

**Djairo G. Figueiredo**  
**Equações Elípticas**  
**não Lineares**

COPYRIGHT © by DJAIRO G. FIGUEIREDO (1977)

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,  
por qualquer processo, sem a permissão do autor.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Rua Luiz de Camões, 68

20.000 - Rio de Janeiro - RJ

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO .....	iii
CAPÍTULO 1: EQUAÇÕES ELÍPTICAS LINEARES EM ESPAÇOS DE SCHAUDER .....	1
1.1. EQUAÇÕES ELÍPTICAS DE 2 <sup>a</sup> ORDEM .....	2
1.2. PROBLEMA DE DIRICHLET PARA $\Delta u = 0$ .....	18
1.3. A FUNÇÃO DE GREEN .....	19
1.4. O POTENCIAL NEWTONIANO .....	24
1.5. PROBLEMA DE DIRICHLET PARA $\Delta u = \rho$ .....	35
1.6. SOBRE OS ESPAÇOS $C^x(\bar{\Omega})$ , $x \geq 0$ REAL .....	40
1.7. CONSIDERAÇÕES SOBRE OPERADORES ELÍPTICOS DE OR DEM SUPERIOR .....	44
BIBLIOGRAFIA .....	52
CAPÍTULO 2: EQUAÇÕES ELÍPTICAS NÃO LINEARES EM ESPAÇOS DE SCHAUDER .....	53
2.1. ALGUNS MÉTODOS DA ANÁLISE FUNCIONAL NÃO LINEAR .	54
2.2. OPERADORES COMPACTOS .....	60
2.3. EXEMPLOS CLÁSSICOS DE PROBLEMAS SEMILINEARES ...	64
2.4. ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DO PRINCÍPIO DO MÁXIMO ...	71
2.5. CONSIDERAÇÕES SOBRE AS EQUAÇÕES QUASE-LINEARES .	77
2.6. UMA EQUAÇÃO QUASE-LINEAR SIMPLES NO PLANO .....	80
2.7. UM COMENTÁRIO CRÍTICO .....	83

2.8. EQUAÇÕES QUASE-LINEARES, $n \geq 2$ .....	84
2.9. EQUAÇÕES SEMILINEARES VIA ITERAÇÃO MONOTÔNICA ..	90
BIBLIOGRAFIA .....	98

CAPÍTULO 3: EQUAÇÕES ELÍPTICAS LINEARES EM ESPAÇOS DE SOBOLEV .....

3.1. OS ESPAÇOS DE SOBOLEV .....	101
3.2. O PROBLEMA DE DIRICHLET EM $W_0^{m,2}$ (FORMA VARIACIONAL) .....	104
3.3. ESTIMATIVAS A PRIORI EM $L^p$ E APLICAÇÕES .....	114
BIBLIOGRAFIA .....	120

CAPÍTULO 4: EQUAÇÕES ELÍPTICAS SEMILINEARES EM ESPAÇOS DE SOBOLEV .....

4.1. PROBLEMAS NÃO RESSONANTES .....	123
4.2. UM PROBLEMA RESSONANTE .....	126
4.3. OPERADORES MONOTÔNICOS .....	129
4.4. RELACIONAMENTO ENTRE OPERADORES CONTRATIVOS E MONOTÔNICOS .....	139
4.5. ALGUNS EXEMPLOS DE OPERADORES MONOTÔNICOS .....	142
4.6. SOBREJETIVIDADE DOS OPERADORES MAXIMAIS MONOTÔNICOS .....	146
4.7. SOMA DE OPERADORES MAXIMAIS MONOTÔNICOS .....	149
4.8. OS RESULTADOS DE BRÉZIS-HARAUX .....	155
4.9. APLICAÇÕES DA TEORIA MONOTÔNICA A PROBLEMAS SEMILINEARES .....	161
BIBLIOGRAFIA .....	167

## INTRODUÇÃO

As presentes notas visam mostrar como a teoria dos operadores não lineares é utilizada na resolução de problemas de contorno para equações elípticas não lineares. Nesse sentido, vale uma explicação sobre o título do presente curso; não visamos descrever a teoria (o que seria um projeto por demais pretencioso) ou, pelo menos, uma parte da teoria das equações elípticas não lineares. Há tantos ramos dentro dessa teoria utilizando diferentes técnicas e visando objetivos específicos, que sua extensão é realmente impressionante. O que aqui fizemos foi retirar exemplos de alguns desses ramos e tratá-los pelas técnicas não lineares desenvolvidas no texto. Com isso esperamos motivar o leitor para os interessantes problemas da Análise Funcional não Linear, a qual vem se desenvolvendo intensamente nas últimas décadas. Essencialmente duas técnicas dominam o campo de aplicações: compacidade e monotonicidade. Assim desenvolvemos em algum detalhe as teorias dos operadores compactos e dos operadores monotônicos. Tendo as aplicações, de imediato, o leitor apreciará melhor o por que dos resultados abstratos. No tratamento dos problemas elípticos não lineares faz-se um uso sistemático dos resultados da teoria linear; daí os capítulos 1 e 3.

A descrição sumária de cada capítulo está colocada no início de cada um deles. As referências ao final de cada capítulo podem servir para um estudo mais detalhado ou para a continuação do que aqui se faz. Não damos as referências de autoria de todos os teoremas apresentados, consultas aos textos ou artigos citados fornecerá esse tipo de informações.

Agradecemos a Newton de Gões Horta pelo esmero costu  
meiro em seu trabalho datilográfico.

Brasília, maio de 1977

Djairo Guedes de Figueiredo

## CAPÍTULO 1

### EQUAÇÕES ELÍPTICAS LINEARES EM ESPAÇOS DE SCHAUDER

SUMÁRIO. Este capítulo é dedicado ao estudo do problema de Dirichlet para equações elípticas lineares de 2a. ordem, procurando-se a solução em espaços de Schauder  $C^{m+\alpha}(\bar{\Omega})$ . A questão é aqui abordada como o fez Schauder; um papel crucial é desempenhado pelas estimativas a priori. Decidimos discutir o assunto em certo detalhe, pois a bibliografia recente no assunto não é muito rica. Após a preparação deste capítulo temos que ele tenha ficado muito técnico, mas isso é um desses fatos da vida que os estudiosos de equações diferenciais parciais têm de enfrentar. As demonstrações das estimativas mais envolvidas e difíceis foram omitidas, e remetemos o leitor ao livro de Ladyzenskaja e Ural'ceva [7] para 2a. ordem e ao artigo de Agmon-Douglis-Nirenberg [1] para ordem superior. Cremos porém que as muitas demonstrações que demos aqui ilustram bem os métodos, e assim o leitor terá uma noção precisa do tipo de matemática envolvida.

O método desenvolvido por Schauder tanto para as demonstrações das estimativas como para a demonstração de existência de solução do problema de Dirichlet para a equação elíptica geral de 2a. ordem, reduz a parte difícil a semelhantes problemas para o caso do Laplaciano. Daí nosso estudo detalhado do potencial newtoniano, assunto clássico mas, via de regra, estudado muito superficialmente.

### 1.1. EQUAÇÕES ELÍPTICAS DE 2ª ORDEM

Seja  $\Omega$  um domínio (i.e., um aberto conexo) limitado de  $\mathbb{R}^n$ , com aderência  $\bar{\Omega}$  e fronteira  $\Gamma$ . Consideremos o operador diferencial parcial linear de 2ª. ordem

$$L \equiv L(x, D) = \sum_{|p| \leq 2} a_p(x) D^p$$

onde  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_j \geq 0$  inteiro,  $|p| = \sum_{j=1}^n p_j$  e  $D^p = D_1^{p_1} \dots D_n^{p_n}$ ,  $D_j = \partial/\partial x_j$ . Os coeficientes  $a_p(x)$  de  $L$  são funções complexas definidas em  $\bar{\Omega}$ . O operador  $L$  é elíptico se a forma quadrática

$$L'(x, \xi) = \sum_{|p|=2} a_p(x) \xi^p$$

for definida, para cada  $x \in \bar{\Omega}$ .  $L$  é uniformemente elíptico se existir uma constante  $c > 0$  tal que

$$|L'(x, \xi)| \geq c |\xi|^2$$

para todos  $x \in \bar{\Omega}$  e  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .  $L$  é propriamente elíptico se para todos pares de vetores linearmente independentes  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ , o polinômio do 2º grau em  $t$ ,  $L'(x, \xi + t\eta)$  tem uma raiz com parte imaginária positiva e outra com parte imaginária negativa.

#### Observações:

- 1) Confira a secção 1.8 para uma discussão mais completa sobre as várias noções de elipticidade.
- 2) Todo operador propriamente elíptico é elíptico.



- 3) Operadores elípticos com coeficientes reais são propriamente elípticos. E, nesse caso, supomos que a forma quadrática  $L'(x, \xi)$  é positiva definida:  $L'(x, \xi) > 0$  para  $\xi \neq 0$ .
- 4) Se os coeficientes do operador elíptico  $L$  são contínuos em  $\bar{\Omega}$  então  $L$  é uniformemente elíptico: existe uma constante  $c$  (chamada constante de elipticidade) tal que  $L'(x, \xi) \geq c|\xi|^2$ , para todo  $x \in \bar{\Omega}$ .
- 5) O laplaciano  $\Delta = \sum_{j=1}^n D_j^2$  é propriamente elíptico.
- 6) O operador de Bitsadze  $D_1^2 + 2iD_1D_2 - D_2^2$  é elíptico, mas não propriamente elíptico. De fato, com  $\xi = (1, 0)$  e  $\eta = (0, 1)$ , o polinômio em  $t$ ,  $L'(\xi + t\eta)$  tem  $t = i$  como raiz dupla.

Inconveniência de operadores elípticos, que não são propriamente elípticos. O problema de Dirichlet para a equação de Bitsadze:

$$D_1^2 u + 2iD_1D_2 u - D_2^2 u = 0, \text{ em } |z| < 1$$
$$u = 0, \text{ em } |z| = 1$$

onde  $z = x + iy$ , não é bem posto. De fato, qualquer função  $u$  da forma  $f(z)(1 - |z|^2)$ , onde  $f$  é uma função analítica complexa em  $|z| < 1$ , é solução desse problema. Prova-se que o problema de Dirichlet para equações propriamente elípticas é bem posto, no sentido de que se tem uma alternativa de Fredholm. Isso ficará claro mais adiante.

Os espaços de Schauder. Uma função  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$  é Hölder contínua de expoente  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , se

$$H_{\alpha}[u] = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}} < \infty.$$

Seja  $m$  um inteiro  $\geq 0$ . Designamos por  $C^m(\bar{\Omega})$  o espaço de todas as funções  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$  que são restrições a  $\bar{\Omega}$  de funções diferenciáveis até ordem  $m$  e definidas em uma vizinhança aberta de  $\bar{\Omega}$ ; ele é um espaço de Banach na norma

$$\|u\|_m = \sum_{|p| \leq m} \|D^p u\|_0, \quad \|u\|_0 = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|.$$

Designamos por  $C^{m+\alpha}(\bar{\Omega})$  o espaço das funções de  $C^m(\bar{\Omega})$  cujas  $m$ -ésimas derivadas são Hölder contínuas;  $C^{m+\alpha}(\bar{\Omega})$  é um espaço de Banach na norma

$$\|u\|_{m+\alpha} = \|u\|_m + \sum_{|p|=m} H_{\alpha}[D^p u].$$

Assim  $C^r(\bar{\Omega})$  está definido para todo real  $r \geq 0$ . Será conveniente usar a notação  $C^r(\Omega)$  para o espaço vetorial das funções  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  cujas restrições a compactos  $K \subset \Omega$  estão em  $C^r(K)$ .

Teorema 1.1. Suponha que  $\Omega$  satisfaça a propriedade da poligonal (i.e., existe  $\gamma > 0$  tal que quaisquer dois pontos  $x$  e  $x'$  de  $\bar{\Omega}$  podem ser ligados por uma poligonal em  $\bar{\Omega}$  de comprimento  $\ell \leq \gamma|x - x'|$ ). Então, para  $0 \leq s < r$ , a imersão  $C^r(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^s(\bar{\Omega})$  é compacta.

Domínios de classe  $C^{m+\alpha}$ .  $\Omega$  é de classe  $C^{m+\alpha}$  se existir uma cobertura aberta  $\{U_j\}_{j=1}^q$  de  $\Gamma$  e funções bijetivas  $\phi_j: \bar{U}_j \rightarrow \bar{B}$  onde  $B = \{y \in \mathbb{R}^n: |y| < 1\}$  tais que

(i) para cada  $j$ ,  $\phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B: y_n > 0\}$ .

$$(ii) \quad \|\phi_j\|_{m+\alpha}, \|\phi_j^{-1}\|_{m+\alpha} \leq M, \quad \forall j.$$

Todo domínio de classe  $C^{m+\alpha}$ ,  $m \geq 0$ , satisfaz a condição da poligonal.

Espaços  $C^{m+\alpha}(\Gamma)$ . Suponha que  $\Gamma$  é de classe  $C^{m+\alpha}$ . Uma função  $\phi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  é de  $C^{m+\alpha}(\Gamma)$  se  $\phi_j \circ \phi \in C^{m+\alpha}(\{y_n=0\})$ .  $C^{m+\alpha}(\Gamma)$  é um espaço de Banach na norma

$$\|\phi\|_{m+\alpha, \Gamma} = \sum_{j=1}^n \|\phi_j \circ \phi\|_{m+\alpha, B_0 \mathbb{R}^{n-1}}.$$

Pode-se provar que diferentes coberturas produzem normas equivalentes.

Problema de Dirichlet. Seja  $\Omega$  um domínio de classe  $C^{2+\alpha}$  e  $L$  um operador propriamente elíptico com coeficientes  $a_p \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ . Dadas  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  e  $\phi \in C^0(\Gamma)$  determinar  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  tal que

$$(1) \quad Lu = f \text{ em } \Omega, \quad u = \phi \text{ em } \Gamma.$$

Observação. Poderia parecer que o problema mais próprio seria dar  $f \in C^0(\Omega)$  e  $\phi \in C^0(\Gamma)$  e procurar  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  que satisfizesse o problema acima. Entretanto, em geral, um tal problema não tem solução. De fato, como mostraremos na secção 1.4, existem funções contínuas  $f$  para as quais a equação  $\Delta u = f$  não tem solução de classe  $C^2$ ; isso sem nem pedir que condições de fronteira sejam satisfeitas!

Teorema 1.2 (Unicidade de solução no problema de Dirichlet). Seja  $L$  um operador uniformemente elíptico. Suponhamos que os coeficientes de  $L$ , sejam reais e que  $|a_p| \leq M$  para  $|p| > 0$ ,

e que uma das condições seguintes se verifique: (i) o coeficiente  $a_0(x)$  do termo sem derivada em  $L$  seja  $\leq 0$ ; (ii) o coeficiente  $a_0(x)$  é limitado,  $|a_0| \leq M$ , e  $\Omega$  pode ser posto mediante translação e(ou) rotação entre os hiperplanos  $x_1 = d/2$  e  $x_1 = d$ , onde  $d > 0$  é suficientemente pequeno. (Na demonstração abaixo ficará esclarecido o valor de  $d$ ). Então se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  for solução do problema de Dirichlet

$$Lu = 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ em } \Gamma$$

segue-se que  $u = 0$  em  $\bar{\Omega}$ .

#### Observações:

1) Um tal teorema não é válido para equações elípticas com coeficientes complexos. Cf. a equação de Bitsadze mencionada acima.

2) Translações e rotações, ou sejam mudanças das variáveis independentes do tipo  $x \rightarrow x + x_0$  e  $x \rightarrow Tx$  onde  $T$  é uma transformação linear ortogonal em  $\mathbb{R}^n$  não mudam o carácter elíptico do operador.

Demonstração do Teorema 1.2. 1ª Parte. O resultado é verdadeiro se, em vez de (i) ou (ii) acima, supusermos que  $\max a_0(x) < 0$ . De fato, suponha, por absurdo, que exista  $x' \in \Omega$ , onde  $u(x') = \max u(x) > 0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $x' = 0$ ; isso pode ser conseguido mediante uma translação. Como as derivadas primeiras de  $u$  se anulam em  $x = 0$ , temos:

$$(2) \quad \sum_{|p|=2} a_p(0) D^p u(0) = -a_0(0) u(0) > 0$$

Por outro lado, mediante uma transformação ortogonal  $x = Ty$  obtemos

$$(3) \quad \sum_{|p|=2} a_p(0) D^p u(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} v(y)$$

onde  $v(y) = u(T^{-1}y)$  e as constantes  $\lambda_j$  são positivas em vista da elipticidade de  $L$ , pois

$$\lambda_j = \sum_{|p|=2} a_p(0) T_j^p$$

onde  $T_j = (t_{ij})$  é o vetor da  $j$ -ésima coluna de  $T$ . Logo, como  $x = 0$  (consequentemente  $y = 0$ ) é um ponto de máximo concluímos que a expressão em (3) calculada em  $x = 0$  é  $\leq 0$ , o que contradiz (2). De modo análogo, a suposição que exista  $x' \in \Omega$ , onde  $u(x') = \min u(x) < 0$ , conduz a uma contradição.

2ª Parte. Agora demonstraremos o teorema sem a hipótese  $\max a_0(x) < 0$ , feita na 1ª parte. Suponha, sem perda de generalidade, que  $\Omega$  esteja entre os hiperplanos  $x_1 = d/2$  e  $x_1 = d > 0$ . Introduza a função  $v$  pela expressão  $u = v(1 - e^{-\alpha x_1})$ , onde  $\alpha > 0$  é uma constante a determinar. Designando por  $a_{ij}$  o coeficiente de  $D_i D_j$  e  $a_i$  o coeficiente de  $D_i$  em  $L$ , obtemos

$$\begin{aligned} Lu = (1 - e^{-\alpha x_1})Lv + 2\alpha e^{-\alpha x_1} \sum_{j=1}^n a_{ij} D_j v + \\ + e^{-\alpha x_1} (\alpha a_1 - \alpha^2 a_{11})v. \end{aligned}$$

Daí concluímos que  $v$  satisfaz a uma equação elíptica, onde o coeficiente do termo  $v$  é

$$(4) \quad a_0 + \frac{e^{-\alpha x_1} (\alpha a_1 - \alpha^2 a_{11})}{1 - e^{-\alpha x_1}}$$

Como  $v = 0$  em  $\Gamma$ , o resultado seguir-se-á caso mostremos que a expressão em (4) é  $< 0$  em  $\bar{\Omega}$ . No caso (i) basta observar que

$$c\alpha_1 - \alpha^2 a_{11} \leq M\alpha - c\alpha^2$$

onde  $M \geq |a_1(x)|$  e  $c$  é a constante de elipticidade; portanto, tome  $\alpha > M/c$ . No caso (ii), a expressão em (4) pode ser estimada por

$$\|a_0\|_0 + \frac{e^{-\alpha d}(M\alpha - c\alpha^2)}{1 - e^{-\alpha d}}, \text{ se } M\alpha - c\alpha^2 < 0$$

e essa expressão pode ser feita negativa se  $d$  for suficientemente pequeno. Q.E.D.

Observação. Resultados sobre a unicidade de solução do problema de Dirichlet podem ser demonstrados através de teoremas de máximo. O princípio do máximo para funções harmônicas (i.e., soluções de  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ ) é bem conhecido: "se uma função harmônica  $u$  num domínio limitado assumir um máximo local em  $\Omega$ , então  $u = \text{const.}$ ". Essa é a chamada forma forte do princípio do máximo; a forma fraca, mais conhecida diz: "se  $u$  for harmônica em  $\Omega$  e contínua em  $\bar{\Omega}$ , então seu máximo é assumido na fronteira  $\Gamma$ ". Esse resultado foi generalizado por E. Hopf e G. Giraud para operadores elípticos com coeficientes reais, e a seguir o enunciamos na forma apresentada em Bers-John-Schechter. Cf. também o livro de Protter e Weinberger.

Teorema 1.3 (Hopf-Giraud). Seja  $\tilde{L}u = Lu - a_0 u$ , onde  $L$  é um operador uniformemente elíptico com coeficientes reais e  $|a_p| \leq M$ , para  $|p| > 0$ , e  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ . Então:

- I. Se  $\tilde{L}u \geq 0$  e  $\max u = u(x_0)$  com  $x_0 \in \Omega$ , então  $u = \text{const.}$
- II. Se  $a_0 \leq 0$ ,  $Lu \geq 0$  e  $\max u = u(x_0) > 0$  com  $x_0 \in \Omega$ , então  $u = \text{const.}$
- III. Se  $\tilde{L}u \geq 0$ ,  $\max u = u(x_0)$  com  $x_0 \in \Gamma$  e existe uma bola aberta  $B \subset \Omega$  tal que  $\bar{B} \cap \Gamma = \{x_0\}$ , então ou  $u = \text{const.}$  ou  $\partial u / \partial \nu > 0$  em  $x_0$ , onde supomos que a derivada normal exterior  $\partial / \partial \nu$  exista em  $x_0$ .
- IV. Se  $a_0 \leq 0$ ,  $Lu \geq 0$  e  $\max u = u(x_0) > 0$  com  $x_0 \in \Gamma$  e existe uma bola como em III, então ou  $u = \text{const.}$  ou  $\partial u / \partial \nu > 0$  em  $x_0$ , onde supomos que a derivada normal exterior exista em  $x_0$ .

Teorema 1.4 (Teorema de existência de Schauder). Seja  $L$  um operador elíptico com coeficientes reais  $a_p \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  em um domínio limitado  $\Omega$  de classe  $C^{2+\alpha}$ . Sejam  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  e  $\phi \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$ . Então, o problema de Dirichlet (I) tem solução  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  se se supõe unicidade de solução para esse problema.

Observações:

- 1) O resultado acima diz que unicidade implica existência!
- 2) Em particular, existência se segue quando  $a_0 \leq 0$ , ou quando o diâmetro de  $\Omega$  é suficientemente pequeno (qualquer que seja o sinal de  $a_0$ ). Cf. teorema 1.2.

A demonstração do teorema 1.4 é feita pelo método de continuação introduzido por Schauder, e repousa nos dois resultados abaixo.

Teorema 1.5. Se  $\Omega$  é um domínio limitado de classe  $C^{2+\alpha}$ , e se  $\rho \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ , então o problema de Dirichlet

$$(5) \quad \Delta u = \rho \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma,$$

tem solução (única)  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ .

Sobre a demonstração. Na secção 1.5 daremos uma demonstração desse resultado usando propriedades do potencial newtoniano (teorema 1.9) e um teorema de Kellogg sobre o comportamento, nas vizinhanças da fronteira, das derivadas de uma função harmônica. A demonstração é longa, mas o é em respeito à profundidade do resultado! Uma outra demonstração, apoiada no teorema 1.6, pode ser vista no livro de Ladyzenskaja e Ural'ceva.

Teorema 1.6 (Estimativa a priori). Sejam  $\Omega$  um domínio limitado de classe  $C^{2+\alpha}$ ,  $L$  um operador elíptico com coeficientes reais  $a_p \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  e  $c$  a constante de elipticidade. Então existe uma constante  $C$ , que depende apenas de  $c$ , tal que

$$(6)_0 \quad \|u\|_{2+\alpha} \leq C \left[ \|Lu\|_\alpha + \|u\|_0 + \|u\|_{2+\alpha, \Gamma} \right], \quad \forall u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Sobre a demonstração. Ela repousa basicamente em uma desigualdade do tipo  $(6)_0$  para o caso  $L = \Delta$  e  $\Omega =$  semi-espaco, e em propriedades do potencial newtoniano (teorema 1.9). A demonstração completa, e também longa, pode ser vista no livro de Ladyzenskaja e Ural'ceva.

Observação. Decorre facilmente de  $(6)_0$  que se  $\Omega$  for de classe  $C^{k+2+\alpha}$ ,  $k \geq 0$  e  $a_p \in C^{k+\alpha}$ , então

$$(6)_k \quad \|u\|_{k+2+\alpha} \leq C \left[ \|Lu\|_{k+\alpha} + \|u\|_0 + \|u\|_{k+2+\alpha} \right],$$

$$\forall u \in C^{k+2+\alpha}(\bar{\Omega}).$$



Corolário 1.1. Seja L um operador elíptico com coeficientes reais  $a \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ , onde  $\Omega$  é um domínio limitado de classe  $C^{2+\alpha}$ . Seja c a constante de elipticidade de L. Suponha que o problema de Dirichlet (1) tem solução única  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ ; para todos  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  e  $\phi \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$ . Então existe uma constante C, dependendo apenas de c tal que

$$(7) \quad \|u\|_{2+\alpha} \leq C \left( \|Lu\|_\alpha + \|u\|_{2+\alpha, \Gamma} \right), \quad \forall u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Demonstração. Suponha que não exista tal C; logo existe uma sucessão  $(u_n)$ ,  $u_n \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $\|u_n\|_{2+\alpha} = 1$  tal que

$$(8) \quad \|Lu_n\|_\alpha + \|u_n\|_{2+\alpha, \Gamma} \rightarrow 0.$$

Pelo teorema 1.1 podemos admitir (tomando subsucessões se necessário) que existe  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $C^0(\bar{\Omega})$ . Aplicando a estimativa (6) às funções  $u_n - u_m$  concluímos que

$$\limsup_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_{2+\alpha} = 0$$

o que mostra que  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $u_n \rightarrow u$  em  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  e  $\|u\|_{2+\alpha} = 1$ . Por outro lado, segue-se de (8) que  $Lu = 0$  em  $\bar{\Omega}$  e  $u = 0$  em  $\Gamma$ , e portanto  $u = 0$  em  $\Omega$ , o que contradiz  $\|u\|_{2+\alpha} = 1$ . Q.E.D.

As estimativas (6)<sub>k</sub> e (7) são chamadas estimativas até a fronteira. Relacionamos abaixo uma estimativa que diz respeito apenas ao comportamento de u no interior do domínio, e portanto ela não exige nenhuma regularidade da fronteira  $\Gamma$ .

Teorema 1.7 (Estimativa interior). Sejam  $\Omega$  um domínio de  $R^n$ ,

L um operador elíptico com coeficientes reais  $a_p \in C^\alpha(\Omega)$  e  $c$  a constante de elipticidade de L. Então, para  $\Omega_0$  e  $\Omega_1$ , com  $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$  e  $\bar{\Omega}_1$  compacto, existe uma constante  $C$ , que depende apenas de  $c$ ,  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  e das normas  $C^\alpha(\bar{\Omega}_1)$  dos coeficientes  $a_p$ , tal que

$$\|u\|_{2+\alpha, \Omega_0} \leq C(\|Lu\|_{\alpha, \Omega_1} + \|u\|_{0, \Omega_1}), \quad \forall u \in C^{2+\alpha}(\Omega).$$

Demonstração do Teorema 1.4 (Método da continuação). Basta considerar o caso em que  $\phi = 0$ ; de fato, seja  $h: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que  $h(x) = \phi(x)$ , para  $x \in \Gamma$ . (A existência de uma tal  $h$  pode ser demonstrada usando partição da unidade, localizando o problema em vizinhanças de pontos de  $\Gamma$ , e reduzindo o problema ao caso em que  $\Gamma$  é um subconjunto do hiperplano  $x_n = 0$ . O leitor poderá preencher os detalhes). Então, para  $v = u - h$ , tem-se

$$Lv = \tilde{f} \text{ em } \Omega, \quad v = 0 \text{ em } \Gamma$$

onde  $\tilde{f} = f - Lh \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ .

Agora introduzimos a família de operadores

$$L_t = (1 - t)\Delta + tL, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Observe que todos eles têm a mesma constante de elipticidade; de fato,

$$(9) \quad L_t'(x, \xi) \geq c_1 |\xi|^2, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

onde  $c_1 = \min(1, c)$  e  $c$  é a constante de elipticidade de  $L$ . Seja  $C$  o conjunto dos  $t \in [0, 1]$  para os quais o problema de Dirichlet

$$(10) \quad L_t u = f \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma,$$

tem solução  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ , para cada  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  dado. É fácil ver que essa solução é única; use o princípio do máximo para funções harmônicas se  $t = 0$ , e a hipótese do teorema, no caso de  $t \neq 0$ , escrevendo  $Lu = [(t-1)/t]\Delta u$ . Para cada  $t \in C$ , designe por  $S_t: C^\alpha(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  o operador solução do problema (10). Segue-se da estimativa (9) e do corolário 1.1 que

$$(11) \quad \|S_t f\|_{2+\alpha} \leq C \|f\|_\alpha, \quad \forall f \in C^\alpha(\bar{\Omega}), \quad \forall t \in C,$$

onde  $C$  é independente de  $t$ . Mostraremos, a seguir, que  $C$  é aberto e fechado em  $[0, 1]$ , e como  $C \neq \emptyset$ , pois  $0 \in C$ , seguirá-se que  $C = [0, 1]$ . Consequentemente (10) é solúvel em  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  para  $t = 1$ .

$C$  é aberto. Tome  $t_0 \in C$ . O problema

$$(12) \quad L_{t_0 + \varepsilon} u = f \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma$$

é equivalente a equação

$$(13) \quad u = S_{t_0} f + \varepsilon S_{t_0} [(\Delta - L)u] \text{ em } C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}).$$

O operador definido pelo 2º membro de (13)

$$u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow Tu = S_{t_0} f + \varepsilon S_{t_0} [(\Delta - L)u] \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$$

para  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  fixado, é uma contração se  $\varepsilon$  for suficientemente pequeno. Isso decorre de (11) e da estimativa

$$\|(\Delta - L)u\|_\alpha \leq C \|u\|_{2+\alpha},$$

consequência dos coeficientes de  $L$  pertencerem a  $C^\alpha(\bar{\Omega})$ . Logo, o princípio da contração implica que (13) tem solução  $\bar{u}$  única, e consequentemente (12) é solúvel em  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ , para todo  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  e  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

$C$  é fechado. Tome  $t_n \rightarrow t_0 \in C$  com  $t_n \rightarrow t_0 > 0$ , e provemos que  $t_0 \in C$ . O problema de Dirichlet

$$(14) \quad L_{t_0} u = f \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma$$

é equivalente a

$$(15) \quad u = S_{t_n} f + (t_n - t_0) S_{t_n} [(L - \Delta)u] \text{ em } C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Segue-se de (11) que o operador no 2º membro de (15) é uma contração se  $|t_n - t_0|$  for suficientemente pequeno. Logo (14) é solúvel em  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ . Q.E.D.

Observação. Uma demonstração totalmente análoga, usando a estimativa (6)<sub>k</sub> conduziria ao seguinte

Teorema 1.4k. Seja  $L$  um operador elíptico com coeficientes reais  $a_p \in C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$  em um domínio limitado  $\Omega$  de classe  $C^{k+2+\alpha}$ . Sejam  $f \in C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$  e  $\phi \in C^{k+2+\alpha}(\Gamma)$ . Então o problema de Dirichlet (1) tem solução  $u \in C^{k+2+\alpha}(\bar{\Omega})$  se se supõe unicidade de solução para esse problema.

Teorema 1.4'. Seja  $L$  um operador elíptico com coeficientes reais  $a_p \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  em um domínio limitado  $\Omega$  de classe  $C^{2+\alpha}$ . Sejam  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  e  $\phi \in C^0(\Gamma)$ . Então o problema de Dirichlet (1) tem solução  $u \in C^{2+\alpha}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  se se supõe que  $a_0(x) \leq 0$ .

Demonstração. Tome  $\phi_n \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$  tais que  $\phi_n \rightarrow \phi$  em  $C^0(\Gamma)$ ;

isso é possível, usando, por exemplo, o teorema da aproximação de Weierstrass. Pelo teorema 1.4 existem  $u_n \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  tais que

$$Lu_n = f \text{ em } \Omega, \quad u_n = \phi_n \text{ em } \Gamma.$$

Segue-se do princípio do máximo de Hopf-Giraud que

$$\|u_n - u_m\|_0 \leq \|\phi_n - \phi_m\|_{0,\Gamma};$$

Portanto, existe  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $C^0(\bar{\Omega})$  e  $u = \phi$  em  $\Gamma$ . Por outro lado, pela estimativa interior do teorema 1.7

$$\|u_n - u_m\|_{2+\alpha, \Omega_0} \leq C \|u_n - u_m\|_{0, \Omega}$$

onde  $\Omega_0 \subset \bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ , e  $C$  é uma constante independente de  $n$  e  $m$ . Daí se segue que  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  e que  $Lu = f$  em  $\Omega$ . Q.E.D.

O que se pode dizer da solubilidade do problema (1) quando não se tem unicidade? Supondo que  $\Omega$  é um domínio limitado de classe  $C^{2+\alpha}$  e que  $a_p \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ , e escrevendo  $\tilde{L}u = Lu - a_0 u$ , vemos que o problema (1), i.e.

$$\tilde{L}u + a_0 u = f \text{ em } \Omega, \quad e \quad u = 0 \text{ em } \Gamma$$

é equivalente a

$$(16) \quad u - \tilde{S}(a_0 u) = \tilde{S}f$$

onde  $\tilde{S}: C^\alpha(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  é operador solução de  $\tilde{L}v = g$  em  $\Omega$ ,  $v = 0$  em  $\Gamma$ , o qual está bem definido em vista do teorema 1.4.

Olhamos (16) como uma equação em  $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ ; observe que se  $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  for solução de (16), então necessariamente  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  e é solução do problema (1). Agora defina o operador  $T: C^\alpha(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$  pela expressão  $Tu = \tilde{S}(a_0 u)$ . É imediato que  $T$  é um operador linear compacto (use o fato que  $\tilde{S}: C^\alpha(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$  é compacto, em vista do teorema 1.1, e que  $T$  é a composição de  $\tilde{S}$  com o operador linear contínuo  $u \rightarrow a_0 u$  (operador de multiplicação)). Logo (16) é da forma

$$(17) \quad u - Tu = g$$

onde  $T: X \rightarrow X$  é um operador linear compacto num espaço de Banach  $X$ . Para as equações (17) vale o seguinte resultado, conhecido como a

Alternativa de Fredholm. Uma, e apenas uma, das possibilidades abaixo ocorre:

- (i) A equação (17) tem uma, e somente uma, solução  $u \in X$ , para cada  $g \in X$ .
- (ii) A equação homogênea abaixo tem solução  $u \neq 0$  em  $X$ :

$$(18) \quad u - Tu = 0.$$

Além disso, se (ii) ocorrer, então

$$\dim N(I - T) = \dim N(I - T') < \infty$$

onde  $T': X' \rightarrow X'$  é o operador adjunto de  $T$ . E mais, (17) tem solução se  $(x', g) = 0$  para todo  $x' \in N(I - T')$ .

Aplicando a alternativa à equação (16) concluímos:

(I) Se o problema (1) tiver solução única então uma solução existe. (Isso já se sabe: é o conteúdo do teorema 1.4).

(II) Caso o problema (1) com  $f = 0$  tenha soluções  $u \neq 0$ , então o número de tais soluções linearmente independentes é finito.

(III) Uma condição sobre  $f$ , que garanta a existência de solução de (1) no caso de não unicidade, é de enunciado complicado pois envolveria o adjunto de  $T$  no espaço  $(C^\alpha)'$  difícil de trabalhar. Essa talvez seja uma das maiores deficiências do uso dos espaços de Schauder para tratamento de problemas de fronteira. O estudo desses problemas nos espaços de Sobolev  $W^{m,2}$  conduz a um teorema de alternativa bem mais simples e trabalhável.

Problemas de auto-valor. Um número complexo  $\lambda$  é um auto-valor de  $L$  se existir  $u \neq 0$ ,  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ , tal que

$$(19) \quad Lu - \lambda u = 0 \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Que se pode dizer da existência de auto-valores e das dimensões dos espaços das respectivas auto-funções? Bom, sem perda de generalidade, podemos supor que  $a_0(x) \leq 0$ . (Para isso escreva  $Lu - \lambda u = \hat{L}u - \hat{\lambda}u$  onde  $\hat{L}u = Lu - \|a_0\|_0 u$  e  $\hat{\lambda} = \lambda - \|a_0\|_0$ ). Seja  $S: C^\alpha(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  o operador solução de  $Lu = f$  em  $\Omega$ ,  $u = 0$  em  $\Gamma$ . Então, (19) é equivalente a

$$(20) \quad u - \lambda S u = 0 \text{ em } C^\alpha(\bar{\Omega}).$$

Como  $S: C^\alpha(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$  é um operador compacto, concluímos que os auto-valores de (19), que são os inversos dos auto-valores de  $S$ , formam uma sucessão  $(\lambda_n)$  com  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ . E além disso, os correspondentes  $\lambda_n$ -auto-espaços são de dimensão finita.

### 1.2. PROBLEMA DE DIRICHLET PARA $\Delta u = 0$

Os resultados desta secção far-se-ão necessários na demonstração do teorema 1.5, o qual desempenhou um papel importante na prova do teorema 1.4. A formulação mais simples do problema de Dirichlet para a equação de Laplace é a seguinte: dada  $\phi \in C^0(\Gamma)$ , encontrar  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  tal que

$$(1) \quad \Delta u = 0 \text{ em } \Omega, \quad u = \phi \text{ em } \Gamma.$$

Esse problema é bem conhecido e é resolvido na literatura por vários métodos: equações integrais, cálculo das variações, método de Perron (das funções subharmônicas), etc. Uma exposição sobre o assunto pode ser lida em artigo do autor "O Problema de Dirichlet", Atas do 10º Colóquio Brasileiro de Matemática (1975). A existência de solução exige, necessariamente, restrições na geometria de  $\Gamma$ , como mostram os exemplos de Zaremba e Lebesgue. Cada um dos métodos acima requer graus de regularidade da fronteira, sendo o método de Perron, possivelmente, aquele que demonstra existência sob hipóteses menos restritivas sobre  $\Gamma$ ; basta, que em cada ponto  $x_0 \in \Gamma$  se possa construir uma barreira. Em particular, isso é o caso de  $\Omega$  satisfizer a condição do cone: existe um cone finito  $C$  tal que  $x \in \Gamma$ , é vértice de um cone  $C'$  congruente a  $C$ , e  $C' \setminus \{x\} \subset \Omega$ . Se a função  $\phi$  e a fronteira  $\Gamma$  tiverem mais regularidade então  $u$  também é mais regular em  $\bar{\Omega}$ , como mostra o resultado abaixo.

