norma da energia

$$(3.2) \quad \|f\|_e = \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|f_1|^2 + c^2 |\nabla f_0|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

(1) É evidente que $\|\cdot\|_e$ provem de um produto escalar.

e, se denotarmos por $U(t): X \rightarrow X$ o operador (linear) definido por $U(t)(f_0, f_1) = (u(t, \cdot), u_t(t, \cdot))$, então $U(t)$ é uma isometria para cada $t \in \mathbb{R}$, i.e.,

$$(3.3) \quad \|U(t)f\|_e = \|f\|_e, \quad f \in X, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De fato, como temos unicidade para o problema de Cauchy com dados iniciais num instante t_0 qualquer (t_0 não precisa ser zero), concluímos que

$$(3.4) \quad U(t+t') = U(t)U(t') \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}.$$

Em particular, cada $U(t)$ é sobrejetivo. Também, não é difícil mostrar que, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ e $f \in X$,

$$(3.5) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \|U(t)f - U(t_0)f\|_e = 0.$$

(Exercício 3.1). Uma família de operadores $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $U(t): X \rightarrow X$, satisfazendo (3.3)-(3.5) é chamada de um grupo uniparamétrico contínuo de operadores isométricos no espaço X .

Seja, agora, H o espaço de Hilbert obtido por completamento de X na norma da energia $\|\cdot\|_e$. Então, para cada $t \in \mathbb{R}$, $U(t)$ estende-se, por continuidade, a um operador unitário de H sobre H . Como as propriedades (3.3)-(3.5) continuam a ser válidas, vemos assim que $\{U(t)\}$ estende-se a um grupo uniparamétrico contínuo de operadores unitários no espaço de Hilbert H . Nada mais natural do que

chamar H o espaço de Hilbert dos dados iniciais com energia finita e as funções $t \mapsto U(t)f$ (ou melhor, as suas primeiras componentes), com $f \in H$, as soluções com energia finita da equação da onda. Observe que $U(t)f$ pode ser visto como o limite de $U(t)f^{(k)}$ em H , onde $(f^{(k)})$ é qualquer sucessão em X tal que $f^{(k)} \rightarrow f$ em H . É justamente esta observação que nos vai permitir mostrar que, para qualquer $f = (f_0, f_1) \in H$, a primeira componente de $U(t)f = (u_0(t), u_1(t))$ é ainda solução, num certo sentido (fraco), da equação da onda com dados iniciais f_0 e f_1 . Começaremos com o

Lema 3.1. Se $R > 0$ e $n \geq 3$, então

$$\int_{B(0,R)} |\phi(x)|^2 \leq \frac{R^2}{2(n-2)} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi(x)|^2 dx$$

qualquer que seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Podemos escrever

$$\phi(x) = - \int_{|x|}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \phi\left(r \frac{x}{|x|}\right) dr = - \int_{|x|}^{\infty} \nabla \phi\left(r \frac{x}{|x|}\right) \cdot \frac{x}{|x|} dr,$$

de sorte que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\phi(x)|^2 &\leq \left(\int_{|x|}^{\infty} |\nabla \phi\left(r \frac{x}{|x|}\right)| dr \right)^2 \leq \\ &\leq \left(\int_{|x|}^{\infty} |\nabla \phi\left(r \frac{x}{|x|}\right)|^2 r^{n-1} dr \right) \left(\int_{|x|}^{\infty} \frac{1}{r^{n-1}} dr \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{|x|^{2-n}}{n-2} \int_{|x|}^{\infty} |\nabla\phi(r \frac{x}{|x|})|^2 r^{n-1} dr.$$

Agora, pondo $x=\rho\omega$ e integrando sobre a esfera unitária $|\omega|=1$, vem

$$\int_{|\omega|=1} |\phi(\rho\omega)|^2 d\omega \leq \frac{\rho^{2-n}}{n-2} \int_{|x|\geq\rho} |\nabla\phi(x)|^2 dx \leq \frac{\rho^{2-n}}{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\phi(x)|^2 dx.$$

Portanto, multiplicando a desigualdade acima por ρ^{n-1} e integrando de $\rho=0$ até $\rho=R$, obtemos a desigualdade procurada.

Q.E.D.

Lema 3.2. H pode ser visualizado como o espaço dos pares de funções (f_0, f_1) tais que $f_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $f_0 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ com derivadas (no sentido das distribuições) $\frac{\partial f_0}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $f=(f_0, f_1) \in H$. Em vista de definição da norma da energia (3.2), f_1 está no complemento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ na norma L^2 , $\|\phi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^2 dx$, enquanto que f_0 está no complemento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ na norma $\|\phi\|_V^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\phi(x)|^2 dx$.

Logo, está claro que podemos visualizar f_1 em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Quan

to a f_0 , se $(f_0^{(k)})$ é uma sucessão em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ que converge para f_0 no sentido da forma $\|\cdot\|_\nabla$, então, o lema anterior fornece

$$\|f_0^{(k)} - f_0^{(l)}\|_{L^2(K)} \leq C(K) \|f_0^{(k)} - f_0^{(l)}\|_\nabla,$$

onde $K \subset \mathbb{R}^n$ é um compacto arbitrário. Portanto, $(f_0^{(k)})$ é uma sucessão de Cauchy em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e podemos assim consi

derar f_0 pertencendo a $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Também, como $\left(\frac{\partial f_0^{(k)}}{\partial x_j}\right)$

é uma sucessão de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial f_0^{(k)}}{\partial x_j} \rightarrow g_j$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$

para algum g_j ($1 \leq j \leq n$). A demonstração estará completa se mostrarmos que $\frac{\partial f_0}{\partial x_j} = g_j$ no sentido das distribuições, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0 \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx = - \int_{\mathbb{R}^n} g_j \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty.$$

Isto é consequência da igualdade (integração por partes)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0^{(k)} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_0^{(k)}}{\partial x_j} \phi dx,$$

uma vez que $\frac{\partial f_0^{(k)}}{\partial x_j} \rightarrow g_j$ em L^2 , $f_0^{(k)} \rightarrow f_0$ em L^2_{loc} e

ϕ tem suporte compacto.

Q.E.D.

Dos dois lemas acima concluímos que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é um compacto, então existe $C=C(K) > 0$ tal que, para todo $f=(f_0, f_1) \in H$,

$$(3.6) \quad \|f_0\|_{L^2(K)}^2 \leq C \|\nabla f_0\|_2^2 \leq 2C \|f\|_e^2.$$

Obviamente também temos a desigualdade

$$(3.7) \quad \|f_1\|_2^2 = \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq 2 \|f\|_e^2.$$

Substituindo f acima por $U(t)f - U(t_0)f$ e lembrando (3.5), vemos que as aplicações $t \mapsto u_0(t) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ e $t \mapsto u_1(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ são contínuas, onde $(u_0(t), u_1(t)) = U(t)f$. Portanto, a função $t \mapsto \|u_0(t)\|_{L^2(K)}^2$ é contínua de sorte que podemos integrá-la sobre qualquer intervalo finito $I \subset \mathbb{R}$, obtendo

$$\int_I \int_K |u_0(t, x)|^2 dx dt = \int_I \|u_0(t, \cdot)\|_{L^2(K)}^2 dt \quad (1),$$

em vista do teorema de Fubini. Isto nos mostra que $u_0 \in L_{loc}^2(\overline{\mathbb{R}^{n+1}})$, i.e., u_0 é uma função de quadrado integrável localmente nas variáveis t e x . Em particular, u_0 define uma distribuição em \mathbb{R}^{n+1} (que continuaremos a designar pela mesma letra):

$$(3.8) \quad \langle u_0, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t, x) u_0(t, x) dx dt, \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

(1) Estamos escrevendo $u_0(t, x)$ ao invés de $u_0(t)(x)$.

Observe que podemos também considerar u_0 como uma aplicação $t \mapsto u_0(t)$ de \mathbb{R} em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, a qual é contínua, i.e., $t \mapsto \langle u_0(t), \phi \rangle$ é contínua $\forall \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |\langle u_0(t+h), \phi \rangle - \langle u_0(t), \phi \rangle| &\leq \int_K |u_0(t+h, x) - u_0(t, x)| |\phi(x)| dx \\ &\leq \|u_0(t+h) - u_0(t)\|_{L^2(K)} \|\phi\|_2, \end{aligned}$$

onde $K = \text{supp } \phi$ e, como já vimos, $\|u_0(t+h) - u_0(t)\|_{L^2(K)} \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$ (continuidade da aplicação $t \mapsto u_0(t) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$).

Analogamente, mostramos que u_1 é uma função de quadrado integrável localmente nas variáveis t e x , definindo portanto uma distribuição em \mathbb{R}^{n+1} :

$$\langle u_1, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \phi(t, x) u_1(t, x) dx dt, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Além disso, a continuidade de $t \mapsto u_1(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ nos mostra que podemos considerar u_1 como uma aplicação contínua $t \mapsto u_1(t)$ de \mathbb{R} em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Seja agora $(u_0^{(k)}(t), u_1^{(k)}(t)) = U(t)(f_0^{(k)}, f_1^{(k)})$, onde $(f_0^{(k)}, f_1^{(k)}) = f^{(k)} \in X = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é tal que $f^{(k)} \rightarrow f$ em H . Então, de (3.6), (3.7) e (3.3) vem

$$\|u_0(t) - u_0^{(k)}(t)\|_{L^2(K)}^2 \leq 2C \|U(t)(f - f^{(k)})\|_e^2 = 2C \|f - f^{(k)}\|_e^2$$

e

$$\|u_1(t) - u_1^{(k)}(t)\|_2^2 \leq 2 \|U(t)(f - f^{(k)})\|_e^2 = 2 \|f - f^{(k)}\|_e^2,$$

de sorte que $\|u_0(t) - u_1^{(k)}(t)\|_{L^2(K)}^2$ e $\|u_1(t) - u_1^{(k)}(t)\|_2^2$ tendem a zero quando $k \rightarrow \infty$. Novamente, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para estimar $\langle u_0 - u_0^{(k)}, \psi \rangle$ e $\langle u_1 - u_1^{(k)}, \psi \rangle$, concluímos que

$$\langle u_0, \psi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_0^{(k)}, \psi \rangle$$

e

$$\langle u_1, \psi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_1^{(k)}, \psi \rangle$$

para cada $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Finalmente, usando as relações acima, vamos mostrar que $u_1 = \frac{\partial u_0}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_0 = 0$ no sentido das distribuições em \mathbb{R}^{n+1} . Como $u_1^{(k)} = \frac{\partial u_0^{(k)}}{\partial t}$, temos

$$\begin{aligned} \langle u_1, \psi \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\partial u_0^{(k)}}{\partial t}, \psi \right\rangle = - \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle u_0^{(k)}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle \\ &= - \langle u_0, \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente, como $\frac{\partial^2 u_0^{(k)}}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_0^{(k)} = 0$,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_0, \psi \right\rangle &= \left\langle u_0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \psi \right\rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle u_0^{(k)}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \psi \right\rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\partial^2 u_0^{(k)}}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_0^{(k)}, \psi \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Observe que sendo $\frac{\partial u_0}{\partial t}$ igual a u_1 , concluimos que $\frac{\partial u_0}{\partial t}$ pode ser considerada como uma aplicação contínua $t \mapsto \frac{\partial u_0}{\partial t}(t) = u_1(t)$ de \mathbb{R} em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Podemos agora enunciar o

Teorema 3.1. Com as notações acima, $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ é solução da equação da onda

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_0 = 0.$$

Além disso, u_0 satisfaz as condições iniciais

$$u_0 = f_0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} = f_1 \quad \text{para } t = 0,$$

isto é, $\langle u_0(0), \phi \rangle = \langle f_0, \phi \rangle$ e $\langle \frac{\partial u_0}{\partial t}(0), \phi \rangle = \langle f_1, \phi \rangle$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 3.1. A esta altura, alguns comentários sobre o teorema acima e algumas definições se fazem necessários. Em primeiro lugar, temos considerado distribuições $u = u(t, x)$

em \mathbb{R}^{n+1} que são funções contínuas de t com valores em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Isto quer dizer que existe uma aplicação contínua $t \mapsto u(t)$ de \mathbb{R} em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (i.e., para cada $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, a função escalar $t \mapsto \langle u(t), \phi \rangle$ é contínua) tal que

$$\langle u, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(t), \psi(t, \cdot) \rangle dt,$$

para toda $\psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ (Tomando $\psi(t, x)$ da forma $\theta(t)\phi(x)$, com $\theta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, é fácil ver que $t \mapsto u(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é necessariamente única). Mais particularmente, se a aplicação $t \mapsto u(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ acima é de classe C^k , i.e., $t \mapsto \langle u(t), \phi \rangle$ é de classe C^k para cada $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (1), dizemos que $u = u(t, x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ é uma função de t com valores em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, de classe C^k , e escrevemos $u \in C^k(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$. Chamamos a atenção para o fato de que se $u = u(t, x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ é tal que u e $\frac{\partial u}{\partial t}$ pertencem a $C^k(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ então u pertence a $C^{k+1}(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$. (Exercício 3.4). Portanto a distribuição $u_0 = u_0(t, x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ do Teorema 3.1 está em $C^1(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$.

Por outro lado, nada mais natural do que dar a seguinte definição:

(1) Pode-se mostrar que se $t \mapsto \langle u(t), \phi \rangle$ é de classe C^k para cada $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ então $(d/dt)^j u(t)$, $j=1, \dots, k$, existe no sentido forte em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\langle (d/dt)^j u(t), \phi \rangle = (d/dt)^j \langle u(t), \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $j=1, \dots, k$.

Definição 3.1. Dados f_0 e f_1 em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, uma distribuição $u = u(t, x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ é solução do problema de Cauchy

$$(3.9) \quad \square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0.$$

$$(3.10) \quad u = f_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f_1 \quad \text{para } t=0$$

se u é uma função $t \mapsto u(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ em $C^1(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ e satisfaz

$$(3.11) \quad \square u = 0 \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$$

$$(3.12) \quad \langle u(0), \phi \rangle = \langle f_0, \phi \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle u(t), \phi \rangle \Big|_{t=0} = \langle f_1, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Com esta definição, o Teorema 3.1 mostra simplesmente que, para $(f_0, f_1) \in H(\subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, o problema de Cauchy (3.9) (3.10) tem solução. Uma outra definição, aparentemente mais forte, é a seguinte

Definição 3.2. $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ é solução de (3.9), (3.10) se u é uma função em $C^2(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ e satisfaz

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle u(t), \phi \rangle - c^2 \langle \Delta u(t), \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\langle u(0), \phi \rangle = \langle f_0, \phi \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle u(t), \phi \rangle \Big|_{t=0} = \langle f_1, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

De fato, pode-se mostrar que se u é solução de (3.9), (3.10) no sentido da definição 3.1, então $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ e u é so

lução de (3.9), (3.10) no sentido da definição 3.2 (Exercício 3.4) Esta situação é um caso particular daquela em que temos uma distribuição $f=f(t,x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ no segundo membro de (3.9), a qual é uma função $t \mapsto f(t)$ em $C^k(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$. Mais, precisamente, se $u=u(t,x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ satisfaz a equação não-homogênea,

$$\langle u, \square \psi \rangle = \langle f, \psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

e verifica as condições iniciais (3.10) no sentido de que u é uma função em $C^1(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ satisfazendo (3.12), então u é de fato uma função em $C^{k+2}(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ e

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle u(t), \phi \rangle - c^2 \langle \Delta u(t), \phi \rangle = \langle f(t), \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Novamente, deixamos a verificação deste fato como um exercício para o leitor.

3.2 - Soluções em \mathcal{D}' .

Nêste parágrafo, mostraremos que o problema de Cauchy (3.9), (3.10), com dados iniciais $f_0, f_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ arbitrários, possui sempre uma única solução u (no sentido de qualquer uma das duas definições equivalentes acima), a qual, conforme vimos, vai pertencer necessariamente a $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$. Podemos fazer isto de várias maneiras. Uma delas, consiste em estender $U(t)$ a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, usando-se

convenientemente o produto escalar (da energia) em H e propriedades do gerador infinitesimal de $\{U(t)\}$ (V. Exercício 3.2). O leitor interessado poderá consultar [12], pg. 97 (V. também Exercício 3.3). Preferimos, agora, usar um método mais direto que fará uso das estimativas obtidas na seção 1.2 e deixará evidente a razão de ser do teorema do domínio de dependência. Começaremos com a questão de unicidade:

Teorema 3.2. Se $u = u(t, x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ é solução de (3.9), (3.10) com $f_0 = 0$ e $f_1 = 0$, então $u = 0$.

Demonstração. Queremos mostrar que se $t \mapsto u(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ pertence a $C^2(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ e satisfaz

$$(3.13) \quad \left\langle \frac{d^2 u}{dt^2}(t), \phi \right\rangle - c^2 \langle u(t), \Delta \phi \rangle = 0$$

$$(3.14) \quad \langle u(0), \phi \rangle = \left\langle \frac{du}{dt}(0), \phi \right\rangle = 0$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, então $u(t) \equiv 0$.

Dado $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, definimos $v(t, x) = [u(t) * \phi](x) = \langle u(t), \phi(x - \cdot) \rangle$. Então $v \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ e, em vista de (3.13) e (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} v(t, x) &= \frac{d^2}{dt^2} \langle u(t), \phi(x - \cdot) \rangle = c^2 \langle u(t), (\Delta \phi)(x - \cdot) \rangle = \\ &= c^2 [u(t) * \Delta \phi](x) = c^2 \Delta [u(t) * \phi](x) = c^2 \Delta v(t, x) \end{aligned}$$

$$v(0, \cdot) = u(0) * \phi = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0, \cdot) = \frac{d}{dt} \langle u(t), \phi(x-\cdot) \rangle \Big|_{t=0} = 0.$$

Logo, pelo teorema de unicidade de soluções clássicas (Corolário 1.1), obtemos $v(t, x) = \langle u(t), \phi(x-\cdot) \rangle \equiv 0$. E, como $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ foi dado arbitrariamente, concluímos que $u(t) \equiv 0$.

Q.E.D.

Voltemos a nossa atenção agora às funções $\tilde{R}_0(t, p)$
 $= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cos(c|p|t)$ e $\tilde{R}_1(t, p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\text{sen}(c|p|t)}{c|p|}$, consideradas na seção 1.2 (V. (1.9)). Como sabemos, elas são funções infinitamente diferenciáveis de t e p , de sorte que podemos considerá-las como elementos $t \mapsto \tilde{R}_j(t)$ ($j=0,1$) de $C^\infty(\mathbb{R}, C^\infty(\mathbb{R}^n))$ (1), logo de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$. Mais precisamente, observe que $\tilde{R}_j(t)$ ($j=0,1$), para cada t , define uma distribuição temperada (que continuamos a denotar pela mesma letra) através da fórmula

$$\langle \tilde{R}_j(t), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{R}_j(t, p) \phi(p) dp, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, $\tilde{R}_j \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja $R_j(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier inversa de $\tilde{R}_j(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(1) Estamos usando a identificação $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \cong C^\infty(\mathbb{R}, C^\infty(\mathbb{R}^n))$.

Teorema 3.3. $R_1(t)$ tem suporte contido na bola $\overline{B(0, c|t|)}$.

Além disso, $R_1(t)$ é a solução do problema de Cauchy (3.9), (3.10) com $f_0=0$, $f_1=\delta$ (δ = medida de Dirac na origem: $\delta(\phi)=\phi(0)$). Um resultado análogo é válido para $R_0(t)$ com $f_0=\delta$, $f_1=0$.

Demonstração. Mostremos inicialmente que $R_1(t)$ é solução de (3.9). Para cada $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \langle R_1(t), \tilde{\phi} \rangle &= \frac{d^2}{dt^2} \langle \tilde{R}_1(t), \phi \rangle = \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{R}_1(t,p) \phi(p) dp \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} c^2 |p|^2 \tilde{R}_1(t,p) \phi(p) dp, \end{aligned}$$

uma vez que podemos diferenciar dentro do sinal de integração e $\tilde{R}_1(t,p)$ satisfaz $\partial^2 \tilde{R}_1 / \partial t^2 + c^2 |p|^2 \tilde{R}_1 = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \Delta R_1(t), \tilde{\phi} \rangle &= \langle \widetilde{\Delta R_1(t)}, \phi \rangle = - \langle | \cdot |^2 \tilde{R}_1(t), \phi \rangle \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} |p|^2 \tilde{R}_1(t,p) \phi(p) dp. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle R_1(t), \phi \rangle - c^2 \langle \Delta R_1(t), \phi \rangle = 0$$

para todo $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, de sorte que $R_1(t)$ é solução de (3.9). Quanto aos dados iniciais, temos

$$\langle R_1(0), \tilde{\phi} \rangle = \langle \tilde{R}_1(0), \phi \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\text{sen}(c|p|t)}{c|p|} \phi(p) dp$$

que é igual a zero, para todo $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ (por exemplo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue). Também, temos

$$\frac{d}{dt} \langle R_1(t), \tilde{\phi} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \tilde{R}_1(t), \phi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \cos(c|p|t) \phi(p) dp$$

que tende a $(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(p) dp = \tilde{\phi}(0) = \langle \delta, \tilde{\phi} \rangle$ quando $t \rightarrow 0$. Logo, $R_1(t)$ verificada as condições iniciais $R_1(0)=0$

$$\text{e } \frac{dR_1}{dt}(0) = \delta.$$

Finalmente, vejamos que $R_1(t)$ tem suporte na bola $\overline{B(0, c|t|)}$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Conforme o Exercício 1.1 $\tilde{R}_1(t)$ é uma função analítica de $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. De fato,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1(t)(p) &= \tilde{R}_1(t, p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\text{sen}(c|p|t)}{c|p|} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} (p_1^2 + \dots + p_n^2)^k, \end{aligned}$$

de onde vemos que $R_1(t)$ se estende de uma maneira óbvia a uma função analítica de $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$. Além disso, obtemos a seguinte estimativa (Exercício 3.5)

$$|\tilde{R}_1(t, \zeta)| \leq C(t) e^{c|t| |\operatorname{Im} \zeta|}.$$

Portanto, em vista do teorema de Paley-Wiener (para distribuições. V. apêndice), $R_1(t)$ é uma distribuição com suporte contido na bola $B(0, c|t|)$.

Quanto a $R_0(t)$ ter também suporte na bola $\overline{B(0, c|t|)}$ e ser solução de (3.9), (3.10) com $f_0 = \delta$ e $f_1 = 0$, observamos apenas que $R_0(t) = \frac{d}{dt} R_1(t)$.

Q.E.D.

Observação 3.2. $R_1(t)$ é algumas vezes chamada da *função de Riemann* (de fato, é uma distribuição exceto quando $n=1,2$) da equação da onda.

Como corolário do teorema acima, obtemos o teorema de existência (e unicidade) de soluções do problema de Cauchy (3.9), (3.10) com dados iniciais $f_0, f_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ arbitrários.

Teorema 3.4. O problema de Cauchy (3.9), (3.10) com dados iniciais $f_0, f_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ possui uma única solução, a qual per

tence a $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ e é dada por

$$(3.15) \quad u(t) = R_0(t) * f_0 + R_1(t) * f_1.$$

Demonstração. Já sabemos que se (3.9), (3.10) admite solução então ela é única (Teorema 3.2) e está necessariamente em $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ (Exercício 3.4). Assim, basta verificar que (3.15) define uma solução. Observe que as convoluções $R_0(t) * f_0$ e $R_1(t) * f_1$ fazem sentido uma vez que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $R_0(t)$ e $R_1(t)$ tem suporte compacto. Escrevendo $v_j(t) = R_j(t) * f_j$, ($j=0,1$) temos, por definição,

$$\langle v_j(t), \phi \rangle = \langle R_j(t), \psi_j \rangle$$

onde $\psi_j(y) = \langle f_j, \phi(\cdot + y) \rangle$ é uma função infinitamente diferenciável, para cada $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Logo, como $R_j(t)$ satisfaz (3.9), o mesmo é verdade para $v_j(t)$. Quanto às condições iniciais, elas também são facilmente verificadas tendo em vista as condições iniciais de $R_0(t)$ e $R_1(t)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle u(0), \phi \rangle &= \langle R_0(0), \psi_0 \rangle + \langle R_1(0), \psi_1 \rangle = \langle \delta, \psi_0 \rangle + 0 \\ &= \psi_0(0) = \langle f_0, \phi \rangle, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), \phi \rangle \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \langle R_0(t), \psi_0 \rangle + \frac{d}{dt} \langle R_1(t), \psi_1 \rangle \Big|_{t=0} = 0 + \langle \delta, \psi_1 \rangle$$

$$= \psi_1(0) = \langle f_1, \phi \rangle.$$

Q.E.D.

Em se tratando do problema de Cauchy para a equação da onda não-homogênea

$$(3.16) \quad \square u = f,$$

onde $f=f(t,x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ está em $C^k(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ ($k=0,1,\dots$), digamos, podemos novamente usar o princípio de Duhamel (V. seção 2.2) para reduzir o problema ao caso homogêneo. Para isso, consideramos

$$(3.17) \quad v(t) = \int_0^t R_1(t-\tau) * f(\tau) d\tau \quad (1)$$

que, como se verifica facilmente, está em $C^{k+2}(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ e satisfaz $\square v = f$ com dados iniciais $v(0)=0$, $\frac{dv}{dt}(0) = 0$ (Exercício 3.7). Portanto, temos o

(1) Se $t \mapsto T(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é contínua, definimos $S(t) =$
 $= \int_0^t T(\tau) d\tau$ por

$$\langle S(t), \phi \rangle = \int_0^t \langle T(\tau), \phi \rangle d\tau, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Pode-se mostrar que $S(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, de onde segue-se facilmente que $t \mapsto S(t)$ pertence a $C^1(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ e $dS/dt = T(t)$.

