Chaim S. Hönig

A Integral de Lebesgue e suas Aplicações

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Rua Luiz de Camões, 68
20.000 - Rio de Janeiro - RJ

Í N D I C E

PREFÁCIO

O presente livro é um texto introdutório à teoria da integral de Lebesgue, com ênfase nas aplicações ao Cálculo e à Análise Matemática. Ele foi escrito para cobrir a parte que trata da integral de Lebesgue nos programas das disciplinas Análise Matemática II (do curso de Bacharelado) e Análise Matemática (do curso de Pós-Graduação) do INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA da UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Uma parte do texto será exposta no Curso "A INTEGRAL DE LEBESGUE E SUAS APLICAÇÕES" a ser desenvolvido no 11º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA.

O livro contém muito mais material do que o exigido nos cursos acima referidos, principalmente no Curso de Bacharelado e no Curso do Colóquio. Nestes são cobertos, essencialmente, os três primeiros capítulos (sendo omitidos os tópicos assinalados por *).

Acreditamos que num primeiro estudo da integral de Lebesgue o curso deve ter como objetivo chegar rapidamente às aplicações da teoria e que a importância e o manejo dos teoremas fundamentais devem ser aprendidos através destas aplicações. As aplicações dadas neste livro estão concentradas, principalmente,nos capítulos II e V e o índice dá uma idéia da gama de aplicações que desenvolvemos.

No Capítulo I escolhemos um método de apresentação da integral de Lebesgue que permitisse chegar rapidamente aos teoremas fundamentais e a suas aplicações elementares (Capítulo II). Ao mesmo tempo cuidamos para que o tratamento fosse geral, isto é, servisse também para a teoria abstrata da medida e integração, de modo que quando chegássemos a esta parte (Capítulo IV) não tivéssemos de repetir as demonstrações feitas no Capítulo I. Neste modo de exposição seguimos de perto o Capítulo 11 da referência [R].

Enfatisemos que as aplicações da teoria da integral de Lebesgue, e mais geralmente da teoria da medida e integração, no nível elementar do Cálculo e da Análise Matemática (isto é, essencialmente, o Capítulo II) são muito simples. A dificuldade real que o estudante encontra está em "atravessar" toda a parte que se refere à construção da medida e da integral de Lebesgue e às demonstrações de suas propriedades, demonstrações estas que na maioria das vezes se referem a fatos "evidentes" (exemplo: $\int(f+g) = \int f + \int g$) e que mesmo assim são provados três vezes (cada vez para uma classe mais ampla de funções).

Por razões de ordem didática evitamos decompor a teoria num número muito grande de teoremas. Assim os resultados secundários, intermediários ou preparatórios e fatos "evidentes" (quanto ao enunciado mas nem sempre quanto à demonstração) são apresentados como observações ou corolários. Reservamos o termo Teorema apenas aos resultados centrais que devem ser retidos pelo estudante e a partir dos quais as observações, corolários, etc. podem ser facilmente deduzidos.

Nossa experiência mostra que nas aplicações as dificuldades que os estudantes encontram quase nunca se referem à teoria da integral de Lebesgue e sim às partes básicas de Análise Matemática principalmente à parte ligada à integral de Riemann imprópria que é necessária em muitas aplicações do teorema da convergência dominada de Lebesgue. Por esta razão desenvolvemos especialmente esta parte num Apêndice ao Capítulo II. Mencionemos ainda que no curso de Bacharelado (4 horas de aula por semana) fazemos cada semana uma prova de verificação de meia hora bem como uma sessão (também de meia hora) em que os exercícios da prova precedente são discutidos e resolvidos. Esta experiência têm tido bastante sucesso, com um índice de aprovação dos estudantes superior a 80%.

Como prerequisito do curso é amplamente suficiente uma familiaridade com a Análise Matemática tal como ela se encontra exposta, por exemplo, nas referências [D], [E] ou [H-AI]. Para estudos mais avançados da teoria da medida e integração recomendamos as referências [K], [M], [R] e [Z]. Como texto com abundantes exercícios (muitos resolvidos) aconselhamos a referência [de B]. Um texto com uma boa análise da história da integral de Lebesgue é a referência [H].

O presente texto é autosuficiente; apenas não desenvolvemos a parte referente à mudança de variáveis que usamos em alguns exemplos muito simples.

Alguns tópicos especiais foram tratados em diferentes capítulos, na parte teórica, nos exemplos e nos exercícios. No fim do livro damos um índice destes tópicos especiais (a função Γ, a transformação de Fourier, o produto da convolução, a equação do calor, a equação de Laplace).

Queremos deixar assinalados aqui nossos agradecimentos aos colegas ANTÔNIO GILIOLI e IRACEMA BUND, e ao estudante JOÃO CARLOS PRANDINI, que leram versões manuscritas da maior parte do presente texto fazendo valiosíssimas sugestões além de apontarem imprecisões e erros. Nossos agradecimentos se estendem aos colegas CARLOS ALBERTO BARBOSA DANTAS e FLÁVIO WAGNER RODRIGUES cujas sugestões seguimos no Apêndice "Teoria das Probabilidades". Naturalmente os erros e imprecisões que certamente subsistiram são de nossa inteira responsabilidade e

agradeceríamos aos leitores que os apontassem para futuras correções.

Nossos agradecimentos especiais ao Sr. JOÃO BAPTISTA ESTEVES DE OLIVEIRA pelo excelente trabalho de datilografia que fez a partir de um manuscrito nem sempre muito legível.

São Paulo, 27 de maio de 1977

Chaim Samuel Hönig

NOTAÇÕES

[□] - significa *demonstrar como exercício*

□ - indica o fim de uma demonstração

⁑ - assinala sessões ou §§ que podem ser omitidos numa primeira leitura.

*,** - indicam o grau de dificuldade de um exercício

Corolário III.2.3.1 se refere ao Corolário 2.3.1 do §2 do Capítulo III

Usamos as notações habituais da teoria dos conjuntos; assim:

$\mathcal{P}(E)$ - indica a classe de todos os subconjuntos de E

$\bigcup\{X|\mathcal{R}\}$ - indica a reunião dos conjuntos que tem a propriedade $\mathcal{R}$ e analogamente para a intersecção

$\complement A$ - indica o complementar em E do conjunto $A\subset E$

Usamos como sinônimos os termos *função* e *aplicação*

$f_{|A}$ - indica a restrição da aplicação $f:E \longrightarrow F$ ao subconjunto $A\subset E$

χ_A - indica a *função característica* do conjunto A: $\chi_A(x)=1$ se $x\in A$ e $\chi_A(x)=0$ se $x\notin A$.

Dado $(x,y)\in X\times Y$ escrevemos $x=pr_X(x,y)$ e $y=pr_Y(x,y)$

$\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{R}_+$ indicam respectivamente os conjuntos dos números inteiros naturais, dos números inteiros relativos, dos números racionais, dos números reais, dos números complexos, dos números reais ≥ 0

Dado um número complexo $z=x+iy$ então $\bar{z}=x-iy$ indica o seu complexo conjugado

$f_n \xrightarrow{u} f$ - indica que a sequência de funções $f_n: E \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente para a função $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$.

$t_n \downarrow t$ [$t_n \uparrow t$] - indica uma sequência de números reais t_n decrescente [crescente] para o número real t.

$f_n \downarrow f$ [$f_n \uparrow f$] - onde $f_n: E \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, indica que para todo $x \in E$ temos

$$f_n(x) \downarrow f(x) \quad [f_n(x) \uparrow f(x)]$$

Dado um subconjunto A de $\mathbb{R}$ ou mais geralmente de um espaço métrico, $\bar{A}$ indica o seu fecho (aderência).

- ¤ -

CAPÍTULO I

MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE NO $\mathbb{R}^n$

No presente capítulo fazemos a construção da integral de Lebesgue e estabelecemos as suas principais propriedades.

No §1 definimos a medida de Lebesgue para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Esta noção generaliza as noções habituais de comprimento de um intervalo de $\mathbb{R}$, de área de um retângulo, ou mais geralmente, de figuras geométricas de $\mathbb{R}^2$, de volume de um paralelepípedo de $\mathbb{R}^3$, etc. A noção de medida é definida apenas para os subconjuntos "mensuráveis" de $\mathbb{R}^n$ mas na prática todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que nós encontramos são mensuráveis, mais precisamente, a demonstração da existência de subconjuntos não mensuráveis de $\mathbb{R}$ requer o axioma da escolha.

No §2 apresentamos as funções mensuráveis e damos as suas principais propriedades. Novamente na prática todas as funções definidas em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ são mensuráveis e para demonstrar a existência de funções não mensuráveis precisamos do axioma da escolha.

No §3 finalmente construímos a integral de Lebesgue para funções mensuráveis e mostramos no §4 que a integral de

Lebesgue generaliza a integral de Riemann.

§1 - A MEDIDA DE LEBESGUE

Os resultados fundamentais deste § são os teoremas 1.4 e 1.5 e seus corolários. O teorema 1.4 diz essencialmente que qualquer conjunto obtido *construtivamente* a partir de conjuntos mensuráveis é também um conjunto mensurável. Aqui *obtido construtivamente a partir de conjuntos mensuráveis* significa obtido por reunião e intersecção de sequências de conjuntos mensuráveis e por passagem ao complementar. O teorema 1.5 diz que os intervalos são conjuntos mensuráveis e o mesmo vale portanto para todos os conjuntos *construídos* a partir de intervalos. Chamamos a atenção do leitor de que na prática jamais encontraremos outros tipos de subconjuntos mensuráveis do $\mathbb{R}^n$.

1.1 - Notações - Indicamos por $\mathbb{R}$ a reta real, isto é, o conjunto dos números reais. Indicamos por $\overline{\mathbb{R}}$ ou $[-\infty,\infty]$ a reta real estendida: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$; consideramos que $-\infty < x < \infty$ para qualquer $x\in\mathbb{R}$.

Dados $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ com $a \leq b$, indicamos por $|a,b|$ qualquer um dos intervalos $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ e $]a,b[$. Se $J = |a,b|$ definimos o *comprimento* do intervalo J por $\ell(J) = b-a$ (convencionando que $\ell(|\infty,\infty|) = \ell(|-\infty,-\infty|) = 0$).

Vamos estender a notação acima ao $\mathbb{R}^n$ e $\overline{\mathbb{R}}^n$. Indicaremos os pontos de $\overline{\mathbb{R}}^n$ pela notação $a = (a_1,\ldots,a_n)$ onde $a_i \in \overline{\mathbb{R}}$. Dados $a,b \in \overline{\mathbb{R}}^n$ escrevemos $a \le b$ se temos $a_i \le b_i$ para $i=1,2,\ldots,n$ e neste caso definimos

$$[a,b] = \prod_{1\le i\le n} [a_i,b_i],\quad [a,b[= \prod_{1\le i\le n} [a_i,b_i[,\ \text{etc.};$$

$|a,b| = \prod_{1\le i\le n} |a_i,b_i|$ indica qualquer um dos (até 4^n) produtos de representantes de $|a_1,b_1|,\ldots,|a_n,b_n|$. Chamamos $|a,b|$ de *paralelepípedo*, *hiperparalelepípedo* ou, na maioria das vezes, simplesmente de *intervalo*.

Se $J = |a,b| \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, o seu *volume* é definido por

$$\ell(|a,b|) = \prod_{1\le i\le n} \ell(|a_i,b_i|),$$

onde fazemos a convenção de que $\infty\cdot 0 = 0\cdot\infty = 0$.

No presente § indicamos sempre por $I, I_k, I_k^{(m)}$, etc. intervalos abertos de $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\overline{\mathbb{R}}^n$; intervalos de outros tipos serão indicados pelas letras J, K, etc. acompanhadas ou não de índices.

No que segue vamos definir uma medida no $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, que estende a noção de volume dos paralelepípedos.

1.2 - A Medida Exterior de Lebesgue

Uma *medida exterior* sobre um conjunto E é uma função

$$\mu^*: \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0,\infty]$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(M_0^*) $\mu^*\phi = 0$

(M_σ^*) μ^* é *σ-subaditiva*, isto é,

$$A \subset \bigcup_{k\in N} A_k \Longrightarrow \mu^*A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*A_k$$

É imediato então que $A \subset B$ implica $\mu^*A \leq \mu^*B$ [□].

Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ definimos

$$m^*A = m_\ell^*A = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \,\Big|\, \bigcup_{k\in N} I_k \supset A \right\}$$

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>1.1</u> - É imediato que para um intervalo qualquer $J \subset \mathbb{R}^n$ temos $m^*J \leq \ell(J)$ [□].

<u>TEOREMA</u> <u>1.1</u> - A função $m^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0,\infty]$ é uma medida exterior.

DEMONSTRAÇÃO - A verificação da propriedade (M_0^*) é imediata. Quanto a (M_σ^*), seja

$$A \subset \bigcup_{k\in N} A_k \text{ e mostremos que } m^*A \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*A_k .$$

Se $\exists$ $k\in N$ tal que $m^*A_k = \infty$ o resultado é imediato. Suponhamos pois que para todo $k\in N$ temos $m^*A_k < \infty$; dado $\varepsilon > 0$, pela definição de m^*A_k existe $(I_m^k)_{m\in N}$ com

$$\bigcup_{m\in N} I_m^k \supset A_k \text{ e tal que } \sum_{m=1}^{\infty} \ell(I_m^k) < m^*A_k + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Então os I_m^k, $k,m\in N$, formam uma família enumerável de intervalos abertos cuja reunião contém $\bigcup_{k\in N} A_k$, e portanto A, e temos

$$m^*A \leq \sum_{k,m} \ell(I_m^k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty} \ell(I_m^k)\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(m^*A_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*A_k + \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, segue-se o resultado. ▯

A medida m^* é denominada de *medida exterior de Lebesgue de dimensão* n ou simplesmente de *medida exterior de Lebesgue*. As vezes precisamos chamar a atenção sobre a dimensão n e escrevemos m_n^*.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>1</u> - a) Se $A\subset\mathbb{R}$ é tal que $m^*A < \infty$ então A é limitado?

b) Se $A\subset\mathbb{R}$ é tal que $m^*A = 0$ então A é limitado?

<u>COROLÁRIO</u> <u>1.1.1</u> - Se $m^*A < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto limitado $A_\varepsilon \subset A$ tal que $m^*(A\cap CA_\varepsilon) < \varepsilon$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja

$$\bigcup_{k\in N} I_k \supset A \text{ com } \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \infty$$

e seja $k_\varepsilon \in N$ tal que

$$\sum_{k=k_\varepsilon}^{\infty} \ell(I_k) < \varepsilon. \text{ Tomemos } A_\varepsilon = A \cap \bigcup_{k \le k_\varepsilon} I_k:$$

A_ε é limitado e $A \cap CA_\varepsilon \subset \bigcup_{k > k_\varepsilon} I_k$ donde se segue que $m^*(A \cap CA_\varepsilon) < \varepsilon$.

<u>EXERCÍCIO 2</u> - Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. a) Demonstrar que dado $\varepsilon > 0$ existe um conjunto aberto $0 \supset A$ tal que $m^* 0 \le m^* A + \varepsilon$.

b) Demonstrar que existe um conjunto G que é a intersecção de uma sequência de abertos, $G \supset A$ e tal que

$$m^* G = m^* A.$$

* <u>EXERCÍCIO 3</u> - Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto; vale $m^* \bar{U} = m^* U$?

<u>EXERCÍCIO 4</u> - Demonstrar que $m_1^* K = 0$, onde K é o conjunto triádico de Cantor.

<u>EXERCÍCIO 5</u> - Demonstrar que o conjunto dos números reais em cujo desenvolvimento decimal não aparece o algarismo 7, tem medida exterior nula.

<u>EXERCÍCIO 6</u> - Demonstrar que para quaisquer $h \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ temos $m^*(A+h) = m^* A$.

<u>EXERCÍCIO 7</u> - Demonstrar que para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ temos $m^*(\lambda A) = |\lambda|^n m^* A$.

<u>TEOREMA 1.2</u> - Seja $J = |a,b| \subset \mathbb{R}^n$ (onde $a, b \in \mathbb{R}^n$ e $a \le b$); temos

$$m^* J = \ell(J) = \prod_{1 \le i \le n} (b_i - a_i).$$

DEMONSTRAÇÃO - Pela observação 1.1 resta provar que

$$m^* J \ge \ell(J).$$

1. Dado um intervalo $|c,d| \subset \mathbb{R}$ seja $z(|c,d|)$ o número de

de pontos de $|c,d|$ cuja abcissa é um número inteiro relativo; temos

$$d-c-1 \le z(|c,d|) \le d-c+1.$$

Dado portanto um intervalo

$$|c,d| = \prod_{1\le i\le n} |c_i,d_i| \subset \mathbb{R}^n,$$

se $z(|c,d|)$ indica o número de pontos de $|c,d|$ que tem todas as coordenadas inteiras e se $d_i-c_i-1 \ge 0$ para $i=1,2,\ldots,n$, temos

$$(1) \qquad \prod_{1\le i\le n} (d_i-c_i-1) \le z\,(|c,d|) \le \prod_{1\le i\le n} (d_i-c_i+1)$$

2. Para demonstrar o teorema basta considerar intervalos $J=|a,b|$ com $a_i<b_i$ para $i=1,2,\ldots,n$ pois senão é imediato que $\ell(J)=0=m^*J$ [□].

a) Demonstremos primeiro o teorema no caso de um intervalo fechado $J=[a,b]=\prod_{1\le i\le n}[a_i,b_i]$ com $a_i<b_i$, $i=1,2,\ldots,n$. Seja $(I^k)_{k\in N}$ um recobrimento de J formado por intervalos abertos. Sendo J fechado e limitado, pelo teorema de Borel-Lebesgue este recobrimento aberto contém um subrecobrimento finito que podemos indicar por $I^1,\ldots,I^m$. Seja

$$I^k =]x^k,y^k[= \prod_{1\le i\le n}]x_i^k,y_i^k[, \qquad k=1,2,\ldots,m.$$

De

$$J \subset \bigcup_{1 \le k \le m} I^k$$

segue que para todo $\lambda > 0$ temos

$$\lambda J \subset \bigcup_{1 \le k \le m} \lambda I^k$$

onde $\lambda|c,d| = |\lambda c, \lambda d|$. Temos portanto

$$z([\lambda a, \lambda b]) \le \sum_{k=1}^{m} z(]\lambda x^k, \lambda y^k[).$$

De (1) segue então que para $\lambda > 0$ suficientemente grande (isto é, tal que $\lambda b_i - \lambda a_i - 1 \ge 0$ para $i=1,2,\ldots,n$) temos

$$\prod_{1 \le i \le n} (\lambda b_i - \lambda a_i - 1) \le z([\lambda a, \lambda b])$$

e

$$z(]\lambda x^k, \lambda y^k[) \le \prod_{1 \le i \le n} (\lambda y_i^k - \lambda x_i^k + 1)$$

e portanto

$$\prod_{1 \le i \le n} (\lambda b_i - \lambda a_i - 1) \le \sum_{k=1}^{m} \prod_{1 \le i \le n} (\lambda y_i^k - \lambda x_i^k + 1).$$

Dividindo esta desigualdade por λ^n vem

$$\prod_{1 \le i \le n} (b_i - a_i - \frac{1}{\lambda}) \le \sum_{k=1}^{m} \prod_{1 \le i \le n} (y_i^k - x_i^k + \frac{1}{\lambda}).$$

e fazendo λ tender para ∞ obtemos

$$\ell(J) = \prod_{1\le i\le n} (b_i - a_i) \le \sum_{k=1}^{m} \prod_{1\le i\le n} (y_i^k - x_i^k) = \sum_{k=1}^{m} \ell(I^k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I^k).$$

Como o recobrimento $(I^k)_{k\in N}$ de J por intervalos abertos é arbitrário, segue que $\ell(J) \le m^*J$.

b) Se $J = |a,b|$ não é fechado, dado $\varepsilon > 0$ seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno para que tenhamos

$$K = \prod_{1\le i\le n} [a_i+\delta, b_i-\delta] \subset J \text{ e } \ell(K) > \ell(J)-\varepsilon.$$

Portanto

$$\ell(J)-\varepsilon < \ell(K) = m^*K \le m^*J$$

isto é, $\ell(J)-\varepsilon < m^*J$ e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue o resultado. $\square$

A demonstração acima é de von Neumann; ver o livro "*Differential Topology*" de Guillemin e Pollack, pág. 203.

* <u>EXERCÍCIO 8</u> - Seja $J = \prod_{1\le i\le n} |a_i, b_i|$ um intervalo infinito, i,é, existe $k\in\{1,\dots,n\}$ tal que $b_k - a_k = \infty$. Demonstrar que $m^*J = \ell(J)$.

<u>COROLÁRIO 1.2.1</u> - Se A é um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}^n$ então $m^*A = 0$.

De fato: seja $A = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}, \dots,\}$ e seja $\varepsilon>0$.

Para todo k seja I_k um intervalo aberto de $\mathbb{R}^n$ de volume $\leq \frac{\varepsilon}{2^k}$ e que contêm $a^{(k)}$. Então temos

$$\bigcup_{k\in N} I_k \supset A \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leq \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue o resultado.

COROLÁRIO 1.2.2 - Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, o conjunto $[a,b]$ não é enumerável.

De fato: se $[a,b]$ fosse enumerável teríamos

$$m^*([a,b]) = 0$$

pelo corolário 1.2.1, mas no teorema 1.2 demonstramos que

$$m^*([a,b]) = \ell([a,b]) = b-a>0.$$

1.3 - A Noção de Medida

No que segue indicamos frequentemente por $\tilde{A}$ o complementar em E de um subconjunto A de E. Dados $A, B \subset E$ escrevemos $B \sim A = B \cap CA$.

Dizemos que $A \subset P(E)$, $A \neq \phi$, é uma *σ-álgebra* (sobre E) se valem as propriedades

$$(\tilde{A}) \quad A \in A \Longrightarrow CA \in A$$

$$(A_\sigma) \quad A_k \in A, k \in N \Longrightarrow \bigcup_{k\in N} A_k \in A$$

OBSERVAÇÃO 1.2 - Se A é uma σ-álgebra, de $A_k \in A$, $k \in N$, segue

que

$$\bigcap_{k\in N} A_k \in \mathcal{A} \text{ pois } \bigcap_{k\in N} A_k = C\left[C \bigcap_{k\in N} A_k\right] = C\left[\bigcup_{k\in N} CA_k\right].$$

Portanto $\phi, E \in \mathcal{A}$. [□].

Lembremos que $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{A}\neq\phi$, é uma *álgebra* (sobre E) se $\mathcal{A}$ satisfaz $(\tilde{A})$ e se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ implica que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. É imediato então que $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ implica que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ e também que $A_1 \sim A_2 \in \mathcal{A}$.

Dar uma *medida* sobre um conjunto E é dar uma σ-álgebra $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(E)$ e uma função

$$\mu:\ \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$$

que satisfaz as propriedades

(M_0) $\mu\phi = 0$

(M_σ) μ é *σ-aditiva*, isto é, dados conjuntos $A_k \in \mathcal{A}$, $k\in N$, dois a dois disjuntos temos

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{k\in N}} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k$$

(onde escrevemos $\dot{\bigcup}_{k\in N} A_k$ para salientar que os conjuntos A_k são dois a dois disjuntos). Indicamos a medida por $(E,\mathcal{A},\mu)$ ou simplesmente por $(\mathcal{A},\mu)$ ou ainda por μ.

OBSERVAÇÃO 1.3 - Dada uma medida $(E,\mathcal{A},\mu)$ e $A,B\in\mathcal{A}$ com $A\subset B$ temos

$$\text{a) } \mu A \le \mu B; \qquad \text{b) } \mu(B\sim A) = \mu B - \mu A \text{ se } \mu A < \infty.$$

De fato: podemos escrever $B = A\dot{\cup}(B\sim A)\dot{\cup}\phi\dot{\cup}\phi\dot{\cup}\ldots$; então de (M_0) e (M_σ) segue que $\mu B = \mu A + \mu(B\sim A)$ o que implica que $\mu A \le \mu B$ e se $\mu A < \infty$ temos $\mu B - \mu A = \mu(B\sim A)$.