Teorema 1.8 (Kellogg). Sejam  $\Omega$  um domínio limitado de classe  $C^{2+\alpha}$  e  $\phi \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$ . Então a solução  $u$  do problema (1) está em  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ .



Sobre a demonstração. A demonstração é elementar, mas bastante longa. Confira: O. D. Kellogg, "On the derivatives of harmonic functions on the boundary", Transactions of the American Mathematical Society, vol. 33 (1931), pag. 486-510.

Exemplo. (A mera continuidade de  $\phi$  não implica na existência de derivadas de  $u$  na fronteira). A função

$$u(x_1, x_2) = x_2 \log[(x_1 - 1)^2 + x_2^2] + 2(1 - x_1) \operatorname{arctg} \frac{x_2}{1 - x_1}$$

é harmônica no disco unitário aberto  $\{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  e contínua no disco fechado. Entretanto  $|\operatorname{grad} u|$  se comporta como  $|\log[(x_1 - 1)^2 + x_2^2]|$  quando  $(x_1, x_2) \rightarrow (1, 0)$ .

### 1.3. A FUNÇÃO DE GREEN

A demonstração do teorema 1.4 da secção 1.1 repousou fortemente no fato de que o problema de Dirichlet

$$(1) \quad \Delta u = \rho \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma$$

tem solução  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ , para cada  $\rho \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ . Cf. teorema 1.5. Nesta secção começamos o tratamento desse problema, o qual será completamente resolvido na Secção 1.5. As considerações a seguir visam também a introdução da função de Green do problema (1) e conseqüentemente a obtenção de uma representação integral para a solução de (1).

Como veremos proximamente, a solução fundamental da equação de Laplace  $\Delta u = 0$  desempenha um papel crucial no es

tudo do problema (1). Uma distribuição  $E(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  é solução fundamental da equação de Laplace se

$$(2) \quad \Delta E = \delta \quad (\text{no sentido das distribuições})$$

onde  $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  é a distribuição de Dirac, i.e.,

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Assim (2) é equivalente a dizer que

$$(3) \quad \langle E, \Delta \phi \rangle = \phi(0), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Decorrerá das identidades de Green, apresentadas abaixo, que a função

$$(4) \quad E(x) = \begin{cases} (2\pi)^{-1} \log|x|, & \text{para } n = 2 \\ (2 - n)^{-1} \sigma_n^{-1} |x|^{2-n}, & \text{para } n \geq 3 \end{cases}$$

onde  $\sigma_n$  designa a área da esfera unitária de  $\mathbb{R}^n$ , é uma solução fundamental da equação de Laplace. Observe que  $E(x)$  é uma distribuição "muito boa"; de fato, ela é uma função de  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ . Logo, (3) pode ser escrita como

$$(5) \quad \int_{\mathbb{R}^n} E(x) \Delta \phi(x) dx = \phi(0), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Vamos agora às identidades de Green, as quais decorrem facilmente do teorema do divergente.

Teorema do divergente. Seja  $F: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial cujas componentes estão em  $C^1(\bar{\Omega})$ . Suponha que  $\partial\Omega$  é uma hiper superfície de classe  $C^1$ . Então

$$(6) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma,$$

onde  $\nu = \nu(x)$  é a normal unitária (exterior a  $\Omega$ ) no ponto  $x \in \partial\Omega$ , e  $d\sigma$  designa o elemento de área em  $\partial\Omega$ .

Observação. O teorema acima vale em condições mais gerais: (i) basta supor que as componentes de  $F$  estão em  $C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  e que  $\operatorname{div} F$  é integrável em  $\Omega$ ; (ii) quanto a  $\partial\Omega$ , muito pouco se necessita de regularidade. Confira H. Whitney, "Geometric Integration Theory", Princeton Univ. Press (1957) ou a exposição elementar do autor em Amer. Math. Monthly, vol. 71 (1964), páginas 619-622.

Primeira Identidade de Green. Se  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  e  $v \in C^2(\bar{\Omega})$  tem-se

$$(I) \quad \int_{\Omega} u \Delta v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\sigma$$

onde  $\nabla u$  é o gradiente de  $u$  e  $\partial/\partial\nu$  designa a derivada na direção da normal exterior  $\nu$ . (Prova: use (6) com  $F = u\nabla v$ ).

Segunda Identidade de Green. Se  $u$  e  $v$  estão em  $C^2(\bar{\Omega})$  então

$$(II) \quad \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, d\sigma.$$

(Prova: use (I) e expressão análoga com os papéis de  $u$  e  $v$  invertidos).

Terceira Identidade de Green. Se  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , tem-se para  $x \in \Omega$ , que

$$(III) \quad u(x) = \int_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x-y) \, d\sigma_y - \int_{\partial\Omega} E(x-y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} u(y) \, d\sigma_y,$$

onde  $E$  é a solução fundamental definida em (4). (Prova: use (II) na região  $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ , onde  $B_\varepsilon(x)$  é uma "pequena" bola de raio  $\varepsilon$  centrada em  $x$ , para as funções  $u(y)$  e  $v(y) = E(x-y)$ , e a seguir faça  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Observação: A identidade (III) exibe uma representação integral de uma função qualquer de  $C^2(\bar{\Omega})$  como a soma de três potenciais: a primeira integral é conhecida como o potencial newtoniano, a segunda como um potencial de camada dupla e a terceira como um potencial de camada simples. O primeiro potencial corresponde a uma distribuição espacial de massas ou cargas, o segundo corresponde a uma distribuição superficial de dipolos e, finalmente, o terceiro corresponde a uma distribuição superficial de massas ou cargas.

Demonstração de que  $E(x)$  é solução fundamental de  $\Delta u = 0$ .  
Basta provar (5). Tome  $\Omega$  contendo 0 e o suporte de  $\phi$ , e use (III) com  $u = \phi$  e  $x = 0$ .

A identidade (III) e a solução de (1). A expressão (III) não é uma boa fórmula de representação do problema (1), pois ela requer o conhecimento de  $\partial u / \partial \nu$  em  $\partial \Omega$ , o que não se tem entre os dados. Essa dificuldade pode ser contornada com o uso da função de Green. Para sua introdução, utilizamos o teorema 1.8 da secção 1.2 e concluímos:

(H) Correspondendo a cada  $x \in \Omega$ , existe uma função  $h_x(y) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ , que é solução do problema de Dirichlet

$$(7) \quad \Delta h_x = 0, \text{ em } \Omega$$

$$(8) \quad h_x(y) = -E(x - y), \quad y \in \partial \Omega.$$

A função de Green. Para cada  $x \in \Omega$  definimos a função de Green  $G(x,y)$ , para  $y \in \bar{\Omega} \setminus \{x\}$ , pela expressão

$$G(x,y) = E(x - y) + h_x(y).$$

Observe que  $G(x, \cdot)$  é  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega} \setminus \{x\})$ , harmônica em  $\Omega \setminus \{x\}$  e  $G(x,y) = 0$  para  $y \in \partial\Omega$ . Usando (II) para as funções  $u(z) = G(x,z)$  e  $v(z) = G(y,z)$  na região  $\Omega \setminus \{B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y)\}$ , onde  $x, y \in \Omega$  e  $\varepsilon$  é "pequeno", e a seguir fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtem-se a simetria da função de Green:  $G(x,y) = G(y,x)$  para  $x, y \in \Omega, x \neq y$ . Esse fato nos induz a estender a função de Green para  $(x,y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus \text{diag}$  definindo  $G(x,y) = 0$  para  $x \in \partial\Omega, y \in \bar{\Omega}, x \neq y$ . Resulta então que, para  $y \in \Omega, G(\cdot, y)$  é  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega} \setminus \{y\})$ , harmônica em  $\Omega \setminus \{y\}$  e  $G(x,y) = 0$  para  $x \in \partial\Omega$ . Das considerações anteriores resulta que  $h_x(y) = h_y(x)$ , para  $x, y \in \Omega$ ; além disso, pode-se definir  $h_x(y)$ , para  $x \in \partial\Omega$  e  $y \in \Omega$ , como sendo igual a  $h_y(x)$ . Daí concluímos que  $h_x(y)$ , para  $y \in \Omega$  fixado, é uma função  $C^{2+\alpha}$  de  $x$  em  $\bar{\Omega}$ . Observe que as afirmações precedentes, consequência de (H), exigem que  $\Omega$  seja de classe  $C^{2+\alpha}$ . Caso não se exija tal regularidade sobre  $\Omega$ , então, não se pode concluir que  $h$ , consequentemente tenha esse tipo de regularidade até a fronteira. O leitor poderá estudar a correlação entre a regularidade de  $\Omega$  e a regularidade de  $G$ .

O uso da função de Green no problema (1). Usando a identidade (II) na região  $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ , onde  $B_\varepsilon(x)$  é uma "pequena" bola de raio  $\varepsilon$  centrada em  $x \in \Omega$ , para as funções  $u(y)$  e  $v(y) = G(x,y)$ , e a seguir fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos:

$$(9) \quad u(x) = \int_{\Omega} G(x,y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) d\sigma_y.$$

Portanto, se  $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$  for solução do problema (1), então

$$(10) \quad u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)\rho(y)dy.$$

A fórmula (10) é uma representação integral da solução do problema (1), caso ela exista. Se conseguirmos determinar explicitamente a função de Green de um domínio dado, então faríamos a demonstração da existência de solução de (1) procedendo assim: olharíamos a função definida em (10) como candidato a solução de (1) e faríamos a verificação direta desse fato. Este é o método da função de Green para a resolução de (1); ele é de força limitada pois é difícil de terminar explicitamente a função de Green, a menos que o domínio tenha uma geometria simples, como são os casos de uma bola e de um semi-espaco. Em virtude disso, demonstraremos a existência de solução de (1) usando um outro método, cf. secção 1.5. Observe que, em vista de (9),  $u(x) = v(x) + w(x)$ , onde

$$v(x) = \int_{\Omega} E(x-y)\rho(y)dy$$

e

$$w(x) = \int_{\Omega} h_x(y)\rho(y)dy.$$

Na próxima secção estudaremos as propriedades do potencial newtoniano  $v(x)$ .

#### 1.4. O POTENCIAL NEWTONIANO

O objetivo desta secção é o estudo das propriedades do potencial newtoniano

$$(1) \quad v(x) = \int_{\Omega} E(x-y)\rho(y)dy$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado (não é necessário fazer nenhuma hipótese sobre a regularidade de  $\Gamma$  para a obtenção dos resultados da presente secção) e  $\rho: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função com propriedades especificadas no teorema abaixo.

Lema 1.1. Seja  $B = B_{\epsilon}(x_0)$  uma bola de raio  $\epsilon$  centrada em um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Então, se  $x \in B' = B_{\epsilon/2}(x_0)$  temos

$$\int_B |x-y|^{\lambda-n} dy \leq (1+2^{n-\lambda}) \int_B |x_0-y|^{\lambda-n} dy = \frac{1+2^{n-\lambda}}{\lambda} \sigma_n \epsilon^{\lambda}$$

onde  $0 < \lambda < n$ .

Demonstração. Com  $B^* = B_{\epsilon/2}(x) \subset B$ , tem-se

$$\int_B |x-y|^{\lambda-n} dy = \int_{B^*} |x-y|^{\lambda-n} dy + \int_{B \setminus B^*} |x-y|^{\lambda-n} dy.$$

Como, para  $y \in B \setminus B^*$ ,  $|x-y| \geq \epsilon/2 \geq |x_0-y|/2$ , obtemos

$$\int_B |x-y|^{\lambda-n} dy \leq \int_{B'} |x_0-y|^{\lambda-n} dy + 2^{n-\lambda} \int_{B \setminus B^*} |x_0-y|^{\lambda-n} dy,$$

de onde se segue a estimativa do enunciado. Q.E.D.

Teorema 1.9 (Propriedades do Potencial Newtoniano). O potencial newtoniano de densidade volumétrica  $\rho$  definido em (1) é uma função de  $C^1(\mathbb{R}^n)$  se  $\rho \in C^0(\bar{\Omega})$ . Além disso, se  $\rho \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{\alpha}(\Omega')$ , onde  $\Omega' \subset \Omega$  é um aberto, então  $u \in C^{2+\alpha}(\Omega')$ .

Um lembrete:  $u \in C^r(\Omega')$ ,  $r \geq 0$  real, significa  $u \in C^r(K)$  para todo compacto  $K \subset \Omega'$ .

Observação. Não é verdade que  $v \in C^2(\Omega)$ , supondo apenas que

$\rho \in C^0(\bar{\Omega})$ , cf. Exemplo abaixo. É necessário exigir-se um pouco mais da função  $\rho$ ; a condição mais adequada e simples sobre  $\rho$  é que ela seja Hölder-contínua.

Exemplo. A função  $\rho(x) = \rho(x_1, x_2)$  definida no disco  $B_a = \{x: x_1^2 + x_2^2 \leq a\}$  de raio  $a < 1$  por

$$\rho(x) = \begin{cases} |x|^{-2} [\log|x|]^{-1} x_1 x_2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é uma função contínua em  $B_a$ , cujo potencial newtoniano correspondente não é  $C^2$  em  $x = 0$ .

Preparação para a prova do Teorema 1.9. Nosso desejo (natural e sem malícia!) seria provar que:

$$(2) \quad \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x-y)\rho(y)dy$$

e

$$(3) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} E(x-y)\rho(y)dy.$$

Vamos designar os núcleos de (2) e (3) por  $E_j$  e  $E_{jk}$ , cujas expressões são as seguintes:

$$E_j(x) = \sigma_n^{-1} x_j |x|^{-n}$$

e

$$E_{jk}(x) = -n\sigma_n^{-1} x_j x_k |x|^{-n-2} + \delta_{jk} \sigma_n^{-1} |x|^{-n}$$

onde  $\delta_{jk} = 0$  se  $j \neq k$  e  $\delta_{jk} = 1$  se  $j = k$ . Observe que o núcleo  $E(x)$  de (1) e os núcleos  $E_j(x)$  de (2) são funções de  $L^1_{loc}$ ; esse fato facilitará as demonstrações da continuidade



de  $v$ , da validade de (2) e da continuidade de  $\partial v / \partial x_j$ . Entretanto, os núcleos  $E_{jk}$  de (3) são singulares, isto é,

$$\int_{|x| \leq 1} |E_{jk}(x)| dx = \infty.$$

Isso vai causar dificuldades. A primeira já aparece no significado que possa ter a integral em (3); vamos procurar em tendê-la como o valor principal de Cauchy. E o que provaremos é que

$$(4) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k}(x) = PV \int_{\Omega} E_{jk}(x-y) \rho(y) dy, \quad \text{se } j \neq k,$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(x) = \frac{1}{n} \rho(x) + PV \int_{\Omega} E_{jj}(x-y) \rho(y) dy$$

onde

$$PV \int_{\Omega} E_{jk}(x-y) \rho(y) dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_{\epsilon}(x)} E_{jk}(x-y) \rho(y) dy.$$

A justificativa da validade de (4) e (5) e a continuidade de  $\partial^2 v / \partial x_j \partial x_k$  em  $\Omega$  serão obtidas explorando o fato que os núcleos  $E_{jk}$  são condicionalmente convergentes, isto é, da forma

$$w(x) |x|^{-n}, \quad w(x) = -n \sigma_n^{-1} x_j x_k |x|^{-2} + \delta_{jk} \sigma_n^{-1}$$

onde  $w$  é homogênea de grau 0 (i.e.,  $w(tx) = w(x)$ ,  $t > 0$ ), e tem valor médio zero sobre a esfera  $S^{n-1}$ :

$$(6) \quad \int_{|x|=1} w(x) d\sigma = 0.$$

(A demonstração de (6) é consequência imediata do teorema do divergente). De (6) se segue que

$$\int_{a \leq |x| \leq b} E_{jk}(x) dx = \int_a^b \int_{S^{n-1}} \dot{w}(x) r^{-n} r^{n-1} dr d\sigma = 0$$

e daí, fazendo  $a \rightarrow 0$  e  $b \rightarrow \infty$  temos

$$(7) \quad PV \int E_{jk}(x) dx = 0$$

onde a integral se estende sobre todo  $\mathbb{R}^n$ . Para facilitar a demonstração do Teorema 1.9 vamos usar núcleos regularizados

$$(8) \quad E^\epsilon(x) = (2-n)^{-1} \sigma_n^{-1} (|x|^2 + \epsilon^2)^{(2-n)/2}, \quad \epsilon > 0$$

que constituem aproximações de  $E(x)$ , com propriedades que a seguir apresentamos. Há outros modos de tomar núcleos regularizados; cf., por exemplo, Hellwig, "Partial Differential Equations", Blaisdell (1964), mas optamos pela forma introduzida por Lichtenstein. Os núcleos  $E^\epsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  e suas derivadas primeiras e segundas são dadas por

$$(9) \quad E_j^\epsilon(x) = \sigma_n^{-1} x_j (|x|^2 + \epsilon^2)^{-n/2}$$

$$(10) \quad E_{jk}^\epsilon(x) = -n \sigma_n^{-1} x_j x_k (|x|^2 + \epsilon^2)^{-(n-2)/2} + \delta_{jk} \sigma_n^{-1} (|x|^2 + \epsilon^2)^{-n/2}.$$

É fácil ver que

$$(11) \quad |E^\epsilon(x)| \leq |E(x)|, \quad |E_j^\epsilon(x)| \leq |E_j(x)|, \quad \forall x \neq 0,$$

$$(12) \quad E^\epsilon(x) \rightarrow E(x), \quad E_j^\epsilon(x) \rightarrow E_j(x), \quad E_{jk}^\epsilon(x) \rightarrow E_{jk}(x)$$

uniformemente sobre compactos  $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Além disso,  $E_{jk}^\epsilon$  tem valor médio zero sobre a esfera  $S^{n-1}$ , se  $j \neq k$ :

$$(13) \quad \int_{|x|=1} E_{jk}^\epsilon(x) d\sigma = 0 \implies \int E_{jk}^\epsilon(x) dx = 0$$

o que decorre, via teorema do divergente, do fato de  $E_{jk}^\epsilon$  ser uma função ímpar de  $x_j$ . Se  $j = k$ , a expressão (13) não é válida, pois o núcleo é par. Entretanto, podemos escrevê-lo como

$$(14) \quad E_{jj}^\epsilon(x) = \sigma_n^{-1} \epsilon^2 (|x|^2 + \epsilon^2)^{(-n-2)/2} \\ + \sigma_n^{-1} (|x|^2 - nx_j^2) (|x|^2 + \epsilon^2)^{(-n-2)/2} \\ = \frac{1}{n} K^\epsilon(x) + \hat{E}_{jj}^\epsilon(x)$$

onde  $\hat{E}_{jj}^\epsilon$  tem valor médio zero sobre  $S^{n-1}$ :

$$(15) \quad \int_{|x|=1} \hat{E}_{jj}^\epsilon(x) d\sigma = 0 \implies \int \hat{E}_{jj}^\epsilon(x) dx = 0$$

e

$$K^\epsilon(x) = \epsilon^{-n} K\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \text{ onde } K(x) = n\sigma_n^{-1} (x^2 + 1)^{(-n-2)/2}.$$

Como  $\int K(x) dx = 1$ , segue-se que  $\{K^\epsilon\}$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ , é uma sucessão de núcleos de Dirac, o que implica a seguinte importante propriedade

$$(16) \quad (K^\epsilon * \phi)(x) \rightarrow \phi(x),$$

uniformemente sobre compactos onde  $\phi$  seja contínua; a convolução (16) estará bem definida se, por exemplo,  $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Com essas preliminares estamos prontos para provar o teorema 1.9.

Demonstração do Teorema 1.9. 1a. Parte. Dado  $\rho \in C^0(\bar{\Omega})$ , estendemos  $\rho$  para todo o  $\mathbb{R}^n$ , definindo  $\rho(x) = 0$  se  $x \notin \bar{\Omega}$ . Logo (1) pode ser escrita como  $v = E * \rho$ . (1-i). Como  $E \in L_{loc}^1$  segue-se que a integral em (1) converge e, portanto,  $v$  está

bem definida. Agora defina  $v^\varepsilon = E^\varepsilon * \rho$ , que são funções  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Observe que

$$|v(x) - v^\varepsilon(x)| \leq \int |E(y) - E^\varepsilon(y)| |\rho(x-y)| dy$$

e daí se segue que  $v^\varepsilon(x) \rightarrow v(x)$ , uniformemente em compactos  $K \subset \mathbb{R}^n$ , pois a integral acima pode ser desmembrada em duas

$$\int_{|y| \leq \eta} |E(y) - E^\varepsilon(y)| |\rho(x-y)| dy \leq \|\rho\|_\infty 2 \int_{|y| \leq \eta} E(y) dy$$

$$\int_{|y| \geq \eta} |E(y) - E^\varepsilon(y)| |\rho(x-y)| dy \rightarrow 0$$

onde a primeira pode ser feita pequena (uniformemente em  $\varepsilon$ ) se  $\eta$  for escolhido convenientemente, e a segunda converge, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , uniformemente, para  $x \in K$  e  $\eta$  fixado. Logo  $v \in C^0(\mathbb{R}^n)$ . (1-ii) A integral em (2) está bem definida, pois  $E_j \in L^1_{loc}$ , e pode ser escrita como  $E_j * \rho$ . A prova que, de fato, ela é igual a  $\partial v / \partial x_j$ , decorre do fato que

$$(17) \quad \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) = (E_j^\varepsilon * \rho)(x) \rightarrow (E_j * \rho)(x)$$

uniformemente sobre compactos  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Isso implicará também que  $\partial v / \partial x_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Para demonstrar (17) procedemos como em (1-i) acima, usando (11) e (12).

2a. Parte. Dada  $\rho \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\alpha(\Omega')$ , mostremos que  $v$  é  $C^2$  nas vizinhanças de um ponto  $x_0 \in \Omega'$ . Sejam  $B = B_R(x_0)$  e  $B' = B_{R'}(x_0)$ ,  $R < R'$ , bolas concêntricas contidas em  $\Omega'$  e seja  $\lambda \in C^\infty_0$  tal que  $\lambda(x) = 1$  se  $x \in B$  e  $\lambda(x) = 0$  se  $x \notin B'$ . Então

$$v(x) = \int_{B'} E(x-y) \lambda(y) \rho(y) dy + \int_{\Omega \setminus B} E(x-y) [1-\lambda(y)] \rho(y) dy,$$

onde vemos que a 2a. integral define uma função  $C^\infty(\Omega)$ , cuja derivada segunda pode ser obtida derivando sob o sinal de integral. E como  $\lambda\rho \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$  com suporte compacto, nosso problema se reduz a mostrar que  $E * \rho \in C^2(\mathbb{R}^n)$ , e que (4) e (5) são válidas para funções  $\rho \in C^\alpha$  e de suporte compacto em  $\Omega$ . A idéia é mostrar que  $(E_{jk} * \rho)(x)$  está bem definida, como valor principal de Cauchy, e que

$$(18) \quad \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_j \partial x_k}(x) = (E_{jk}^\varepsilon * \rho)(x) + (E_{jk} * \rho)(x), \text{ se } j \neq k,$$

$$(19) \quad \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_j^2}(x) = (E_{jj}^\varepsilon * \rho)(x) + \frac{1}{n} \rho(x) + (E_{jj} * \rho)(x)$$

uniformemente sobre compactos. Isso implicará que  $\partial^2 v / \partial x_j \partial x_k$  seja uma função contínua, e assim (4) e (5) estarão estabelecidas. (2-i) Usando (7) temos

$$(E_{jk} * \rho)(x) = \int E_{jk}(y) [\rho(x-y) - \rho(x)] dy$$

que existe como valor principal de Cauchy, pois, pelo lema 1.1:

$$\int_{|y| \leq n} |E_{jk}(y)| |\rho(x-y) - \rho(y)| dy \leq c \int_{|y| \leq n} |y|^{-n+\alpha} \leq c'n^\alpha$$

(2-ii) Suponha, inicialmente,  $j \neq k$ , e vamos provar (18). Observe que

$$(20) \quad (E_{jk}^\varepsilon * \rho)(x) - \int_{|y| > \varepsilon} E_{jk}(y) \rho(x-y) dy \\ = \int_{|y| > \varepsilon} [E_{jk}^\varepsilon(y) - E_{jk}(y)] \rho(x-y) dy \\ + \int_{|y| \leq \varepsilon} E_{jk}^\varepsilon(y) \rho(x-y) dy = I_1 + I_2.$$

Pela homogeneidade de  $E_{jk}^\epsilon$  e  $E_{jk}$

$$I_1 = \int_{|z|>1} [E_{jk}^1(z) - E_{jk}(z)] \rho(x - \epsilon z) dz$$

ou ainda, em vista de (7) e (13)

$$(21) \quad |I_1| = \left| \iint_{|z|>1} [E_{jk}^1(z) - E_{jk}(z)] [\rho(x - z) - \rho(x)] dz \right| \leq c \epsilon^\alpha$$

uniformemente para  $x$  em compactos. Atenção: a integral em  $I_1$  é apenas sobre um compacto determinado pelo suporte de  $\rho$  e por  $x$ . Por outro lado, usando (13) novamente

$$(22) \quad |I_2| = \left| \iint_{|y|\leq\epsilon} E_{jk}^\epsilon(y) [\rho(x-y) - \rho(x)] dy \right| \leq c \int_{|y|\leq\epsilon} |y|^{-n+\alpha} \leq c' \epsilon^\alpha.$$

As estimativas (21) e (22) aplicadas em (20) implicam (18).

(2-iii)  $j = k$ . Utilizando (14)

$$E_{jj}^\epsilon * \rho = \frac{1}{n} K^\epsilon * \rho + \hat{E}_{jj}^\epsilon * \rho$$

e como  $(K^\epsilon * \rho)(x) \rightarrow \rho(x)$  uniformemente em  $x$ , procederemos como em (2-ii) usando  $\hat{E}_{jj}$ , em lugar de  $E_{jk}$ . E provamos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\hat{E}_{jj}^\epsilon * \rho)(x) = PV \int E_{jj}(y) \rho(x - y) dy$$

onde a convergência é uniforme para  $x$  em compactos. Assim, obtemos (19).

3a. Parte. Dada  $\rho \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\alpha(\Omega')$ , mostremos que  $\forall \epsilon \in C^{2+\alpha}(K)$ , para qualquer compacto  $K \subset \Omega'$ . Em vista das expressões (18) e (19) e do que já se provou na 2a. Parte, basta provar que

$$\psi_{jk}(x) \equiv (E_{jk} * \rho)(x), \quad j \neq k, \quad \text{e} \quad \psi_{jj}(x) = (\bar{E}_{jj} * \rho)(x)$$

onde as convoluções são entendidas como valor principal de Cauchy das respectivas integrais singulares, são funções  $C^\alpha$ . Vamos considerar apenas o caso  $j \neq k$ , o caso  $j = k$  é análogo. Usando (7)

$$\psi_{jk}(x) = PV \int E_{jk}(x-y)[\rho(y) - \rho(x)] dy$$

onde  $PV \int = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon}$ . Para  $x'$  e  $x''$  numa bola  $B_R(0)$  contendo o suporte de  $\rho$ , e  $\delta = |x' - x''|$ , temos

$$\begin{aligned} \psi_{jk}(x') - \psi_{jk}(x'') &= \int \{E_{jk}(x'-y)[\rho(y) - \rho(x')] - \\ &\quad - E_{jk}(x''-y)[\rho(y) - \rho(x'')]\} dy = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

onde  $I_1$  é a integral sobre a bola  $B = B_{2\delta}(x')$  e  $I_2$  é a integral sobre  $D = B_R(0) \setminus B$ . Então

$$|I_1| \leq c_1 \int_B \{|E_{jk}(x'-y)||y-x'|^\alpha + |E_{jk}(x''-y)||y-x''|^\alpha\} dy$$

e pelo lema 1.1, obtemos  $|I_1| \leq c\delta^\alpha$ . Para estimar a segunda integral, observamos que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_D E_{jk}(x' - y)[\rho(x'') - \rho(x')] dy + \\ &\quad + \int_D [E_{jk}(x' - y) - E_{jk}(x'' - y)][\rho(y) - \rho(x'')] dy \end{aligned}$$

onde a primeira integral é 0, em vista de (7). Como  $|x'-y| \geq \delta$  e  $|x''-y| \geq \delta$ , temos pelo teorema do valor médio que

$$|E_{jk}(x' - y) - E_{jk}(x'' - y)| \leq c_2 \delta |x'' - y|^{-n-1} \leq c_3 \delta |x'' - y|^{-n-1}$$

onde  $x'''$  é um ponto no segmento  $[x', x'']$ . Logo

$$|I_2| \leq c_4 \delta \int_D |x'' - y|^{-n-1+\alpha} dy \leq c_5 \delta^\alpha.$$

Usando as estimativas de  $I_1$  e  $I_2$  obtem-se

$$|\psi_{jk}(x') - \psi_{jk}(x'')| \leq c \delta^\alpha$$

o que conclui a demonstração do Teorema 1.9. Q.E.D.

Corolário 1.2. Se  $\rho \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\alpha(\Omega)$ , então o potencial newtoniano  $v$  definido em (1) está em  $C^1(\mathbb{R}^n) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ , e  $\Delta v = \rho$  em  $\Omega$ . Em particular, a conclusão do corolário é válida se  $\rho \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ .

Demonstração. Resta apenas provar que  $\Delta v = \rho$ , ou, em vista de (4) e (5) que

$$PV \int \sum_{j=1}^n E_{jj}(y) \rho(x-y) dy = 0$$

o que é trivial pois  $\sum_{j=1}^n E_{jj}(y) = 0$ . Q.E.D.

Corolário 1.3. Se  $\rho \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  tiver suporte compacto  $K$  em  $\Omega$ , então

$$(23) \quad \|v\|_{2+\alpha, K} \leq \|\rho\|_{\alpha, K}.$$

Demonstração. Contida na 3a. Parte da demonstração do Teorema 1.9.



1.5. PROBLEMA DE DIRICHLET PARA  $\Delta u = \rho$

Procedemos agora a prova do teorema 1.5. Seja B uma bola aberta em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\bar{\Omega} \subset B$ . Como a fronteira  $\Gamma$  é de classe  $C^{2+\alpha}$  é possível estender  $\rho$  em  $\bar{B} \setminus \Omega$ , de modo que a função resultante pertença a  $C^\alpha(\bar{B})$ ; vamos chamar a função estendida também de  $\rho$ . Pelo teorema 1.9, o potencial newtoniano  $V(x)$

$$(1) \quad V(x) = \int_B E(x-y)\rho(y)dy$$

é tal que  $V \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ , pois  $\bar{\Omega}$  é um compacto contido em B. E além disso

$$(2) \quad \Delta V = \rho \text{ em } B \quad (\text{em particular, em } \Omega).$$

Considere agora o problema de Dirichlet

$$(3) \quad \Delta w = 0 \text{ em } \Omega, \quad w = V \text{ em } \Gamma.$$

Como  $V|_\Gamma \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$ , concluímos do teorema de Kellogg, teorema 1.8, que  $w \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ . Agora defina a função  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$(4) \quad u = V - w.$$

Segue-se de (3) e (4) que  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  é a solução do problema de Dirichlet

$$(5) \quad \Delta u = \rho \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma.$$

E assim o teorema 1.5 está provado.

Observação. O problema (5) tem solução única, em consequência do princípio do máximo para funções harmônicas. Logo, a solução de (5) pode ser expressa pela fórmula (10) da secção 1.3:

$$(6) \quad u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)\rho(y)dy$$

onde  $G(x,y) = E(x-y) + h_x(y)$ , cf. (7) e (8) da secção 1.3.

Visando as aplicações aos problemas não lineares vamos estabelecer uma versão mais forte do teorema 1.5.

Teorema 1.10. Se  $\Omega$  é um domínio limitado de classe  $C^\alpha$ , e se  $\rho \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\alpha(\Omega)$ , então o problema de Dirichlet (5) tem solução (única)  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ .

Demonstração. Em vista do teorema 1.9, o potencial newtoniano

$$v(x) = \int_{\Omega} E(x-y)\rho(y)dy$$

está em  $C^1(\mathbb{R}^n) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ . Considere agora o problema de Dirichlet

$$(7) \quad \Delta w = 0 \text{ em } \Omega, \quad w = v \text{ em } \Gamma,$$

o qual tem solução  $w \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ . ( $w \in C^\infty(\Omega)$ , pois  $w$  é harmônica, e consequentemente é até mesmo analítica real). Logo  $u = v - w \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ . Além disso, pelo corolário 1.2 da secção 1.4,  $u$  é solução de (5). Q.E.D.

Observação. O teorema 1.10 é válido sob condições mais gerais sobre  $\Gamma$ . Basta que  $\Gamma$  satisfaça alguma hipótese (p.ex.,

existência de barreira local) que garanta a existência de solução de (7).

Uma outra demonstração do teorema 1.10. (Com a hipótese adicional de que  $\Omega$  é de classe  $C^{2+\alpha}$ ). Consiste em provar diretamente que a expressão (6) é a solução de (5). Para isso provemos os seguintes lemas sobre propriedades de  $u$  definida em (6), admitindo que  $\Omega$  seja de classe  $C^{2+\alpha}$ .

Lema 1.2. Se  $\rho \in C^0(\bar{\Omega})$ , então  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$  e  $u = 0$  em  $\Gamma$ .

Lema 1.3. Se  $\rho \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\alpha(\Omega)$ , então  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ ,  $\Delta u = \rho$  em  $\Omega$  e  $u = 0$  em  $\Gamma$ .

Nas demonstrações dos lemas vamos utilizar a decomposição

$$(8) \quad u(x) = v(x) + w(x) = \int_{\Omega} E(x-y)\rho(y)dy + \int_{\Omega} h_x(y)\rho(y)dy$$

introduzida na secção 1.3.

Demonstração do lema 1.2. (i)  $u$  está bem definida, pois  $u(x)=0$  se  $x \in \Gamma$ , e, para  $x \in \Omega$ , use a estimativa (15) abaixo. (ii)  $u \in C^0(\Omega)$ , pois  $v \in C^0(\mathbb{R}^n)$  e a continuidade de  $w(x)$  segue da seguinte estimativa, consequência do princípio do máximo para funções harmônicas

$$\max_{y \in \bar{\Omega}} |h_{x_1}(y) - h_{x_2}(y)| \leq \max_{y \in \Gamma} |E(x_1 - y) - E(x_2 - y)|.$$

(iii)  $u \in C^0(\bar{\Omega})$ . Basta mostrar que  $u(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow x_0 \in \Gamma$ . Isso decorre da decomposição

$$u(x) = \left( \int_{\Omega \cap B_\delta(x_0)} + \int_{\Omega \setminus B_\delta(x_0)} \right) G(x,y) \rho(y) dy.$$

A primeira integral pode ser majorada por  $c \|\rho\|_0 \delta^2$ , cf. lema 1.1, e a segunda pode ser feita menor do que  $\delta$  se  $|x - x_0|$  for suficientemente pequena. (iv)  $u \in C^1(\Omega)$ . Basta observar que, (e é esse o ponto onde se requer que  $\Omega$  seja de classe  $C^{2+\alpha}$ ), para  $x \in K$  compacto contido em  $\Omega$

$$(9) \quad \|h_x(y)\|_{2+\alpha} \leq c(\|E(x-y)\|_{2+\alpha, \Gamma} + \|h_x(y)\|_0) \leq \text{const.}$$

de onde se segue que  $w(x) \in C^1(\Omega)$ . Q.E.D.

Demonstração do lema 1.3.  $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ , pois  $v \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ , cf. teorema 1.9, e em vista de (9)  $w \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ . Como  $w$  é harmônica, segue-se  $\Delta u = \Delta v = \rho$ , consequência do corolário 1.2. Q.E.D.

O operador S. Em vista do lema 1.2, podemos definir o operador linear

$$S: C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow C^0(\bar{\Omega})$$

pela expressão

$$(10) \quad (S\rho)(x) = \int_{\Omega} G(x,y) \rho(y) dy.$$

O lema 1.2 nos diz que

$$(11) \quad S(C^0(\bar{\Omega})) \subset C^1(\Omega); \quad (S\rho)(x) = 0, \text{ para } x \in \Gamma,$$

e o lema 1.3 diz que

$$(12) \quad S(C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\alpha(\Omega)) \subset C^{2+\alpha}(\Omega).$$

Lema 1.4 (Continuidade de S). O operador  $S: C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow C^0(\bar{\Omega})$  de finido em (12) acima é contínuo. Mais precisamente, para todo  $\rho \in C^0(\bar{\Omega})$ :

$$(13) \quad \|S\rho\|_0 \leq k\|\rho\|_0, \quad k \leq d^2/[2(n-2)],$$

onde  $d$  é o diâmetro de  $\Omega$ . (Não é necessário supor que  $\Omega$  seja de classe  $C^{2+\alpha}$ ).