Teorema 3.5. O problema de Cauchy (3.16), (3.10) com f_0, f_1 e $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $f=f(t,x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ pertencendo a $C^k(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ ($k=0,1,\dots$) possui uma única solução u em $C^{k+2}(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, dada por

$$(3.18) \quad u(t) = R_0(t) * f_0 + R_1(t) * f_1 + \int_0^t R_1(t-\tau) * f(\tau) d\tau.$$

Em particular, se $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ o mesmo é verdade para u .

Observação 3.3. Se $f_0, f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, a fórmula (3.18) fornece $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Desta forma, temos uma outra demonstração para o Teorema 1.4.

3.3 - Suporte da Função de Riemann.

Já sabemos que a função de Riemann $R_1(t)$ tem suporte contido na bola $\overline{B(0, c|t|)}$, para cada $t \in \mathbb{R}$ (Teorema 3.3). Em outras palavras, como uma distribuição em \mathbb{R}^{n+1} , R_1 tem suporte contido no cone de luz $\Gamma = \{(t,x) \mid |x| \leq c|t|\}$. Mais precisamente, mostraremos a seguir que, quando $n \geq 3$ é ímpar, R_1 tem suporte contido na fronteira $\partial\Gamma = \{(t,x) \mid |x| = c|t|\}$ do cone de luz.

Teorema 3.6. Se $n \geq 3$ é ímpar então

$$\text{supp } R_1 \subset \partial\Gamma.$$

Demonstração. Faremos uso da representação explícita (2.18) obtida na seção 2.5 para o problema de Cauchy (3.9), (3.10) com dados iniciais em $S(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$ ímpar:

$$u(t, \cdot) = \alpha_n \Delta_x^{(n-1)/2} \left[\frac{1}{c|t|} I\left(\frac{\cdot}{ct}\right) * f_0 \right] + \\ + \frac{\alpha_n}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_x^{(n-3)/2} \left[\frac{1}{c|t|} I\left(\frac{\cdot}{ct}\right) * f_1 \right], \quad t \neq 0,$$

onde $I(y) = 0$, se $|y| < 1$, e $I(y) = \Omega_{n-2} |y|^{-1} (1 - |y|^{-2})^{(n-3)/2}$, se $|y| > 1$. Comparando a expressão acima com (3.15), concluímos que

$$(3.19) \quad R_1(t) = \frac{\alpha_n}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_x^{(n-3)/2} \left[\frac{1}{c|t|} I\left(\frac{\cdot}{ct}\right) \right]$$

para $t \neq 0$ e $n \geq 3$ ímpar. Mas então, se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tem suporte contido na bola (aberta) $B(0, c|t|)$, obtemos

$$\langle R_1(t), \phi \rangle = \frac{\alpha_n}{c^2} \frac{d}{dt} \int \frac{1}{c|t|} I\left(\frac{y}{ct}\right) \Delta^{(n-3)/2} \phi(y) dy = 0,$$

pois $I(y) = 0$ para $|y| < 1$. Isto é, $R_1(t) = 0$ ⁽¹⁾ na bola $B(0, c|t|)$. Portanto, $R_1(t)$ tem suporte contido na esfera $\{x \mid |x| = c|t|\}$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Q.E.D.

(1) Lembramos que uma distribuição $R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ diz-se zero num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ se $\langle R, \phi \rangle = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ com suporte contido em U .

Observação 3.4. É claro que temos também

$$(3.20) \quad R_0(t) = \alpha_n \Delta_x^{(n-1)/2} \left[\frac{1}{c|t|} I\left(\frac{\cdot}{ct}\right) \right]$$

para $t \neq 0$ e $n \geq 3$ ímpar. Observe que o fato de $I\left(\frac{y}{ct}\right)$ não se anular para $|y| > c|t|$ não está em contradição com o fato de $R_0(t)$ e $R_1(t)$ terem suporte contido na bola $\overline{B(0, c|t|)}$, pois, em verdade, os operadores diferenciais que aparecem em (3.19) e (3.20) anulam $\frac{1}{c|t|} I\left(\frac{\cdot}{ct}\right)$ fora de $\overline{B(0, c|t|)}$.

Combinando os Teoremas 3.4 e 3.6, podemos agora enunciar uma versão mais precisa do *princípio de Huyghens* do que aquela demonstrada na seção 2.4 (Teorema 2.5):

Teorema 3.7. Seja $n \geq 3$ ímpar. Se $u = u(t, x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ é a solução de (3.9), (3.10) com $f_0, f_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ então

$$\text{supp } u \subset M_0 + \partial\Gamma,$$

onde $M_0 = \{(0, x) \mid x \in M\}$, $M = \text{supp } f_0 \cup \text{supp } f_1$.

Demonstração. Cada termo em (3.15) tem suporte contido em $M + \partial B(0, c|t|)$.

3.4 - Soluções Fundamentais.

Vamos agora estudar as *soluções fundamentais* do

operador da onda \square , i.e., as soluções (em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$) da equação da onda não-homogênea

$$\square u = \delta(t, x).$$

Infelizmente, como $\delta = \delta(t, x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ não é uma função (pelo menos) contínua de t com valores em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, não podemos utilizar o método de Duhamel. Usaremos, ao invés, um outro método que nos fornece sempre uma solução fundamental a partir da função de Riemann (V. Exercício 3.8).

Seja $E_+(t) = Y(t)R_1(t)$, onde $Y(t)$ é a função de Heaviside: $Y(t)=0$ para $t<0$, $Y(t)=1$ para $t \geq 0$. Isto é,

$$(3.21) \quad E_+(t) = \begin{cases} R_1(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Uma vez que $R_1(0)=0$, concluímos que $t \mapsto E_+(t)$ é uma função contínua de t com valores em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (1). Logo, $E_+(t)$ define uma distribuição $E_+ = E_+(t, x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ através da fórmula

$$\langle E_+, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle E_+(t), \psi(t, \cdot) \rangle dt = \int_0^{\infty} \langle R_1(t), \psi(t, \cdot) \rangle dt, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

(1) Observe, entretanto, que $t \mapsto E_+(t)$ não pertence a $C^1(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ pois dE_+/dt não existe para $t=0$.

Proposição 3.1. E_+ é solução fundamental do operador de onda \square e tem suporte contido no cone de luz no futuro ("forward light-cone") $\Gamma_+ = \{(t, x) \mid |x| \leq ct, t \geq 0\}$.

Demonstração. Por definição, temos

$$\left\langle \frac{\partial E_+}{\partial t}, \psi \right\rangle = - \left\langle E_+, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = - \int_0^\infty \langle R_1(t), \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \cdot) \rangle dt.$$

Observando que $\frac{d}{dt} \langle R_1(t), \psi(t, \cdot) \rangle = \left\langle \frac{dR_1}{dt}(t), \psi(t, \cdot) \right\rangle + \langle R_1(t), \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \cdot) \rangle$ (Formula de Leibniz: verifique!), podemos escrever

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial E_+}{\partial t}, \psi \right\rangle &= - \int_0^\infty \frac{d}{dt} \langle R_1(t), \psi(t, \cdot) \rangle dt + \int_0^\infty \left\langle \frac{dR_1}{dt}(t), \psi(t, \cdot) \right\rangle dt \\ &= -(0 - \langle R_1(0), \psi(0, \cdot) \rangle) + \int_0^\infty \left\langle \frac{dR_1}{dt}(t), \psi(t, \cdot) \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Portanto, como $R_1(0) = 0$, obtemos

$$\left\langle \frac{\partial E_+}{\partial t}, \psi \right\rangle = \int_0^\infty \left\langle \frac{dR_1}{dt}(t), \psi(t, \cdot) \right\rangle dt,$$

para toda $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$. Usando a expressão acima para derivar em relação a t uma vez mais, vem

$$\left\langle \frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2}, \psi \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial E_+}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = - \int_0^\infty \left\langle \frac{dR_1}{dt}(t), \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \cdot) \right\rangle dt$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{dR_1}{dt}(t), \psi(t, \cdot) \right\rangle dt + \int_0^{\infty} \left\langle \frac{d^2 R_1}{dt^2}(t), \psi(t, \cdot) \right\rangle dt \\
 &= -(0 - \left\langle \frac{dR_1}{dt}(0), \psi(0, \cdot) \right\rangle) + \int_0^{\infty} \left\langle \frac{d^2 R_1}{dt^2}(t), \psi(t, \cdot) \right\rangle dt,
 \end{aligned}$$

onde novamente usamos a fórmula de Leibniz. Logo, como $\frac{dR_1}{dt}(0) = \delta$ e $R_1(t)$ satisfaz a equação da onda homogênea $\frac{d^2 R_1}{dt^2}(t) - c^2 \Delta_x R_1(t) = 0$ para cada t , obtemos

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial^2 E_+}{\partial t^2}, \psi \right\rangle &= \psi(0) + \int_0^{\infty} \langle R_1(t), c^2 \Delta_x \psi(t, \cdot) \rangle dt \\
 &= \psi(0) + \langle E_+, c^2 \Delta_x \psi \rangle, \quad \text{i.e.,}
 \end{aligned}$$

$$\square E_+ = \delta \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Finalmente, o fato de que $\text{supp } E_+ \subset \Gamma_+$ é evidente da definição (3.21). Q.E.D.

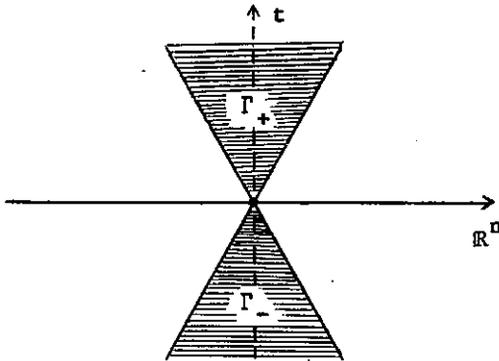
Observação 3.5. Se E_1 e E_2 são quaisquer duas soluções fundamentais do operador de onda, sua diferença $h = E_1 - E_2$ é uma solução da equação da onda homogênea. Portanto as soluções fundamentais de \square são da forma

$$E = E_+ + h,$$

onde h é uma solução arbitrária (em $D'(\mathbb{R}^{n+1})$) da equação da onda homogênea $\square h = 0$. Em particular, tomando $h = -R_1$, obtemos a solução fundamental que vamos denotar por E_- , $E_- = E_+ - R_1$. Vê-se facilmente que

$$E_-(t) = -Y(-t)R_1(t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ -R_1(t), & t \leq 0, \end{cases}$$

de sorte que E_- tem suporte contido no cone de luz no passado ("backward light-cone") $\Gamma_- = \{(t, x) \mid |x| \leq c|t|, t \leq 0\}$.



Finalmente, gostaríamos de dizer que $E_+(t)$ (resp. $E_-(t)$) pode ser caracterizada como a única solução fundamental com suporte contido no semiespaço $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$). A demonstração fica a cargo do leitor mais curioso.

3.5 - Soluções em H^s .

Inicialmente, vamos relembrar a definição dos espaços de Sobolev $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$ (V. apêndice). H^s consiste das distribuições temperadas $f \in S'$ cujas transformadas de Fourier \tilde{f} são funções tais que $(1+|p|^2)^{s/2} \tilde{f}(p)$ pertence a L^2 . Munido do produto escalar

$$\langle f, g \rangle_{(s)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|p|^2)^s \tilde{f}(p) \overline{\tilde{g}(p)} dp,$$

e, portanto, da norma

$$\|f\|_{(s)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|p|^2)^s |\tilde{f}(p)|^2 dp \right)^{\frac{1}{2}},$$

H^s é um espaço de Hilbert. Evidentemente, temos $H^{s_1} \subset H^{s_2}$ para $s_2 \leq s_1$, onde a inclusão é contínua.

Lema 3.3. Sejam $f \in H^s$ e $u_j(t) = R_j(t) * f$, $j=0,1$. Então, u_j é uma função contínua de t com valores em H^{s+j} , i.e., $u_j \in C^0(\mathbb{R}, H^{s+j})$. Mais geralmente, para cada $k=0,1,2,\dots$, u_j é uma função de t de classe C^k com valores em H^{s+j-k} , i.e., $u_j \in C^k(\mathbb{R}, H^{s+j-k})$.

Demonstração. A transformada de Fourier de $u_j(t)$ é a função $\tilde{u}_j(t,p) = \tilde{R}_j(t,p) \tilde{f}(p)$, (V. apêndice, teorema B.9), onde

$$\tilde{R}_0(t,p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cos(c|p|t) \text{ e } \tilde{R}_1(t,p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\text{sen}(c|p|t)}{c|p|}.$$

Em vista das estimativas

$$|\tilde{R}_0(t,p)| \leq D_0, \quad |\tilde{R}_1(t,p)| \leq D_1(1+|t|)(1+|p|^2)^{-\frac{1}{2}},$$

obtemos

$$\begin{aligned} (1+|p|^2)^s |\tilde{u}_0(t,p)|^2 &= (1+|p|^2)^s |\tilde{R}_0(t,p) \tilde{f}(p)|^2 \\ &\leq D_0^2 (1+|p|^2)^s |\tilde{f}(p)|^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (1+|p|^2)^{s+1} |\tilde{u}_1(t,p)|^2 &= (1+|p|^2)^{s+1} |\tilde{R}_1(t,p) \tilde{f}(p)|^2 \\ &\leq D_1^2 (1+|t|)^2 (1+|p|^2)^s |\tilde{f}(p)|^2. \end{aligned}$$

Logo, $u_0(t) \in H^s$ e $u_1(t) \in H^{s+1}$. Quanto à continuidade de $t \mapsto u_j(t) \in H^{s+j}$ ($j=0,1$), observe que

$$\begin{aligned} (1+|p|^2)^{s+j} |\tilde{u}_j(t,p) - \tilde{u}_j(T,p)|^2 &= \\ (1+|p|^2)^{s+j} |(\tilde{R}_j(t,p) - \tilde{R}_j(T,p)) \tilde{f}(p)|^2 \end{aligned}$$

e, para cada $p \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{R}_j(t,p) \rightarrow \tilde{R}_j(T,p)$ quando $t \rightarrow T$. Portanto, como o segundo membro da expressão acima é majorado por uma constante vezes $(1+|p|^2)^s |\tilde{f}(p)|^2$, o teorema da convergência dominada de Lebesgue fornece

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u_j(t) - u_j(T)\|_{(s+j)} = 0, \quad j=0,1.$$

Vejam^{os} agora que $\frac{1}{h}[u_j(t+h)-u_j(t)]$ tende a $\frac{dR_j}{dt} * f$ em H^{s+j-1} quando $h \rightarrow 0$. Observe primeiro que $\frac{dR_j}{dt}$ é a transformada de Fourier inversa de $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{R}_j(t, p)$ e temos as estimativas

$$(3.22) \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{R}_0(t, p) \right| \leq D_2 (1+|p|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{R}_1(t, p) \right| = \left| \tilde{R}_0(t, p) \right| \leq D_0,$$

de sorte que, usando o mesmo tipo de argumento acima, concluímos que $\frac{dR_j}{dt} * f \in C^0(\mathbb{R}, H^{s+j-1})$. Agora, como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} [\tilde{u}_j(t+h, p) - u_j(t, p)] - \frac{\partial}{\partial t} \tilde{R}_j(t, p) \tilde{f}(p) \\ &= \tilde{f}(p) \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left[\frac{\partial}{\partial s} \tilde{R}_j(s, p) - \frac{\partial}{\partial t} \tilde{R}_j(t, p) \right] ds \end{aligned}$$

tende a zero quando $h \rightarrow 0$, o mesmo é verdade para a expressão acima multiplicada por $(1+|p|^2)^{(s+j-1)/2}$. E, como a integral acima é majorada por uma constante vezes $|h|(1+|p|^2)^{(1-j)/2}$ (v. (3.22)), uma vez mais o teorema da convergência dominada de Lebesgue mostra que $\frac{1}{h}[u_j(t+h)-u_j(t)]$ converge para $\frac{dR_j}{dt} * f$ em H^{s+j-1} . Mostramos que $u_j \in C^1(\mathbb{R}, H^{s+j-1})$.

De uma maneira geral, usando as estimativas

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \tilde{R}_0(t, p) \right| \leq D_{k+1} (1+|p|^2)^{\frac{k}{2}}, \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \tilde{R}_1(t, p) \right| \leq D_k (1+|p|^2)^{\frac{k-1}{2}},$$

$k=1,2,\dots$ (V. (1.10)), mostramos por indução que $u_j \in C^k(\mathbb{R}, H^{s+j-k})$ para cada k .

Q.E.D.

Podemos agora provar o seguinte resultado acerca de soluções da equação da onda no espaço H^s .

Teorema 3.8. O problema de Cauchy (3.9), (3.10) com dados iniciais $f_0 \in H^{s+2}$, $f_1 \in H^{s+1}$ possui uma única solução $u \in C^2(\mathbb{R}, H^s)$.

Demonstração. Em vista do teorema 3.4, temos

$$u(t) = R_0(t) * f_0 + R_1(t) * f_1 = u_0(t) + u_1(t).$$

Como $f_0 \in H^{s+2}$ e $f_1 \in H^{s+1}$, o lema anterior fornece (com $k=2$) u_0 e u_1 em $C^2(\mathbb{R}, H^s)$.

Q.E.D.

Observação 3.6. De fato, o lema 3.3 implica que u é uma função de t de classe C^k com valores no espaço H^{s+2-k} , para cada $k=0,1,\dots$. Observe, entretanto, que os espaços H^{s+2-k} crescem com k .

Finalmente, para o problema de Cauchy não-homogêneo (3.16), (3.10), não é difícil mostrar, usando (3.18), o seguinte

Teorema 3.9. O problema de Cauchy (3.16), (3.10) com dados

$f_0 \in H^{s+2}$, $f_1 \in H^{s+1}$, $f \in C(\mathbb{R}, H^{s+1})$ possui uma única solução $u \in C^2(\mathbb{R}, H^s)$ (1). Mais geralmente, se $f \in C^m(\mathbb{R}, H^{s+1})$, então $u \in C^k(\mathbb{R}, H^{s+2-k})$ para $k=0,1,\dots,m+2$.

Demonstração. Fica como exercício. Observamos apenas que, neste caso, não podemos em geral tomar $k > m+2$ acima.

Exercícios

3.1 Mostre que, para cada $f = (f_0, f_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|U(t)f - U(t_0)f\|_e = 0 \quad (\text{V. (3.5)})$$

3.2 Um conhecido teorema, devido a Stone ([23]), afirma o seguinte: "A todo grupo uniparamétrico contínuo de operadores unitários $\{U(t)\}$ num espaço de Hilbert H está associado um único operador skew-adjunto A (i.e., $A^* = -A$) tal que

(i) $U(t)D(A) = D(A) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, onde $D(A)$ é o domínio de A ;

(ii) Dado $f \in D(A)$, então $U(t)f$ é diferenciável em H e

(1) De fato, $u \in C^k(\mathbb{R}, H^{s+2-k})$ para $k=0,1,2$.

$$\frac{dU(t)f}{dt} = AU(t)f;$$

reciprocamente, dado um operador skew-adjunto A , existe um único grupo $\{U(t)\}$ satisfazendo as condições acima". O operador A é chamado o *gerador infinitesimal* do grupo. A e $\{U(t)\}$ estão relacionados pela equação

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [U(t)f - f]$$

que é válida para todo $f \in D(A)$.

Considerando o grupo $\{U(t)\}$ definido na seção 3.1, mostre que

$$D(A) = \{f = (f_0, f_1) \in H \mid D^\alpha f_0 \in L^2, |\alpha| \leq 2 \text{ e}$$

$$D^\beta f_1 \in L^2, |\beta| \leq 1\}.$$

Como seria a ação de A num elemento $f = (f_0, f_1) \in D(A)$?

3.3 Dados $f_0, f_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, seja $t \longmapsto u_0(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$\langle u_0(t), \phi \rangle = \langle f_0, [U(-t)(0, \phi)]_2 \rangle - \langle f_1, [U(-t)(0, \phi)]_1 \rangle,$$

$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, onde $[\dots]_1$ e $[\dots]_2$ designam a primeira e segunda componente de $[\dots]$, respectivamente.

Mostre que u_0 é solução do problema de Cauchy (cf. definição 3.1)

$$\square u_0 \equiv 0$$

$$u_0 = f_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0 = f_1 \quad \text{para } t=0$$

3.4 Mostre que se $u = u(t, x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ é solução de (3.9), (3.10) no sentido da definição 3.1 então, de fato, $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ e u é solução de (3.9), (3.10) no sentido da definição 3.2. Mais geralmente, mostre que dado $f = f(t, x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ a qual é uma função $t \longrightarrow f(t)$ em $C^k(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, se $u = u(t, x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ satisfaz a equação não-homogênea

$$\langle u, \square \psi \rangle = \langle f, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

e verifica as condições iniciais (3.10) (cf. definição 3.1) então, de fato, $u \in C^{k+2}(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ e

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle u(t), \phi \rangle - c^2 \langle \Delta u(t), \phi \rangle = \langle f(t), \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Isto mostra que se f pertence a $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ então o mesmo é verdade para u .

3.5 Seja $t \in \mathbb{R}$ fixo. Mostre que a função $S(p) = \frac{\operatorname{sen} t |p|}{|p|}$, $p \in \mathbb{R}^n$, se estende a uma função analítica $S(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, e que vale a estimativa

$$|S(\zeta)| \leq C(t) e^{t |\operatorname{Im} \zeta|}.$$

3.6 Mostre que a função de Riemann da equação da onda em três variáveis espaciais ($n=3$) é dada por

$$R_1(t) = \frac{1}{4\pi t} \delta(r-c|t|),$$

onde $\delta(r-r_0)$, $r_0 > 0$, é a distribuição (com suporte na esfera $|x|=r_0$) definida por

$$\langle \delta(r-r_0), \phi \rangle = \int_{|x|=r_0} \phi(x) dS_x \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

3.7 Seja $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, $k=0,1,\dots$. Mostre que

$$v(t) = \int_0^t R_1(t-\tau) * f(\tau) d\tau$$

pertence a $C^{k+2}(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ e satisfaz $\square v = f$ com da dos iniciais $v(0)=0$, $\frac{\partial v}{\partial t}(0) = 0$.

3.8 Seja $P = P(\partial/\partial t, \partial/\partial x) = \sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j,\alpha} (\partial/\partial t)^j (\partial/\partial x)^\alpha$ um operador diferencial em \mathbb{R}^{n+1} de ordem m (com coeficientes constantes e $a_{m,0} \neq 0$). Se $R_{m-1} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ é solução do problema de Cauchy

$$P u = 0$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0 \quad (0 \leq j < m-1), \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} = \delta_0, \quad \text{para } t=0,$$

então $E_+(t) \stackrel{\text{def}}{=} Y(t) R_{m-1}(t)$ é uma solução fundamental de P (i.e., $PE_+ = \delta_0$) com suporte no semi-espaço $t \geq 0$.

3.9 Demonstre o teorema 3.9.

CAPÍTULO IV

SISTEMAS HIPERBÓLICOS SIMÉTRICOS.

O PROBLEMA DE CAUCHY E O MÉTODO DE ENERGIA.

SOLUÇÕES COM ENERGIA FINITA.

A FUNÇÃO DE RIEMANN E SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS.

4.1 - Introdução e Exemplos

Muitos dos fenômenos de propagação de onda da física clássica são governados por sistemas de equações diferenciais parciais de primeira ordem da forma

$$(4.1) \quad Lu \equiv A_0(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x)u = f,$$

onde $x=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $f=f(t, x)$ e $u=u(t, x)$ são matrizes $k \times 1$ (vetores colunas) e A_0, A_1, \dots, A_n, B são matrizes $k \times k$ com A_0 não-singular. Aqui, o vetor $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_k(t, x))^t$ representa, no ponto x no instante t , o efeito de possíveis fontes (ou sorvedouros) no meio em que se verifica a propagação (\mathbb{R}^n , no nosso caso), enquanto que $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_k(t, x))^t$ descreve o estado do meio. Este último diz-se *homogêneo* se $A_0(x) = A_0, \dots, A_n(x) = A_n, B(x) = B$ são constantes.

Mesmo se tratando de um meio homogêneo, em geral o problema de Cauchy (global) para (4.1) com dado inicial

$$(4.2) \quad u = u_0 \quad \text{para} \quad t = 0$$

não é bem posto no sentido de que admite uma única solução $u = u(t, x) \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ dados $f = f(t, x) \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ e $u_0 = u_0(x) \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$ arbitrários (1). Conforme veremos no próximo capítulo, a exigência de que o problema de Cauchy (4.1)-(4.2) (num meio homogêneo) seja bem-posto impõe condições algébricas bastantes severas nos coeficientes A_j , $0 \leq j \leq n$. Neste capítulo, vamos considerar um caso importante em que (4.1)-(4.2) (num meio homogêneo) é bem posto. Trata-se dos sistemas da forma

$$(4.3) \quad A_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

onde A_0, \dots, A_n são matrizes Hermitianas simétricas com A_0 positiva definida. Estes sistemas fazem parte dos chamados *sistemas hiperbólicos simétricos*, introduzidos por K.O. Friedrichs em [6]. Vejamos alguns exemplos (Cf. [27], [17]).

(1) Observe que se temos um teorema de existência e unicidade então a dependência contínua da solução u nos dados f e u_0 , isto é, a continuidade da aplicação linear $[C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k \times [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k \ni (f, u_0) \longmapsto u \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$, decorre automaticamente do teorema do gráfico fechado.

Exemplo 1. (Equação das ondas acústicas). Num meio não-homogêneo, a equação que governa a propagação de ondas acústicas tem a forma

$$(4.4) \quad \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho(x) \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho(x)} \nabla p \right),$$

onde $x=(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $p=p(t, x)$ é a diferença entre a pressão instantânea e a pressão de equilíbrio, $c(x)$ é a velocidade do som e $\rho(x)$ é a densidade de equilíbrio. Pon-do $u = \left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial p}{\partial x_3}, \frac{\partial p}{\partial t} \right)^t$, (4.4) pode ser escrita na forma do sistema

$$(4.5) \quad A_0(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

onde $A_0(x) = \begin{pmatrix} \rho(x) & & & \\ & \rho(x) & & \\ & & \rho(x) & \\ \circ & & & \frac{1}{\rho(x) c^2(x)} \end{pmatrix}$ e

$$\sum_{j=1}^3 A_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} & & & \vdots & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ & & & \vdots & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ & & \circ & \vdots & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que se o meio é homogêneo temos $\rho(x) = \text{constante}$,

e, assim, (4.4) reduz-se à nossa tão conhecida

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0.$$

Convidamos o leitor a fornecer uma outra maneira de colocar a equação acima na forma (4.3) de sorte que a densidade de ρ não esteja presente (Exercício 3.1).