TEOREMA 1.3 - Seja $(\mathcal{A},\mu)$ uma medida sobre E

a) Dados $A_k\in\mathcal{A}$, $k\in N$, com $A_1\subset A_2\subset\ldots\subset A_k\subset\ldots$ temos

$$\mu\left(\bigcup_{k\in N} A_k\right) = \sup_{k\in N} \mu A_k = \lim_{k\to\infty} \mu A_k$$

b) Dados $A_k\in\mathcal{A}$, $k\in N$, com $A_1\supset A_2\supset\ldots\supset A_k\supset\ldots$ e $\mu A_1 < \infty$ temos

$$\mu\left(\bigcap_{k\in N} A_k\right) = \inf_{k\in N} \mu A_k = \lim_{k\to\infty} \mu A_k$$

DEMONSTRAÇÃO - a) Definindo $A_1' = A_1$ e $A_{k+1}' = A_{k+1}\sim A_k$ temos $A_k'\in\mathcal{A}$ para todo $k\in N$, $A_k = A_1'\dot{\cup}\ldots\dot{\cup}A_k'$, os conjuntos A_k' sendo sendo dois a dois disjuntos. O resultado segue então de

$$\mu\left(\bigcup_{k\in N} A_k\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{k\in N}} A_k'\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k' = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu A_k' = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\dot{\bigcup_{1\le i\le m}} A_k'\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \mu A_m = \sup_{m\in N} \mu A_m.$$

b) Seja $D = \bigcap_{k \in N} A_k$ e $D_k = A_k \sim A_{k+1}$. Temos $A_1 \sim D = \dot{\bigcup_{k \in N}} D_k$ e portanto

$$\mu(A_1 \sim D) = \mu\left(\dot{\bigcup_{k \in N}} D_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu D_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \sim A_{k+1}).$$

Como por hipótese temos $\mu A_1 < \infty$, segue que $\mu A_k < \infty$ e pela Observação 1.3 b) temos então que $\mu(A_1 \sim D) = \mu A_1 - \mu D$ e $\mu(A_k \sim A_{k+1}) = \mu A_k - \mu A_{k+1}$. Portanto

$$\mu A_1 - \mu D = \sum_{k=1}^{\infty} [\mu A_k - \mu A_{k+1}] = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} [\mu A_k - A_{k+1}] =$$

$$= \lim_{m \to \infty} [\mu A_1 - \mu A_{m+1}] = \mu A_1 - \lim_{m \to \infty} \mu A_{m+1}$$

e como $\mu A_1 < \infty$, segue-se que

$$\mu D = \lim_{m \to \infty} \mu A_m = \inf_{m \in N.} \mu A_m. \qquad \square$$

<u>EXERCÍCIO 9</u> - Dar um exemplo mostrando que em b) do teorema 1.3 não podemos prescindir da hipótese $\mu A_1 < \infty$.

[Sugestão: $A_k = [k, \infty[$].

<u>EXERCÍCIO 10</u> - Dado um conjunto E demonstrar que a classe $\mathcal{A}$ dos subconjuntos A de E tais que A ou CA é enumerável forma uma σ-álgebra.

<u>EXERCÍCIO 11</u> - Demonstrar que os subconjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$ tais que $m^*A = 0$ ou $m^*(CA) = 0$ formam uma σ-álgebra.

EXERCÍCIO 12 - Seja $(\mathcal{A},\mu)$ uma medida sobre E; dados $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ demonstrar que se $\mu(A_1 \cap A_2) < \infty$ tem-se

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu A_1 + \mu A_2 - \mu(A_1 \cap A_2).$$

EXERCÍCIO 13 - Seja $\mathcal{A}$ a σ-álgebra do Exercício 10 com E não enumerável

a) Dado $A \in \mathcal{A}$ definimos $\mu_1 A = 0$ se A é enumerável e $\mu_1 A = 1$ se CA é enumerável; demonstrar que μ_1 é uma medida.

b) Dado $A \in \mathcal{A}$ definimos $\mu_\infty A = 0$ se A é enumerável e $\mu_\infty A = \infty$ se CA é enumerável; demonstrar que μ_∞ é uma medida.

EXERCÍCIO 14 - Dado um conjunto E para todo $A \subset E$ definimos $\nu A = n$ se A tem n elementos e $\nu A = \infty$ se A é infinito. Demonstrar que ν é uma medida.

EXERCÍCIO 15 - Seja $(\mathcal{A},\mu)$ uma medida sobre E; para todo $X \subset E$ definimos $\mu^* X = \inf\{\mu A \mid A \in \mathcal{A}, A \supset X\}$. Demonstrar que μ^* é uma medida exterior, e que $\mu^* A = \mu A$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

1.4 - A medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$

Dada a medida de Lebesgue exterior $m^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, dizemos que um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é *mensurável* se para todo $X \subset \mathbb{R}^n$ temos

$$m^* X = m^*(X \cap M) + m^*(X \cap \tilde{M}).$$

OBSERVAÇÃO 1.4 - Para demonstrar que um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável basta demonstrar que para qualquer subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ temos

$$m^*X \geq m^*(X \cap M) + m^*(X \cap \tilde{M})$$

pois do axioma (M_σ^*) segue a desigualdade contrária já que vale

$$X \subset (X \cap M) \cup (X \cap CM).$$

<u>EXERCÍCIO</u> <u>16</u> - Demonstrar que $M \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável se e somente se para todo $A \subset M$ e $B \subset CM$ temos $m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B$.

Indicamos por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, ou simplesmente por $\mathcal{M}$ a classe de todos os subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$.

<u>TEOREMA 1.4</u> - Seja m^* a medida exterior de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$, temos:

a) A classe $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ de todos os subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ é uma σ-álgebra;

b) A restrição m de m^* à σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é uma medida;

c) Todo conjunto de medida exterior nula é mensurável.

DEMONSTRAÇÃO - c) Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ com $m^*E = 0$. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ temos então $m^*(X \cap E) = 0$ e $m^*X \geq m^*(X \cap CE)$ donde segue que

$$m^*X \geq m^*(X \cap E) + m^*(X \cap \tilde{E})$$

e pela observação 1.4 E é portanto mensurável.

a) É imediato que $\mathcal{M}$ satisfaz a propriedade $(\tilde{A})$ pois a definição de conjunto mensurável é invariante em relação à passagem ao complementar. Antes de demonstrar a propriedade (A_σ) vamos provar alguns resultados parciais.

LEMA 1.4.1 - $M_1, M_2 \in \mathcal{M} \Longrightarrow M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}$.

DEMONSTRAÇÃO - Dado qualquer $X \subset \mathbb{R}^n$ temos

$$X \cap (M_1 \cup M_2) = (X \cap M_1) \cup (X \cap M_2 \cap \tilde{M}_1);$$

portanto $m^*[X \cap (M_1 \cup M_2)] \leq m^*(X \cap M_1) + m^*(X \cap M_2 \cap \tilde{M}_1)$. Adicicnando $m^*(X \cap (M_1 \cup M_2)^\sim) = m^*(X \cap \tilde{M}_1 \cap \tilde{M}_2)$ a ambos os membros desta desigualdade vem

$$m^*[X \cap (M_1 \cup M_2)] + m^*[X \cap (M_1 \cup M_2)^\sim] \leq$$
$$\leq m^*(X \cap M_1) + m^*(X \cap \tilde{M}_1 \cap M_2) + m^*(X \cap \tilde{M}_1 \cap \tilde{M}_2);$$

sendo M_2 mensurável o 2º membro da desigualdade é igual a $m^*(X \cap M_1) + m^*(X \cap \tilde{M}_1)$ que é igual a m^*X pois M_1 é mensurável. Assim demonstramos que

$$m^*[X \cap (M_1 \cup M_2)] + m^*[X \cap (M_1 \cup M_2)^\sim] \leq m^*X$$

e $M_1 \cup M_2$ é pois mensurável.

COROLÁRIO 1.4.1 - Os subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ formam uma álgebra.

LEMA 1.4.3 - Dados $M_1, \ldots, M_p \in \mathcal{M}$ dois a dois disjuntos, para todo $X \subset \mathbb{R}^n$ temos

$$m^*[X\cap \dot{\bigcup_{1\le i\le p}} M_i] = \sum_{i=1}^{p} m^*(X\cap M_i)$$

De fato:vamos fazer a demonstração por indução sobre p. Para $p=1$ não há o que demonstrar. Vamos supor o resultado verdadeiro para $p-1\ge 1$ e demonstrá-lo para p: temos

$$X\cap[\dot{\bigcup_{1\le i\le p}} M_i]\cap M_p = X\cap M_p$$

e os M_i sendo dois a dois disjuntos temos

$$X\cap[\dot{\bigcup_{1\le i\le p}} M_i]\cap\tilde{M}_p = X\cap \dot{\bigcup_{1\le i\le p-1}} M_i;$$

sendo M_p mensurável, temos

$$m^*(X\cap \dot{\bigcup_{1\le i\le p}} M_i) = m^*(X\cap(\dot{\bigcup_{1\le i\le p}} M_i)\cap M_p)+m^*(X\cap(\dot{\bigcup_{1\le i\le p}} M_i)\cap\tilde{M}_p) =$$

$$= m^*(X\cap M_p)+m^*(X\cap \dot{\bigcup_{1\le i\le p-1}} M_i)$$

e o resultado segue da hipótese de recorrência aplicado ao último somando.

<u>COROLÁRIO 1.4.4</u> - Sejam $M_1,\dots,M_p$ mensuráveis, dois a dois disjuntos; temos

$$m\left(\dot{\bigcup_{1\le i\le p}} M_i\right) = \sum_{i=1}^{p} mM_i$$

De fato: basta aplicar o lema precedente com $X = \mathbb{R}^n$ [□: por que razão podemos escrever m em lugar de m* na igualdade acima?]

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE (A_σ) (Teorema 1.4,a): sejam $M_k \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N}$, e $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$; podemos supor que os M_k são dois a dois disjuntos pois senão consideramos os conjuntos

$$M'_k = M_k \sim (M_1 \cup \ldots \cup M_{k-1})$$

que satisfazem

$$\dot{\bigcup_{1\le i\le k}} M'_i = \bigcup_{1\le i\le k} M_i$$

e que pelo corolário 1.4.2 também são mensuráveis. Seja então $S_k = M_1 \dot\cup \ldots \dot\cup M_k$ que é mensurável; $\tilde{S}_k \supset \tilde{M}$ e S_k sendo mensurável temos

$$m^*X = m^*(X \cap S_k) + m^*(X \cap \tilde{S}_k) \ge m^*(X \cap S_k) + m^*(X \cap \tilde{M}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} m^*(X \cap M_i) + m^*(X \cap \tilde{M})$$

pelo lema 1.4.3 aplicado a S_k. Fazendo $k \to \infty$ e usando (M^*_σ) obtemos

$$m^*X \ge \sum_{i=1}^{\infty} m^*(X \cap M_i) + m^*(X \cap \tilde{M}) \ge m^*(X \cap M) + m^*(X \cap \tilde{M}) \quad \square$$

<u>DEMONSTRAÇÃO DE b) DO TEOREMA 1.4</u> - Sejam $M_k \in \mathcal{M}$, $k \in N$, dois a dois disjuntos; temos

$$m\left[\dot{\bigcup_{k\in N}} M_k\right] \geq m\left[\dot{\bigcup_{1\leq k\leq p}} M_k\right] = \sum_{k=1}^{p} mM_k$$

pelo corolário 1.4.4. Portanto

$$m\left[\dot{\bigcup_{k\in N}} M_k\right] \geq \sum_{k=1}^{\infty} mM_k$$

a desigualdade contrária segue de (M_σ^*). ▯

A medida m do teorema 1.4 é chamada de *medida de Lebesgue* de $\mathbb{R}^n$; as vezes a indicamos por m_n.

<u>EXERCÍCIO 17</u> - Seja M_k uma sequência de conjuntos mensuráveis de E dois a dois disjuntos; demonstrar que para qualquer $X \subset E$ temos

$$m^*(X \cap \dot{\bigcup_{k\in N}} M_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(X \cap M_k).$$

<u>EXERCÍCIO 18</u> - Lembremos que dada uma sequência $x_k \in \overline{\mathbb{R}}$ definimos o seu *limite inferior* e o seu *limite superior*, respectivamente por

$$\underline{\lim}\, x_k = \sup_{n\in N} \inf_{k\geq n} x_k \quad \text{e} \quad \overline{\lim}\, x_k = \inf_{n\in N} \sup_{k\geq n} x_k$$

a) Demonstrar que $\underline{\lim}\, x_k \leq \overline{\lim}\, x_k$ [Sugestão: mostrar que

$\sup_{n\in N} \inf_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$ e $\inf_{n\in N} \sup_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$].

b) Demonstrar que $\underline{\lim}\, x_k = \overline{\lim}\, x_k$ se e somente se existe $\lim_{k\to\infty} x_k$ (em $\overline{\mathbb{R}}$) que então coincide com eles.

[Sugestão: $\underline{\lim}\, x_k = \overline{\lim}\, x_k = \ell \iff$ dada uma vizinhança $V=[I,S]$ de ℓ existe k_V tal que para $k\geq k_V$ temos $x_k \in V \iff \ell = \lim_{k\to\infty} x_k$].

EXERCÍCIO 19 - Dada uma sequência M_k de subconjuntos de um conjunto E definimos o seu *limite inferior* e seu *limite superior*, respectivamente, por

$$\underline{\lim}\, M_k = \{x\in E \mid \exists k_x \in N \text{ tal que } x\in M_k \text{ para } k\geq k_x\}$$

$$\overline{\lim}\, M_k = \{x\in E \mid \text{existem infinitos } k\in N \text{ tais que } x\in M_k\};$$

e quando eles coincidem escrevemos $\lim M_k$; demonstrar que

$$\underline{\lim}\, M_k = \bigcup_{n\in N} \bigcap_{k\geq n} M_k \quad \text{e} \quad \overline{\lim}\, M_k = \bigcap_{n\in N} \bigcup_{k\geq n} M_k$$

EXERCÍCIO 20 - Seja M_k uma sequência de subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$.

a) Demonstrar que $\underline{\lim}\, M_k$ é mensurável e que:

$$m(\underline{\lim}\, M_k) \leq \underline{\lim}\, mM_k$$

b) Demonstrar que $\overline{\lim}\, M_k$ é mensurável e que se temos

$$m\left(\bigcup_{k\in N} M_k\right) < \infty \quad \text{então}$$

$$\overline{\lim}\, mM_k \leq m(\overline{\lim}\, M_k).$$

c) Demonstrar que se existe $\lim M_k$ este conjunto é mensurável e que se

$$m\left(\bigcup_{k\in N} M_k\right) < \infty, \text{ então}$$

$$m(\lim M_k) = \lim mM_k.$$

<u>EXERCÍCIO 21</u> - Seja $M\subset\mathbb{R}^n$ mensurável, $h\in\mathbb{R}^n$ e $\lambda\in\mathbb{R}$. Demonstrar que $M+h$ e λM são mensuráveis e que $m(M+h) = mM$, $m(\lambda M) = |\lambda|^n mM$.

<u>TEOREMA 1.5</u> - Qualquer intervalo $J\subset\mathbb{R}^n$ é mensurável.

DEMONSTRAÇÃO - 1. Consideremos primeiro o caso da reta, isto é, aquele em que $n=1$. Basta mostrar que qualquer intervalo da forma $I =]a,\infty[$ é mensurável pois então $[a,\infty[$, $]-\infty,a]$ e $]-\infty,a[$ também são mensuráveis e qualquer intervalo é intersecção de um intervalo de forma $]-\infty,d]$ ou $]-\infty,d[$ com um intervalo da forma $[c,\infty[$ ou $]c,\infty[$.

Pela observação 1.4, para demonstrar que $I =]a,\infty[$ é mensurável é suficiente mostrar que para qualquer $X\subset\mathbb{R}$ temos

$$m^*X \geq m^*(X\cap]a,\infty[) + m^*(X\cap]-\infty,a]).$$

Se $m^*X = \infty$ nada há a demonstrar. Se $m^*X < \infty$ dado $\varepsilon < 0$ existe uma sequência $(I_k)_{k\in N}$ de intervalos abertos tais que

$$\bigcup_{k\in N} I_k \supset X \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leq m^*X+\varepsilon.$$

Seja $I_k' = I_k \cap]a,\infty[$ e $J_k = I_k \cap]-\infty,a]$. Do Teorema 1.2 segue que temos $\ell(I_k) = \ell(I_k') + \ell(J_k) = m^*I_k' + m^*J_k$. De

$$X\cap]a,\infty[\subset \bigcup_{k\in N} I_k' \text{ segue que } m^*(X\cap]a,\infty[) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*I_k'$$

e de

$$X\cap]-\infty,a] \subset \bigcup_{k\in N} J_k \text{ segue que } m^*(X\cap]-\infty,a]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*J_k$$

e portanto

$$m^*(X\cap]a,\infty[)+m^*(X\cap]-\infty,a]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [m^*I_k'+m^*J_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leq m^*X+\varepsilon$$

donde segue o resultado pois $\varepsilon > 0$ é arbitrário.

2. Quando $n > 1$, é suficiente demonstrar, como acima, que intervalos da forma $I = \mathbb{R}^p \times]a,\infty[\times \mathbb{R}^q \subset \mathbb{R}^n$ (com $p+1+q = n$) são mensuráveis; a demonstração é análoga à de 1.

Vamos agora examinar que outros subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ são mensuráveis além dos subconjuntos de medida exterior nula e dos intervalos.

Todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ *é mensurável.* De fato, indiquemos por K o conjunto dos cubos abertos de $\mathbb{R}^n$ cujas faces são paralelas aos hiperplanos de coordenadas e indiquemos por K_Q o conjunto daqueles elementos de K cujas coordenadas do centro são números racionais e cujo lado tem comprimento racional. O conjunto K_Q é evidentemente enumerável

[□]. Todo aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como reunião de (uma sequência de) cubos de K_Q. De fato, se $x \in U$ existe um cubo de K com centro em x e lado $\delta > 0$ que está contido em U; se p é um inteiro tal que $\frac{1}{p} < \frac{\delta}{6}$ e $\bar{x}$ um ponto que tem todas as coordenadas racionais e com $d(\bar{x},x) < \frac{1}{p}$, então o cubo de K_Q de centro $\bar{x}$ e lado $\frac{2}{p}$ está contido em U e contém x. □

Da propriedade $(\bar{A})$ segue que *todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ é mensurável.*

Mais geralmente, dada uma classe X de subconjuntos de um conjunto E, indicamos por X_δ[X_σ] a classe dos subconjuntos X de E que podem ser escritos como intersecção [reunião] de uma sequência $(X_k)_{k \in N}$ de conjuntos $X_k \in X$.

Se então indicamos por G[F] a classe de todos os subconjuntos abertos [fechados] de $\mathbb{R}^n$, segue-se que os elementos de G_δ, F_σ, $G_{\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma\delta}$, etc. são conjuntos mensuráveis.

De um modo mais geral, é imediato que a intersecção de uma família qualquer de σ-álgebras de um conjunto E é uma σ-álgebra [□]; portanto dado $X \subset P(E)$ existe uma menor σ-álgebra que contém X: é a intersecção de todas as σ-álgebtas de E que contém X. Quando E é um espaço topológico e X é a classe G dos subconjuntos abertos de E então os conjuntos da menor σ-álgebra B de E que contêm G são chamados de *conjuntos borelianos.*

Os conjuntos borelianos de $\mathbb{R}^n$ são mensuráveis pois $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{B}$. Demonstramos pois o

COROLÁRIO 1.5.1 - Os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que são abertos, fechados, G_δ, F_σ, ou mais geralmente, borelianos são mensuráveis.

OBSERVAÇÃO 1.5 - Lembremos mais uma vez que todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que podem ser obtidos *construtivamente* são mensuráveis (e mesmo borelianos). Para provar a existência de subconjuntos não mensuráveis de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ precisa-se do Axioma da Escolha; ver [R], Cap.III, §4.

EXERCÍCIO 22 - Demonstrar que o conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+1 \leq y^2\}$$

é mensurável.

EXERCÍCIO 23 - Demonstrar que o conjunto

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < y < z\}$$

é mensurável.

EXERCÍCIO 24 - Dar exemplos de conjuntos mensuráveis $E, F \subset \mathbb{R}$ tais que

*a) F é fechado, $mF > 0$, $m(F \cap [a,b]) < b-a$ para todo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ com $a < b$.

**b) $0 < m(E \cap [a,b]) < b-a$ para todo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ com $a < b$.

EXERCÍCIO 25 - Sendo μ^* uma medida exterior sobre um conjunto E e sendo $\mu^* E < \infty$, define-se a medida interior $\mu_* X$ de $X \subset E$ por

$$\mu_* X = \mu^* E - \mu^*(E \sim X)$$

*a) Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável com $mE < \infty$. Demonstrar que são equivalentes as propriedades

i) $m^*X + m^*(E \sim X) = mE$ ii) $m_* X = m^* X$ iii) X é mensurável

[Sugestão: mostrar que existem $H \in F_\sigma$ e $G \in G_\delta$ com $H \subset X \subset G$, $m_* H = m_* X$ e $m^* G = m^* X$ (Cf. o exercício 2.b)].

b) Seja $E = \{1,2,3\}$; para $X \subset E$ definimos $\mu^* \phi = 0$, $\mu^* E = 2$ e $\mu^* X = 1$ se $\phi \neq X \neq E$. Dar exemplo de um subconjunto não mensurável $X \subset E$ tal que $\mu_* X = \mu^* X$.

**EXERCÍCIO 26 - Demonstrar que nem todo conjunto mensurável é boreliano. [Sugestão: mostrar que a classe dos conjuntos mensuráveis tem a potência de $P(\mathbb{R})$ e que a classe dos conjuntos borelianos tem a potência de $\mathbb{R}$].

EXERCÍCIO 27 - Seja $\mathcal{M}$ a classe dos subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}$ e B um conjunto qualquer; dado $X \subset \mathbb{R} \times B$ definimos $\mu^* X = m^*(pr_{\mathbb{R}} X)$. Demonstrar que μ^* é uma medida exterior sobre $\mathbb{R} \times B$ e que X é mensurável se e somente se $X = M \times B$ com $M \in \mathcal{M}$.

**EXERCÍCIO 28 - Demonstrar que o conjunto dos números reais em cujo desenvolvimento decimal o algarismo 7 comparece numa "proporção" $>a$ (onde $0 \leq a < 1$) é mensurável (e boreliano).

* EXERCÍCIO 29 - Seja $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Demonstrar que o conjunto dos pontos em que f é contínua é um G_δ.

* EXERCÍCIO 30 - Seja $f_k:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções contínuas. Demonstrar que o conjunto dos pontos em que a sequência f_k é convergente é um $F_{\sigma\delta}$.

§2 - FUNÇÕES MENSURÁVEIS

A partir deste § todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que vamos considerar são mensuráveis, a menos de menção explícita em contrário.

Os resultados fundamentais deste § são os teoremas 2.1 e 2.2 e seus corolários. O teorema 2.1 diz que toda função contínua é mensurável e o teorema 2.2 diz que todas as *operações* que efetuamos com funções mensuráveis nos levam novamente a funções mensuráveis. Por *operações* entendemos tanto as operações algébricas habituais de soma, produto e inverso como as operações de tomar o limite de uma sequência, o seu sup e seu inf. Todas as funções mensuráveis que vamos encontrar na prática são obtidas a partir das funções contínuas por meio destas operações.

2.1 - Funções Numéricas Mensuráveis

Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável; dizemos que uma função $f:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é *mensurável* se ela satisfaz a uma das propriedades equivalentes seguintes:

1. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$ é mensurável
2. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}$ é mensurável
3. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in E \mid f(x) < \alpha\}$ é mensurável
4. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$ é mensurável

A equivalência das quatro propriedades acima é imediata:

1. $\Longleftrightarrow$ 4. e 2. $\Longleftrightarrow$ 3. seguem por passagem ao complementar;

1. $\Longrightarrow$ 2. segue de

$$\{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{k \in N} \{x \in E \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{k}\}$$

2. $\Longrightarrow$ 1. segue de

$$\{x \in E \mid f(x) > \alpha\} = \bigcup_{k \in N} \{x \in E \mid f(x) \geq \alpha + \frac{1}{k}\}$$

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>2.1</u> - Se $f:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável então para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ o conjunto $f^{-1}(\alpha) = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$ é mensurável.

De fato: quando $\alpha \in \mathbb{R}$ o resultado segue de

$$f^{-1}(\alpha) = f^{-1}([-\infty, \alpha]) \cap f^{-1}([\alpha, +\infty]).$$

Para $\alpha = -\infty$ ou $\alpha = \infty$ o resultado segue de

$$f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{k \in N} f^{-1}([-\infty, -k]) \quad \text{e} \quad f^{-1}(\infty) = \bigcap_{k \in N} f^{-1}([k, \infty]).$$

OBSERVAÇÃO 2.2 - Seja $mE < \infty$ e $f:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensurável tal que $m\{x\in E \mid |f(x)| = \infty\} = 0$. Então dado $\varepsilon > 0$ existem $E_\varepsilon \subset E$ e $M > 0$ tais que $m(E \sim E_\varepsilon) \le \varepsilon$ e $|f(x)| \le M$ se $x \in E_\varepsilon$.

De fato, pelo teorema 1.3,b temos

$$m\{x\in E \mid |f(x)| = \infty\} = \lim_{k\to\infty} m\{x\in E \mid |f(x)| > k\};$$

portanto existe $M > 0$ tal que $m\{x\in E \mid |f(x)| > M\} \le \varepsilon$ e basta tomar $E_\varepsilon = C\{x\in E \mid |f(x)| > M\}$.

EXERCÍCIO 1 - Seja $f:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Demonstrar que o conjunto $\{x\in E \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$ é mensurável.

EXERCÍCIO 2 - Demonstrar que

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \; \chi_{\tilde{A}} = 1 - \chi_A \quad \text{e} \quad \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}.$$

EXERCÍCIO 3 - Seja $M \subset \mathbb{R}^n$. Demonstrar que M é mensurável se e somente se χ_M é mensurável.