Observação. Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  for solução do problema (5), então a estimativa (13) acima implica que

$$(14) \quad \|u\|_0 \leq k\|\Delta u\|_0.$$

Compare (14) com a estimativa de Schauder: por um lado é mais fraca, pois ela apenas fornece a limitação do máximo de  $u$ , nada sobre derivadas de  $u$ ; mas, por outro lado, é mais forte no sentido que a limitação é dada em termos do máximo de  $\Delta u$  e não de sua norma  $\alpha$ . Como veremos abaixo (13) será provada usando o princípio do máximo para funções harmônicas, o que nos induz a pensar que uma estimativa do tipo (14) seja válida para soluções  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

$$Lu = f \text{ em } \Omega, \quad u = \phi \text{ em } \Gamma,$$

como consequência do teorema do máximo de Hopf-Giraud. Em verdade, isso é o caso, cf. secção 1 do capítulo 2.

Demonstração do lema 1.4. Pelo princípio do máximo para funções harmônicas, aplicada à função  $y \mapsto G(x, y)$  na região  $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ , concluímos que  $G(x, y) \leq 0$  para  $y \in \bar{\Omega} \setminus \{x\}$ . Logo  $h_x(y) \leq -E(x - y)$ , para  $y \in \Omega$ . Por outro lado, decorre tam-

bém do princípio do máximo para funções harmônicas que  $h_x(y) \geq 0$ . Logo

$$(15) \quad |u(x)| \leq 2\|\rho\|_0 \int_{\Omega} |E(x-y)| dy$$

e daí se obtém a estimativa (13). Q.E.D.

Lema 1.5 (Estimativa para  $\nabla u$  em termos de  $\|\rho\|_0$ ). Suponha que o domínio  $\Omega$  seja de classe  $C^{2+\alpha}$ . Então, para  $\rho \in C^0(\bar{\Omega})$ , a função  $u$  definida em (6) é tal que

$$(16) \quad \|\nabla u\|_0 \leq c\|\rho\|_0.$$

Demonstração. Use a decomposição (8). Segue-se dos resultados da secção 1.4 que  $\|\nabla v\|_0 \leq c\|\rho\|_0$ , onde  $v$  é o potencial newtoniano de densidade  $\rho$ . Analogamente, como consequência de (9) obtemos  $\|\nabla w\|_0 \leq c\|\rho\|_0$ . Q.E.D.

### 1.6. SOBRE OS ESPAÇOS $C^r(\bar{\Omega})$ , $r \geq 0$ REAL

Os espaços de Schauder  $C^r(\bar{\Omega})$ ,  $r \geq 0$  real, foram introduzidos na secção 1. Inicialmente estabelecemos a estimativa

Teorema 1.11. Seja  $\Omega$  um domínio limitado com a propriedade da poligonal. Então, dados  $0 \leq s < r$  e  $0 < \varepsilon < 1$ , existe uma constante  $k = k_{s,r}$ , independente de  $u$  e de  $\varepsilon$ , tal que

$$(1) \quad \|u\|_s \leq \varepsilon \|u\|_r + k\varepsilon^{-s/(r-s)} \|u\|_0, \quad \forall u \in C^r(\bar{\Omega}).$$

Observação. Um domínio  $\Omega$  tem a propriedade da poligonal se existir uma constante  $\gamma > 0$  tal que, para quaisquer  $x, x' \in \Omega$  existe uma poligonal em  $\Omega$  [ $x^0 = x, x^1, \dots, x^n = x'$ ] ligando  $x$  a  $x'$  e satisfazendo a condição

$$\sum_{j=1}^n |x^{j-1} - x^j| \leq \gamma |x - x'|.$$

Demonstração. 1a. Parte. Suponha que o teorema seja válido para os pares  $r_1 < r_2$  e  $r_2 < r_3$ , isto é, existem constantes  $k_{12}$  e  $k_{23}$  tais que, para quaisquer  $0 < \eta < 1$  e  $0 < \sigma < 1$ , tem-se

$$(2) \quad \|u\|_{r_1} \leq \eta \|u\|_{r_2} + k_{12} \eta^{-r_1/(r_2-r_1)} \|u\|_0$$

$$(3) \quad \|u\|_{r_2} \leq \sigma \|u\|_{r_3} + k_{23} \sigma^{-r_2/(r_3-r_2)} \|u\|_0$$

Juntando (2) e (3) com  $\eta = \varepsilon^{(r_2-r_1)/(r_3-r_1)}$ ,  $\sigma = \varepsilon^{(r_3-r_2)/(r_3-r_1)}$  e  $k_{13} = k_{12} + k_{23}$ , obtem-se

$$\|u\|_{r_1} \leq \varepsilon \|u\|_{r_3} + k_{13} \varepsilon^{-r_1/(r_3-r_1)} \|u\|_0,$$

ou seja, o teorema é também válido para o par  $r_1 < r_3$ .

2a. Parte. O teorema é válido para  $s = \beta$ ,  $r = \alpha$ ,  $0 < \beta < \alpha < 1$ . De fato para  $x, x' \in \bar{\Omega}$  tem-se

$$(4) \quad |u(x) - u(x')| \leq |x - x'|^\alpha H_\alpha[u].$$

Daí, para  $|x - x'|^{\alpha-\beta} \leq \varepsilon$ , obtem-se

$$(5) \quad \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^\beta} \leq \varepsilon H_\alpha[u]$$

e para  $|x - x'|^{\alpha-\beta} > \varepsilon$

$$(6) \quad \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^\beta} \leq 2\varepsilon^{-\beta/(\alpha-\beta)} \|u\|_0.$$

As expressões (4) e (5) dão o resultado.

3a. Parte. O teorema é válido para  $s = \beta < 1$  e  $r = 1$ . Demonstração análoga à da 2a. Parte: em vez de (4) use a expressão

$$|u(x) - u(x')| \leq \sum_{j=1}^n |u(x^{j-1}) - u(x^j)| = \sum_{j=1}^n |x^{j-1} - x^j| |\nabla u(\tilde{x}^j)|$$

onde  $[x^0 = x, x^1, \dots, x^n = x']$  é uma poligonal unindo  $x$  a  $x'$  e  $\tilde{x}^j \in (x^{j-1}, x^j)$ . Daí

$$|u(x) - u(x')| \leq \gamma |x - x'| \|u\|_1.$$

4a. Parte. O teorema é válido para  $s = 1$  e  $r = 1 + \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Suponha por contradição, que, fixado  $0 < \varepsilon < 1$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  exista  $u_n \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $\|u_n\|_1 = 1$ , tal que

$$(7) \quad 1 > \varepsilon \|u_n\|_{1+\alpha} + n\varepsilon^{-1/\alpha} \|u_n\|_0.$$

Logo, existe  $M > 0$  tal que

$$\|u_n\|_0, \|u_n\|_1, \|D_i u_n\|_0, H_\alpha[D_i u_n] \leq M \quad \forall n.$$

Segue-se da 3a. Parte que  $\|u_n\|_\alpha \leq M'$ . Aplicando o teorema de Arzela-Ascoli, podemos admitir, passando a uma subseqüência se necessário, que existem  $u, v^i \in C^0(\bar{\Omega})$  tais que  $u_n \rightarrow u$  e  $D_i u_n \rightarrow v^i$  em  $C^0(\bar{\Omega})$ . Logo  $v^i = D_i u$ . Por outro lado, segue-se de (7) que  $u = 0$ , e daí  $v^i = 0$ , o que implica que  $\|u_n\|_1 \rightarrow 0$ . Contradição.



5a. Parte. O teorema é válido para  $s = 1$  e  $r = 2$ . Demonstração análoga à da 4a. Parte.

6a. Parte. O teorema é válido para  $s = m$  e  $r = m + \alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Demonstração por indução: o resultado é válido para  $m = 1$  (4a. e 5a. Partes), suponha-o verdadeiro para  $m$  e demonstre m<sup>o</sup>-lo para  $m + 1$ . Para  $|p| = m$ , usando a 4a. e 5a. Partes:

$$\|D^p u\|_1 \leq \eta \|D^p u\|_{1+\alpha} + k_{1,1+\alpha} \eta^{-1/\alpha} \|D^p u\|_0.$$

Daí, tomando um somatório sobre  $|p| = m$  e usando a hipótese de indução:

$$\begin{aligned} \|u\|_{m+1} &\leq c\eta \|u\|_{m+1+\alpha} + (ck_{1,1+\alpha} + 1)\eta^{-1/\alpha} \|u\|_m \\ &\leq c\eta \|u\|_{m+1+\alpha} + (ck_{1,1+\alpha} + 1)\eta^{-1/\alpha} (\sigma \|u\|_{m+1} + k_{m,m+1} \sigma^{-m} \|u\|_0) \end{aligned}$$

Escolhendo  $c\eta = \varepsilon/2$  e  $(ck_{1,1+\alpha} + 1)\eta^{-1/\alpha} \sigma = 1/2$ , obtemos a desigualdade desejada.

7a. Parte. O teorema é válido para  $s = m + \beta$  e  $r = m + \alpha$ ,  $0 < \beta < \alpha \leq 1$ . O resultado é válido para  $m = 0$  (2a. e 3a. Partes). Daí para  $|p| = m$

$$\|D^p u\|_\beta \leq \eta \|D^p u\|_\alpha + k_{\alpha,\beta} \eta^{-\beta/(\alpha-\beta)} \|D^p u\|_0.$$

Daí, tomando um somatório sobre  $|p| = m$  e usando a 6a. Parte:

$$\begin{aligned} \|u\|_{m+\beta} &\leq c\eta \|u\|_{m+\alpha} + (ck_{\alpha,\beta} + 1)\eta^{-\beta/(\alpha-\beta)} \|u\|_m \\ &\leq c\eta \|u\|_{m+\alpha} + (ck_{\alpha,\beta} + 1)\eta^{-\beta/(\alpha-\beta)} (\sigma \|u\|_{m+\beta} + k_{m,m+\beta} \times \\ &\quad \times \sigma^{-m/\beta} \|u\|_0) \end{aligned}$$

Tomando  $c\eta = \varepsilon/2$ ,  $(ck_{\alpha,\beta} + 1)\eta^{-\beta/(\alpha-\beta)}\sigma = 1/2$ , o resultado se segue. Q.E.D.

Como aplicação do resultado acima, demonstraremos o teorema 1.1.

Demonstração do teorema 1.1. Basta mostrar que a bola unitária  $\{u \in C^r(\bar{\Omega}) : \|u\|_r \leq 1\}$ ,  $r > 0$ , é um subconjunto compacto de  $C^s(\bar{\Omega})$ . Tome  $\|u_n\|_r \leq 1$ . Então  $\|u_n\|_0 \leq 1$  e  $H_\alpha[u_n] \leq 1$ . Logo, podemos admitir, passando a uma subsucessão se necessário, que existe  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $C^0(\bar{\Omega})$ . Usando a estimativa (1) acima temos

$$\|u_n - u_m\|_s \leq \eta \|u_n - u_m\|_r + k_{s,r} \eta^{-s/(r-s)} \|u_n - u_m\|_0$$

e daí

$$(7) \quad \|u_n - u_m\|_s \leq 2\eta + k_{s,r} \eta^{-s/(r-s)} \|u_n - u_m\|_0.$$

Portanto dado  $\varepsilon > 0$  tome  $\eta = \varepsilon/4$  e a seguir escolha  $n_0$  tal que para  $n, m \geq n_0$  se tenha que a segunda parcela do 2º membro de (7) seja menor que  $\varepsilon/2$ . Logo  $(u_n)$  é Cauchy em  $C^s(\bar{\Omega})$  e conseqüentemente  $u \in C^s(\bar{\Omega})$  e é o  $C^s$ -limite de  $(u_n)$ . Q.E.D.

### 1.7. CONSIDERAÇÕES SOBRE OPERADORES ELÍPTICOS DE ORDEM SUPERIOR.

Consideremos o operador diferencial parcial linear de ordem  $\ell$

$$L(x,D) = \sum_{|p| \leq \ell} a_p(x) D^p$$

cujos coeficientes são funções complexas definidas em um domínio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ; a parte principal de  $L$  é o operador formado apenas pelas derivadas de ordem  $\ell$ :

$$L'(x, D) = \sum_{|p|=\ell} a_p(x) D^p.$$

Associado a  $L$ , consideramos o polinômio homogêneo em  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  de grau  $\ell$ :

$$L'(x, \xi) = \sum_{|p|=\ell} a_p(x) \xi^p.$$

Definição 1.  $L$  é elíptico em  $\Omega$  se  $L'(x, \xi) \neq 0$ , para todo  $x \in \Omega$  e todo  $\xi \neq 0$ .

Definição 2.  $L$  é uniformemente elíptico em  $\Omega$  se existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$c^{-1} \|\xi\|^\ell \leq |L'(x, \xi)| \leq c \|\xi\|^\ell$$

para todo  $x \in \Omega$  e todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

Observação. Se os coeficientes  $a_p$ ,  $|p| = \ell$ , do operador elíptico  $L$  forem contínuos em  $\bar{\Omega}$ , então  $L$  é uniformemente elíptico. (Use Heine-Borel).

Exemplos:

1) O laplaciano:  $\Delta = \sum_{j=1}^n D_j^2$

2) O operador de Cauchy Riemann:  $\partial/\partial\bar{z} = \frac{1}{2}(\partial/\partial x + i \partial/\partial y)$ .

3) O operador de Bitsadze:  $D_1^2 + 2iD_1D_2 - D_2^2$ .

4) O operador de M. Schechter:  $D_1^4 + D_2^4 - D_3^4 + i(D_1^2 + D_2^2)D_3^2$ .

Observação. A definição 1 acima é demasiadamente geral, como se viu na secção 1.1, pois o problema de Dirichlet para a equação de Bitsadze não é bem posto. Esse inconveniente é típico da dimensão  $n = 2$  (plano), como veremos proximamente.

Teorema 1.11. Seja  $L$  um operador elíptico. Se seus coeficientes forem reais ou se  $n \geq 3$ , então  $\ell$  é par.

Demonstração. Fixe  $x_0 \in \Omega$  e  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\eta| = 1$ , e considere o polinômio em  $t$

$$L'(x_0, \xi + t\eta) = t^\ell L'(x_0, \eta) + t^{\ell-1} Q_1(x_0, \xi, \eta) + \dots + Q_\ell(x_0, \xi)$$

onde  $|\xi| = 1$  é ortogonal a  $\eta$ , e os  $Q$ 's são polinômios em  $\xi$  e  $\eta$ .

Se os coeficientes de  $L$  forem reais os  $Q$ 's são números reais para cada  $\xi$  fixado; logo se  $\ell$  fosse ímpar, o polinômio  $L'(x_0, \xi + t\eta)$  se anularia para algum  $t$ , o que contrariaria a elipticidade de  $L$ . Se os coeficientes de  $L$  não forem necessariamente reais, exploramos o fato que a dimensão do espaço é  $\geq 3$ . Como as raízes de  $P(t)$  variam continuamente como função de  $\xi$  em  $S^1 \setminus \{-\eta, \eta\}$ , e este conjunto é conexo, concluímos que  $L'(x_0, \xi + t\eta)$  e  $L'(x_0, -\xi + t\eta)$  têm o mesmo número (digamos  $m^+$ ) de raízes com parte imaginária positiva e o mesmo número ( $m^-$ ) de raízes com parte imaginária negativa. Observe que, em vista da elipticidade de  $L$ , não há raízes reais, e portanto  $m^+ + m^- = \ell$ . Por outro lado observe que

$$L'(x_0, -\xi + t\eta) = (-1)^\ell L'(x_0, \xi - t\eta),$$

o que mostra  $m^+ = m^-$ . Logo  $\ell$  é par. Q.E.D.

Definição 3.  $L$  é propriamente elíptico em  $\Omega$  se  $\ell$  for par ( $\ell = 2m$ ) e se o polinômio em  $t$ ,  $L'(x_0, \xi + t\eta)$ , para cada  $x_0 \in \Omega$  e cada par de vetores  $\xi, \eta$  linearmente independentes, tiver  $m$  raízes com parte imaginária positiva e  $m$  raízes com parte imaginária negativa.

Observações:

- 1) O teorema 1.11 nos diz que todos operadores elípticos em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ , e todos operadores elípticos com coeficientes reais são propriamente elípticos.
- 2) Já vimos que o operador de Bitsadze é elíptico, mas não propriamente elíptico.

Definição 4.  $L$  é fortemente elíptico se existir uma função  $\gamma(x)$  em  $\Omega$  tal que  $\text{Re } \gamma(x)L'(x, \xi) > 0$ , para  $x \in \Omega$  e  $\xi \neq 0$ .  $L$  é fortemente uniformemente elíptico se existirem uma função  $\gamma(x)$  em  $\Omega$  e uma constante  $c > 0$  tal que

$$\text{Re } \gamma(x)L'(x, \xi) \geq c|\xi|^\ell.$$

Observações:

- 1) Todo operador de coeficientes reais é fortemente elíptico.
- 2) Todo operador fortemente elíptico é propriamente elíptico.
- 3) Existem operadores propriamente elípticos que não são fortemente elípticos. Exemplo: o operador de Schechter, acima.
- 4) O interesse nos operadores fortemente elípticos provem do fato que foi para eles que primeiro se estabeleceu uma teoria geral do problema de Dirichlet, a chamada teoria de Gar

ding. Posteriormente, provou-se que o problema de Dirichlet é bem posto na classe mais geral dos operadores propriamente elípticos. Essa classe é também adequada para o tratamento de outros problemas de fronteira.

Condições de fronteira. Consideremos  $m$  operadores de fronteira

$$B_j(x, D) = \sum_{|p| \leq m_j} b_{j,p}(x) D^p, \quad j = 1, \dots, m$$

onde os coeficientes  $b_{j,p} \in C^{2m-m_j+\alpha}(\bar{\Omega})$  e  $m_j < 2m$ . Designamos por  $B_j^!(x, D)$  a parte principal de  $B_j$ . Esses operadores satisfazem à condição de Lopatinski-Shapira com relação ao operador propriamente elíptico  $L$  de ordem  $2m$  se, para cada  $x_0 \in \Gamma$  e cada vetor  $\xi$  tangente a  $\Gamma$  em  $x_0$ , os polinômios em  $t$ ,  $B_j^!(x_0, \xi + t\nu)$ , são linearmente independentes módulo o polinômio

$$\prod_{k=1}^m (t - \tau_k^+(\xi))$$

onde os  $\tau_k^+(\xi)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , são as raízes de  $L'(x_0, \xi + t\nu)$  com parte imaginária positiva. Aqui  $\nu$  designa a normal exterior a  $\Gamma$  no ponto  $x_0$ .

Observação. As condições de Dirichlet  $\partial^{j-1}/\partial\nu^{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, m$  satisfazem à condição acima com relação a qualquer operador propriamente elíptico de ordem  $2m$ .

Estimativas de Agmon-Douglis-Nirenberg. Suponha que  $\Omega$  seja um domínio limitado de classe  $C^{\ell+\alpha}$ ,  $\ell \geq 2m$ ,  $L$  um operador propriamente elíptico com coeficientes  $a_p \in C^{\ell-2m+\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $B_j$  operadores de fronteira de ordem  $m_j < 2m$  com coeficientes

$b_{j,p} \in C^{\ell-m_j+\alpha}$  e satisfazendo a condição de Lopatinski-Shapiro. Então, existe uma constante  $c > 0$ , que depende de  $L$ ,  $B_j$ ,  $\ell$  e  $\Omega$  tal que

$$(1) \quad \|u\|_{\ell+\alpha} \leq c(\|Lu\|_{\ell-2m+\alpha} + \|B_j u\|_{\ell-m_j+\alpha, \Gamma} + \|u\|_0)$$

para todo  $u \in C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega})$ . Caso, o problema

$$(2) \quad Lu = f \text{ em } \Omega, \quad B_j u = \phi_j \text{ em } \Gamma, \quad j = 1, \dots, m$$

tenha solução única, então a estimativa (1) é válida omitindo-se o termo  $\|u\|_0$ .

Observação. A estimativa acima foi demonstrada nos artigos de Agmon, Douglis e Nirenberg em situações mais gerais. Por exemplo,  $m_j$  não precisa ser  $< 2m$ ,  $L$  pode ser um operador diferencial matricial e  $u$  um vetor.

Problema de contorno. Dados  $f \in C^{\ell-2m+\alpha}(\bar{\Omega})$  e  $\phi_j \in C^{\ell-m_j+\alpha}(\Gamma)$ , encontrar  $u \in C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega})$  que satisfaça (2), admitindo para  $\Omega$ ,  $L$  e  $B_j$  as hipóteses enunciadas acima para a validade da estimativa. O problema (2) é solúvel se para todos  $f \in C^{\ell-2m+\alpha}(\bar{\Omega})$  e  $\phi_j \in C^{\ell-m_j+\alpha}(\Gamma)$  existir uma solução  $u \in C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega})$  de (2). O problema tem unicidade se a única solução em  $C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega})$  do problema homogêneo associado a (2) (i.e., aquele com  $f = 0$  e  $\phi_j = 0$ ) é  $u = 0$ .

Os seguintes resultados estão contidos no artigo de Agmon-Douglis-Nirenberg. Para simplificar vamos considerar o caso  $\phi_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ :

$$(3) \quad Lu = f \text{ em } \Omega, \quad B_j u = 0 \text{ em } \Gamma.$$

(I) O problema homogêneo

$$Lu = 0 \text{ em } \Omega, \quad B_j u = 0 \text{ em } \Gamma$$

tem no máximo um número finito de soluções linearmente independentes.

(II) Dadas soluções  $u_n \in C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega})$  dos problemas

$$Lu_n = f_n \text{ em } \Omega, \quad u_n = 0 \text{ em } \Gamma,$$

tais que  $f_n \rightarrow f$  na norma de  $C^{\ell-2m+\alpha}(\bar{\Omega})$ , então  $(u_n)$  contem uma subsucessão, digamos  $(u_{n'})$ , que converge na norma  $C^2(\bar{\Omega})$  para uma solução  $u \in C^{\ell+\alpha}$  de (3).

(III) Seja  $M$  um operador diferencial de ordem  $< 2m$ , tal que  $L + M$  satisfaz as mesmas condições requeridas sobre  $L$  (regularidade dos coeficientes e as condições de Lopatinski-Shapiro). Suponha que o problema (3) tem solução única  $u \in C^{\ell+\alpha}(\bar{\Omega})$ , para cada  $f \in C^{\ell-2m+\alpha}(\bar{\Omega})$ . Então, o problema

$$(4) \quad (L + \lambda M)u = f \text{ em } \Omega, \quad B_j u = 0 \text{ em } \Gamma,$$

tem uma e somente uma solução para todos  $f \in C^{\ell-2m+\alpha}(\bar{\Omega})$ , e para todos os  $\lambda$  fora de um conjunto discreto  $\sigma(L)$ . Além disso, se para algum  $\lambda$  o problema (4) tem unicidade então ele é solúvel para aquele  $\lambda$ .

Os dois resultados seguintes se referem ao caso especial do problema de Dirichlet

$$(5) \quad Lu = f \text{ em } \Omega, \quad \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$



(IV) Suponha que L seja propriamente elíptico e  $a_p \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ . Se o problema (5) tem unicidade em  $C^{2m+\alpha}(\bar{\Omega})$ , então ele é so nível para todo  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ .

Tendo em vista (III) e (IV) acima é importante saber se para algum  $\lambda$  se tem unicidade do problema de Dirichlet para  $L + \lambda$ . Se o operador L for fortemente elíptico, então decorre da desigualdade de Garding que isso é verdade para  $\lambda$  suficientemente grande. No caso geral vale o seguinte resultado.

(V) Suponha o operador L satisfaz à condição

$$(6) \quad (-1)^m \operatorname{Re} L'(x, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

onde  $L'$  é a parte principal de L. Suponha também que  $a_p \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\forall p$ , e  $a_p \in C^0(\bar{\Omega})$ , para  $|p| = 2m$ . Então, para  $\lambda$  suficientemente grande se tem

$$\|u\|_{2m, L^2} \leq c \|(L + \lambda)u\|_{0, L^2}$$

para todo  $u \in H_{2m} \cap H_m^0$ .

De (III), (IV) e (V) se segue:

(VI) Suponha que L satisfaça à desigualdade (6) acima e  $a_p \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ . Então, para todo  $\lambda$  fora de um conjunto discreto o problema de Dirichlet tem solução única. Além disso, unicidade implica existência.

BIBLIOGRAFIA DO CAPÍTULO 1

O material aqui discutido é mais ou menos clássico e as referências consistem principalmente de livros.

- [1] Agmon, S. - Douglis, A. - Nirenberg, L., "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I". Comm. Pure App. Math. (1959), p. 623-727.
- [2] Bers, L. - John, F. - Schechter, M., "Partial Differential Equations". Interscience (1964).
- [3] Courant, R. - Hilbert, D., "Methods of Mathematical Physics", (vol. II). Interscience Publishers, New York (1962).
- [4] Folland, G. B., "Introduction to Partial Differential Equations". Princeton Univ. Press (1976).
- [5] Hellwig, G.; "partial Differential Equations". Blaisdell (1964).
- [6] Kellogg, O. D., "On the derivatives of harmonic functions on the boundary". Trans. AMS vol. 33 (1931), p. 486-510.
- [7] Ladyzenskaja, O. A. - Ural'ceva, N. N., "Équations aux dérivées partielles de type elliptique". Dunod, Paris (1968).
- [8] Protter, M. H. - Weinberger, H. F., "Maximum Principles in Differential Equations". Prentice Hall, NJ (1967).

## CAPÍTULO 2

### EQUAÇÕES ELÍPTICAS NÃO LINEARES EM ESPAÇOS DE SCHAUDER

SUMÁRIO. Neste capítulo aplicamos a teoria linear desenvolvida no capítulo anterior para a resolução de problemas de Dirichlet para equações elípticas não lineares de 2a. ordem. A técnica não linear dominante no capítulo é o princípio de Leray-Schauder para operadores compactos. Apenas na secção 2.3 damos um exemplo de um problema tratado por método contrativo, de onde o leitor depreenderá que o resultado obtido é pobre. Também na secção 2.9 descrevemos um método bastante poderoso e de muita atualidade no tratamento de problemas de contorno para equações elípticas de 2a. ordem; trata-se do método da iteração monotônica, já utilizado no Courant-Hilbert [5] e em Krasnosel'skii [10], e recentemente explorado por muitos autores.

Estimativas a priori das soluções desempenham um papel crucial ao longo do capítulo. Nesse sentido, é particularmente importante o fato de estarmos tratando equações elípticas de 2a. ordem, para as quais se tem teoremas de máximo bastante fortes, v.g. o teorema de Hopf-Giraud.

A teoria das equações quase-lineares é bastante extensa e difícil. Hoje se tem uma longa literatura sobre ela e problemas ligados ao assunto continuam a ser pesquisados. O autor não pretendeu descrever os problemas de maior atualidade, mas antes mostrar em exemplos mais simples a força dos métodos não lineares; mesmo nesses exemplos mais simples há um grau de dificuldade técnica que não passará desapercebido ao leitor! O livro de Ladyzenskaja e Ural'ceva, cf. bibliografia do capítulo 1, ajudará o leitor a compreender a teoria como ela estava na década de 60.

## 2.1. ALGUNS MÉTODOS DA ANÁLISE FUNCIONAL NÃO LINEAR

O que se convencionou chamar Análise Funcional Não Linear é um conjunto de métodos, alguns deles já conhecidos dos matemáticos do século passado e então aplicados a problemas específicos. Com o surgimento dos conceitos de espaços de funções e a formalização da Análise Funcional neste século, estes métodos foram postos em forma abstrata unificada, mostrando claramente os pontos essenciais dos resultados do passado e possibilitando o tratamento de novos problemas. Com o intuito de introduzir alguns desses métodos, vamos discutir a seguir um dos exemplos mais simples de aplicação, o problema de Cauchy para equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Apresentamos apenas demonstrações sucintas, tendo em vista que esses fatos já são incorporados, hoje em dia, em vários textos.

Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $f: I \times U \rightarrow X$  uma função contínua, onde  $I$  é um intervalo aberto da reta, e  $U$  um aberto de  $X$ . Dados  $t_0 \in I$  e  $x_0 \in U$ , se existir um intervalo  $J$  contendo  $t_0$  e uma função  $\phi: J \rightarrow U$  de classe  $C^1$  tal que

$$(2) \quad \dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)), \quad t \in J, \quad \phi(t_0) = x_0,$$

dizemos que o problema de Cauchy é localmente solúvel e que  $\phi(t)$  é uma solução. Como decorrência do teorema fundamental do cálculo, vê-se que o problema (1) é equivalente à seguinte equação integral

$$(3) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

que é uma equação integral não linear de Volterra. Equivalente significa que se  $x(t)$  for solução de (1) então  $x(t)$  é também solução de (3); e reciprocamente, se  $x(t)$  for uma função contínua (note: apenas contínua) que é solução de (3), então  $x(t)$  é necessariamente de classe  $C^1$  e é também solução do problema de Cauchy (1).

Resultados sobre a solubilidade de (1) ou (3) eram conhecidos no século passado, antes do surgimento das noções de espaços de funções e dos teoremas de ponto fixo da Análise Funcional não linear. Com a linguagem posta por esses novos conceitos e teorias é possível escrever as demonstrações desses resultados de modo mais simples, mas essencialmente equivalente. Entretanto, a abstração desses novos conceitos permite tratar outros problemas mais complicados de modo conciso e elegante, como veremos nas secções futuras.

Um dos resultados mais antigos sobre a solubilidade de (1) é o teorema de Picard, cuja demonstração original usa o método das aproximações sucessivas, e que será aqui demonstrado usando o Princípio da Contração (cuja demonstração utiliza o método das aproximações sucessivas!). Suponha mos que, para números reais  $c > 0$  e  $b > 0$ , tenha-se  $[t_0 - c, t_0 + c] \subset I$  e  $B(x_0, b) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq b\} \subset U$ ; vamos designar por  $R_c$  o "retângulo"  $[t_0 - c, t_0 + c] \times B(x_0, b)$ . A função  $f$  satisfaz a uma condição de Lipschitz no retângulo  $R_c$ , com relação à variável  $x$ , se existir uma constante  $K > 0$  tal que

$$(4) \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|$$

para quaisquer  $(t, x_1)$  e  $(t, x_2)$  em  $R_c$ . Decorre da continuidade de  $f$  e de (4) que  $f$  é limitada em  $R_c$ :  $\|f(t, x)\| \leq M < \infty$ . Sejam  $a = \min(a, b/M)$  e  $J = [t_0 - a, t_0 + a]$ . Tem-se o seguinte resultado.

Proposição 2.1 (Picard). Suponha que  $f: I \times U \rightarrow X$  seja contínua e que satisfaça a condição de Lipschitz (4) em  $R_c$ . Então, existe uma, e somente uma, função  $\phi: J \rightarrow X$  que é solução da equação integral (3).

Demonstração. Seja  $C^0(J; X)$  o espaço de Banach das funções contínuas  $x: J \rightarrow X$ , munido da norma da convergência uniforme:

$$\|x\| = \max_{t \in J} \|x(t)\|$$

e seja

$$K = \{x \in C^0(J; X) : x(t_0) = x_0, \|x(t) - x_0\| \leq b, \forall t \in J\}.$$

É fácil ver que  $(K, \|\cdot\|)$  é um espaço métrico completo e que

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

é uma aplicação de  $K$  em  $K$ . Por um argumento conhecido, usando integrais iteradas, demonstra-se que existe  $n > 0$  tal que

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k \|x - y\|,$$

onde  $0 < k < 1$ . Assim podemos aplicar o teorema do ponto fixo de Banach-Cacciopoli (enunciado abaixo) e concluir que

a aplicação  $T$  tem um e somente um, ponto fixo, o que é equivalente a dizer que a equação integral (3) tem uma única solução. Q.E.D.

Teorema do Ponto Fixo de Banach-Cacciopoli. Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico completo e  $T: M \rightarrow M$  uma aplicação tal que, para  $n$  inteiro  $> 0$  e  $0 < k < 1$ , se tenha

$$d(T^n x, T^n y) \leq kd(x, y), \quad x, y \in M.$$

Então,  $T$  tem um (único) ponto fixo  $x_0$ . Além disso,  $x_0$  é atrator, isto é, para qualquer  $\bar{x} \in M$ , a sucessão  $(T^j \bar{x})_{j=1}^{\infty}$  converge para  $x_0$ .

A demonstração do teorema de Banach-Cacciopoli pode ser feita facilmente, utilizando o Princípio da Contração, que é o caso do teorema quando  $n = 1$ .

Talvez igualmente antigo seja o seguinte resultado sobre a solubilidade de (1), conhecido por teorema de Cauchy e cuja demonstração utiliza o método das sucessões majorantes. Esse teorema foi estendido por Kowalevska para equações diferenciais parciais e é um resultado importante na teoria geral dessas equações.

Proposição 2.2 (Cauchy). Seja  $E$  o corpo dos reais ou dos complexos, e seja  $U$  uma vizinhança aberta do ponto  $(t_0, x_0) \in E \times E^n$ . Suponha que  $f: U \rightarrow E^n$  seja analítica. Então, existe uma vizinhança aberta de  $t_0$  e uma (única) função analítica  $\phi: V \rightarrow E^n$  tal que  $\phi(t_0) = x_0$  e  $V \times \phi(V) \subset U$  tal que

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)), \quad t \in V.$$

A demonstraçãõ pode ser vista no livro de H. Cartan "Elementary Theory of Analytic Functions of one or Several Complex Variables".

O terceiro resultado sobre a solubilidade de (1) relaxa a hipõtese de  $f$  ser lipschitziana com relaçaõ a  $x$ , mas requer que o espaço de Banach  $X$  seja de dimensãõ finita, isto é, essencialmente  $\mathbb{R}^n$ . A demonstraçãõ clãssica do teorema faz uso das poligonais de Euler e do teorema de Arzelã-Ascoli. A demonstraçãõ abaixo utiliza o teorema do ponto fixo de Schauder, mas nãõ prescinde de Arzelã-Ascoli.

Proposiçaõ 2.3 (Peano). Sejam  $X$  um espaço de Banach de dimensãõ finita e  $f: I \times U \rightarrow X$  uma funçaõ contõnua. Seja  $J$  como na Prop. 2.1. Entãõ, existe uma funçaõ contõnua (nãõ necessariamente ãnica)  $\phi: J \rightarrow X$  que é soluçaõ da equaçãõ integral (3).

Demonstraçaõ. Sejam  $K$  e  $T: K \rightarrow K$  como na demonstraçãõ da proposiçaõ 2.1. Agora observe que  $K$  é um subconjunto convexo, fechado e limitado do espaço de Banach  $C(J;X)$ . Alãem disso, do fato de  $f$  ser uniformemente contõnua em  $J \times B(x_0, b)$ , segue-se que  $T$  é contõnua. Para demonstrar a compacidade de  $T$ , usamos Arzelã-Ascoli, como se segue. (É esse o ponto onde é essencial o fato de  $\dim X < \infty$ ). Para qualquer  $x$  em  $K$ :

$$\|Tx(t) - Tx(t')\| \leq \left| \int_{t'}^t \|f(s, x(s))\| ds \right| \leq M|t - t'|$$

o que mostra que o conjunto  $T(K)$  é equicontõnuo e, portanto relativamente compacto em  $C(J;X)$ . Portanto,  $T: K \rightarrow K$  é uma aplicaçaõ compacta em subconjunto  $K$  fechado, convexo e limitado de um espaço de Banach, e consequentemente o resultado se segue pela aplicaçaõ do teorema do ponto fixo de Schauder. Q.E.D.



Observação. Como acabamos de ver, a condição de Lipschitz não é necessária para a existência de solução de (1). Ela também não é necessária para unicidade; existem condições mais fracas ligadas com os nomes de Osgood, Nagumo, Kamke, Perron e outros; consulte, por exemplo, o livro de J. Hale, "Ordinary Differential Equations". Quanto a existência de solução de (1) há muita coisa interessante a dizer. Em primeiro lugar, a mera continuidade de  $f$  é suficiente para a existência, caso o espaço  $X$  tenha dimensão finita, de acordo com a proposição 2.3. No caso de dimensão infinita, há exemplos de funções contínuas  $f$  para as quais a equação integral (3) não tem solução; o primeiro exemplo foi dado por Dieudonné, para o espaço  $X = c_0$ . Posteriormente, Yorke deu um exemplo em espaço de Hilbert e Cellina em espaços de Banach não reflexivos. Recentemente, Godunov produziu exemplos em espaços de Banach arbitrários, mostrando assim que o problema de Cauchy é solúvel para toda  $f$  contínua se e só se  $X$  for de dimensão finita.

Em resumo. Vimos nas proposições acima o uso de três técnicas não lineares diferentes. As técnicas contrativas e as de analiticidade e suas variantes dominaram o panorama das aplicações às equações diferenciais e integrais até o início da década de 1930 quando Schauder isolou uma classe importante de operadores não lineares, conhecidos como operadores compactos (alguns autores usam a terminologia completamente contínua) para os quais se tem teoremas de ponto fixo e uma extensão da teoria do grau topológico de Brouwer. A próxima secção será dedicada a esses operadores.

## 2.2. OPERADORES COMPACTOS

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach e  $D \subset X$ . Um operador (não necessariamente linear)  $T: D \rightarrow Y$  é compacto se for contínuo e se  $T(B)$  for relativamente compacto para todo conjunto limitado  $B \subset D$ . Um operador  $T: D \rightarrow Y$  é completamente contínuo se, para toda sucessão  $x_n \rightarrow x$ , tem-se  $Tx_n \rightarrow Tx$ . (Notação:  $\rightarrow$  designa convergência fraca e  $\rightarrow$  designa convergência na norma). Os dois conceitos não são equivalentes nem comparáveis; é fácil dar exemplos de operadores compactos que não são completamente contínuos e vice versa.

Proposição 2.4 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder). Sejam  $C$  um subconjunto convexo, limitado, fechado de um espaço de Banach  $X$  e  $T: C \rightarrow C$  um operador compacto. Então  $T$  tem um ponto fixo em  $C$ .