Exemplo 2. (Equações de Maxwell). As equações de Maxwell num meio não-homogêneo têm a forma

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{jk}(x) \frac{\partial E_k}{\partial t} - (\text{rot } H)_j = 0, \quad j=1,2,3,$$

$$\sum_{k=1}^3 \mu_{jk}(x) \frac{\partial H_k}{\partial t} + (\text{rot } E)_j = 0$$

onde $x(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $E=(E_1, E_2, E_3)$ e $H=(H_1, H_2, H_3)$ são os vetores de campo elétrico e magnético, enquanto que as matrizes $\epsilon=(\epsilon_{jk})$ e $\mu=(\mu_{jk})$ são os chamados tensores de permeabilidade dielétrica e magnética, respectivamente (o meio diz-se *isotrópico* se ϵ e μ são matrizes escalares).

Pondo $u=(E, H)^t=(E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3)^t$, as equações de Maxwell podem ser escritas na forma do sistema (4.5), onde agora $A_0(x)$ e $\sum_{j=1}^3 A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ são as matrizes 6×6

$$\begin{pmatrix} \epsilon(x) & \circ \\ \dots & \dots \\ \circ & \mu(x) \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} \circ & \text{rot} \\ \dots & \dots \\ -\text{rot} & \circ \end{pmatrix},$$

respectivamente, com $\text{rot} = \begin{pmatrix} \bigcirc & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & \bigcirc & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \bigcirc \end{pmatrix}$

O sistema (4.3) corresponde ao caso de um meio homogêneo em que $\varepsilon(x) = \text{constante}$, $\mu(x) = \text{constante}$.

Exemplo 3. (Equações da elasticidade). A propagação de ondas elásticas num meio não-homogêneo é governada por equações da forma

$$(4.6) \quad \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} = \sum_{j,m,n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{mn}^{ij}(x) \frac{\partial \omega_m}{\partial x_n}), \quad i=1,2,3,$$

onde $x=(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\omega=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ é o vetor deslocamento e $\Sigma = (\Sigma_{ij})$ é o chamado tensor de stress definido

por $\Sigma_{ij} = \sum_{m,n=1}^3 C_{mn}^{ij} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_n}$: os C_{mn}^{ij} satisfazem as relações

$$C_{mn}^{ij} = C_{mn}^{ji} = C_{nm}^{ji} = C_{ji}^{nm}. \quad \text{Pondo } u=(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{33}, \Sigma_{12}, \Sigma_{23}, \Sigma_{31},$$

$\frac{\partial \omega_1}{\partial t}, \frac{\partial \omega_2}{\partial t}, \frac{\partial \omega_3}{\partial t})^t$, as equações da elasticidade (4.6) podem

ser escritas como um sistema 9×9 da forma (4.5), onde

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} \Gamma(x) & \vdots & \bigcirc \\ \dots & \vdots & \dots \\ \bigcirc & \vdots & I_3 \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=1}^3 A_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \bigcirc & \vdots & P \\ \dots & \vdots & \dots \\ P & \vdots & Q^t & \bigcirc \end{pmatrix},$$

$\Gamma(x)$ é a inversa da matriz 6x6 positiva definida

$$\Gamma(x) = \begin{bmatrix} c_{11}^{11} & c_{22}^{11} & c_{33}^{11} & c_{12}^{11} & c_{23}^{11} & c_{31}^{11} \\ c_{11}^{22} & c_{22}^{22} & c_{33}^{22} & c_{12}^{22} & c_{23}^{22} & c_{31}^{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{11}^{31} & c_{22}^{31} & c_{33}^{31} & c_{12}^{31} & c_{23}^{31} & c_{31}^{31} \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \circ & \circ \\ \circ & \frac{\partial}{\partial x_2} & \circ \\ \circ & \circ & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} e$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \circ \\ \circ & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & \circ & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

Exemplo 4. (Equações da Linha de Transmissão). As equações

$$L(x) \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial x} = 0, \quad C(x) \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} = 0,$$

governam a corrente i e a tensão e numa linha de transmissão, onde $L(x)$ e $C(x)$ representam a indutância e capacitância por unidade de comprimento da linha. Estas equações podem evidentemente ser colocadas na forma do sistema (4.5), com $u=(i, e)^t$.

Exemplo 5. (Equações em Magneto-gas-dinâmica). V. [17], cap.

4.2 - Velocidades Características. Ondas Planas.

Vamos considerar o sistema (4.3), onde assumi-
mos, sem perda de generalidade, que $A_0 = I$ (caso contrário,
multiplicamos (4.3) à esquerda por A_0^{-1}):

$$(4.7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0.$$

Vejamos sob que condições obtemos soluções da
forma

$$u(t, x) = \phi(t\lambda - x \cdot p),$$

onde $\phi \in [C^1(\mathbb{R})]^k$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ são dados. De
vemos ter $\lambda \phi' - \sum_{j=1}^n p_j A_j \phi' = 0$, i.e.,

$$(4.8) \quad (\lambda I - \sum_{j=1}^n p_j A_j) \phi' = 0.$$

Denotando por $A(p)$ a matriz $\sum_{j=1}^n p_j A_j$ e por $\lambda_1(p), \dots,$
 $\lambda_k(p)$ os autovalores de $A(p)$ enumerados em ordem decres-
cente contando as multiplicidades,

$$\lambda_1(p) \geq \dots \geq \lambda_k(p) \quad (1),$$

vemos de (4.8) que para cada $0 \neq p \in \mathbb{R}^n$, o sistema (4.7) pos-
sui como soluções as ondas planas $\phi(t\lambda_j(p) - x \cdot p)$ que

(1) Observe que os $\lambda_j(p)$ são reais pois $A(p)$ é Hermitia
na simétrica.

se propagam na direção de $\omega = p/|p|$ com velocidades $\lambda_j(p)/|p|$, $j=1, \dots, n$. Por esta razão, os autovalores $\lambda_j(\omega)$ ($j=1, \dots, n$, $\omega \in S^{n-1}$) são também chamados de velocidades características de (4.7).

À esta altura, cabem alguns comentários importantes sobre os autovalores e autovetores de $A(p)$. Uma vez que $A(p)$ é homogênea de grau 1 em p (i.e., $A(rp) = rA(p) \forall r \in \mathbb{R}$), é fácil ver que o mesmo é verdade para os seus autovalores:

$$\lambda_j(rp) = r \lambda_j(p).$$

Além disso, pode-se mostrar que cada $\lambda_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua ([28], Teorema 1).

Quanto aos autovetores, está claro que uma vez fixado $p \in \mathbb{R}^n$ podemos escolher de muitas maneiras um sistema ortonormal completo $\{e_1(p), \dots, e_k(p)\}$ de autovetores de $A(p)$ correspondendo aos autovalores $\lambda_1(p), \dots, \lambda_k(p)$. Um fato não trivial demonstrado em [28] (Teorema 1) é que uma tal escolha de autovetores pode ser feita de maneira que cada $e_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ seja uma função mensurável. Observe que e_j é homogênea de grau 0:

$$e_j(rp) = e_j(p).$$

Feitas estas considerações, vamos estabelecer, nos parágrafos a seguir, resultados análogos àqueles ob

tidos para a equação da onda nas seções 1 e 2.

4.3 - Existência de Solução com Dado Inicial no Espaço S^k .

Aplicando formalmente a transformada de Fourier na variável x ao problema de Cauchy (4.7)-(4.2), obtemos o problema de Cauchy para a equação diferencial ordinária

$$\tilde{u}_t + iA(p)\tilde{u} = 0$$

com dado inicial

$$\tilde{u}(0,p) = \tilde{u}_0(p) \quad (1).$$

A solução é evidentemente dada por

$$(4.9) \quad \tilde{u}(t,p) = e^{-itA(p)}\tilde{u}_0(p).$$

Agora, decompondo $\tilde{u}_0(p)$ segundo os autovetores $e_j(p)$, temos

$$\tilde{u}_0(p) = \sum_{j=1}^k \tilde{u}_{0,j}(p)e_j(p), \quad \tilde{u}_{0,j}(p) = \tilde{u}_0(p) \cdot e_j(p),$$

e observando que $A(p)e_j(p) = \lambda_j(p)e_j(p)$ implica

$e^{-itA(p)}e_j(p) = e^{-it\lambda_j(p)}e_j(p)$, podemos reescrever (4.9) como

$$\tilde{u}(t,p) = \sum_{j=1}^k \tilde{u}_{0,j}(p)e^{-it\lambda_j(p)}e_j(p).$$

(1) Como de costume, consideramos $p \in \mathbb{R}^n$ como um parâmetro.

Portanto, tomando a transformada de Fourier inversa (na variável p) da expressão acima, obtemos formalmente

$$(4.10) \quad u(t, x) = F^{-1}[\hat{u}(t, \cdot)](x) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} e^{i[x \cdot p - t\lambda_j(p)]} \hat{u}_{0,j}(p) e_j(p) dp.$$

Theorema 4.1. Se $u_0 \in [S(\mathbb{R}^n)]^k$ então $u = u(t, x)$ definido acima pertence a $[C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ e é solução do sistema (4.7) com dado inicial $u(0, \cdot) = u_0$.

Demonstração. A demonstração é análoga àquela do Teorema 4.1. Como $u_0 \in S^k$ temos também $\hat{u}_0 \in S^k$, de sorte que valem as estimativas

$$(4.11) \quad |\hat{u}_0(p)| \leq \frac{C_m}{(1+|p|)^m}$$

com constantes $C_m > 0$, $m=1, 2, \dots$. Portanto, lembrando que os $e_j(p)$'s são funções mensuráveis com $|e_j(p)|=1$, concluímos que $u(t, x)$ dado em (4.10) está bem definido. De fato, o integrando $e^{ix \cdot p} \hat{u}(t, p)$ de (4.10) é infinitamente diferenciável em relação aos parâmetros t e x valendo as estimativas

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell D_x^\alpha [e^{ix \cdot p} \hat{u}(t, p)] \right| \leq C_{\ell, \alpha, m} (1+|p|)^{|\alpha| + \ell - m},$$

quaisquer que sejam $\ell, m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. (Use (4.11) e o fato

que existe $C > 0$ tal que $|\lambda_j(p)| \leq C|p| \quad \forall p \in \mathbb{R}^n, \quad j=1, \dots, k,$
pois cada λ_j é contínua e homogênea de grau 1.) Logo,
como $m \in \mathbb{Z}_+$ acima pode ser tomado arbitrariamente grande,
estas estimativas nos mostram que $u(t, x)$ é uma função
infinitamente diferenciável e podemos derivar $u(t, x)$ deri
vando sob o sinal de integração em (4.10). Em particular,
temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^n A_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} =$$

$$C_n \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} [-i\lambda_j(p) + i \sum_{\nu=1}^n p_\nu A_\nu] e^{i[x \cdot p - t\lambda_j(p)]} u_{0,j}(p) e_j(p) dp = 0,$$

$C_n = (2\pi)^{-n/2}$, pois $\lambda_j(p) e_j(p) = A(p) e_j(p) = \sum_{\nu=1}^n p_\nu A_\nu e_j(p)$. A
condição inicial $u(0, x) = u_0(x)$ é também imediatamente veri
ficada em (4.10).

Q.E.D.

Veremos a seguir o método de energia para o sis
tema (4.7) o qual, entre outras coisas, nos fornecerá uni
cidade para o problema de Cauchy (4.7)-(4.2).

4.4 - O Método de Energia. Aplicações.

Seja $u(t, x)$ uma solução de classe C^1 do siste
ma (4.7). Formando o produto escalar (em \mathbb{C}^k) de u com
(4.7) e tomando a parte real, obtemos a identidade

$$\operatorname{Re}\left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}\left(u \cdot A_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0, \quad \text{i.e.,}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u \cdot u) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (u \cdot A_j u) = 0$$

uma vez que $A_j^* = \bar{A}_j^t = A_j$. Observe que a identidade acima está escrita na forma de divergência (nas variáveis t e x)

$$(4.12) \quad \operatorname{div}_{(t,x)} (E, F) = 0,$$

onde

$$E = |u|^2 \quad \text{e} \quad F = ((u, A_1 u), \dots, (u, A_n u)).$$

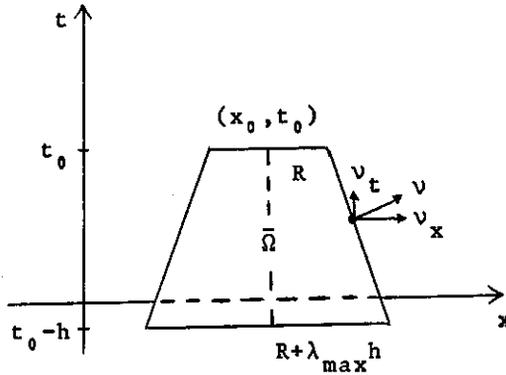
Definindo

$$(4.13) \quad \lambda_{\max} = \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \omega \in S^{n-1}}} |\lambda_j(\omega)|,$$

e integrando (4.12) sobre o tronco de cone $\bar{\Omega} = \{(t, x) \mid |x - x_0| \leq R + \lambda_{\max}(t_0 - t), t_0 - h \leq t \leq t_0\}$, onde $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $h, R > 0$, obtemos, pelo teorema da divergência,

$$(4.14) \quad \int_{\partial\Omega} (E v_t + F \cdot v_x) dS = 0,$$

com $v = (v_t, v_x)$ indicando a normal exterior (unitária) a $\partial\Omega$.



Uma vez que $v = (1,0)$ e $v = (-1,0)$ na "parte superior" e "inferior" de $\partial\Omega$, respectivamente, (4.14) fornece

$$\int_{B(x_0, R)} |u(t_0, x)|^2 dx - \int_{B(x_0, R + \lambda_{\max} h)} |u(t_0 - h, x)|^2 dx =$$

$$= - \int_{\Gamma} (E v_t + F \cdot v_x) dS = - \int_{\Gamma} u \cdot [v_t I - A(v_x)] u dS.$$

Finalmente, observando que $v_t = \lambda_{\max} |v_x|$ em Γ e em vista da definição de λ_{\max} , obtemos $v_t I - A(v_x) = |v_x| [\lambda_{\max} I - A(v_x / |v_x|)] \geq 0$, de sorte que a integral sobre Γ acima é ≥ 0 .

Dado um conjunto mensurável $M \subset \mathbb{R}^n$, vamos chamar a quantidade (que pode ser infinita)

$$E_M[u; t] = \int_M |u(t, x)|^2 dx$$

de energia de u contida em M no tempo t . Então, demonstramos acima o

Teorema 4.2. Sejam $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $h, R > 0$ dados. Se $u = u(t, x)$ é uma solução de classe C^1 de (4.7), então a energia de u contida na bola $B(x_0, R)$ no tempo t_0 é menor ou igual à energia de u contida na bola $B(x_0, R + \lambda_{\max} h)$ no tempo $t_0 - h$, i.e.,

$$(4.15) \quad E_{B(x_0, R)} [u; t_0] \leq E_{B(x_0, R + \lambda_{\max} h)} [u; t_0 - h].$$

Observação 4.1. Se considerarmos o tronco de cone $\{(t, x) \mid |x - x_0| \leq R + \lambda_{\max}(t - t_0), t_0 - h \leq t \leq t_0\}$ com $R - \lambda_{\max} h > 0$, $h > 0$, mostramos análogamente que

$$(4.16) \quad E_{B(x_0, R - \lambda_{\max} h)} [u; t_0 - h] \leq E_{B(x_0, R)} [u; t_0].$$

As desigualdades (4.15) e (4.16) nos fornecem

$$(4.17) \quad E_{B(0, R)} [u; t] \leq E_{B(0, R + \lambda_{\max} |t|)} [u; 0],$$

onde $R > 0$ e $t \in \mathbb{R}$ são arbitrários, de onde concluímos o

Corolário 4.1. Se $u = u(t, x)$ é uma solução de classe C^1 de (4.7) com dado inicial $u_0 \equiv 0$, então $u \equiv 0$.

Também, como aplicações imediatas do método de energia, temos os seguintes resultados:

Corolário 4.2. (Teorema do domínio de dependência). Seja

$u(t,x)$ uma solução de classe C^1 de (4.7). Para cada $T > 0$, o valor de $u(T,x)$ num ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ só depende dos valores do dado inicial $u_0(x) = u(0,x)$ na bola $\overline{B(x_0, \lambda_{\max} T)}$. Mais geralmente, os valores de $u(T,x)$ num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ dependem apenas dos valores de u_0 em $U + \overline{B(0, \lambda_{\max} T)}$.

Corolário 4.3. Ainda assumindo que $u(t,x)$ é uma solução de classe C^1 de (4.7) com dado inicial $u_0(x) = u(0,x)$ temos, para cada $T > 0$,

$$\text{supp } u(T, \cdot) \subset \text{supp } u_0 + \overline{B(0, \lambda_{\max} T)} \quad (1),$$

i.e., "sinais originados no tempo $t=0$ se propagam com velocidade $\leq \lambda_{\max}$ ".

Analogamente ao caso da equação da onda, o teorema do domínio de dependência acima (ou o Corolário 4.3) nos permite remover a restrição no infinito para o dado inicial u_0 de sorte que basta termos u_0 infinitamente diferenciável para que o problema de Cauchy (4.7)-(4.2) admita uma única solução também infinitamente diferenciável.

Teorema 4.3. O problema de Cauchy (4.7)-(4.2) com $u_0 \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$ possui uma única solução $u \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$. Além disso, a aplicação linear $[C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k \ni u_0 \longmapsto u \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$

(1) Se $v(x) = (v_1(x), \dots, v_k(x))$ definimos $\text{supp } v = \bigcup_{j=1}^k \text{supp } v_j$.

é contínua ("dependência contínua da solução no dado inicial").

Demonstração. A unicidade decorre do Corolário 4.1. Quanto à existência, a demonstração é inteiramente análoga àquela do Teorema 4.4: considerando um recobrimento aberto $\{U_j \mid j=1,2,\dots\}$, localmente finito, de \mathbb{R}^n (com cada \bar{U}_j compacto), e uma partição da unidade $\{\phi_j\}$ subordinada a $\{U_j\}$, podemos escrever $u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j u_0$, onde cada $\phi_j u_0$ tem suporte compacto; então, se $u^{(j)}(t,x)$ é a solução (única) de (4.7) com dado inicial $\phi_j u_0$, o Corolário 4.3 nos mostra que $u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} u^{(j)}(t,x)$ esta bem definida; vemos também que $u \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ é uma solução de (4.7) com dado inicial $u(0, \cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j u_0 = u_0$.

A segunda afirmação do teorema, como já observamos, decorre automaticamente do teorema do gráfico fechado.

Q.E.D.

Teorema 4.4. (Princípio de Duhamel). Dado $f = f(t,x) \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$, seja $u^{(\tau)}$ a solução de (4.7) com dado inicial $u_0 = f(\tau, \cdot)$. Então,

$$v(t,x) = \int_0^t u^{(\tau)}(t-\tau, x) d\tau$$

é a única solução em $[C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ da equação não-homogênea

$$(4.18) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial v}{\partial x_j} = f$$

com dado inicial igual a zero.

Demonstração. Fica a cargo do leitor (cf. demonstraçãõ do Teorema 2.3).

Resumindo os Teoremas 4.3 e 4.4, podemos enunciar o

Teorema 4.5. O problema de Cauchy (4.18)-(4.2) é bem posto, i.e., dados $f=f(t,x) \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ e $u_0=u_0(x) \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$ existe uma única soluçãõ $u=u(t,x) \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ de (4.18)-(4.2) e a aplicaçãõ linear

$$[C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k \times [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k \ni (f, u_0) \longmapsto u \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$$

é contínua.

4.5 - Soluções com Energia Finita.

Seja $u(t,x)$ uma soluçãõ de (4.7) cujo dado inicial $u_0=u(0, \cdot)$ está em $[D(\mathbb{R}^n)]^k$. Entãõ, fazendo $R \rightarrow \infty$ em (4.16) e (4.15), obtemos

$$E_{\mathbb{R}^n}[u; t_0 - h] \leq E_{\mathbb{R}^n}[u; t_0] \leq E_{\mathbb{R}^n}[u; t_0 - h]$$

i.e.,

$$E_{\mathbb{R}^n}[u; t_0 - h] = E_{\mathbb{R}^n}[u; t_0].$$

Portanto, vemos que, em cada instante $t \in \mathbb{R}$, u tem energia finita em todo o \mathbb{R}^n a qual se mantém constante:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(0, x)|^2 dx \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dito em outras palavras, se X é o espaço $[\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]^k$ com o produto escalar usual de $[L^2(\mathbb{R}^n)]^k$ e se $U(t): X \rightarrow X$ é o operador (linear) definido por $U(t)u_0 = u(t, \cdot)$, então $U(t)$ é uma isometria para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$(4.19) \quad \|U(t)u_0\|_2 = \|u_0\|_2, \quad u_0 \in X, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, como temos unicidade para o problema de Cauchy com dado inicial num instante t_0 qualquer, concluímos que

$$(4.20) \quad U(t+t') = U(t)U(t') \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}.$$

Também, para cada $u_0 \in X$, usando a fórmula de Parseval e o fato que $[U(t)u_0](p) = \sum_{j=1}^k e^{-it\lambda_j(p)} \hat{u}_{0,j}(p) e_j(p)$, concluímos facilmente através do teorema da convergência dominada de Lebesgue que a aplicação $\mathbb{R} \times t \mapsto U(t)u_0 \in X$ é contínua, i.e.,

$$(4.21) \quad \lim_{t' \rightarrow t} \|U(t')u_0 - U(t)u_0\|_2 = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u_0 \in X.$$

Vemos assim que $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo uniparamétrico contínuo de operadores isométricos no espaço X . Agora, co

mo o espaço de Hilbert $H = [L^2(\mathbb{R}^n)]^k$ é o completamento de X , cada $U(t)$ estende-se por continuidade a um operador unitário (que continuamos a denotar por $U(t)$) de H sobre H e vê-se facilmente que as propriedades (4.19)-(4.21) permanecem válidas. (Observe que, para $u_0 \in H$, temos

$$U(t)u_0 = \lim_{v \rightarrow \infty} U(t)u_0^{(v)},$$

onde $(u_0^{(v)})$ é qualquer sucessão em X tal que $u_0^{(v)} \rightarrow u_0$ em H). Portanto, obtemos um grupo uniparamétrico contínuo $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de operadores unitários em H . Os elementos de H são chamados os dados iniciais com energia finita e, para cada $u_0 \in H$, a função contínua $t \mapsto U(t)u_0$ é chamada a solução com energia finita de (4.7) cujo dado inicial é u_0 . O fato de estarmos chamando $U(t)u_0$ de "solução" de (4.7) será justificada no Teorema 4.5 abaixo.

Dado $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0k})^t \in H$, vamos escrever $u(t) = U(t)u_0 = (u_1(t), \dots, u_k(t))^t \in H$. Como sabemos,

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} |u_j(t)(x)|^2 dx = \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} |u_{0j}(x)|^2 dx = \|u_0\|_2^2$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, de sorte que cada uma das funções $u_j(t, x) = u_j(t)(x)$ é de quadrado integrável localmente nas variáveis t e x , i.e., $u = u(t, x) \in [L^2_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$. Portanto, u define uma distribuição em \mathbb{R}^{n+1} através da fórmula:

$$(4.22) \quad \langle u, \psi \rangle = \sum_{j=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_j(t, x) \psi_j(t, x) dx dt,$$

$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)^t \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$. É claro que $u(t)$ também define uma distribuição em \mathbb{R}^n , para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$(4.23) \quad \langle u(t), \phi \rangle = \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} u_j(t, x) \phi_j(x) dx \quad (1),$$

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k)^t \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]^k.$$

Teorema 4.6. $u \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ é solução de (4.7) e satisfaz a condição inicial $u = u_0$ para $t=0$, i.e.,

$$(4.24) \quad \langle u, \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j^t \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \rangle = 0$$

para todo $\psi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ e

$$(4.25) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \langle u(t), \phi \rangle = \langle u_0, \phi \rangle$$

para todo $\phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]^k$.

Demonstração. Uma vez que a aplicação $t \mapsto u(t)$ é contínua de \mathbb{R} em $H = [L^2(\mathbb{R}^n)]^k$, a fortiori ela é contínua de \mathbb{R} em $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k$ e (4.25) é válido. Por outro lado, seja $u^{(v)}(t) = U(t)u_0^{(v)}$ com $u_0^{(v)} \in X = [\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]^k$ convergindo

(1) O leitor não deve confundir as definições (4.22) e (4.23), embora tenhamos usado a mesma notação \langle, \rangle .

para u_0 em H . Então, $u^{(v)} = u^{(v)}(t, x)$ converge para $u = u(t, x)$ em $[D'(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ pois, para cada $\psi \in [D(\mathbb{R}^{n+1})]^k$, tomando $T > 0$ tal que $\psi(x, t) = 0 \quad \forall |t| \geq T$, temos

$$\begin{aligned} |\langle u^{(v)} - u, \psi \rangle| &= \left| \sum_{j=1}^k \int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}^n} [u_j^{(v)}(t, x) - u_j(t, x)] \psi_j(t, x) dx dt \right| \leq \\ &\leq \left(\int_{-T}^T \|u^{(v)}(t) - u(t)\|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-T}^T \|\psi(t, \cdot)\|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2T)^{\frac{1}{2}} \|u_0^{(v)} - u_0\|_2 \|\psi\|_2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $v \rightarrow \infty$. Portanto, como cada $u^{(v)} \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ satisfaz $\partial u^{(v)} / \partial t + \sum_{j=1}^n A_j \partial u^{(v)} / \partial x_j = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle u, \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j^t \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \rangle &= \lim_{v \rightarrow \infty} \langle u^{(v)}, \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j^t \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \rangle \\ &= -\lim_{v \rightarrow \infty} \langle \frac{\partial u^{(v)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u^{(v)}}{\partial x_j}, \psi \rangle = 0, \end{aligned}$$

o que mostra (4.24).