EXERCÍCIO 4 - a) Sejam M mensurável e $M_0 \subset M$ mensurável. Demonstrar que se $f:M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável então $f_{|M_0}$ é mensurável.

b) Seja $(M_k)_{k\in N}$ uma sequência de conjuntos mensuráveis e $M = \bigcup_{k\in N} M_k$. Demonstrar que $f:M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se e somente se $f_{|M_k}$ é mensurável para todo $k \in N$.

EXERCÍCIO 5 - Demonstrar que toda função monótona $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável.

EXERCÍCIO 6 - Demonstrar que a função de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{R} \sim Q \\ \\ 0 \text{ se } x \in Q \end{cases}$$

é mensurável.

EXERCÍCIO 7 - Seja $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável, demonstrar que

a) para todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ é mensurável

*b) para todo conjunto boreliano $B \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ é mensurável.

EXERCÍCIO 8 - Seja $f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, definimos

$$\|f\|_\infty = \sup \text{ess} |f| = \inf\{c \in [0,\infty] \mid m\{x \in E \mid |f(x)| > c\} = 0\}.$$

Seja $\|f\|_\infty < \infty$; demonstrar que $m\{x \in E \mid |f(x)| > \|f\|_\infty\} = 0$.

EXERCÍCIO 9 - Demonstrar que $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$ exceto num conjunto de medida nula.

EXERCÍCIO 10 - Sejam f e g mensuráveis e $\lambda \in \mathbb{R}$; demonstrar que

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{e} \quad \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty .$$

EXERCÍCIO 11 - Demonstrar que $\|f_k\|_\infty \longrightarrow 0 \iff f_k \xrightarrow{u} 0$ no complementar de um conjunto de medida nula.

TEOREMA 2.1 - Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável; toda função contínua $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável.

DEMONSTRAÇÃO - Como f é contínua, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $f^{-1}(]\alpha,\infty[)$ é um subconjunto aberto de E e é portanto mensurável por ser a intersecção de um subconjunto aberto (e portanto mensurável) de $\mathbb{R}^n$ com o conjunto mensurável E. $\square$

Dizemos que um conjunto A de funções $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *álgebra* se para $f,g \in A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos $f+g, \lambda f, fg \in A$.

Dizemos que um conjunto R de funções $f\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é um σ-*reticulado* se dados $f_k \in R$ $(k \in N)$ temos $\sup\limits_{k\in N} f_k$, $\inf\limits_{k \in N} f_k \in R$ onde, por definição,

$$(\sup_{k\in N} f_k)(x) = \sup_{k\in N} f_k(x) \quad \text{e} \quad (\inf_{k\in N} f_k)(x) = \inf_{k\in N} f_k(x)$$

Lembramos que um conjunto R de funções $f\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é um *reticulado* se $f,g \in R$ implica que $\sup(f,g)$ e $\inf(f,g) \in R$.

TEOREMA 2.2 - Seja E um conjunto mensurável

a) As funções mensuráveis $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ formam uma álgebra que contêm as funções constantes.

b) As funções mensuráveis $f\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ formam um σ-reticulado.

DEMONSTRAÇÃO - a) segue das cinco seguintes asserções que vamos demonstrar sucessivamente

1. Toda função constante é mensurável: demonstração imediata.
2. Se f é uma função mensurável e c é constante então a função cf é mensurável. De fato, se [illegible] para todo

$\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$\{x \in E \mid cf(x) > \alpha\} = \{x \in E \mid f(x) > \frac{\alpha}{c}\}$$

e este último conjunto é mensurável pois f é por hipótese mensurável. Para $c < 0$ a demonstração é análoga. Para $c = 0$ temos 1.

3. Se f e g são mensuráveis $f+g$ é mensurável. De fato: dado $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$\{x \in E \mid f(x)+g(x) > \alpha\} = \{x \in E \mid f(x) > \alpha - g(x)\} =$$

$$= \bigcup_{r \in Q} \{x \in E \mid f(x) > r\} \cap \{x \in E \mid g(x) > \alpha - r\}.$$

pois $f(x) > \alpha - g(x)$ se e somente se existe um número racional r tal que $f(x) > r > \alpha - g(x)$.

4. Se f é mensurável, f^2 é mensurável. De fato: para $\alpha \geq 0$ temos

$$\{x \in E \mid f^2(x) > \alpha\} = \{x \in E \mid f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in E \mid f(x) < -\sqrt{\alpha}\};$$

para $\alpha < 0$ temos $\{x \in E \mid f^2(x) > \alpha\} = E$.

5. Se f e g são mensuráveis, fg é mensurável. De fato, temos $fg = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$ e o resultado segue pois de 3., 4. e 2..

b) Dada uma sequência de funções mensuráveis $f_k : E \longrightarrow \mathbb{R}$ seja $f = \sup_{k \in N} f_k$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$\{x\in E|f(x)>\alpha\} = \bigcup_{k\in N}\{x\in E|f_k(x)>\alpha\}$$

donde segue que f é mensurável. Para $g = \inf\limits_{k\in N} f_k$ a demonstração é análoga. ▯

<u>COROLÁRIO 2.2.1</u> - Se $f:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável então as funções $|f|$, f_+ e f_- são mensuráveis.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Temos, por definição,

$$|f| = \sup(f,-f),\ f_+ = \sup(f,0),\ f_- = \sup(-f,0).\quad ▯$$

Lembremos (ver o Exercício 18 do §1) que dada uma sequência $x_k\in\overline{\mathbb{R}}$ definimos

$$\limsup_{k\to\infty} x_k = \overline{\lim_{k\in N}}\, x_k = \inf_{m\in N}\sup_{k\geq m} x_k$$

e

$$\liminf_{k\to\infty} x_k = \underline{\lim_{k\in N}}\, x_k = \sup_{m\in N}\inf_{k\geq m} x_k.$$

Temos sempre $\underline{\lim}\, x_k \leq \overline{\lim}\, x_k$ [▯] e estes dois números são iguais se e somente se existe $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ que então coincide com eles. [▯]

Dada uma sequência de funções $f_k:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definimos

$$(\overline{\lim}\, f_k)(x) = \overline{\lim}\, f_k(x) \quad e \quad (\underline{\lim}\, f_k)(x) = \underline{\lim}\, f_k(x)$$

<u>COROLÁRIO 2.2.2</u> - Dada uma sequência $f_k:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ de funções

mensuráveis então as funções $\overline{\lim_{k\in N}} f_k$ e $\underline{\lim_{k\in N}} f_k$ são mensuráveis.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Temos $\overline{\lim} f_k = \inf_{m\in N} \sup_{k\geq m} f_k$ e analogamente para $\underline{\lim} f_k$; o resultado segue pois do Teorema 2.2,b).

<u>COROLÁRIO 2.2.3</u> - Dada uma sequência de funções mensuráveis $f_k: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que existe $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ então f é mensurável.

<u>EXERCÍCIO 12</u> - Seja $f_k: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma sequência de funções mensuráveis. Demonstrar que o conjunto dos pontos em que a sequência converge é mensurável.

<u>EXERCÍCIO 13</u> - Seja $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que em todo ponto existe $\frac{\partial f}{\partial x_1}$; demonstrar que esta função é mensurável.

<u>EXERCÍCIO 14</u> - Seja $X \subset E$ *não* mensurável e $f = \chi_X - \chi_{\bar{X}}$; demonstrar que f não é mensurável mas que $|f|$ o é.

<u>EXERCÍCIO 15</u> - Demonstrar que o conjunto

$$\{t\in\mathbb{R} \mid \overline{\lim}(\text{sen } kt + \cos kt) > 0\}$$

é mensurável (e boreliano).

* <u>EXERCÍCIO 16</u> - Demonstrar que o conjunto

$$\left\{t\in\mathbb{R} \mid \lim_{k\to\infty} \text{sen}|t|^k = \frac{1}{2}\right\}$$

é mensurável e boreliano.

Seja E um conjunto mensurável. Dizemos que uma *propriedade P vale quase sempre* em E (escrevemos q.s.) se os pontos de E para os quais P não está definida ou então para os quais

P não vale formam um conjunto de medida nula.

<u>EXEMPLOS</u> <u>1</u> - Seja $E_0 \subset E$ tal que $m(\tilde{E}_0) = 0$ e seja $f: E_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$; dizemos que f *está definida q.s. em* E.

<u>2</u> - Dadas duas funções $f, g: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dizemos que elas são *iguais q.s.* e escrevemos $f = g$ q.s. ou $f \overset{q.s}{=\!=} g$ se o conjunto $\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$ tem medida nula. Esta definição tem sentido se f e g estão apenas definidas q.s. em E. [$\square$]

<u>3</u> - Dizemos que uma sequência de funções $f_k: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *tende q.s. para uma função* f e escrevemos $f_k \rightarrow f$ q.s. ou $f_k \xrightarrow{q.s} f$, ou $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ q.s. ou $f \overset{q.s}{=\!=} \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ se o conjunto dos pontos $x \in E$ em que não vale $f_k(x) \rightarrow f(x)$ tem medida nula. Esta definição tem sentido se as funções f_k e f estão apenas definidas q.s. em E.

<u>4</u> - Dada $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dizemos que f é *finita q.s.* se o conjunto $\{x \in E \mid |f(x)| = \infty\}$ tem medida nula. Esta definição têm sentido se f é apenas definida q.s. em E.

<u>5</u> - Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ dizemos que f é *contínua q.s.* se o conjunto dos pontos $x \in E$ em que f não é contínua tem medida nula. (Não são porém equivalentes as propriedades "$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua q.s." e "$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f|_{E_0}$ é contínua onde $E_0 \subset E$ e $m(E \sim E_0) = 0$" [$\square$]).

<u>OBSERVAÇÃO 2.3</u> - Se $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável e se

$g \overset{q.s}{=\!=} f$ então g é mensurável. De fato: por hipótese o conjunto

$$D = \{x \in E \mid g(x) \neq f(x)\}$$

tem medida nula. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$\{x \in E \mid g(x) > \alpha\} = \{x \in E \mid f(x) > \alpha\} \cap C\{x \in D \mid g(x) \leq \alpha\} \cup \{x \in D \mid g(x) > \alpha\}$$

donde segue o resultado já que o conjunto $\{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$ é mensurável pois f é, por hipótese, mensurável e já que os conjuntos $\{x \in D \mid g(x) \leq \alpha\}$ e $\{x \in D \mid g(x) > \alpha\}$ são mensuráveis pois D têm medida nula.

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>2.4</u> - Do corolário 2.2.3 e da observação precedente segue facilmente que se $f_k : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma sequência de funções mensuráveis tal que $f_k \xrightarrow{q.s} f$ então f é mensurável.[□]

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>2.5</u> - Se f e g estão definidas q.s. em E e são finitas q.s. então $f+g$ está definida q.s. em E: se f está definida em $E_f \subset E$ e g em E_g então $f+g$ está definida em

$$E_f \cap E_g \sim E_\infty \text{ onde } E_\infty$$

é o conjunto dos pontos de $E_f \cap E_g$ onde f e g tomam valores infinitos de sinal contrário.

* 2.2 - <u>O Teorema de Egoroff</u>

Seja E um conjunto mensurável e $f_k : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis. Dizemos que a sequência f_k

converge quase uniformemente para a função $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$, escrevemos $f_k \xrightarrow{q.u} f$ ou $f_k \longrightarrow f$ q.u., se dado $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto E_ε de E, de medida $\leq\varepsilon$, tal que f_k converge uniformemente para f em CE_ε.

OBSERVAÇÃO 2.6 - Se $f_k \xrightarrow{q.u.} f$ então f é mensurável e $f_k \xrightarrow{q.s} f$. De fato, como $f_k \xrightarrow{u} f$ em $CE_{1/m}$ então $f_k(x) \longrightarrow f(x)$ para todo

$$x \in \bigcup_{m \in N} CE_{1/m} \text{ cujo complementar, } \bigcap_{m \in N} E_{1/m},$$

tem medida nula. $\square$

A recíproca desta asserção não é verdadeira:

$$\chi_{[k,\infty[} \xrightarrow{q.s} 0 \text{ mas não vale } \chi_{[k,\infty[} \xrightarrow{q.u} 0 \text{ (em } \mathbb{R}).$$

Ela no entanto é verdadeira se, $mE < \infty$ como mostra o teorema que segue.

TEOREMA 2.3 (Egoroff) - Seja E um conjunto mensurável de medida *finita* e $f_k: E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis que converge q.s. para uma função $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$. Então $f_k \xrightarrow{q.u} f$.

DEMONSTRAÇÃO - Alterando eventualmente as f_k num conjunto de medida nula podemos supor que $f_k(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in E$. Dados $n, m \in N$ definimos os conjuntos

$$E_n^m = \bigcup_{k \geq n} \left\{ x \in E \mid |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m} \right\};$$

que são evidentemente mensuráveis [□]. Temos $E^m_{n+1} \subset E^m_n$ e de $f_k(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in E$ segue-se que $\bigcap_{n \in N} E^m_n = \phi$ para todo $m \in N$. Do teorema 1.3,b) segue então que $\lim_{n\to\infty} mE^m_n = 0$ e portanto dados $\varepsilon > 0$ e $m \in N$, existe $k_m \in N$ tal que $m(E^m_{k_m}) < \frac{\varepsilon}{2^m}$. Seja

$$E_\varepsilon = \bigcup_{m \in N} E^m_{k_m};$$

então E_ε é mensurável e $mE_\varepsilon < \varepsilon$. Se $x \in CE_\varepsilon$, temos $x \in CE^m_{k_m}$ para todo $m \in N$. Portanto

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

para todo $k \geq k_m$, isto é, $f_k \xrightarrow{u} f$ em CE_ε. □

§3 - A INTEGRAL DE LEBESGUE

Neste § vamos construir a integral de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$ e dar os teoremas fundamentais dela. O processo de construção que damos é tal que vai servir para construir uma integral a partir de uma medida qualquer. Numa primeira etapa consideramos funções simples positivas, isto é, funções que tomam apenas um número finito de valores. Para estas funções, a definição da integral é imediata. A seguir definimos a integral $\int f$, para funções mensuráveis positivas, f: $\int f$ é o sup das integrais de funções simples positivas $\phi \leq f$, este sup po de ser ∞. Finalmente, como uma função mensurável qualquer f pode ser escrita como diferença de sua parte positiva f_+ e de sua parte negativa f_-, definimos

$$\int f = \int f_+ - \int f_-$$

desde que tenhamos

$$\int f_+ , \int f_- < \infty .$$

Naturalmente, estas definições são acompanhadas da demonstração de que as integrais que assim definimos sucessivamente tem todas as propriedades que delas esperamos

$$\left(\int (f+g) = \int f + \int g, \ f \leq g \text{ implica } \int f \leq \int g, \text{ etc.} \right)$$

e ainda demonstramos que temos uma série de propriedades que tornam muito fácil o manejo destas integrais: o lema de Fatou, o teorema da convergência monótona, o teorema da convergência dominada de Lebesgue, etc.

Neste §, a menos de menção explícita em contrário, todos os conjuntos e todas as funções são mensuráveis.

3.1 - A Integral de Funções Simples Positivas

Lembremos que dado um subconjunto A de um conjunto

E, indicamos por χ_A a função característica de A: para todo $x \in E$ temos

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \\ 0 \text{ se } x \notin A \end{cases}$$

Dado um conjunto mensurável E, uma *função simples* $\phi: E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma combinação linear finita de funções características de subconjuntos mensuráveis $E_1, \ldots, E_k$ de E, isto é,

$$\phi = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i} \quad \text{onde } c_i \in \mathbb{R}$$

Evidentemente ϕ admite mais de uma representação como a acima [□] mas como ϕ só toma um número finito de valores, sejam eles $a_1, \ldots, a_p$, podemos associar a ϕ uma *representação canônica*:

$$\phi = \sum_{j=1}^{p} a_j \chi_{A_j} \quad \text{onde } A_j = \phi^{-1}(a_j).$$

EXEMPLO - Em $E = [0,2]$ a representação canônica da função

$$\phi = \chi_{[1,2]} \quad \text{é} \quad \phi = 0 \cdot \chi_{[0,1[} + 1 \cdot \chi_{[1,2]}.$$

OBSERVAÇÃO 3.1 - Enfatizemos que para que uma representação

$$\phi = \sum_{j=1}^{p} a_j \chi_{A_j}$$

seja canônica é necessário (e suficiente) que tenhamos

i) Os A_j são dois a dois disjuntos

ii) Os a_j são todos distintos

iii) $E = \bigcup_{1\le j\le p} A_j$ (e portanto algum dos a_j pode ser nulo)

Se ϕ é uma função simples positiva com representação canônica

$$\phi = \sum_{j=1}^{p} a_j \chi_{A_j}$$

(portanto $a_j \geq 0$) definimos

$$\int_E \phi = \int_E \phi(x)dx = \sum_{j=1}^{p} a_j mA_j$$

número este que será ∞ se e somente se $mA_j = \infty$ para algum j com $a_j > 0$.

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>3.2</u> - Sejam α e β função simples positivas.

a) Se $\alpha \leq \beta$ então

$$\int \alpha \leq \int \beta.$$

b) Se $a, b > 0$ então

$$\int (a\alpha + b\beta) = a\int \alpha + b\int \beta.$$

De fato: observemos inicialmente que se

$$\phi = \sum_{i=1}^{q} c_i \chi_{C_i},$$

onde os C_i são dois a dois disjuntos (mas os c_i não são necessariamente distintos nem supomos que $\bigcup_{1\leq i\leq q} C_i = E$) então

$$\int\phi = \sum_{i=1}^{q} c_i m C_i$$

pois para todo $a \geq 0$ seja $I_a = \{i \in \{1,\ldots,q\} \mid c_i = a\}$ (naturalmente podemos ter $I_a = \phi$); então

$$\sum_{i\in I_a} c_i m C_i = a m\left(\dot{\bigcup_{i\in I_a}} C_i\right).$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{q} c_i m C_i = \sum_{a\geq 0} a m\left(\dot{\bigcup_{i\in I_a}} C_i\right) \quad e \quad \dot{\bigcup_{i\in I_a}} C_i = \phi^{-1}(a)$$

e a última somatória corresponde à definição de $\int\phi$ a partir de uma representação canônica.

Para demonstrar a) e b) consideremos representações canônicas de α e β

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{A_i} \quad \mathbf{e} \quad \beta = \sum_{j=1}^{q} b_j \chi_{B_j}.$$

Os conjuntos $A_i \cap B_j$ para $i=1,2,\ldots,p$ e $j=1,2,\ldots,q$ são mensuráveis, dois a dois disjuntos, e temos [□]

$$\alpha = \sum_{i,j} a_i \chi_{A_i \cap B_j} \quad \text{e} \quad \beta = \sum_{i,j} b_j \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Então a) segue do fato de que $\alpha \leq \beta$ se e somente se $a_i \leq b_j$ em $A_i \cap B_j$ para todo $i=1,2,\ldots,p$ e $j=1,2,\ldots,q$ e como pela observação inicial temos

$$\int \alpha = \sum_{i,j} a_i m(A_i \cap B_j) \quad \text{e} \quad \int \beta = \sum_{i,j} b_j m(A_i \cap B_j)$$

segue que $\int \alpha \leq \int \beta$.

Demonstração de b): temos

$$a\alpha + b\beta = \sum_{i,j} (aa_i + bb_j) \chi_{A_i \cap B_j},$$

$$\int \alpha = \sum_i a_i m A_i = \sum_i a_i m\left(\dot{\bigcup_j} A_i \cap B_j\right) = \sum_i a_i \sum_j m(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} a_i m(A_i \cap B_j)$$

e analogamente

$$\int \beta = \sum_{i,j} b_j m(A_i \cap B_j);$$

portanto

$$a\int\alpha + b\int\beta = \sum_{i,j}(aa_i+bb_j)m(A_i\cap B_j).$$

Por outro lado, como

$$a\alpha+b\beta = \sum_{i,j}(aa_i+bb_j)\chi_{A_i\cap B_j},$$

e

$$\dot{\bigcup_{i,j}}(A_i\cap B_j) = E,$$

segue pela observação inicial que

$$\int (a\alpha+b\beta) = \sum_{i,j}(aa_i+bb_j)m(A_i\cap B_j),$$

e portanto

$$\int(a\alpha+b\beta) = a\int\alpha + b\int\beta. \quad \square$$

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>3.3</u> - Sejam $E_1,\dots,E_k$ subconjuntos mensuráveis de E, $c_1,\dots,c_k > 0$ e

$$\phi = \sum_{i=1}^{k} c_i\chi_{E_i}\text{; então } \int_E \phi = \sum_{i=1}^{k} c_i mE_i.$$

A demonstração segue por recorrência sobre k, aplicando a observação 3.2,b). [$\square$]

TEOREMA 3.1 - Sejam E um conjunto mensurável e $f:E \to [0,\infty]$ uma função mensurável. Existe uma sequência crescente de funções simples positivas $\phi_1 \le \phi_2 \le \dots \le \phi_k \le \dots$ com $\sup\limits_{k\in N} \phi_k = f$.

DEMONSTRAÇÃO - Para todo $k \in N$ definimos

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \frac{r-1}{2^k} \text{ se } \frac{r-1}{2^k} \le f(x) < \frac{r}{2^k}, \quad r=1,2,\dots,k2^k \\ \\ k \quad \text{se } f(x) \ge k \end{cases}$$

isto é

$$\phi_k = \sum_{r=1}^{k2^k} \frac{r-1}{2^k} \chi_{D_{k,r}} + k\chi_{D_k}$$

onde

$$D_{k,r} = f^{-1}([\frac{r-1}{2^k}, \frac{r}{2^k}[) \quad \text{e} \quad D_k = f^{-1}([k,\infty[).$$

EXERCÍCIO 1 - Sob a hipótese do Teorema 3.1 demonstrar que se f é limitada então $\phi_k \xrightarrow{u} f$.

3.2 - A Integral de Funções Mensuráveis Positivas

Sendo E um conjunto mensurável, indicamos por $S_+(E)$, ou simplesmente por S_+, o conjunto das funções simples positivas $\phi:E \to \mathbb{R}_+$.

Da observação 3.2,a) segue-se que dado $\phi \in S_+(E)$ temos

$$\int_E \phi = \sup\left\{\int_E \psi \mid \psi \in S_+(E), \psi \le \phi\right\}$$

o que justifica a seguinte definição: seja $f:E \longrightarrow [0,\infty]$ uma função mensurável, então escrevemos

$$\int_E f = \int_E f(x)\,dx = \sup\left\{\int_E \phi \mid \phi \in S_+(E), \phi \le f\right\} \in [0,\infty].$$

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>3.4</u> - Se A é um subconjunto mensurável de E é imediato que vale a igualdade

$$\left\{\int \phi \mid \phi \in S_+(E), \phi \le f\chi_A\right\} = \left\{\int \psi \mid \psi \in S_+(A), \psi \le f_{|A}\right\}$$

donde se segue que

$$\int_E f\chi_A = \int_A f_{|A} = \int_A f$$

onde identificamos f com $f_{|A}$.

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>3.5</u> - a) Sejam $f,g:E \longrightarrow [0,\infty]$ funções mensuráveis. Então

$$f = g \text{ q.s.} \Longrightarrow \int_E f = \int_E g.$$

b) Seja $f: E \longrightarrow [0,\infty]$ mensurável:

$$f = 0 \text{ q.s.} \iff \int_E f = 0.$$

De fato - a) Seja $D = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$. Seja $\phi \in S_+$ tal que $0 \leq \phi \leq f$ e seja $\phi_0 = \phi\chi_{\tilde{D}}$. Então $\phi_0 \in S_+$,

$$\int \phi_0 = \int \phi \quad [\square]$$

e $0 \leq \phi_0 \leq g$ donde se segue que

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

De modo análogo demonstramos que

$$\int_E g \leq \int_E f.$$

b) Resta demonstrar a implicação $\Leftarrow$. Se não tivessemos $f = 0$ q.s. existiria $\varepsilon > 0$ tal que $E_\varepsilon = f^{-1}([\varepsilon,\infty])$ teria medida >0 $[\square]$. Então $\phi = \varepsilon\chi_{E_\varepsilon} \in S_+$ e é tal que $0 \leq \phi \leq f$ e

$$\int_E \phi = \varepsilon m E_\varepsilon > 0;$$

portanto $\int_E f > 0$ contra a hipótese. $\square$

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>3.6</u> - Seja $f: E \to [0,\infty]$ tal que $\int_E f < \infty$, então f é finita q.s.

De fato: seja $E_\infty = \{x \in E \mid f(x) = \infty\}$. Se tivermos

$$mE_\infty = a > 0,$$

então para todo $k \in N$ consideremos a função simples $\psi_k = k\chi_{E_\infty}$. Temos $\psi_k \leq f$ e portanto

$$\int_E f \geq \int_E \psi_k = ka$$

para todo $k \in N$, isto é, $\int_E f = \infty$, contra a hipótese.

OBSERVAÇÃO 3.7 - Seja $f:E \to [0,\infty]$ tal que

$$\int_E f < \infty$$

e seja ϕ uma função simples tal que $0 \leq \phi \leq f$; então ϕ é nula fora de um conjunto de medida finita. [$\square$]

OBSERVAÇÃO 3.8 - É imediato que se $f,g \to [0,\infty]$ são mensuráveis e $f \leq g$ então

$$\int f \leq \int g$$

e que para $c \geq 0$ temos

$$\int cf = c\int f.$$

Porém só vamos conseguir demonstrar que

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

depois de ter provado os dois teoremas que seguem.