Demonstração. Para cada  $\varepsilon > 0$  dado, pode-se determinar um número finito de bolas abertas  $B_\varepsilon(x_j)$  de raio  $\varepsilon > 0$  e centradas em pontos  $x_1, \dots, x_N$  de  $T(C)$ , tais que

$$(1) \quad \overline{T(C)} \subset \bigcup_{j=1}^N B_\varepsilon(x_j).$$

Seja  $F_N$  o subespaço vetorial de  $X$  gerado por  $x_1, \dots, x_N$  e seja  $\phi_1, \dots, \phi_N$  uma partição contínua da unidade associada à cobertura (1) de  $\overline{T(C)}$ :  $\phi_j: X \rightarrow [0, 1]$ ,  $\text{supp } \phi_j \subset B_\varepsilon(x_j)$ ,  $\sum \phi_j(x) = 1$  se  $x \in \overline{T(C)}$ . A expressão

$$(2) \quad T_N x = \sum_{j=1}^N \phi_j(Tx) x_j$$

define uma função contínua de  $C \cap F_N$  nele próprio. Como  $C \cap F_N$  é um subconjunto convexo, limitado e fechado de um espaço de

dimensão finita, segue-se, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer que existe  $x_N \in C \cap F_N$  tal que  $T_N x_N = x_N$ . Agora, obtemos a partir de (2):

$$\|Tx_N - T_N x_N\| = \left\| \sum \phi_j(Tx_N) [Tx_N - x_j] \right\| < \epsilon.$$

Fazendo  $\epsilon = 1/n$ , obtemos uma sucessão  $(x_n)$  em  $C$  tal que  $T_n x_n = x_n$  e  $\|Tx_n - T_n x_n\| < 1/n$ . Indo para uma subsucessão, podemos admitir que  $Tx_n \rightarrow y$  e daí concluir que  $Ty = y$ . Q.E.D.

Corolário 2.1 (Teorema de ponto fixo com a condição de Leray-Schauder). Sejam  $B$  uma bola fechada de raio  $r$  centrada na origem de um espaço de Banach  $X$ , e  $T: B \rightarrow X$  um operador compacto tal que

$$(3) \quad Tx \neq \lambda x, \quad \forall \|x\| = r, \quad \forall \lambda > 1.$$

Então,  $T$  tem um ponto fixo.

Demonstração. O operador

$$\tilde{T}x = \begin{cases} Tx & , \text{ se } \|Tx\| \leq r \\ \frac{r}{\|Tx\|} Tx & , \text{ se } \|Tx\| > r \end{cases}$$

é compacto e  $\tilde{T}(B) \subset B$ . Pelo teorema de Schauder existe  $x \in B$  tal que  $\tilde{T}x = x$ . Afirmamos que  $Tx = x$ . De fato, se  $\|Tx\| \leq r$  é claro. Se  $\|Tx\| > r$  então

$$\frac{r}{\|Tx\|} Tx = x \implies Tx = \lambda x \text{ com } \lambda > 1 \text{ e } \|x\| = r,$$

o que contradiz (3). Q.E.D.

Observação. A condição (3) do corolário 2.1 se verifica se supusermos que

$$(4) \quad \|Tx\| < r \text{ para } \|x\| = r$$

isto é,  $T(\partial B) \subset B$ .

Proposição 2.5 (Princípio de Leray-Schauder). Seja X um espaço de Banach e  $T: X \times [0,1] \rightarrow X$  uma aplicação satisfazendo às seguintes condições:

(i) as aplicações

$$T_t: X \rightarrow X, \quad x \mapsto T_t(x) = T(x,t)$$

são uniformemente contínuas para  $t \in [0,1]$ .

(ii) T leva conjuntos limitados de  $X \times [0,1]$  em conjuntos relativamente compactos.

(iii) existe  $R > 0$  tal que  $T(x,t) \neq x$  para  $\|x\| = R$  e  $t \in [0,1]$

(iv)  $T(x,0) = 0$ .

Então, existe  $x \in X$ , com  $\|x\| < R$  tal que  $T(x,1) = x$ .

Demonstração. Em primeiro lugar mostramos que existe  $d > 0$  tal que

$$(5) \quad \|T(x,t) - x\| \geq d, \text{ para } \|x\| = R \text{ e } t \in [0,1].$$

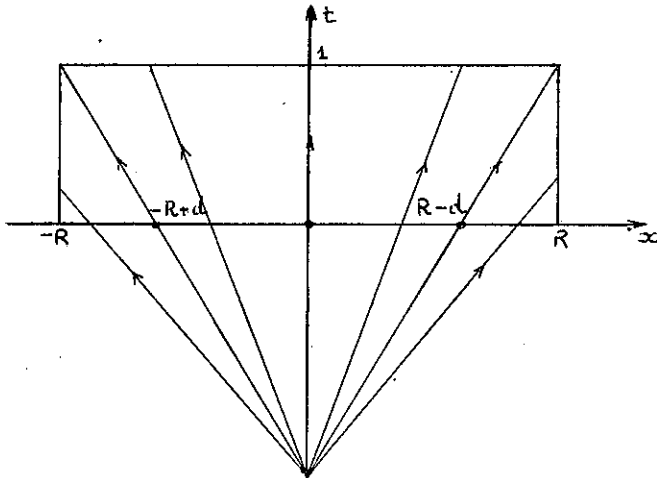
Suponha, por contradição, que isso não ocorra; logo existe  $\|x_n\| = R$  e  $t_n \in [0,1]$  tais que

$$(6) \quad T(x_n, t_n) - x_n \rightarrow 0 \text{ e } t_n \rightarrow t.$$

Em vista da condição (ii) podemos supor, passando para uma subsucessão se necessário, que  $T(x_n, t_n) \rightarrow y$ . Daí e de (6) decorre que  $x_n \rightarrow y$  e que  $\|y\| = r$ . Usando (i) concluímos que  $T(x_n, t_n) \rightarrow T(y, t)$ , o que mostra que  $y = T(y, t)$ , contradizendo (iii). Tome  $d < R$ . Agora definimos a aplicação  $S: B_R(0) \rightarrow X$  pelas expressões

$$(7) \quad Sx = \begin{cases} T\left(\frac{Rx}{\|x\|}, \frac{(R-d)(R-\|x\|)}{d\|x\|}\right), & \text{se } R-d \leq \|x\| \leq R, \\ T\left(\frac{Rx}{R-d}, 1\right) & , \text{ se } \|x\| \leq R-d. \end{cases}$$

Se você quiser brincar um pouco com geometria euclídeana, olhe a figura e deduza as expressões em (7):



É imediato que  $S$  é compacta, que  $S(\partial B_R(0)) \subset B_R(0)$ , pois  $Sx = 0$  para  $\|x\| = R$ . Logo pelo Corolário 2.1,  $S$  tem um ponto fixo em  $B_R(0)$ . Finalmente, para provar que  $T_1$  tem um ponto fixo em  $B_R(0)$  procedemos por contradição: caso isso não ocorra, podemos admitir que  $d$  é tal que

$$(9) \quad \|T(x,1) - x\| > d, \quad \|x\| \leq R,$$

em virtude de (ii). E mostremos que (9) vai implicar que  $S$  não tenha ponto fixo. De fato, seja  $\|x\| > R - d$  e usemos as notações  $y = Rx/\|x\|$  e  $t = (R - d)(R - \|x\|)/d\|x\|$ . Então

$$\|Sx - x\| \geq \|T(y,t) - y\| - \|y - x\| > d - d = 0$$

o que mostra que um tal  $x$  não é ponto fixo de  $S$ ; observe que  $\|y\| = R$  e portanto usamos (5). Por outro lado, seja  $\|x\| \leq R - d$  e usemos a notação  $z = Rx/(R - d)$ . Então

$$\|Sx - x\| \geq \|T(z,1) - z\| - \|z - x\| > d - d = 0,$$

onde usamos (9). Q.E.D.

### 2.3. EXEMPLOS CLÁSSICOS DE PROBLEMAS SEMILINEARES

Nesta secção apresentamos aplicações clássicas das técnicas contrativas e de compacidade ao problema de Dirichlet semilinear

$$(1) \quad \Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Teorema 2.1. Sejam  $\Omega$  um domínio limitado de classe  $C^{2+\alpha}$ ,  $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Suponha que exista  $s_0 > 0$  tal que

$$(2) \quad \max_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ |s| \leq s_0}} \left| \frac{\partial}{\partial s} f(x,s) \right| \equiv q < \frac{2(n-2)}{d^2}$$

$$(3) \quad \max_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ |s| \leq s_0}} |f(x, s)| \leq \frac{2(n-2)}{d^2} s_0$$

onde  $d$  é o diâmetro de  $\Omega$ . Então, o problema (1) tem solução  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ .

Observação. As condições (2) e (3) acima são muito restritivas, ocorrendo, entretanto, para uma classe ampla de funções  $f$ , caso o diâmetro de  $\Omega$  seja pequeno. A hipótese de  $\Omega$  ser de classe  $C^{2+\alpha}$  pode ser relaxada consideravelmente.

O operador de Niemytskii. Associada a uma função contínua  $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos o operador de Niemytskii:

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)).$$

É fácil de ver que:

- (i)  $F: C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow C^0(\bar{\Omega})$ .
- (ii)  $F$  é contínuo.
- (iii)  $F$  é limitado: dado  $r > 0$  existe  $M$ , tal que  $\|Fu\|_0 \leq M$  se  $\|u\|_0 \leq r$ .

O operador de Niemytskii pode ser definido para funções não contínuas, e isso é importante quando se lida com funções  $u$  de  $L^p$ . A classe mais adequada de funções  $f$  é a das funções que satisfazem às condições de Carathéodory. Uma função  $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz às condições de Carathéodory se (i)  $x \mapsto f(x, s)$  é mensurável para todo  $s \in \mathbb{R}$ , e (ii)  $s \mapsto f(x, s)$  é contínua para quase todo  $x \in \Omega$ . Pode-se demonstrar (cf. Krasnoselskii "Topological methods in the theory of nonlinear integral equations", ou Vainberg "Variational methods for the study of nonlinear operators") que, para tais funções:

- (i)  $f(x, u(x))$  é mensurável em  $\Omega$  se  $u(x)$  o for.
- (ii) se o operador de Niemytskii  $F$  estiver bem definido como um operador de  $L^p$  em  $L^q$ ,  $p, q \geq 1$ , então ele é, necessariamente contínuo e limitado.

Demonstração do teorema 2.1. (i) O problema (1) é equivalente à equação

$$(4) \quad u = SFu \text{ em } C^0(\bar{\Omega}),$$

onde  $S$  é o operador definido em (12) da secção 1.5. De fato, (1)  $\implies$  (4) é óbvio; agora seja  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  solução de (4). Então, pelo lema 1.2,  $SF(u) \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$  e  $u = 0$  em  $\Gamma$ . Assim  $u \in C^1(\Omega)$ , o que implica  $Fu \in C^1(\Omega)$ . Como também  $Fu \in C^0(\bar{\Omega})$ , segue-se do lema 1.3 que  $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$  e consequentemente  $u$  é solução de (1).

(ii) Usando o teorema do valor médio temos

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_0 \leq q \|u_1 - u_2\|;$$

para  $\|u_1\|, \|u_2\| \leq s_0$ . Logo, em vista do lema 1.4,  $SF$  é uma contração na bola  $B_{s_0}(0)$  de raio  $s_0$  e centrada na origem de  $C^0(\bar{\Omega})$ .

(iii) Decorre de (3) acima que  $SF(B_{s_0}(0)) \subset B_{s_0}(0)$ . Logo pelo princípio da contração, concluímos que (4) tem uma única solução  $u$ , com  $\|u\|_0 \leq s_0$ . Q.E.D.

Teorema 2.2. Sejam  $\Omega$  um domínio limitado de classe  $C^{2+\alpha}$  e  $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ , a qual é uniformemente limitada, isto é, existe  $M > 0$  tal que

$$(5) \quad |f(x, s)| \leq M, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall s \in \mathbb{R}.$$



Então o problema de Dirichlet (1) tem solução  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ .

Demonstração. (i) O problema (1) é equivalente à equação (4).

(ii) Agora seja  $K_r = \{u \in C^0(\bar{\Omega}) : \|u\|_0 \leq r, \|\nabla u\|_0 \leq r\}$ ,  $r > 0$ . Em virtude do teorema 1.1,  $K_r$  é um subconjunto compacto de  $C^0(\bar{\Omega})$ ; observe que  $K_r$  é convexo. Mostraremos, que para um  $r$  convenientemente escolhido  $SF(K_r) \subset K_r$ . Isso juntamente com o fato que  $SF: C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow C^0(\bar{\Omega})$  é um operador contínuo, permite a aplicação do teorema do ponto fixo de Schauder, para concluir que (4) tem (pelo menos) uma solução.

(iii) A relação (5) acima implica

$$(6) \quad \|Fu\|_0 \leq M, \quad \forall u \in C^0(\bar{\Omega}).$$

(iv) Daí, dado  $u \in K_r$ , temos, em virtude dos lemas 1.4 e 1.5:

$$\|SFu\|_0 \leq kM$$

$$\|\nabla(SFu)\|_0 \leq c\|Fu\|_0 \leq cM.$$

Logo, basta tomar  $r = \max(cM, kM)$ . Q.E.D.

Teorema 2.3. Sejam  $\Omega$  um domínio limitado de classe  $C^{2+\alpha}$ ,  $f_1: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  tal que  $\partial f_1 / \partial s \geq 0$  e  $f_2: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  uniformemente limitada:  $|f_2(x, s)| \leq M$  para todo  $(x, s) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ . Então o problema de Dirichlet (1), com  $f = f_1 + f_2$ , tem uma solução  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ .

Demonstração. (i) Em primeiro lugar, provemos uma desigualdade a priori para a solução. Se  $u$  for solução de (1), a equação em (1) pode ser escrita usando o teorema do valor médio como

$$(7) \quad \Delta u - \frac{\partial f_1}{\partial s}(x, \tilde{u}(x))u = f_1(x, 0) + f_2(x, u)$$

onde  $\tilde{u}(x)$  é um ponto do intervalo de extremidades 0 e  $u(x)$ . Observe que o coeficiente de  $u$  em (7) é  $\leq 0$  e é uma função limitada de  $x$ ; logo pelo lema 2.1 (cf. seção 2.4), concluímos que

$$\|u\|_0 \leq c \|f_1'(x, 0) + f_2(x, u(x))\|_0 \leq M_1$$

onde  $M_1$  depende apenas de  $\Omega$ , de  $M$  e de  $f_1(x, 0)$ , mas independe de  $u$ .

(ii) Agora defina a função

$$\tilde{f}_1(x, s) = f_1(x, \psi(s))$$

onde  $\psi$  é uma função monotônica de classe  $C^1$  tal que  $\psi(s) = s$  se  $|s| \leq M_1$  e  $|\psi(s)| \leq 2M_1$  para todo  $s$ . Então o problema de Dirichlet

$$(8) \quad \Delta u = \tilde{f}_1(x, u) + f_2(x, u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma$$

tem solução  $u$ , em virtude do teorema 2.2. Para uma tal  $u$ , a equação (8) pode ser escrita como

$$\Delta u - \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial s}(x, \tilde{u}(x))u = \tilde{f}_1(x, 0) + f_2(x, u)$$

e daí usando os fatos que  $\partial \tilde{f}_1 / \partial s \geq 0$  e que  $\tilde{f}_1(x, 0) = f_1(x, 0)$

obtemos através do lema 2.1 que  $\|u\|_0 \leq M$ . Logo  $\tilde{f}_1(x,u) = f(x,u)$  e  $u$  é também solução de (1). Q.E.D.

Exemplos. O teorema 2.3 assegura a solubilidade dos problemas de Dirichlet

$$(9) \quad \Delta u = e^u \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma.$$

$$(10) \quad \Delta u = e^u + \text{senu} \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Vamos, a seguir, discutir o problema de Dirichlet

$$(11) \quad \Delta u = -e^u \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Para esse problema não é possível obter estimativas a priori, em geral. E em verdade se tem o seguinte teorema de não existência.

Teorema 2.4 (Fujita). O problema de Dirichlet (11) não tem solução se o primeiro auto-valor  $\lambda_1$  de  $-\Delta$  for menor do que  $e$ .

Demonstração. Suponha que (11) tenha uma solução  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  e seja  $\phi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  uma auto-função de  $-\Delta$  correspondente ao primeiro auto-valor  $\lambda_1$ :

$$(12) \quad -\Delta \phi = \lambda_1 \phi \text{ em } \Omega, \quad \phi = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Sabe-se que  $\lambda_1 > 0$  e que  $\phi$  pode ser tomada tal que

$$(13) \quad \phi(x) > 0 \text{ para } x \in \Omega \text{ e } \int_{\Omega} \phi = 1.$$

Então, de

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot \phi = \int e^u \cdot \phi$$

obtem-se através de integração por partes

$$(14) \quad \lambda_1 \int u \phi = \int e^u \phi$$

Aplicando a desigualdade de Jensen em (14) temos

$$\lambda_1 \int u \phi \geq e^{\int u \phi}.$$

(Observe que as soluções de (11) são funções superharmônicas que se anulam em  $\Gamma$ , e, conseqüentemente são positivas em  $\Omega$ ). A função  $\lambda_1 r - e^r$  é  $\geq 0$  para  $r \geq 0$  se  $\lambda_1 \geq e$ . Conclui-se, pois, que no caso de  $\lambda_1 < e$ , o problema (11) não tem solução. Q.E.D.

Pergunta: Que se pode dizer sobre existência se  $\lambda_1 \geq e$ ?

Primeiro observe que o seguinte resultado vale

Teorema 2.5. Sejam  $\Omega$  um domínio limitado de classe  $C^{2+\alpha}$  e  $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Então, se o diâmetro  $d$  de  $\Omega$  for suficientemente pequeno, o problema de Dirichlet (1) tem uma solução  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ .

A demonstração se faz usando os lemas 1.4 e 1.5. Um resultado mais geral vale:  $f$  pode depender também de  $\nabla u$  e, nesse caso, necessitamos de uma versão mais precisa do lema 1.5 dando a variação de  $c$  como função de  $d$ .

Segundo, lembrando que  $\lambda_1$  é uma função decrescente do diâmetro de  $d$ , podemos concluir que o problema (11) tem solução se  $d$  for suficientemente pequeno, ou seja  $\lambda_1$  suficientemente grande.

Atenção! Observe nas demonstrações dos teoremas acima, de um modo ou outro, estimativas a priori para a solução do problema de Dirichlet desempenharam um papel crucial. Nesse sentido os lemas 1.4 e 1.5 foram importantes. Visando outras aplicações vamos apresentar algumas consequências do princípio do máximo de Hopf-Giraud.

#### 2.4. ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DO PRINCÍPIO DO MÁXIMO

Tendo em vista aplicações a problemas não lineares apresentamos algumas consequências do teorema do máximo de Hopf-Giraud, teorema 1.3. O objetivo aqui é obter estimativas para  $\|u\|_0$  e  $\|\nabla u\|_0$ , onde  $u$  é uma solução de  $Lu = f$  em  $\Omega$ ,  $u = \phi$  em  $\Gamma$  em termos de  $\|f\|_0$  e  $\|\phi\|_0$ . Observe que essas estimativas nem são consequências das estimativas de Schauder e nem as implicam; são estimativas de outra natureza.

Lema 2.1. Sejam  $\Omega$  um domínio limitado,  $L$  um operador elíptico de 2a. ordem com coeficientes reais  $a_p \in L^\infty(\Omega)$ , para  $|p| > 0$ ,  $a_0 \leq 0$ ,  $f \in C^0(\bar{\Omega})$  e  $\phi \in C^0(\Gamma)$ . Suponha que exista uma solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  de

$$(1) \quad Lu = f \text{ em } \Omega, \quad u = \phi \text{ em } \Gamma.$$

Então,

$$(2) \quad \|u\|_0 \leq \|\phi\|_{0,\Gamma} + (e^{\alpha d} - 1)\|f\|_0,$$

onde  $d$  é o diâmetro de  $\Omega$  e  $\alpha = (2c)^{-1}[M + (M^2 + 4c)^{1/2}]$ , sendo  $c$  a constante de elipticidade de  $L$ , e  $M > 0$  tal que  $|a_p| \leq M$ , para  $|p| > 0$ .

Demonstração. Sem perda de generalidade, pode-se supor que  $\Omega$  está compreendido entre os hiperplanos  $x_1 = 0$  e  $x_1 = d$ . De fina

$$g(x) = (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \|f\|_0 + \|\phi\|_0$$

e como

$$Lg = \|f\|_0 \{(-a_{11}\alpha^2 - a_1\alpha)e^{\alpha x_1} + a_0(e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1})\} + a_0\|\phi\|_0$$

segue-se

$$Lg \leq \|f\|_0 (-c\alpha^2 + M\alpha) = -\|f\|_0$$

se  $-c\alpha^2 + M\alpha = -1$ . Agora, tome  $v = u - g$ , para a qual se tem

$$Lv = Lu - Lg \geq f + \|f\|_0 \geq 0 \text{ em } \Omega$$

e

$$v(x) = \phi(x) - g(x) \leq \phi(x) - \|\phi\|_0 \leq 0 \text{ em } \Gamma.$$

Logo, pelo princípio do máximo se tem que  $v(x) \leq 0$  em  $\Omega$ , ou seja  $u(x) \leq g(x)$ . Como  $-u$  é solução de  $Lw = -f$  em  $\Omega$  e  $w = -\phi$  em  $\Gamma$ , obtemos também  $-u(x) \leq g(x)$ . Como  $e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1} \leq e^{\alpha d} - 1$ , a desigualdade de (2) se segue. Q.E.D.

Lema 2.2. Sejam  $\Omega$  um domínio limitado de classe  $C^1$ ,  $L$  um operador elíptico de 2a. ordem com coeficientes reais  $a_p \in L^\infty(\Omega)$ , para  $|p| > 0$ ,  $a_0 \leq 0$ ,  $f \in C^0(\bar{\Omega})$ . Suponha que exista uma solução  $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  de

$$(3) \quad Lu = f \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Então

$$(4) \quad \|\nabla u\|_{0,\Gamma} \leq k \|f\|_0,$$

onde  $k$  é uma constante que depende apenas de  $\Omega$ , da constante de elipticidade  $c$  e de  $M$ , sendo  $M$  tal que  $|a_p| \leq M$ , para  $|p| > 0$ .

A função barreira. Um domínio  $\Omega$  satisfaz a condição da esfera (ou condição de Poincaré) se, para cada  $y \in \Gamma$ , existe uma bola fechada  $B$  tal que  $B \cap \bar{\Omega} = \{y\}$ . Uma função  $w_y: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma barreira no ponto  $y \in \Gamma$ , se

- (i)  $w_y(y) = 0$  e  $w_y(x) > 0$  para  $x \in \bar{\Omega} \setminus \{y\}$ .
- (ii)  $w_y \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ .
- (iii)  $Lw_y(x) \leq -1$ ,  $x \in \Omega$ .

Se um domínio  $\Omega$  satisfizer a condição da esfera num ponto  $y \in \Gamma$ , então, existe uma barreira naquela ponto. De fato tome

$$w_y(x) = k'(\rho^{-q} - r^{-q}),$$

onde  $k'$  e  $q$  são constantes a determinar, onde  $\rho$  é o raio da bola  $B$  da condição da esfera, e onde se supõe que a origem é o centro de  $B$  e  $|x| = r$ . Após alguns cálculos simples obtemos

$$(5) \quad Lw_y(x) \leq k'qr^{-q-2}\{-(q+2)c + \sum (a_{ii} + a_i x_i)\}.$$

Escolha  $q$ , suficientemente grande, tal que a expressão no segundo membro da desigualdade (5) seja  $< 0$ , e a seguir escolha  $k'$  de modo que referida expressão seja  $\leq -1$ . Observe que  $k'$  e  $q$  dependem de  $\Omega$ ,  $c$  e  $M$ .

Demonstração do lema 2.2. Como  $u$  se anula em  $\Gamma$ , basta obter uma estimativa para a derivada normal exterior  $\partial u / \partial \nu$ . Seja  $y \in \Gamma$  fixado e considere a função barreira  $w_y(x)$  de  $\Omega$  nesse ponto; pela construção acima, existe  $k$  tal que  $|\frac{\partial}{\partial \nu} w_y(y)| \leq k$ , onde  $k$  depende apenas de  $c$  e  $M$ . Agora observe

$$L[w_y(x) \|f\|_0 \pm u(x)] \leq -\|f\|_0 \pm f(x) \leq 0.$$

Pelo princípio do máximo de Hopf-Giraud:

$$w_y(x) \|f\|_0 \pm u(x) \geq 0, \text{ para } x \in \bar{\Omega}$$

e daí

$$|u(x)| \leq w_y(x) \|f\|_0, \text{ para } x \in \bar{\Omega}.$$

Como  $u(y) = w_y(y) = 0$ , concluímos que

$$|\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)| \leq |\frac{\partial w_y}{\partial \nu}(y)| \|f\|_0 \leq k \|f\|_0. \text{ Q.E.D.}$$

Observação. Para referências futuras, vale observar que, no caso de  $a_p = 0$  para  $|p| = 1$ ,  $k'$  e  $q$  dependem apenas de  $\Omega$  e de  $M/c$ . E isso implica que, nesse caso, a constante  $k$  do lema 2.2 depende apenas de  $\Omega$  e de  $M/c$ .

Lema 2.3. Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado de classe  $C^{2+\alpha}$ , e

$$(6) \quad Lu = a_{11}(x)u_{x_1x_1} + a_{12}(x)u_{x_1x_2} + a_{22}(x)u_{x_2x_2}$$

um operador uniformemente elíptico com coeficientes  $a_{ij} \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ . Suponha que  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  seja uma solução de  $Lu = 0$



em  $\Omega$  e seja  $\phi \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ , tal que  $\phi = u$  em  $\Gamma$ . (A função  $\phi$  pode ser escolhida como a solução de  $\Delta\phi = 0$  em  $\Omega$  e  $\phi = u$  em  $\Gamma$ ). Então

$$(7) \quad \|\nabla u\|_0 \leq k \|\phi\|_2,$$

onde  $k$  é uma constante que depende apenas da constante de elipticidade  $c$  e da cota  $M$  para os coeficientes:  $\|a_{ij}\|_0 \leq M$ .

Demonstração. 1a. Parte. Suponha, por enquanto (e isso será provado na 2a. e 3a. partes abaixo) que

$$(8) \quad \|\nabla u\|_{0, \bar{\Omega}} = \|\nabla u\|_{0, \Gamma}$$

Agora defina  $w = u - \phi \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  para a qual se tem

$$Lw = -L\phi \text{ em } \Omega, \quad w = 0 \text{ em } \Gamma,$$

e observe que  $-L\phi \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  e

$$\|-L\phi\|_0 \leq 3M\|\phi\|_2.$$

Logo, pode-se aplicar o lema 2.2 para concluir que

$$\|\nabla w\|_{0, \Gamma} \leq 3kM\|\phi\|_2,$$

onde  $k$  depende apenas de  $c$  e  $M$ , e daí

$$\|\nabla u\|_{0, \Gamma} \leq (1 + 3kM)\|\phi\|_2$$

que juntamente com (8) conclui a prova de (7).

2a. Parte. Demonstramos (8) no caso de  $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$  e

$u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$ . Como  $a_{22}(x) \neq 0$ , em virtude da elipticidade de  $L$ , podemos dividir  $Lu = 0$  por  $a_{22}$  e a seguir derivar com relação a  $x_1$  e obtemos que  $u_{x_1} = v$  satisfaz a equação

$$\left( \frac{a_{11}}{a_{22}} v_{x_1} + \frac{a_{12}}{a_{22}} v_{x_2} \right)_{x_1} + v_{x_2 x_2} = 0$$

a qual é uniformemente elíptica, tem coeficientes em  $C^0(\bar{\Omega})$  e portanto, pelo teorema 1.3, o máximo e o mínimo de  $u_{x_1}$  ocorrem na fronteira. O mesmo para  $u_{x_2}$ .

3a. Parte. Agora se  $a_{ij}$  e  $u$  satisfazem apenas às condições do lema, aproximamos, uniformemente em  $\bar{\Omega}$ ,  $a_{ij}$  por funções  $a_{ij}^{(n)} \in C^2(\bar{\Omega})$  e tais que  $\|a_{ij}^{(n)}\|_{\alpha} \leq \text{const.}$ ,  $\forall n$ . Logo, pelo teorema 1.4 as soluções de

$$a_{11}^{(n)} u_{x_1 x_1}^{(n)} + a_{12}^{(n)} u_{x_1 x_2}^{(n)} + a_{22}^{(n)} u_{x_2 x_2}^{(n)} = 0 \text{ em } \Omega, \quad u^{(n)} = u \text{ em } \Gamma$$

estão em  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$ . E além disso, pela estimativa de Schauder

$$\|u^{(n)}\|_{2+\alpha} \leq \text{const.}$$

e pelo teorema 1.1, passando a uma subsucessão, temos  $u^{(n)} \rightarrow v$  em  $C^2(\bar{\Omega})$ , onde  $v \in C^2(\bar{\Omega})$  e é tal que

$$a_{11} v_{x_1 x_1} + a_{12} v_{x_1 x_2} + a_{22} v_{x_2 x_2} = 0 \text{ em } \Omega, \quad v = u \text{ em } \Gamma.$$

Logo  $v = u$ . Como o máximo e o mínimo de  $u^{(n)}$  ocorrem em  $\Gamma$ , o mesmo se conclui para  $u$ . Q.E.D.

Observação. Na demonstração do lema 1.3 utilizou-se fortemente a hipótese de que  $n = 2$  para concluir que, na 2a. par

te,  $u_{x_1}$  satisfaz a uma equação do mesmo tipo que  $Lu = 0$ . No caso de  $L = \Delta$ , a estimativa (7) pode ser obtida para  $n > 2$ , mediante a observação que se  $u$  for harmônica, então  $|\text{grad } u|^2$  é subharmônica, e para tais funções se tem um princípio de máximo; cf. o livro de Protter e Weinberger, pág. 141.

## 2.5. CONSIDERAÇÕES SOBRE AS EQUAÇÕES QUASE-LINEARES

As equações quase-lineares mais gerais são da forma:

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,u,\nabla u) u_{x_i} x_j + a(x,u,\nabla u) = 0.$$

Elas incluem as equações lineares e as equações do tipo divergência

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i(x,u,\nabla u) + a(x,u,\nabla u) = 0,$$

que aparecem como equações de Euler em problemas variacionais do tipo

$$(3) \quad \min \int_{\Omega} F(x,u,\nabla u) dx.$$

A propósito do cálculo das variações, fazemos os seguintes comentários ligeiros. Seja  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^n$  e  $F(x,s,\eta)$  uma função real de classe  $C^1$  para  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^n$ . Considere o funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} F(x,u,\nabla u) dx.$$

O problema clássico do cálculo das variações consiste em de-  
terminar uma função  $u_0$  na classe  $A$  das funções admissíveis:

$$A = \{u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) : u = \phi \text{ em } \Gamma\}$$

onde  $\phi$  é uma função dada em  $\Gamma$ , tal que

$$(4) \quad I(u_0) = \min\{I(u) : u \in A\}.$$

Dois exemplos bem conhecidos são

(I)  $F(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^2$ , que corresponde ao caso famoso do  
problema variacional associado ao problema de Dirichlet  
 $\Delta u = 0$  em  $\Omega$  e  $u = \phi$  em  $\Gamma$ , tratado por Hilbert no final do  
século XIX.

(II)  $F(x, u, \nabla u) = (1 + |\nabla u|^2)^{1/2}$ , que corresponde ao proble-  
ma das superfícies mínimas.

Não é nosso objetivo tratar problemas variacionais,  
mas apenas motivar o aparecimento de equações elípticas em  
seu estudo. Caso o problema variacional tenha solução  $u_0$ ,  
então a função real

$$\Phi(t) \equiv I(u_0 + t\eta) = \int_{\Omega} F(x, u_0 + t\eta, \nabla u_0 + t\nabla\eta) dx$$

onde  $\eta \in C_0^1(\Omega)$  (i.e.  $\eta \in C^1(\Omega)$ ,  $\text{supp } \eta \subset \Omega$ ) é tal que  $\Phi'(0)$   
 $= 0$ . Calculando a derivada de  $\Phi(t)$ , fazendo  $t = 0$  e usando  
o teorema do divergente temos:

$$\Phi'(0) = \int_{\Omega} \left[ F_s(x, u_0, \nabla u_0) - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} F_{\xi_i}(x, u_0, \nabla u_0) \right] n dx$$

de onde se segue que a solução de (4) deve necessariamente

satisfazer a equação de Euler

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} F_{\xi_i}(x, u, \nabla u) - F_s(x, u, \nabla u) = 0$$

onde  $d/dx_i$  designa a derivada total. Para que (5) faça sentido classicamente  $F$  deve ser de classe  $C^2$  e (5) pode ser escrita como

$$(6) \quad \sum_{i,j=1}^n F_{\xi_i \xi_j} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n F_{\xi_i s} u_{x_i} + \sum_{i=1}^n F_{\xi_i x_i} - F_s = 0$$

onde os coeficientes  $F$ 's dependem de  $x$ ,  $u$  e  $\nabla u$ .

Exemplos de (5). No caso (I) acima a equação de Euler é simplesmente  $\Delta u = 0$  e no caso (II) a equação de Euler correspondente é conhecida como a equação das superfícies mínimas, que em dimensão  $n = 2$ ,  $(x_1, x_2) = (x, y)$ , é

$$(7) \quad (1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0.$$

A elipticidade das equações quase-lineares. A elipticidade depende da função  $u$ ; assim (1) é elíptica para a função  $u$  se

$$(8) \quad \sum a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) \xi_i \xi_j \geq c |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \bar{\Omega}$$

onde  $c$  é uma constante que pode depender de  $u$ . Esse conceito não é muito útil por depender de cada  $u$  individualmente. Melhores conceitos são aqueles que têm uma certa uniformidade com  $u$  ou, pelo menos, uma independência de  $u$ . Assim temos, a condição geral de elipticidade:

$$(9) \quad \sum a_{ij}(x, s, \eta) \xi_i \xi_j > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n$$

e para todos  $s \in \mathbb{R}$  e  $\eta \in \mathbb{R}^n$ , ou pelo menos, para  $|s| \leq s_0$  e  $|\eta| \leq M$  para valores  $s_0$  e  $M$  dados. Tem-se também a elipticidade uniforme

$$\lambda_1(|s|)(1 + |\eta|)^{m-2} |\xi|^2 \leq \sum a_{ij}(x, s, \eta) \xi_i \xi_j \leq \lambda_2(|s|) \times \\ \times (1 + |\eta|)^{m-2} |\xi|^2$$

para um certo  $m > 1$ , ou no caso de  $a_{ij}$  não depender de  $s$ :

$$(10) \quad \lambda_1(|\eta|) |\xi|^2 \leq \sum a_{ij}(x, \eta) \xi_i \xi_j \leq \lambda_2(|\eta|) |\xi|^2$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são funções positivas tais que  $\lambda_2/\lambda_1 \leq \text{const.} < +\infty$ .

Observação. A equação das superfícies mínimas satisfaz (9), mas não (10).

## 2.6. UMA EQUAÇÃO QUASE-LINEAR SIMPLES NO PLANO

Vamos agora mostrar como as estimativas da secção 2.4 podem ser utilizadas para resolver o problema de Dirichlet para a seguinte equação quase-linear:

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, u) u_{x_i} x_j = 0 \text{ em } \Omega, \quad u = \phi \text{ em } \Gamma$$

mediante as seguintes hipóteses:

(i) Elipticidade uniforme: existem funções contínuas  $0 < \lambda_1(s) < \lambda_2(s)$ ,  $s$  real, tais que

$$\lambda_1(s) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x,s) \xi_i \xi_j \leq \lambda_2(s) |\xi|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

(ii)  $a_{ij} \in C^\alpha(\bar{\Omega} \times [-s, s]) \quad \forall s > 0.$

(iii)  $\phi \in C^{2+\alpha}(\Gamma).$

(iv)  $\Omega$  é um domínio limitado de classe  $C^{2+\alpha}$ , satisfazendo a condição uniforme da esfera.