Q.E.D.

4.6 - A Função de Riemann. Soluções em D' .

Neste parágrafo, vamos considerar, de uma maneira mais geral, o problema de Cauchy (4.7)-(4.2) em que o dado inicial é uma distribuição arbitrária $u_0 \in [D'(\mathbb{R}^n)]^k$.

Como veremos, ele admitirá uma única solução $u = u(t, x) \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ no seguinte sentido: u é uma função contínua $t \mapsto u(t)$ de \mathbb{R} em $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k$ (i.e., $\langle u, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(t), \psi(t, \cdot) \rangle dt$ $\forall \psi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$) tal que

$$\langle u, \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j^t \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \rangle = 0$$

para todo $\psi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ e

$$\langle u(0), \phi \rangle = \langle u_0, \phi \rangle$$

para todo $\phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]^k$. De fato, se u é solução no sentido acima então, como u é uma função contínua de t com valores em $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k$, também qualquer derivada espacial $D_x^\alpha u$ de u é uma função contínua de t com valores em $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k$. Em particular, $\partial u / \partial t = -\sum_{j=1}^n A_j \partial u / \partial x_j$ é uma função contínua de t com valores em $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k$ de sorte que temos $u \in C^1(\mathbb{R}, [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k)$. Desta maneira, por indução, concluímos que $u \in C^\infty(\mathbb{R}, [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k)$. Observe também que u vai satisfazer (4.7) no sentido de que, para todo $\phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]^k$,

$$\langle \frac{d}{dt} u(t) + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} u(t), \phi \rangle = 0,$$

i.e.,

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), \phi \rangle + \sum_{j=1}^n \langle u(t), A_j^t \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \rangle = 0.$$

Inicialmente, vamos mostrar que o problema de Cauchy

$$(4.26) \quad \frac{\partial R}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial R}{\partial x_j} = 0$$

$$(4.27) \quad R = \delta I_k \quad \text{para } t=0 \quad (I_k = \text{matriz identidade } k \times k)$$

tem uma única solução. R é chamada a função de Riemann do sistema (4.7). Observe que R é uma matriz (em geral) de distribuições $R_{ij} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ($i, j=1, \dots, k$) e a ação de R numa função teste $\phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]^k$ fornece um vetor $\langle R, \phi \rangle \in \mathbb{C}^k$ de componentes $\langle R, \phi \rangle_i = \sum_{j=1}^k \langle R_{ij}, \phi_j \rangle$, $i=1, \dots, k$; isto é, $R \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^{k^2}$.

Seja $\tilde{R}(t, p) = (2\pi)^{-n/2} e^{-itA(p)}$ onde, para cada $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $A(p)$ é a matriz Hermitiana $\sum_{j=1}^n p_j A_j$ (v. (4.9)). É evidente que cada elemento da matriz $\tilde{R}(t, p)$ é uma função infinitamente diferenciável de t e p , de sorte que podemos considerar \tilde{R} como uma aplicação C^∞ , $t \mapsto \tilde{R}(t)$, de \mathbb{R} em $[C^\infty(\mathbb{R}^n)]^{k^2}$ e, portanto, C^∞ de \mathbb{R} em $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^{k^2}$. De fato, como $A(p)$ é Hermitiana, temos $|\tilde{R}(t, p)| = |(2\pi)^{-n/2} e^{-itA(p)}| = (2\pi)^{-n/2}$ (1) e podemos assim considerar \tilde{R} como uma aplicação $t \mapsto \tilde{R}(t)$ em $C^\infty(\mathbb{R}, [S'(\mathbb{R}^n)]^{k^2})$: para cada $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{R}(t)$ é uma matriz

(1) Aqui, $|\tilde{R}(t, p)|$ denota a norma da matriz $\tilde{R}(t, p)$.

de distribuições temperadas definida pela fórmula

$$(4.28) \quad \langle \tilde{R}(t), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{R}(t, p) \phi(p) dp, \quad \phi \in [S(\mathbb{R}^n)]^k.$$

Seja $R(t)$ a transformada de Fourier inversa de $\tilde{R}(t)$.

Teorema 4.7. $R(t)$ é a solução do problema de Cauchy (4.26)-(4.27).

Demonstração. Como $\phi \in [S(\mathbb{R}^n)]^k$, podemos derivar (4.28) em relação a t derivando sob o sinal de integração obtendo

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{R}(t), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{R}(t, p) [-iA(p)] \phi(p) dp,$$

i.e.,

$$\frac{d}{dt} \langle R(t), \tilde{\phi} \rangle = -i \int_{\mathbb{R}^n} A(p) \tilde{R}(t, p) \phi(p) dp.$$

Também temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \langle A_j \frac{\partial}{\partial x_j} R(t), \tilde{\phi} \rangle &= \sum_{j=1}^n \langle ip_j A_j \tilde{R}(t), \phi \rangle \\ &= i \langle A(p) \tilde{R}(t), \phi \rangle, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{d}{dt} \langle R(t), \tilde{\phi} \rangle + \sum_{j=1}^n \langle A_j \frac{\partial}{\partial x_j} R(t), \tilde{\phi} \rangle = 0 \quad \forall \phi \in [S(\mathbb{R}^n)]^k,$$

i.e., $R(t)$ é solução de (4.26). Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle R(0), \tilde{\phi} \rangle &= \langle \tilde{R}(0), \phi \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{itA(p)} \phi(p) dp \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(p) dp = \tilde{\phi}(0) = \langle \delta_{I_k}, \tilde{\phi} \rangle, \end{aligned}$$

i.e., $R(0) = \delta_{I_k}$. Deixamos a unicidade a cargo do leitor (cf. demonstraco do teorema 3.2) Q.E.D.

Teorema 4.8. Para cada $t \in \mathbb{R}$, $R(t)$ tem suporte contido na bola $B(0, \lambda_{\max} |t|)$, i.e.,

$$\text{supp } R \subset \Gamma,$$

onde Γ  o cone $\{(t, x) \mid |x| \leq \lambda_{\max} |t|\}$.

Para a demonstraco do teorema acima usaremos o

Lema 4.1. (i) Se $C = A + iB$ onde A e B são matrizes Hermi-
tianas $k \times k$, então as partes imaginárias dos autovalores
de C são majoradas (em valor absoluto) por $\Lambda = \max_{1 \leq j \leq k} |\lambda_j|$
onde os λ_j 's são os autovalores de B .

(ii) Se C  uma matriz $k \times k$ arbitrária, temos
a estimativa

$$(4.29) \quad |e^{iC}| \leq M_k (1 + |C|)^k e^{\max_{1 \leq j \leq k} |\text{Im } \lambda_j|}$$

para alguma constante $M_k > 0$ (independente de C), onde
os λ_j ' são os autovalores de C .

Demonstração. (i) Seja λ um autovalor arbitrário de C e v um autovetor unitário correspondente. Temos

$$\lambda = (Cv \cdot v) = (Av \cdot v) + i(Bv \cdot v),$$

onde $(Av \cdot v)$ e $(Bv \cdot v)$ são reais uma vez que A e B são Hermitianas. Logo,

$$|\operatorname{Im} \lambda| = |(Bv \cdot v)| \leq \Lambda.$$

(ii) Observamos inicialmente que para uma matriz $k \times k$ inversível D temos a estimativa $|D^{-1}| \leq N_k |\det D|^{-1} |D|^{k-1}$ para alguma constante $N_k > 0$ (independente de D). Com efeito, $D^{-1} = (\det D)^{-1} \operatorname{Cof}(D)$ onde $\operatorname{Cof}(D)$ é a matriz dos cofatores de D e cada elemento de $\operatorname{Cof}(D)$ é um polinômio de grau $(k-1)$ nos elementos d_{ij} de D . Agora, se $\Lambda = \max_{1 \leq j \leq k} |\lambda_j|$, $\Lambda_{im} = \max_{1 \leq j \leq k} |\operatorname{Im} \lambda_j|$, onde os λ_j 's são os autovalores de C , e se γ é a fronteira (orientada positivamente) da região limitada pelas retas $\operatorname{Im} z = \Lambda_{im} + 1$, $\operatorname{Im} z = -\Lambda_{im} - 1$ e pelo círculo $|z| = \Lambda + 1$, então

$$e^{iC} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{iz} (zI - C)^{-1} dz.$$

Portanto, como $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z} \leq e^{\Lambda_{im} + 1}$ para $z \in \gamma$, obtemos

$$(4.30) \quad |e^{iC}| \leq (1 + \Lambda) e^{1 + \Lambda_{im}} \max_{z \in \gamma} |(zI - C)^{-1}|.$$

Por outro lado, em vista da observação acima, temos

$$(4.31) \quad |(zI-C)^{-1}| \leq N |zI-C|^{k-1} \left(\prod_{j=1}^k |z-\lambda_j| \right)^{-1},$$

logo

$$\max_{z \in \gamma} |(zI-C)^{-1}| \leq N(1+\Lambda+|C|)^{k-1},$$

pois $|z-\lambda_j| \geq 1$ para $z \in \gamma$. Combinando (4.30), (4.31) e o fato que $\Lambda \leq |C|$, obtemos a desigualdade procurada.

Q.E.D.

Demonstração do Teorema 4.8. Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{R}(t, p) = e^{-itA(p)}$ é uma função analítica de $p \in \mathbb{R}^n$, a qual se extende a uma função analítica de $\zeta \in \mathbb{C}^n$:

$$\tilde{R}(t, \zeta) = e^{-itA(\zeta)} = e^{-it[A(p)+iA(q)]},$$

onde $\zeta = p+iq$, $p, q \in \mathbb{R}^n$. Logo, a parte (ii) do Lema 4.1 fornece a estimativa

$$(4.32) \quad |\tilde{R}(t, \zeta)| \leq M_k (1+|tA(\zeta)|)^k e^{\max_{1 \leq j \leq k} |\operatorname{Im} \lambda_j(\zeta)| |t|},$$

onde os $\lambda_j(\zeta)$'s são os autovalores de $A(\zeta) = A(p) + iA(q)$ e, observando que $A(p)$ e $A(q)$ são Hermitianas, a parte (i) do mesmo lema implica que

$$(4.33) \quad \max_{1 \leq j \leq k} |\operatorname{Im} \lambda_j(\zeta)| \leq \max_{1 \leq j \leq k} |\lambda_j(q)|,$$

onde os $\lambda_j(q)$ são os autovalores de $A(q)$. Por outro lado, como cada $\lambda_j(q)$ é homogêneo de grau 1, temos

$$(4.34) \quad \max_{1 \leq j \leq k} |\lambda_j(q)| \leq |q| \lambda_{\max}.$$

Portanto, combinando (4.32) - (4.34) e observando que

$$|A(\zeta)| = \left| \sum_{j=1}^k \zeta_j A_j \right| \leq (\text{constante}) |\zeta|, \text{ obtemos}$$

$$|\tilde{R}(t, \zeta)| \leq M_k(t) (1 + |\zeta|)^k e^{\lambda_{\max} |t| |q|}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

onde $q = \text{Im } \zeta$. A estimativa acima juntamente com o teorema de Paley-Wiener (para distribuições, V. apêndice) nos permitem concluir que $R(t)$ tem suporte contido na bola $\overline{B(0, \lambda_{\max} |t|)}$.

Q.E.D.

Agora, que sabemos que $R(t)$ tem suporte compacto para cada $t \in \mathbb{R}$, podemos formar a convolução $R(t) * u_0 \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k$ de $R(t)$ com uma distribuição arbitrária $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0k})^t \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k$. Por definição, a i -ésima componente de $R(t) * u_0$ é a distribuição $u_i(t) = (R(t) * u_0)_i = \sum_{j=1}^k R_{ij}(t) * u_{0j} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$(4.35) \quad \langle u_i(t), \phi \rangle = \sum_{j=1}^k \langle R_{ij}(t), \psi_j \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

onde $\psi_j(y) = \langle u_{0j}, \phi(\cdot + y) \rangle$.

Teorema 4.9. O problema de Cauchy (4.7) - (4.2) com dado inicial $u_0 \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k$ possui uma única solução, a qual é dada por

$$u(t) = R(t) * u_0.$$

Além disso, $u \in C^\infty(\mathbb{R}, [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k)$.

Demonstração. Mostramos no teorema 4.7 que a função de Riemann $R(t)$ satisfaz

$$(4.36) \quad \frac{d}{dt} \langle R(t), \phi \rangle + \sum_{j=1}^n \langle A_j \frac{\partial}{\partial x_j} R(t), \phi \rangle = 0$$

e

$$(4.37) \quad \langle R(0), \phi \rangle = \langle \delta I_k, \phi \rangle = \psi(0)$$

para todo $\psi \in [S(\mathbb{R}^n)]^k$. De fato, uma vez que $R(t)$ tem suporte compacto (para cada $t \in \mathbb{R}$), podemos tomar ψ acima em $[C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$. Agora, a i -ésima componente de (4.36) escreve-se como

$$\frac{d}{dt} \sum_{\ell=1}^k \langle R_{i\ell}(t), \psi_\ell \rangle + \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^k (-1) \sum_{m=1}^k a_{im}^j \langle R_{m\ell}(t), \frac{\partial \psi_\ell}{\partial x_j} \rangle = 0,$$

onde a_{im}^j é o elemento da i -ésima linha e m -ésima coluna de A_j e $R_{i\ell}(t)$ é o elemento da i -ésima linha e ℓ -ésima coluna de $R(t)$. Escolhendo $\psi_\ell(y) = \langle u_{0\ell}, \phi_i(\cdot + y) \rangle$ para cada ℓ , onde $\phi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é arbitrário, a igualdade acima torna-se

$$(4.38) \quad \frac{d}{dt} \langle u_i(t), \phi_i \rangle + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k (-1) a_{im}^j \langle u_m(t), \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \rangle = 0,$$

onde $u_i(t)$ é a i -ésima componente de $u(t) = R(t) * u_0$ (v. (4.35)). Portanto, somando (4.38), de $i=1$ a $i=k$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), \phi \rangle + \sum_{j=1}^n \langle A_j u(t), \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \rangle = 0,$$

i.e.,

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), \phi \rangle + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u(t), \phi \rangle = 0,$$

onde $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k) \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]^k$ é arbitrário, o que nos mostra que $u(t) = R(t) * u_0$ é solução de (4.7). A condição inicial $u(0) = u_0$ é também facilmente verificada, tendo em vista que $R(0) = \delta I_k$. Finalmente, o fato que $u \in C^\infty(\mathbb{R}, [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k)$ segue da observação feita no início desta seção. Deixamos a unicidade a cargo do leitor.

Q.E.D.

Teorema 4.10. Sejam $u_0 \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k$ e $f \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ dados, onde f é uma função $t \mapsto f(t) \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k$ em $C^m(\mathbb{R}, [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k)$. Então, o problema de Cauchy (não-homogêneo)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f$$

$$u = u_0 \quad \text{para} \quad t = 0$$

possui uma única solução em $C^{m+1}(\mathbb{R}, [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k)$, a qual é dada por

$$u(t) = R(t) * u_0 + \int_0^t R(t-\tau) * f(\tau) d\tau.$$

Em particular, se $f \in C^\infty(\mathbb{R}, [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^k)$ então o mesmo é verdade para a solução u .

Demonstração. Exercício 4.4

Vamos agora construir soluções fundamentais para o operador $\partial/\partial t + \sum_{j=1}^n A_j \partial/\partial x_j$ em (4.7), i.e., (matrizes $k \times k$ de) distribuições $E = E(t, x) \in [D'(\mathbb{R}^{n+1})]^{k^2}$ tais que

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial E}{\partial x_j} = \delta(t, x) I_k.$$

De maneira análoga a que fizemos na seção 3.4., vamos definir $E_+ \in [D'(\mathbb{R}^{n+1})]^{k^2}$ através da fórmula

$$(4.39) \quad \langle E_+, \psi \rangle = \int_0^\infty \langle R(t), \psi(t, \cdot) \rangle dt, \quad \psi \in [D'(\mathbb{R}^{n+1})]^k.$$

Teorema 4.11. E_+ é uma solução fundamental para (4.7) com suporte contido no cone $\Gamma_+ = \{(t, x) \mid |x| \leq \lambda_{\max} t, t \geq 0\}$.

Demonstração. Dado $\psi \in [D'(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ arbitrário, temos

$$\left\langle \frac{\partial E_+}{\partial t}, \psi \right\rangle = - \langle E_+, \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle = - \int_0^\infty \langle R(t), \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \cdot) \rangle dt,$$

logo

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial E_+}{\partial t}, \psi \right\rangle &= - \int_0^\infty \frac{d}{dt} \langle R(t), \psi(t, \cdot) \rangle dt + \int_0^\infty \left\langle \frac{dR}{dt}(t), \psi(t, \cdot) \right\rangle dt \\ &= -(0 - \langle R(0), \psi(0, \cdot) \rangle) + \int_0^\infty \left\langle \frac{dR}{dt}(t), \psi(t, \cdot) \right\rangle dt \end{aligned}$$

em vista da fórmula de Leibniz $\frac{d}{dt} \langle R(t), \psi(t, \cdot) \rangle =$

$= \langle \frac{dR}{dt}(t), \psi(t, \cdot) \rangle + \langle R(t), \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \cdot) \rangle$. Portanto, como $R(0) = \delta I_k$ e $R(t)$ satisfaz a equação $\frac{dR}{dt} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} R(t) = 0$ para cada t , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial E_+}{\partial t}, \psi \rangle &= \psi(0) - \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \langle A_j \frac{\partial}{\partial x_j} R(t), \psi(t, \cdot) \rangle dt \\ &= \psi(0) + \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \langle R(t), A_j^t \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(t, \cdot) \rangle dt \\ &= \psi(0) + \langle E_+, \sum_{j=1}^n A_j^t \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \rangle, \quad \text{i.e.,} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_+}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial E_+}{\partial x_j} = \delta I_k \quad \text{em} \quad [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})]^k$$

Finalmente, como $\text{supp } R(t) \subset \overline{B(0, \lambda_{\text{mat}} |t|)}$ para cada t , está claro da definição (4.39) que $\text{supp } E_+ \subset \Gamma_+$.

Q.E.D.

De uma maneira geral, qualquer solução fundamental do operador $\partial/\partial t + \sum_{j=1}^n A_j \partial/\partial x_j$ é da forma $E_+ + H$, onde H é uma solução arbitrária (em $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})]^{k^2}$) da equação homogênea $\partial H/\partial t + \sum_{j=1}^n A_j \partial H/\partial x_j = 0$. Observamos que H não precisa ser uma função contínua de t (com valores em $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)]^{k^2}$), i.e., as colunas $H^i \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ de H , $i=1, \dots, k$, não precisam ser da forma $R(t) * h$ com

$h \in [D'(R^n)]^k$.

Exercícios

4.1 Coloque a equação da onda $\partial^2 p / \partial t^2 - c^2 \Delta p = 0$ na forma do sistema $A_0 \partial u / \partial t + \sum_{j=1}^n A_j \partial u / \partial x_j = 0$ fazendo $u = (c^{-1} \partial p / \partial t, \partial p / \partial x_1, \dots, \partial p / \partial x_n)^t$.

4.2 Sob a transformada de Radon (V. seção 2.3), o problema de Cauchy (4.7)-(4.2) com $u_0 \in [S(R^n)]^k$ reduz-se ao seguinte problema de Cauchy numa variável espacial (onde $\omega \in S^{n-1}$ é um parâmetro):

$$\hat{u}_t + A(\omega) \hat{u}_s = 0$$

$$\hat{u}(0, s, \omega) = \hat{u}_0(s, \omega)$$

(i) Resolva, explicitamente este problema considerando as suas projeções sobre cada um dos autovetores $e_j(\omega)$ de $A(\omega) = \sum_{j=1}^n \omega_j A_j$ (escolhidos cf. seção 4.2). Em seguida, use a fórmula de inversão (Teorema 2.4) para obter u em termos de \hat{u}_0 .

(ii) Assuma agora que o núcleo $N(\omega)$ de $A(\omega)$ tem dimensão constante $\forall \omega \in S^{n-1}$ e que $n \geq 3$ é ímpar. Usando a expressão obtida para u no item acima,

mostre que se $u_0 \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]^k$ tem suporte contido na bola $\overline{B(0, R)}$ e é tal que $\hat{u}_0(s, \omega)$ não tem componente em $N(\omega) \forall \omega \in S^{n-1}$, então $u(t, x) = 0$ para $|x| < \lambda_{\min} |t| - R$, $|t| > R/\lambda_{\min}$, onde λ_{\min} é o mínimo sobre S^{n-1} dos valores absolutos de todos os autovalores de $A(\omega)$ que não são identicamente nulos (Este resultado constitui uma espécie de *Princípio de Huyghens* para o operador $\partial/\partial t + \sum_{j=1}^n A_j \partial/\partial x_j$).

4.3 Considere o problema de Cauchy (4.7)-(4.2) com $u_0 \in [H^s(\mathbb{R}^n)]^k$. Mostre que a solução u é uma função contínua de t com valores também em $[H^s(\mathbb{R}^n)]^k$, i.e., $u \in C(\mathbb{R}, [H^s(\mathbb{R}^n)]^k)$.

4.4 Demonstre o Teorema 4.10.

4.5 Exiba uma solução fundamental do operador $\partial/\partial t + \sum_{j=1}^n A_j \partial/\partial x_j$ em (4.7) cujo suporte esteja contido no semi-espaço $t \leq 0$.

CAPÍTULO V

SISTEMAS HIPERBÓLICOS GERAIS. PROBLEMAS DE CAUCHY BEM-POSTOS E POLINÔMIOS HIPERBÓLICOS. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS COM SUPORTE NUM CONE CONVEXO.

5.1 - O Problema de Cauchy para Sistemas.

Até agora estudamos extensivamente o problema de Cauchy para a equação da onda bem como para sistemas hiperbólicos simétricos de primeira ordem. Neste capítulo, vamos considerar, mais geralmente, o caso de um sistema de k equações diferenciais parciais em \mathbb{R}^{n+1} com coeficientes constantes. Se m é a maior das ordens dessas equações podemos escrever um tal sistema como

$$(5.1) \quad Pu = f,$$

onde $P = P(\partial/\partial x) = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha (\partial/\partial x)^\alpha$, os A_α 's são matrizes $k \times k$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $u = u(x_0, x_1, \dots, x_n)$ e $f = f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ tomam valores em \mathbb{C}^k . A matriz de polinômios $P(p_0, p_1, \dots, p_n)$ obtida substituindo-se $\partial/\partial x_j$ acima por ip_j ($j=0, 1, \dots, n$) é chamada o símbolo do operador $P(\partial/\partial x)$ enquanto que a sua parte homogênea de grau m , $P_m(p_0, p_1, \dots, p_n)$ é chamada o símbolo principal de $P(\partial/\partial x)$.

Vamos assumir que o vetor $(1, 0, \dots, 0)$ é não-característico para o operador P , i.e.,

$$\det [P_m(1, 0, \dots, 0)] \neq 0 \quad (1).$$

Neste caso a matriz $A_{(m, 0, \dots, 0)}$ (coeficiente de $(\partial/\partial x_0)^m$) é não-singular, de sorte que podemos supor que $A_{(m, 0, \dots, 0)} = I$ (multiplicando (5.1) à esquerda por $A_{(m, 0, \dots, 0)}^{-1}$), i.e., que (5.1) é da forma

$$Pu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^m u + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_0 < m}} A_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u = f$$

ou, substituindo x_0 por t ,

$$(5.2) \quad Pu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m u + \sum_{\substack{j+|\beta| \leq m \\ j < m}} A_{j, \beta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta u = f$$

onde agora $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $u = u(t, y)$, $f = f(t, y)$. Uma pergunta que se apresenta naturalmente é a seguinte:

"Sob que condições o problema de Cauchy para (5.2) com dados iniciais

$$(5.3) \quad \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = u_j \quad \text{para } t=0 \quad (j=0, \dots, m-1)$$

(1) Dizemos que um vetor $N = (N_1, \dots, N_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ é característico para o operador P se $\det [P_m(N)] = 0$.

é bem posto, i.e, possui solução única $u=u(t,y)$ em $[C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$, dados $u_0=u_0(y), \dots, u_{m-1}=u_{m-1}(y)$ em $[C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$ e $f=f(t,y)$ em $[C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$?"

O teorema a seguir nos fornece uma condição necessária que, de fato, como veremos mais adiante é também suficiente.

Teorema 5.1. Se o problema de Cauchy (5.2)-(5.3) é bem posto então existem constantes $B, C > 0$ tais que as raízes $\lambda_\ell = \lambda_\ell(p)$ do polinômio característico

$$(5.4) \quad P(\lambda, p) = \det[P(i\lambda, ip)]$$

satisfazem as desigualdades

$$|\operatorname{Im} \lambda_\ell(p)| \leq B + C \log(1 + |p|) \quad (\ell=1, \dots, km)$$

para todo $p=(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$.