TEOREMA 3.2 (Lema de Fatou) - Seja $f_k: E \longrightarrow [0,\infty]$ uma sequência de funções mensuráveis tal que $f_k \xrightarrow{q.s} f$; então

$$\int_E f \leq \varliminf_{k \in N} \int_E f_k \leq \infty.$$

DEMONSTRAÇÃO - Pela observação 3.5,a) podemos alterar as funções num conjunto de medida nula de modo que a convergência tenha lugar em todos os pontos. Seja $\phi \in S_+$ com $\phi \leq f$; é suficiente demonstrar que

$$\int_E \phi \leq \varliminf \int_E f_k.$$

a) Se $\int_E \phi = \infty$ então existem um conjunto mensurável $A \subset E$ e um número $a > 0$ tais que $mA = \infty$ e $\phi(x) > a$ para todo $x \in A$. Para todo $k \in N$, seja

$$A_k = \{x \in E \mid f_n(x) > a \text{ para todo } n \geq k\}.$$

A desigualdade

$$\phi \leq \lim_{n \to \infty} f_n = f$$

implica que $\bigcup_{k \in N} A_k \supset A$. É claro que $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$ e portanto do teorema 1.3,a) segue que $\lim_{k \to \infty} mA_k = mA$. Como temos

$$\int_E f_k \geq a mA_k, \text{ segue-se que } \lim_{k \to \infty} \int_E f_k = \infty.$$

b) Se $\int_E \phi < \infty$ seja $A = C\phi^{-1}(0)$; então $mA < \infty$ [□] e $\phi_{|CA} = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ definimos

$$A_k = \{x \in E \mid f_n(x) > (1-\varepsilon)\phi(x) \text{ para todo } n \geq k\}.$$

Temos evidentemente $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ e de $\phi \leq \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ segue-se que $\bigcup\limits_{k\in N} A_k \supset A$. Portanto $A \sim A_1 \supset A \sim A_2 \supset \ldots \supset A \sim A_k \supset \ldots$ e e $\bigcap\limits_{k\in N} (A \sim A_k) = \phi$ com $m(A \sim A_1) \leq mA < \infty$. Do teorema 1.3,b) segue-se então que $\lim\limits_{k\to\infty} m(A \sim A_k) = 0$ e portanto existe n_ε tal que para $k \geq n_\varepsilon$ temos $m(A \sim A_k) \leq \varepsilon$. Então para $k \geq n_\varepsilon$ temos

$$\int_E f_k \geq \int_{A_k} f_k \geq (1-\varepsilon)\int_{A_k} \phi \geq (1-\varepsilon)\int_E \phi - \int_{A\sim A_k} \phi \geq \int_E \phi - \varepsilon\int_E \phi - \|\phi\| m(A \sim A_k)$$

$$\geq \int_E \phi - \varepsilon\left(\int_E \phi + \|\phi\|\right) \quad \text{onde } \|\phi\| = \sup_{x\in E}|\phi(x)|.$$

Portanto

$$\underline{\lim} \int_E f_k \geq \int_E \phi - \varepsilon\left(\int_E \phi + \|\phi\|\right)$$

para todo $\varepsilon > 0$, donde se segue que

$$\underline{\lim} \int_E f_k \geq \int_E \phi \quad \square$$

* <u>EXERCÍCIO 2</u> - Sejam $f_k \geq 0$ funções mensuráveis; demonstrar que

$$\int \underline{\lim}\, f_k \leq \underline{\lim} \int f_k .$$

* EXERCÍCIO 3 - Sejam $f_k: E \longrightarrow [0,\infty]$ funções mensuráveis tais que

$$f_k \xrightarrow{q.s} f \text{ e } \int_E f_k \longrightarrow \int_E f;$$

demonstrar que para todo conjunto mensurável $A \subset E$ temos $\int_A f_k \longrightarrow \int_A f$.
[Sugestão: $\int_B f \leq \underline{\lim} \int_B f_k$ onde $B = A$ e $B = CA$].

O teorema que segue, em geral é enunciado apenas para sequências monótonas crescentes, daí o seu nome.

TEOREMA 3.3 (da convergência monótona) - Seja $f_k: E \longrightarrow [0,\infty]$ uma sequência de funções mensuráveis tais que $f_k \xrightarrow{q.s} f$ com $f_k \leq f$ para todo $k \in N$, então

$$\int_E f = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \leq \infty.$$

DEMONSTRAÇÃO - De $f_k \leq f$ segue-se que

$$\int f_k \leq \int f \text{ e portanto } \overline{\lim} \int f_k \leq \int f.$$

Aplicando o Lema de Fatou segue-se que

$$\int f \leq \underline{\lim} \int f_k \leq \overline{\lim} \int f_k \leq \int f$$

e portanto

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k = \int f.$$

OBSERVAÇÃO 3.9 - Agora estamos em condições de demonstrar que se $f,g:E \longrightarrow [0,\infty]$ são funções mensuráveis então

$$\int(f+g) = \int f+\int g.$$

De fato: pelo teorema 3.1 existem sequências crescentes de funções simples positivas $\phi_k \uparrow f$ e $\psi_k \uparrow g$; portanto $\phi_k+\psi_k \uparrow f+g$ e pelo teorema da convergência monótona (e pela observação 3.2, b)) temos

$$\int(f+g) = \lim\int(\phi_k+\psi_k) = \lim[\int\phi_k+\int\psi_k] = \lim \int\phi_k+\lim \int\psi_k = \int f+\int g \square$$

EXERCÍCIO 4 - Seja $f:E \longrightarrow [1,\infty[$ uma função mensurável tal que *não* tenhamos $f=1$ q.s. É verdade que

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f^k = \infty \ ?$$

COROLÁRIO 3.3.1 - Dada uma sequência de funções mensuráveis $f_k:E \longrightarrow [0,\infty]$ temos

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k.$$

DEMONSTRAÇÃO - Temos

$$\sum_{k=1}^{m} f_k \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

quando $m \longrightarrow \infty$ e portanto, pelo teorema da convergência monó tona, temos

$$\lim_{m\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^{m} f_k = \int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k .$$

Pela observação 3.9 temos

$$\int_E \sum_{k=1}^{m} f_k = \sum_{k=1}^{m} \int_E f_k$$

donde se segue o resultado.

<u>COROLÁRIO 3.3.2</u> - Seja $f:E \to [0,\infty]$ uma função mensurável e sejam $(E_k)_{k\in N}$ subconjuntos mensuráveis de E, dois a dois disjuntos tais que $\dot{\bigcup_{k\in N}} E_k = E$. Então

$$\int_E f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f$$

DEMONSTRAÇÃO - Basta lembrar que

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_K} \text{ e que } \int_E f\chi_{E_k} = \int_{E_k} f.$$

<u>EXERCÍCIO 5</u> - Para todo subconjunto mensurável $E\subset\mathbb{R}$ definimos

$$\mu(E) = \int_E t^2 dt.$$

A função $E\in\mathcal{M}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mu(E)\in[0,\infty]$ é uma medida?

EXERCÍCIO 6 - Dar exemplo de uma sequência decrescente de funções mensuráveis $f_k \geq 0$ tais que

$$\lim \int f_k \neq \int \lim f_k.$$

[Sugestão: ver o exercício 7].

EXERCÍCIO 7 - Seja f_k uma sequência decrescente de funções mensuráveis positivas com

$$\int f_k < \infty,$$

demonstrar que $\lim \int f_k = \int \lim f_k$.

EXERCÍCIO 8 - Seja $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty]$ mensurável; demonstrar que a função

$$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow m_f(E) = \int_E f \in [0,\infty]$$

é uma medida, que $mE = 0 \Longrightarrow m_f E = 0$ e que

$$m_f(\mathbb{R}^n) < \infty \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f < \infty.$$

3.3 - Funções Integráveis

Sendo E um conjunto mensurável e $f: E \longrightarrow [0,\infty]$ uma função mensurável, dizemos que f é *integrável* se

$$\int_E f < \infty.$$

Dizemos que $f:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é *integrável* se f_+ e f_- são integráveis e então definimos $\int f = \int f_+ - \int f_-$.

Se f é integrável então f é finita q.s.[□]. Se f integrável for *finita* em todos os pontos de E escrevemos

$$f \in \mathcal{L}_1(E).$$

<u>OBSERVAÇÃO 3.10</u> - Se f é integrável e se $f = f_2 - f_1$ onde f_1 e f_2 são funções integráveis positivas então $\int f = \int f_2 - \int f_1$. De fato: temos $f = f_+ - f_- = f_2 - f_1$ e portanto $f_+ + f_1 = f_- + f_2$; da observação 3.9 segue então que $\int f_+ + \int f_1 = \int f_- + \int f_2$, isto é

$$\int f_2 - \int f_1 = \int f_+ - \int f_- = \int f. \quad \square$$

<u>TEOREMA 3.4</u> - Seja E um conjunto mensurável

a) O conjunto $\mathcal{L}_1(E)$ das funções integráveis $f:E \longrightarrow \mathbb{R}$ é um espaço vetorial.

b) $\mathcal{L}_1(E)$ é reticulado; dadas $g \in \mathcal{L}_1(E)$ e $f:E \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável tal que $|f| \leq |g|$ então $f \in \mathcal{L}_1(E)$.

c) A aplicação $f \in \mathcal{L}_1(E) \longrightarrow \int_E f \in \mathbb{R}$ é um funcional linear positivo.

d) Se $f \in \mathcal{L}_1(E)$ e se g é finita e $g = f$ q.s. então

$$g \in \mathcal{L}_1(E) \text{ e } \int_E g = \int_E f.$$

DEMONSTRAÇÃO - a) e c): Dados $f, g \in \mathcal{L}_1(E)$ e $c \in \mathbb{R}$ é imediato que

$\int cf = c\int f$ e da observação 3.10 segue-se que

$$\int(f+g) = \int(f_+ + g_+) - \int(f_- + g_-) = \int(f_+ - f_-) + \int(g_+ - g_-) = \int f + \int g.$$

É evidente que $f \geq 0$ implica $\int f \geq 0$.

b) De $f_+ + f_- = |f| \leq |g|$ segue-se que $f_+ \leq |g|$ e $f_- \leq |g|$ e da observação 3.8 segue-se então que

$$\int f_+ \leq \int |g| \text{ e } \int f_- \leq \int |g|;$$

f é pois integrável.

Dados $f_1, f_2 \in \mathfrak{L}_1(E)$ temos

$$|\inf(f_1,f_2)|, |\sup(f_1,f_2)| \leq |f_1| + |f_2|$$

e portanto

$$\inf(f_1,f_2),\ \sup(f_1,f_2) \in \mathfrak{L}_1(E).$$

d) Se $g \overset{q.s}{=\!=} f$ então $f-g \overset{q.s}{=\!=} 0$ e o mesmo vale então para as partes positiva e negativa de f-g; o resultado segue pois da observação 3.5,a).

<u>COROLÁRIO 3.4.1</u> - Seja $f \in \mathfrak{L}_1(E)$. Se $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in E$ então

$$amE \leq \int_E f \leq bmE.$$

<u>COROLÁRIO 3.4.2</u> - Seja $E = \dot{\bigcup\limits_{k\in N}} E_k$ e $f \in \mathfrak{L}_1(E)$; então

$$\int_E f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f.$$

DEMONSTRAÇÃO - Segue imediatamente do corolário 3.3.2 aplicado a f_+ e f_- [□].

OBSERVAÇÃO 3.11 - O conjunto das funções $f:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que são integráveis ou o conjunto das funções definidas q.s. em E e que são integráveis evidentemente não formam um espaço vetorial [□] mas para elas ainda valem todos os outros resultados precedentes considerando igualdades q.s. e desigualdades q.s. Vamos porém considerar como *equivalentes* funções mensuráveis $f,g:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definidas q.s. e que satisfazem a relação $f = g$ q.s. Indicando por $\dot{f}$ a classe de equivalência de f, a relação definida por $\dot{f}_1 \leq \dot{f}_2$ se $f_1 \leq f_2$ q.s. é uma relação de ordem [□]. Indicando por $L_1(E)$, o conjunto das classes de equivalência $\dot{f}$ das funções $f:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definidas q.s. que são integráveis é fácil demonstrar que $L_1(E)$ é um espaço vetorial [□] e que $\int_E |\dot{f}| = 0$ se e somente se $f \overset{q.s}{=\!=} 0$ [□].

Destaquemos especialmente o

COROLÁRIO 3.4.3 - Seja $f:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensurável: f é integrável se e somente se $|f|$ é integrável. Se f é integrável temos

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|.$$

<u>EXERCÍCIO</u> <u>9</u>- Seja $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que

$$\int_E f = 0$$

para todo $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$; demonstrar que $f = 0$ q.s.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>10</u> - Seja f_k uma sequência crescente de funções integráveis tais que

$$\int f_k \leq M$$

para todo $k \in N$. Demonstrar que existe uma função f tal que $f_k \xrightarrow{q.s} f$, que f é integrável e que $\int f = \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k$.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>11</u> - Seja $f \in \mathcal{L}_1(E)$ e $\alpha: E \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável com $\|\alpha\|_\infty < \infty$; demonstrar que $\alpha f \in \mathcal{L}_1(E)$ e que $\int |\alpha f| \leq \|\alpha\|_\infty \int |f|$.

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>3.12</u> - Dados $f, f_k \in \mathcal{L}_1(E)$ tais que $\lim\limits_{k\to\infty} \int |f-f_k| = 0$, não segue que $f_k \xrightarrow{q.s} f$ como mostra o exercício que segue.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>12</u> - Seja

$$f_1 = \chi_{[0,1]},\ f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]},\ f_3 = \chi_{]\frac{1}{2},1]},\ f_4 = \chi_{[0,\frac{1}{4}]},\ f_5 = \chi_{]\frac{1}{4},\frac{1}{2}]},\ldots$$

Demonstrar que $\int |f_k| \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$ mas que para todo $x \in [0,1]$ temos $f_k(x) \not\longrightarrow 0$.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>13</u> - Dar exemplo de uma função $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ tal que $f^2 \notin \mathcal{L}_1([a,b])$; demonstrar que f é necessariamente não limitada.

TEOREMA 3.5 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue)- Seja $f_k : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que $f_k \xrightarrow{q.s} f$ e tal que existe $g \in \mathfrak{L}_1(E)$ com $|f_k| \leq g$ q.s. Então existe

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

DEMONSTRAÇÃO - Alterando eventualmente as funções num conjunto de medida nula podemos supor que as hipóteses se realizam em todos os pontos de E. De $|f_k| \leq g$ segue-se que $-g \leq f_k \leq g$ e portanto $f_k+g \geq 0$, $g-f_k \geq 0$. É claro que

$$f_k+g \longrightarrow f+g \quad \text{e} \quad g-f_k \longrightarrow g-f.$$

Temos $f \in \mathfrak{L}_1(E)$ pois f é mensurável e $|f| \leq g$ (Conforme o Teorema 3.4,b)). Aplicando o Lema de Fatou vem

$$\int (f+g) \leq \underline{\lim} \int (f_k+g) = \underline{\lim}\left[\int f_k + \int g\right] = \underline{\lim} \int f_k + \int g, \text{isto é,} \quad \int f \leq \underline{\lim} \int f_k$$

e

$$\int (g-f) \leq \underline{\lim} \int (g-f_k) = \underline{\lim}\left[\int g - \int f_k\right] = \int g - \overline{\lim} \int f_k, \text{isto é,} \quad \int f \geq \overline{\lim} \int f_k,$$

donde se segue que existe $\lim\limits_{k\to\infty} \int f_k = \int f$. ▯

EXERCÍCIO 14 - Demonstrar que nas condições do Teorema 3.5 temos

$$\int_E |f-f_k| \longrightarrow 0.$$

<u>EXERCÍCIO</u> <u>15</u> (O teorema de convergência limitada de Lebesgue) - Seja E mensurável com $mE < \infty$ e sejam $f_k : E \longrightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis tais que $\|f_k\| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e tal que $f_k \xrightarrow{q.s} f$. Demonstrar que $\int f_k \rightarrow \int f$.

<u>OBSERVAÇÃO 3.1.1</u> - Dado um conjunto E mensurável, dizemos que uma função $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ é *mensurável* [*integrável*] se suas partes real g e imaginária h são mensuráveis [integráveis]. Se f é integrável definimos $\int f = \int g + i \int h$. Então $\int cf = c \int f$ para $c \in \mathbb{C}$. Temos $\left| \int f \right| \leq \int |f|$; de fato: seja

$$\int f = \left| \int f \right| e^{i\theta};$$

então

$$\left| \int f \right| = e^{-i\theta} \int f = \int e^{-i\theta} f = \int Re[e^{-i\theta} f]$$

pois

$$\int Im[e^{-i\theta} f] = 0 \text{ já que } \int e^{-i\theta} f = \left| \int f \right| \in \mathbb{R}.$$

O resultado segue pois de

$$\int Re(e^{-i\theta} f) \leq \int |e^{-i\theta} f| = \int |f|. \ \square$$

Deste fato segue que para funções integráveis a valores complexos também vale o teorema da convergência dominada de Lebesgue. [$\square$]

EXERCÍCIO 16 - Seja $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{e^n} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt.$$

EXERCÍCIO 17 - Determinar

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nt^3}{1+nt^3}\, e^t dt.$$

EXERCÍCIO 18 - Demonstrar que se $f:E \longrightarrow [0,1]$ é uma função integrável então temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f^k = m\{t\in E \,|\, f(t)=1\}.$$

§4 - A INTEGRAL DE RIEMANN E A INTEGRAL DE LEBESGUE

Neste § vamos demonstrar que a integral de Lebesgue estende a integral de Riemann, isto é, se uma função $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável segundo Riemann então f é mensurável e sua integral de Riemann

$$R\int_a^b f(x)dx$$

coincide com a sua integral de Lebesgue

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f.$$

4.1 - A Integral de Riemann

Lembremos alguns fatos sobre a integral de Riemann. Uma *divisão* d de um intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ é uma sequência finita $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$; escrevemos $|d|=n$ e

$$\Delta d = \sup_{1\le i\le n} |t_i - t_{i-1}|$$

Indicamos por $\mathbb{D}_{[a,b]}$ ou simplesmente por $\mathbb{D}$, o conjunto das divisões de $[a,b]$.

Dada uma função *limitada* $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ para toda divisão $d\in\mathbb{D}$ definimos

$$s_d = \sum_{i=1}^{|d|} m_i(t_i-t_{i-1}) \quad \text{e} \quad S_d = \sum_{i=1}^{|d|} M_i(t_i-t_{i-1})$$

onde

$$m_i = \inf\{f(t)\,|\,t\in[t_{i-1},t_i]\}$$

e

$$M_i = \sup\{f(t)\,|\,t\in[t_{i-1},t_i]\}.$$

A *integral inferior de Riemann* é definida por

$$\underline{\int_a^b} f(t)dt = \sup_{d\in\mathbb{D}} s_d$$

e

a *integral superior de Riemann* é definida por

$$\overline{\int_a^b} f(t)dt = \inf_{d\in\mathbb{D}} S_d.$$

Temos

$$(b-a) \inf_{a\le t\le b} f(t) \le \underline{\int_a^b} f(t)dt \le \overline{\int_a^b} f(t)dt \le (b-a) \sup_{a\le t\le b} f(t).$$

Dizemos que a função f é *integrável segundo Riemann* ,escrevemos $f\in\mathcal{R}([a,b])$, se

$$\underline{\int_a^b} f(t)dt \quad e \quad \overline{\int_a^b} f(t)dt$$

coincidem e, por definição, este valor comum é a *integral de Riemann* de f que aqui indicamos por

$$R\int_a^b f(t)dt.$$

(Ver [D], [E], [H-AI]).

Lembramos que esta definição equivale a dizer que

$$R\int_a^b f(t)dt = \lim_{\Delta d\to\infty} \sum_{i=1}^{|d|} f(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$$

onde $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$.

Dizemos que $\phi:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *função em escada* se existe uma divisão $d\in\mathbb{D}_{[a,b]}$ tal que $\phi(t) \equiv c_i$, constante, em cada intervalo aberto da divisão d. Alterando-se uma função integrável num conjunto finito a nova função ainda é integrável segundo Riemann e o valor da integral não se altera [□]. Portanto toda função em escada é integrável segundo Riemann e com a notação acima temos

$$\mathcal{R}\int_a^b \phi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{|d|} c_i(t_i - t_{i-1}). \qquad [\square]$$

Indicamos por $E([a,b])$ o conjunto das funções em escada definidas em $[a,b]$. Então as definições acima de $\underline{\int}$ e $\overline{\int}$ podem ser reformuladas do seguinte modo:

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,dt = \sup\left\{\mathcal{R}\int_a^b \phi(t)\,dt \,\middle|\, \phi \in E([a,b]), \phi \leq f\right\} \quad [\square]$$

$$\overline{\int_a^b} f(t)\,dt = \inf\left\{\mathcal{R}\int_a^b \phi(t)\,dt \,\middle|\, \phi \in E([a,b]), \phi \geq f\right\} \quad [\square]$$

<u>EXERCÍCIO</u> <u>1</u> - Demonstrar que toda função contínua

$$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

é integrável segundo Riemann.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>2</u> - Demonstrar que toda função monótona

$$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

é integrável segundo Riemann.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>3</u> - Seja $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma função integrável segundo Riemann e

$$D_f = \{(x,y)\in[a,b]\times\mathbb{R} \mid 0\le y\le f(x)\}.$$

Demonstrar que $m_2 D_f = R\int_a^b f(x)dx$ onde m_2 indica a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$.

4.2 - As Integrais Superior e Inferior de Lebesgue

Para funções *limitadas* não necessariamente mensuráveis definidas num conjunto mensurável E de medida *finita*, a integral de Lebesgue admite uma formulação análoga à da integral de Riemann: indicamos por S(E) o conjunto das funções simples $\phi:E \longrightarrow \mathbb{R}$ e definimos a *integral superior de Lebesgue* por

$$\int_E^* f = \inf\left\{\int_E \phi \mid \phi\in S(E), \phi\ge f\right\}$$

e a *integral inferior de Lebesgue* por

$$\int_{*E} f = \sup\left\{\int_E \phi \mid \phi\in S(E), \phi\le f\right\}.$$

É imediato que

$$\int_{*E} f \le \int_E^* f.$$

<u>TEOREMA 4.1</u> - Seja E mensurável de medida finita e $f:E \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada (não necessariamente mensurável)

a) $\int_{*E} f = \int_E^* f \iff f$ é mensurável

b) Se f é mensurável então $\int_E f = \int_{*E} f = \int_E^* f$.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam ϕ_k e ψ_k sequências de funções simples tais que $\phi_k \le \phi_{k+1} \le f \le \psi_{k+1} \le \psi_k$, $k=1,2,\ldots$ e que

$$\int_E \phi_k \uparrow \int_{*E} f \quad \text{e} \quad \int_E \psi_k \downarrow \int_E^* f \;[\square].$$

As funções $f_* = \sup \phi_k$ e $f^* = \inf \psi_k$ são mensuráveis. Das desigualdades $\phi_k \le f_* \le f \le f^* \le \psi_k$ segue que f_* e f^* são integráveis (pois são mensuráveis e limitadas e $mE < \infty$) e que vale a relação

$$\int_E \phi_k \le \int_E f_* \le \int_E f^* \le \int_E \psi_k$$

donde se conclue que

$$\int_{*E} f \le \int_E f_* \le \int_E f^* \le \int_E^* f.$$

Suponhamos que

$$\int_{*E} f = \int_E^* f.$$

Então tem-se $\int_E (f^* - f_*) = 0$ e como $f^* - f_* \ge 0$, segue-se que $f^* - f_* = 0$ q.s. (Observação 3.5). Portanto $f^* - f = 0$ q.s. e f é mensurável (Observação 2.5).

Reciprocamente, seja f mensurável (e limitada) e seja a sequência $\phi_k \in S_+(E)$ tal que $\phi_k \uparrow \|f\| - f$ (Conforme o teorema 3.1). Então

$$\int_E \phi_k \uparrow \int_E (\|f\|-f) \text{ e portanto } \int_E \|f\|-\phi_k) \downarrow \int f$$

(pois $\int_E \|f\| = \|f\| mE<\infty$), mas $\|f\|-\phi_k \in S(E)$, $\|f\|-\phi_k \geq f$ e $\|f\|-\phi_k \downarrow f$; portanto

$$\int (\|f\|-\phi_k) \geq \int^* f \text{ o que implica que } \int f = \lim_{k\to\infty} \int (\|f\|-\phi_k) \geq \int^* f.$$

De modo análogo se demonstra que $\int f \leq \int_* f$ [□] e de $\int_* f \leq \int^* f$ segue-se então que as três integrais são iguais. □

EXERCÍCIO 4 - Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável; indicamos por $\mathcal{B}_*(E)$ o conjunto das funções mensuráveis limitadas $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que são nulas fora de um conjunto de medida finita. Seja $f: E \longrightarrow [0,\infty]$ uma função mensurável; demonstrar que

$$\int_E f = \sup\left\{\int_E \psi \,|\, \psi \in \mathcal{B}_*(E), \psi \leq f\right\}.$$

4.3 - A Integral de Riemann e a Integral de Lebesgue

TEOREMA 4.2 - Seja $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável segundo Riemann. Então f é mensurável e sua integral de Riemann em $[a,b]$ coincide com sua integral de Lebesgue em $[a,b]$.