Decorre das hipóteses (i) e (ii) acima, em virtude do princípio do máximo que, para qualquer solução  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  de (1) se tem a estimativa a priori

$$(2) \quad \|u\|_0 \leq \|\phi\|_{0,\Gamma}$$

Sejam agora  $c$  e  $M$  tais que

$$(3) \quad \sum a_{ij}(x,s) \xi_i \xi_j \geq c |\xi|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall |s| \leq \|\phi\|_{0,\Gamma}$$

$$(4) \quad |a_{ij}(x,s)| \leq M, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall |s| \leq \|\phi\|_{0,\Gamma}$$

Teorema 2.6. Suponha as hipóteses (i)-(iv) acima. Então, o problema (1) tem uma solução  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}).$

Demonstração. Para cada  $v \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ , segue-se do teorema 1.4 que o problema linear

$$(5) \quad \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, v(x)) u_{x_i x_j} = 0 \text{ em } \Omega, \quad u = \phi \text{ em } \Gamma$$

tem solução única  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}).$  Tem-se, assim, definido um operador

$$T: C^\alpha(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), \quad v \mapsto u = Tv,$$

para o qual vale a estimativa

$$(6) \quad \|u\|_0 = \|Tv\|_0 \leq \|\phi\|_{0,\Gamma}$$

consequência do princípio do máximo. Considerando apenas os  $v$ 's, tais que,  $\|v\|_0 \leq \|\phi\|_{0,\Gamma}$  obtemos do lema 2.3 que

$$\|\nabla u\|_0 \leq k\|\phi\|_2$$

onde  $k$  depende apenas de  $c$  e  $M$  definidos em (3) e (4) acima e não de  $v$ ; a função  $\phi \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  pode ser tomada como sendo a solução de  $\Delta\phi = 0$  em  $\Omega$  e  $\phi = \phi$  em  $\Gamma$ . Seja agora

$$S = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : \|v\|_0 \leq \|\phi\|_{0,\Gamma}, \|\nabla v\|_0 \leq k\|\phi\|_2\}$$

que é um subconjunto convexo e compacto de  $C^0(\bar{\Omega})$ ; pelas observações precedentes  $T(S) \subset S$ . A idéia agora é aplicar o teorema de Schauder para obter um ponto fixo de  $T$ , e, consequentemente, uma solução  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  de (1). Resta, pois provar que  $T$  é contínuo na norma de  $C^0(\bar{\Omega})$ ; seja  $v_n \in S$ , com  $v_n \rightarrow v$ , uniformemente em  $\bar{\Omega}$ . Então, de (6) obtemos, com  $u_n = Tv_n$ , onde

$$(7) \quad \sum a_{ij}(x, v_n(x)) (u_n)_{x_i x_j} = 0 \text{ em } \Omega, \quad u_n = \phi \text{ em } \Gamma,$$

que

$$\|u_n\|_0 \leq \|\phi\|_{0,\Gamma}$$

e pela estimativa de Schauder

$$\|u_n\|_{2+\alpha} \leq C(\|\phi\|_{2+\alpha,\Gamma} + \|u_n\|_0) \leq \text{const.}$$



Logo, em vista do teorema 1.1, existe  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  e uma subsessão de  $(u_n)$ , que será designada também por  $(u_n)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $C^2(\bar{\Omega})$ . Portanto, passando ao limite em (7) obtemos que  $u$  é solução de (5) e conseqüentemente  $u = Tv$ , o que mostra a continuidade de  $T$ . Q.E.D.

## 2.7. UM COMENTÁRIO CRÍTICO

Poder-se-ia dizer que o problema tratado na secção 2.6 é realmente simples. As estimativas a priori para o máximo da solução  $u$  e para o máximo de seu gradiente foram conseqüências mais ou menos elementares do princípio do máximo. O problema complicar-se-ia caso  $a_{ij}$  dependesse também de  $\nabla u$ . A complicação aumentaria se, com o objetivo de obter resultados para a equação das superfícies mínimas, substituissemos a condição de elipticidade uniforme pela condição geral de elipticidade. Este caso foi tratado por Bers e Nirenberg, quando  $n = 2$ , utilizando a teoria das funções pseudo-analíticas por eles desenvolvida; cf. o livro de Bers-John-Schechter. A dificuldade resulta no fato de se necessitar uma estimativa a priori para a constante de Hölder de  $\nabla u$ ; isso ficará melhor esclarecido na próxima secção, onde mostraremos o papel crucial dessa estimativa no método de Leray-Schauder. A obtenção dessa estimativa para a constante de Hölder de  $\nabla u$  é um problema extremamente difícil que freiou o desenvolvimento da teoria das equações quase-líneares, no caso geral de  $n > 2$ , por muito tempo. Somente com os trabalhos de De Giorgi e de Nash na década de 1950 é que o problema foi resolvido adequadamente. A eles se seguiram simplificações e tratamentos mais unificados devidos a Moser

e Ladyzenskaja e Ural'ceva. Dada a extensão e dificuldades técnicas dessas questões, temos que omiti-las por completo, referindo novamente o livro das duas autoras acima ou artigos dos autores mencionados.

## 2.8. EQUAÇÕES QUASE-LINEARES, $n \geq 2$

Com o intuito de minimizar as technicalidades, vamos considerar apenas um caso particular da equação (1) da seção 2.5:

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\nabla u)_{x_i x_j} = 0 \text{ em } \Omega$$

mediante as hipóteses de elipticidade geral ou de elipticidade uniforme, cf. (9) e (10) da seção 2.5, respectivamente, e estudar para (1) o problema de Dirichlet, a condição de fronteira sendo

$$(2) \quad u = \phi \text{ em } \Gamma.$$

Assim o caso da equação das superfícies mínimas pode ser tratado, cf. Teorema 2.8 abaixo.

Condições sobre  $\Omega$  e  $\phi$ . Em toda a seção, supomos que  $\Omega$  seja de classe  $C^{2+\alpha}$  e  $\phi \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$ . No caso da equação (1) satisfazer apenas a condição geral (mais fraca) de elipticidade, cf. (10) da seção 2.5, pede-se também que  $\Omega$  seja estritamente convexa. Nessa eventualidade, decorre o fato importante que  $\Omega$  e  $\phi$  satisfazem a chamada "condição dos  $n + 1$  pontos" que diz o seguinte. Considere em  $R^{n+1}$  a variedade  $n-1$  dimensional

$$S = \{(x, s) : x \in \Gamma \text{ e } s = \phi(x)\};$$

então existe  $R > 0$  tal que, para qualquer ponto  $(x_0, \phi(x_0)) \in S$ , a variedade está inteiramente contida num diedro determinado por dois hiperplanos  $\Pi^+$  e  $\Pi^-$  de inclinação, com relação ao hiperplano  $s = 0$ , no mínimo  $R$ , e tais que  $\Pi^+ \cap \Pi^-$  é uma variedade linear de dimensão  $n-1$  tangente a  $S$  no ponto  $(x_0, \phi(x_0))$ . As equações de  $\Pi^\pm$  são

$$(3) \quad s - \phi(x_0) = \pm \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{0,j}), \quad \sum_{j=1}^n c_j^2 \geq R^2.$$

Teorema 2.7. Sejam  $\Omega$  um domínio limitado de classe  $C^{2+\alpha}$  e  $\phi \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$ . Suponha que a equação (1) seja uniformemente e líptica, isto é, existem funções reais positivas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tais que

$$(4) \quad \lambda_1 (|\eta|) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\eta) \xi_i \xi_j \leq \lambda_2 (|\eta|) |\xi|^2$$

e  $\lambda_2/\lambda_1 \leq \gamma$ , onde  $\gamma$  é uma constante  $< +\infty$ . Suponha também que  $a_{ij} \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ . Então, o problema de Dirichlet (1), (2) tem solução única  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ .

Teorema 2.8. Sejam  $\Omega$  um domínio limitado, convexo de classe  $C^{2+\alpha}$ ,  $\phi \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$ , e seja  $R$  a constante da condição dos  $n+1$  pontos. Suponha que (1) seja apenas elíptica

$$(5) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\eta) \xi_i \xi_j > 0, \quad |\eta| \leq R, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$$

e que  $a_{ij} \in C^{1+\alpha}(|\eta| \leq R)$ . Então, o problema de Dirichlet (1)-(2) admite solução única  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ .

Parte comum das demonstrações dos teoremas 2.7 e 2.8. A idéia é usar o princípio de Leray-Schauder, cf. proposição

2.5 da secção 2.2. Consideremos os problemas, dependendo de um parâmetro  $t \in [0, 1[$ :

$$(6) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t\nabla u)_{x_i x_j} = 0 \text{ em } \Omega, \quad v = t\phi \text{ em } \Gamma.$$

Para cada  $u \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$  e  $t \in [0, 1[$ , o problema (6) tem uma solução única  $v \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ , em vista da teoria linear desenvolvida no capítulo 1. Assim, temos definida uma aplicação

$$T: C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}) \times [0, 1] \rightarrow C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \subset C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$$

e devemos, pois, verificar que as condições da proposição 2.5 estão satisfeitas. Vejamos inicialmente as condições

(i) e (ii). Se tomarmos  $\|u\|_{1+\alpha} \leq \text{const.}$ , então os coeficientes de (6) têm norma  $1 + \alpha$  limitada independente de  $u$ ; então pela estimativa de Schauder

$$(7) \quad \|v\|_{2+\alpha} \leq c \|t\phi\|_{2+\alpha, \Gamma}$$

onde  $c$  é uma constante independente de  $t$  e  $u$ , se  $\|u\|_{1+\alpha} \leq \text{const.}$  A estimativa (7) implica imediatamente as condições (i) e (ii) da proposição 2.5. Decorre do princípio do máximo de Hopf-Giraud que  $T(u, 0) = 0$ , ou seja a condição (iv) está também satisfeita. Agora vamos à condição (iii) que é a mais difícil de ser verificada e que contém toda a real dificuldade do método. Queremos mostrar que existe  $r > 0$  tal que

$$(8) \quad T(u, t) \neq u, \text{ para } \|u\|_{1+\alpha} = r.$$

Para isso basta mostrar que as eventuais soluções de

$$(9) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t\nabla u)_{x_i x_j} = 0 \text{ em } \Omega, \quad u = t\phi \text{ em } \Gamma$$

têm uma estimativa a priori, isto é, existe uma constante  $M > 0$ , independente de  $t$ , e que depende apenas de  $\phi$ ,  $\Omega$  e  $\gamma$  (no caso do teorema 2.7) tal que

$$(10) \quad \|u\|_{1+\alpha} \leq M.$$

Supondo que (10) está provada, teremos todas as condições do princípio de Leray-Schauder preenchidas e concluiremos que existe  $u \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que  $u = T(u, 1)$ . Como necessariamente  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ , então,  $u$  é solução de (1)-(2). Para demonstrar a unicidade, observamos que  $w = u_1 - u_2$ , onde  $u_1$  e  $u_2$  são soluções de (1)-(2), satisfaz a uma equação do tipo

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)w_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)w_{x_i} = 0 \text{ em } \Omega, \quad w = 0 \text{ em } \Gamma$$

de onde se segue que  $w = 0$ , como consequência do princípio do máximo de Hopf-Giraud. Os teoremas 2.7 e 2.8 estão assim demonstrados, pendente apenas a demonstração de (10). Antes porém, dois lemas.

Lema 2.4. Nas hipóteses do teorema 2.7 segue-se que existe uma constante  $M_1$ , independente de  $t$ , e que depende apenas de  $\phi$ ,  $\Omega$  e  $\gamma$ , para a qual se tem as estimativas a priori

$$(11) \quad \|u\|_0 \leq M_1, \quad \|\nabla u\|_0 \leq M_1$$

para todas as eventuais soluções de (9).

Demonstração. A estimativa de  $\|u\|_0$  decorre imediatamente do lema 2.1,  $M_1$  podendo ser tomado como  $\max|\phi|$ . Segue-se do lema 2.2, complementado pela observação após sua prova, que

$$(12) \quad \max_{\Gamma} |\nabla u| \leq k$$

onde  $k$  depende de  $\phi$ ,  $\Omega$  e  $\gamma$ . De fato, seja  $\phi \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  uma função tal que  $\tilde{\phi} = \phi$  em  $\Gamma$ ; então  $w = u - \tilde{\phi}$  satisfaz

$$Lw = -L\tilde{\phi} \text{ em } \Omega, \quad w = 0 \text{ em } \Gamma,$$

e pelo lema 2.2 obtemos

$$\|\nabla w\|_{0,\Gamma} \leq k \|L\tilde{\phi}\|_0$$

de onde se segue (12) imediatamente. Finalmente, para mostrar a segunda estimativa em (11), derivamos a equação (9) com relação a  $x_k$ , e obtemos que  $v = u_{x_k}$  satisfaz a equação do tipo

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\nabla u) v_{x_i x_j} + \sum_{\ell=1}^n b_{\ell}(x) v_{x_{\ell}} = 0.$$

Logo pelo princípio do máximo de Hopf-Giraud o máximo e o mínimo de  $u_{x_k}$  ocorrem na fronteira e daí:

$$\max_{\Omega} |\nabla u| = \max_{\Gamma} |\nabla u|$$

que juntamente com (12) completa a demonstração do lema 2.4. Q.E.D.

Lema 2.5. Nas hipóteses do teorema 2.8 segue-se que existe uma constante  $M_1$  dependendo apenas de  $\phi$  e  $\Omega$ , tal que

$$(13) \quad \|u\|_0 \leq M_1 \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_0 \leq M_1$$

para todas as eventuais soluções de (9).

Demonstração. Análoga à do teorema anterior, em tudo exceto na prova de (12). Aqui a idéia é utilizar o fato que  $\phi \in \Omega$

satisfazem a condição dos  $n + 1$  pontos. Uma vez provada (e isso faremos logo a seguir) que a hipersuperfície  $s = \phi(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$  está contida num diedro formado por  $\Pi^+$  e  $\Pi^-$ , segue-se imediatamente que  $|\partial u(x_0)/\partial v| \leq R$ . Suponha, por contradição que isso não aconteça; então existe  $\bar{x} \in \Omega$  tal que o ponto  $(\bar{x}, u(\bar{x}))$  está "acima" de  $\Pi^+$ . (Caso exista um tal ponto "abaixo" de  $\Pi^-$  procederemos de modo análogo). Isso quer dizer, mais precisamente, que a função

$$v(x) = u(x) - \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{0,j}) - \phi(x_0)$$

tem um máximo positivo numa região  $\Omega' \subset \Omega$ , em cuja fronteira  $v$  se anula. Geometricamente  $\Omega'$  é a projeção da calota cortada por  $\Pi^+$  na hipersuperfície  $s = \phi(x)$ . Agora a função  $v$  satisfaz a equação

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\nabla u)_v \big|_{x_i x_j} = 0$$

e pelo princípio do máximo  $v$  não pode ter máximo positivo em  $\Omega'$ . Q.E.D.

Comentário sobre a estimativa (10). Uma vez que se tem as estimativas (11), concluímos que os coeficientes de (9) são limitados. Observe a nuance: se tentássemos aplicar as estimativas de Schauder para obter estimativas para  $\|u\|_{2+\alpha}$  ou mesmo  $\|u\|_{1+\alpha}$ , necessitaríamos ter limitações sobre as constantes de Hölder dos coeficientes de (9), o que exigiria uma limitação sobre a constante de Hölder do gradiente. Mas isso é o que se quer estabelecer! Essa dificuldade foi contornada, no caso de dimensão  $n = 2$ , por vários autores, Leray e Schauder, Nirenberg, etc. No caso  $n \geq 3$ , somente na década de 1950 é que De Giorgi e Nash resolveram a questão adequadamente. Optamos por omitir a longa e delicada demons

tração de (10), referindo o leitor interessado à bibliografia já mencionada na secção anterior.

Um comentário a mais sobre a estimativa de  $\|\nabla u\|_0$ . Vimos na demonstração do lema 2.4 que a passagem da estimativa de  $\max_{\Gamma} |\nabla u|$  para  $\max_{\Omega} |\nabla u|$  dependeu de mostrar que  $\partial u / \partial x_j$  satisfazia uma equação linear à qual se aplica o princípio do máximo. Caso  $a_{ij}$  dependesse de  $x$  e  $u$  não teríamos esse fato cômodo e consequentemente a demonstração é bem mais difícil. Veja como foi possível contornar essa dificuldade no caso de  $a_{ij}$  depender apenas de  $x$  e  $u$  e de  $n = 2$ , cf. secção 2.6.

Uma palavra final. Nesta secção 2.8 e na secção 2.6 estudamos dois exemplos especiais de equações quase-lineares. Mesmo para esses exemplos as estimativas a priori de  $\|\nabla u\|_0$  e  $\|\nabla u\|_{\alpha}$  são altamente não triviais. Casos mais gerais podem ser tratados e já o foram por vários autores. Recomendamos o livro de Ladyzenskaja e Ural'ceva, onde também há uma extensa bibliografia.

## 2.9. EQUAÇÕES SEMILINEARES VIA ITERAÇÃO MONOTÔNICA

A demonstração do teorema 2.2 da secção 2.3 apresentada no Courant-Hilbert, diferente da nossa, utiliza um método que hoje é conhecido como iteração monotônica. A terminologia "monotônica" usada nesse contexto nada tem a ver com os operadores monotônicos do próximo capítulo; ela se liga à ordem natural em um espaço de funções reais:  $u \leq v \iff u(x) \leq v(x)$ . A iteração monotônica, explorada poste-



riormente por H. Keller, Cohen, Simpson, Laetsch, Sattinger, Amann e outros, tem sido muito bem sucedida no tratamento de problemas de contorno para equações elípticas de 2a. ordem. O sucesso do método se prende ao fato de se ter bons teoremas de máximo para operadores elípticos de 2a. ordem; isso faz com que a estrutura de ordem no espaço das soluções seja uma noção que dá boas implicações. Assim a entrada de métodos da teoria dos espaços de Banach ordenados foi algo natural, e vários autores têm explorado essas idéias, obtendo resultados de existência de soluções, multiplicidade, etc, para problemas de contorno (Dirichlet e outros) para equações semilineares de 2a. ordem.

Nesta secção estudaremos alguns exemplos, visando mais uma ilustração do método. Antes, porém, apresentamos um resultado de carácter geral, nesta forma devido a Amann, que contém a idéia central do método.

Sejam  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^n$ ,  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  o dado de fronteira e  $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a não linearidade. Em toda a secção suporemos que  $\Omega$  seja de classe  $C^{2+\alpha}$  e  $g \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$ . As hipóteses sobre  $f$  serão discutidas mais adiante. O problema a resolver é

$$(1) \quad -Lu = f(x, u) \text{ em } \Omega, \quad u = g \text{ em } \Gamma$$

onde  $L$  é um operador elíptico com coeficientes reais  $a_p \in C^\alpha(\bar{\Omega})$

$$(2) \quad L = \sum_{|p| \leq 2} a_p(x) D^p \text{ com } \sum_{|p|=2} a_p \xi^p \geq c |\xi|^2, \quad c > 0.$$

O sinal - antes de  $L$  na equação (1) é ali posto apenas para termos as definições de subsolução e supersolução mais naturais.

Uma função  $\phi \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  é uma supersolução para a equação (1) se

$$-L\phi \geq f(x, \phi) \text{ em } \Omega, \quad \phi \geq g \text{ em } \Gamma,$$

e  $\phi \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  é uma subsolução se

$$-L\phi \leq f(x, \phi) \text{ em } \Omega, \quad \phi \leq g \text{ em } \Gamma.$$

Observação. Para o problema de Dirichlet  $-\Delta u = 0$  em  $\Omega$  e  $u = g$  em  $\Gamma$ , uma subsolução seria uma função subharmônica  $\phi$  tal que  $\phi \leq g$  em  $\Gamma$ , e uma supersolução seria uma função superharmônica  $\phi$  tal que  $\phi \geq g$  em  $\Gamma$ .

Teorema 2.9. Suponha que o problema (1) tenha uma supersolução  $\phi$  e uma subsolução  $\psi$ , tais que  $\psi \leq \phi$ . Suponha também que  $f \in C^1(\bar{\Omega} \times [-N, N])$  onde  $N = \max(\|\phi\|_0, \|\psi\|_0)$ . Então, o problema (1) tem soluções  $\bar{u}, \bar{v} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  tais que  $\psi \leq \bar{u} \leq \bar{v} \leq \phi$ . Além disso, qualquer solução  $u$  de (1) com  $\psi \leq u \leq \phi$  é tal que  $\bar{u} \leq u \leq \bar{v}$ .

Demonstração. Tome  $k > 0$  suficientemente grande tal que

$$(3) \quad \|a_0\|_0 \leq k \text{ e } -k \leq \frac{\partial f}{\partial s}(x, s) \text{ para } x \in \bar{\Omega} \text{ e } |s| \leq N.$$

Então, pela teoria de Schauder desenvolvida no Capítulo 1, segue-se que, para cada  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ , existe uma única  $w \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que

$$(4) \quad -Lw + kw = f(x, u) + ku \text{ em } \Omega, \quad w = g \text{ em } \Gamma.$$

Assim temos uma aplicação  $T: C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ , a qual é monotônica no sentido que

$$(5) \quad u_1 \leq u_2 \implies Tu_1 \leq Tu_2;$$

Para provar (5), escreve-se (4) para  $u_1$  e  $u_2$  e por subtração obtém-se

$$(-L + k)(w_1 - w_2) = f(x, u_1) - f(x, u_2) + k(u_1 - u_2) \text{ em } \Omega$$

(6)

$$w_1 - w_2 = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Agora observe que o segundo membro de (6) é não positivo, pois usando o teorema do valor médio e (3) tem-se

$$f(x, u_1) - f(x, u_2) = \left[ \frac{\partial f}{\partial s}(x, \tilde{u}(x)) + k \right] \left[ u_1(x) - u_2(x) \right] \leq 0$$

onde  $u_1(x) \leq \tilde{u}(x) \leq u_2(x)$ . Segue-se do princípio do máximo que  $w_1 - w_2 \leq 0$  em  $\Omega$ , e assim (5) está provado. Agora vamos às iterações:

$$(7) \quad u_n = Tu_{n-1}, \quad u_0 = \phi; \quad v_n = Tv_{n-1}, \quad v_0 = \phi,$$

para as quais afirmamos

$$(8) \quad u_{n-1} \leq u_n \quad \text{e} \quad v_n \leq v_{n-1}.$$

A demonstração de (8), por indução, repousa em (5) e no fato que (8) vale para  $n = 1$ , pois

$$(-L + k)(\phi - u_1) = (-L + k)\phi - f(x, \phi) - k\phi \leq 0 \text{ em } \Omega$$

e

$$\phi - u_1 = \phi - g \leq 0 \text{ em } \Gamma$$

implicam que  $\phi - u_1 \leq 0$  em  $\Omega$ ; raciocínio análogo para  $v_1 - \phi$ .

As relações (5), (8) e o fato que  $\phi \leq \Phi$  implicam

$$(9) \quad \phi = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0 = \Phi.$$

Segue-se então do teorema de Dini que existem funções  $\bar{u}$ ,  $\bar{v} \in C^0(\bar{\Omega})$  tais que

$$(10) \quad u_n \rightarrow \bar{u} \text{ e } v_n \rightarrow \bar{v}, \text{ em } C^0(\bar{\Omega}).$$

Logo as convergências em (10) são também na norma do  $L^p(\Omega)$ , para qualquer  $p \geq 1$ . Das desigualdades a priori em  $W^{m,p}$ , cf Capítulo 3:

$$\|u_n - u_m\|_{W^{2,p}} \leq C\{\|F(u_{n-1}) - F(u_{m-1})\|_{L^p} + \|u_n - u_m\|_{L^p}\}$$

onde  $F(u) = f(x,u) + ku$ ; daí e de análoga expressão para os  $v_n$  concluímos que  $\bar{u}$ ,  $\bar{v} \in W^{2,p}$  e as convergências em (10) são também na norma de  $W^{m,p}(\Omega)$ . A seguir utilizamos o teorema de imersão de Sobolev: se  $p > n$  então

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}), \text{ onde } \alpha = 1 - \frac{n}{p},$$

onde a imersão é contínua; logo  $\bar{u}$ ,  $\bar{v} \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$  e as convergências em (10) são também na norma de  $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ . Finalmente, aplicando as estimativas de Schauder concluímos que  $\bar{u}$ ,  $\bar{v} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  e as convergências em (10) são também na norma de  $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ . Logo,  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  são soluções de (1). A última asserção do teorema se segue trivialmente de (5). Q.E.D.

Da aplicabilidade do teorema 2.9. Obviamente a grande dificuldade na aplicação do teorema 2.9 reside na descoberta de uma subsolução  $\phi$  e de uma supersolução  $\Phi$  tais que  $\phi \leq \Phi$ . Esta questão está para a iteração monotônica como as estimati

vas a priori estão para o método de Leray-Schauder. Vejamos algumas aplicações do teorema 2.9. Aqui vai uma bem simples: o teorema 2.2 com a hipótese adicional

$$(11) \quad \exists s_1 < 0 < s_2 \text{ tais que } f(x, s_1) \leq 0 \leq f(x, s_2);$$

então, nessas condições  $\phi = s_1$  e  $\phi = s_2$  seriam respectivamente uma subsolução e uma supersolução nas condições do teorema 2.9.

Como demonstrar o teorema 2.2, sem a hipótese (11), usando o teorema 2.9? Muito simples! As subsolução e supersolução necessárias seriam as soluções dos problemas

$$-\Delta\phi = -N \text{ em } \Omega, \quad \phi = 0 \text{ em } \Gamma,$$

$$-\Delta\phi = N \text{ em } \Omega, \quad \phi = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Observação. Se a função  $f$  satisfizer a condição

$$f(x, 0) \geq 0, \quad x \text{ em } \Omega$$

obtemos imediatamente que  $\phi(x) = 0$  é uma subsolução. E portanto a determinação de uma solução não negativa do problema (1) com  $g = 0$ , nesse caso, reduzir-se-ia a determinação de uma supersolução  $\phi \geq 0$ . Em vários casos discutidos na literatura tem-se verificada a condição

$$f(x, s) \leq h(x), \quad x \in \bar{\Omega}, s \in \mathbb{R}$$

onde  $h \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ . Conseqüentemente, se  $a_0(x) \geq 0$ , então uma supersolução  $\phi$  seria a solução de

$$-L\tilde{\phi} = h \text{ em } \Omega, \quad \tilde{\phi} = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Concluimos a presente secção com uma aplicação do teorema 2.9, discutida por Sattinger.

Teorema 2.10 (Um problema de bifurcação). Seja  $\lambda_1 > 0$  o primeiro auto valor de  $-\Delta$ , isto é,

$$(12) \quad -\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1 \text{ em } \Omega, \quad \phi_1 = 0 \text{ em } \Gamma$$

onde tomamos  $\phi_1 > 0$ . Então, o problema

$$(13) \quad -\Delta u = \mu u - u^3 \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma$$

não tem solução não trivial (i.e.  $u \neq 0$ ) se  $\mu < \lambda_1$  e tem pelo menos duas soluções não triviais se  $\mu > \lambda_1$ .

Demonstração. 1a. Parte. Suponha  $\mu < \lambda_1$ , e seja  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  uma eventual solução de (13). Então, pela estimativa (14) da secção 3.2

$$(\lambda_1 - \mu) \int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} u^4 \leq 0,$$

de onde se segue trivialmente que  $u = 0$  em  $\Omega$ .

2a. Parte. Supondo  $\mu > \lambda_1$  e visando aplicar o teorema 2.9 vamos construir subsoluções e supersoluções. Inicialmente tentamos expressões da forma  $\sigma\phi_1$  com  $\sigma$  constante a determinar:

$$-\Delta(\sigma\phi_1) - \mu\sigma\phi_1 + \sigma^3\phi_1^3 = \sigma\phi_1 [(\lambda_1 - \mu) + \sigma^2\phi_1^2].$$

Portanto se  $|\sigma|$  for suficientemente pequeno a expressão em

tre colchetes  $\tilde{e} < 0$ . Logo, existem  $\sigma_0 < 0$  tal que  $\sigma_0 \phi_1$  é uma supersolução e  $\sigma_1 > 0$  tal que  $\sigma_1 \phi_1$  é uma subsolução. Para obter uma supersolução  $> 0$  e uma subsolução  $< 0$ , tentamos expressões da forma  $\eta \tilde{\phi}_1$ , onde  $\tilde{\phi}_1$  é a autofunção positiva correspondente ao 1º auto-valor  $v_1$  de

$$-\Delta \tilde{\phi}_1 = v_1 \tilde{\phi}_1 \text{ em } \Omega' \text{ e } \tilde{\phi}_1 = 0 \text{ em } \partial\Omega'$$

onde  $\Omega' \supset \bar{\Omega}$ . Portanto  $v_1 < \lambda_1$ , e se tem:

$$-\Delta(\eta \tilde{\phi}_1) - \mu \eta \tilde{\phi}_1 + \eta^3 \tilde{\phi}_1^3 = \eta \tilde{\phi}_1 [(\nu_1 - \mu) + \eta^2 \tilde{\phi}_1^2].$$

Como  $\tilde{\phi}_1 > 0$  em  $\bar{\Omega}$ , concluímos que para  $|\eta|$  suficientemente grande, a expressão entre colchetes  $\tilde{e} > 0$ . Logo, para tais  $\eta > 0$  obtemos supersoluções  $\eta \tilde{\phi}_1$  e para  $\eta < 0$  subsoluções  $\eta \tilde{\phi}_1$ . Claramente, podemos escolher  $\eta_0 < 0$  e  $\eta_1 > 0$  tais que  $\eta_0 \tilde{\phi}_1 < \sigma_0 \phi_1$  e  $\sigma_1 \phi_1 < \eta_1 \tilde{\phi}_1$ . Aplicando o teorema 2.9 obtêm-se duas soluções de (13)  $u_1$  e  $u_2$  tais que

$$\eta_0 \tilde{\phi}_1 \leq u_1 \leq \sigma_0 \phi_1 \text{ e } \sigma_1 \phi_1 \leq u_2 \leq \eta_1 \tilde{\phi}_1.$$

Da equação (13) é claro que  $-u_1$  e  $-u_2$  são também soluções; infelizmente não podemos decidir se  $u_1 \neq -u_2$ , e portanto tudo que podemos dizer é que, se  $\mu > \lambda_1$ , o problema (13) tem pelo menos duas soluções não triviais  $u$  e  $-u$ . Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA DO CAPÍTULO 2

As referências abaixo, além de conter mais detalhes sobre o exposto neste capítulo, são boas referências a outras questões que não foram aqui abordadas por exiguidade de tempo e espaço.

- [1] Amann, H., "Existence and Multiplicity Theorems for Semilinear Elliptic Boundary Value Problems". Math. Zeit. 150 (1976), p. 281-295.
- [2] Amann, H., "Nonlinear operators in Ordered Banach Spaces and Some Applications to nonlinear Boundary Value Problems". A aparecer na série Springer Verlag Lecture Notes.
- [3] Browder, F. E., "Problèmes non linéaires". Les Presses de l'Université de Montréal (1966).
- [4] Cohen, D. S. - Keller, H. B., "Some Positive Problems Suggested by Nonlinear Heat Generation". J. Math. Mech. 16 (1967), p. 1361-1376.
- [5] Courant, R. - Hilbert, D., "Methods of Mathematical Physics". Interscience Publishers. New York (1962).
- [6] De Giorgi, E., "Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari". Mem. Acad. Sci. Torino Ser. 3a, vol. 3 (1957), pp. 25-43.
- [7] Gilbarg, D., "Boundary Value Problems for Nonlinear Elliptic Equations in n Variables". Nonlinear Problems Proceedings of a Symposium at the MRC - University of Wisconsin, edited by R. E. Langer. Madison (1963).
- [8] Keller, H. B., "Elliptic Boundary Value Problems Suggested by Nonlinear Diffusion Processes". Arch. Rat. Mech. Anal. 35 (1969), pp. 363-381.
- [9] Keller, H. B., "Existence Theory for Multiple Solutions of a Singular Perturbation Problem". SIAM Jour. on Math. Anal. 3 (1972), p. 86-92.



- [10] Krasnosels'kii, M. A., "Positive Solutions of Operator Equations". P. Noordhoff Ltd. Groningen (1964).
- [11] Krasnosels'kii, M. A., "Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations". Mac Millan, New York (1964).
- [12] Moser, J., "A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations". Comm. Pure App. Math. 13 (1960), pp. 457-468.
- [13] Nirenberg, L., "On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity". Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), pp. 103-156.
- [14] Sattinger, D. H., "Topics in Stability and Bifurcation Theory". Springer-Verlag Lecture Notes n° 309 (1970).
- [15] Stampacchia, G., "Équations Elliptiques du second ordre à coefficients discontinus". Les Presses de l'Université de Montréal (1966).
- [16] Vainberg, M. M., "Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators". Holden Day Inc. San Francisco (1964).

CAPÍTULO 3

EQUAÇÕES ELÍPTICAS LINEARES EM ESPAÇOS DE SOBOLEV

A teoria das equações fortemente uniformemente elípticas é bem conhecida e há bons textos [2], [3], [4], [6] a ela dedicados; daí nosso tratamento muito sucinto. Analogamente, espaços de Sobolev já são detalhadamente discutidos em várias referências, [1], [2], [5], [6]. O presente capítulo é mais um sumário de resultados necessários para a teoria não linear do capítulo 4.

### 3.1. OS ESPAÇOS DE SOBOLEV

Nesta secção apresentamos apenas as definições dos espaços de Sobolev  $W^{m,p}$  e suas propriedades mais importantes. As demonstrações, todas omitidas, podem ser vistas no livro de Adams, "Sobolev Spaces", ou nas notas de Luiz Adauto Medeiros e Pedro Rivera "Iniciação aos espaços de Sobolev"

Seja  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $m$  um inteiro  $\geq 0$  e  $1 \leq p < \infty$ .

Definição 1.  $W^{m,p}(\Omega)$  é o espaço das distribuições  $u$  tais que  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ , para  $|\alpha| \leq m$ . Definimos nesse espaço a norma

$$(1) \quad \|u\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p},$$

com a qual ele se torna um espaço de Banach. No caso de  $p=2$  o espaço  $W^{m,2}(\Omega)$  é um espaço de Hilbert.

Definição 2.  $H^{m,p}(\Omega)$  é o completamento na norma (1) do espaço das funções  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^m$  tais que  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ , para  $|\alpha| \leq m$ .

Teorema de Meyers-Serrin.  $W^{m,p} = H^{m,p}$ .

Definição 3. Um domínio  $\Omega$  satisfaz a propriedade do cone se existe um cone limitado  $K$  tal que qualquer  $x \in \Omega$  é o vértice de um cone  $K_x$  congruente (através de um movimento rígido) a  $K$  e inteiramente contido em  $\Omega$ .

Teorema de Nirenberg-Gagliardo. Suponha que um domínio  $\Omega$  satisfaça a propriedade do cone. Então, dados  $p \geq 1$ ,  $0 \leq j < m$ ,

existem constantes  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega, p, j, m)$  e  $C = C(\Omega, p, j, m)$  tais  
que para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  se tem

$$(2) \quad \|u\|_{j,p} \leq \varepsilon \|u\|_{m,p} + C \|u\|_{0,p}, \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Antes de enunciar os teoremas de imersão, damos duas definições necessárias.

Definição 4. Um domínio  $\Omega$  satisfaz a propriedade de Lipschitz local se existe uma cobertura localmente finita  $\Gamma$  por abertos  $U$  tais que  $\Gamma \cap U$  são gráficos de funções uniformemente lipschitzianas.

Definição 5.  $C_B^m(\Omega)$  é o espaço das funções  $u \in C^m(\Omega)$  tais que  $D^\alpha u$ , para  $|\alpha| \leq m$ , é limitada em  $\Omega$ . Munido da norma

$$\|u\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \max_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|,$$

$C_B^m(\Omega)$  é um espaço de Banach. Esse espaço é maior do que o espaço  $C^m(\bar{\Omega})$ .

Teorema da imersão de Sobolev. Sejam  $\Omega$  um domínio satisfazendo a propriedade do cone,  $m \geq 0$  e  $1 \leq p < \infty$ . Então, para qualquer  $j \geq 0$ , as imersões abaixo são contínuas:

$$(I) \quad \underline{\text{se}} \quad m < \frac{n}{p}, \quad W^{j+m,p} \subset W^{j,q}, \quad \underline{\text{onde}} \quad p \leq q \leq \frac{np}{n - mp}.$$

$$(II) \quad \underline{\text{se}} \quad m = \frac{n}{p}, \quad W^{j+m,p} \subset W^{j,q}, \quad \underline{\text{onde}} \quad p \leq q < \infty.$$

$$(III) \quad \underline{\text{se}} \quad \frac{n}{p} < m, \quad W^{j+m,p} \subset C_B^j(\Omega)$$

$$(IV) \quad \underline{\text{se}} \quad m - 1 < \frac{n}{p} < m \quad \underline{\text{e}} \quad \underline{\Omega \text{ tem a propriedade de Lipschitz local:}}$$

$$W^{j+m,p} \subset C^{j+\lambda}(\bar{\Omega}), \quad \text{onde } 0 < \lambda \leq m - \frac{n}{p}$$

Teorema da imersão compacta (Rellich-Kondrachov). Sejam  $\Omega$  um domínio limitado satisfazendo a propriedade do cone,  $j \geq 0$ ,  $m \geq 1$  e  $1 \leq p < \infty$ . Então, para qualquer  $j \geq 0$ , as imersões abaixo são compactas:

(I) se  $m < \frac{n}{p}$ ,  $W^{j+m,p} \subset W^{j,q}$ , onde  $1 \leq q < \frac{np}{n - mp}$ .

(II) se  $m = \frac{n}{p}$ ,  $W^{j+m,p} \subset W^{j,q}$ , onde  $1 \leq q < \infty$ .

(III) se  $\frac{n}{p} < m$ ,  $W^{j+m,p} \subset C_B^j(\Omega)$  e  $W^{j+m,p} \subset W^{j,q}$ , onde  $1 \leq q < \infty$ .

(IV) se  $\frac{n}{p} < m$  e se  $\Omega$  tem a propriedade de Lipschitz local:

$$W^{j+m,p} \subset C^j(\bar{\Omega}).$$

(V) se  $m - 1 < \frac{n}{p} < m$  e se  $\Omega$  tem a propriedade de Lipschitz local:

$$W^{j+m,p} \subset C^{j+\lambda}(\bar{\Omega}), \quad \text{onde } 0 < \lambda < m - \frac{n}{p}.$$

O espaço  $W_0^{m,p}(\Omega)$  é o completamento do espaço  $C_0^\infty(\Omega)$  das funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto em  $\Omega$ , na norma (1). Obviamente  $W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ , onde a inclusão é própria, em geral; uma exceção importante é quando  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . O espaço  $W_0^{m,p}$  é de grande importância no estudo do problema de Dirichlet em vista dos lemas abaixo, enunciados apenas no caso  $p = 2$ .

Lema A. Sejam  $\Omega$  um domínio de classe  $C^m$ ,  $m \geq 1$  e

$u \in W_0^{m,2}(\Omega) \cap C^{m-1}(\bar{\Omega})$ . Então  $\partial^j u / \partial v^j = 0$ , para  $j = 0, 1, \dots, m-1$ .