Para a demonstração do teorema 5.1 usaremos o seguinte lema:

Lema 5.1. Sejam $P_1(p), \dots, P_N(p)$ polinômios em $p=(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ de grau $\leq \mu$. Então, existe uma constante $D > 0$ tal que as raízes $\lambda_\ell = \lambda_\ell(p)$ do polinômio

$$\lambda^N + P_1(p)\lambda^{N-1} + \dots + P_N(p)$$

satisfazem as desigualdades

$$(5.5) \quad |\lambda_{\ell}(p)| \leq D(1+|p|)^{\mu} \quad (\ell=1, \dots, N)$$

para todo $p \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Se (5.5) é falso então existe uma sequência de pontos $p^{\nu} \in \mathbb{R}^n$ tal que $|p^{\nu}| \rightarrow \infty$ e

$$(5.6) \quad |\lambda_{\ell}(p^{\nu})| > \nu(1+|p^{\nu}|)^{\mu}, \quad \nu=1, 2, \dots,$$

se verifica sempre para alguma raiz λ_{ℓ} . Sem perda de generalidade, podemos assumir ℓ fixo, digamos $\ell=1$. Como cada P_j tem grau $\leq \mu$, obtemos de (5.6) que

$$(5.7) \quad \frac{P_j(p^{\nu})}{\lambda_1^j(p^{\nu})} \rightarrow 0 \quad (j=1, \dots, N)$$

quando $\nu \rightarrow \infty$. Por outro lado, temos

$$\lambda_1^N(p^{\nu}) \left[1 + \frac{P_1(p^{\nu})}{\lambda_1(p^{\nu})} + \dots + \frac{P_N(p^{\nu})}{\lambda_1^N(p^{\nu})} \right] = 0,$$

o que é uma contradição em vista de (5.6) e (5.7).

Q.E.D.

Demonstração do Teorema 5.1. Por hipótese, dados

$u_0, \dots, u_{m-1} \in [C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k$ arbitrários existe uma única solução $u \in [C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ da equação homogênea $Pu=0$ cujos dados iniciais são u_0, \dots, u_{m-1} . Seja Φ a aplicação linear de $[C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k \times \dots \times [C^{\infty}(\mathbb{R}^n)]^k$ (m fatores) em $[C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$

definida por $\Phi(u_0, \dots, u_{m-1}) = u$. Como sabemos, Φ é contínua em virtude do teorema do gráfico fechado. Em particular, se N é o vetor $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, existem um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, um inteiro não-negativo J é uma constante $M > 0$ tais que

$$(5.8) \quad \max\{|u(N)|, |u(-N)|\} \leq M[v_{K,J}(u_0) + \dots + v_{K,J}(u_{m-1})]$$

para toda solução $u \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ de $Pu = 0$. Aqui, $v_{K,J}(f) = \sup_{x \in K, |\beta| \leq J} |D^\beta f(x)|$ para $f \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$, onde $|\cdot|$ designa a norma em \mathbb{C}^k .

Agora, se $\lambda_\rho(p)$ é raiz do polinômio característico (5.4) então $P(i\lambda_\rho(p), ip)$ é singular, de sorte que

$$P(i\lambda_\rho(p), ip)\zeta = 0$$

para algum $\zeta \in \mathbb{C}^k$ com $|\zeta| = 1$. Definindo

$$u(t, y) = e^{i[t\lambda_\rho(p) + p \cdot y]} \zeta,$$

temos

$$Pu = P(i\lambda_\rho(p), ip)\zeta = 0,$$

$$u_j(y) = \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(0, y) = [i\lambda_\rho(p)]^j e^{ip \cdot y} \zeta,$$

$$D^\beta u_j(y) = [i\lambda_\rho(p)]^j (ip)^\beta e^{ip \cdot y} \zeta, \quad j=0, \dots, m-1,$$

e, portanto, em vista do lema 5.1, obtemos as estimativas

$$(5.9) \quad |D^\beta u_j(y)| \leq D^j(1+|p|)^{kmj+|\beta|}.$$

Finalmente, observando que $u(\pm N) = e^{\pm i\lambda_\rho(p)} \zeta$, (5.8) e (5.9)

forneem

$$e^{\pm \text{Im } \lambda_\rho(p)} \leq M_0(1+|p|)^{m_0},$$

i.e.,

$$|\text{Im } \lambda_\rho(p)| \leq B + C \log(1+|p|),$$

onde $B, C > 0$ são constantes (independentes de p).

Q.E.D.

Teorema 5.2. (Garding). A condição

$$|\text{Im } \lambda_\rho(p)| \leq B + C \log(1+|p|)$$

do teorema 5.1 é equivalente à condição

$$(5.10) \quad |\text{Im } \lambda_\rho(p)| \leq B.$$

Logo, uma condição necessária para que o problema de Cau
chy (5.2)-(5.3) seja bem posto é que as raízes do polinô
mio característico (5.4) satisfaça (5.10) acima.

A demonstração é delicada e utiliza fatos de geo
metria algébrica (como o teorema de Seidenberg-Tarski), de
sorte que não a reproduziremos aqui. O leitor interessa-
do poderá consultar [5], [7], por exemplo.

Definição 5.1. Dizemos que a equação (5.2) (ou o operador $P = P(\partial/\partial t, \partial/\partial y)$ em (5.2)) é hiperbólica na direção do eixo dos t se as raízes do seu polinômio característico (5.4) satisfazem (5.10).

Observação 5.1. O polinômio característico da equação da onda $\partial^2 u/\partial t^2 - c^2 \Delta u = 0$ é $P(\lambda, p) = -\lambda^2 + c^2 |p|^2$ de sorte que as suas raízes $\lambda = \pm c|p|$ são reais para todo $p \in \mathbb{R}^n$. Mais geralmente, o polinômio característico de um sistema hiperbólico simétrico $\partial u/\partial t + \sum_{j=1}^n A_j \partial u/\partial x_j = 0$ é $P(\lambda, p) = \det(i\lambda I + \sum_{j=1}^n ip_j A_j) = i^k \det(\lambda I + A(p))$, cujas raízes $\lambda_\ell = \lambda_\ell(p)$ são também reais. (Lembre-se que $A(p) = \sum_{j=1}^n p_j A_j$ é Hermitiana simétrica). A condição (5.10) é trivialmente verificada.

5.2 - Polinômios Hiperbólicos. Propriedades.

Seja $P(\xi)$ um polinômio de grau μ nas $(n+1)$ variáveis $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$. Dizemos que P é hiperbólico em relação ao vetor $0 \neq N \in \mathbb{R}^{n+1}$ se $P_\mu(N) \neq 0$ ⁽¹⁾ e existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $P(\xi + isN) \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $s < a$.

Lema 5.2. P é hiperbólico em relação a N se e somente se $P_\mu(N) \neq 0$ e existe $c \geq 0$ tal que $P(\xi + isN) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}$

(1) P_μ é a parte homogênea de P de grau μ .

$\forall s$ real com $|s| > c$.

Demonstração. A suficiência é óbvia. Quanto à necessidade, observamos inicialmente que se P é hiperbólico em relação a N então $P(\xi + izN) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re } z < a$, pois podemos escrever $\xi + izN = \xi - (\text{Im } z)N + i(\text{Re } z)N$. Agora, expandindo $P(\xi + izN)$ como um polinômio em z , temos

$$P(\xi + izN) = P_{\mu}(iN)z^{\mu} + \sum_{j=0}^{\mu-1} a_j(\xi, N)z^j,$$

onde $P_{\mu}(iN) = i^{\mu}P_{\mu}(N) \neq 0$ (homogeneidade de P_{μ}) e $-a_{\mu-1}(\xi, N)/P_{\mu}(iN)$ é a soma das raízes $z_{\ell} = z_{\ell}(\xi, N)$ de $P(\xi + izN) = 0$. Observe também que $a_{\mu-1}(\xi, N)$ depende linearmente de ξ . Portanto, como as raízes z_{ℓ} de $P(\xi + izN) = 0$ satisfazem $\text{Re } z_{\ell} \geq a$, $\ell = 1, \dots, \mu$, obtemos

$$\mu a \leq \sum_{\ell=1}^{\mu} \text{Re } z_{\ell} = -\text{Re} \frac{a_{\mu-1}(\xi, N)}{P_{\mu}(iN)}$$

e, como $a_{\mu-1}(\xi, N)$ depende linearmente de ξ , devemos ter necessariamente

$$\sum_{\ell=1}^{\mu} \text{Re } z_{\ell} = b \quad (\text{constante}) \quad (1).$$

Mas então, obtemos

(1) Uma função afim que é limitada inferiormente tem que ser constante!

$$\operatorname{Re} z_\ell = b - \sum_{j \neq \ell} \operatorname{Re} z_j \leq b - (\mu-1)a$$

para cada ℓ , de sorte que as raízes $z_\ell = z_\ell(\xi, N)$ de $P(\xi + izN) = 0$ satisfazem também $\operatorname{Re} z_\ell \leq b - (\mu-1)a$, i.e., $P(\xi + izN) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > b - (\mu-1)a$. Portanto $P(\xi + isN) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\forall s$ real com $|s| > c = \max\{|a|, |b - (\mu-1)a|\}$. Q.E.D.

Corolário 5.1. P é hiperbólico em relação a N se e somente se P é hiperbólico em relação a rN para todo $0 \neq r \in \mathbb{R}$.

Observação 5.2. Escrevendo $\xi = (\lambda, p)$, $p \in \mathbb{R}^n$, obtemos facilmente do lema acima que P é hiperbólico em relação a $N = (1, 0)$ se e somente se as raízes $\lambda_\ell = \lambda_\ell(p)$ de $P(\lambda, p) = 0$ satisfazem $|\operatorname{Im} \lambda_\ell(p)| \leq c$ para alguma constante $c \geq 0$. Portanto, podemos reformular a definição 5.1 da seguinte maneira: o operador

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m + \sum_{\substack{j + |\beta| \leq m \\ j < m}} A_{j, \beta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta$$

é hiperbólico na direção do eixo dos t se o seu polinômio característico

$$P(\lambda, p) = \det[P(i\lambda, ip)]$$

é hiperbólico em relação a $N = (1, 0)$.

Teorema 5.3. Se P é hiperbólico em relação a N então P_μ também é hiperbólico em relação a N . De fato, as raízes $z = z(\xi)$

da equação $\tilde{P}_\mu(\xi+zN)=0$ são sempre reais.

Demonstração. É fácil ver que temos a seguinte relação entre P e a sua parte homogênea P_μ :

$$P_\mu(\zeta) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\mu} P(r\zeta) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Logo, podemos escrever

$$P_\mu(\xi+izN) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\mu} P(r\xi+irzN),$$

e, uma vez que devemos ter $r|\operatorname{Re}z| \leq c$ sempre que $P(r\xi+irzN)=0$ para algum $\zeta \in \mathbb{R}^{n+1}$ (lema 5.2), concluímos que necessariamente ocorre $\operatorname{Re}z=0$ sempre que $P_\mu(\xi+izN)=0$ para algum $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$. Portanto, P_μ é hiperbólico em relação a N . De fato, substituindo z por $-iz$ acima, acabamos de mostrar que as raízes $z=z(\xi)$ da equação $P_\mu(\xi+zN)=0$ são sempre reais.

Corolário 5.2. Se o operador

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m + \sum_{j+|\beta| \leq m} A_{j,\beta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta$$

$j < m$

é hiperbólico na direção do eixo dos t então as raízes $\lambda_\ell = \lambda_\ell(p)$ da equação

$$(5.11) \quad \det [(i\lambda)^m I + \sum_{\substack{j+|\beta|=m \\ j < m}} (i\lambda)^j (ip)^\beta A_{j,\beta}] = 0$$

são reais, qualquer que seja $p \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Basta observar que a parte homogênea P_μ do polinômio característico do operador P acima é o polinômio característico da parte principal P_m de P , i.e., P_μ é dado por (5.11).

Corolário 5.3. Uma condição necessária e suficiente para que um operador homogêneo

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m + \sum_{\substack{j+|\beta|=m \\ j < m}} A_{j,\beta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta$$

seja hiperbólico na direção do eixo dos t é que o seu polinômio característico só tenha raízes reais.

Demonstração. A suficiência é óbvia e a necessidade já foi demonstrada no corolário anterior

Q.E.D.

Observação 5.3. O corolário 5.2 nos diz que se P é um operador hiperbólico na direção do eixo dos t então o polinômio característico P_μ da sua parte principal P_m tem todas as suas raízes reais. Reciprocamente, pode-se mostrar que se as raízes de P_μ são reais e distintas então P é hiperbólico na direção do eixo dos t . (V. [10], pg. 136).

Neste caso, dizemos também que P é *estritamente hiperbólico* (na direção do eixo dos t) ou *hiperbólico no sentido de Petrowski*. O operador da onda $P = \partial^2 / \partial t^2 - c^2 \Delta$ é um exemplo de um operador estritamente hiperbólico.

Veremos agora que se um polinômio P é hiperbólico em relação a um vetor N então P é hiperbólico em relação a todos os vetores num certo cone convexo aberto que contém N .

Sabemos do teorema 5.3 que se P é hiperbólico em relação a N então as raízes $s = s(\xi)$ da equação $P_\mu(\xi + sN) = 0$ são sempre reais. Vamos denotar por $C(N)$ o conjunto daqueles vetores $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$ tais que as raízes $s = s(\eta)$ de $P_\mu(\eta + sN) = 0$ são negativas, i.e.,

$$C(N) = \{ \eta \in \mathbb{R}^{n+1} \mid P_\mu(\eta + sN) \neq 0 \quad \forall s \geq 0 \}.$$

Lema 5.3. (i) $C(N)$ coincide com a componente conexa do conjunto aberto $\{ \eta \in \mathbb{R}^{n+1} \mid P_\mu(\eta) \neq 0 \}$ à qual o vetor N pertence.

(ii) Se $\eta \in C(N)$ então $rN + t\eta \in C(N)$ quaisquer que sejam $r > 0$, $t \geq 0$.

Demonstração. (ii) Uma vez que P_μ é homogêneo (de grau μ), o caso $t=0$ é trivial. Por outro lado, se $r > 0$ e $t > 0$ então $P_\mu(rN + t\eta + sN) = t^\mu P_\mu(\eta + \frac{r+s}{t}N) \neq 0 \quad \forall s \geq 0$ pois $\eta \in C(N)$. Logo,

$rN + t\eta \in C(N)$. Em particular, o segmento de reta unindo N a η está contido em $C(N)$ de sorte que $C(N)$ é conexo.

(i) Evidentemente $N \in C(N)$ e $C(N) \subset \{\eta \in \mathbb{R}^{n+1} \mid P_\mu(\eta) \neq 0\}$. Portanto, como $C(N)$ é conexo, basta mostrarmos que a fronteira $\partial C(N)$ é disjunta do conjunto $\{\eta \in \mathbb{R}^{n+1} \mid P_\mu(\eta) \neq 0\}$. Suponha que existe algum $\gamma \in \partial C(N)$ tal que $P_\mu(\gamma) \neq 0$. Em vista do teorema 5.3 o conjunto S das raízes da equação $P_\mu(\gamma + sN) = 0$ é um subconjunto da reta e, de fato, $S \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pois estamos assumindo $P_\mu(\gamma) \neq 0$. Temos duas alternativas: alguma raiz em S é positiva ou todas as raízes em S são negativas. No primeiro caso, por continuidade das raízes $s = s(\xi)$ de $P_\mu(\xi + sN) = 0$, podemos encontrar uma vizinhança V de γ tal que, para cada $\xi \in V$, alguma raiz de $P_\mu(\xi + sN) = 0$ é positiva; mas $V \cap C(N) = \emptyset$, logo $\gamma \notin \partial C(N)$, o que é uma contradição. No segundo caso, em que $S \subset \{s \in \mathbb{R} \mid s < 0\}$, podemos analogamente encontrar uma vizinhança W de γ tal que, para cada $\xi \in W$, todas as raízes de $P_\mu(\xi + sN) = 0$ são negativas; logo, $W \subset C(N)$ e novamente obtemos a contradição $\gamma \notin \partial C(N)$. Q.E.D.

Lema 5.4. Seja P hiperbólico em relação a N , de sorte que $P(\xi + isN) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \forall s < a$ (com $a < 0$, digamos). Se $\eta \in C(N)$ então

$$P(\xi + isN + ir\eta) \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \forall s < a, \quad \forall r \leq 0.$$

Demonstração. Fixando $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ e observando que $P_\mu(\zeta) = \lim_{s \rightarrow -\infty} (is)^{-\mu} P(is\zeta) \forall \zeta \in \mathbb{C}^{n+1}$, podemos escrever o polinômio $p(z) = P_\mu(N+z\eta)$ como

$$\begin{aligned} P_\mu(N+z\eta) &= \lim_{s \rightarrow -\infty} (is)^{-\mu} P[is(N+z\eta)] = \lim_{s \rightarrow -\infty} (is)^{-\mu} P[\xi + is(N+z\eta)] \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} p_s(z), \end{aligned}$$

onde $p_s(z)$ é o polinômio

$$(5.12) \quad p_s(z) = (is)^{-\mu} P(\xi + isN + isz\eta),$$

cujo coeficiente de z^μ é $P_\mu(\eta) \neq 0$. Seja Z o conjunto dos zeros de $P_\mu(N+z\eta) = 0$ e Z_s o conjunto dos zeros de $p_s(z) = 0$. Então,

$$Z \subset \mathbb{R}_- = \{x \mid x < 0\}$$

em vista do teorema 5.3 e, para $s < a$,

$$(5.13) \quad Z_s \subset \{z \mid \operatorname{Re} z \neq 0\}$$

(pois $\operatorname{Re} z = 0$ implica $isz\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$, logo $P[(\xi + isz\eta) + isN] \neq 0$ para $s < a$ em vista da hiperbolicidade de P em relação a N).

Agora, aplicando o teorema de Rouché aos polinômios $P_\mu(N+z\eta)$ e $p_s(z)$, concluímos que $Z_s \subset \{z \mid \operatorname{Re} z < 0\}$ para $s < a$, s suficientemente grande. Mas então,

$$(5.14) \quad Z_s \subset \{z \mid \operatorname{Re} z < 0\}$$

para todo $s < a$, em vista de (5.13) e do fato das raízes $z = z(s)$ em Z_s dependerem continuamente de s . Portanto, dados $s < a$ e $r \leq 0$ arbitrários, pondo $z = r/s \geq 0$ e usando (5.12), (5.14), obtemos

$$P(\xi + isN + ir\eta) = P(\xi + isN + isz\eta) = (is)^{\mu} p_s(z) \neq 0.$$

Q.E.D.

Estamos agora em condições de provar o

Teorema 5.4. Se P é hiperbólico em relação a N então P é hiperbólico em relação a cada vetor $\eta \in C(N)$. Além disso, $C(N)$ é um cone convexo aberto.

Demonstração. O lema 5.3 nos diz que $C(N)$ é um cone aberto; logo, dado $\eta \in C(N)$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $\eta - \varepsilon N \in C(N)$. Escrevendo $\eta = (\eta - \varepsilon N) + \varepsilon N$ e usando o lema acima obtemos

$$P(\xi + is\eta) = P[\xi + is\varepsilon N + is(\eta - \varepsilon N)] \neq 0$$

para todo $s < 0$ tal que $s < a/\varepsilon$, de sorte que P é hiperbólico em relação a η .

Por outro lado, se η_1 e η_2 estão em $C(N)$, temos $C(\eta_1) = C(\eta_2) = C(N)$ em vista do lema 5.3 (i). Também, a demonstração de (ii) do referido lema mostra que o segmento de reta unindo η_1 a η_2 está contido em $C(\eta_1) = C(N)$. Portanto, $C(N)$ é convexo.

Q.E.D.

Finalmente, vamos considerar o cone convexo fecha do definido por

$$\Gamma(N) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \cdot \eta \geq 0 \quad \forall \eta \in C(N)\}.$$

Conforme veremos, $\Gamma(N)$ desempenhará um papel importante na próxima seção.

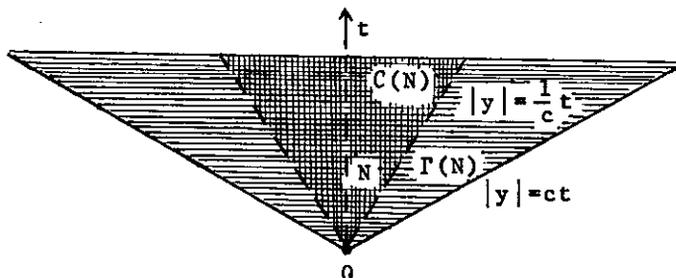
Exemplo. Se $P = P(\partial/\partial t, \partial/\partial y) = \partial^2/\partial t^2 - c^2 \Delta_y$ é o operador da onda em \mathbb{R}^{n+1} e $N = (1, 0, \dots, 0)$, temos $P(\lambda, p) = P_2(\lambda, p) = -\lambda^2 + c^2 |p|^2$, de sorte que $\{(\lambda, p) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid P(\lambda, p) \neq 0\}$ consiste de três componentes conexas (se $n > 1$). Aquela componente que contém o vetor $N = (1, 0, \dots, 0)$ é o cone

$$C(N) = \{(\lambda, p) \mid |p| \leq \frac{1}{c} \lambda, \lambda > 0\}.$$

Neste caso,

$$\Gamma(N) = \{(t, y) \mid |y| \leq ct, t > 0\}$$

é o cone de luz no futuro Γ_+ .



5.3 - Existência de Solução Fundamental com Suporte em $\Gamma(N)$

Seja $P = P(\partial/\partial t, \partial/\partial y)$ o operador considerado em (5.2). Assumindo que P é hiperbólico na direção do eixo dos t , vamos agora mostrar que existe uma solução fundamental $E \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})]^{k^2}$ de P (i.e., $PE = \delta I_k$ onde I_k é a matriz identidade $k \times k$ e $\delta = \delta_0$ é a medida de Dirac na origem) com suporte contido no cone convexo fechado $\Gamma(N)$, $N = (1, 0, \dots, 0)$.

A equação $PE = \delta I_k$ significa que

$$(5.15) \quad \langle E, {}^t P \phi \rangle = \phi(0) \quad \forall \phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})]^k.$$

Mas, como $P = P(\partial/\partial t, \partial/\partial y)$ tem coeficientes constantes, temos ${}^t P = \check{P} = P(-\partial/\partial t, -\partial/\partial y)$ e (5.15) é equivalente a

$$(5.16) \quad \langle E, \check{P} \phi \rangle = \phi(0) \quad \forall \phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})]^k.$$

Teorema 5.5. Assuma que $P = P(\partial/\partial t, \partial/\partial y)$ em (5.2) é hiperbólico na direção do eixo dos t . Então, existe uma matriz $k \times k$ de distribuições, $E \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})]^{k^2}$, tal que $PE = \delta I_k$ e $\text{supp } E \subset \Gamma(N)$, $N = (1, 0, \dots, 0)$. Além disso, cada elemento de E pertence ao espaço $W_{loc}^{(1-k)m, \infty}$ das distribuições $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ tais que $\phi T \in W^{(1-k)m, \infty} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ (1).

(1) $W^{s, \infty}$ é o espaço (de Sobolev) das distribuições temperadas $S \in \mathcal{S}'$ tais que \hat{S} é uma função mensurável com $(1 + |p|^2)^{s/2} \hat{S}(p)$ em L^∞ .

Demonstração. Por hipótese, o polinômio característico $P(\lambda, p) = \det P(i\lambda, ip)$ de P é hiperbólico em relação a $N=(1,0)$. Escrevendo $(\lambda, p) = \xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, isto significa que $P(\xi + isN) \neq 0$ qualquer que seja $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $s \in \mathbb{R}$ com $|s| > c$, para alguma constante $c > 0$. Logo, a matriz $P(i\xi - sN)$ é não-singular, i.e., $P(i\xi - sN)^{-1}$ existe $\forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\forall |s| > c$, e podemos escrever

$$(5.17) \quad \phi(0) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \check{\phi}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \check{\phi}(\xi + isN) d\xi \\ = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \check{P}(i\xi - sN)^{-1} \check{P}(i\xi - sN) \check{\phi}(\xi + isN) d\xi, \text{ i.e.,}$$

$$(5.18) \quad \phi(0) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} P(-i\xi + sN)^{-1} [\check{P}(\partial/\partial t, \partial/\partial y) \phi]^\vee(\xi + isN) d\xi$$

para todo $\phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$. Observe que a segunda igualdade em (5.17) é consequência do Teorema de Cauchy combinado com o fato de que $\check{\phi}(\xi)$ é uma função analítica de $\xi \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Por outro lado, temos a fatoração

$$\det P(-i\xi + sN) = P(-\xi - isN) = P_\mu(iN) \prod_{j=1}^{\mu} (s - s_j(\xi)),$$

onde μ é o grau de P (recorde que $\mu = km$) e $|\operatorname{Re} s_j(\xi)| \leq c$, o que implica

$$(5.19) \quad |\det P(-i\xi+sN)| \geq |P_{\mu}^{(N)}|(s-c)^{\mu} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \forall s > c.$$

Também, não é difícil ver que temos a estimativa

$$(5.20) \quad \|P(-i\xi+sN)\| \leq C(1+|\xi|)^m(1+|s|)^m$$

para alguma constante $C > 0$, uma vez que os elementos da matriz $P(\xi)$ são polinômios em ξ de grau $\leq m$. Portanto, em vista da desigualdade $\|M^{-1}\| \leq C_k \|M\|^{k-1} |\det M|^{-1}$ (válida para qualquer matriz inversível $k \times k$), (5.19) e (5.20) fornecem

$$(5.21) \quad \|P(-i\xi+sN)^{-1}\| \leq D[(1+|\xi|)(1+s)]^{(k-1)m}(s-c)^{-km} \\ \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \forall s > c,$$

para alguma constante $D = D_{k,m}$, o que nos mostra (com s fixo $> c$) que cada elemento da matriz $P(-i\xi+sN)^{-1}$ é no máximo da ordem de $(1+|\xi|)^{(k-1)m}$. Em particular, $P(-i\xi+sN)^{-1}$ determina uma matriz F de distribuições temperadas através da fórmula

$$(5.22) \quad \langle F, \theta \rangle = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} P(-i\xi+sN)^{-1} \theta(\xi) d\xi \\ \forall \theta \in [S(\mathbb{R}^{n+1})]^k.$$

Agora, se definimos a matriz de distribuições E e $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})^{k^2}$ por

$$(5.23) \quad \langle E, \psi \rangle = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} P(-i\xi+sN)^{-1} \psi(\xi+isN) d\xi, \\ \psi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})]^k,$$

então, para cada $\phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$, temos

$$\langle PE, \phi \rangle = \langle E, \check{F}\phi \rangle =$$

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} P(-i\xi + sN)^{-1} [\check{F}(\partial/\partial t, \partial/\partial y)\phi]^\sim(\xi + isN) d\xi \\ = \phi(0)$$

em vista de (5.18). Isto é, E definida em (5.23) é uma solução fundamental do operador P . Observe que sendo $\check{\psi}(\xi + isN) = [e^{sN \cdot x} \psi(x)]^\sim(\xi)$, obtemos de (5.22) e (5.23) que $\langle E, \psi \rangle = \langle F, [e^{sN \cdot x} \psi(x)]^\sim \rangle = \langle \check{F}_x, e^{sN \cdot x} \psi(x) \rangle$, logo

$$E_x = e^{sN \cdot x} \check{F}_x = e^{st} \check{F}_x$$

(pois $x=(t,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$), isto é, $E = e^{st} \check{F}$. Mas então,

$$(5.24) \quad (e^{-st} E)^\sim = \check{F} = \check{F},$$

onde \check{F} é a matriz de distribuições determinada por $P(i \cdot + sN)^{-1}$ (cf. (5.22)), e, como já mostramos que

$$\|P(i\xi + sN)^{-1}\| \leq C(1 + |\xi|)^{(k-1)m}$$

para alguma constante C , i.é., $(1 + |\xi|^2)^{(1-k)m/2} \check{F} \in [L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^{k^2}$,

concluimos de (5.24) que

$$(5.25) \quad e^{-st} E \in [W^{(1-k)m, \infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^{k^2}.$$

Isto nos mostra que

$$E \in [W_{loc}^{(1-k)m, \infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^{k^2},$$

uma vez que, para cada $\phi = \phi(t, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\phi E = (e^{st} \phi)(e^{-st} E)$ é o produto da função $e^{st} \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ por $e^{-st} E \in [W^{(1-k)m, \infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^{k^2}$ (V. (5.24)), produto este que pertence novamente a $[W^{(1-k)m, \infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^{k^2}$ (Estamos usando o fato que $W^{s, \infty} \subset W_{loc}^{s, \infty}$; V. [10], teorema 2.25).