DEMONSTRAÇÃO - Como temos $E([a,b]) \subset S([a,b])$ segue-se que

$$\underline{\int_a^b} f \leq \int_{*a}^b f \leq \int_a^{*b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

e do fato de f ser integrável segundo Riemann segue-se que as quatro integrais são iguais. O resultado é pois consequência do teorema 4.1. ∎

Para a integral de Riemann *imprópria* o resultado acima não é verdadeiro: *a existência da integral de Riemann imprópria de uma função não implica na existência da integral de Lebesgue desta função.*

De fato: lembremos que dados $-\infty<a<b\leq\infty$ e $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ tal que

I_1 - para todo $x\in[a,b[$ existe $\mathcal{R}\int_a^x f(t)dt$

I_2 - existe $\lim\limits_{x\uparrow b}\mathcal{R}\int_a^x f(t)dt$.

então dizemos que o limite em I_2 é a *integral de Riemann imprópria* de f em $[a,b[$.(Ver também o Apêndice A do Cap.II). Neste caso pode acontecer que

$$\int_a^b |f| = \infty$$

e f não é portanto integrável segundo Lebesgue.

<u>EXEMPLO</u> - $f(t)=\frac{\text{sen } t}{t}$ em $[0,\infty[$. [Para demonstrar que existe

$$\lim_{x\to\infty} \mathcal{R}\int_0^x \frac{\text{sen } t}{t}\, dt$$

basta demonstrar que dado $\varepsilon>0$ existe L_ε tal que para

$$[c,d]\subset[L_\varepsilon,\infty[\text{ temos } \left|R\int_c^d \frac{\text{sen } t}{t}\,dt\right| \le \varepsilon$$

(o critério de Cauchy [□]) o que segue de

$$\left|R\int_c^d \frac{\text{sen } t}{t}dt\right| = \left|[-\frac{\cos t}{t}]_c^d - R\int_c^d \frac{\cos t}{t^2}dt\right| \le \frac{1}{c}+\frac{1}{d}+R\int_c^d \frac{1}{t^2}dt = \frac{2}{c}.$$

Para demonstrar que $\int_0^\infty \left|\frac{\text{sen } t}{t}\right| = \infty$ basta ver que

$$\int_0^\infty \left|\frac{\text{sen } t}{t}\right|dt \ge \int_0^{n\pi} \left|\frac{\text{sen } t}{t}\right|dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\text{sen } t}{t}\right|dt \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\text{sen } t|dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}\, R\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\text{sent } t|dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

que tende para ∞ com n. □]

A integral imprópria, isto é o limite em I_2, também é indicado por

$$R\int_a^b f(t)dt.$$

Quando $b=\infty$ e/ou quando f é não limitada nas vizinhanças de b trata-se de uma integral de Riemann imprópria.

<u>EXERCÍCIO 5</u> - Sejam $f,f_k:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis segundo Riemann equilimitadas tais que $f_k(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x\in[a,b]$. Demonstrar que

$$R\int_a^b f_k(t)dt \longrightarrow R\int_a^b f(t)dt.$$

*EXERCÍCIO 6 - Dar exemplo de uma função limitada

$$f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

que é integrável segundo Lebesgue e tal que não existe uma função g integrável segundo Riemann e tal que $f = g$ q.s.

*4.4 - Caracterização das Funções Integráveis Segundo Riemann

Lembramos que uma função

$$g:[a,b] \longrightarrow]-\infty,\infty] \; [g:[a,b] \longrightarrow [-\infty,\infty[]$$

diz-se *semi-contínua inferiormente* [*semi-contínua superiormente*] (abreviamos sci [scs]) se para todo $x \in [a,b]$ e todo $c < g(x)$ [$c > g(x)$] existe uma vizinhança V_x de x tal que para $y \in V_x$ têm-se $c < g(y)$ [$c > g(y)$]. O sup [inf] de uma família não vazia de funções sci [scs] é sci [scs]. [□]

TEOREMA 4.3 - Seja $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Temos f é integrável segundo Riemann $\Longleftrightarrow$ f é contínua q.s.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam ϕ_k e ψ_k sequências de funções em escada com $\phi_k \le \phi_{k+1} \le f \le \psi_{k+1} \le \psi_k$, $k=1,2,\ldots$ tais que

$$R\int_a^b \phi_k(x)\,dx \uparrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad e \quad R\int_a^b \psi_k(x)\,dx \downarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Sendo $]t_{j-1}^k, t_j^k[$, $j=1,2,\ldots,n_k$ os intervalos em que $\phi_k [\psi_k]$ é constante podemos supor que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{1\le j\le n_k} (t_j^k - t_{j-1}^k) = 0 \ [\square].$$

Também podemos supor que cada ϕ_k [ψ_k] é sci [scs] bastando que em t_j^k ela seja igual ao inf [sup] dos valores nos intervalos adjacentes e do valor $f(t_j^k)$. Pondo $f_* = \sup\phi_k$ e $f^* = \inf\psi_k$ segue-se que

$$R\int_a^b \phi_k(x)\,dx \uparrow \int_{[a,b]} f_* \quad \text{e} \quad R\int_a^b \psi_k(x)\,dx \downarrow \int_{[a,b]} f^* \quad [\square]$$

Portanto temos

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f_* \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f^*.$$

Suponhamos que f seja integrável segundo Riemann. Então

$$\int_{[a,b]} f^* = \int_{[a,b]} f_*$$

e como temos $f_* \le f \le f^*$ segue-se que $f_* = f = f^*$ q.s. [$\square$]. Portanto em quase todos os pontos de [a,b] f é sci e scs, isto é, contínua.

Para estabelecer a recíproca, observemos que se f é contínua em x podemos supor que $\phi_k(x) \uparrow f(x)$ e $\psi_k(x) \downarrow f(x)$ [$\square$]. Portanto se f é contínua q.s. temos $f_* = f^*$ q.s. e por conseguinte

$$\int_{[a,b]} f_* = \int_{[a,b]} f^*,$$

o que implica que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

isto é, f é integrável segundo Riemann.

EXERCÍCIO 7 - Seja E um espaço topológico; definir função sci [scs] $f:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dado $A \subset E$ demonstrar que χ_A é sci [scs] se e somente se A é aberto [fechado].

EXERCÍCIO 8 - Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável; demonstrar que toda função $f:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que é sci [scs] é mensurável (boreliana).

EXERCÍCIO 9 - Mostrar que nem toda função sci [scs] limitada $g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável segundo Riemann.

*EXERCÍCIO 10 - Seja $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada tal que para todo $t \in [a,b[$ existe $f(t_+)$. Demonstrar que f é integrável segundo Riemann. [Sugestão: demonstrar que o conjunto dos pontos $t \in [a,b]$ em que a oscilação de f é $> \varepsilon$ é enumerável.]

*EXERCÍCIO 11 - Dada uma função $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ para todo $t \in [a,b[$ definimos

$$(D^+f)(t) = \overline{\lim_{h \downarrow 0}} \frac{1}{h}[f(t+h)-f(t)] \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Demonstrar que se f é contínua então D^+f é mensurável (boreliana). [Sugestão: D^+f é sci].

*§5 - TOPOLOGIA E INTEGRAÇÃO

Como já dissemos, nos §§1 a 3 apresentamos as noções de conjuntos e funções mensuráveis e de integral de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$ de tal modo a também servir para a teoria abstrata da medida e integração a ser apresentada na 2ª parte, no Capítulo IV. Na teoria abstrata não há nenhuma topologia envolvida e portanto nos resultados dos §§1 a 3 que vão ser generalizados no Capítulo IV não usamos resultados particulares de $\mathbb{R}^n$.

No presente § vamos ver resultados que relacionam os resultados dos §§ anteriores com fatos topológicos de $\mathbb{R}^n$. Este § só vai ser usado em alguns poucos pontos, principalmente no início do Capítulo V e pode portanto ser omitido numa primeira leitura sendo consultado apenas ad-hoc quando necessário.

PROPOSIÇÃO 5.1 - Seja $A \subset \mathbb{R}^n$

a) Dado $\varepsilon > 0$ existe um conjunto aberto $O_\varepsilon \supset A$ tal que

$$m^*O_\varepsilon \leq m^*A + \varepsilon$$

b) Existe $G \in G_\delta$ com $G \supset A$ e $m^*G = m^*A$.

DEMONSTRAÇÃO - a) Por definição temos

$$m^*A = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \,\middle|\, \bigcup_{k\in N} I_k \supset A\right\}.$$

Se $m^*A=\infty$ nada há a demonstrar; se $m^*A<\infty$, dado $\varepsilon>0$ existe uma sequência I_k de intervalos abertos tal que

$$\bigcup_{k\in N} I_k \supset A \quad e \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \le m^*A+\varepsilon.$$

Tomamos então

$$O_\varepsilon = \bigcup_{k\in N} I_k \text{ e temos } m^*O_\varepsilon \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \le m^*A+\varepsilon.$$

b) Com a notação de a) tomemos

$$G = \bigcap_{m\in N} O_{1/m}.$$

Então $G\supset A$ e para todo $m\in N$ temos $m^*A \le m^*G \le m^*O_{\frac{1}{m}} \le m^*A + \frac{1}{m}$ donde se segue o resultado.

<u>TEOREMA 5.2</u> - Dado $E\subset\mathbb{R}^n$ são equivalentes as propriedades

i) E é mensurável

ii) Dado $\varepsilon>0$ existe um conjunto aberto $O_\varepsilon\supset E$ tal que $m^*(O_\varepsilon\sim E)\le\varepsilon$

iii) Existe $G\in G_\delta$ com $G\supset E$ e $m^*(G\sim E)=0$

$\widetilde{\text{ii)}}$ Dado $\varepsilon>0$ existe um conjunto fechado $F_\varepsilon\subset E$ tal que $m^*(E\sim F_\varepsilon)\le\varepsilon$

$\widetilde{\text{iii)}}$ Existe $F\in F_\sigma$ com $F\subset E$ e $m^*(E\sim F)=0$.

DEMONSTRAÇÃO - (i) $\Longrightarrow$ (ii): Seja

$$\mathbb{R}^n = \dot{\bigcup_{k\in N}} J_k$$

onde os J_k são intervalos limitados dois a dois disjuntos e seja $E_k = E \cap J_k$. Dado $\varepsilon > 0$ pela Proposição 5.1 existe um aberto $O_k \supset E_k$ com $mO_k \leq mE_k + \frac{\varepsilon}{2^k}$ e portanto $m(O_k \sim E_k) = mO_k - mE_k \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$. Tomando-se então

$$O_\varepsilon = \bigcup_{k \in N} O_k \text{ temos } O_\varepsilon \sim E = \bigcup_{k \in N} O_k \sim \bigcup_{k \in N} E_k \subset \bigcup_{k \in N} (O_k \sim E_k)$$

e portanto

$$m(O_\varepsilon \sim E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(O_k \sim E_k) \leq \varepsilon.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Seja $O_{1/m} \supset E$ com $m^*(O_{1/m} \sim E) \leq \frac{1}{m}$ e tomemos

$$G = \bigcap_{n \in N} O_{1/m};$$

então $m^*(G \sim E) \leq m^*(O_{1/m} \sim E) \leq \frac{1}{m}$ para todo $m \in N$ donde segue o resultado.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) $G \sim E$ é mensurável pois $m^*(G \sim E) = 0$. Pelo corolário 1.5.1 G é mensurável. O resultado segue pois de

$$E = G \cap C(G \sim E).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)$^\sim$: Como (i) $\Longrightarrow$ (ii) então aplicando (ii) a $\tilde{E}$ existe $O_\varepsilon \supset \tilde{E}$ com $m(O_\varepsilon \sim \tilde{E}) \leq \varepsilon$. Tomando então $F_\varepsilon = \tilde{O}_\varepsilon$ temos $F_\varepsilon \subset E$ e $E \sim F_\varepsilon = O_\varepsilon \sim \tilde{E}$ [□] donde segue o resultado.

As demonstrações de (ii)$^\sim \Rightarrow$ (iii)$^\sim$ e (iii)$^\sim \Rightarrow$ (i) são análogas respectivamente as demonstrações de (ii) $\Longrightarrow$ (iii) e

(iii) $\Longrightarrow$ (i) [□]

EXERCÍCIO 1 - Por que a seguinte demonstração de (i) $\Rightarrow$ (ii) está errada? "Da proposição 5.1 segue que dado $\varepsilon > 0$ existe um aberto $O_\varepsilon \supset E$ tal que $m^*O_\varepsilon \leq m^*E+\varepsilon$. Como E é por hipótese mensurável, temos $m^*O_\varepsilon = m^*(O_\varepsilon \cap E) + m^*(O_\varepsilon \sim E)$, isto é, $m^*O_\varepsilon = m^*E + m^*(O_\varepsilon \sim E)$ pois $O_\varepsilon \supset E$. Portanto temos

$$m^*(O_\varepsilon \sim E) = m^*O_\varepsilon - m^*E \leq \varepsilon".$$

COROLÁRIO 5.2.1 - Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in \mathfrak{L}_1(U)$ tal que para qualquer intervalo fechado e limitado $J \subset U$ temos $\int_J f = 0$; então $f = 0$ q.s.

DEMONSTRAÇÃO - Como todo conjunto aberto $O \subset U$ pode ser escrito como reunião de uma sequência de intervalos fechados limitados $J_k \subset U$ com interior dois a dois disjuntos [□] segue-se

$$\int_O f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_k} f.$$

[De fato: temos

$$O = \bigcup_{k \in N} J_k \cap O = \dot{\bigcup_{k \in N}} (Z_k \cap O) \,\dot{\cup}\, (\dot{\bigcup_{k \in N}} \mathring{J}_k) \text{ onde } Z_k = \bigcup_{j=1}^{k} J_j - \bigcup_{j=1}^{k} \mathring{J}_j - Z_{k-1}.$$

Como $mZ_k = 0$ então segue do corolário 3.3.2 que

$$\int_O f = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{\mathring{J}_k} f + \int_{Z_k \cap O} f\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathring{J}_k} f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_k} f].$$

Por outro lado $G \in G_\delta$, $G \subset U$ pode ser escrito como a intersecção de uma sequência decrescente de abertos $O_k \subset U$ e de

$$\int_{O_k} f = 0 \text{ segue então } \int_G f = 0$$

pois

$$|f\chi_{O_k}| \leq |f| \in \mathcal{L}_1(U) \quad \text{e} \quad f\chi_{O_k} \longrightarrow f\chi_G.$$

Mas do Teorema 5.2 segue-se que dado um conjunto mensurável qualquer $E \subset U$, existe um $G \in G_\delta$, $U \supset G \supset E$, tal que $m(G \sim E) = 0$ e portanto [□] $\int_E f = 0$. Tomando-se então

$$E = f^{-1}(]0,\infty]) \quad \text{e} \quad E = f^{-1}([-\infty,0[)$$

segue-se da observação 3.5,b) que $f = 0$ q.s.

<u>COROLÁRIO 5.2.2</u> - Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ tal que para todo $x \in [a,b]$ tenhamos

$$\int_a^x f(t)dt = 0;$$

então $f = 0$ q.s. [□]

<u>DEFINIÇÃO</u> - Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e uma função mensurável

$$f: U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},$$

dizemos que f é *localmente integrável* (em U), escrevemos

$$f \in \mathcal{L}_1^{loc}(U),$$

se para todo $x \in U$ existe um intervalo aberto I_x contendo x e tal que $f\in\mathcal{L}_1(I_x)$. Então é imediato que dado qualquer compacto $K\subset U$ temos $f\in\mathcal{L}_1(K)$ [□].

Indicamos por $K(U)$ o conjunto das funções contínuas $\phi:U \longrightarrow \mathbb{R}$ que são nulas fora de um compacto $K\subset U$.

<u>COROLÁRIO 5.2.3</u> - Seja $U\subset\mathbb{R}^n$ aberto e $f\in\mathcal{L}_1^{loc}(U)$ tal que para todo $\phi\in K(U)$ temos $\int_U f\phi = 0$; então $f = 0$ q.s.

DEMONSTRAÇÃO - Basta mostrar que para todo intervalo fechado e limitado $J\subset U$ temos $\int_J f = 0$ o que segue do fato de existir uma sequência $\phi_k\in K(U)$ tal que $\phi_k \downarrow \chi_J$ [□].

<u>TEOREMA 5.3</u> - Dado $E\subset\mathbb{R}^n$ com $m^*E < \infty$, as propriedades (i), (ii), (iii), (ii)$^\sim$ e (iii)$^\sim$ do Teorema 5.2 são equivalentes à propriedade

(iv) Dado $\varepsilon > 0$ existe U reunião de um número finito de intervalos limitados (que podem ser tomados abertos ou fechados ou semi-abertos, etc.), dois a dois disjuntos, tal que

$$m^*(E\Delta U) \leq \varepsilon \text{ (onde } E\Delta U = (E\sim U)\cup(U\sim E)).$$

DEMONSTRAÇÃO - (ii) $\Longrightarrow$ (iv): Seja $O\supset E$ com $m^*(O\sim E) < \frac{\varepsilon}{2}$. O aberto O pode ser escrito como uma reunião de um conjunto de medida nula e de uma sequência de intervalos (abertos ou fechados ou semi-abertos, etc.) limitados e dois a dois disjuntos, $J_1, J_2, \ldots, J_k, \ldots$ e

$$\lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{1\le i\le k} J_i\right) = mO \ [\square];$$

portanto existe $U = J_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} J_k$ com $m(O \sim U) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Então temos

$$E \Delta U = (E\sim U) \cup (U\sim E) \subset (O\sim U) \cup (O\sim E)$$

e portanto $m^*(E\Delta U) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): De $m^*(E\Delta U) \le \varepsilon$ segue-se que $m^*(U\sim E) \le \varepsilon$ e $m^*(E\sim U) \le \varepsilon$. Pela Proposição 5.1,a) existe um aberto $O_1 \supset E\sim U$ com $mO_1 \le 2\varepsilon$. Tomando então $O = O_1 \cup U$ temos $O \supset E$ e

$$m^*(O\sim E) = m^*[(O_1\sim E) \cup (U\sim E)] \le m^* O_1 + m^*(U\sim E) \le 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>5.1</u> - Pela demonstração do Teorema 5.3 é imediato que se E está contido num aberto U_1 então podemos tomar U contido neste mesmo aberto.

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>5.2</u> - São equivalentes as propriedades

(i)' E é mensurável e $mE < \infty$

(v) Dado $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K_\varepsilon \subset E$ tal que

$$m^*(E\sim K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

De fato - (v) $\Longrightarrow$ (i)': do Teorema 5.2 segue que E é mensurável e como todo compacto é limitado e tem por conseguinte medida finita segue-se de $mE = mK_\varepsilon + m(E\sim K_\varepsilon)$ que $mE<\infty$.
(i)' $\Longrightarrow$ (v): se E é mensurável, segue-se facilmente do corolário 1.1.1 que dado $\varepsilon > 0$ existe um conjunto mensurável li-

mitado $E_1 \subset E$ com $m(E \sim E_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ e pelo Teorema 5.2 existe um fechado $F \subset E_1$ com $m(E_1 \sim F) < \frac{\varepsilon}{2}$. F é compacto pois é um fechado limitado de $\mathbb{R}^n$; é imediato que $m(E \sim F) < \varepsilon$.

Dizemos que $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *função em patamar* (*função em escada* quando n=1) se ψ é uma combinação linear finita de funções características de intervalos limitados

$$\psi = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{J_i}.$$

<u>TEOREMA 5.4</u> - Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável finita q.s. e nula fora de um conjunto de medida finita. Então dado $\varepsilon > 0$ existe uma função em patamar ψ, nula fora de U, que difere de f de menos de ε exceto num conjunto de medida $\leq \varepsilon$, isto é

$$m\{x \in U \mid |f(x) - \psi(x)| > \varepsilon\} \leq \varepsilon.$$

DEMONSTRAÇÃO - Como temos $f = f_+ - f_-$ basta demonstrar o teorema quando $f \geq 0$ [□].

Observemos inicialmente que pela Observação 2.2 existe M tal que $m\{x \in U \mid f(x) \geq M\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Seja então

$$E = \{x \in U \mid f(x) \leq M\};$$

existe uma função simples ϕ tal que $|f(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in E$: basta no Teorema 3.1 tomar ϕ_k com $k \geq M$ tal que $\frac{1}{2^k} \leq \varepsilon$.

Seja então

$$\varphi = \sum_{j=1}^{r} c_j \chi_{E_j};$$

pelo Teorema 5.3 e pela Observação 5.1 para cada E_j existe um U_j reunião de um número finito de intervalos limitados tal que $m(E_j \Delta U_j) \leq \frac{\varepsilon}{2r}$. Então é imediato que

$$\psi = \sum_{j=1}^{r} c_j \chi_{U_j}$$

é uma função em patamar que satisfaz as condições do teorema [□].

COROLÁRIO 5.4.1 - Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f: U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável finita q.s. e nula fora de um conjunto de medida finita. Então dado $\varepsilon > 0$ existe $\phi \in K(U)$ que difere de f de menos de ε exceto num conjunto de medida $\leq \varepsilon$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja

$$\psi = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{J_i}$$

uma função em patamar que difere de f de menos de $\frac{\varepsilon}{2}$ exceto num conjunto de medida $\leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pelo Teorema 5.3 podemos tomar os intervalos J_i fechados e dois a dois disjuntos; é imediato que para cada i existe uma função $\phi_i \in K(U)$ que é nula fora de J_i e que coincide com χ_{J_i} exceto num conjunto de medida $\leq \frac{\varepsilon}{2p}$

Então a função

$$\phi = \sum_{i=1}^{p} c_i \phi_i$$

satisfaz as condições do teorema.

<u>COROLÁRIO 5.4.2</u> - Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f \in \mathcal{L}_1(U)$; dado $\varepsilon > 0$ existe <u>u</u> ma função em patamar ψ, nula fora de U, tal que

$$\int_U |f-\psi| \leq \varepsilon.$$

DEMONSTRAÇÃO - Para todo $k \in N$ seja

$$D_k = \{x \in U \mid \|x\| \leq k \text{ e } d(x, CU) \geq \tfrac{1}{k}\}.$$

Definimos

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \in D_k \text{ e } |f(x)| \leq k \\ 0 \text{ nos outros pontos} \end{cases}$$

Do teorema de convergência dominada de Lebesgue se<u>e</u> gue-se que

$$\int |f-f_k| \longrightarrow 0$$

[□; veja o Capítulo II, Proposições 2.1 e 2.2]. Seja então $k \in N$ tal que

$$\int |f-f_k| \leq \frac{\varepsilon}{3}; \text{ temos } \|f_k\| \leq k. \text{ Seja } \delta \leq \frac{\varepsilon}{6k} \text{ e } \delta \leq \frac{\varepsilon}{3mD_k};$$

pelo teorema 5.4 existe uma função em patamar ψ, $\|\psi\| \leq k$, ψ nula fora de D_k tal que $mD_{k,\delta} \leq \delta$ onde

$$D_{k,\delta} = \{x \in U \mid |f_k(x) - \psi(x)| > \delta\};$$

então temos

$$\int_U |f_k - \psi| = \int_{D_k} |f_k - \psi| = \int_{D_{k,\delta}} |f_k - \psi| + \int_{D_k \sim D_{k,\delta}} |f_k - \psi|$$

mas em $D_{k,\delta}$ temos $|f_k - \psi| \leq 2k$ e $mD_{k,\delta} \leq \delta$, portanto

$$\int_{D_{k,\delta}} |f_k - \psi| \leq 2k\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Em $D_k \sim D_{k,\delta}$ temos $|f_k - \psi| \leq \delta$ e portanto

$$\int_{D_k \sim D_{k,\delta}} |f_k - \psi| \leq \delta m D_k \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

donde se segue que

$$\int_U |f - \psi| \leq \int_U |f - f_k| + \int_{D_{k,\delta}} |f_k - \psi| + \int_{D_k \sim D_{k,\delta}} |f_k - \psi| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \square.$$

<u>COROLÁRIO 5.4.3</u> - Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in \mathcal{L}_1(U)$; dado $\varepsilon > 0$ existe $\phi \in K(U)$ tal que $\int |f - \phi| \leq \varepsilon$.

A demonstração segue do Corolário 5.4.2 do mesmo modo que a demonstração do Corolário 5.4.1 segue do Teorema 5.4 [□].

TEOREMA 5.5 (Lusin) - Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável de medida finita e $f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$; f é mensurável e finita q.s. se e somente se dado $\varepsilon > 0$ existe um conjunto compacto $K \subset E$ tal que $m(E \sim K) \leq \varepsilon$ e tal que a *restrição* de f a K é contínua.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensurável e finita q.s.; basta fazer a demonstração para f limitada pois existe $M > 0$ e $E_1 \subset E$ com $m(E \sim E_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para $x \in E_1$ (ver a Observação 2.2) e é suficiente demonstrar o teorema para $f_{|E_1}$.