Lema B. Sejam  $\Omega$  um domínio de classe  $C^m$ ,  $m \geq 1$  e  $u \in C^m(\bar{\Omega})$ . Se  $\partial^j u / \partial v^j = 0$ , para  $j = 0, 1, \dots, m-1$ , então  $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ .

### 3.2. O PROBLEMA DE DIRICHLET EM $W_0^{m,2}$ (FORMA VARIACIONAL)

Nesta secção vamos estudar o problema de Dirichlet

$$(1) \quad Lu = f \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial^j u}{\partial v^j} = 0 \text{ em } \Gamma, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

usando técnicas de espaços de Hilbert. Essa é a chamada teoria de Gårding. É conveniente trabalhar com operadores  $L$  na forma de divergência

$$(2) \quad Lu = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} D^\beta (a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u)$$

o qual se supõe fortemente uniformemente elíptico, isto é, existe  $c_0 > 0$  tal que

$$(3) \quad \text{Re} \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta \geq c_0 |\xi|^{2m}, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Tendo em vista futuros desenvolvimentos, vamos fazer a seguinte hipótese nos coeficientes de  $L$ , os quais são funções complexas definidas em  $\Omega$ :

$$(4) \quad a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega), \quad |\alpha|, |\beta| \leq m; \quad a_{\alpha\beta} \text{-uniformemente contínua para } |\alpha| = |\beta| = m.$$

Associado a L tem-se a forma de Dirichlet

$$(5) \quad a[u, v] = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u \overline{D^{\beta} v} dx,$$

a qual, em vista de (4), é uma forma sesquilinear contínua em  $W^{m,2}(\Omega)$ : existe  $C > 0$  tal que

$$(6) \quad |a[u, v]| \leq C \|u\|_{m,2} \|v\|_{m,2}, \quad \forall u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

Dado  $f \in L^2(\Omega)$  o problema de Dirichlet generalizado consiste em achar  $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$  tal que

$$(7) \quad a[u, \phi] = (f, \phi), \quad \forall \phi \in W_0^{m,2}(\Omega),$$

onde  $(, )$  designa o produto interno em  $L^2$ .

Que tem (7) a ver com o problema de Dirichlet (1)? Muito, pois preparamos (7) na medida. Observe inicialmente que, se  $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ , então pelo teorema do divergente:

$$(8) \quad (L\phi, \psi) = a[\phi, \psi]$$

e o que mostraremos a seguir é que se  $u$  for uma solução clássica de (1) então  $u$  é uma solução de (7); e, reciprocamente, se  $u$  for uma solução de (7) para a qual se tem informações sobre sua regularidade, então  $u$  é também solução de (1). Como vamos falar em soluções clássicas, fazemos a hipótese que  $a_{\alpha\beta} \in C^{|\beta|}(\Omega)$  e que  $\Omega$  é de classe  $C^m$ . Uma função  $u \in C^{2m}(\Omega) \cap C^m(\overline{\Omega})$  é uma solução clássica de (1) se ela satisfizer as relações em (1); então, pelo lema B,  $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$  para a qual vale a relação (8), e portanto  $u$  é solução de (7). Reciprocamente, suponha que  $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$  é solução de

(7) e que se tem a seguinte informação sobre a regularidade de  $u$ :  $u \in C^{2m}(\Omega) \cap C^m(\bar{\Omega})$ , então pelo lema A,  $\partial^j u / \partial v^j = 0$ , para  $j = 0, 1, \dots, m-1$ , o que mostra que  $u$  é uma solução clássica de (1).

Conclusão. Se quisermos achar uma solução clássica de (1) poderemos nos propor o seguinte programa: (i) achar uma solução do problema de Dirichlet (7); (ii) conseguir informações sobre a regularidade dessa solução generalizada. A parte (i) pode ser resolvida elegantemente, sem maiores dificuldades, usando métodos de Análise Funcional Linear, e com hipóteses muito fracas sobre  $\Omega$  e sobre os coeficientes de  $L$ ; isso se deve essencialmente a Garding. A parte (ii) conhecida como a teoria da regularidade é bem mais difícil e se deve a F. E. Browder e Nirenberg.

Procedemos agora a parte (i) do programa acima.

Desigualdade de Garding. Seja  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^n$  e suponha (3) e (4) acima. Então, existem constantes  $c > 0$  e  $k_0$  tais que

$$(8) \quad \operatorname{Re} a[u, u] \geq c \|u\|_{m,2}^2 - k_0 \|u\|_{0,2}^2, \quad \forall u \in W_0^{m,2}(\Omega).$$

A demonstração de (8), no caso geral  $m > 1$ , é feita usando partições da unidade e transformada de Fourier. No caso de  $m = 1$  uma demonstração mais direta e mais simples pode ser feita utilizando (3) e a desigualdade de Nirenberg-Gagliardo.

Lema de Lax-Milgram. Sejam  $H$  um espaço de Hilbert complexo e  $B: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  uma forma sesquilinear, a qual é contínua e coerciva, isto é, existem constantes positivas  $K > 0$  e  $c > 0$



tais que

$$|B[x, y]| \leq K \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in H$$

$$\operatorname{Re} B[x, x] \geq c \|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

Então para cada funcional linear contínuo  $\ell: H \rightarrow \mathbb{C}$  existe um único  $y_\ell \in H$  tal que

$$B[x, y_\ell] = (x, \ell), \quad \forall x \in H$$

e para cada funcional anti-linear contínuo  $h: H \rightarrow \mathbb{C}$  existe um único  $y_h \in H$  tal que

$$B[y_h, x] = (h, x), \quad \forall x \in H.$$

Existência de solução para o problema de Dirichlet generalizado (7). Use o lema de Lax-Milgram com  $H = W_0^{m,2}$  e  $B[u, v] = a[u, v] + k(u, v)$ ,  $k \geq k_0$ , onde  $k_0$  é a constante na desigualdade de Gårding. Logo  $B$  é coerciva e sua continuidade se segue de (4) ou (6). Agora dado  $f \in L^2$ , observe que

$$\ell: W_0^{m,2} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \ell(\phi) = (f, \phi)$$

é um funcional anti-linear contínuo, pois

$$|\ell(\phi)| \leq \|f\|_{0,2} \|\phi\|_{0,2} \leq \|f\|_{0,2} \|\phi\|_{m,2}.$$

Consequentemente, para cada  $f \in L^2(\Omega)$  e  $k \geq k_0$  o problema de Dirichlet

$$(9) \quad (L+k)u = f \text{ em } \Omega, \quad \partial^j u / \partial v^j = 0, \quad j = 0, \dots, m-1$$

tem uma única solução  $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$ .

Pergunta. O que acabamos de afirmar não diz nada sobre a solubilidade de (1) ou (7), pois entrou esse  $k$  na equação. Que se pode dizer sobre o problema original?

Para responder a essa pergunta, utilizamos um pouco mais de Análise Funcional, o resultado básico a usar sendo a Alternativa de Fredholm para operadores compactos em espaços de Hilbert, a qual diz o seguinte: "Seja  $T: H \rightarrow H$  um operador compacto em um espaço de Hilbert complexo, e seja  $T^*: H \rightarrow H$  o operador adjunto, isto é,  $(T^*x, y) = (x, Ty)$ , para quaisquer  $x, y \in H$ . Então uma das duas possibilidades ocorre: (i)  $I-T$  é um homeomorfismo de  $H$  sobre  $H$ , ou (ii)  $0 < \dim N(I-T) < \infty$ . Neste último caso, temos mais o seguinte:  $\dim N(I-T^*) = \dim N(I-T)$  e  $y \in R(I-T)$  se e só se  $(y, x^*) = 0$  para todo  $x^* \in N(I-T^*)$ ".

Visando aplicar esse resultado observe que (9) define uma aplicação  $T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , com  $R(T) \subset W_0^{m,2}(\Omega)$ : dado  $f \in L^2(\Omega)$ , então  $Tf$  satisfaz a equação

$$(10) \quad a[Tf, \phi] + k(Tf, \phi) = (f, \phi), \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Para facilitar a notação introduzimos a notação:

$$a_k[u, v] = a[u, v] + k(u, v)$$

e assim (7) é equivalente a

$$a_k[u, \phi] = (f + ku, \phi)$$

e portanto, em vista de (10),  $u$  é solução de (7) se e só se

$$T(f + ku) = u.$$

Resumindo, a solubilidade de (7) se reduz àquela de

$$(11) \quad u - T_k u = \tilde{f}$$

onde  $T_k = kT$  e  $\tilde{f} = Tf$ . Finalmente para traduzir as afirmações da alternativa de Fredholm em termos do problema diferencial, devemos saber quem é  $(T_k)^*$ . Para isso definimos o adjunto formal  $L^*$  de  $L$  pela expressão

$$(L\phi, \psi) = (\phi, L^*\psi), \quad \forall \phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

o que dará

$$L^*\psi = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\overline{a_{\alpha\beta}(x)} D^\beta \psi).$$

Daí a forma de Dirichlet associada a  $L^*$  é

$$a^*[u, v] = \int \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \overline{a_{\alpha\beta}} D^\beta u \overline{D^\alpha v} \, dx$$

o que mostra que

$$a^*[u, v] = \overline{a[v, u]}.$$

Obviamente, tudo que se fez para  $a[u, v]$  vale para  $a^*[u, v]$  e daí concluímos a existência de um operador  $T^*: L^2 \rightarrow L^2$  tal que, para cada  $g \in L^2$ :

$$a^*[T^*g, \phi] + k(T^*g, \phi) = (g, \phi), \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Não é difícil mostrar que

$$(T^*)_k = (T_k)^*.$$

Juntando tudo isso podemos agora traduzir a alternativa de Fredholm nos termos de nosso problema:

Alternativa de Fredholm para o problema de Dirichlet. Suponha que  $\Omega$  é um domínio limitado e que as hipóteses (3) e (4) estão satisfeitas. Então, ou o problema (7) tem uma e só uma solução  $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$  para cada  $f \in L^2(\Omega)$ , ou o problema homogêneo

$$a[u, \phi] = 0, \quad \forall \phi \in W_0^{m,2}$$

tem um número finito (digamos  $n$ ) de soluções linearmente independentes. Neste último caso, o problema

$$a[\phi, v] = 0, \quad \forall \phi \in W_0^{m,2}$$

tem  $n$  soluções linearmente independentes  $v_1, \dots, v_n \in W_0^{m,2}$ , e também nesse caso, o problema (7) tem solução para os  $f$  tais que

$$(f, v_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

O problema de auto-valor.  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um auto-valor para o problema de Dirichlet (7) se existir  $0 \neq u \in W_0^{m,2}$  tal que

$$(12) \quad a[u, \phi] = \lambda(u, \phi), \quad \forall \phi \in W_0^{m,2};$$

uma tal  $u$  é chamada uma  $\lambda$ -auto-função. Escrevendo (12) para  $\phi = u$  e usando a desigualdade de Gårding obtemos

$$(\operatorname{Re} \lambda) \|u\|_{0,2}^2 = \operatorname{Re} a[u, u] \geq c \|u\|_{m,2}^2 - k_0 \|u\|_{0,2}^2 \geq (c - k_0) \|u\|_{0,2}^2,$$

de onde se conclui que os auto-valores estão no semi-plano

Re  $\lambda \geq c - k_0$ . Para discutir o problema de auto-valores (12), podemos admitir sem perda de generalidade que o  $k_0$  na desigualdade de Gårding é 0 e conseqüentemente os eventuais auto-valores de (12) são  $> 0$ ; para isso, consideramos a forma  $a[u, v] + k(u, v)$ ,  $k \geq k_0$ , ao invés de  $a[u, v]$ . Isso implica que o problema

$$a[u, \phi] = (f, \phi), \quad \forall \phi \in W_0^{m, 2}$$

tenha solução única  $u \in W_0^{m, 2}$  para cada  $f \in L^2$  dado, e assim o operador solução  $T: L^2 \rightarrow L^2$ , com  $R(T) \subset W_0^{m, 2}$  satisfaz a

$$(13) \quad a[Tf, \phi] = (f, \phi), \quad \forall \phi \in W_0^{m, 2}.$$

Seja agora  $\lambda$  um auto-valor de (12) (necessariamente, em vista do exposto acima,  $\lambda > 0$ ); logo  $u = \lambda Tu$ , o que mostra que  $\lambda^{-1}$  é um auto-valor de  $T$ , e as  $\lambda$ -auto-funções de (12) são  $\lambda^{-1}$ -auto-funções de  $T$ . Por outro lado, seja  $0 \neq \mu$  um auto-valor de  $T$  (observe que 0 não é um auto-valor de  $T$ , pois se fosse isso implicaria na existência de um  $0 \neq f \in L^2$  tal que  $(f, \phi) = 0$ ,  $\forall \phi \in W_0^{m, 2}$ , em virtude de (13), e isso é impossível); logo  $Tf = \mu f$ , para algum  $0 \neq f \in L^2$ , o que implica, via (13) que  $\mu^{-1}$  seja um auto-valor de (12), e que  $f$  (que necessariamente pertence a  $W_0^{m, 2}$ , pois  $R(T) \subset W_0^{m, 2}$ ) seja uma  $\mu^{-1}$ -auto-função do problema (12). Logo os auto-valores de (12) são os inversos dos auto-valores de  $T$  e as correspondentes auto-funções são as mesmas. Portanto, concluímos que o problema (12) tem no máximo uma coleção enumerável de auto-valores  $\lambda_n$ , com  $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ , e que a dimensão de cada auto-espaço é finita.

Problema auto-adjunto. O problema (7) é auto-adjunto se

$$a[\phi, \psi] = \overline{a[\psi, \phi]}, \quad \forall \phi, \psi \in W_0^{m,2}(\Omega).$$

Isso implica que o operador  $T$  acima é simétrico:  $T^* = T$ . Logo os auto-valores de  $T$  e conseqüentemente os de (12) são reais. Logo, no caso do problema auto-adjunto, os auto-valores formam uma sucessão  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow +\infty$ ; observe que  $\lambda_1$  pode ser negativo. Agora, segue-se da teoria dos operadores compactos simétricos em espaços de Hilbert que

$$(14) \quad \lambda_1(u, u) \leq a[u, u], \quad \forall u \in W_0^{m,2}.$$

De fato, sem perda de generalidade, pode-se supor como acima que o  $k_0$  na desigualdade de Gårding seja 0, o que implica que  $\lambda_1 > 0$ . Observe que  $R(T) = W_0^{m,2}$ , o que se segue de (13) utilizando o teorema de Riesz-Frechet. Logo (14) é equivalente a

$$(15) \quad \lambda_1(Tf, Tf) \leq a[Tf, Tf], \quad \forall f \in L^2.$$

Para demonstrar (15) tomamos uma base orto-normal de  $R(T)$  constituída por auto-funções de  $T$ ,  $\phi_1, \phi_2, \dots$ , com  $T\phi_n = \mu_n \phi_n$ , onde esses  $\mu_n$  não são necessariamente diferentes. Observe porém que  $\mu_1^{-1} = \lambda_1$ ; Assim

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (f, \phi_n) \phi_n.$$

Temos que

$$(16) \quad a[\phi_n, \phi_m] = \lambda_n (\phi_n, \phi_m) = \lambda_n \delta_{nm}.$$

Logo

$$(17) \quad a[Tf, Tf] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \lambda_n (f, \phi_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (f, \phi_n)^2.$$

Por outro lado

$$(Tf, Tf) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 (f, \phi_n)^2 \leq \mu_1 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (f, \phi_n)^2,$$

de onde se segue a estimativa (14). Pedimos a indulgência do leitor pelo fato de usarmos  $\lambda_n$  em (16) e (17) para designar os auto-valores com repetição.

Ainda no caso do problema auto-adjunto, temos o seguinte fato que seja de valia mais adiante. Suponha que 0 não é um auto-valor de (7) e que os auto-valores mais próximos sejam  $\lambda_n < 0 < \lambda_{n+1}$ , então o problema

$$a[u, \phi] = (f, \phi), \quad \phi \in W_0^{m,2}$$

tendo solução única para cada  $f \in L^2$ , define um operador  $T: L^2 \rightarrow L^2$  com  $R(T) \subset W_0^{m,2}$ . Pode-se ver facilmente que

$$(18) \quad \|T\| = \max\left\{\frac{1}{|\lambda_n|}, \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right\}.$$

Regularidade da solução do problema de Dirichlet (7). Vimos que, mediante as hipóteses (3) e (4), para  $f \in L^2$ , solução de (7) está em  $W_0^{m,p}$ . Que se pode dizer caso  $f$  seja mais regular, bem como os coeficientes de  $L$ . Enunciamos separadamente os resultados de regularidade no interior e regularidade até a fronteira, desde que o primeiro tipo de resultado não faz nenhuma restrição na fronteira  $\Gamma$  de  $\Omega$ . As demonstrações desses resultados podem ser vistas no livro de Friedman, "Partial Differential Equations".

Regularidade no interior. Suponha (3) e (4), e que  $a_{\alpha\beta} \in C^{|\beta|+k}(\bar{\Omega})$ , onde  $k$  é um inteiro  $\geq 0$ . Suponha também que para um dado  $f \in W^{k,2}$ , (7) tem solução  $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$ . Então,

$u \in W^{2m+k}(\Omega')$ , para qualquer subdomínio  $\Omega'$  com  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ , e além disso:

$$\|u\|_{2m+k,2}^{\Omega'} \leq c(\|f\|_{k,2} + \|u\|_{m,2})$$

onde a constante  $c$  depende apenas de  $c_0$ ,  $k$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega'$  e das normas  $C^{|\beta|+k}$  dos coeficientes  $a_{\alpha\beta}$ .

Regularidade até a fronteira. Suponha (3), (4) e que  $\Omega$  seja de classe  $C^{2m+k}$ , para  $k$  inteiro  $\geq 0$ . Suponha também que  $a_{\alpha\beta} \in C^{|\beta|+k}(\overline{\Omega})$ . Seja  $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$  uma solução de (7) para um dado  $f \in W^{k,2}$ . Então,  $u \in W^{2m+k,2}$  e, além disso:

$$\|u\|_{2m+k,2} \leq c(\|f\|_{k,2} + \|u\|_{0,2})$$

onde a constante  $c$  depende apenas do operador  $L$  e de  $\Omega$ .

Observação Final. Tratamos nesta secção o problema de Dirichlet para operadores fortemente uniformemente elípticos. Historicamente, isso foi o que primeiro se fez; os trabalhos de Garding, Browder e Nirenberg contêm essencialmente o exposto acima. Entretanto, pode-se tratar uma classe mais geral de operadores elípticos, os operadores propriamente elípticos, cf. secção 1. Isso é o que faremos na próxima secção.

### 3.3. ESTIMATIVAS A PRIORI EM $L^p$ E APLICAÇÕES

Sejam  $\Omega$  um domínio limitado de classe  $C^{2m}$  e



$$(1) \quad L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

um operador propriamente elíptico com coeficientes complexos  $a_\alpha \in C^0(\bar{\Omega})$  se  $|\alpha| = 2m$  e  $a_\alpha \in L^\infty(\Omega)$  se  $|\alpha| < 2m$ . Sejam

$$(2) \quad B_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j,\alpha}(x) D^\alpha$$

$m$  operadores de fronteira, com  $m_j < 2m$  e  $b_{j,\alpha} \in C^{2m-m_j}(\Gamma)$ . Suponha que  $L(x, D)$ ,  $B_j(x, D)$  satisfazem às condições de Shapira-Lopatinski. Então, pode-se provar

Desigualdade a priori. (Agmon-Douglis-Nirenberg; Browder no caso das condições de Dirichlet). Nas hipóteses acima, com  $1 < p < \infty$ , tem-se

$$(3) \quad \|u\|_{2m,p} \leq c(\|Lu\|_{0,p} + \|u\|_{0,p})$$

para toda  $u \in W^{2m,p}$  tal que  $B_j u = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ , onde  $c$  é uma constante independente de  $u$ . Aqui  $B_j u = 0$  deve ser entendido no sentido de traços de funções de espaços de Sobolev. No caso das condições de Dirichlet podemos prescindir dos traços e temos a validade de (3) para todas  $u \in W_0^{2m,p}(\Omega)$ .

O operador diferencial  $L$  em  $L^p$ . Designando por  $C^{2m}(\bar{\Omega}; \{B_j\})$  o subespaço de  $C^{2m}(\bar{\Omega})$  das funções tais que  $B_j u = 0$ , vemos que

$$(4) \quad L: C^{2m}(\bar{\Omega}; \{B_j\}) \rightarrow C^0(\bar{\Omega}).$$

Observe que  $\|Lu\|_{0,p} \leq c\|u\|_{2m,p}$ , para  $u \in W^{2m,p}$ . Designamos por  $W^{2m,p}(\Omega; \{B_j\})$  a aderência de  $C^{2m}(\bar{\Omega}; \{B_j\})$  em  $W^{2m,p}$ . Logo o operador  $L$  pode ser estendido a  $W^{2m,p}(\Omega; \{B_j\})$ , que sendo um subespaço de  $L^p$ , permite-nos considerar  $L$  como um opera

dor em  $L^p$  com domínio

$$D_L = W^{2m,p}(\Omega; \{B_j\}).$$

Pode-se mostrar que

$$W^{2m,p}(\Omega; \{\frac{\partial^j}{\partial v^j}\}) = W^{2m,p} \cap W_0^{m,p}.$$

Proposição 3.1.  $L: D_L \rightarrow L^p$  é um operador fechado.

Demonstração. Suponha que  $u_n \in D_L$ ,  $u_n \rightarrow u$  em  $L^p$  e  $Lu_n \rightarrow v$  em  $L^p$ . Devemos provar que  $u \in D_L$  e que  $v = Lu$ . Observe que a desigualdade (3) é válida para  $C^{2m}(\bar{\Omega}; \{B_j\})$  e portanto também o é para a sua aderência. Logo

$$\|u_n - u_m\|_{2m,p} \leq c(\|Lu_n - Lu_m\|_{0,p} + \|u_n - u_m\|_{0,p}).$$

Daí concluímos que existe  $\tilde{u}$  em  $W^{2m,p}$  tal que

$$(5) \quad u_n \rightarrow \tilde{u} \text{ em } W^{2m,p},$$

e portanto  $\tilde{u} = u$ , o que mostra que  $u \in D_L$ . (5) também implica que  $Lu_n \rightarrow Lu$  em  $L^p$ , e daí  $Lu = v$ . Q.E.D.

Proposição 3.2.  $N(L)$  é de dimensão finita.

Demonstração. Se  $u_n \in D_L$  e são tais que  $\|u_n\|_{L^p} \leq 1$  e  $Lu_n = 0$ , segue-se de (3) que  $\|u_n\|_{2m,p} \leq C$ , o que implica que  $(u_n)$  é um conjunto relativamente compacto em  $L^p$ . Q.E.D.

Proposição 3.3. Se  $N(L) = 0$  então, existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$(6) \quad \|u\|_{2m,p} \leq c \|Lu\|_{0,p}$$

para todo  $u \in W^{m,p}(\Omega; \{B_j\})$ .

Demonstração. Por contradição, sejam  $u_n \in W^{m,p}(\Omega; \{B_j\})$  tais que

$$\|u_n\|_{2m,p} \geq n \|Lu_n\|_{0,p}$$

seja  $v_n = u_n / \|u_n\|_{2m,p}$ . Então  $\|Lv_n\|_{0,p} \leq 1/n$ ,  $\exists v \in W^{2m,p}$  tal que  $v_n \rightarrow v$  em  $L^p$ . Por outro lado usando (3) tem-se

$$\|v_n - v_m\|_{2m,p} \leq c (\|Lv_n - Lv_m\|_{0,p} + \|v_n - v_m\|_{0,p})$$

de onde se segue que  $v_n \rightarrow v$  em  $W^{2m,p}$ . Como  $Lv_n \rightarrow 0$  em  $L^p$ , concluímos da Proposição 3.1 que  $Lv = 0$  e daí  $v = 0$ . Entretanto, usando (3) novamente

$$1 \leq c (\|Lv_n\|_{0,p} + \|v_n\|_{0,p})$$

de onde se segue que  $\|v\|_{0,p} \geq c^{-1} > 0$ . Absurdo. Q.E.D.

$\{B_j(x,D)\}$  é um conjunto normal se  $m_i \neq m_j$  e se

$$\sum_{|\alpha|=m_j} b_{j,\alpha}(x) v^\alpha \neq 0,$$

para  $x \in \Gamma$ . Essa última condição quer dizer que a fronteira  $\Gamma$  é não característica para todos os  $B_j$ .

Adjunto formal. O adjunto formal do operador  $L(x,D)$  em (1) é, por definição:

$$(7) \quad \tilde{L}(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\bar{a}_\alpha(x) \cdot).$$

O problema

$$(8) \quad \tilde{L}v = g \text{ em } \Omega, \quad \tilde{B}_j v = 0 \text{ em } \Gamma, \quad j = 1, \dots, m$$

é o adjunto formal de

$$(9) \quad Lu = f \text{ em } \Omega, \quad B_j u = 0 \text{ em } \Gamma, \quad j = 1, \dots, m$$

se o seguinte ocorre: a relação

$$(L(x,D)u, v) = (u, \tilde{L}(x,D)v)$$

se verifica para todo  $u \in W^{2m,p}(\Omega; \{B_j\})$  se e somente se  $v \in W^{2m,q}(\Omega; \{\tilde{B}_j\})$ . É fácil ver que o adjunto formal de  $L(x,D)$ ,  $\{\partial^j / \partial v^j\}$  é  $\tilde{L}(x,D)$ ,  $\{\partial^j / \partial v^j\}$ .

A determinação do adjunto formal, caso exista, não é um problema algébrico trivial. Entretanto, no caso  $p = 2$ , vale o seguinte resultado, e de agora em diante nos restringimos a esse caso, passando a descrever o trabalho de M. Schechter.

Lema 3.1 (Aronszajn-Milgram). Se  $L(x,D)$  e  $B_j(x,D)$  satisfizerem as condições enunciadas no início desta secção e se  $\{B_j(x,D)\}$  for normal, então  $L(x,D)$ ,  $\{B_j(x,D)\}$  tem um adjunto formal  $\tilde{L}(x,D)$ ,  $\{\tilde{B}_j(x,D)\}$ , onde  $\tilde{B}_j(x,D)$  é um conjunto normal.

Lema 3.2 (Schechter).  $\tilde{L}(x,D)$ ,  $\{\tilde{B}_j(x,D)\}$  do lema anterior satisfazem as condições de Lopatinski-Shapira.

Pode-se provar que o operador  $\tilde{L}: D(\tilde{L}) \subset L^q \rightarrow L^q$ , associado a  $\tilde{L}(x,D)$ ,  $\{\tilde{B}_j(x,D)\}$ , definido como  $L$  acima é tal que  $\tilde{L} = L^*$ , onde  $L: D(L) \subset L^p \rightarrow L^p$  é o operador associado a  $L(x,D)$ ,  $\{B_j(x,D)\}$ .

Desde que  $L$  é fechado e densamente definido, temos por um teorema de Análise Funcional que

$$R(L)^\perp = N(L^*).$$

Daí, e da proposição 3.2 aplicada a  $\tilde{L}$ ,  $\{\tilde{B}_j\}$  se segue que

Proposição 3.4.  $R(L)$  tem codimensão finita.

Juntando as proposições 3.2 e 3.4 concluímos que  $L: D(L) \subset L^p \rightarrow L^p$  é um operador de Fredholm.

Dos argumentos que precederam a proposição 3.4 podemos também concluir que

Proposição 3.5. O problema (9) tem solução  $u \in W^{2m,2}(\Omega)$  para todo  $f \in L^2$  se e só se o problema (8) tem solução única em  $W^{2m,2}(\Omega)$ ,  $v = 0$ .

BIBLIOGRAFIA DO CAPÍTULO 3

- [1] Adams, R. A., "Sobolev Spaces". Academic Press (1975).
- [2] Agmon, S., "Lectures on Elliptic Boundary Value Problems". Van Nostrand-Reinhold Princeton NJ (1965).
- [3] Bers, L. - John, F. - Schechter, M., "Partial Differential Equations". Interscience, New York (1964).
- [4] Friedman, A., "Partial Differential Equations". Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1969).
- [5] Medeiros, L. A. - Rivera, P., "Iniciação aos espaços de Sobolev". Publicação do Inst. Mat. da Univ. Fed. do Rio de Janeiro (1976).
- [6] Trêves, F., "Basic Linear Partial Differential Equations". Academic Press (1975).
- [7] Yosida, K., "Functional Analysis". Springer-Verlag. 4a. edição (1974).

CAPÍTULO 4

EQUAÇÕES ELÍPTICAS SEMILINEARES EM ESPAÇOS DE SOBOLEV

SUMÁRIO. Nas secções 4.1 e 4.2 descrevemos parte do trabalho do autor e de J. P. Gossez, [9], [10], [12] sobre a solubilidade do problema de Dirichlet para equações semilineares, onde a parte linear é um operador uniformemente fortemente elíptico de ordem  $2m$ , e a solução é buscada em  $W_0^{m,2}(\Omega)$ . Na secção 4.1 estuda-se o caso em que a parte não linear "permanece longe" dos auto-valores de  $L$ , num sentido que será definido precisamente; isto é, tem-se problemas não ressonantes. A resolução utiliza a teoria de Garding para o problema de Dirichlet em  $W_0^{m,2}$  e, como técnica não linear, o teorema de Leray-Schauder. Na secção 4.2 tratamos um exemplo de um problema ressonante, do tipo estudado por Landesman e Lazer; o fato interessante aqui é que trabalhamos com a não linearidade perto do primeiro auto-valor apenas e isso possibilita tratar não linearidades de crescimento rápido.

Nas secções 4.3 e seguintes desenvolvemos sucintamente a teoria dos operadores monotônicos, no sentido de Browder-Minty, a qual não podia estar ausente em um trabalho como este que visa introduzir técnicas não lineares. Essa teoria, cuja origem data de 1962, com o trabalho inicial de Minty [17], tornou-se uma ferramenta poderosa no tratamento de equações diferenciais parciais não lineares. O seu desenvolvimento nestes últimos 15 anos é algo impressionante. Não comentaremos os resultados nos problemas das equações de evolução e correlata teoria dos semi-grupos não lineares; limitar-nos-emos, no espírito do presente texto, a dar alguns exemplos na teoria das equações elípticas. As secções 4.3 a

4.8 dão a teoria abstrata dos operadores monotônicos e a secção 4.9 trata das aplicações. Omitimos algumas demonstrações, remetendo o leitor aos trabalhos de Brézis [1], [2], [3]. A nosso ver os resultados de Brézis-Haraux [4] na secção 4.8 são de grande interesse e de muitas implicações no tratamento de problemas de contorno para equações elípticas não lineares. Os exemplos da secção 4.9 não pretendem ser as situações mais gerais de aplicação. Em verdade, eles são dos mais simples e visam apenas ilustrar toda a técnica monotônica. Resultados mais gerais têm aparecido recentemente. Uma observação final é que as técnicas monotônicas, ao trabalhar com operadores multivalentes, permite tratar problemas de contorno, cujas condições de fronteira são dadas por certas inequações.



4.1. PROBLEMAS NÃO RESSONANTES

Seja  $\Omega$  um domínio limitado de classe  $C^{2m}$  e  $L$  um operador fortemente uniformemente elíptico, cf. (3) da secção 3.2, com coeficientes  $a_{\alpha\beta} \in C^{|\beta|}(\bar{\Omega})$ . Supomos que  $L$  seja auto-adjunto com as condições de Dirichlet, isto é,  $(L\phi, \psi) = (\phi, L\psi)$  para  $\phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ , o que dá no mesmo em dizer que  $a[\phi, \psi] = a[\psi, \phi]$ , cf. secção 3.2. Logo os auto-valores de  $L$  são reais e formam uma sequência

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lambda_n \rightarrow +\infty.$$

Nosso propósito é estudar o problema de Dirichlet

(1)  $Lu = f(x, u)$  em  $\Omega$

(2)  $\partial^j u / \partial \nu^j = 0$  em  $\Gamma$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$

onde  $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, que não interage com os auto-valores. Mais precisamente há dois casos a considerar:

(I) não linearidade entre dois auto-valores consecutivos

$$\lambda_n < \lambda_{n+1}:$$

(3)  $\lambda_n < \eta_n \leq \limsup_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq \eta_{n+1} < \lambda_{n+1}$

(II) não linearidade abaixo do primeiro auto-valor:

(4)  $\limsup_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq \eta_1 < \lambda_1.$

Observação. É possível tratar casos de não linearidade f

dependendo das derivadas de  $u$  até ordem  $2m - 1$ ; cf. o artigo do autor [10].

Teorema 4.1. Nas hipóteses acima sobre  $L$  e  $\Omega$ , e supondo (3), o problema de Dirichlet (1)-(2) tem uma solução  $u \in W^{2m,2} \cap W_0^{m,2}$ , isto é,

$$(5) \quad a[u, \phi] = (f(x, u), \phi), \quad \forall \phi \in W_0^{m,2}.$$

Demonstração. Em vista do teorema de regularidade basta mostrar que (5) tem uma solução  $u \in W_0^{m,2}$ . Seja  $\lambda = (\lambda_n + \lambda_{n+1})/2$ . O problema (5) é equivalente a

$$(6) \quad a[u, \phi] - \lambda(u, \phi) = (f(x, u) - \lambda u, \phi), \quad \forall \phi \in W_0^{m,2}.$$

Como 0 não é um auto-valor de  $L - \lambda$ , usamos o operador solução  $T$ , cf. equação (17) da secção 3.2 e observações que a precedem, para dizer que (6) é equivalente a

$$(7) \quad u = TNu, \quad u \in L^2$$

onde  $(Nu)(x) = f(x, u(x)) - \lambda u(x)$ .  $N$  é um operador (não linear) limitado e contínuo de  $L^2$  em  $L^2$ , o que se segue da desigualdade (8) abaixo.  $T$  é um operador linear compacto em  $L^2$ . (Cf. observações feitas sobre o operador de Niemytskii no capítulo 2). Logo, a existência de solução de (7) pode ser obtida do teorema do ponto fixo de Schauder. Usando a continuidade de  $f$  e a hipótese (3) podemos concluir que

$$(8) \quad |f(x, s) - \lambda s| \leq \gamma s + b(x)$$

onde  $b \in C^0(\bar{\Omega})$  e  $0 < \gamma < (\lambda_{n+1} - \lambda_n)/2$  (Nota: obviamente a continuidade de  $f$  pode ser substituída pelas condições de

Carathéodory, desde que se suponha que para qualquer  $r > 0$ ,  $|f(x,s)| < \alpha_r(x) \in L^2$  para  $|s| \leq r$ . De (8) obtemos

$$\|Nu\|_{L^2} \leq \gamma \|u\|_{L^2} + \|b\|_{L^2}.$$

Logo

$$\|TNu\|_{L^2} \leq \gamma \|T\| \|u\|_{L^2} + \|T\| \|b\|_{L^2}$$

e da desigualdade (17) concluímos que  $\gamma \|T\| < 1$ . Logo, existe uma bola  $B_R$  tal que  $TN(B_R) \subset B_R$ . Schauder termina. Q.E.D.

No caso da não linearidade abaixo do primeiro autovalor, em que se assume (4), podemos concluir que

$$(9) \quad f(x,s) \leq \eta s + \beta(x), \quad \forall x \in \Omega, s > 0$$

e

$$(10) \quad f(x,s) \geq \eta s - \beta(x), \quad \forall x \in \Omega, s < 0$$

onde  $\eta_1 < \eta < \lambda_1$  e  $0 \leq \beta(x) \in L^2$ . Observe que as desigualdades (9) e (10) dão apenas um controle unilateral no crescimento de  $f$ ; assim, quando  $s \rightarrow +\infty$ ,  $f(x,s)$  poderia ir para  $-\infty$  exponencialmente. Isso, por um lado, é excelente pois nos possibilita tratar problemas não lineares com descontinuidades de crescimento rápido. Por outro lado, torna a resolução do problema bem mais difícil do que no caso do teorema 4.1, pois agora o operador de Niemytskii não é mais bem definido em todo o  $L^2$ . Esse problema foi resolvido por J. P. Gossez e o autor [12] e temos o seguinte resultado, que é um caso especial daquele tratado por eles.

Teorema 4.2. Nas hipóteses sobre  $L$  e  $\Omega$  acima e supondo (4),

o problema de Dirichlet tem solução  $u \in W_0^{m,2}$  tal que  
 $f(x, u(x)) \in L^1(\Omega)$ .

Demonstração. Cf. artigo de Gossez e do autor [12] ou Trabalhos de Matemática nº 114 (Universidade de Brasília, 1976).  
A idéia básica consiste em aproximar o problema em pauta por problemas

$$\begin{aligned} Lu_n &= f_n(x, u_n) \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial^j u_n}{\partial \nu^j} &= 0 \text{ em } \Gamma, \quad j = 0, \dots, m-1 \end{aligned}$$

onde

$$f_n(x, s) = \begin{cases} f(x, s) & \text{se } |s| \leq n. \\ f(x, n) & \text{se } s \geq n \\ f(x, -n) & \text{se } s \leq -n. \end{cases}$$

Observação. Esse teorema se aplica aos problemas

$$-\Delta u + e^u = f \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma$$

$$-\Delta u + \operatorname{sen} u = f \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma$$

$$-\Delta u + (\operatorname{sen} u)^+ e^u = f \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma$$

$$-\Delta u + u^3 = f \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \Gamma$$

#### 4.2. UM PROBLEMA RESSONANTE

Nesta secção apresentamos um exemplo simples. Casos

mais gerais podem ser vistos no mencionado artigo de Gossez e do autor. Esses resultados são conhecidos como do tipo de Landesman-Lazer. Uma extensa bibliografia tem sido desenvolvida recentemente por vários matemáticos, entre eles, Ambrosetti, Berger, Brézis, Cesari, Fučík, Hess, Gupta, Mancini, Nirenberg e Prodi.