Vamos mostrar agora que $\text{supp } E \subset \{(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \cdot N \geq 0\}$. Com efeito, dado $\psi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ com $\text{supp } \psi \subset \{(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t < 0\}$ e considerando $s > c > 0$, temos

$$\tilde{\psi}(\xi + isN) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-ix \cdot (\xi + isN)} \psi(x) dx,$$

logo (integrando por partes)

$$\begin{aligned} (\xi + isN)^{\alpha} \tilde{\psi}(\xi + isN) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-ix \cdot (\xi + isN)} D^{\alpha} \psi(x) dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\text{supp } \psi} e^{-ix \cdot \xi} e^{sx \cdot N} D^{\alpha} \psi(x) dx, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir (observando que $s > c > 0$ e existe $\tau < 0$ tal que $x \cdot N = t \leq \tau \quad \forall x \in \text{supp } \psi$) que

$(1+|\xi+isN|)^j |\hat{\psi}(\xi+isN)| \leq C_j e^{s\tau}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\forall s > c$, $\forall j=0,1,\dots$ onde $C_j > 0$ é uma constante. Portanto, combinando a estimativa acima com aquela obtida para $\|P(-i\xi+sN)^{-1}\|$ (cf. (5.21)) obtemos a seguinte estimativa para $\langle E, \psi \rangle$ (v. (5.23)):

$$|\langle E, \psi \rangle| \leq K(1+s)^{(k-1)m} (s-c)^{-km} e^{s\tau} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (1+|\xi|)^{(k-1)m-j} d\xi,$$

$\forall s > c,$

onde j é tomado suficientemente grande de sorte que a integral acima seja convergente (por exemplo, $j=(k-1)m+n+2$) e $K > 0$ é uma constante. Mas então, fazendo $s \rightarrow +\infty$ acima, obtemos $s\tau \rightarrow -\infty$, logo

$$\langle E, \psi \rangle = 0.$$

Mostramos, assim, que $\langle E, \psi \rangle = 0$ para todo ψ com suporte no semi-espaço aberto $\{(t,y) \mid t < 0\}$, i.e.,

$$(5.26) \quad \text{supp } E \subset \{(t,y) \mid t \geq 0\} = \{x \mid x \cdot N \geq 0\}.$$

Finalmente, pode-se mostrar (v. [10], pg. 138) que a definição de E dada em (5.23) não depende de $s > c$ (1) e que podemos substituir N por um vetor qualquer $\eta \in C(N)$. Portanto, a conclusão (5.26) do parágrafo anterior torna-se

$$\text{supp } E \subset \{x \mid x \cdot \eta \geq 0\},$$

(1) Entretanto, F definido em (5.2) depende de s .

onde $\eta \in C(N)$ é arbitrário, i.e., $\text{supp } E \subset \{x \mid x \cdot \eta \geq 0 \ \forall \eta \in C(N)\} = \Gamma(N)$. Q.E.D.

Observação 5.4. Não é difícil ver que existe $c_0 > 0$ tal que

$$\Gamma(N) \subset \{x=(t,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |y| \leq c_0 t, t \geq 0\} \quad (1).$$

Com efeito, como $C(N)$ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $N + \eta \in C(N)$ para todo $\eta \in \mathbb{R}^{n+1}$ com $|\eta| \leq \varepsilon$; em particular $N \pm \varepsilon e_j \in C(N)$ ($j=1, \dots, n$) onde $e_0 = N = (1, 0, \dots, 0)$ e $e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ constituem a base canônica de \mathbb{R}^{n+1} . Logo, se $(t,y) \in C(N)$ temos $(t,y) \cdot (N \pm \varepsilon e_j) \geq 0$, ou $t \pm \varepsilon y_j \geq 0$, ou ainda $\pm y_j \leq \frac{1}{\varepsilon} t \ \forall j=1, \dots, n$. Mas então $|y_j| \leq \frac{1}{\varepsilon} t$, o que implica $|y| \leq c_0 t$, onde $c_0 = \frac{n}{\varepsilon}$.

A seguir, vamos mostrar que se o operador $P = P(\partial/\partial t, \partial/\partial y)$ em (5.2) possui uma solução fundamental com as propriedades enunciadas no teorema 5.5 (2), então o problema de Cauchy para P com dados iniciais no hiperplano no $t=0$ é bem-posto em C^∞ . Desta maneira fecharemos o ciclo iniciado com o teorema 5.1 (V. também o teorema 5.2), que

(1) Portanto, $\Gamma(N)$ nunca coincide com o semi-espaço $t \geq 0$.

(2) Aquele teorema diz que este é certamente o caso quando P é hiperbólico na direção do eixo dos t .

diz da necessidade de hiperbolicidade de P para que o problema de Cauchy para P seja bem-posto em C^∞ .

5.4 - O Problema de Cauchy Bem-Posto

Teorema 5.6. Suponha que o operador $P=P(\partial/\partial t, \partial/\partial y)$ em (5.2) possui uma solução fundamental $E \in [W^{(1-k)m, \infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^{k^2}$ com suporte contido num cone $\{x=(t,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |y| \leq c_0 t, t \geq 0\}$. Então, dados $u_0 = u_0(y), \dots, u_{m-1} = u_{m-1}(y) \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$ e $f=f(t,y) \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$, o problema de Cauchy

$$(5.27) \quad Pu = f \quad \text{em } \mathbb{R}^{n+1}$$

$$(5.28) \quad \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = u_j \quad \text{para } t=0 \quad (0 \leq j \leq m-1)$$

possui uma única solução $u=u(t,y)$ em $[C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$.

Para a demonstração deste teorema usaremos os seguintes resultados auxiliares:

Lema 5.5. Se $E_1 \in W_{loc}^{s_1, \infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ e $E_2 \in W_{loc}^{s_2, \infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ são tais que $E_1 * E_2$ está bem definido ⁽¹⁾ (cf. teorema A.5, seção A.5) então $E_1 * E_2 \in W_{loc}^{s_1+s_2, \infty}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Demonstração. V. [10], pg. 42.

(1) Por exemplo, este será o caso se E_1 tem suporte contido num cone $\{(t,y) \mid |y| \leq c_0 t, t \geq 0\}$ e E_2 tem suporte no semi-espaço $\{(t,y) \mid t \geq 0\}$ (Verifique!).

Lema 5.6. Sejam $u_0 = u_0(y), \dots, u_{m-1} = u_{m-1}(y) \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$ e $f = f(t, y) \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$. Dado um inteiro positivo J qualquer, existe uma função $U = U(t, y) \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ tal que

$$(5.29) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j U(0, y) = u_j(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad j=0, \dots, m-1$$

e

$$(5.30) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell P U(0, y) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell f(0, y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \ell=0, \dots, J.$$

Demonstração. Vamos procurar $U(t, y)$ na forma

$$U(t, y) = \sum_{j=0}^{m+J} \frac{t^j}{j!} \phi_j(y),$$

onde os ϕ_j 's são funções em $[C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$ a serem escolhidas convenientemente. Observe que, como $(\partial/\partial t)^j U(0, y) = \phi_j(y)$, escolhemos $\phi_j = u_j$ para $j=0, \dots, m-1$ de sorte a (5.29) ser verificada. Resta agora escolher os $\phi_{m+\ell}$ para $\ell=0, \dots, J$ de maneira a que (5.30) também seja válido. Para isto, observe que (5.2) nos permite escrever $(\partial/\partial t)^m I_k = P - Q$, onde Q é um operador de ordem $< m$ em $\partial/\partial t$. Resulta daí que, para cada $0 \leq \ell \leq J$, $(\partial/\partial t)^\ell Q U(0, y)$ envolve apenas as funções ϕ_j com $j < m + \ell$ e, portanto, podemos definir $\phi_{m+\ell}$ ($0 \leq \ell \leq J$) indutivamente a partir da fórmula

$$\phi_{m+\ell}(y) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell f(0, y) - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell Q U(0, y).$$

Esta definição dos $\phi_{m+\ell}$, $\ell=0, \dots, J$, implica na validade de (5.30). Basta observar que podemos escrever

$$\phi_{m+l}(y) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m+l} u(0,y) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l P u(0,y) - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l Q u(0,y),$$

uma vez que $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m I_k = P-Q$.

Q.E.D.

Também, precisaremos do seguinte corolário do *teorema de unicidade de Holmgren* (v. [10], pg. 130), cuja demonstração omitimos aqui:

Teorema 5.7. Seja $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ uma solução da equação homogênea $Pv=0$, onde $P=P(\partial/\partial t, \partial/\partial y)$ é o operador em (5.2).

Se

$$\text{supp } v \subset \mathbb{R}_+^{n+1} = \{(t,y) \mid t \geq 0\},$$

(ou $\text{supp } v \subset \mathbb{R}_-^{n+1} = \{(t,y) \mid t \leq 0\}$) então $v=0$.

Demonstração do Teorema 5.6

(i) Unicidade. Devemos mostrar que se $u \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ satisfaz (5.27)-(5.28) com $u_0 = \dots = u_{m-1} = 0$ e $f=0$ então $u=0$.

Considere a função $v = \chi u$, onde χ é a função característica do semi-espaço \mathbb{R}_+^{n+1} . Uma vez que $Pu=0$ e $(\partial/\partial t)^j u(t,y)=0$ para $t=0, j < m$, então v (tem suporte contido em \mathbb{R}_+^{n+1} e) satisfaz $Pv=0$. Com efeito, tomando $\phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$, $j \in \mathbb{Z}_+$ e $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ com $j + |\beta| \leq m$, vem

$$\begin{aligned}
 \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta v, \phi \right\rangle &= (-1)^{j+|\beta|} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta \phi \right] \cdot \chi u \, dt dy \\
 &= (-1)^j \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \phi \right] \cdot \left[\chi \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta u \right] dt dy \\
 &= (-1)^j \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \phi \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta u \right] dt dy,
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$(5.31) \quad \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta v, \phi \right\rangle = (-1)^j \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \phi \right] \cdot \omega_\beta \, dt dy$$

onde $\omega_\beta = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta u$. Por outro lado, pondo $\omega = \omega_\beta$ e considerando $\psi \in [D(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ arbitrário, a fórmula de integração por partes fornece

$$\begin{aligned}
 - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \psi \right] \cdot \omega \, dt dy &= - \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, y) \right] \cdot \omega(t, y) dt dy = \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \psi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \omega \, dt dy + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(0, y) \cdot \omega(0, y) dy, \quad \text{i.e.,} \\
 (5.32) \quad - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \psi \right] \cdot \omega \, dt dy &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \psi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \omega \, dt dy,
 \end{aligned}$$

(1) Estamos identificando a função v com a distribuição T_v que ela determina.

uma vez que $\omega(0, y) = \omega_\beta(0, y) = (\partial/\partial y)^\beta u_0(y) = 0$ por hipótese. Portanto, iterando (5.32) e tendo em mente que $(\partial/\partial t)^j \omega(0, y) = (\partial/\partial y)^\beta u_j(y) = 0$ para $j < m$, obtemos

$$(-1)^j \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} [(\frac{\partial}{\partial t})^j \phi] \cdot [(\frac{\partial}{\partial y})^\beta u] dt dy = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \phi \cdot [(\frac{\partial}{\partial t})^j (\frac{\partial}{\partial y})^\beta u] dt dy, \\ j + |\beta| \leq m,$$

que combinada com (5.31) fornece

$$\langle (\frac{\partial}{\partial t})^j (\frac{\partial}{\partial y})^\beta v, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \phi \cdot [(\frac{\partial}{\partial t})^j (\frac{\partial}{\partial y})^\beta u] dt dy \quad \forall \phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})]^k,$$

para $j + |\beta| \leq m$. A identidade acima nos mostra que

$$\langle Pv, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \phi \cdot Pu dt dy = 0 \quad \forall \phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})]^k,$$

logo $Pv = 0$, como queríamos mostrar. Portanto, em vista do teorema 5.7, obtemos $v = \chi u = 0$, i.e., $u(t, y) = 0$ para $t \geq 0$. de maneira análoga, tomando para χ a função característica do semi-espaço \mathbb{R}_-^{n+1} , obtemos $u(t, y) = 0$ para $t \leq 0$.

(ii) Existência. Dados $u_0, \dots, u_{m-1} \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^k$ e $f \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ vamos considerar um inteiro $J > km + n$ e a função $U \in [C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ construída no lema 5.6. Lembramos que U satisfaz

$$(5.33) \quad (\frac{\partial}{\partial t})^\ell PU(0, y) = (\frac{\partial}{\partial t})^\ell f(0, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \ell = 0, \dots, J.$$

$$(5.34) \quad (\frac{\partial}{\partial t}) U(0, y) = u_j(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, j = 0, \dots, m-1.$$

Seja agora g a função de classe C^J (v. (5.33)) definida por $g(t,y) = f(t,y) - PU(t,y)$ para $t \geq 0$, $g(t,y) = 0$ para $t < 0$. Então, $E * g \in [D'(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ (v. rodapé da pg. 128) tem suporte $\text{supp}(E * g) \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ e $P(E * g) = PE * g = \delta * g = g$. Além disso temos $E \in [W_{\text{loc}}^{(1-k)m, \infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^{k^2}$ e $g \in [W_{\text{loc}}^{J, \infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$, de sorte que $E * g \in [W_{\text{loc}}^{J+(1-k)m, \infty}(\mathbb{R}^{n+1})]^k$ em vista do lema 5.5. Mas em

tão, como $J - km > n$, obtemos $J + (1-k)m > m + n$ de sorte que o teorema B.14 fornece $E * g$ (após correção num conjunto de medida zero) como uma função G de classe $C^{J+(1-k)m-n-1}$ (logo, pelo menos de classe C^m). Portanto,

$$(5.35) \quad PG = g,$$

e, como $\text{supp } G \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$, obtemos

$$(5.36) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j G(0,y) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad j=0, \dots, m.$$

De maneira análoga, construímos uma função H de classe $C^{J+(1-k)m-n-1}$ (logo, pelo menos de classe C^m), tal que

$$(5.37) \quad PH = f - PU - g$$

e

$$(5.38) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j H(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad j=0, \dots, m.$$

Finalmente, definindo $u = U + G + H$, temos que u é uma função de classe $C^{J+(1-k)m-n-1}$ tal que

$$Pu = PU + g + (f - PU - g) = f$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(0, y) = u_j(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad j=0, \dots, m-1,$$

em vista de (5.33) a (5.38). Observamos que embora a nossa construção de u a partir de f e dos dados iniciais pareça ter dependido do inteiro J , a função u não depende de J ($> km+n$) uma vez que a mesma demonstração de unicidade que demos é válida para funções de classe C^m . Concluimos assim que u é de classe C^∞ .

Q.E.D.

APÊNDICE A

DISTRIBUIÇÕES EM \mathbb{R}^n

A.1 - Distribuições com Suporte Compacto em \mathbb{R}^n .

Seja $E(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial (complexo) das funções $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que são infinitamente diferenciáveis, i.e., tais que $D^\alpha \phi(x)$ existe quaisquer que sejam o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (1).

Vamos considerar em $E(\mathbb{R}^n)$ a topologia definida pelas seminormas

$$v_{K,j}(\phi) = \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi(x)|,$$

onde $K \subset \mathbb{R}^n$ é um compacto arbitrário e j um inteiro não-negativo qualquer. Portanto, se $\psi \in E(\mathbb{R}^n)$, uma vizinhança (básica) típica de ψ é dada por $\{\phi \mid v_{K,j}(\phi - \psi) < \varepsilon\}$ para algum K, j e $\varepsilon > 0$. $E(\mathbb{R}^n)$ munido da topologia definida acima é um espaço vetorial topológico localmente convexo. Além disso, $E(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hausdorff pois, dado $\phi \neq 0$ existe uma seminorma $v_{K,j}$ tal que $v_{K,j}(\phi) \neq 0$ (Basta tomar $j=0$ e

(1) No contexto das distribuições, é muitas vezes comum usar-se a notação $E(\mathbb{R}^n)$ ao invés de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$K = \{x_j\}$, onde x é um ponto onde ϕ não se anula). Finalmente, vale salientar que $E(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Fréchet (i.e., metrizable e completo) com uma métrica d invariante por translação, $d(\phi + \theta, \psi + \theta) = d(\phi, \psi)$, $\forall \phi, \psi, \theta \in E(\mathbb{R}^n)$: podemos tomar, por exemplo, $d(\phi, \psi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{v_{K_j, j}(\phi - \psi)}{1 + v_{K_j, j}(\phi - \psi)}$ onde $K_j = \{x \mid |x| \leq j\}$. Um tal espaço é algumas vezes chamado de um F -espaço ([19], pg. 8).

Observação A.1. No parágrafo anterior, os fatos sobre seminormas, espaços vetoriais topológicos, etc., que assumimos conhecidos são de natureza preliminar e podem ser encontrados em qualquer texto sobre o assunto (V. [24], por exemplo). Não assumiremos (e nem utilizaremos) um conhecimento, por parte do leitor, da Teoria dos Espaços Vetoriais Topológicos.

O espaço das distribuições em \mathbb{R}^n com suporte compacto é, por definição, o dual de $E(\mathbb{R}^n)$, i.e.,

$$E'(\mathbb{R}^n) = \{T: E(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C} \mid T \text{ é linear e contínua}\}.$$

Observe que um funcional linear $T: E(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ é contínuo se e somente se existem uma seminorma $v_{K, j}$ e uma constante $M > 0$ tais que

$$|T(\phi)| \leq M v_{K, j}(\phi) \quad \forall \phi \in E(\mathbb{R}^n).$$

Evidentemente, podemos munir $E'(\mathbb{R}^n)$ de várias topologias. Por exemplo, temos a *topologia forte* (ou *topologia da convergência uniforme nos conjuntos limitados* de $E(\mathbb{R}^n)$), em que uma vizinhança (básica) típica de $T=0$ em $E'(\mathbb{R}^n)$ é dada por $\{T \in E'(\mathbb{R}^n) \mid |T(\phi)| < \varepsilon \quad \forall \phi \in B\}$, onde $B \subset E(\mathbb{R}^n)$ é um conjunto limitado e $\varepsilon > 0$. Por outro lado, temos a *topologia fraca* (ou *topologia da convergência pontual*), em que uma vizinhança (básica) típica de $T=0$ em $E'(\mathbb{R}^n)$ é dada por $\{T \in E'(\mathbb{R}^n) \mid |T(\phi_j)| < \varepsilon, \quad j=1, \dots, k\}$, onde $\phi_1, \dots, \phi_k \in E(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$. Em geral, $E'(\mathbb{R}^n)$ seria munido de sua topologia forte. Entretanto, nestas notas vamos sempre considerar $E'(\mathbb{R}^n)$ munido de sua topologia fraca.

Observação A.2. É importante observar que, para efeito do estudo de propriedades de diferenciabilidade de aplicações $t \mapsto T(t)$ de \mathbb{R} em $E'(\mathbb{R}^n)$, a topologia (forte, fraca, ou qualquer outra intermediária) considerada em $E'(\mathbb{R}^n)$ é irrelevante: mais precisamente, $t \mapsto T(t)$ é fracamente de classe C^k (i.e., $\mathbb{R} \ni t \mapsto \langle T(t), \phi \rangle \in \mathbb{C}$ é de classe C^k , $\forall \phi \in E(\mathbb{R}^n)$) se e somente se $t \mapsto T(t)$ é fortemente de classe C^k , $0 \leq k \leq \infty$ (v. [20], [2], por exemplo). Portanto, a nossa escolha da topologia fraca está justificada se tivermos em mente o contexto em que as distribuições aparecem nestas notas (soluções fracas, etc.).

Dados $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ e um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que T é zero em U se $T(\phi) = 0$ para todo $\phi \in E(\mathbb{R}^n)$ com $\text{supp } \phi \subset U$. O complemento da união de todos os abertos onde T é zero é, por definição, o suporte de T i.e.,

$$\text{supp } T = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup \{U \mid T \text{ é zero em } U\}.$$

Exemplos: 1) Um exemplo típico de uma $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ é dado por

$$T(\phi) = \phi(p) \quad \forall \phi \in E(\mathbb{R}^n),$$

onde $p \in \mathbb{R}^n$ é fixo. Esta distribuição é comumente chamada de *medida de Dirac no ponto p* (de fato, é uma medida!) e é denotada por δ_p . Deixamos ao leitor a simples tarefa de mostrar que, de fato, $\delta_p : E(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ é linear e contínua, e $\text{supp } \delta_p = \{p\}$. Mais geralmente, se $p \in \mathbb{R}^n$ e um multi-índice α são fixos,

$$T(\phi) = D^\alpha \phi(p), \quad \forall \phi \in E(\mathbb{R}^n),$$

define um elemento de $E'(\mathbb{R}^n)$ com $\text{supp } T = \{p\}$.

2) Dado $\theta \in E(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto (veremos exemplos de tais funções na próxima seção),

$$T_\theta(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \theta(x) dx, \quad \forall \phi \in E(\mathbb{R}^n),$$

define um elemento de $E'(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, a linearidade é óbvia e temos $|T(\phi)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x)| dx \right) \sup_{x \in K} |\phi(x)| =$

$= Mv_{K,0}(\phi)$ onde $K = \text{supp } \theta$.

Observação A.3. É claro da definição de suporte que os elementos de $E'(\mathbb{R}^n)$ têm suporte compacto. Daí a nossa terminologia para $E'(\mathbb{R}^n)$.

A.2 - O Espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, vamos denotar por $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ o subespaço de $E(\mathbb{R}^n)$ consistindo daquelas ϕ cujos suportes estão contidos em K . A união dos $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ será denotada por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, i.e.,

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{K \text{ compacto}} \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n).$$

É claro que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = E(\mathbb{R}^n) \cap \{\phi \mid \text{supp } \phi \text{ é compacto}\}$. As funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ são comumente chamadas de *funções testes*.

Exemplos: 1) Seja θ a função definida por

$$(A.1) \quad \theta(x) = \begin{cases} -\frac{1}{e^{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1, \end{cases}$$

i.e., $\theta(x) = f(1-|x|^2)$ onde $f(r) = e^{-\frac{1}{r}}$ para $r > 0$ e $f(r) = 0$ para $r \leq 0$. Obviamente $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Como $D^j f(r) \rightarrow 0$

quando $r \rightarrow 0$ (para todo $j=0,1,2,\dots$), obtemos $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, logo $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, (A.1) mostra que $\text{supp } \theta = \overline{B(0,1)}$.

2) Dados $0 < a < b$, vamos construir $\theta_{a,b} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \theta_{a,b} \leq 1$, $\theta_{a,b} \equiv 1$ para $|x| \leq a$ e $\theta_{a,b} \equiv 0$ para $|x| \geq b$. Para isto, consideramos inicialmente a função de uma variável $f_{a,b}$ definida por

$$f_{a,b}(r) = \begin{cases} \frac{1}{e^{(r-a)(r-b)}} & , \quad a < r < b \\ 0 & , \quad r \leq a \text{ ou } r \geq b \end{cases}$$

Assim como no exemplo 1), não é difícil ver que $f_{a,b} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(Observe que quando $n=1$ a função θ do exemplo 1) nada mais é do que $f_{-1,1}$). Seja agora $g_{a,b} = \frac{1}{C} f_{a,b}$ onde

$$C = \int_a^b f_{a,b}(r) dr. \text{ Então, a primitiva } G_{a,b}(r) = \int_{-\infty}^r g_{a,b}(s) ds$$

é uma função crescente tal que $G_{a,b} \equiv 0$ para $r \leq a$ e $G_{a,b} \equiv 1$ para $r \geq b$. Logo, a função $H_{a,b}(r) = G_{a,b}(a+b-r)$ é decrescente e tal que $H_{a,b} \equiv 1$ para $r \leq a$ e $H_{a,b} \equiv 0$ para $r \geq b$. Obtemos $\theta_{a,b} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ com as propriedades anunciadas pondo $\theta_{a,b}(x) = H_{a,b}(|x|)$.