Consideremos primeiro o caso em que f é uma função simples

$$f = \sum_{k=1}^{r} c_k \chi_{E_k}$$

onde supomos os E_k dois a dois disjuntos. Tomando eventualmente um dos c_k nulo podemos supor que

$$\bigcup_{k=1}^{r} E_k = E.$$

Dado $\varepsilon > 0$, pela Observação 5.2 para cada k existe um compacto $F_k \subset E_k$ tal que $m(E_k \sim F_k) < \frac{\varepsilon}{2}$; tomemos

$$K = \bigcup_{k=1}^{r} F_k.$$

É claro que a restrição de f a K é contínua (pois f é constante em cada F_k e estes são dois a dois disjuntos) e

$$m(E\sim K) < \varepsilon.$$

No caso geral, como $f = f_+ - f_-$ basta demonstrar o teorema para $f \geq 0$ [□] (e f limitada). Pelo Teorema 3.1 existe uma sequência de funções simples ϕ_j que converge *uniformemente* para f. Para cada j seja K_j um compacto, $K_j \subset E$ com $m(E\sim K_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$ e tal que a restrição de ϕ_j a K_j é contínua. Tomando

$$K = \bigcap_{j \in N} K_j,$$

então K é compacto e $m(E\sim K) \leq \varepsilon$. As funções ϕ_j são contínuas em K e convergem uniformemente para a função f; portanto a restrição de f a K é contínua.

Reciprocamente, seja $f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K \subset E$ com $m(E\sim K) < \varepsilon$ e tal que $f_{|K}$ é contínua. Então para todo $j \in N$ seja $K_j \subset E$ compacto com

$$m(E\sim K_j) \leq \frac{1}{2^j} \text{ e } f_{|K_j}$$

contínua. Seja $f_j: E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_j(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in K_j \\ 0 & \text{se } x \notin K_j \end{cases}$$

Então $f_j \xrightarrow{q.s} f$ [□] e como cada f_j é mensurável segue-se que f é mensurável; é claro que f é finita q.s.

OBSERVAÇÃO 5.3 - Existe uma função contínua $g:E \longrightarrow \mathbb{R}$ que coincide com f sobre K. Isto segue do *teorema de extensão de Tietze:* seja F um subconjunto fechado de um espaço métrico E (ou, mais geralmente, de um espaço normal) e seja $f:F \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe uma função contínua

$$g:E \longrightarrow \mathbb{R}$$

que prolonga f. Se $f(F)\subset[m,M]$ podemos tomar g tal que

$$g(E)\subset[m,M].$$

EXERCÍCIO 2 - Seja $E\subset\mathbb{R}^n$ mensurável e $f:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$; demonstrar que f é mensurável e finita q.s. se e somente se dado $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto fechado F de $\mathbb{R}^n$ tal que $F\subset E$, $m(E\sim F) \leq \varepsilon$ e $f_{|F}$ é contínua.

- ¤ -

CAPÍTULO II

APLICAÇÕES (I)

No presente capítulo e no capítulo V damos aplicações dos teoremas obtidos no capítulo I. As aplicações do capítulo V são mais teóricas enquanto as do presente presente capítulo se situam mais no campo do "cálculo". A maioria das aplicações usa o teorema da convergência dominada de Lebesgue ou o teorema da convergência monótona.

No Apêndice A no fim do capítulo recordamos alguns resultados sobre a integral de Riemann imprópria. Estes resultados vão servir nos exemplos concretos para decidir se certas funções são integráveis e portanto podem servir como *dominadoras* na aplicação do teorema da convergência dominada de Lebesgue.

§1 - RELAÇÕES ENTRE A INTEGRAL DE LEBESGUE E A INTEGRAL DE RIEMANN (PRÓPRIA E IMPRÓPRIA)

NOTAÇÃO - Se $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável segundo Riemann escrevemos $f \in R([a,b])$.

TEOREMA 1.1 - Se $f \in \mathcal{R}([a,b])$ então f é mensurável e existe a integral de Lebesgue

$$\int_a^b f(t)dt$$

que coincide com a integral de Riemann

$$\mathcal{R}\int_a^b f(t)dt.$$

A demonstração foi feita no capítulo I, Teorema 4.2.

TEOREMA 1.2 - Sejam $-\infty < a < b \leq \infty$ e $f:[a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ tais que existe a integral de Riemann imprópria

$$\lim_{x \uparrow b} \mathcal{R}\int_a^x f(t)dt.$$

Então $f \in \mathcal{L}_1([a,b[)$ e

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \uparrow b} \mathcal{R}\int_a^x f(t)dt.$$

DEMONSTRAÇÃO - Tomemos uma sequência $b_n \uparrow b$; para todo $n \geq 1$ temos $f_n = \chi_{[a,b_n]} f \in \mathcal{L}_1([a,b[)$ [□] e $f_n(t) \uparrow f(t)$ para todo $t \in [a,b[$. Portanto f é mensurável e do teorema da convergência monótona segue-se que

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Por outro lado pelo teorema 1.1 temos

$$\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^{b_n} f(t)dt = \mathcal{R}\int_a^{b_n} f(t)dt.$$

O resultado segue pois da hipótese de que existe e é finito o limite

$$\lim_{n\to\infty} R\int_a^{b_n} f(t)dt \quad \square$$

<u>TEOREMA 1.3</u> - Sejam $-\infty < a < b \leq \infty$ e $f:[a,b[$ tais que existem as integrais de Riemann impróprias

$$\lim_{x\uparrow b} R\int_a^x f(t)dt \quad e \quad \lim_{x\uparrow b} R\int_a^x |f(t)|dt.$$

Então

$$f\in\mathcal{L}_1([a,b[) \quad e \quad \int_a^b f(t)dt = \lim_{x\uparrow b} R\int_a^x f(t)dt.$$

DEMONSTRAÇÃO - Do Teorema 1.2 segue-se que $|f|\in\mathcal{L}_1([a,b[)$ e basta pois aplicar o teorema da convergência dominada de Lebesgue à sequência $f_n = \chi_{[a,b_n]}f$ onde $b_n\uparrow b$ [$\square$]

<u>EXERCÍCIO 1</u> - Demonstrar que

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,\text{sen}\,\frac{1}{t}\,dt$$

existe como integral de Riemann imprópria e não existe como integral de Lebesgue.

<u>EXERCÍCIO 2</u> - Sejam $a > 0$ e $\alpha > 0$, demonstrar que existe a integral de Riemann imprópria

$$\int_a^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t^{\alpha}}\, dt$$

e que esta integral existe no sentido de Lebesgue se e somente se $\alpha > 1$.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>3</u> - Demonstrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t^{\alpha}}\, dt$$

existe no sentido de Lebesgue se e somente se $1 < \alpha < 2$.

* <u>EXERCÍCIO</u> <u>4</u> - Demonstrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t^{\alpha}+\text{sen } t}\, dt$$

existe como integral de Riemann imprópria se e somente se $\alpha > \frac{1}{2}$ e que existe como integral de Lebesgue se e somente se $\alpha > 1$. [Sugestão: temos

$$\frac{\text{sen } t}{t^{\alpha}+\text{sen } t} = \frac{\text{sen } t}{t^{\alpha}} - \frac{\text{sen}^2 t}{t^{\alpha}(t^{\alpha}+\text{sen } t)}$$

e

$$\frac{\text{sen}^2 t}{t^{\alpha}(t^{\alpha}+1)} \leq \frac{\text{sen}^2 t}{t^{\alpha}(t^{\alpha}+\text{sen } t)} \leq \frac{1}{t^{\alpha}(t^{\alpha}-1)}.]$$

§2 - <u>PRIMEIRAS APLICAÇÕES</u>

<u>PROPOSIÇÃO 2.1</u> - Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e seja K_m uma sequência

crescente de compactos tal que $\bigcup_{m\in N} K_m = U$. Dado $f\in\mathcal{L}_1(U)$ temos

$$\int |f - \chi_{K_m} f| = \int_{CK_m} |f| \longrightarrow 0 \text{ quando } m \longrightarrow \infty.$$

DEMONSTRAÇÃO - Temos $|f-\chi_{K_m} f| \le |f| \in \mathcal{L}_1(U)$ e $(f-\chi_{K_m} f)(x) \longrightarrow 0$ para todo $x\in U$. O resultado segue pois do teorema da convergência dominada de Lebesgue.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>1</u> - Nas hipóteses da Proposição 2.1 seja $E\subset U$ mensurável. Dado $f\in\mathcal{L}_1(E)$ demonstrar que

$$\int_E \chi_{K_m\cap E} f \longrightarrow \int_E f.$$

<u>PROPOSIÇÃO 2.2</u> - Nas hipóteses da Proposição 2.1 seja

$f\in\mathcal{L}_1(U)$.

Dado $m\in N$ definimos

$$f_{[m]}(x) = \begin{cases} m & \text{se } x\in K_m \text{ e } f(x) \ge m \\ f(x) & \text{se } x\in K_m \text{ e } |f(x)| \le m \\ -m & \text{se } x\in K_m \text{ e } f(x) \le -m \\ 0 & \text{se } x\notin K_m. \end{cases}$$

Então $\int |f-f_{[m]}| \longrightarrow 0$ e $\int f_{[m]} \longrightarrow \int f$.

A demonstração é análoga à da Proposição 2.1.

EXERCÍCIO 2 - Seja M_k uma sequência crescente de conjuntos mensuráveis com $\bigcup_{k\in N} M_k = M$; seja $f\in\mathfrak{L}_1(M)$. Demonstrar que

$$\int_{M_k} f \longrightarrow \int_M f \quad \text{e que} \quad \int_{M_k} f_k \longrightarrow \int_M f$$

onde

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \le k \\ 0 & \text{se } |f(x)| > k \end{cases}$$

<u>EXERCÍCIO</u> <u>3</u> - Seja $f\in\mathfrak{L}_1(E)$; para todo $a > 0$ definimos

$$E_a = \{t\in E \mid |f(t)| \ge a\}.$$

Demonstrar que

$$\lim_{a\downarrow 0} \int_{E_a} f = \int_E f \quad \text{e que} \quad \lim_{a\uparrow\infty} \int_{E_a} f = 0.$$

<u>EXERCÍCIO</u> <u>4</u> - Seja $f\in\mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^2)$; para todo $n\in N$ definimos

$$A_n = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2 \le n|y|\}.$$

Demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f = \int_{\mathbb{R}^2} f.$$

<u>TEOREMA 2.3</u> - Seja $f\in\mathfrak{L}_1(E)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo conjunto mensurável $A\subset E$ com $mA \le \delta$ temos

$$\int_A |f| \leq \varepsilon.$$

DEMONSTRAÇÃO - Em caso contrário existiria $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $k \geq 1$ existe A_k com $mA_k \leq \frac{1}{2^k}$ e

$$\int_{A_k} |f| \geq \varepsilon_0.$$

Seja $B_k = \bigcup_{n \geq k} A_n$ e $f_k = \chi_{B_k} f$; então $|f_k| \leq |f|$ e como temos

$$B_k \supset B_{k+1} \quad \text{e} \quad mB_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

segue-se que $f_k \xrightarrow{q.s} 0$. Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue temos então

$$\int_E |f_k| \longrightarrow 0$$

contra o fato de que

$$\int_E |f_k| = \int_{B_k} |f| \geq \int_{A_k} |f| \geq \varepsilon_0.$$

<u>EXERCÍCIO 5</u> - a) Dar uma demonstração direta do teorema 2.3 quando f é limitada.

*b) Deduzir o teorema 2.3 de a) e do teorema da convergência monótona.

§3- CONVERGÊNCIA DE INTEGRAIS

<u>EXEMPLO 3.1</u> -

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\, dt \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

De fato: seja

$$f_n(t) = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}},\ t > 0;$$

temos

$$|f_n(t)| \leq g(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

com $g \in \mathcal{L}_1(]0,\infty[)$ (ver o exemplo 7 do Apêndice A) e $f_n(t) \to 0$ para todo $t > 0$. O resultado segue pois do teorema da convergência dominada de Lebesgue.

<u>EXEMPLO 3.2</u> - Seja $\alpha > 1$;

$$\int_0^1 \frac{nt \operatorname{sen} t}{1 + (nt)^{\alpha}}\, dt \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

De fato: seja

$$f_n(t) = \frac{nt \operatorname{sen} t}{1 + (nt)^{\alpha}}.$$

Para todo $t \in [0,1]$ temos $f_n(t) \longrightarrow 0$ pois $\alpha > 1$. Temos

$$|f_n(t)| \leq 1$$

para todo n [pois fazendo $nt = x$ basta demonstrar que

$$\left|\frac{x}{1+x^{\alpha}}\right| \leq 1$$

para todo $x \geq 0$, isto é, $x^{\alpha}-x \geq -1$ para todo $x \geq 0$, o que é imediato.] O resultado segue pois do teorema da convergência dominada de Lebesgue.

EXERCÍCIO 1 - Determinar

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nt \text{ sen } t}{1+nt}\, dt.$$

EXEMPLO 3.3 -

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+\frac{t}{n})^n t^{1/n}} \longrightarrow 1 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

De fato: seja

$$f_n(t) = \frac{1}{(1+\frac{t}{n})^n t^{1/n}}.$$

Quando $n \longrightarrow \infty$ temos $(1+\frac{t}{n})^n \longrightarrow e^t$ e $t^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$; portanto $f_n(t) \longrightarrow e^{-t}$. Por outro lado temos

$$(1+\frac{t}{n})^n = 1 + t + \frac{n(n-1)}{n^2}\,\frac{t^2}{2} + \ldots \geq \frac{t^2}{4} \text{ para } n \geq 2 \text{ e } t > 0.$$

Se então tomarmos

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{4}{t^2} & \text{se } t \geq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{t}} & \text{se } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

temos $g \in \mathcal{L}_1(]0,\infty[)$ (ver os exemplos 2 e 1 do Apêndice A) e

$$|f_n(t)| \le g(t).$$

O resultado segue pois do teorema da convergência dominada de Lebesgue já que

$$\int_0^\infty e^{-t}dt = 1.$$

EXEMPLO 3.4 - Seja $a > 0$;

$$\int_a^\infty \frac{n^2 t e^{-n^2 t^2}}{1+t^2}\, dt \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

De fato: façamos $x = nt$; então temos

$$\int_a^\infty \frac{n^2 t e^{-n^2 t^2}}{1+t^2}\, dt = \int_{na}^\infty \frac{xe^{-x^2}}{1+\frac{x^2}{n^2}}\, dx = \int_0^\infty \chi_{[na,\infty[}(x) \frac{xe^{-x^2}}{1+\frac{x^2}{n^2}}\, dx.$$

Seja

$$f_n(x) = \chi_{[na,\infty[}(x) \frac{xe^{-x^2}}{1+\frac{x^2}{n^2}};$$

então $f_n(x) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ e $|f_n(x)| \le g(x) = xe^{-x^2}$ com $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+)$ (ver exemplo 3 do Apêndice A). O resultado segue pois do teorema da convergência dominada de Lebesgue.

OBSERVAÇÃO - O resultado acima não vale quando $a = 0$ pois então temos

$$\int_0^\infty \frac{n^2te^{-n^2t^2}}{1+t^2}\,dt \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

De fato: fazendo $x = nt$ temos, pelo teorema da convergência monótona, que

$$\int_0^\infty \frac{n^2te^{-n^2t^2}}{1+t^2}\,dt = \int_0^\infty \frac{xe^{-x^2}}{1+\frac{x^2}{n^2}}\,dx \uparrow \int_0^\infty xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

<u>EXERCÍCIO</u> <u>2</u> - Demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{3/2}t}{1+n^3t^3}\,dt = 0.$$

[Sugestão: mostrar que

$$\frac{n^{3/2}t}{1+n^3t^3} \leq \frac{1}{2\sqrt{t}}.]$$

<u>EXERCÍCIO</u> <u>3</u> - Demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^\infty e^{-nt^2+t}\,dt = 0.$$

[Sugestão: $-nt^2+t \leq -|t|$ para $|t| \geq 2$.]

<u>EXERCÍCIO</u> <u>4</u> - Seja $\alpha > 0$; demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{\alpha-1}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt.$$

[Sugestão: mostrar que $(1-\frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$ para $0 \leq t \leq n$, fazendo $t = ns$.]

EXERCÍCIO 5 - Determinar

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nt}{1+n^2t^2}\, dt.$$

EXERCÍCIO 6 - Demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{3/2}t}{1+n^2t^2}\, dt = 0.$$

[Sugestão: mostrar que

$$\frac{n^{3/2}t}{1+n^2t^2} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}.]$$

EXERCÍCIO 7 - Determinar

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\, e^{\cos^n t}\, dt.$$

EXERCÍCIO 8 - Determinar

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\cos \frac{t}{1-t}\right)^n dt.$$

§4 - CÁLCULO DE INTEGRAIS

PROPOSIÇÃO 4.1 - Seja $\alpha > 1$; temos

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\, x^{\alpha-1}\, dx = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$$

onde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx.$

DEMONSTRAÇÃO - Para $0 < a < 1$ temos $\frac{a}{1-a} = a + a^2 + a^3 + \ldots$ donde se segue que para $x > 0$ temos

$$\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}.$$

Seja

$$S_n(x) = x^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n} e^{-kx};$$

os S_n formam uma sequência crescente de funções integráveis segundo Lebesgue em $[0,\infty[$ [□] e

$$\int_0^\infty S_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty e^{-kx} x^{\alpha-1} dx = \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-y}\, y^{\alpha-1} dy \text{ (onde fizemos } kx = y)$$

$$= \Gamma(\alpha) \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} < \Gamma(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}.$$

Pelo teorema da convergência monótona temos então

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\, x^{\alpha-1} dx = \int_0^\infty [\lim_{n\to\infty} S_n(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty S_n(x)dx = \Gamma(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}.$$

OBSERVAÇÃO - A função Γ está definida para $\alpha > 0$ [□] e generaliza a função fatorial, $\Gamma(n) = (n-1)!$

De fato: fazendo integração por partes vem

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^\alpha\, dx = -e^{-x}\, x^\alpha \Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx = \alpha\Gamma(\alpha);$$

portanto

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\Gamma(1) = (n-1)! \text{ pois}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1.$$

PROPOSIÇÃO 4.2 - Sejam $p,q > 0$, temos

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t^q}\, dt = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+2q} - \frac{1}{p+3q} + \ldots.$$

DEMONSTRAÇÃO - Observemos inicialmente que a série do segundo membro acima é convergente pois seus termos formam uma sequência monótona alternada que tende para zero [□].

Para $0 < t < 1$ temos

$$\frac{t^{p-1}}{1+t^q} = t^{p-1}(1-t^q+t^{2q}-t^{3q}+\ldots) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-t^q)\,t^{p-1+2nq}$$

Os somandos desta série sendo funções contínuas positivas, segue-se do teorema da convergência monótona que

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t^q}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (1-t^q)\, t^{p-1+2nq}\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 t^{p-1+2nq}\, dt - \int_0^1 t^{p-1+(2n+1)q}\, dt \right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{p+2nq}\, t^{p-1+2nq+1} \Big|_0^1 - \frac{1}{p+(2n+1)q}\, t^{p-1+(2n+1)q+1} \Big|_0^1 \right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2nq} - \frac{1}{p+(2n+1)q} \right). \quad \square$$

EXEMPLO 1 - Tomemos $p = q = 1$ então temos

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

EXEMPLO 2 - Tomemos $p = 1$, $q = 2$, então temos

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \text{arc tg } 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

§5 - INTEGRAIS DEPENDENTES DE UM PARÂMETRO

Dada uma função $\phi : X \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ para todo $x \in X$ e $t \in E$ escrevemos $\phi^x(t) = \phi_t(x) = \phi(x,t)$; temos portanto funções

$$\phi^x : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ e } \phi_t : X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

TEOREMA 5.1 - Seja X um espaço métrico e E um conjunto mensurável. Seja $x_0 \in X$ e $\phi : X \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

1) Para todo $x \in X$ a função ϕ^x é mensurável.
2) Para quase todo $t \in E$ a função ϕ_t é contínua no ponto x_0.
3) Existe $g \in \mathcal{L}_1(E)$ tal que $|\phi(x,t)| \leq g(t)$ para todo $x \in X$ e quase todo $t \in E$.

Então a função

$$x \in X \longrightarrow \Phi(x) = \int_E \phi(x,t)\,dt \in \mathbb{R}$$

é contínua no ponto x_0.

DEMONSTRAÇÃO - Tomemos $x_n \longrightarrow x_0$; queremos demonstrar que

$$\Phi(x_n) \longrightarrow \Phi(x_0).$$

Pela hipótese 2) temos $\phi(x_n,t) \longrightarrow \phi(x_0,t)$ para quase todo $t \in E$. Das hipóteses 1) e 3) segue que podemos aplicar o teorema da convergência dominada de Lebesgue para concluir que

$$\Phi(x_n) = \int_E \phi(x_n,t)\,dt \longrightarrow \int_E \phi(x_0,t)\,dt = \Phi(x_0). \square$$

OBSERVAÇÃO 5.1 - Basta evidentemente que a hipótese 3) este ja satisfeita somente numa vizinhança de x_0.

<u>OBSERVAÇÃO 5.2</u> - Em vez de 3) basta supor que $\phi^x \in \mathcal{L}_1(E)$ para todo $x \in X$ e que

$$\int_E |\phi(x,t)-\phi(x_0,t)|\,dt \longrightarrow 0 \text{ quando } x \longrightarrow x_0.$$

<u>EXEMPLO 1</u> - Seja $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e z>0\}$. A função

$$z \in X \longrightarrow \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

está bem definida e é contínua.

De fato: temos $E =]0,\infty[$ e seja $\phi(z,t) = e^{-t} t^{z-1}$; ϕ é uma função contínua [lembramos que $t^{iy} = e^{iy \log t}$]; dado $z_0 = x_0+iy_0 \in X$ tomemos $0 < a < x_0 < A < \infty$ e consideremos a seguinte vizinhança de z_0:

$$V_{z_0} = \{z \in X \mid a<\mathcal{R}e z<A\}.$$

Seja

$$g(t) = \begin{cases} t^{a-1} & \text{se } 0<t\leq 1 \\ t^{A-1}e^{-t} & \text{se } 1<t<\infty \end{cases};$$

então $g \in \mathcal{L}_1(]0,\infty[)$ (ver os Exemplos 1 e 3 do Apêndice A), e para todo ponto $z \in V_{z_0}$ temos

$$|\phi(z,t)| = |e^{-t}t^{z-1}| = |e^{-t}t^{x-1}| \leq g(t);$$

o resultado segue-se pois do Teorema 5.1 (e da Observação 5.1).

<u>EXEMPLO</u> <u>2</u> - Seja $X =]0,\infty[$; dado $c \in \mathbb{R}$ a função

$$x \in]0,\infty[\longrightarrow \Phi(x) = \int_c^\infty t^n e^{-tx} dt$$

está bem definida e é contínua.

De fato: temos $E = [c,\infty[$ e seja $\phi(x,t) = t^n e^{-tx}$. A função ϕ é contínua e dado $x_0 \in]0,\infty[$ seja $0 < a < x_0$; na vizinhança $]a,\infty[$ de x_0 temos

$$|\phi(x,t)| = |t^n e^{-tx}| \leq g(t) = t^n e^{-at}$$

com $g \in \mathcal{L}_1([c,\infty[)$ ([□]; ver o exemplo 3 do Apêndice A) e o resultado segue-se pois do Teorema 5.1.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>1</u> - Seja $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+)$; demonstrar que a função

$$x \in [0,\infty[\longrightarrow \Phi(x) = \int_0^\infty f(t) e^{-tx} dt$$

está bem definida e é contínua.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>2</u> - Determinar em que pontos $z \in \mathbb{C}$ está bem definida e é contínua a função

$$\Phi(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-tz}}{1+t^2} dt.$$

*EXERCÍCIO 3 - Determinar os pontos $z\in\mathbb{C}$ tais que para todo $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+)$ seja bem definida e contínua a função

$$(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-tz}dt.$$

EXEMPLO 3 - Seja $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$; para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ definimos

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i t\cdot\xi}dt \text{ onde } t\cdot\xi = \sum_{j=1}^n t_j\xi_j;$$

a função $\hat{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ está bem definida e é contínua (ela se chama *transformada de Fourier* de f); para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ temos

$$|\hat{f}(\xi)| \le \int_{\mathbb{R}^n}|f(t)|dt.$$

De fato: definimos $\phi(\xi,t) = f(t)e^{-2\pi i t\cdot\xi}$; então ϕ_t é contínua em todo $\mathbf{R}^n$ e temos $|\phi(\xi,t)| \le g(t) = |f(t)|$ onde f é por hipótese integrável. O resultado segue-se pois do Teorema 5.1.

EXEMPLO 4 - Seja X um espaço métrico e E um conjunto mensurável de medida finita. Seja $\phi:X\times E\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função limitada e separadamente contínua (isto é, para cada $t\in E$ a função ϕ_t é contínua e para cada $x\in X$ a função ϕ^x é contínua). Para todo $x\in X$ seja

$$\Phi(x) = \int_E \phi(x,t)dt;$$

então a função $\Phi: X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e limitada.