Sejam  $\Omega$  um domínio limitado e  $L$  um operador fortemente uniformemente elíptico com coeficientes  $a_{\alpha\beta} \in C^0(\bar{\Omega})$  se  $|\alpha| = |\beta| = m$  e  $a_{\alpha\beta} \in L^\infty$  para os demais. Suponha que o problema de Dirichlet  $L, \{\partial^j / \partial v^j\}$  seja auto-adjunto; e  $\lambda_1$  o primeiro auto-valor. Propomos-nos a discutir o problema semi linear

$$(1) \quad Lu = f(x, u) \text{ em } \Omega, \quad \partial^j u / \partial v^j = 0 \text{ em } \Gamma, \quad j = 0, \dots, m-1$$

onde  $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua tal que

$$(2) \quad \limsup_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq \lambda_1 \text{ uniformemente em } x.$$

Nessas condições pode-se provar o seguinte resultado

Teorema 4.3. As equações aproximadas

$$Lu_n + \frac{1}{n} u_n = f(x, u_n)$$

têm solução  $u_n \in W_0^{m,2}$  com  $f(x, u_n) \in L^1$  e  $f(x, u_n)u_n \in L^1$ . A-  
lêm disso, ou

(i)  $\|u_n\|_{m,2}$  é uniformemente limitado em  $n$  e então o proble-  
ma (1) tem uma solução  $u \in W_0^{m,2}$  com  $f(x, u) \in L^1$  e  
 $f(x, u)u \in L^1$ , ou

(ii) existe uma subsucessão de  $\|u_n\|_{m,2}$  indo para  $+\infty$ ; desig

ne-a por  $\|u_n\|_{m,2}$  também. Nesse caso, para uma subsuces-  
são,  $v_n = u_n / \|u_n\|_{m,2} \rightarrow v$  em  $W_0^{m,2}$ , onde  $v$  é uma  $\lambda_1$ -auto  
função de  $L$ , e vale a desigualdade

$$(3) \quad \int_{\Omega} |f(x, u_n) - \lambda_1 u_n| v_n > 0$$

para  $n$  suficientemente grande.

A demonstração desse resultado é bastante técnica e pode ser vista no artigo mencionado de Gossez e do autor. Vamos aplicá-lo ao problema (1) com

$$(4) \quad f(x, u) = \lambda_1 u - g(x)e^u + h(x), \quad g, h \in L^2$$

onde  $g(x) \geq 0$  e  $g > 0$  em um conjunto de medida positiva.

Teorema 4.4. O problema (1) com  $f$  dado em (4) tem solução  
 $u \in W_0^{m,2}$  tal que  $g(x)e^u \in L^1$  se

$$(5) \quad \int_{\Omega} hv < 0$$

para todas as  $\lambda_1$ -auto-funções de  $L$ , tais que  $v \leq 0$  em  $\Omega$ .

Demonstração. Basta mostrar que a desigualdade (3) não pode ocorrer neste caso. Suponha por contradição que ela ocorra:

$$(6) \quad \int_{\Omega} h(x)v_n > \int_{\Omega} g(x)e^{u_n}v_n$$

Passando a subsucessão se necessário podemos admitir que  $v_n \rightarrow v$  a.e. em  $\Omega$ ; tomando limites em (6) vemos que o primeiro membro converge para  $\int_{\Omega} hv$  e a idéia é mostrar que o lim inf do segundo membro é  $\geq 0$ , o que então contradirá (5). Designe por  $I_n$  o referido segundo membro. Então

$$I_n \geq \int_{v_n < 0} g(x) e^{u_n v_n} = \int_{\substack{v_n < 0 \\ v > 0}} + \int_{\substack{v_n < 0 \\ v < 0}} + \int_{\substack{v_n < 0 \\ v = 0}} \equiv I_n^+ + I_n^- + I_n^0.$$

Seja  $\chi_n$  a função característica do conjunto  $v_n < 0$ . Logo

$$I_n^+ \geq \int_{v > 0} g(x) \chi_n v_n$$

e como  $\chi_n \rightarrow 0$  a.e. em  $v > 0$ , obtemos aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue (generalizado) que  $\lim I_n^+ \geq 0$ . Temos também

$$I_n^- = \int_{v < 0} g(x) (e^{u_n} - 1) \chi_n v_n + \int_{v < 0} g(x) \chi_n v_n$$

e aplicando o lema de Fatou na primeira integral, o teorema da convergência dominada na segunda, com a observação que  $\chi_n \rightarrow 1$  a.e. em  $v < 0$ , obtemos  $\liminf I_n^- \geq 0$ . Por último,

$$I_n^0 \geq \int_{v=0} g(x) \chi_n v_n$$

e a integral converge a zero pois  $v_n \rightarrow 0$  a.e. em  $v = 0$ , e basta usar o teorema de Lebesgue. Q.E.D.

#### 4.3. OPERADORES MONOTÔNICOS

Até agora, no presente texto, resolvemos uma série de problemas não lineares usando essencialmente duas técnicas, contratividade e compacidade, representadas, respectivamente, pelo princípio da contração de Banach e pelo teorema do ponto fixo de Schauder e suas variantes. Historicamen

te, parece-nos que até a década de 60 os problemas de equações diferenciais não lineares eram atacados por esses métodos ou modificações dos mesmos.

Em 1962, G. Minty [17] demonstrou um teorema de sobrejetividade para operadores não lineares de um tipo que é hoje conhecido como monotônico.

Teorema de Minty. Sejam  $H$  um espaço de Hilbert real e  $T: H \rightarrow H$  um operador (não necessariamente linear) contínuo e tal que existe uma constante  $\alpha > 0$  para a qual

$$(1) \quad (Tx - Ty, x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2, \quad x, y \in H.$$

Então,  $T$  é um homeomorfismo.

É verdade que operadores com a propriedade (1) são bastante naturais, e já haviam sido considerados anteriormente por Vainberg e Kačurovskii e por Zarantonello. Entretanto, esses autores faziam a hipótese adicional que  $T$  fosse lipschitziana, o que possibilita demonstrar o resultado usando o princípio da contração. Portanto, nada de novo no que diz respeito a novas técnicas. O resultado de Zarantonello é um pouco mais geral do que o enunciado abaixo, mas não muito.

Teorema de Zarantonello. Sejam  $H$  um espaço de Hilbert real e  $T: H \rightarrow H$  um operador lipschitziano, isto é,

$$(2) \quad \|Tx - Ty\| \leq K \|x - y\|, \quad x, y \in H$$

onde  $K > 0$  é uma constante. Suponha também que  $T$  satisfaz  
(1). Então  $T$  é um homeomorfismo.



Demonstração. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (1) obtem-se  $\|Tx - Ty\| \geq \alpha \|x - y\|$  o que mostra que  $T$  é injetiva e  $T^{-1}$  é contínua em  $R(T)$ . Resta, pois, mostrar que  $T$  é sobrejetiva, i.e., para cada  $y \in H$ , a equação  $Tx = y$  tem solução  $x$ , ou equivalentemente, a equação

$$x = x - \lambda(Tx - y)$$

tem solução, onde  $\lambda \neq 0$ . A idéia agora é escolher  $\lambda$  de modo que o operador  $Sx = x - \lambda(Tx - y)$  seja uma contração. Vejamos. Tem-se

$$\begin{aligned} \|Sx_1 - Sx_2\|^2 &= \|x_1 - x_2 - \lambda(Tx_1 - Tx_2)\|^2 \\ &= \|x_1 - x_2\|^2 + \lambda^2 \|Tx_1 - Tx_2\|^2 - 2\lambda(Tx_1 - Tx_2, x_1 - x_2) \end{aligned}$$

e usando (1) e (2), com  $\lambda > 0$ :

$$\|Sx_1 - Sx_2\|^2 \leq (1 + K^2\lambda^2 - 2\alpha\lambda) \|x_1 - x_2\|^2.$$

Logo, basta tomar  $0 < \lambda < 2\alpha/K^2$  para que  $S$  seja uma contração. Q.E.D.

Operadores satisfazendo a condição (1) são chamados fortemente monotônicos. A demonstração do teorema dada por Minty é bastante interessante e imaginativa, explorando propriedades geométricas dos espaços de Hilbert, como por exemplo o lema de Kirsbraun.

Lema de Kirsbraun. Se  $B(x_i, r_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são bolas num espaço de Hilbert, tais que  $\bigcap_{i=1}^n B(x_i, r_i) \neq \emptyset$ , e se  $B(y_i, r_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são outras bolas tais que  $\|y_i - y_j\| \leq \|x_i - x_j\|$ , para todo  $i, j$ , então  $\bigcap_{i=1}^n B(y_i, r_i) \neq \emptyset$ .

Esse resultado é, em geral, falso em espaços de Banach. Assim a extensão do teorema de Minty para espaços de Banach teve que seguir outros caminhos. O teorema abaixo foi demonstrado independentemente por F. E. Browder e Minty. Antes, porém, fixemos as nomenclaturas.

Sejam  $X$  um espaço de Banach real e  $X^*$  seu dual. Um operador (não necessariamente linear)  $T: X \rightarrow X^*$  é monotônico se

$$(Tx - Ty, x - y) \geq 0, \quad x, y \in X,$$

onde usamos  $(x^*, x)$  para designar a ação do funcional linear contínuo  $x^*$  no elemento  $x \in X$ . Um operador  $T: X \rightarrow X^*$  é demi contínuo se ele for contínuo da topologia forte de  $X$  (i. e. a topologia da norma) na topologia fraca\* de  $X^*$ . Observe que, no caso de  $X$  ser reflexivo, essa topologia coincide com a topologia fraca, e se  $T$  for contínuo nas normas de  $X$  e  $X^*$ , então  $T$  é demicontínuo. Um operador  $T: X \rightarrow X^*$  é coercivo se  $(Tx, x) / \|x\| \rightarrow +\infty$  quando  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

Teorema de Browder-Minty (cf., por exemplo, [6]). Sejam  $X$  um espaço de Banach reflexivo e  $T: X \rightarrow X^*$  um operador monotônico, demicontínuo e coercivo. Então,  $R(T) = X^*$ .

Demonstração. Basta mostrar que  $0 \in R(T)$ , pois se  $y \neq 0$  o operador  $T_y = T - y$  satisfaz todas as hipóteses do teorema e  $0 \in R(T_y) \iff y \in R(T)$ . 1a. Parte: o teorema é válido para  $X$  de dimensão finita. Nesse caso, pode-se supor, sem perda de generalidade, que  $X = X^* = \mathbb{R}^n$ . Tomemos  $r > 0$  tal que  $(Tx, x) > 0$  para  $\|x\| = r$ , e mostremos que o operador  $\text{id} - T$  tem um ponto fixo  $x_0$  na bola  $B(0, r)$ , o que implica que  $Tx_0 = 0$ . A idéia é utilizar o seguinte corolário do teorema do ponto fixo de Brouwer: "Uma aplicação contínua  $S: B(0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem

um ponto fixo se  $Sx \neq \lambda x$ , para todos  $\|x\| = r$  e  $\lambda \geq 1$ ." (Cf. seção 2 do capítulo 2). Suponha, por contradição, que esta condição não esteja satisfeita: existe  $\|x\| = r$  e  $\lambda \geq 1$  tal que  $Sx = \lambda x$ ; então

$$(x, x) \leq (\lambda x, x) = (Sx, x) = (x, x) - (Tx, x) < (x, x).$$

Absurdo!

2a. Parte. Caso geral. Seja  $F$  a coleção de todos os subespaços  $F$  de dimensão finita de  $X$ , seja  $j_F: F \rightarrow X$  o operador de inclusão e  $j_F^*: X^* \rightarrow F^*$ , seu adjunto. Defina  $T_F = j_F^* \circ T \circ j_F: F \rightarrow F^*$ . Claramente  $T_F$  satisfaz todas as hipóteses do teorema; logo pela 1a. parte, existe  $x_F \in F$  tal que  $T_F x_F = 0$ . Da coercividade se segue que existe  $M > 0$  tal que  $\|x_F\| \leq M$  para todo  $F \in \mathcal{F}$ . Agora, para cada  $F_0 \in \mathcal{F}$  defina  $V_{F_0} =$  fecho fraco de  $\bigcup \{x_F, F \supset F_0\}$ . Como cada um deles é compacto, pois  $X$  é reflexivo, e como a coleção  $\{V_{F_0} : F_0 \in \mathcal{F}\}$  tem a propriedade da interseção finita, vê-se que existe  $x_0 \in \bigcap \{V_{F_0} : F_0 \in \mathcal{F}\}$ . A idéia agora é mostrar que  $Tx_0 = 0$ . Dado  $y \in X$  arbitrário, tome  $F_0 \ni y$ ; então, para  $F \supset F_0$  tem-se  $(Ty - Tx_F, y - x_F) \geq 0$ , e daí  $(Ty, y - x_F) \geq 0$ . Logo  $(Ty, y - x_0) \geq 0$  para todo  $y \in X$ . Tomando, agora,  $y = x_0 + tz$ , com  $z \in X$  arbitrário e  $t > 0$ , obtemos  $(T(x_0 + tz), z) \geq 0$ . Fazendo  $t \rightarrow 0$ , tem-se  $(Tx_0, z) \geq 0$ , de onde se segue  $Tx_0 = 0$ . Q.E.D.

O teorema de Browder-Minty tem um sentido geométrico simples no caso de  $X = \mathbb{R}$ ; ele simplesmente diz que se uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e monótona crescente é tal que  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  de acordo com  $x \rightarrow \pm\infty$ , então  $f$  é sobrejetiva. Nesse caso, isso decorre do teorema do valor intermediário.

As primeiras aplicações de operadores monotônicos ocorreram na teoria das equações integrais não lineares. Nesse sentido destaca-se o trabalho de Dolph-Minty. Note-se também que os estudos anteriores de Vainberg-Kačurovskii e Zarantonello também visavam as chamadas equações integrais de Hammerstein

$$(3) \quad u(x) + \int_{\Omega} k(x,y) f(y, u(y)) dy = v(x),$$

onde  $\Omega$  é um domínio em  $R^n$ ,  $k: \Omega \times \Omega \rightarrow R$  é um núcleo que define um operador linear

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} k(x,y) u(y) dy$$

e  $f: \Omega \times R \rightarrow R$  é uma função satisfazendo as condições de Carathéodory, que define um operador de Niemytskii

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)).$$

Com essas notações a equação integral é equivalente à equação funcional  $u + KFu = v$ . Hipóteses devem ser feitas sobre  $K$  e  $f$  para que se possa ter os operadores definidos entre certos espaços e com boas propriedades que assegurem a solubilidade de (3). Vamos dar uma ilustração do uso dos operadores monotônicos para resolver um certo tipo de equações de Hammerstein; uma referência contendo bastante informação sob o assunto é o artigo de F. E. Browder [7].

Apesar das muitas e interessantes aplicações da teoria monotônica às equações integrais, a grande importância do teorema de Browder-Minty é suas aplicações diretamente às equações diferenciais parciais não lineares, as quais foram imediatamente exploradas por Browder, Leray, Lions e outros. Nos últimos quinze anos a literatura sobre técnicas

monotônicas aplicadas às equações diferenciais tem crescido consideravelmente, e não temos a pretensão de descrever aqui esse desenvolvimento.

Visando as aplicações nas próximas seções vamos desenvolver mais a teoria dos operadores monotônicos em espaços de Hilbert. Há uma excelente referência, onde o leitor interessado poderá ver mais detalhes, H. Brézis [1], [2], [3]. Ficou claro desde o início da teoria monotônica que se deveria considerar operadores multivalentes. A aplicação de dualidade  $J: X \rightarrow X^*$ , que a cada  $x \in X$  associa  $x^* \in X^*$  tal que  $\|x^*\| = \|x\|$  e  $(x^*, x) = \|x\|^2$  é uma aplicação multivalente, pois tal  $x^*$ , que sempre existe como consequência do teorema de Hahn-Banach, não é necessariamente único; aliás  $J$  só é univalente se e só se  $X^*$  for estritamente convexo. Por outro lado, os inversos de operadores monotônicos não são univalentes e nem definidos em todo o espaço. Apesar disso esses inversos tem uma certa característica de monotonicidade; para você se convencer disso, considere  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monotônica com discontinuidades e com trechos onde ela é constante. Toda essa argumentação para justificar, de imediato, as definições abaixo. Argumentos mais convincentes virão nas aplicações futuras.

Definições. Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Um operador multivalente  $T: H \rightarrow H$ , não necessariamente definido em todo  $H$  é monotônico se seu gráfico, que designamos também pela letra  $T$ , i.e.,  $T = \{[x, u] \in H \times H: u \in Tx\}$  for monotônico, o que quer dizer que

$$(u_1 - u_2, x_1 - x_2) \geq 0, [x_1, u_1], [x_2, u_2] \in T.$$

O conjunto  $D(T) = \{x \in H: Tx \neq \emptyset\}$  é o domínio de  $T$ . Se o operador monotônico  $T$  é tal que seu gráfico não é subconjun

to próprio de nenhum outro gráfico monotônico, então  $T$  é maximal monotônico.

Proposição 4.1. Seja  $T: H \rightarrow H$  um operador monotônico. Então,  
a aplicação  $I + \lambda T$ , para  $\lambda > 0$ , é injetiva, i.e.

$(I + \lambda T)x \cap (I + \lambda T)y = \emptyset$ , para  $x \neq y$ . E além disso  $(I + \lambda T)^{-1}$   
é uma aplicação contrativa de  $R(I + \lambda T)$  em  $H$ . (Estamos uti-  
lizando a terminologia contrativa para uma aplicação  
 $S: C \subset H \rightarrow H$  tal que  $\|Sx - Sy\| \leq \|x - y\|$ , a qual é também  
conhecida como aplicação não expansiva).

Demonstração. Para  $u \in Tx$  e  $v \in Ty$  tem-se, pela monotonici-  
dade de  $T$ :

$$(6) \quad (x - y + \lambda(u - v), x - y) \geq \|x - y\|^2,$$

de onde se segue que  $\|x - y\| \leq \|x - y + \lambda(u - v)\|$ , o que im-  
plica as conclusões da proposição. Q.E.D.

Teorema 4.5 (Minty). Seja  $T$  um operador monotônico em  $H$ . En-  
tão  $T$  é maximal monotônico se e só se  $R(I + \lambda T) = H$ , para  
todo  $\lambda > 0$ .

Demonstração. Suponha que  $R(I + T) = H$ , e provemos que  $T$  é  
maximal monotônico. Seja  $[y, v] \in H \times H$  monotonicamente rela-  
cionado com  $T$ , i.e.,

$$(7) \quad (v - u, y - x) \geq 0, \quad \forall [x, u] \in T$$

e provemos que  $[y, v] \in T$ . Existe  $z \in H$  tal que  $v + y \in z + Tz$ .  
Logo  $[z, v + y - z] \in T$ , e use-o em (7)

$$(v - (v + y - z), y - z) \geq 0 \implies y = z,$$

e assim  $[y, v] \in T$ . Omitimos a demonstração de que  $T$  maximal monotônica implica  $R(I + \lambda T) = H$ , a qual pode ser vista no trabalho mencionado de Brézis.

Observação. Segue-se do teorema acima que se  $R(I + \lambda T) = H$  para algum  $\lambda > 0$ , então  $R(I + \lambda T) = H$  para todo  $\lambda > 0$ .

Sobre o domínio  $D(T)$  de um operador maximal monotônico  $T$ . Não é verdade que  $D(T)$  seja convexo. Por exemplo (Damlamian): Em  $H = L^2(0, \infty)$  o operador  $Tu = -u''$ , cujo domínio é

$$D(T) = \{u \in L^2 : u', u'' \in L^2, u'(0) = u^3(0)\}.$$

Entretanto vale o seguinte resultado

Teorema 4.6. Para  $T$  maximal monotônico,  $\overline{D(T)}$  é convexo, e, para todo  $x \in H$ , tem-se

$$(8) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} J_\lambda x = \text{proj}_{\overline{D(A)}} x,$$

onde  $J_\lambda = (I + \lambda T)^{-1}$ ,  $\lambda > 0$ , é denominado o resolvente de  $T$ .

Demonstração. 1)  $x \in D(T) \implies J_\lambda x \rightarrow x$ . De fato

$$\|J_\lambda x - x\| = \|J_\lambda x - J_\lambda(I + \lambda T)x\| \leq |\lambda| \|Tx\| \rightarrow 0.$$

2) Se  $x \notin D(T)$ , então  $J_\lambda x$  é limitado. De fato, pondo  $u_\lambda = J_\lambda x$  tem-se  $x \in u_\lambda + \lambda Tu_\lambda$  ou seja  $[u_\lambda, (x - u_\lambda)\lambda^{-1}] \in T$ . Logo

$$(u_\lambda - T0, \frac{x - u_\lambda}{\lambda}) \geq 0$$

de onde se segue  $\|u_\lambda\|^2 \leq c\|u_\lambda\| + c \implies \|u_\lambda\| \leq c$ . Tome, a seguir uma subsucessão,  $J_\lambda x \rightharpoonup z$ , onde  $z$  deve pertencer a

$\overline{\text{co}} D(T)$ . Como

$$(9) \quad (J_{\lambda}x - J_{\lambda}y, x - y) \geq \|J_{\lambda}x - J_{\lambda}y\|^2$$

obtem-se

$$(10) \quad \|J_{\lambda}x\|^2 \leq (J_{\lambda}x - J_{\lambda}y, x - y) + 2(J_{\lambda}x, J_{\lambda}y) - \|J_{\lambda}y\|^2.$$

Agora tomando  $y \in D(T)$  tem-se passando ao limite em (9)

$$(z - y, x - y) \geq \|z - y\|^2 \implies (z - y, z - x) \leq 0$$

para todo  $y \in D(T)$  e conseqüentemente para todo  $y \in \overline{\text{co}} D(T)$ . Logo  $z = \text{proj}_{\overline{\text{co}} D(T)} x$ . Por outro lado passando ao limite em (10)

$$\begin{aligned} \limsup \|J_{\lambda}x\|^2 &\leq (z - y, x - y) + 2(z, y) - \|y\|^2 \\ &= (z, x) + (z - x, y) \end{aligned}$$

que é verdade para todo  $y \in D(T)$  e portanto para todo  $y \in \overline{\text{co}} D(T)$ . Tome, então,  $y = z$  e obtenha  $\limsup \|J_{\lambda}x\|^2 \leq \|z\|^2$ , o que implica que  $J_{\lambda}x \rightarrow z$ . Finalmente, para qualquer  $x \in \overline{\text{co}} D(T)$ , tem-se pelo exposto, que  $J_{\lambda}x \rightarrow x$ , e como  $J_{\lambda}x \in D(T)$ , obtemos que  $x \in \overline{D(T)}$ . Logo  $\overline{D(T)} = \overline{\text{co}} D(T)$ , o que conclui a demonstração. Q.E.D.



#### 4.4. RELACIONAMENTO ENTRE OPERADORES CONTRATIVOS E MONOTÔNICOS.

Um operador  $S: D \rightarrow X$ , onde  $D$  é um subconjunto de um espaço de Banach  $X$  é contrativo se  $\|Sx - Sy\| \leq \|x - y\|$ , para todos  $x, y \in D$ . Um maior interesse nesses operadores e em teoremas de ponto fixo para eles surgiu quando se verificou seu íntimo relacionamento com os operadores monotônicos. Observe que se  $S: D \rightarrow H$  é contrativo, então  $I \pm S$  é monotônico. Em suas pesquisas sobre o problema de valor inicial para o problema de Cauchy

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0$$

em espaços de Hilbert, Browder descobriu o seguinte resultado.

Teorema do ponto fixo de Browder. Seja  $S: B_r \rightarrow B_r$  uma aplicação contrativa da bola  $B_r$  de raio  $r$  centrada na origem de um espaço de Hilbert nela própria. Então  $S$  tem um ponto fixo.

Demonstração. Seja  $0 < \lambda_n < 1$ . Pelo teorema do ponto fixo de Banach existe um único  $x_n \in B_r$  tal que  $x_n = \lambda_n Sx_n$ . Tem-se

$$\|x_n - Sx_n\| = |\lambda_n - 1| \|Sx_n\| \leq (1 - \lambda_n)r.$$

Logo, passando para uma sucessão, podemos admitir que existe  $x \in B_r$  tal que

$$x_n \rightarrow x \text{ e } (I - S)x_n \rightarrow 0.$$

A aplicação  $S$  pode ser estendida para todo  $H$ , usando a retração radial

$$Rx = \begin{cases} x & , \text{ se } \|x\| \leq r \\ rx/|x| & , \text{ se } \|x\| > r \end{cases}$$

tomando-se a extensão  $\tilde{S}$  como  $S$  o  $R$ . É claro que  $\tilde{S}$  é também contrativa, e vamos manter a notação  $S$  para essa extensão, ao invés de  $\tilde{S}$ . Como  $I - S$  é monotônica, temos

$$((I - S)y - (I - S)x_n, y - x_n) \geq 0, \quad \forall y \in H.$$

Passando ao limite

$$((I - S)y, y - x) \geq 0, \quad \forall y \in H.$$

Tome  $y = x + tz$ , onde  $t > 0$  e  $z \in H$  é arbitrário. Logo,

$$((I - S)(x + tz), z) \geq 0$$

e passando ao limite quando  $t \rightarrow 0$ , temos  $((I - S)x, z) \geq 0$  para todo  $z \in H$ . Portanto  $(I - S)x = 0$ , ou seja,  $x$  é um ponto fixo de  $S$ . Q.E.D.

Simultaneamente, mas em trabalhos independentes, o teorema acima foi demonstrado por Gùhde [13] no caso de espaços de Banach uniformemente convexos, e por Kirk [15] no caso de espaços de Banach reflexivos satisfazendo uma propriedade geométrica, chamada estrutura normal, e que fora introduzida, anos antes, por Brodskii e Milman no estudo de isometrias. O teorema de Kirk é o mais geral. É fácil dar exemplos de espaços de Banach não reflexivos onde o teorema

é falso. Entretanto, no nosso entender, é um problema aberto se o teorema é verdadeiro na classe de todos os espaços reflexivos. Observe-se que o fato da aplicação estar definida em uma bola  $B_r$  não é essencial; o teorema é válido se  $B_r$  for substituída por um conjunto convexo fechado limitado.

Corolário 4.1. Seja  $S: B_r \rightarrow H$  uma aplicação contrativa definida em uma bola  $B_r$  de raio  $r$  centrada na origem de um espaço de Hilbert. Suponha que

$$(1) \quad Sx \neq \lambda x, \quad \forall \lambda \geq 1 \quad \text{e} \quad \|x\| = r.$$

Então  $S$  tem um ponto fixo.

Demonstração. Pelo teorema anterior a aplicação  $R$  o  $S$  tem um ponto fixo. Usando um argumento semelhante ao utilizado na demonstração do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder, concluimos que  $S$  tem ponto fixo. Q.E.D.

Vamos agora utilizar esse resultado para mostrar o seguinte

Teorema 4.7. Seja  $T: H \rightarrow H$  um operador maximal monotônico (não necessariamente definido em todo  $H$  e podendo ser multivalente). Suponha que  $T$  é coercivo, isto é,

$$\frac{(u, x)}{\|x\|} \rightarrow +\infty, \quad \text{quando} \quad \|x\| \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad u \in Tx.$$

Então  $R(T) = H$ .

Demonstração. Basta mostrar que  $0 \in R(T)$ , isto é, existe  $x \in H$  tal que  $0 \in Tx$ . Isso é equivalente a mostrar que a aplicação contrativa  $(I + T)^{-1}: H \rightarrow H$  tem um ponto fixo. Afirmamos que existe uma bola  $B_r$ , na fronteira da qual

$(I + T)^{-1}$  satisfaz a condição (1) acima; isso feito a demonstração estará concluída. Suponha, por contradição, que isso não seja verdade: existe  $\|x_n\| \rightarrow \infty$  tal que  $(I+T)^{-1} x_n = \lambda_n x_n$ , com  $\lambda_n \geq 1$ . Então  $x_n \in (I + T)(\lambda_n x_n)$ , ou seja  $(1 - \lambda_n)x_n \in T(\lambda_n x_n)$ . Pela coercividade temos que

$$\frac{((1 - \lambda_n)x_n, \lambda_n x_n)}{\|\lambda_n x_n\|} \rightarrow +\infty.$$

Mas isso é impossível porque essa expressão é igual a  $(1 - \lambda_n)\|x_n\| \leq 0$ . Q.E.D.

Observações:

- 1) Um resultado mais geral de sobrejetividade será demonstrado mais adiante.
- 2) Outra demonstração do teorema de Browder-Minty no caso de espaços de Hilbert: mostre que todo operador monotônico hemicontínuo  $T: H \rightarrow H$  definido em todo  $H$  é maximal monotônico, e a seguir use o teorema 4.7.

4.5. ALGUNS EXEMPLOS DE OPERADORES MONOTÔNICOS

(I) Seja  $C$  um subconjunto convexo fechado de um espaço de Hilbert e defina a aplicação  $\text{proj}_C: H \rightarrow C$  como sendo aquela que a cada ponto  $x \in H$  associa o ponto de  $C$  mais próximo de  $x$ . É um fato conhecido da teoria dos espaços de Hilbert que

$$(1) \quad (x - \text{proj}_C x, u - \text{proj}_C x) \leq 0, \quad \forall u \in C.$$

Se  $y$  for um outro ponto de  $H$  tem-se

$$(2) \quad (y - \text{proj}_C y, v - \text{proj}_C y) \leq 0, \quad \forall v \in C.$$

Tomando  $u = \text{proj}_C y$  em (1) e  $v = \text{proj}_C x$  em (2) e somando obtém-se após alguns cálculos

$$(3) \quad (\text{proj}_C y - \text{proj}_C x, y - x) \geq \|\text{proj}_C y - \text{proj}_C x\|^2$$

o que mostra que  $\text{proj}_C$  é monotônica. Observe que (3) também implica que  $\text{proj}_C$  é contrativa.

(II) Seja  $\phi: H \rightarrow (-\infty, +\infty]$  uma função convexa, fracamente semicontínua inferiormente (i.e.  $x_n \rightarrow x \implies \phi(x) \leq \liminf \phi(x_n)$ ) e própria (i.e.  $\phi \not\equiv +\infty$ ). Define-se o domínio essencial de  $\phi$ , designado por  $D(\phi)$ , como sendo  $D(\phi) = \{x \in H: \phi(x) < +\infty\}$ . A sub-diferencial de  $\phi$  é um operador multivalente em  $H$  assim definido

$$(\partial\phi)(x) = \{u \in H: \phi(y) \geq \phi(x) + (u, y - x), \forall y \in H\}.$$

É claro que  $D(\partial\phi) \subset D(\phi)$ . Observe que se  $\phi: H \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa que é Gâteaux diferenciável, i.e., para cada  $x \in H$  existe  $u \in H$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(x + th) - \phi(x)}{t} = (u, h), \quad \forall h \in H,$$

onde  $u$  é a diferencial de Gâteaux da  $\phi$  no ponto  $x$ , designada por  $\phi'(x)$ , então,  $\phi' = \partial\phi$ . Portanto a subdiferencial é uma generalização da noção de gradiente de  $\phi$ . É fácil ver que  $\partial\phi$  é monotônica.

(III) Seja  $C$  um conjunto convexo fechado em  $H$ , definimos a

função indicadora de C por

$$I_C = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in C \\ +\infty & \text{se } x \notin C. \end{cases}$$

É fácil ver que  $I_C$  é convexa, fracamente semicontínua inferiormente e própria, e que  $\partial I_C$  é um operador monotônico cujo domínio está contido em C, e, de fato, é C.

Proposição 4.2.  $\text{Proj}_C$  e  $\partial\phi$  são maximais monotônicos.

Demonstração. Que  $\text{proj}_C$  é maximal monotônico decorre imediatamente do teorema de Minty, e do teorema 4.5. Para mostrar que  $\partial\phi$  é maximal monotônico, devemos provar que  $u \in x + \partial\phi(x)$  tem solução x para cada  $u \in H$ . Não é difícil mostrar que tal solução x é o mínimo do funcional  $\psi(x) = \phi(x) + \frac{1}{2}\|x-u\|^2$ .

Proposição 4.3. Seja  $\beta$  um gráfico maximal monotônico em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Então, existe uma função  $j: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$  convexa, semicontínua inferiormente e própria tal que  $\partial j = \beta$ , ou seja,  $\beta$  é necessariamente uma subdiferencial.

Exemplos:

$$(I) \quad \beta(s) = \begin{cases} \mathbb{R}, & s = 0 \\ \emptyset & s \neq 0 \end{cases} \quad j(s) = \begin{cases} +\infty, & s \neq 0 \\ 0, & s = 0 \end{cases}$$
$$(II) \quad \beta(s) = \begin{cases} (-\infty, 0], & s = -1 \\ 0, & |s| < 1 \\ [0, +\infty), & s = 1 \\ \emptyset & |s| > 1 \end{cases} \quad j(s) = \begin{cases} 0, & |s| < 1 \\ +\infty, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

$$(III) \quad \beta(s) = \begin{cases} -1 & , s < 0 \\ [-1, 1] & , s = 0 \\ +1 & , s > 0 \end{cases} \quad j(s) = |s|$$

$$(IV) \quad \beta(s) = \begin{cases} (-\infty, 0] & , s = 0 \\ 0 & , s > 0 \\ \emptyset & , s < 0 \end{cases} \quad j(s) = \begin{cases} +\infty & , s < 0 \\ 0 & , s \geq 0 \end{cases}$$

Proposição 4.4. Seja  $\beta$  um gráfico maximal monotônico, então o operador  $B: L^2 \rightarrow L^2$  definido por

$$B = \{[u, v] \in L^2 \times L^2: v(x) \in \beta(u(x)) \text{ a.e.}\}$$

é maximal monotônico. Além disso  $B$  é uma subdiferencial.

Demonstração. Cf. prop. 2.16 de Brézis [2].

O seguinte exemplo de operador maximal monotônico será bastante utilizado nas aplicações, mais adiante. Enuncia-mo-lo como um teorema, cuja demonstração é não trivial.

Teorema 4.8 (Brézis). Seja  $\beta$  um gráfico maximal monotônico em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Então o operador  $-\Delta$  em  $L^2$  com domínio  $D(-\Delta) = \{u \in W^{m,2}(\Omega): -\partial u / \partial \nu \in \beta(u)\}$  é maximal monotônico.

Observação. A condição de fronteira  $-\partial u / \partial \nu \in \beta(u)$  inclui a condição de Dirichlet ( $\beta$  do exemplo (I) acima) a condição de Neumann ( $\beta \equiv 0$ ) e outras condições de fronteira envolvidas das desigualdades. E esse é um fato importante: a teoria monotônica permite tratar problemas para equações elípticas, onde a informação sobre a solução na fronteira é dada por um conjunto de desigualdades. Esse tipo de problema aparece, por exemplo, em termologia, e tem sido estudado por vã

rios autores notadamente Duvaut e Lions.

#### 4.6. SOBREJETIVIDADE DOS OPERADORES MAXIMAIS MONOTÔNICOS

Um operador (multivalente)  $T: H \rightarrow H$  é localmente limitado se todo  $x \in H$  tem uma vizinhança  $V$  tal que  $T(V) = \bigcup_{y \in V} Ty$  é limitado ou vazio. Tem-se a seguinte caracterização de sobrejetividade.

Teorema 4.9. Um operador maximal monotônico é sobrejetivo se e só se  $T^{-1}$  é localmente limitado.

Demonstração.  $T^{-1}$  localmente limitado  $\implies R(T) = H$ . Basta mostrar que  $R(T)$  é fechado e aberto simultaneamente.  $R(T)$  é fechado. De fato, sejam  $u_n \in R(T)$ ,  $u_n \in Tx_n$ , tais que  $u_n \rightarrow u$ . Como  $T^{-1}$  é localmente limitado, segue-se  $\|x_n\|$  limitado, e passando a uma subsucessão  $x_n \rightharpoonup x$ . Temos  $(v-u_n, y-x_n) \geq 0$ , para todo  $[y, v] \in T$ . Passando ao limite:  $(v-u, y-x) \geq 0$ , o que mostra que  $[x, u] \in T$ , i.e.,  $u \in Tx$ .  $R(T)$  é aberto. Seja  $u_0 \in R(T)$ ,  $u_0 \in Tx_0$ , e seja  $B_\eta$  a bola de raio  $\eta$  em torno de  $u_0$  tal que  $T^{-1}(B_\eta)$  é limitado. Tome  $\|h\| < \eta/4$  e mostremos que  $u_0 + h \in R(T)$ . Seja  $x_\varepsilon$  a solução de

$$(1) \quad u_0 + h + \varepsilon x_0 \in \varepsilon x_\varepsilon + Tx_\varepsilon.$$

Então  $[x_\varepsilon, u_0 + h + \varepsilon x_0 - \varepsilon x_\varepsilon] \in T$ . Logo, por monotonicidade

$$(u_0 + h + \varepsilon x_0 - \varepsilon x_\varepsilon - u_0, x_\varepsilon - x_0) \geq 0$$

e daí  $\varepsilon \|x_\varepsilon - x_0\| \leq \|h\|$  ou  $\varepsilon \|x_\varepsilon\| \leq \varepsilon \|x_0\| + \|h\|$ . Portanto, se



$\varepsilon > 0$  for tal que  $\varepsilon \|x_0\| < \eta/4$  obtém-se que  $u_0 + h + \varepsilon x_0 - \varepsilon x_\varepsilon \in B_\eta$  o que implica  $\|x_\varepsilon\|$  limitado, pois  $T^{-1}$  é localmente limitado. Indo para subsucessões, se necessário,  $x_\varepsilon \rightharpoonup \bar{x}$ . Como  $u_0 + h + \varepsilon x_0 - \varepsilon x_\varepsilon \rightarrow u_0 + h$  obtém-se, de modo simples via monotonicidade maximal, que  $u_0 + h \in T\bar{x}$ .  $R(T) = H \implies T^{-1}$  localmente limitado. De fato,  $T$  maximal monotônico implica  $T^{-1}$  maximal monotônico e como  $D(T^{-1}) = H$ , o resultado se segue do teorema abaixo. Q.E.D.