Vamos considerar $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ munido da topologia induzida pelas inclusões $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Em outras palavras, um subconjunto de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é aberto se e somente se a sua interseção com cada $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ é aberta em $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ munido da

topologia relativa induzida pela topologia de $E(\mathbb{R}^n)$). Observe que a topologia em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ que acabamos de definir não é a topologia relativa em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset E(\mathbb{R}^n)$. Em verdade, ela é mais fina do que esta última.

Pode-se mostrar ([19]) que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço completo mas, em contraste com $E(\mathbb{R}^n)$, não é mais metrizável. Além disso, uma sucessão $(\phi^{(k)})$ converge para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se e somente se:

- (i) existe um conjunto compacto K que contém os suportes de ϕ e de cada $\phi^{(k)}$;
- (ii) $D^\alpha \phi^{(k)} \rightarrow D^\alpha \phi$ uniformemente, qualquer que seja α .

A.3 - Distribuições em \mathbb{R}^n .

O espaço das distribuições em \mathbb{R}^n é, por definição, o dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, i.e.,

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = \{T: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C} \mid T \text{ é linear e contínua}\}.$$

Naturalmente, um funcional linear $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ é contínuo se e somente se a sua restrição a cada subespaço $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é contínua; em outras palavras, se para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ existem $M > 0$ e um inteiro não-negativo j tais que

$$(A.2) \quad |T(\phi)| \leq M v_{K,j}(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n).$$

Analogamente ao que fizemos para $E'(\mathbb{R}^n)$, vamos con

siderar $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ munido da topologia fraca em que uma vizinhança (básica) típica de $T=0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é dada por $\{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid |T(\phi_j)| < \epsilon, j=1, \dots, k\}$, com $\phi_1, \dots, \phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $\epsilon > 0$. Daqui por diante, vamos escrever $\langle T, \phi \rangle$ ao invés de $T(\phi)$ para denotar o valor que a distribuição T assume em ϕ .

Exemplo: Se f é uma função em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, ou, mais geralmente, em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então f determina uma distribuição T_f definida por

$$(A.3) \quad \langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Com efeito, a linearidade de T_f é óbvia. Quanto à continuidade, observe que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é um compacto qualquer, temos

$$|\langle T_f, \phi \rangle| \leq M \sup_{x \in K} |\phi(x)| = M v_{K,0}(\phi)$$

$\forall \phi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, onde $M = \int_K |f(x)| dx$. Logo, T_f é contínua em vista de (A.2).

O teorema abaixo, cuja demonstração omitimos aqui, nos mostra que se duas funções localmente integráveis são distintas então elas também são distintas como distribuições. Mais precisamente, se $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ são tais que $T_f = T_g$ então $f(x) = g(x)$ em quase toda a parte. Em vista deste fato, podemos considerar $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ como um subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Daí serem as distribuições também chamadas de funções generalizadas.

Teorema A.1. Se $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)h(x)dx=0$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ então $h(x)=0$ em quase toda a parte.

Observação A.4. Dada uma distribuição $T \in E'(\mathbb{R}^n)$, a restrição $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ de T a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é facilmente verificada ser um elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Além disso, a aplicação linear $E'(\mathbb{R}^n) \ni T \xrightarrow{J} T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é contínua (trivial) e injetiva (Exercício). Portanto, podemos considerar $E'(\mathbb{R}^n)$ como um subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Observamos também que a definição do suporte $\text{supp } T$ de uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é feita de maneira análoga a que fizemos para os elementos de $E'(\mathbb{R}^n)$. Desta maneira, a imagem da injeção J acima consiste exatamente daquelas distribuições $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ que têm suporte compacto.

Veremos a seguir que, de uma maneira natural, as distribuições são objetos infinitamente diferenciáveis! A definição das derivadas parciais $D_j T$ ($D_j = \partial/\partial x_j$, $j=1, \dots, n$) de uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é motivada pelo seguinte fato simples: Se $f \in C^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ obtemos, através da integração por partes, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) D_j f(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} D_j \phi(x) \cdot f(x) dx$$

qualquer que seja $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Em outras palavras, as distribuições T_f e $T_{D_j f}$ determinadas por f e $D_j f$, respectivamente, satisfazem a relação

$$\langle T_{D_j} f, \phi \rangle = -\langle T_f, D_j \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

ou ainda, não distinguindo em notação entre f e T_f ,

$$\langle D_j f, \phi \rangle = -\langle f, D_j \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Somos assim naturalmente motivados a definir as derivadas parciais $D_j T$ de uma $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ através da fórmula

$$(A.4) \quad \langle D_j T, \phi \rangle = -\langle T, D_j \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Mais geralmente, dado um multi-índice α qualquer, definimos $D^\alpha T$ por

$$(A.5) \quad \langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Deixamos ao leitor a tarefa simples de verificar que (A.5) define de fato um elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemplos: 1) Se $Y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ é a função de Heaviside, temos

$$\frac{d}{dt} Y = \delta_0 \quad (1).$$

Com efeito, se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, vem

$$\langle Y, \frac{d}{dt} \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t) Y(t) dt = \int_0^{\infty} \phi'(t) dt$$

(1) Observe que não estamos distinguindo em notação entre Y e T_Y .

$$= -\phi(0) = -\langle \delta_0, \phi \rangle.$$

2) Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{a\})$ tal que os limites $D^k f(a+) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} D^k f(t+\epsilon)$, $D^k f(a-) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} D^k f(t-\epsilon)$ existem para cada $k=0,1,\dots$. Então, as derivadas sucessivas $D^k f(t)$ existem para todo $t \neq a$ e são funções localmente integráveis, definindo portanto, distribuições $T_{D^k f}$. A relação entre $D^k f$ e as derivadas $D^k T_f$ de f no sentido das distribuições é dada pela fórmula (Exercício)

$$(A.6) \quad D^{k+1} T_f = T_{D^{k+1} f} + \sum_{j=0}^k s_j D^{k-j} \delta_a, \quad k=0,1,\dots,$$

onde $s_j = D^j f(a+) - D^j f(a-)$ é o salto de $D^j f$ em a .

Finalizando esta seção, observamos que, dados $a \in E(\mathbb{R}^n)$ e $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, a fórmula

$$(A.7) \quad \langle aT, \phi \rangle = \langle T, a\phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

define o *produto* aT como um elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (verifique), produto este que coincide com o produto usual de funções quando T provem de uma função localmente integrável (isto é, $aT_f = T_{af}$ se $f \in L^1_{loc}$).

A.4 - Distribuições Temperadas em \mathbb{R}^n .

Seja $S(\mathbb{R}^n)$ o subespaço de $E(\mathbb{R}^n)$ consistindo daque

las funções ϕ tais que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha} D^{\beta} \phi(x)| < \infty$ quaisquer que sejam os multi-índices α, β . $S(\mathbb{R}^n)$ é comumente chamado o espaço de Schwartz das funções rapidamente decrescentes no infinito e é munido da topologia definida pelas seminormas

$$v_{\alpha, \beta}(\phi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha} D^{\beta} \phi(x)|,$$

ou, equivalentemente, pelas seminormas

$$\mu_{k, m}(\phi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq m} (1 + |x|)^k |D^{\alpha} \phi(x)|.$$

Vale mencionar que $S(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Fréchet e que temos as inclusões (próprias)

$$(A.8) \quad \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset E(\mathbb{R}^n) \quad (1).$$

O espaço das distribuições temperadas em \mathbb{R}^n é, por definição, o dual de $S(\mathbb{R}^n)$, i.e.,

$$S'(\mathbb{R}^n) = \{T: S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C} \mid T \text{ é linear e contínua}\},$$

munido da topologia fraca.

Observação A.5. Das inclusões em (A.8) pode-se mostrar que temos as seguintes injeções contínuas (Exercício):

- (1) Um exemplo típico de uma $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ que não pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é dado por $\phi(x) = \exp(-|x|^2)$.

$$(A.9) \quad E'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, toda distribuição com suporte compacto "é" uma distribuição temperada e, por sua vez, toda distribuição temperada "é" uma distribuição.

Exemplo: Como sabemos, toda função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, determina uma distribuição $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Vejamos que, na realidade, T_f pode ser considerado como um elemento de $S'(\mathbb{R}^n)$:

Se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ então, para qualquer $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} |f(x)\phi(x)| &= |f(x)| (1+|x|)^{-n-1} (1+|x|)^{n+1} |\phi(x)| \\ &\leq \|f\|_\infty (1+|x|)^{-n-1} \mu_{n+1,0}(\phi) \quad \text{a.e.,} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$|\langle T_f, \phi \rangle| \leq M \mu_{n+1,0}(\phi),$$

onde $M = \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1} dx < \infty$. Por outro lado, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então

$$|f(x)\phi(x)| \leq |f(x)| \mu_{0,0}(\phi) \quad \text{a.e.,}$$

logo

$$|\langle T_f, \phi \rangle| \leq \|f\|_1 \mu_{0,0}(\phi).$$

Finalmente, para o caso $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p < \infty$, escrevemos

$$|\phi(x)|^q = (1+|x|)^{-sq} [(1+|x|)^s |\phi(x)|]^q,$$

com $p^{-1}+q^{-1}=1$, $sq>n$ e, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$|\langle T_f, \phi \rangle| \leq \|f\|_p \|\phi\|_q \leq M \mu_{s,0}(\phi),$$

onde $M = \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-sq} dx \right)^{\frac{1}{q}}$.

Observação A.6. A importância dos espaços intermediários $S(\mathbb{R}^n)$ e $S'(\mathbb{R}^n)$ (v. (A.8) e (A.9)) está justamente no fato de que eles constituem o "habitat natural" para a transformada de Fourier, como veremos mais adiante.

A.5 - Convolução e Regularização.

Se f e g são funções contínuas em \mathbb{R}^n com uma delas tendo suporte compacto, a convolução de f com g ,

$$(A.10) \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

está bem definida e é uma função também contínua com

$$(A.11) \quad \text{supp}(f * g) \subset \text{supp} f + \text{supp} g.$$

Além disso, vê-se que $g * f = f * g$. Mais geralmente, se $f \in L^1_{\text{loc}}$ e g é contínua com suporte compacto então, novamente $f * g$ é contínua e (A.11) é válido. De fato, pode-se mostrar

que $f * g$ é no mínimo "tão boa" quanto g : mais precisamente, se g é de classe C^k então $f * g$ é de classe C^k e $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ $\forall |\alpha| \leq k$ ($0 \leq k \leq \infty$). Em particular, se $g \in \mathcal{D}$ então $f * g \in \mathcal{E}$ para um $f \in L^1_{loc}$ arbitrário. Portanto, a operação de convolução nos fornece uma maneira de regularizar funções!

Seja $\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida em (A.1) multiplicada por uma constante adequada de maneira que $\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x) dx = 1$. Se $\{\theta_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ é a família definida por

$$\theta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \theta(\varepsilon^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0,$$

e se $f \in L^1_{loc}$ vamos designar por f_ε a função de classe C^∞ que é a convolução de f com θ_ε :

$$f_\varepsilon = f * \theta_\varepsilon$$

Teorema A.2. (i) Dada uma função contínua f , $f_\varepsilon \rightarrow f$ uniformemente nos compactos de \mathbb{R}^n .

(ii) Dada $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, temos que $f_\varepsilon \in L^p$ (1) e $f_\varepsilon \rightarrow f$ em L^p .

Demonstração. V. [10], pg. 3, por exemplo.

Corolário A.1. \mathcal{D} é denso em L^p , $1 \leq p < \infty$.

(1) Portanto, $f \in L^p \cap \mathcal{E}$.

Demonstração. Basta verificar que uma função f em L^p com suporte compacto pode ser aproximada por funções em \mathcal{D} e isto é uma consequência do Teorema A.2 (ii).

Q.E.D.

Corolário A.2. Se $\phi \in \mathcal{D}$ (resp. E) então $\phi_\epsilon \rightarrow \phi$ em \mathcal{D} (resp. E).

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{D}$. Para cada multi-índice α , temos que $D^\alpha \phi_\epsilon = D^\alpha(\phi * \theta_\epsilon) = D^\alpha \phi * \theta_\epsilon = (D^\alpha \phi)_\epsilon + D^\alpha \phi$ uniformemente nos compactos de \mathbb{R}^n em vista do Teorema A.2 (i). Além disso, temos $\text{supp } \phi_\epsilon \subset \text{supp } \phi + \text{supp } \theta_\epsilon = \text{supp } \phi + \overline{B(0, \epsilon)}$ de sorte que os suportes de todos os ϕ_ϵ com $0 < \epsilon < 1$, digamos, estão contidos no compacto $\text{supp } \phi + \overline{B(0, 1)}$. O caso de ϕ em E é análogo

Q.E.D.

Observação A.7. A família $\{\theta_\epsilon\}$ é muitas vezes chamada de uma *aproximação da identidade*, por razões óbvias. E, dada $f \in L^1_{\text{loc}}$, a família $\{f_\epsilon\}$ é chamada de uma *regularização* de f (através das θ_ϵ 's).

Vamos agora definir a convolução de uma distribuição $T \in \mathcal{D}'$ (resp. E') com uma função $\phi \in \mathcal{D}$ (resp. E). Como queremos que a definição coincida com (A.10) quando T é uma função, somos naturalmente levados a definir $T * \phi$ através da fórmula

$$(A.12) \quad T * \phi(x) = \langle T, \phi(x - \cdot) \rangle.$$

Teorema A.3. Sejam $T \in \mathcal{D}'$ (resp. E') e $\phi \in \mathcal{D}$ (resp. E). Então (i) $T * \phi \in E$ com $D^\alpha(T * \phi) = D^\alpha T * \phi = T * D^\alpha \phi$, $\forall \alpha$. (ii) $\text{supp}(T * \phi) \subset \text{supp} T + \text{supp} \phi$.

Demonstração. Vamos considerar $\phi \in \mathcal{D}$ e $T \in \mathcal{D}'$. O caso $\phi \in E$, $T \in E'$ é análogo. (i) Observe que a função $T * \phi$ está bem definida e, de fato, é a composição das funções $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \phi(x - \cdot) \in \mathcal{D}$ e $\mathcal{D} \ni \psi \xrightarrow{T} \langle T, \psi \rangle \in \mathbb{C}$, as quais são contínuas. Logo, $T * \phi$ é contínua. Mostremos agora que $\frac{\partial}{\partial x_j}(T * \phi) = T * \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$, $j=1, \dots, n$. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}(T * \phi)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ \langle T, \phi(x + h e_j - \cdot) \rangle - \langle T, \phi(x - \cdot) \rangle \} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \langle T, Q_h^j \phi(x - \cdot) \rangle, \end{aligned}$$

onde $Q_h^j \phi(x) = \frac{1}{h} [\phi(x + h e_j) - \phi(x)]$ é o quociente de Newton de ϕ (na direção de e_j). Não é difícil ver que $Q_h^j \phi \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$ em \mathcal{D} quando $h \rightarrow 0$. Portanto, $\langle T, Q_h^j \phi(x - \cdot) \rangle \rightarrow \langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x - \cdot) \rangle$ quando $h \rightarrow 0$, i.e.,

$$(A.13) \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(T * \phi)(x) = (T * \frac{\partial \phi}{\partial x_j})(x).$$

Por outro lado, temos

$$(A.14) \quad (T * \frac{\partial \phi}{\partial x_j})(x) = \langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x - \cdot) \rangle = \langle T_y, -\frac{\partial \phi}{\partial y_j}(x - y) \rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial T}{\partial y_j}, \phi(x-y) \right\rangle = \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} * \phi \right)(x).$$

Logo, (A.13) e (A.14) fornecem

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(T*\phi) = T*\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial T}{\partial x_j}*\phi$$

e (i) resulta por indução

(ii) Da definição (A.12) está claro que $T*\phi(x)=0$ sempre que $\text{supp } T \cap \text{supp } \phi(x-\cdot)=\emptyset$, i.e., sempre que $(x - \text{supp } \phi) \cap \text{supp } T = \emptyset$, ou ainda, $x \notin \text{supp } \phi + \text{supp } T$. Logo, $\text{supp}(T*\phi) \subset \text{supp } \phi + \text{supp } T$.

Q.E.D.

Pode-se mostrar (V. [29], pg. 157) que um análogo do corolário A.2 é válido para a regularização $T_\epsilon = T*\theta_\epsilon$ de uma distribuição T , i.e., temos o seguinte

Teorema A.4. Se $T \in \mathcal{D}'$ (resp. E') então $T_\epsilon \rightarrow T$ em \mathcal{D}' (resp. E').

Finalmente, vejamos sob que condições podemos definir a convolução $S*T$ de duas distribuições. A definição deve ser de tal maneira a coincidir com a definição (A.10) quando S e T são funções. Assim, se f e g são funções tais que $f*g$ está bem definida e se $\phi \in \mathcal{D}$, temos

$$\langle T_{f*g}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right) \phi(x) dx,$$

ou ainda, usando formalmente o teorema de Fubini e fazendo mudanças de variáveis adequadas,

$$\begin{aligned}\langle T_{f * g}, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \phi(z+y) dy \right) dz \\ &= \langle T_{f(z)}, \langle T_{g(y)}, \phi(z+y) \rangle \rangle.\end{aligned}$$

Logo, somos levados a definir $S * T$ através da fórmula

$$(A.15) \quad \langle S * T, \phi \rangle = \langle S_z, \langle T_y, \phi(z+y) \rangle \rangle \quad (1),$$

sempre que o segundo membro acima fizer sentido e depender continuamente de ϕ .

Teorema A.5. Sejam $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tais que para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto $A(K) = \{(z, y) \mid z \in \text{supp } S, y \in \text{supp } T, z+y \in K\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ também é compacto. Então (A.15) define $S * T$ como um elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Podemos escrever a função $\psi(z) = \langle T_y, \phi(z+y) \rangle$ como

$$\psi(z) = (T * \overset{y}{\phi})(-z),$$

(1) O índice y em T_y indica que T atua em $\phi(z+y)$ olhada como função de y . O resultado é uma função $\psi(z)$ na qual S deve atuar.

onde $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$. Logo, em vista do teorema A.3, ψ é uma função de classe C^∞ com $\text{supp } \psi \subset -\text{supp } T + \text{supp } \phi$. Por outro lado, tomando $K = \text{supp } \phi$, o conjunto $A(K) = \{(z, y) \in \text{supp } S \times \text{supp } T \mid z+y \in \text{supp } \phi\}$ é compacto por hipótese. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{supp } S \cap \text{supp } \psi &\subset \text{supp } S \cap (-\text{supp } T + \text{supp } \phi) \\ &= \{z \in \text{supp } S \mid z+y \in \text{supp } \phi \text{ para algum } y \in \text{supp } T\} \\ &= \Pi_1 A(K), \end{aligned}$$

onde $\Pi_1(z, y) = z$, o que mostra que $\text{supp } S \cap \text{supp } \psi$ é compacto. Mas então, $\langle S, \psi \rangle$ faz sentido, i.e., (A.15) está bem definido. (Colocamos $\langle S, \psi \rangle = \langle S, \alpha \psi \rangle$, onde α é qualquer função em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ que seja igual a 1 numa vizinhança de $L = \text{supp } S \cap \text{supp } \psi$; por exemplo, $\alpha = \chi_L * \theta_\epsilon$ para algum $\epsilon > 0$). Finalmente, não é difícil mostrar que $S * T: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua (Exercício).

Q.E.D.

Corolário A.3. Se uma das distribuições S ou T for de suporte compacto então $S * T$ está bem definido.

Exemplo: $T * \delta_0 = \delta_0 * T = T \quad \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, $\langle T * \delta, \phi \rangle = \langle T_z, \langle \delta_0, \phi(z+\cdot) \rangle \rangle = \langle T_z, \phi(z) \rangle$ e $\langle \delta * T, \phi \rangle = \langle T_y, \phi(z+y) \rangle \Big|_{z=0} = \langle T_y, \phi(y) \rangle$.

Seja $P=P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial em \mathbb{R}^n com coeficientes constantes. Uma distribuição $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ diz-se uma *solução fundamental* de P se

$$PE = \delta_0,$$

isto é,

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle E, D^\alpha (a_\alpha \phi) \rangle = \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

É um fato conhecido que todo operador diferencial com coeficientes constantes possui uma solução fundamental ([4], [5]). Vejamos alguns exemplos.

Exemplos: 1) Quando $n=1$, já vimos que a função $Y(t)$ de Heaviside é uma solução fundamental do operador $\frac{d}{dt}$. Analogamente, $Y(t) \frac{t^k}{(k-1)!}$ é uma solução fundamental do operador $(\frac{d}{dt})^k$.

2) Ainda no caso $n=1$, não é difícil mostrar (Exercício) que, mais geralmente, quando $P = (\frac{d}{dt})^k + a_1 (\frac{d}{dt})^{k-1} + \dots + a_{k-1} (\frac{d}{dt}) + a_k$, $k \geq 2$, uma solução fundamental de P é dada por $Y(t)U(t)$ onde $U(t)$ é a solução do problema de valor inicial

$$PU = 0$$

$$\frac{d^j U}{dt^j}(0) = 0, \quad 0 \leq j \leq k-2$$

$$\frac{d^{k-1} U}{dt^{k-1}}(0) = 1$$

3) Para $n \geq 3$, a função (localmente integrável em \mathbb{R}^n) $E(x) = \frac{1}{(2-n)\Omega_{n-1}} \frac{1}{|x|^{n-2}}$ (onde Ω_{n-1} = área de S^{n-1})

$\subset \mathbb{R}^n$) é uma solução fundamental do Laplaciano

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \partial^2 / \partial x_j^2, \text{ i.e.,}$$

$$\frac{1}{(2-n)\Omega_{n-1}} \Delta(|x|^{2-n}) = \delta_0,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{(2-n)\Omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} \Delta \phi(x) dx = \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Com efeito, dado $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tomando $R > 0$ tal que $\text{supp } \phi$ está contido na bola $\overline{B(0, R)}$, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} \Delta \phi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon \leq |x| \leq R} |x|^{2-n} \Delta \phi(x) dx.$$

Usando a *identidade de Green* $\int_K (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_{\partial K} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) dS$ (onde $\partial / \partial n$ designa derivação na direção da normal unitária exterior a ∂K) e o fato que $|x|^{2-n}$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, obtemos

$$\int_{\epsilon \leq |x| \leq R} (|x|^{2-n} \Delta \phi(x) - 0) dx = 0 + \int_{|x|=\epsilon} [|x|^{2-n} \sum_{j=1}^n (-\frac{x_j}{|x|}) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) - \phi(x) \sum_{j=1}^n (2-n) (-\frac{x_j}{|x|}) |x|^{1-n} \frac{x_j}{|x|}] dS = - \int_{|x|=\epsilon} \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\epsilon^{n-1}} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) dS$$

$$+ (2-n) \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{|x|=\varepsilon} \phi(x) dS = \textcircled{1} + \textcircled{2} .$$

Agora, é fácil ver que $\textcircled{1}$ é majorado por uma constante vezes ε , logo $\textcircled{1}$ tende a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Quanto a $\textcircled{2}$, observe que a *média de ϕ na esfera $|x| = \varepsilon$* ,

$$\frac{1}{\Omega_{n-1} \varepsilon^{n-1}} \int_{|x|=\varepsilon} \phi(x) dS, \text{ tende a } \phi(0) \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ logo}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow (2-n) \Omega_{n-1} \phi(0) .$$

Q.E.D.

APÊNDICE B

TRANSFORMADA DE FOURIER ESPAÇOS DE SOBOLEV

B.1 - Teoria em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Restrição a $S(\mathbb{R}^n)$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de f , $\tilde{f} = Ff$, é definida pela fórmula

$$(B.1) \quad \tilde{f}(p) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip \cdot x} f(x) dx, \quad p \in \mathbb{R}^n.$$

É evidente que F é uma aplicação linear contínua de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\|\tilde{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1.$$

De fato, a imagem $F(L^1)$ está contida no espaço das funções uniformemente contínuas que se anulam no infinito. Este é o conhecido *Teorema de Riemann-Lebesgue*:

Teorema B.1. Se $f \in L^1$ então \tilde{f} é uniformemente contínua e $\tilde{f}(p) \rightarrow 0$ quando $|p| \rightarrow \infty$.

Demonstração. V. [22], por exemplo.

Exemplos: 1) Se $F(x) = e^{-|x|^2/2}$ então $\tilde{F} = F$ (Exercício).

2) Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \neq 0$ real. Então é imediato da definição (B.1) que

$$[f(x-a)]^\vee(p) = e^{-ia \cdot p} \tilde{f}(p),$$

$$[f(\lambda x)]^\vee(p) = |\lambda|^{-n} \tilde{f}(\lambda^{-1}p),$$

$$[e^{ix \cdot a} f]^\vee(p) = \tilde{f}(p-a).$$

O próximo resultado, cuja demonstração omitimos aqui (V. [22], por exemplo), nos diz que, sob a transformada Fourier, derivação em relação a x_j corresponde a multiplicação por ip_j e multiplicação por $-ix_j$ corresponde a derivação em relação a p_j . Mais precisamente:

Teorema B.2. (i) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tem derivada (forte) $\partial f / \partial x_j$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ (1) então

$$(B.2) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\vee(p) = ip_j \tilde{f}(p)$$

(ii) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é tal que $x_j f$ também pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$ então

$$(B.3) \quad (-ix_j f)^\vee(p) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p_j}(p).$$

(1) Isto é, existe o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(\cdot + he_j) - f]$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Observação B.1. O teorema acima pode ser estendido de maneira óbvia para derivadas de ordem superior. Temos

$$(B.4) \quad (D^\alpha f)^\sim(p) = (ip)^{\alpha\vee} f(p),$$

se $D^\alpha f$ existe em $L^1(\mathbb{R}^n)$, e

$$(B.5) \quad [(-ix)^\alpha f]^\sim(p) = D^{\alpha\vee} f(p),$$

se $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Vamos agora restringir a nossa atenção ao espaço $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Como veremos, a transformada de Fourier estabelece um isomorfismo bicontínuo de $S(\mathbb{R}^n)$ sobre si mesmo.