De fato: cada ϕ_t é contínua e portanto $x_n \longrightarrow x$ implica que $\phi(x_n,t) \longrightarrow \phi(x,t)$. A função ϕ^x é contínua e portanto mensurável e $|\phi(x,t)| \leq g(t) = \|\phi\|$ que é integrável pois $mE < \infty$. O resultado segue-se pois do Teorema 5.1; temos

$$\|\Phi\| \leq m(E)\|\phi\| \; [\square].$$

<u>EXERCÍCIO</u> <u>4</u> - Para todo $x \in [0,1]$ definimos

$$\Phi(x) = \int_0^1 \frac{xt}{x^2+t^2}\, dt.$$

Demonstrar que a função Φ é contínua.

<u>EXEMPLO</u> <u>5</u> - A função

$$x \in [0,1] \longrightarrow \Phi(x) = \int_0^1 \frac{\text{sen } xt}{\sqrt{|x-t|}}\, dt$$

está bem definida e é contínua.

De fato: seja

$$\phi(x,t) = \frac{\text{sen } xt}{\sqrt{|x-t|}};$$

então dado $x_0 \in [0,1]$ para $t \neq x_0$ a função ϕ_t é contínua no ponto x_0 (e portanto está satisfeita a hipótese 2) do Teorema 5.1). Cada função ϕ^x é mensurável (e portanto está satisfei ta a hipótese 1) do Teorema 5.1) mas não existe uma função $g\in\mathfrak{L}_1([0,1])$ que majore ϕ [□].

Façamos então $x-t=s$; vem

$$\Phi(x) = \int_{x-1}^{x} \frac{\text{sen } x(x-s)}{|s|^{1/2}}\, ds$$

e seja

$$\psi(x,s) = \chi_{[x-1,x]}(s)\, \frac{\text{sen } x(x-s)}{|s|^{1/2}}$$

definida para $(x,s)\in[0,1]\times[-1,1]$; se $s\notin\{0,x_0, x_0-1\}$ a função ψ_s é contínua no ponto x_0 e temos

$$|\psi(x,s)| \le g(s) = \frac{1}{|s|^{1/2}}$$

com $g\in\mathfrak{L}([-1,1])$ ([□], ver o exemplo 1 do Apêndice A). O resultado segue-se pois do Teorema 5.1.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>5</u> - Demonstrar que a função

$$x\in\mathbb{R} \longrightarrow \Phi(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}\, dt$$

está bem definida e é contínua.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>6</u> - Demonstrar que a função

$$x\in]0,\infty[\longrightarrow \Phi(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\text{sen } t\, dt$$

está bem definida e é contínua.

* EXERCÍCIO 7 - Demonstrar que a função

$$x \in]0,1[\longrightarrow \Phi(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{|\mathrm{sen}\ t|^x}\, dt$$

está bem definida e é contínua.

EXERCÍCIO 8 - Demonstrar que a função

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow \Phi(x) = \int_0^\infty x e^{-x^2t^2}\, dt$$

está bem definida e é contínua nos pontos $x \neq 0$.

EXERCÍCIO 9 - Determinar os pontos $x \in \mathbb{R}$ em que é definida e contínua cada uma das seguintes funções

a) $\Phi(x) = \int_0^\infty \cos \frac{|x|^{1/2}}{t}\, dt$ b) $\Phi(x) = \int_0^\infty \frac{|\mathrm{sen}\ xt|}{t^{3/2}}\, dt$

c) $\Phi(x) = \int_0^\infty t x^3 e^{-x^2t^2}\, dt.$

EXEMPLO 6 - Seja $f_1 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in C^*(\mathbb{R}^n)$, isto é, $f_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é função contínua limitada. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$(f_2 * f_1)(x) = [f_2(t) \underset{t}{*} f_1(t)](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_2(x-t) f_1(t)\, dt.$$

Então $f_2*f_1 \in C^*(\mathbb{R}^n)$ e $\|f_2*f_1\| \leq \|f_2\|\|f_1\|_1$ onde

$$\|h\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|h(x)| \quad \text{e} \quad \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n}|f(t)|dt$$

(f_2*f_1 se denomina de *produto de convolução* de f_2 por f_1).

De fato: seja $\phi(x,t) = f_2(x-t)f_1(t)$; então para todo $t\in\mathbb{R}^n$ a função ϕ_t é contínua, para todo $x\in\mathbb{R}^n$ a função ϕ^x é mensurável e temos $|\phi(x,t)| \leq g(t) = \|f_2\|\,|f_1(t)|$ onde $g\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Do Teorema 5.1 segue-se então que f_2*f_1 é contínua; o resto é imediato [□] .

<u>EXERCÍCIO 7</u> - Demonstrar que nas condições acima f_2*f_1 é uniformemente contínua se f_2 o for.

<u>EXEMPLO 7</u> - Seja Y um espaço métrico,

$$f_1\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n) \text{ e } f_2\in C^*(\mathbb{R}^n\times Y);$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times Y$ definimos

$$(f_2 \underset{1}{*} f_1)(x,y) = [f_2(t,y) \underset{t}{*} f_1(t)](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_2(x-t,y)f_1(t)dt.$$

Então

$$f_2 \underset{1}{*} f_1 \in C^*(\mathbb{R}^n\times Y) \quad \text{e} \quad \|f_2 \underset{1}{*} f_1\| \leq \|f_2\|\ \|f_1\|_1.$$

De fato: seja $\phi(x,y,t) = f_2(x-t,y)f_1(t)$; então ϕ_t é contínua para todo $t\in\mathbb{R}^n$, $\phi^{x,y}$ é mensurável para todo

$$(x,y)\in\mathbb{R}^n\times Y \quad \text{e} \quad |\phi(x,y,t)| \leq g(t) = \|f_2\|\,|f_1(t)|$$

com $g\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$. O resultado segue-se pois do Teorema 5.1.

APLICAÇÕES - a) Seja $u_0\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$; para todo $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,\infty[$ definimos

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right]ds.$$

Então a função u é contínua e para cada $\tau>0$ ela é limitada em $\mathbb{R}\times[\tau,\infty[$.

De fato: definindo

$$f_2(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2t}\right]$$

então a função f_2 é contínua e limitada em cada conjunto da forma $\mathbb{R}\times[\tau,\infty[$; o resultado segue-se pois do Exemplo 7 com $f_1=u_0$.

b) Seja $u_0\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$; para todo $(x,y)\in\mathbb{R}\times]0,\infty[$ definimos

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(t)\,\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt.$$

Então a função u é contínua e para cada $a>0$ ela é limitada em $\mathbb{R}\times[a,\infty[$.

De fato: definindo

$$f_2(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2},$$

então f_2 é contínua em cada conjunto da forma $\mathbb{R}\times[a,\infty[$. O resultado segue pois do Exemplo 7 com $f_1 = u_0$.

§6 - DERIVAÇÃO SOB O SINAL DE INTEGRAÇÃO

TEOREMA 6.1 - Sejam E mensurável, $I =]x_0 - a, x_0+a[\subset \mathbb{R}$ e $\phi: I\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

1) Para cada $x\in I$ temos $\phi^x \in \mathfrak{L}_1(E)$; seja $\Phi(x) = \int_E \phi(x,t)dt$.

2) Para quase todo $t\in E$ a função ϕ_t é diferenciável no ponto x_0, e seja

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0,t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\phi(x_0+h,t) - \phi(x_0,t)]$$

(definida para quase todo t).

3) Existe $g\in\mathfrak{L}_1(E)$ tal que para todo $h\in]-a,a[$ temos

$$\left|\frac{1}{h}[\phi(x_0+h,t)-\phi(x_0,t)]\right| \le g(t) \text{ q.s.}$$

Então temos:

a) a função Φ definida em I é diferenciável no ponto x_0;

b) a função $t\in E \longrightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0,t)$ é integrável;

c) $\frac{d}{dx}\int_E \phi(x,t)dt = \int_E \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)dt$ no ponto $x = x_0$.

DEMONSTRAÇÃO - Tomemos $h_n \longrightarrow 0$; temos

$$\frac{1}{h_n}[\Phi(x_0+h_n,t) - \Phi(x_0,t)] = \int_E \frac{1}{h_n}[\phi(x_0+h_n,t) - \phi(x_0,t)]dt.$$

Pela hipótese 1) a integral do segundo membro existe e pela hipótese 2) o integrando tende q.s. para $\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0,t)$; pela hipótese 3) segue do teorema da convergência dominada de Lebesgue que a integral do segundo membro tende para $\int_E \frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0,t)dt$. $\square$

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>6.1</u> - O teorema acima vale ainda quando ϕ é uma função a valores complexos: basta considerar suas componentes real e imaginária. A mesma observação vale para todos teoremas de derivação que seguem.

A forma mais frequente sob a qual vamos aplicar a derivação sob o sinal de integração é dada pelo

<u>TEOREMA 6.1 bis</u> - Seja E mensurável, $]a,b[\subset \mathbb{R}$ e

$\phi:]a,b[\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

1) Para cada $x\in]a,b[$ temos $\phi^x \in \mathfrak{L}_1(E)$.

$\tilde{3}$) Para quase todo $t\in E$ a função ϕ_t é diferenciável em todo ponto $x\in]a,b[$ e para todo $x_0\in]a,b[$ existe uma vizinhança $]x_0-\delta,x_0+\delta[\subset]a,b[$ de x_0 e uma função $g_\delta \in \mathfrak{L}_1(E)$ tal que para todo $x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[$

temos

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)\right| \leq g_\delta(t) \text{ q.s.}$$

Então temos

$$\frac{d}{dx}\int_E \phi(x,t)dt = \int_E \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)dt$$

em todo ponto $x\in]a,b[$.

DEMONSTRAÇÃO - Basta mostrar que $\bar{3}$) implica a hipótese 3) do teorema 6.1 para $I=]x_0-\delta,x_0+\delta[$. Isto é imediato pois pelo teorema da média temos

$$\phi(x_0+h,t) - \phi(x_0,t) = h\,\frac{\partial\phi}{\partial x}(\bar{x},t)$$

onde $\bar{x}$ está entre x_0 e x_0+h (e depende de t) e portanto para $|h|<\delta$ temos

$$\left|\frac{1}{h}[\phi(x_0+h,t)-\phi(x_0,t)]\right| = \left|\frac{\partial\phi}{\partial x}(\bar{x},t)\right| \leq g_\delta(t) \text{ q.s.}$$

<u>EXEMPLO</u> <u>1</u> - Para $x>0$ temos

$$\frac{d}{dx}\int_c^\infty t^n e^{-xt}\,dt = -\int_c^\infty t^{n+1}e^{-xt}\,dt.$$

De fato: vimos no Exemplo 2 do §5 que as integrais acima existem. O integrando é diferenciável para todo $x > 0$ e portanto estão satisfeitas as hipóteses 1) e 2) do Teorema 6.1. Também está satisfeita a condição $\bar{3}$) do teorema 6.1 bis acima pois dado $a > 0$ para $x \geq a$ temos

$$|t^{n+1}e^{-xt}| \leq g(t) = t^{n+1}e^{-at} \text{ com } g \in \mathcal{L}_1([c,\infty[);$$

o resultado segue pois do Teorema 6.1 bis.

<u>EXEMPLO 2</u> - A função Γ (ver o Exemplo 1 do §5) é holomorfa em $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e z > 0\}$.

De fato: lembremos que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\, dt.$$

Já vimos no Exemplo 1 do §5 que a função Γ é contínua em X. A função $\phi(z,t) = e^{-t}t^{z-1}$ é derivável em relação a z e temos $\frac{\partial\phi}{\partial x}(z,t) = e^{-t}t^{z-1}\log t$. Dado $z_0 \in X$ sejam a, A tais que

$$0 < a < \mathcal{R}e z_0 < A$$

e consideremos a seguinte vizinhança de z_0: $V = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \mathcal{R}e z < A\}$. Para $z \in V$ temos

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial z}(z,t)\right| = |e^{-t}t^{x-1}\log t| \leq g(t) = \begin{cases} t^{a-1}\log t \text{ se } 0<t\leq 1 \\ t^{A-1}e^{-t}\log t \text{ se } 1<t<\infty; \end{cases}$$

temos $g \in \mathcal{L}_1(]0,\infty[)$ (ver os exemplos 6 e 7 do Apêndice A) e portanto $\bar{3}$) está satisfeita. O resultado segue pois do Teorema 6.1 bis.

<u>EXEMPLO 3</u> - Seja $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|dt < \infty;$$

então para todo $\xi \in \mathbb{R}$ existe $\hat{f}'(\xi)$ e temos

$$\frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i \xi t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i t) f(t) e^{-2\pi i \xi t}\, dt.$$

De fato: já vimos no Exemplo 3 do §5 que a primeira integral existe. O integrando é diferenciável (como função de ξ). Vale $\bar{3}$) pois

$$|2\pi i t f(t) e^{-2\pi i t \xi}| = g(t) = |2\pi t f(t)|$$

e por hipótese temos $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. O resultado segue pois do Teorema 6.1 bis.

<u>EXERCÍCIO 1</u> - Seja $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+)$; demonstrar que para todo $x > 0$ temos

$$\frac{d}{dx} \int_c^{\infty} e^{-tx} f(t)dt = -\int_c^{\infty} e^{-tx} t f(t)dt.$$

<u>EXERCÍCIO 2</u> - Determinar os pontos $z \in \mathbb{C}$ em que é bem definida e holomorfa (i.é, derivável) cada uma das seguintes fun-

ções

a) $\Phi(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-tz}}{1+t^2}\, dt$ b) $\Phi(z) = \int_0^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-tz}\, dt$

c) $\Phi(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-tz}\, dt.$

<u>EXERCÍCIO 3</u> - Determinar os pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que para todo $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+)$ seja bem definida e holomorfa a função

$$(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-tz}\, dt.$$

<u>EXERCÍCIO 4</u> - Determinar os pontos $x \in \mathbb{R}$ em que é bem definida e derivável cada uma das seguintes funções

a) $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-t^2 x^2} dt$ b) $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-(x-t)^3} dt$

c) $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-|t| x^3} dt.$

<u>EXERCÍCIO 5</u> - Determinar os pontos $x \in \mathbb{R}$ em que vale

a) $\frac{d}{dx} \int_1^{\infty} e^{t^2(x+2)} \frac{\cos t}{t^4} = \int_1^{\infty} e^{t^2(x+2)} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$

b) $\frac{d}{dx} \int_1^{\infty} e^{tx} \frac{\operatorname{sen} t}{t^3}\, dt = \int_1^{\infty} e^{tx} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\, dt.$

Dado um aberto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ e um inteiro m indicamos por $C^{(m)}(\Omega)$ o conjunto das funções $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que para qualquer $p=(p_1,\ldots,p_n)\in N^n$ com $|p| = p_1+\ldots+p_n \leq m$ tem derivada

$$D^p f = \frac{\partial^{|p|} f}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}}$$

contínua (fazemos a convenção de que $D^0 f = f$). Quando além disto todas as $D^p f$ são limitadas, escrevemos $f\in C_*^{(m)}(\Omega)$. Escrevemos $f\in C^{(\infty)}(\Omega)$ $[f\in C_*^{(\infty)}(\Omega)]$ se para todo inteiro m tivermos $f\in C^{(m)}(\Omega)$ $[f\in C_*^{(m)}(\Omega)]$.

EXEMPLO 4 - Dados $f_1\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ e $f_2\in C_*^{(1)}(\mathbb{R})$ temos

$$f_2*f_1\in C_*^{(1)}(\mathbb{R}) \text{ e } (f_2*f_1)' = f_2'*f_1.$$

De fato: temos

$$(f_2*f_1)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-t)f_1(t)dt.$$

Seja $\phi(x,t) = f_2(x-t)f_1(t)$; para cada $x\in\mathbb{R}$ temos evidentemente $\phi^x\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, isto é, está satisfeita a condição 1) do Teorema 6.1; para cada $t\in\mathbb{R}$ a função ϕ_t é diferenciável no ponto x, isto é, está satisfeita a condição 2) do Teorema 6.1. Vale também a condição $\bar{3}$) pois

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)\right| = |f_2'(x-t)f_1(t)| \leq g(t) = \|f_2'\|\,|f_1(t)|$$

com $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Do Teorema 6.1 bis segue então que

$$f_2 * f_1 \in C^{(1)}(\mathbb{R}).$$

O resto é imediato [□].

<u>EXERCÍCIO</u> <u>2</u> - Seja m inteiro ou ∞, $f_1 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, $f_2 \in C_*^{(m)}(\mathbb{R})$. Demonstrar que $f_2 * f_1 \in C_*^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ e que $(f_2 * f_1)^{(k)} = f_2^{(k)} * f_1$, $k = 1,2,\ldots,m$.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>3</u> - Seja m inteiro ou ∞, $f_1 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$, $f_2 \in C_*^{(m)}(\mathbb{R}^n)$. Demonstrar que $f_2 * f_1 \in C_*^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ e que $D^p(f_2 * f_1) = (D^p f_2) * f_1$ para $p \in N^n$ com $|p| \leq m$.

<u>EXEMPLO</u> <u>5</u> - Sejam $f_1 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ e $f_2 \in C_*^{(1)}(\mathbb{R} \times]c,d[)$ então temos $f_2 * f_1 \in C_*^{(1)}(\mathbb{R} \times]c,d[)$ (Veja o Exemplo 7 do §5) e

$$D(f_2 \underset{1}{*} f_1) = (Df_2) \underset{1}{*} f_1 \text{ onde } D = \frac{\partial}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial}{\partial y}.$$

De fato: lembremos que

$$(f_2 \underset{1}{*} f_1)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-t,y) f_1(t)\,dt.$$

Seja $\phi(x,y,t) = f_2(x-t,y) f_1(t)$; a demonstração segue como no Exemplo 4, usando o fato que f_2 tem derivada contínua e limitada em relação a suas duas variáveis [□].

<u>EXEMPLO</u> <u>6</u> - Sejam m um inteiro ou ∞,

$$f_1 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \text{ e } f_2 \in C_*^{(m)}(\mathbb{R} \times]c,d[);$$

então

$$f_2 \underset{1}{*} f_1 \in C_*^{(m)}(\mathbb{R}\times]c,d[) \text{ e } D^p(f_2 \underset{1}{*} f_1) = (D^p f_2) \underset{1}{*} f_1$$

para $|p| \leq m$ [□].

<u>APLICAÇÕES</u> - a) Com as notações da aplicação a) do Exemplo 7 do §5 temos $u \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$ e u satisfaz à equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

isto é, a equação do calor.

De fato: a primeira afirmação segue do Exemplo 6, considerando $C_*^{(\infty)}(\mathbb{R}\times]\tau,\infty[)$ para todo $\tau > 0$ [□]; a segunda segue do fato de que a função

$$f_2(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2t}\right]$$

satisfaz a equação do calor [□].

b) Com as notações da aplicação b) do Exemplo 7 do §5 temos $u \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}\times]0,\infty[$ e u satisfaz a equação a derivadas parciais

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

isto é, u é uma função harmônica.

De fato: a primeira afirmação segue do Exemplo 6 [II] e a segunda do fato de que a função

$$f_2(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

é harmônica [□].

*EXERCÍCIO 4 - Demonstrar que as afirmações da aplicação a) precedente quando u_0 é mensurável e limitada.
[Sugestão: para $x \in]-n,n[$ e $t > \tau > 0$ temos

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left|u_0(s)\ \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right]\right| \le \|u_0\|_\infty g(s)$$

onde

$$g(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}}\ \exp\left[-\dfrac{(s+n)^2}{4a^2\tau}\right] & \text{para } s \le -n \\[2ex] \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}} & \text{para } |s| \le n \\[2ex] \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}}\ \exp\left[-\dfrac{(s-n)^2}{4a^2\tau}\right] & \text{para } s \ge n \end{cases}$$

e analogamente para derivadas quaisquer (de u em relação a x e/ou t).]

* EXERCÍCIO 5 - Demonstrar as afirmações da aplicação b) precedente quando u_0 é mensurável e limitada. [Sugestão: ver o exercício precedente.]

*§7 - OUTRAS APLICAÇÕES

Lembremos (ver Capítulo III, Apêndice, Teorema 3) que dados espaços normados E e F, uma aplicação linear

$$A:E \longrightarrow F$$

é contínua se, e somente se, a sua norma

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$$

for finita. Em geral, nos exemplos concretos, é muito difícil calcular $\|A\|$ e conseguimos apenas majorações para este valor.

Definimos $C_{L_1}(\mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ e este espaço é munido da norma induzida por $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$, isto é, da norma

$$\alpha\in C_{L_1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \|\alpha\|_1 \doteq \int_{\mathbb{R}^n}|\alpha(x)|dx.$$

TEOREMA 7.1 - Seja $\alpha\in C_{L_1}(\mathbb{R}^n)$; então o funcional

$$F_\alpha: f\in C^*(\mathbb{R}^n) \longrightarrow F_\alpha(f) = \int_{\mathbb{R}^n}\alpha(x)f(x)dx\in\mathbb{R}$$

é linear e contínuo e temos $\|F_\alpha\| = \|\alpha\|_1$.

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que $F_\alpha(f)$ está bem definido [□] e de $|F_\alpha(f)| \le \|\alpha\|_1\|f\|$ [□] segue imediatamente que o funcional linear F_α é contínuo e que $\|F_\alpha\| \le \|\alpha\|_1$ [□]. Para demonstrar que $\|F_\alpha\| = \|\alpha\|_1$ é suficiente demonstrar que existe uma sequên cia $f_k \in C^*(\mathbb{R}^n)$, $k \in N$, com $\|f_k\| \leq 1$ e tal que $F_\alpha(f_k) \longrightarrow \|\alpha\|_1$ quando $k \longrightarrow \infty$ [□]. Mostremos isto: para todo inteiro $k \geq 1$ definimos

$$f_k(x) = \begin{cases} k\,\overline{\alpha(x)} \text{ se } |\alpha(x)| \leq \frac{1}{k} \\ \overline{sg}\,\alpha(x) \text{ se } |\alpha(x)| \geq \frac{1}{k} \end{cases}$$

onde $\overline{sg}\, z = \frac{|z|}{z}$ (e $\overline{sg}\, 0 = 0$).

f_k está bem definida [□] e temos $f_k \in C^*(\mathbb{R}^n)$ pois f_k é contínua em cada um dos fechados

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |\alpha(x)| \leq \tfrac{1}{k}\} \text{ e } \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |\alpha(x)| \geq \tfrac{1}{k}\} \text{ [□]}$$

cuja reunião é $\mathbb{R}^n$ e é limitada pois $\|f_k\| \leq 1$. Temos

$$F_\alpha(f_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) f_k(x) dx;$$

de

$$\alpha(x) f_k(x) = \begin{cases} k|\alpha(x)|^2 \text{ se } |\alpha(x)| \leq \frac{1}{k} \\ |\alpha(x)| \text{ se } |\alpha(x)| \geq \frac{1}{k} \end{cases}$$

segue que $|\alpha(x) f_k(x)| \leq |\alpha(x)|$ e que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\alpha(x) f_k(x) \longrightarrow |\alpha(x)|$$

quando $k \longrightarrow \infty$. Do teorema da convergência dominada de Lebesgue segue-se então que

$$F_\alpha(f_k) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\alpha(x)|\,dx. \ \square$$

EXERCÍCIO 1 - Demonstrar que o Teorema 7.1 vale quando substituimos $\mathbb{R}^n$ por um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.

* EXERCÍCIO 2 - Demonstrar que para todo aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ temos $C(U) \not\subset \mathcal{L}_1(U)$.

[Sugestão: considerar uma sequência infinita de pontos $x_k \in U$ sem ponto de acumulação em U e tomar bolas de centro nestes pontos, contidas em U e duas a duas disjuntas. Definir $f \in C(U)$ adequadamente nestas bolas.]

Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ indicamos por $\mathcal{D}(U)$ o conjunto das funções $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente deriváveis e nulas fora de um compacto contido em U.

* EXERCÍCIO 3 - Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto não vazio,

$$x_0 \in U \ \text{ e } \ 0 < a < d(x_0, CU).$$

Definimos

$$\phi_{x_0;a}(x) = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{-1}{a^2 - \|x-x_0\|^2}\right] & \text{se } \|x-x_0\| < a \\[2ex] 0 \text{ se } \|x-x_0\| \geq a \text{ e } x \in U. \end{cases}$$

Demonstrar que $\phi_{x_0;a} \in \mathcal{D}(U)$.

Com a notação do Exercício 3 escrevemos ϕ_a quando $x_0 = 0$. Seja $\rho = c\phi_1$ onde $\frac{1}{c} = \int \phi_1$; dado $\delta > 0$ seja $\rho_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n}\rho(\frac{x}{\delta})$, $x \in \mathbb{R}^n$. Então temos

$$\rho_\delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \int \rho_\delta = 1 \ [\square] \ \text{e} \ \rho_\delta(x) = 0 \ \text{se} \ \|x\| \geq \delta.$$

Dado um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$ definimos

$$E_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,E) \leq \delta\}.$$

EXERCÍCIO 4 - Demonstrar que E_δ é fechado, que E_δ é compacto se E é limitado e que $\bar{E} = \bigcap_{\delta>0} E_\delta$.