Teorema 4.10. Seja  $T: H \rightarrow H$  um operador maximal monotônico. Então  $T$  é localmente limitado em cada ponto  $x \in \text{int co } D(T)$ .

A demonstração, que a seguir apresentamos, creio ser a mais simples e é devida a Fitzpatrick, Hess e Kato. Ela se baseia no seguinte lema.

Lema 4.1. Seja  $x_n \rightarrow 0$  em  $H$ ,  $\|u_n\| \rightarrow \infty$  e  $\rho > 0$ . Então, existe  $x \in H$ ,  $\|x\| \leq \rho$ , tal que

$$\liminf (u_n, x_n - x) = -\infty.$$

Observação. Se  $x_n = 0$ , a existência de um tal  $x$  seguir-se-ia do princípio da limitação uniforme. De fato, se um tal  $x$  não existisse, então para cada  $x \in H$ , com  $\|x\| \leq \rho$ , teríamos

$$(u_n, -x) \geq c_x, \quad \forall n$$

onde  $c_x$  é uma constante que depende de  $x$ . Isso implica que  $|(u_n, x)| \leq M_x$ , para todo  $n$ , com uma constante dependendo de  $x$ . Portanto, o princípio da limitação uniforme daria  $\|u_n\| \leq M$ , o que é impossível.

Demonstração do lema 4.1. Seja

$$v_n = u_n / \alpha_n, \quad \alpha_n = 1 + |(u_n, x_n)|.$$

Então

$$\|v_n\| = \frac{\|u_n\|}{\alpha_n} \geq \frac{\|u_n\|}{1 + \|u_n\| \|x_n\|} = \frac{1}{\|u_n\|^{-1} + \|x_n\|} \rightarrow +\infty.$$

Pelo princípio da limitação uniforme, cf. observação acima, existe  $\|x\| \leq \rho$  tal que  $(v_n, -x) \rightarrow -\infty$ , para uma subsucessão de  $(v_n)$ . Por outro lado,

$$|(v_n, x_n)| = \frac{|(u_n, x_n)|}{\alpha_n} \leq 1.$$

Logo, para uma subsucessão  $(v_n, x_n - x) \rightarrow -\infty$ , o que implica  $(u_n, x_n - x) \rightarrow -\infty$ . Q.E.D.

Demonstração do teorema 4.10. Seja  $x \in \text{int co } D(T)$  e  $B(x, \rho) \subseteq \overline{\text{co}} D(T)$ . Suponha, por contradição, que existam  $x_n \in B(x, \rho)$ ,  $x_n \rightarrow x$ , tais que para  $u_n \in Tx_n$ ,  $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ . Logo, pelo lema acima, existe  $\|z\| \leq \rho$  tal que

$$\liminf (u_n, x_n - x - z) = -\infty.$$

Como  $x + z \in \text{co } D(T)$ , temos  $x + z = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ , com  $y_i \in D(T)$ ,  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum \lambda_i = 1$ . Usando monotonicidade

$$(u_n, x_n - y_i) \geq (v_i, x_n - y_i), \quad v_i \in Ty_i.$$

Multiplicando por  $\lambda_i$  e somando obtém-se

$$(u_n, x_n - x - z) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i, x_n - y_i).$$

Tomando limite

$$\liminf (u_n, x_n - x - z) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i, x - y_i) > -\infty,$$

contradição! Q.E.D.

Casos especiais do teorema 4.9:

(I)  $D(T)$  limitado  $\implies T^{-1}$  limitado e portanto localmente limitado.

(II)  $T$  coercivo, isto é,

$$(2) \quad \frac{(u, x)}{\|x\|} \rightarrow +\infty, \quad \|x\| \rightarrow \infty$$

onde  $u \in Tx$ . Tem-se que  $T^{-1}$  é localmente limitado. De fato, primeiro observe que (2) implica na existência de uma função  $C_0(r)$ ,  $r > 0$ , tal que  $C(r) \rightarrow +\infty$  quando  $r \rightarrow +\infty$ , a qual permite escrever (2) na forma equivalente

$$(u, x) \geq C(\|x\|) \|x\|$$

e daí  $\|u\| \geq C(\|x\|)$ . Portanto se  $u$  for limitado,  $x$ , tal que  $u \in Tx$ , também deve ser. O teorema 4.9 com a hipótese de coercividade já foi demonstrado antes, cf. teorema 4.7.

4.7. SOMA DE OPERADORES MAXIMAIS MONOTÔNICOS

Em muitas aplicações, as equações a serem resolvidas são da forma  $Tx + Sx \ni f$ . E será importante, pois, visando aplicar o teorema de sobrejetividade da seção anterior saber se  $T + S$  é maximal monotônico. Em geral, a soma de dois operadores maximais monotônicos,  $T$  e  $S$ , não necessita ser

maximal monotônico; basta, por exemplo, que  $D(T) \cap D(S) = \emptyset$ .

Com o objetivo de enunciar condições suficientes para que  $T + S$  seja maximal monotônico, quando  $T$  e  $S$  o são, vamos introduzir as aproximações de Yosida de um operador maximal monotônico:

$$T_\lambda = T(I + \lambda T)^{-1}, \quad \lambda > 0.$$

É fácil ver que

$$T_\lambda = \lambda^{-1} [I - (I + \lambda T)^{-1}]$$

o que mostra que  $T_\lambda$  é monotônica e Lipschitziana definida em todo  $H$  com constante  $1/\lambda$ .

Observação. Se  $T$  for maximal monotônico, então  $Tx$  é um conjunto convexo e fechado, pois

$$Tx = \left[ x_0, u_0 \right]_{\in T} \cap \{u : (u - u_0, x - x_0) \geq 0\}.$$

Definição. A secção principal de um operador maximal monotônico é assim definido

$$T^0 x = \text{proj}_{Tx} 0.$$

Outras propriedades das aproximações de Yosida:

- (1)  $x \in D(T) \implies T_\lambda x \rightarrow T^0 x$ , quando  $\lambda \rightarrow 0$  e  $\|T_\lambda x\| \leq \|T^0 x\|$ .
- (2)  $x \notin D(T) \implies \|T_\lambda x\| \rightarrow +\infty$ , quando  $\lambda \rightarrow 0$ .
- (3) Se  $T = \partial\phi$ , onde  $\phi$  é uma função convexa semicontínua inferiormente própria, então  $T_\lambda = \partial\phi_\lambda$  onde

$$\phi_\lambda(x) = \min_{y \in H} \left\{ \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2 + \phi(y) \right\}$$

é uma função convexa, diferenciável a Frechet e definida para todo  $x \in H$ . (Cf. proposição 2.11 de Brézis [2]).

Lema 4.2. Sejam T e S operadores maximais monotônicos e suponha que S é lipschitziano. Então T + S é maximal monotônico.

Demonstração. Sem perda de generalidade pode-se supor que S seja uma contração de constante  $k < 1$ . Basta mostrar que  $R(I + T + S) = H$ , ou seja, que a equação  $y \in x + Tx + Sx$  tem solução  $x \in H$ . Essa equação é equivalente a  $y - Sx \in x + Tx$  ou  $x = (I + T)^{-1}(y - Sx)$ . A aplicação  $(I + T)^{-1}(y - S \cdot)$  é uma contração de constante  $k$  e logo tem um ponto fixo. Q.E.D.

Teorema 4.11 (Brézis-Crandall-Pazy). Sejam T e S operadores maximais monotônicos. Então, T + S é maximal monotônico se e só se, para cada y, as soluções  $x_\lambda$  da equação  $y \in x_\lambda + Tx_\lambda + S_\lambda x_\lambda$  são tais que  $S_\lambda x_\lambda$  é limitado quando  $\lambda \rightarrow 0$ . Nesse caso,  $x_\lambda \rightarrow x$  onde x é a solução de  $y \in x + Tx + Sx$ .

Demonstração. Cf. Brézis [2].

Corolário 4.2 (Rockafellar). Sejam T e S maximais monotônicos, e suponha que  $[\text{int } D(T)] \cap D(S) \neq \emptyset$ . Então T + S é maximal monotônico.

Demonstração (Brézis-Crandall-Pazy). Sem perda de generalidade, podemos supor que  $0 \in [\text{int } D(T)] \cap D(S)$ . Dado  $y \in H$ , existe pelo lema 4.2 um único  $x_\lambda$  tal que  $y \in x_\lambda + Tx_\lambda + S_\lambda x_\lambda$ . Seja  $y_\lambda \in Tx_\lambda$  tal que

$$(1) \quad y = x_\lambda + y_\lambda + S_\lambda x_\lambda.$$

Daí, usando monotonicidade das aplicações  $T$  e  $S_\lambda$ :

$$(2) \quad \|y\| \|x_\lambda\| \geq (y, x_\lambda) = \|x_\lambda\|^2 + (y_\lambda, x_\lambda) + (S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) \geq \\ \geq \|x_\lambda\|^2 + (T0, x_\lambda) + (S_\lambda 0, x_\lambda) \geq \|x_\lambda\|^{2-c} \|x_\lambda\|$$

o que implica que  $\|x_\lambda\|$  seja limitada quando  $\lambda \rightarrow 0$ . Usamos o fato que  $0 \in D(S)$ , o que implica que  $\|S_\lambda 0\| + \|S^0 0\|$ , quando  $\lambda \rightarrow 0$ . (2) também implica que  $(y_\lambda, x_\lambda)$  é limitada quando  $\lambda \rightarrow 0$ . Agora, seja  $\varepsilon > 0$  tal que a bola  $B(0, \varepsilon)$  é levada por  $T$  em um conjunto limitado; tal  $\varepsilon$  existe em vista do teorema 4.9. Seja  $w_\lambda = \varepsilon y_\lambda / \|y_\lambda\|$ . Então  $z_\lambda \in Tw_\lambda$  é limitado. Por monotonicidade

$$(y_\lambda - z_\lambda, x_\lambda - w_\lambda) \geq 0$$

e daí

$$(y_\lambda, w_\lambda) \leq (y_\lambda, x_\lambda) - (z_\lambda, x_\lambda) + (z_\lambda, w_\lambda)$$

ou seja

$$(3) \quad \varepsilon \|y_\lambda\| \leq (y_\lambda, x_\lambda) - (z_\lambda, x_\lambda) + (z_\lambda, w_\lambda).$$

Como cada um dos termos no segundo membro de (3) é limitado, concluímos que  $y_\lambda$  é limitado. Logo de (1) concluímos que  $S_\lambda x_\lambda$  é também limitado. Use o teorema 4.11 para concluir. Q.E.D.

Corolário 4.3. Sejam  $T$  e  $S$  operadores maximais monotônicos tais que

$$(4) \quad (Tx, S_\lambda x) \geq 0, \quad \forall x \in D(T), \quad \forall \lambda > 0.$$

Então  $T + S$  é maximal monotônico.

Demonstração. Em vista do teorema 4.11, basta mostrar que as soluções  $x_\lambda$  da equação

$$(5) \quad x_\lambda + Tx_\lambda + S_\lambda x_\lambda \ni f$$

para um dado  $f \in H$ , são tais que  $\|B_\lambda x_\lambda\|$  é limitado, quando  $\lambda \rightarrow 0$ . De (5) usando (4) obtemos

$$(6) \quad (x_\lambda, S_\lambda x_\lambda) + \|S_\lambda x_\lambda\|^2 \leq \|f\| \|S_\lambda x_\lambda\|.$$

Agora para  $y_0 \in D(T)$  temos, por monotonicidade

$$(Tx_\lambda - Ty_0, x_\lambda - y_0) \geq 0$$

e daí usando (5)

$$(f - x_\lambda - S_\lambda x_\lambda - Ty_0, x_\lambda - y_0) \geq 0$$

que implica

$$(7) \quad \|x_\lambda\|^2 + (S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) \leq c + c\|x_\lambda\| + c\|S_\lambda x_\lambda\|,$$

onde  $c$  designa, eventualmente, diferentes constantes independentes de  $\lambda$ . Agora para  $y_1 \in D(S)$ , temos, por monotonicidade,

$$(S_\lambda x_\lambda - S_\lambda y_1, x_\lambda - y_1) \geq 0$$

que implica

$$(8) \quad (S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) \geq -c - c\|x_\lambda\| - c\|S_\lambda x_\lambda\|$$

onde utilizamos o fato que  $\|S_\lambda y_1\| \leq \|S^0 y_1\|$ . Logo de (7) e (8) obtemos

$$(9) \quad \|x_\lambda\|^2 \leq c + c\|x_\lambda\| + \|S_\lambda x_\lambda\|.$$

De (6) e (8) obtemos

$$(10) \quad \|S_\lambda x_\lambda\|^2 \leq c + c\|x_\lambda\| + c\|S_\lambda x_\lambda\|.$$

Finalmente de (9) e (10) concluimos que  $\|S_\lambda x_\lambda\|$  é limitado, quando  $\lambda \rightarrow 0$ . Q.E.D.

Corolário do corolário 4.3. Seja T maximal monotônico e  $\phi$  uma função convexa semicontínua inferiormente e própria. Su-  
ponha que

$$(11) \quad \phi((I + \lambda T)^{-1}x) \leq \phi(x), \quad \forall x \in H, \quad \forall \lambda > 0.$$

Então  $T + \partial\phi$  é maximal monotônica.

Demonstração. Basta mostrar que (11) implica (4). Use a de-  
finição de subdiferencial

$$(12) \quad \phi((I + \lambda T)^{-1}x) - \phi(x) \geq (u, (I + \lambda T)^{-1}x - x)$$

para qualquer  $u \in \partial\phi(x)$ . De (11) e (12) obtem-se

$$0 \geq (u, -\lambda T_\lambda x)$$

o que fornece (4).



4.8. OS RESULTADOS DE BRÉZIS-HARAUX

Na resolução de equações  $Au + Bu \ni f \in \mathbb{R}$  é importante ter uma idéia do que é  $R(A + B)$ . Entretanto, o que é fácil de determinar é  $R(A) + R(B)$ , o qual é, em geral, bem maior que  $R(A + B)$ . Que relações são possíveis entre esses dois conjuntos? Brézis e Haraux [4] observaram que mediante hipóteses simples sobre  $A$  e  $B$ ,  $R(A) + R(B)$  é "quase igual" a  $R(A + B)$ ; em símbolos

$$R(A + B) \simeq R(A) + R(B)$$

que quer dizer

$$\overline{R(A + B)} = \overline{R(A) + R(B)} \quad \text{e} \quad \text{int } R(A + B) = \text{int } [R(A) + R(B)]$$

Propriedade (\*). Um operador monotônico  $A$  em um espaço de Hilbert satisfaz a propriedade (\*) se

$$(*) \quad \forall v \in \text{co } R(A) \text{ e } \forall y \in \text{co } D(A) \implies \sup_{[x, u] \in A} (u - v, y - x) < \infty$$

Observação.  $A$  satisfaz (\*)  $\iff A^{-1}$  satisfaz (\*).

Proposição 4.4. (i)  $A$  coercivo  $\implies A$  satisfaz (\*).

(ii)  $A$  maximal monotônico  $\implies J_\lambda$  e  $A_\lambda$  satisfazem (\*).

(iii)  $D(A)$  ou  $R(A)$  limitado  $\implies A$  satisfaz (\*).

(iv)  $A = \partial\phi \implies A$  satisfaz (\*).

Demonstração. (i) Use coercividade: existe  $R > 0$  tal que

$$(u, x - y) \geq (v, x - y), \quad \forall \|x\| > R.$$

Por outro lado, se  $\|x\| \leq R$

$$(u - v, y - x) \leq (w - v, y - x) \leq (\|w\| + \|v\|)(\|y\| + R), \text{ onde} \\ w \in Ay$$

(ii)  $J_{\lambda^{-1}}$  é coercivo  $\implies J_{\lambda}$  satisfaz (\*).  $A_{\lambda} = (A^{-1} + \lambda I)^{-1}$   
e como  $A^{-1} + \lambda I$  é coercivo  $\implies A_{\lambda}$  satisfaz (\*).

(iii)  $D(A)$  limitado  $\implies A$  coercivo  $\implies A$  satisfaz (\*).  $R(A)$   
limitado  $\implies A^{-1}$  coercivo  $\implies A^{-1}$  satisfaz (\*)  $\implies A$  satis-  
faz (\*).

(iv) omitimos a demonstração para evitar introduzir concei-  
tos adicionais, cf. Brézis-Haraux.

Lema 4.3. Sejam  $C$  um operador maximal monotônico em  $H$  e  $F \subset H$   
verificando a propriedade:

$$(1) \quad \forall v \in F \quad \exists a \in H \text{ tal que } \sup_{[x,u] \in C} (u - v, a - x) < \infty.$$

Então  $co F \subset \overline{R(C)}$  e  $\text{int}(co F) \subset R(C)$ .

Demonstração. 1º) A hipótese (1) se verifica para todo  $v \in$   
 $co F$ . De fato, seja  $v = \sum \lambda_i v_i$ ,  $v_i \in F$ ,  $\sum \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$ .  
Então, existem  $a_i \in H$  e  $c_i \in \mathbb{R}$ , tais que

$$(u - v_i, a_i - x) \leq c_i, \quad \forall [x, u] \in C.$$

Então

$$(u, a_i) - (u, x) + (v_i, x) \leq c_i + (v_i, a_i)$$

e pondo  $a = \sum \lambda_i a_i$  concluímos que (1) se verifica para um tal  $v \in \text{co } F$ . Logo basta mostrar que

$$F \subset \overline{R(C)} \text{ e } \text{int } F \subset R(C).$$

2º) Assim, dado  $v \in F$ , tome as soluções  $x_\epsilon$  de

$$(2) \quad \epsilon x_\epsilon + Cx_\epsilon \ni v.$$

Use (1) com  $x = x_\epsilon$  e  $u = v - \epsilon x_\epsilon$ :

$$(v - \epsilon x_\epsilon - v, a - x_\epsilon) \leq \text{const}$$

que implica  $\sqrt{\epsilon} \|x_\epsilon\| \leq \text{const}$ . Logo  $v \in \overline{R(C)}$ , o que decorre de (2).

3º) Agora seja  $v \in \text{int } F$  e  $B(v, r) \subset F$ . Então, para  $\|w\| < r$  existe  $a(w) \in H$  e  $c(w) \in R$  tais que

$$(3) \quad (u - v - w, a(w) - x) < c(w), \quad \forall [x, u] \in C.$$

Use (3) para  $[x_\epsilon, v - \epsilon x_\epsilon] \in C$ , obtido de (2):

$$(-\epsilon x_\epsilon - w, a(w) - x_\epsilon) < c(w)$$

que implica

$$(w, x_\epsilon) \leq c_1(w).$$

Logo pelo princípio da limitação uniforme  $|(w, x_\epsilon)| \leq C$ , e daí  $\|x_\epsilon\| \leq C$ . Passando a uma subsucessão temos  $x_\epsilon \rightarrow x$  e  $v - \epsilon x_\epsilon \rightarrow v$  e como  $v - \epsilon x_\epsilon \in C(x_\epsilon)$ , concluímos que  $v \in Cx$ . Q.E.D.

Teorema 4.12. Sejam A e B operadores monotônicos tais que A + B é maximal monotônico. Suponha que A e B satisfazem (\*). Então

$$R(A + B) \approx R(A) + R(B).$$

Demonstração. É claro que  $R(A + B) \subset R(A) + R(B)$ . Logo basta mostrar que  $R(A) + R(B) \subset \overline{R(A + B)}$  e  $\text{int}(R(A) + R(B)) \subset R(A + B)$ . Use então o lema 4.3 com  $R(A) + R(B) = F$  e  $A + B = C$ . Para tal verifiquemos a condição (1). Sejam  $v \in R(A) + R(B)$  (e logo  $v = v_1 + v_2$ ,  $v_1 \in R(A)$  e  $v_2 \in R(B)$ ) e  $a \in D(A) \cap D(B)$  fixados. Então como A e B satisfazem (\*) tem-se

$$\sup_{[x, u_1] \in A} (u_1 - v_1, a - x) < \infty \text{ e } \sup_{[x, u_2] \in B} (u_2 - v_2, a - x) < \infty.$$

E daí se obtém

$$\sup_{[x, u] \in C} (u - v, a - x) < \infty$$

o que conclui a demonstração do teorema. Q.E.D.

Corolário 4.4. Sejam  $\phi$  e  $\psi$  funções convexas semicontínuas inferiormente próprias em H. Suponha que  $\partial\phi + \partial\psi$  é maximal monotônico. Então

$$R(\partial\phi + \partial\psi) \approx R(\partial\phi) + R(\partial\psi).$$

Um resultado análogo ao teorema anterior e de grande valia nas aplicações da próxima secção é o seguinte

Teorema 4.13. Sejam A e B operadores maximais monotônicos tais que

$$(4) \quad (Ax, B_\lambda x) \geq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Então

$$R(A + B) \approx R(A) + R(B).$$

Demonstração. O corolário 4.3 da secção anterior nos diz que  $A + B$  é maximal monotônico. Para  $v \in H$  e  $0 < \varepsilon < 1$  fixados, as equações

$$(5) \quad v \in \varepsilon x_\lambda + Ax_\lambda + B_\lambda x_\lambda$$

têm uma única solução  $x_\lambda$ , cf. lema 4.2. De (5), obtemos usando (4)

$$(6) \quad \|v\|^2 \geq \varepsilon^2 \|x_\lambda\|^2 + \|Ax_\lambda\|^2 + \|B_\lambda x_\lambda\|^2 + 2\varepsilon(x_\lambda, Ax_\lambda + B_\lambda x_\lambda).$$

Para estimar a última expressão em (6) tome  $x_0 \in D(A) \cap D(B)$  e use monotonicidade

$$(7) \quad (Ax_\lambda + B_\lambda x_\lambda - Ax_0 - B_\lambda x_0, x_\lambda - x_0) \geq 0.$$

Assim de (6) e (7) obtemos

$$\|v\|^2 \geq \varepsilon^2 \|x_\lambda\|^2 + \|Ax_\lambda\|^2 + \|B_\lambda x_\lambda\|^2 - c\varepsilon(1 + \|x_\lambda\| + \|Ax_\lambda\| + \|B_\lambda x_\lambda\|)$$

o que mostra que

$$\varepsilon^2 \|x_\lambda\|^2 + \|Ax_\lambda\|^2 + \|B_\lambda x_\lambda\|^2 \leq \text{const}$$

quando  $\lambda \rightarrow 0$ . Pelo teorema 4.11, para cada  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $x_\lambda \rightarrow x_\varepsilon$  que é a solução de

$$(8) \quad v \in \varepsilon x_\varepsilon + Ax_\varepsilon + Bx_\varepsilon \quad \text{ou} \quad v = \varepsilon x_\varepsilon + u_\varepsilon + w_\varepsilon$$

e temos as estimativas

$$(9) \quad \|u_\varepsilon\| \leq c, \quad \|w_\varepsilon\| \leq c$$

onde  $c$  independe de  $\varepsilon$ . Seja agora  $v \in R(A) + R(B)$  e mostre mos que  $v \in \overline{R(A+B)}$ . Tome  $x \in D(A)$  e  $y \in D(B)$  tais que  $v \in Ax + By$ . Logo

$$(Ax_\varepsilon - Ax, x_\varepsilon - x) \geq 0 \quad \text{e} \quad (Bx_\varepsilon - By, x_\varepsilon - y) \geq 0$$

de onde se obtem, usando (8):

$$(-\varepsilon x_\varepsilon, x_\varepsilon) - (Ax_\varepsilon - Ax, x) - (Bx_\varepsilon - By, y) \geq 0$$

o que implica  $\varepsilon \|x_\varepsilon\|^2 \leq \text{const}$ . Usando esse fato em (8) obtem se que  $v \in \overline{R(A+B)}$ . Seja agora  $v \in \text{int}(R(A) + R(B))$  e mos tremos que  $v \in R(A+B)$ . Seja  $B(v, r) \subset R(A) + R(B)$ . Para  $\|h\| < r$  temos  $v + h \in Ax_h + By_h$ . Por monotonicidade,

$$(Ax_\varepsilon - Ax_h, x_\varepsilon - x_h) \geq 0 \quad \text{e} \quad (Bx_\varepsilon - By_h, x_\varepsilon - y_h) \geq 0$$

de onde se obtem usando (8) que

$$(v - \varepsilon x_\varepsilon - v - h, x_\varepsilon) - (Ax_\varepsilon - Ax_h, x_h) - (By_h, x_\varepsilon - y_h) \geq 0$$

o que implica que  $|(h, x_\varepsilon)| \leq \text{const}(h)$ . Logo, pelo princípio da limitação uniforme  $|(h, x_\varepsilon)| \leq \text{const}$  para todo  $\|h\| < r$ . Daí  $\|x_\varepsilon\|$  é limitado e (8) implica que  $v \in R(A+B)$ . Q.E.D.

Corolário 4.5. Sejam  $A$  maximal monotônico e  $\phi$  uma função convexa semicontínua inferiormente própria tais que

$$(10) \quad \phi((I + \lambda A)^{-1}x) \leq \phi(x), \quad \forall x \in H, \quad \forall \lambda > 0.$$

Então

$$R(A + \partial\phi) = R(A) + R(\partial\phi).$$

Demonstração. Basta observar que (10) implica (4).

#### 4.9. APLICAÇÕES DA TEORIA MONOTÔNICA A PROBLEMAS SEMILINEARES

(I) Um problema de Neumann não linear. Seja  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^n$ , com fronteira regular  $\Gamma$ . Seja  $\beta$  um gráfico maximal monotônico em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Considere o problema de dado  $f \in L^2(\Omega)$ , encontrar  $u \in W^{2,2}(\Omega)$  tal que

$$(1) \quad -\Delta u + \beta(u) \ni f \text{ em } \Omega$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Condição necessária para a solubilidade de (1)-(2). Integrando

$$(3) \quad \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \beta(u) \in \overline{R(\beta)}$$

onde  $|\Omega|$  é a medida de  $\Omega$ .

Teorema 4.14. O problema (1)-(2) é solúvel se

$$(4) \quad \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f \in \text{int } R(\beta).$$

Observação. Infelizmente esse teorema não contém o caso de  $\beta \equiv 0$ , que é o problema de Neumann clássico. E a razão disso é que a condição suficiente é um pouco mais fraca do que a condição necessária.

Demonstração. Seja  $H = L^2(\Omega)$  e defina os dois operadores seguintes

$$A = -\Delta, \quad D(A) = \{u \in W^{2,2}(\Omega) : \partial u / \partial \nu = 0\}$$

$$Bu = \{[u, v] \in H \times H : v(x) \in \beta(u(x)) \text{ a.e.}\}$$

A proposição 4.4 diz que  $B$  é maximal monotônico. É fácil ver que  $A = \partial\phi$  onde

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2, \quad D(\phi) = W^{1,2}(\Omega),$$

e portanto  $A$  é maximal monotônico. Isso, também, é um caso especial do teorema 4.8. A idéia é aplicar o teorema 4.13 ; para isso, observe

$$(Au, B_\lambda u) = - \int_\Omega \Delta u \beta_\lambda(u) = \int_\Omega \sum \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \beta'_\lambda(u) \geq 0.$$

Logo  $R(A + B) \supseteq R(A) + R(B)$ . Agora afirmamos que

$$(5) \quad f \in \text{int}(R(A) + R(B))$$

e, isso feito, temos que  $f \in \text{int}(R(A + B))$  e portanto a solubilidade de (1)-(2). Para provar (5) tome  $g \in H$  e escreva

$$g = \left( g - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega g \right) + \left( \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega g + \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (g - f) \right) \equiv g_1 + g_2.$$

Como  $g_1 \in R(A)$  e, se tomarmos  $\|g - f\|_{L^2}$  pequeno, obtemos, u



sando (4) que  $g_2 \in R(B)$ . Logo, se  $\|g - f\|_{L^2}$  for pequeno  $g \in R(A) + R(B)$  o que mostra (5). Q.E.D.

(II) Um problema de contorno não linear (Schatzman [18], Hess [14]). Seja  $\Omega$  um domínio limitado em  $R^n$  com fronteira  $\Gamma$  regular. Seja  $\beta$  um gráfico maximal monotônico em  $R \times R$ . Considere o problema de dado  $f \in L^2(\Gamma)$ , encontrar  $u$  tal que

$$(6) \quad \Delta u = 0 \text{ em } \Omega$$

$$(7) \quad -\frac{\partial u}{\partial \nu} + f \in \beta(u) \text{ em } \Gamma.$$

Condição necessária para a solubilidade de (6)-(7). Integrando

$$\frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} f = \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \beta(u) \in \overline{R(\beta)}$$

onde  $|\Gamma|$  é a medida de  $\Gamma$ .

Teorema 4.15. Se

$$(8) \quad \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} f \in \text{int } R(\beta)$$

então o problema (6)-(7) tem uma solução  $u \in W^{3/2,2}(\Omega)$ .

Demonstração. (Brézis-Haraux).  $H = L^2(\Gamma)$ . Defina os operadores

$$B = \{[g, h] \in H \times H: h(x) \in \beta(g(x)) \text{ a.e. } \Gamma\},$$

e  $A$  da seguinte maneira:  $D(A) = W^{1,2}(\Gamma)$  e para  $u \in W^{1,2}(\Gamma)$ , seja  $\hat{u} \in W^{3/2,2}(\Omega)$  a solução de

$$\Delta \hat{u} = 0 \text{ em } \Omega, \quad \hat{u} = u \text{ em } \Gamma,$$

e então defina  $Au = \partial \hat{u} / \partial \nu$ . Agora

$$(Au, B_\lambda u) = \int_\Gamma \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} \beta_\lambda(\hat{u}) = - \int_\Omega \Delta \hat{u} \beta_\lambda(\hat{u}) + \int_\Omega \sum \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \right)^2 \beta'_{\lambda}(\hat{u}) \geq 0.$$

Logo o teorema 4.13 é aplicável. E o resto do argumento procede como no caso (I).

(III) Problema de Dirichlet semilinear em ressonância. Seja  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $\Gamma$  regular. Seja  $\lambda_1$  o primeiro auto-valor de  $-\Delta$ , e tome  $\phi$  uma  $\lambda_1$ -auto-função com  $\phi > 0$  em  $\Omega$ . Seja  $\beta$  um gráfico maximal monotônico em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , com  $0 \in D(\beta)$ . Considere o problema de dado  $f \in L^2(\Omega)$  encontrar  $u \in W^{2,2}(\Omega)$  tal que

$$(9) \quad -\Delta u - \lambda_1 u + \beta(u) \ni f \text{ em } \Omega$$

$$(10) \quad u = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Condição necessária para a solubilidade de (9)-(10). Multiplicando (9) por  $\phi$  e integrando, obtemos:

$$(11) \quad \left( \int_\Omega f\phi / \int_\Omega \phi \right) \in \overline{R(\beta)}.$$

Teorema 4.16. Se

$$(12) \quad \left( \int_\Omega f\phi / \int_\Omega \phi \right) \in \text{int } R(\beta)$$

então, o problema (9)-(10) tem uma solução  $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Demonstração. Seja  $H = L^2(\Omega)$  e defina os operadores

$$A = -\Delta - \lambda_1, \quad D(A) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$$

e B como no problema (I). A é maximal monotônico, pois  $R(A + (\lambda_1 + 1)I) = H$ ; de fato, isso simplesmente quer dizer que o problema de Dirichlet

$$-\Delta u + u = f \text{ em } \Omega \text{ e } u = 0 \text{ em } \Gamma$$

é sempre solúvel, qualquer que seja  $f \in L^2(\Omega)$ . Pode-se mesmo ver que  $A = \partial\phi$  onde

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ |\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2 \}, \quad D(\phi) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

$A + B$  é maximal monotônico, pois  $R(A + B + (1 + \lambda_1)I) = H$ ; de fato isso decorre de que  $A + B + \lambda_1 I$  é maximal monotônico:

$$((A + \lambda_1 I)u, B_{\lambda} u) = - \int \Delta u \beta_{\lambda}(u) = \int \sum \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \beta'_{\lambda}(u)$$

onde se utilizou o fato que  $0 = \beta_{\lambda}(0)$ . Podemos então aplicar o corolário 4.4. Seja  $f \in L^2(\Omega)$  uma função satisfazendo (12) e provemos que  $f \in \text{int}(R(A) + R(B))$ ; isso feito o corolário 4.4 entra em cena e conclui a demonstração. Dada  $g \in L^2(\Omega)$  escreva

$$g = (g - k) + k \quad \text{onde } k = \int_{\Omega} g \phi / \int_{\Omega} \phi.$$

Pela teoria linear, tem-se que  $g - k \in R(A)$ . Por outro lado se  $\|g - f\|_{L^2}$  for pequeno  $k \in R(B)$ , e aí se utiliza a hipótese (12). Q.E.D.

(IV) Este último exemplo utiliza apenas os resultados até a secção 4.7.

Teorema 4.17. Seja  $\Omega$  um domínio limitado com fronteira  $\Gamma$  regular, e seja  $\beta$  um gráfico maximal monotônico. Então para cada  $f \in L^2(\Omega)$  existe um único  $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$  tal que

$$-\Delta u + \beta(u) \ni f \text{ em } \Omega.$$

Demonstração. Seja  $H = L^2(\Omega)$  e defina os operadores

$$A = -\Delta, \quad D(A) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$$

e B como no exemplo (I).  $A = \partial\phi$  onde

$$\phi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2, & u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ +\infty & , u \in L^2 \setminus W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases}$$

Logo A é maximal monotônico. A proposição 4.4 diz que B é maximal monotônico. Como

$$(Au, B_{\lambda} u) = - \int_{\Omega} \Delta u \beta_{\lambda}(u) = \int_{\Omega} \sum \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \beta'_{\lambda}(u) \geq 0$$

concluimos em vista do corolário 4.3 que  $A + B$  é maximal monotônico. Agora observe que  $A + B$  é coercivo pois

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + \beta(u))u \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq c \int_{\Omega} |u|^2$$

pela desigualdade de Poincaré. Logo o teorema 4.9 (ou 4.7) nos diz que  $R(A + B) = H$ . Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA DO CAPÍTULO 4

As referências apresentadas abaixo não contem todos os artigos onde os resultados surgiram pela primeira vez. A referência [6] contem ela própria uma longa literatura re<sup>u</sup>levante ao assunto até 1971.

- [1] Brézis, H., "Monotonicity Methods in Hilbert Spaces and Some Applications to Nonlinear Partial Differential Equations". Contributions to Nonlinear Functional Analysis, editado por E. H. Zarantonello. Academic Press (1971).
- [2] Brézis, H., "Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert". North Holland (1973).
- [3] Brézis, H., "Quelques propriétés des opérateurs monotones et semi-groupes non linéaires". Curso ministrado no Seminário Avançado sobre operadores não lineares, Bruxelas (Setembro de 1975). A aparecer.
- [4] Brézis, H. et Haraux, A., "Sur l'image d'une somme d'opérateurs monotones et applications". Israel J. of Math. vol. 23 (1976), p. 165-186.
- [5] Browder, F. E., "Nonlinear Equations of Evolutions". Ann. of Math., vol. 80 (1964), p. 485-523.
- [6] Browder, F. E., "Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolutions in Banach Spaces". Proc. Symp. Pure Math. AMS, vol. XVIII (part 2) (1975).
- [7] Browder, F. E., "Nonlinear Functional Analysis and Nonlinear Integral Equations of Hammerstein and Urysohn Type". Contributions to Nonlinear Functional Analysis, editado por E. H. Zarantonello. Academic Press (1971).
- [8] Damlamian, A., "Lectures on Monotone Operators". Trabalho de Matemática nº 110 (Set. 1976), UnB.

- [9] de Figueiredo, D. G., "Semilinear Elliptic Problems with nonlinearities near the first eigenvalue". Proc. Int. Symp. on Dyn. Syst. Gainesville (March 1976).
- [10] de Figueiredo, D. G., "The Dirichlet Problem for Nonlinear Elliptic Equations: a Hilbert Space Approach". Partial Differential Equations and Related Topics, editado por J. A. Goldstein, Lecture Notes Springer (1975), p. 144-165.
- [11] de Figueiredo, D. G., "An Introduction to the Theory of Monotone Operators". Reunião de Análise Funcional, Campinas (1974).
- [12] de Figueiredo, D. G. et Gossez, J. P., "Perturbation non linéaire d'un problème elliptique linéaire près de sa première valeur propre". C. R. Acad. Sc. Paris t. 284 (1977), p. 163-166.
- [13] Gårding, D., "Zum Prinzip der Kontraktiven Abbildung". Math. Nachr. 30 (1965), p. 251-258.
- [14] Hess, P., "On semi-coercive nonlinear problems". Indiana Univ. Math. J. 23 (1974), p. 645-654.
- [15] Kirk, W. A., "A fixed point theorem for mappings which do not increase distance". Am. Math. Monthly 72 (1965) p. 1004-1006.
- [16] Landesman, E. M. and Lazer, A. C., "Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problem at resonance". J. Math. Mech. 19 (1970), p. 609-623.
- [17] Minty, G. J., "Monotone (nonlinear) operators in Hilbert Space". Duke Math. J. 29 (1962), p. 341-346.
- [18] Schatzman, M., "Problèmes aux limites non linéaires non coercifs". Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 27 (1973), p. 641-686.