Teorema B.3. Se $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ então $\phi^\sim \in S(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\phi \xrightarrow{F} \phi^\sim$ é contínua e temos

$$(D^\alpha \phi)^\sim(p) = (ip)^{\alpha\vee} \phi(p),$$

$$[(-ix)^\alpha \phi]^\sim(p) = D^{\alpha\vee} \phi(p),$$

onde o multi-índice α e $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ são arbitrários.

Demonstração. Inicialmente observe que, se $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, então também $x^\alpha \phi \in S(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha$. Logo, (B.5) nos mostra que $D^{\alpha\vee} \phi$ existe e

$$(B.6) \quad D^{\alpha\vee} \phi(p) = [(-ix)^\alpha \phi]^\sim(p).$$

Portanto, ϕ^\sim é infinitamente diferenciável. Por outro lado é também evidente que $D^\alpha \phi \in S(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha$; mais ainda, $D^\alpha \phi$ é de fa

to a derivada forte D^α de ϕ em L^1 (Exercício). Logo, obtemos de (B.4) que

$$(B.7) \quad (D^\alpha \phi)^\vee(p) = (ip)^\alpha \phi^\vee(p).$$

As identidades (B.6) e (B.7) nos permitem escrever

$$[D^\alpha((-ix)^\beta \phi)]^\vee(p) = (ip)^\alpha [(-ix)^\beta \phi]^\vee(p) = (ip)^\alpha D^{\beta \vee} \phi(p),$$

quaisquer que sejam os multi-índices α, β e, portanto,

$$(B.8) \quad |(ip)^\alpha D^{\beta \vee} \phi(p)| \leq (2\pi)^{-n/2} \|D^\alpha((-ix)^\beta \phi)\|_1 \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Isto prova que $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$. Também, a continuidade de $F: S \rightarrow S$ resulta de (B.8) se observarmos que podemos majorar

$$\|D^\alpha((-ix)^\beta \phi)\|_1 \quad \text{por uma constante vezes } \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1} dx$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\gamma| \leq |\alpha|} (1+|x|)^{|\beta|+n+1} |D^\gamma \phi(x)|.$$

Q.E.D.

Vamos definir agora a *transformada de Fourier inversa* de f , F^*f , através da fórmula

$$(B.9) \quad F^*f(p) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip \cdot x} f(x) dx, \quad p \in \mathbb{R}^n,$$

i.e., $F^*f(p) = Ff(-p)$. A escolha do termo "transformada de Fourier inversa" (bem como da notação F^*) ficará clara após o próximo teorema.

Teorema B.4. (i) F^*F é igual à identidade em $S(\mathbb{R}^n)$, i.e.,

(Fórmula de
inversão)

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot p} \hat{\phi}(p) dp,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Se $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \hat{\psi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x) \psi(x) dx,$$

(Fórmula de
Parseval)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \overline{\psi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x) \overline{\hat{\psi}(x)} dx.$$

Demonstração. (i) Queremos calcular a integral iterada

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip \cdot y} \phi(y) dy \right) dp.$$

Como a integral dupla não converge absolutamente, não podemos inverter a ordem de integração. Contornamos esta dificuldade do seguinte modo: Dada uma função $f \in S(\mathbb{R}^n)$, a integral iterada $\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot p} f(p) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip \cdot y} \phi(y) dy \right) dp$ é agora absolutamente convergente, de sorte que podemos inverter a ordem de integração, obtendo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot p} f(p) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip \cdot y} \phi(y) dy \right) dp$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y-x) \cdot p} f(p) dp \right) dy,$$

i.e.,

$$(B.10) \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot p} f(p) \hat{\phi}(p) dp = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y-x) \phi(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) \phi(x+y) dy.$$

Tomando $f(p) = F(\varepsilon p)$, com $F \in S(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$ fixados, e lembrando que $[F(\varepsilon \cdot)]^\vee(y) = \varepsilon^{-n} \hat{F}(\varepsilon^{-1}y)$, vem

$$(B.11) \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot p} F(\varepsilon p) \hat{\phi}(p) dp = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}(z) \phi(x+\varepsilon z) dz,$$

e o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos permite passar ao limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ em (B.11), obtendo

$$F(0) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot p} \hat{\phi}(p) dp = \phi(x) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}(z) dz.$$

A escolha $F(x) = e^{-|x|^2/2}$ nos fornece o resultado (i) se observarmos que $\hat{F} = F$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} F(y) dy = (2\pi)^{n/2} F(0) = (2\pi)^{n/2} F(0) = (2\pi)^{n/2}$.

(ii) Fazendo $x=0$ em (B.10) vem

$$(B.12) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(p) \tilde{\phi}(p) dp = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) \phi(y) dy, \quad \forall f, \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, tomando acima $f(p) = \overline{\tilde{\psi}(p)}$ com $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ e observando que $Ff = \overline{F^* \tilde{f}}$ (v. (B.9)) e $F^* F \psi = \psi$ (fórmula de inversão), (B.12) fornece a fórmula de Parseval.

Q.E.D.

Observação B.2. Note que $S(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{F^*} S(\mathbb{R}^n)$ é contínua pois F o é e $F^* \phi(p) = F\phi(-p)$. Observe também que usando as relações $F^* F \phi = \phi$ e $Ff = \overline{F^* \tilde{f}}$ obtemos $FF^* \phi = \overline{F^*(F^* \phi)} = \overline{F^*(F\tilde{\phi})} = \tilde{\tilde{\phi}} = \phi$, i.e., FF^* também é igual à identidade em $S(\mathbb{R}^n)$. Portanto, podemos agora enunciar o

Teorema B.5. A transformada de Fourier F é um isomorfismo bicontínuo de $S(\mathbb{R}^n)$ sobre si mesmo cujo inverso F^{-1} é F^* .

B.2 - Transformada de Fourier de Distribuições Temperadas

Se $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de T , $\tilde{T} = FT$, pela fórmula

$$(B.13) \quad \langle \tilde{T}, \phi \rangle = \langle T, \tilde{\phi} \rangle \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n),$$

i.e., $\tilde{T} = T \circ F$. É claro que \tilde{T} é linear e contínua, i.e., $\tilde{T} \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Como sabemos, funções em $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$) são distribuições temperadas. Vejamos que, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a definição (B.13) está em concordância com a definição de \tilde{f} dada em (B.1).

Lema B.1. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\tilde{T}_f = T_f^\vee$.

Demonstração. Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$(B.14) \quad \langle \tilde{T}_f, \phi \rangle = \langle T_f, \tilde{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\phi}(x) f(x) dx.$$

Por outro lado, a fórmula $\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\phi}(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \tilde{\psi}(x) dx$ é válida se $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. (A demonstração é exatamente a mesma dada no teorema B.4 (ii)). Portanto, podemos escrever (B.14)

como

$$\langle \tilde{T}_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \tilde{f}(x) dx = \langle T_f^\vee, \phi \rangle,$$

i.e., $\tilde{T}_f = T_f^\vee$.

Exemplos: 1) $\tilde{\delta}_0$ é a função constante $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto (2\pi)^{-n/2}$.

i.e., $\tilde{\delta}_0 = T_{(2\pi)^{-n/2}}$, pois

$$\langle \tilde{\delta}_0, \phi \rangle = \langle \delta_0, \tilde{\phi} \rangle = \tilde{\phi}(0) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

2) A transformada de Fourier da função constante igual a 1 é $(2\pi)^{n/2} \delta_0$, i.e., $\tilde{T}_1 = (2\pi)^{n/2} \delta_0$, pois

$$\langle \tilde{T}_1, \phi \rangle = \langle T_1, \tilde{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\phi}(x) dx = (2\pi)^{n/2} \phi(0) \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

3) Dado um multi-índice α , a transformada de Fourier da função $h_\alpha(x) = x^\alpha$ é $(2\pi)^{n/2} (iD)^\alpha \delta_0$, i.e., $\tilde{T}_{h_\alpha} = (2\pi)^{n/2} (iD)^\alpha \delta_0$ (Exercício).

Uma função $a \in E(\mathbb{R}^n)$ diz-se de *crescimento lento no infinito* se, para todo multi-índice α existe um inteiro $N = N_\alpha \geq 0$ tal que $|x|^{-N} |D^\alpha a(x)| \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$. As funções h_α acima são exemplos típicos de funções de crescimento lento no infinito. É fácil ver que o produto de uma função rapidamente decrescente por uma função de crescimento lento é uma função rapidamente decrescente. Em particular, o produto aT de uma função de crescimento lento por uma distribuição temperada é novamente uma distribuição temperada: $\langle aT, \phi \rangle = \langle T, a\phi \rangle \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n)$. Usando este fato, podemos mostrar facilmente que (B.4) e (B.5) se estendem para distribuições temperadas, isto é:

Teorema B.6. Se $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ então

$$(D^\alpha T)^\sim = (ix)^\alpha T^\sim$$

e

$$((-ix)^\alpha T)^\sim = D^\alpha T^\sim$$

para todo multi-índice α .

Demonstração. Dado $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} \langle (D^{\alpha_T})^{\sim}, \phi \rangle &= \langle D^{\alpha_T}, \tilde{\phi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha_T} \tilde{\phi} \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, ((-ix)^{\alpha_T})^{\sim} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, (-ix)^{\alpha_T} \phi \rangle \\ &= \langle (ix)^{\alpha_T}, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $\langle ((ix)^{\alpha_T})^{\sim}, \phi \rangle = \langle D^{\alpha_T}, \tilde{\phi} \rangle$.

Q.E.D.

Finalmente, vejamos que um análogo do teorema B.5 é válido para $S'(\mathbb{R}^n)$:

Teorema B.7. A transformada de Fourier F é um isomorfismo bicontínuo de $S(\mathbb{R}^n)$ sobre si mesmo cujo inverso é dado por $T \longmapsto F^*T$, onde

$$\langle F^*T, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, F^*\phi \rangle \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. A injetividade de $S'(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{F} S'(\mathbb{R}^n)$ é consequência da sobrejetividade de $S(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{F} S(\mathbb{R}^n)$ (v. (B.13)). Por outro lado, dado $S \in S'(\mathbb{R}^n)$ temos $S = \tilde{T}$ onde $T = F^*S$ pois

$$\langle \tilde{T}, \phi \rangle = \langle T, \tilde{\phi} \rangle = \langle S, F^*\tilde{\phi} \rangle = \langle S, \phi \rangle \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Quanto à continuidade de F em $S'(\mathbb{R}^n)$, observe que dada uma vizinhança sub-básica $0 = \{S \in S'(\mathbb{R}^n) \mid |\langle S, \psi \rangle| < \epsilon\}$ de $0 \in S'(\mathbb{R}^n)$ sua imagem inversa por F ,

$$\begin{aligned}
 F^{-1}(0) &= \{T \in S'(\mathbb{R}^n) \mid \tilde{T} \in 0\} = \{T \in S'(\mathbb{R}^n) \mid |\langle \tilde{T}, \psi \rangle| < \varepsilon\} \\
 &= \{T \in S'(\mathbb{R}^n) \mid |\langle T, \tilde{\psi} \rangle| < \varepsilon\},
 \end{aligned}$$

é uma vizinhança (até sub-básica, de novo) de $0 \in S'(\mathbb{R}^n)$. A continuidade de $F^* = F^{-1}$ é obtida análogamente.

Q.E.D.

Se $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição com suporte compacto então, em particular, T é uma distribuição temperada, de sorte que podemos falar na sua transformada de Fourier \tilde{T} .

Teorema B.8. Se $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ então \tilde{T} é a função dada por

$$\tilde{T}(p) = (2\pi)^{-n/2} \langle T_x, e^{-ix \cdot p} \rangle$$

Demonstração. A regularização $T_\varepsilon = T * \theta_\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) de T é tal que $T_\varepsilon \in \mathcal{D}$ e $T_\varepsilon \rightarrow T$ em \mathcal{D}' (teoremas A.3 e A.4). Logo, $T_\varepsilon \rightarrow T$ em S' e, portanto, $\tilde{T}_\varepsilon \rightarrow \tilde{T}$ em S' (continuidade de F). Pondo $e_p(x) = e^{-ix \cdot p}$, temos

$$\begin{aligned}
 (B.15) \quad (2\pi)^{n/2} \tilde{T}_\varepsilon(p) &= (2\pi)^{n/2} (T * \theta_\varepsilon)^\vee(p) = \langle T * \theta_\varepsilon, e_p \rangle \\
 &= [(T * \theta_\varepsilon) * \check{e}_p]^\vee(0) = [T * (\theta_\varepsilon * \check{e}_p)]^\vee(0) = [T * (\check{\theta}_\varepsilon * e_p)^\vee]^\vee(0) \\
 &= \langle T, \check{\theta}_\varepsilon * e_p \rangle = (2\pi)^{n/2} \tilde{\theta}_\varepsilon(p) \langle T, e_p \rangle = \\
 &= (2\pi)^{n/2} \tilde{\theta}(\varepsilon p) \langle T, e_p \rangle,
 \end{aligned}$$

onde usamos a identidade $\langle T, \phi \rangle = (T * \check{\phi})(0)$ (V. (A.12)), o fato (facilmente verificado) que $\check{\theta}_\epsilon * e_p = (2\pi)^{n/2} \check{\theta}_\epsilon(p) e_p$ e a associatividade $(T * \phi) * \psi = T * (\phi * \psi)$, que é válida para $T \in E'$, $\phi \in \mathcal{D}$ e $\psi \in E$ (V. [29], pg. 156). Assim, mostramos em (B.15) que

$$\check{T}_\epsilon(p) = \check{\theta}(\epsilon p) \langle T, e_p \rangle.$$

Quando $\epsilon \rightarrow 0$, o segundo membro da igualdade acima converge para a função $(2\pi)^{-n/2} \langle T, e_p \rangle$ (1), uniformemente para p num compacto qualquer de \mathbb{C}^n , de sorte que a função $(2\pi)^{-n/2} \langle T, e_p \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \check{T}_\epsilon(p)$, $p \in \mathbb{C}^n$, é inteira. A demonstração está completa tendo em vista que $\check{T}_\epsilon \rightarrow \check{T}$ em S' .

Q.E.D.

Agora, dados $S \in S'(\mathbb{R}^n)$ e $T \in E'(\mathbb{R}^n)$, faz sentido falar no produto $\check{S}\check{T}$ (pois \check{T} é uma função) bem como na convolução $S * T$. Pode-se mostrar (V. [29], pg. 160) que o seguinte resultado é válido.

Teorema B.9. Se $S \in S'(\mathbb{R}^n)$ e $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ então

$$(S * T)^\sim = (2\pi)^{n/2} \check{T} \check{S}.$$

B.3 - Teoria em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Espaços de Sobolev

Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, f define uma distribuição temperada

(1) $\check{\theta}(0) = (2\pi)^{-n/2}$ visto que $\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x) dx = 1$.

T_f e, portanto, podemos falar de sua transformada de Fourier. Mostraremos que, neste caso, \tilde{T}_f provem novamente de uma (única) função $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Escreveremos $g = \tilde{f}$ e chamaremos g a transformada de Fourier da função $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema B.10. Dado $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existe uma única $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{T}_f = T_g$. Além disso, $\|g\|_2 = \|f\|_2$.

Demonstração. Para cada $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{T}_f, \phi \rangle| &= |\langle T_f, \tilde{\phi} \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\phi}(x) f(x) dx \right| \leq \|f\|_2 \|\tilde{\phi}\|_2 \\ &= \|f\|_2 \|\phi\|_2, \end{aligned}$$

i.e., \tilde{T}_f é um funcional linear contínuo na topologia de $L^2(\mathbb{R}^n)$ com $\|\tilde{T}_f\| \leq \|f\|_2$. Portanto, como $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$, \tilde{T}_f estende-se de maneira única a um funcional linear contínuo em $L^2(\mathbb{R}^n)$ (que continuamos a designar por \tilde{T}_f). Agora, pelo teorema de representação de Riesz, existe um único $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(B.16) \quad \langle \tilde{T}_f, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) g(x) dx \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

e $\|g\|_2 = \|\tilde{T}_f\|$. Logo,

$$(B.17) \quad \|g\|_2 \leq \|f\|_2.$$

Usando o mesmo argumento acima para g , concluímos que existe um único $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(B.18) \quad \langle \tilde{T}_g, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)h(x) dx \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

e

$$(B.19) \quad \|h\|_2 \leq \|g\|_2.$$

Observe que (B.16) e (B.18) implicam $\tilde{T}_f = T_g$ e $\tilde{T}_g = T_h$, respectivamente, de sorte que $T_f^\vee = \tilde{T}_f = \tilde{T}_g = T_h$, i.e., $T_f^\vee = T_h$. Portanto, $h = \check{f}$ a.e. e (B.17), (B.19) fornecem $\|g\|_2 = \|f\|_2$.

Q.E.D.

Agora, dado $s \in \mathbb{R}$, vamos considerar o espaço $\cdot \tilde{H}^s$ das funções g (mensuráveis em \mathbb{R}^n) tais que $(1+|p|^2)^{s/2}g(p)$ pertence a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Então cada $g \in S'(\mathbb{R}^n)$ (1), de sorte que $g = \check{f}$ para alguma $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. Vamos denotar por $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$ o espaço consistindo das f acima, i.e.,

$$H^s = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) \mid (1+|p|^2)^{s/2} \check{f}(p) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Munido do produto escalar

$$\langle f, h \rangle_{(s)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|p|^2)^s \check{f}(p) \overline{\check{h}(p)} dp,$$

e, portanto, da norma

(1) Não vamos distinguir entre g e T_g .

$$(B.20) \quad \|f\|_{(s)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|p|^2)^s |\hat{f}(p)|^2 dp \right)^{\frac{1}{2}},$$

cada H^s é um espaço de Hilbert. Estes espaços H^s são comumente chamados de *espaços de Sobolev*.

Observação B.3. Evidentemente, temos $H^0 = L^2$ e

$$H^{s_1} \subset H^{s_2}, \text{ para } s_2 \leq s_1,$$

onde a inclusão acima é contínua.

Teorema B.11. Seja $s=k$ um inteiro positivo. Então, H^k coincide com o subespaço de L^2 daquelas funções f com derivadas (no sentido de \mathcal{D}') $D^\alpha f$ em $L^2 \quad \forall |\alpha| \leq k$.

Demonstração. Como $k > 0$, temos $H^k \subset L^2$ em vista da observação acima. Agora, basta observar que se $f \in H^k$ temos (v. teorema B.6)

$$(D^\alpha f)^\vee = (ip)^\alpha \hat{f}$$

e, portanto, $D^\alpha f \in L^2$ se $|\alpha| \leq k$, visto que $(1+|p|^2)^{k/2} \hat{f}(p) \in L^2$.

Q.E.D.

Mostraremos a seguir um teorema clássico de Sobolev que diz que, se uma função f pertence a H^s com s suficientemente grande, então f "é" contínua.

Teorema B.12. (Sobolev). Se $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s > n/2$, então (após correção num conjunto de medida nula) $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$(B.21) \quad \|f\|_{\infty} \leq C \|f\|_{(s)} \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Seja $g = F^* \tilde{f}$, i.e.,

$$(B.22) \quad g(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot p} \tilde{f}(p) dp.$$

Observe que g está bem definida pois $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ em vista da desigualdade de Cauchy-Schwartz e do fato que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|p|^2)^{-s} dp < \infty, \text{ i.e.,}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(p)| dp \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|p|^2)^{-s} dp \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|p|^2)^s |\tilde{f}(p)|^2 dp \right)^{1/2}.$$

Mais ainda, g é uniformemente contínua em \mathbb{R}^n . Por outro lado, como $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos $F^* T_{\tilde{f}} = T_{F^* \tilde{f}} = T_g$, i.e.,

$$F^* F T_f = T_g. \text{ Portanto, } T_f = T_g \text{ de sorte que } f(x) = g(x) \text{ a.e.}$$

Finalmente, a desigualdade acima fornece (B.21) uma vez que $\|f\|_{\infty} = \|g\|_{\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \|\tilde{f}\|_1$. Q.E.D.

Este teorema é um caso particular do seguinte

Teorema B.13. (Sobolev). Seja j um inteiro positivo e s tal que $s > n/2 + j$. Se $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ então (após correção

num conjunto de medida nula) $f \in C^j(\mathbb{R}^n)$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\max_{|\alpha| \leq j} \|D^\alpha f\|_\infty \leq C \|f\|_{(s)} \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Basta observar que definindo g como em (B.22), então g é de classe C^j uma vez que podemos mostrar, de maneira análoga à que fizemos antes, que $(ip)^{\alpha} \tilde{f}(p) \in L^1$ para $|\alpha| \leq j$.

Q.E.D.

Mais geralmente, podemos ainda considerar os espaços (de Sobolev) $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, onde $1 \leq p \leq \infty$ e $s \in \mathbb{R}$, consistindo daquelas distribuições temperadas $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ tais que $\tilde{f}(p)$ é uma função mensurável com $(1+|p|^2)^{s/2} \tilde{f}(p) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach quando munido da norma $\|f\|_{s,p} = \|(1+|p|^2)^{s/2} \tilde{f}(p)\|_p$. Para estes espaços temos também o seguinte análogo do teorema acima, cuja demonstração segue as mesmas linhas.

Teorema B.14. Seja j um inteiro positivo e s tal que $s > \frac{n}{q} + j$. Se $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então, (após correção num conjunto de medida nula) $f \in C^j(\mathbb{R}^n)$.

B.4 - Os Teoremas de Paley-Wiener.

Finalmente, vamos agora mencionar dois resulta

dos, conhecidos como os teoremas de Paley-Wiener, que caracterizam as transformadas de Fourier de funções (infinitamente diferenciáveis) e distribuições cujos suportes estão contidos numa bola. As demonstrações podem ser encontradas em [29], por exemplo.

Teorema B.15. (Paley-Wiener). Se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tem suporte contido na bola $\overline{B(0,R)}$, então $\psi = \hat{\phi}$ estende-se a uma função analítica em \mathbb{C}^n satisfazendo as estimativas

$$(1+|\zeta|)^k |\psi(\zeta)| \leq C_k e^{R|\operatorname{Im} \zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

onde os C_k 's, $k=0,1,2,\dots$, são constantes. Reciprocamente, se $\psi(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, é uma função analítica satisfazendo as estimativas acima, então existe $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ com suporte contido na bola $\overline{B(0,R)}$ tal que $\hat{\phi} = \psi$.

Teorema B.16. (Paley-Wiener para distribuições). Se $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tem suporte contido na bola $\overline{B(0,R)}$, então $S = \hat{T}$ estende-se a uma função analítica em \mathbb{C}^n satisfazendo a estimativa.

$$|S(\zeta)| \leq C(1+|\zeta|)^N e^{R|\operatorname{Im} \zeta|}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

para algum inteiro N e alguma constante positiva C . Reciprocamente, se $S(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, é uma função analítica satisfazendo a estimativa acima, então existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ com suporte contido na bola $\overline{B(0,R)}$ tal que $\hat{T} = S$.

REFERÊNCIAS

- [1] L. Bers, F. John, M. Schechter, Partial Differential Equations, Interscience, 1966.
- [2] R. W. Carroll, Abstract Methods in Partial Differential Equations, Harper and Row, 1969.
- [3] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vol. II, Interscience, 1962.
- [4] L. Ehrenpreis, Solutions of some problems of division I, Amer. J. Math. 76 (1954), 883-903.
- [5] A. Friedman, Generalized Functions and Partial Differential Equations, Prentice-Hall, 1963.
- [6] K. O. Friedrichs, Symmetric hyperbolic system of linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), 345-392.
- [7] L. Gårding, Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta Math. 85 (1950), 1-62.
- [8] J. Hadamard, Le Probleme de Cauchy et les equations aux derivées partielles linéaires hyperboliques, Paris 1932.
- [9] S. Helgason, The Radon transform on Euclidean spaces ..., Acta Math. 113 (1965), 93-106.
- [10] L. Hormander, Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, 3rd edition, 1969.

- [11] F. John, Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations, Interscience, 1955.
- [12] P. D. Lax and R. S. Phillips, Scattering Theory, Academic Press, 1967.
- [13] J. Leray, Hyperbolic Differential Equations, The Institute for Advanced Study, Princeton, 1952.
- [14] D. Ludwig, The Radon transform on Euclidean spaces, Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966), 49-81.
- [15] B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier Grenoble 6 (1955), 271-355.
- [16] S. Mizohata, The Theory of Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 1973.
- [17] S. I. Pai, Magnetogasdynamics and Plasma Dynamics, Springer, 1962.
- [18] I. Petrowski, Lectures on Partial Differential Equations, Wiley-Interscience, 1954.
- [19] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, 1974.
- [20] L. Schwartz, Théorie des Distributions I, II. Paris 1950, 1.
- [21] G. E. Shilov, Generalized Functions and Partial Differential Equations, Gordon and Breach, 1968.
- [22] E. M. Stein, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, 1971

- [23] M. H. Stone, On oneparameter unitary groups in Hilbert space, A. M. S. Coloq. Publ. vol. 15, 1932.
- [24] F. Trèves, Topological Vector Spaces, Distributions, and Kernels, Academic Press, 1967.
- [25] F. Trèves, Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients, Gordon and Breach, 1966.
- [26] F. Trèves, Basic Linear Partial Differential Equations, Academic Press, 1975.
- [27] C. H. Wilcox, Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problems of classical physics, Arch. Rat. Mech. Anal. 22 (1966), 37-78.
- [28] C. H. Wilcox, Measurable eigenvectors for Hermitian matrix-valued polynomials, J. M. A. A. 40 (1972), 12-19.
- [29] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, 4th edition, 1974.