*PROPOSIÇÃO 7.2 - Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\phi \in \mathcal{K}(U)$ nula fora de $K \subset U$; se $\delta < d(K, CU)$ temos $\rho_\delta * \phi \in \mathcal{D}(U)$ e $\rho_\delta * \phi$ é nula fora de K_δ; $\rho_\delta * \phi$ tende uniformemente para ϕ quando $\delta \longrightarrow 0$.

DEMONSTRAÇÃO - Por abuso de notação ainda indicamos por ρ_δ e ϕ as prolongadas destas funções a $\mathbb{R}^n$ tomando o valor zero fora de U. Evidentemente temos $\rho_\delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

a) $\rho_\delta * \phi$ é nula fora de K_δ. De fato: temos

$$(\rho_\delta * \phi)(x) = \int \rho_\delta(x-y)\phi(y)dy = \int_K \rho_\delta(x-y)\phi(y)dy$$

que é nula se $d(x,K) \geq \delta$ pois então $\rho_\delta(x-y) = 0$ para todo $y \in K$.

b) $\rho_\delta * \phi \in \mathcal{D}(U)$ (se $\delta < d(K, CU)$). De fato: do Exemplo do §6 segue-se que $\rho_\delta * \phi \in C_*^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ e em a) demonstramos que $\rho_\delta * \phi$ é nula fora do compacto $K_\delta \subset U$.

c) $\rho_\delta * \phi$ converge uniformemente para ϕ quando $\delta \longrightarrow 0$. De fato: é imediato que $\rho_\delta * \phi = \phi * \rho_\delta$ [□] e ϕ sendo contínua e nula fora de um compacto, é uniformemente contínua. Portanto dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > o$ tal que para $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| \le \delta$ temos

$$\|\phi(x-y) - \phi(x)\| \le \varepsilon.$$

Então

$$|(\rho_\delta * \phi)(x) - \phi(x)| = \left|\int \phi(x-y)\rho_\delta(y)dy - \phi(x)\right| =$$

$$= \left|\int [\phi(x-y) - \phi(x)]\rho_\delta(y)dy\right| \le \int_{B_\delta} |\phi(x-y) - \phi(x)|\rho_\delta(y)dy \le \varepsilon.$$

<u>TEOREMA 7.3</u> - Seja $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$; então a sua transformada de Fourier $\hat{f}$ é uma função contínua que tende para zero no infinito, isto é

$$\lim_{\|\xi\| \to \infty} \|\hat{f}(\xi)\| = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO - Já vimos no Exemplo 3 do §5 que $\hat{f}$ é uma função contínua limitada com

$$\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx.$$

Queremos provar que dado $\varepsilon > 0$ existe L_ε tal que para $\|\xi\| \ge L_\varepsilon$ temos $|\hat{f}(\xi)| \le \varepsilon$. Pelo corolário I.5.4.2, dado $\varepsilon > 0$ existe uma função em patamar $\psi:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\|f-\psi\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e portanto

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{\psi}(\xi)| + |\hat{\psi}(\xi)| \leq \|f-\psi\|_1 + |\hat{\psi}(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\hat{\psi}(\xi)|;$$

basta pois demonstrar que existe L_ε tal que para $\|\xi\| \geq L_\varepsilon$ temos $|\hat{\psi}(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Como temos

$$\psi = \sum_{k=1}^{r} c_k \chi_{I_k}$$

é suficiente provar que $\hat{\chi}_I$ tende para zero no infinito onde I é um intervalo limitado,

$$I = \prod_{i \leq j \leq n} [a_j, b_j]$$

o que é fácil de verificar pois

$$\chi_{\pi[a_j,b_j]}(x) = \prod_{1 \leq j \leq n} \chi_{[a_j,b_j]}(x_j)$$

e portanto

$$\mathcal{F}[\chi_I](\xi) = \prod_{1 \leq j \leq n} (\mathcal{F}\chi_{[a_j,b_j]})(\xi_j) \quad [\square].$$

onde

$$(\mathcal{F}\chi_{[a_j,b_j]})(\xi_j) = \int_{a_j}^{b_j} e^{-2\pi i x_j \xi_j}\, dx_j = \frac{1}{2\pi i \xi_j}\left[e^{-2\pi i b_j \xi_j} - e^{-2\pi i a_j \xi_j}\right]$$

que de fato tende para zero quando $|\xi_j| \longrightarrow 0$.

COROLÁRIO 7.3.1 (o lema de Riemann-Lebesgue) - Dada

$$f \in \mathcal{L}_1([0,1])$$

os seus coeficientes de Fourier

$$a_n[f] = \int_0^1 f(t)\cos 2\pi nt dt, \quad b_n[f] = \int_0^1 f(t)\operatorname{sen} 2\pi nt dt$$

tendem para zero quando $n \to \infty$ [□].

APÊNDICE A - CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA DE INTEGRAIS DE RIEMANN IMPRÓPRIAS

No fim do capítulo I lembramos as definições da integral de Riemann e da integral de Riemann imprópria. Vimos que se uma função é integrável segundo Riemann ela é integrável segundo Lebesgue e que as duas integrais coincidem (Teorema I.4.2). O mesmo ainda vale para uma função f para a qual existe a integral de Riemann imprópria, *desde que não tenhamos*

$$\int f_+ = \int f_- = \infty.$$

Assim, apesar da teoria da integral de Lebesgue ser muito mais rica que a teoria da integral de Riemann (tanto por englobar uma categoria mais ampla de funções como por ter teoremas mais poderosos), para efeitos de cálculos e avaliações, nos exemplos analíticos concretos, caimos nos habituais critérios demonstrados para a integral de Riemann e para a integral de Riemann imprópria.

No presente Apêndice vamos lembrar alguns resultados sobre a integral de Riemann imprópria, principalmente os que são importantes para funções positivas, que são as *dominadoras* no teorema de convergência dominada de Lebesgue.

Lembremos a definição da integral imprópria (de Riemann): consideramos um intervalo $[a,b[$, onde $-\infty < a < b \leq \infty$, e uma função $f:[a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

I_1 - Para todo $x \in [a,b[$ temos $f \in \mathcal{R}([a,x])$

I_2 - Existe $\lim\limits_{x \uparrow b} \mathcal{R}\int_a^x f(t)dt \in \mathbb{R}$.

Neste caso escrevemos $f \in \mathcal{R}([a,b[)$ e definimos

$$\mathcal{R}\int_a^b f = \mathcal{R}\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \uparrow b} \mathcal{R}\int_a^x f(t)dt$$

que chamamos de *integral imprópria* (de Riemann) da função f no intervalo $[a,b[$. Dizemos ainda que a integral

$$\mathcal{R}\int_a^b f(t)dt$$

é *convergente*. Quando o limite em I_2 não existe (ou é infinito) dizemos que a integral de f em $[a,b[$ é *divergente*.

Quando estão satisfeitos I_1 e I_2 com $b<\infty$ e f é limitada temos na realidade $f\in\mathcal{R}([a,b])$ [□]. É imediata a

<u>PROPOSIÇÃO 1</u> - Sejam $f:[a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ onde $-\infty<a<b\leq\infty$ e $c\in[a,b[$. Temos $f\in\mathcal{R}([a,b[)\iff f\in\mathcal{R}([a,c])$ e $f\in\mathcal{R}([c,b[)$ e no caso afirmativo vale

$$\mathcal{R}\int_a^b f(t)dt = \mathcal{R}\int_a^c f(t)dt + \mathcal{R}\int_c^b f(t)dt.$$

De modo análogo definimos $\mathcal{R}(]a,b])$, $-\infty\leq a<b<\infty$ e valem propriedades análogas que para $\mathcal{R}([c,d[)$ com $-\infty<c<d\leq\infty$.

Mais geralmente dados um intervalo $]a,b[$ com $-\infty\leq a<b\leq\infty$ e uma função $f:]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que existem pontos

$$t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b$$

tais que $f\in\mathcal{R}(]t_i,c_i])$ e $f\in\mathcal{R}([c_i,t_{i+1}[)$ para $i=0,1,\ldots,n$ onde $c_i\in]t_i,t_{i+1}[$, escrevemos $f\in\mathcal{R}(]a,b[)$ e definimos

$$\mathcal{R}\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n}\left[\mathcal{R}\int_{t_i}^{c_i} f(t)dt + \mathcal{R}\int_{c_i}^{t_{i+1}} f(t)dt\right].$$

Da proposição 1 segue que esta definição é independente dos particulares pontos $c_i\in]t_i,t_{i+1}[$.

A partir de agora suprimimos a indicação $\mathcal{R}$ frente à integral de Riemann própria ou imprópria. Portanto quando escrevemos

$$\int_a^b f(t)dt$$

cabe ao leitor decidir se a integral existe como integral de Riemann, como integral de Riemann imprópria ou como integral de Lebesgue (evidentemente ela pode existir em mais de um destes sentidos).

Lembremos que dado um intervalo $J \subset R$, dizemos que uma função $F: J \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *primitiva* da função $f: J \longrightarrow \mathbb{R}$ se para todo $x \in J$ existe $F'(x) = f(x)$; F é portanto contínua.

TEOREMA 2 - Sejam $-\infty < a < b \leq \infty$, $f \in C([a,b[)$ e $F:[a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f; então $f \in R([a,b[)$ se e somente se F têm uma extensão contínua a $[a,b]$, isto é, existe

$$F(b) = \lim_{x \uparrow b} F(x) \in \mathbb{R};$$

neste caso temos

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

DEMONSTRAÇÃO - Pelo teorema fundamental do cálculo, para todo $x \in [a,b[$ temos

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

e portanto existe

$$\lim_{x \uparrow b} \int_a^x f(t)\,dt$$

se e somente se existe $\lim_{x \uparrow b} F(x)$, donde segue o resultado. $\square$

Assim

$$\int_0^\infty e^{-t}dt = 1$$

pois a função $F(t) = -e^{-t}$ é uma primitiva da função contínua $f(t) = e^{-t}$ e $F(\infty) = 0$ e $F(0) = -1$. Por outro lado não existe

$$\int_0^\infty \cos t\ dt$$

pois a função $F(t) = \operatorname{sen} t$ que é uma primitiva da função $f(t) = \cos t$ é tal que não existe $\lim_{x \uparrow \infty} F(x)$.

<u>EXERCÍCIO 1</u> - Verificar se as seguintes integrais são convergentes

a) $\int_0^\infty \operatorname{sen} t\ dt$ b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ c) $\int_0^\infty e^t\ dt$

d) $\int_{-\infty}^0 e^t\ dt$ e) $\int_0^1 \log t\ dt$ f) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2}$

<u>EXEMPLO 1</u> - Sejam $a < b$ e

$$f(t) = \frac{1}{(t-a)^{\alpha}} : f \in \mathcal{R}(]a,b]) \iff \alpha < 1.$$

De fato: seja $\alpha \neq 1$; f tem uma função primitiva

$$F(t) = \frac{1}{1-\alpha}(t-a)^{1-\alpha}$$

a qual tem limite finito no ponto $t = a$ se e somente se $1-\alpha > 0$, isto é, se e somente se $\alpha < 1$. Para $\alpha = 1$ a primitiva

$$F(t) = \log(t-a)$$

não tem limite finito no ponto $t = a$.

EXEMPLO 2 - Sejam $a < b$ e

$$f(t) = \frac{1}{(t-a)^{\alpha}} : f \in \mathcal{R}([b,\infty[) \iff \alpha > 1.$$

De fato: seja $\alpha \neq 1$; f tem como primitiva a função

$$F(t) = \frac{1}{1-\alpha}(t-a)^{1-\alpha}$$

que tem limite finito no ponto $t = \infty$ se e somente se $1-\alpha < 0$, isto é, se e somente se $\alpha > 1$. Quando $\alpha = 1$ a primitiva

$$\log(t-a)$$

não tem limite finito no infinito.

EXERCÍCIO 2 - Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f(t) = \frac{1}{|t|^{\alpha}}$; demonstrar que $f \notin \mathcal{R}(\mathbb{R})$.

EXERCÍCIO 3 - Determinar os intervalos da reta (limitados ou não) em que são integráveis as funções

a) $\dfrac{1}{\sqrt{|t(1-t)^3|}}$ b) $\dfrac{|t|^{2/3}}{\sqrt{|(t^2-1)(t^2+1)|}}$ c) $\dfrac{1}{|t|^{\alpha}|t-2|^{\beta}}$.

TEOREMA 3 (O critério de Cauchy) - Sejam $-\infty < a < b \leq \infty$ e $f:[a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x\in[a,b[$ temos $f\in\mathcal{R}([a,x])$. Então temos $f\in\mathcal{R}([a,b[)$ se e somente se dado $\varepsilon > 0$ existe $L_\varepsilon\in[a,b[$ tal que para qualquer $[c,d]\subset[L_\varepsilon,b[$ temos

$$\left|\int_c^d f(t)dt\right| \leq \varepsilon \ [\square]$$

TEOREMA 4 (O teste de comparação) - Sejam $-\infty < a < b \leq \infty$ e $f,g:[a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ tais que para todo $x\in[a,b[$ temos

$$f,g\in\mathcal{R}([a,x])$$

com $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$. Então se $g\in\mathcal{R}([a,b[)$ temos

$$f\in\mathcal{R}([a,b[) \quad e \quad \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b g(t)dt.$$

DEMONSTRAÇÃO - Segue imediatamente do critério de Cauchy pois

$$\left|\int_c^d f(t)dt\right| \leq \int_c^d g(t)dt. \ \square$$

Assim existe

$$\int_0^\infty e^{t-t^2}dt$$

pois já vimos que existe

$$\int_0^\infty e^{-t}dt$$

e para $t \geq 2$ temos $e^{t-t^2} \leq e^{-t}$ [□].

EXERCÍCIO 4 - Decidir se existem as seguintes integrais

a) $\int_0^\infty e^{-t}\text{sen}\,\frac{1}{t}\,dt$ b) $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt$ c) $\int_0^\infty e^{-\pi t^2}dt$

d) $\int_0^\infty \frac{\text{sen}\ t}{1+t^2}\,dt$ e) $\int_0^1 |\log\ t|^n dt$ f) $\int_0^\infty te^t\ dt$

g) $\int_0^\infty e^{t^3-t^2}\ dt$ h) $\int_{-\infty}^\infty e^{t-t^4}\ dt$ i) $\int_{-\infty}^\infty \left|\frac{\text{sen}\ t}{t^{1/2}}\right|dt$

EXEMPLO 3 - Sejam $\varepsilon, \delta > 0$ e P um polinômio qualquer. Então existe

$$\int_0^\infty P(t)e^{-\varepsilon t^\delta}dt.$$

DEMONSTRAÇÃO - Basta provar que para todo $m \geq 0$ existe

$$\int_0^\infty t^m e^{-\varepsilon t^\delta}dt$$

o que segue do fato de que existe L_m tal que para $t \geq L_m$ temos

$$t^m e^{-\varepsilon t^\delta} \le \frac{1}{t^2}$$

(Veja o Exemplo 2 e a Proposição 1), isto é, $t^{m+2} \le e^{\varepsilon t^\delta}$ o que por sua vez segue do fato que dado $k \in \mathbb{N}$, tomando $n \ge k$ tal que $(n+1)\delta > k$ então para

$$t \ge \left[\frac{(n+1)!}{\varepsilon^{n+1}}\right]^{\frac{1}{(n+1)\delta - k}} \quad \text{temos} \quad t^k \le \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!}\, t^{(n+1)\delta}$$

isto é

$$t^k \le \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!} t^{(n+1)\delta} \le 1 + \varepsilon t^\delta + \frac{\varepsilon^2}{2!} t^{2\delta} + \ldots + \frac{\varepsilon^n}{n!}\, t^{n\delta} + \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!}\, t^{(n+1)\delta} \le e^{\varepsilon t^\delta}.$$

EXERCÍCIO 5 - Decidir se as seguintes integrais convergem

a) $\int_0^\infty t^\pi e^{-\pi t}\, dt$ b) $\int_0^\infty e^{-(t-1)^2} dt$ c) $\int_0^\infty e^{-t} \log t\, dt$

d) $\int_0^\infty e^{-|\log t|^\alpha} dt$ e) $\int_0^\infty t^\alpha |\text{sen } t|^\beta e^{-t} dt.$

TEOREMA 5 (O teste de comparação no limite) - Sejam $-\infty < a < b \le \infty$ e $f, g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ tais que existe

$$\lim_{x \uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = K \in [0, \infty].$$

a) Seja $K < \infty$: $g \in R([a,b[) \Longrightarrow f \in R([a,b[)$.

b) Seja $K>0$: $g\notin R([a,b[) \Longrightarrow f\notin R([a,b[)$.

c) Seja $0<K<\infty$: $g\in R([a,b[) \Longleftrightarrow f\in R([a,b[)$.

DEMONSTRAÇÃO - a) Por hipótese dado $\delta>0$ existe $L_\delta\in[a,b[$ tal que para $x\in[L_\delta,b[$ temos

$$0 \le \frac{f(x)}{g(x)} \le K + \delta$$

e portanto $0 \le f(x) \le (K+\delta)g(x)$ para $x\in[L_\delta,b[$. O resultado segue-se pois do teste de comparação. b): basta considerar $\frac{g}{f}$. c): segue-se de a) e b).

<u>EXEMPLO 4</u> - Seja P um polinômio de grau $m \ge 0$ e seja $\alpha > 0$. Se

$$f(t) = \frac{P(t)}{1+|t|^\alpha}$$

temos: $f\in R(]-\infty,\infty[) \Longleftrightarrow \alpha-m > 1$.

DEMONSTRAÇÃO - Se $\alpha-m > 1$ seja

$$g(t) = \frac{1}{1+|t|^{\alpha-m}};$$

pelo exemplo 2 temos $g\in R(]-\infty,\infty[)$ e como

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} < \infty \quad [\square]$$

o resultado segue do teorema 5 a). Analogamente se demonstra que $f\notin R(]-\infty,\infty[)$ quando $\alpha-m \le 1$.

*EXEMPLO 5 -

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+\|x\|^{\beta}}\, dx < \infty \iff \beta > n.$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja $|S_n|$ a hiperárea da esfera unitária S_n do $\mathbb{R}^n$. Então a hiperárea da esfera de raio r é $r^{n-1}|S_n|$ e temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+\|x\|^{\beta}}\, dx = \int_0^{\infty} \left[\int_{\|x\|=r} \frac{1}{1+\|x\|^{\beta}}\, dS \right] dr =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+r^{\beta}}\, r^{n-1}|S_n|\, dr = |S_n| \int_0^{\infty} \frac{r^{n-1}}{1+r^{\beta}}\, dr,$$

que pelo Exemplo 4 é finito se e somente se $\beta-(n-1) > 1$, isto é, se e somente se $\beta > n$. $\square$

OBSERVAÇÃO - No que segue vamos usar o fato que para todo $\varepsilon > 0$ e todo $\beta \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{\varepsilon}|\log t|^{\beta} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \uparrow \infty} \frac{|\log t|^{\beta}}{t^{\varepsilon}} = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO - Para determinar o 1º limite fazemos $t = e^{-s}$ e caímos em $\lim\limits_{s \to \infty} |s|^{\beta} e^{-\varepsilon s} = 0$ que foi provado na demonstração do Exemplo 3. Para achar o 2º limite fazemos $t = \frac{1}{s}$ e caímos no caso anterior.

EXEMPLO 6 - Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

a) Dado $0<c<1$, existe $\int_0^c t^\alpha |\log t|^\beta dt \iff \alpha>-1$, ou $\alpha=-1$ e $\beta<-1$.

b) Dado $0<c<1$, existe $\int_c^1 t^\alpha |\log t|^\beta dt \iff \beta>-1$.

c) Dado $1<c<\infty$, existe $\int_1^c t^\alpha |\log t|^\beta dt \iff \beta>-1$.

d) Dado $1<c<\infty$, existe $\int_c^\infty t^\alpha |\log t|^\beta dt \iff \alpha<-1$, ou $\alpha=-1$ e $\beta<-1$.

DEMONSTRAÇÃO - a) Observemos inicialmente que a função

$$f(t) = t^\alpha |\log t|^\beta$$

é contínua em qualquer intervalo fechado contido em $]0,c]$, quaisquer que sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Vamos agora examinar diversos casos:

i) Seja $\alpha>-1$ e escrevamos $\alpha = \alpha_0 + \delta$ com $-1<\alpha_0<\alpha$ e portanto $\delta>0$. Tomemos $g(t) = t^{\alpha_0}$; então pelo Exemplo 1 temos $g\in R(]0,c])$. Pela observação que precede este exemplo temos

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{t^\alpha |\log t|^\beta}{t^{\alpha_0}} = \lim_{t\downarrow 0} t^\delta |\log t|^\beta = 0.$$

Do teorema 5 a) segue então que existe

$$\int_0^c t^\alpha |\log t|^\beta dt.$$

ii) Se $\alpha = -1$ fazemos $t = e^{-s}$ e vem

$$\int_0^c t^{-1}|\log t|^\beta dt = \int_{-\log c}^{\infty} |s|^\beta ds$$

que pelo Exemplo 2 é finita se e somente se $\beta < -1$.

iii) Se $\alpha<-1$ escrevemos $\alpha = \alpha_0 - \delta$ com $\alpha<\alpha_0<-1$ e portanto $\delta > 0$. Tomemos $g(t) = t^{\alpha_0}$, então pelo Exemplo 1 temos

$$g \notin R(]0,c]).$$

Da observação que precede este exemplo segue que

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{t^\alpha|\log t|^\beta}{t^{\alpha_0}} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{|\log t|^\beta}{t^\delta} = \infty.$$

Do teorema 5 b segue então que $f \notin R(]0,c])$.

b) Para $\beta \geq 0$ temos $f \in C([c,1])$. Se $\beta < 0$ apliquemos o teorema 5 c) com $g(t) = (t-1)^\beta$ temos

$$\lim_{t\to 1} \frac{f(t)}{g(t)} = 1 \text{ (pois } \lim_{t\to 1} \frac{\log t}{t-1} = 1,$$

como segue pela regra de l'Hôpital). O resultado segue pois do Exemplo 1

c) Segue de b) fazendo $t = \frac{1}{s}$

d) Segue de a) fazendo $t = \frac{1}{s}$

<u>EXERCÍCIO</u> <u>6</u> - Determinar os intervalos (limitados ou não) em que são integráveis as funções

a) $|t|^\alpha \log|t|$ b) $\dfrac{1}{1+\log|t|}$ c) $\dfrac{|t|^\alpha}{1+|\log t|}$

d) $|\log t|^{\alpha}$ e) $\dfrac{1}{\log(1+|t|^{n})}$ f) $\dfrac{\log|t|}{|t|\sqrt{|t^2-1|}}$.

De modo análogo ao Exemplo 6 demonstra-se o

<u>EXEMPLO</u> <u>7</u> - Sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $\gamma > 0$

a) Dado $0<c<1$, existe $\int_0^c t^{\alpha}|\log t|^{\beta}e^{-\gamma t}dt \iff \alpha>-1$,ou, $\alpha=-1$ e $\beta<-1$.

b) Dado $0<c<1$, existe $\int_c^1 t^{\alpha}|\log t|^{\beta}e^{-\gamma t}dt \iff \beta>-1$.

c) Dado $1<c<\infty$, existe $\int_1^c t^{\alpha}|\log t|^{\beta}e^{-\gamma t}dt \iff \beta>-1$.

d) Dado $c>1$, existe $\int_c^{\infty} t^{\alpha}|\log t|^{\beta}e^{-\gamma t}dt$.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>7</u> - Determinar os intervalos limitados ou não em que são integráveis as funções

a) $|t|^{\alpha}|\log t|^{\beta}e^{-\gamma t^{\delta}}$ b) $|t|^{\alpha}|\text{sen } t|^{\beta}|\cos t|^{\gamma}|\log t|^{\delta}e^{-t}$

c) $|tg|^{\alpha}|\log t|^{\beta}e^{-t}$.

APÊNDICE B - <u>INTEGRAÇÃO E DIFERENCIAÇÃO</u>

Neste Apêndice vamos dar um teorema que mostra como através da integral de Lebesgue na reta estabelecemos uma correspondência perfeita entre as noções de integração e diferenciação como operações inversas uma da outra. Esta correspondência não existe no caso da integral de Riemann. Para as demonstrações ver as referências [R], Cap. 5, [K], Cap. 4, [Z], Cap. 7.

Dizemos que uma função $F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é de *variação limitada* se

$$V_{[a,b]}[F] = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |F(t_i)-F(t_{i-1})| \,\middle|\, a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b \right\} < \infty.$$

EXERCÍCIO 1 - Demonstrar que toda função monótona

$$F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

é de variação limitada.

* EXERCÍCIO 2 - Demonstrar que toda função de variação limitada $F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser escrita como diferença de duas funções monótonas crescentes.

[Sugestão: $F = v-(F-v)$ onde $v(t) = V_{[a,t]}[F]$].

EXERCÍCIO 3 - Seja $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ e $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$

a) Demonstrar que F é de variação limitada e que

$$V_{[a,b]}[F] \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

*b) Demonstrar que

$$V_{[a,b]}[F] = \int_a^b |f(t)|dt.$$

EXERCÍCIO 4 - Decidir se as seguintes funções definidas no intervalo $[0,1]$ são de variação limitada

a) $F(t) = \operatorname{sen} t^2$ b) $F(t) = \frac{1}{t}$ c) $F(t) = t \operatorname{sen} \frac{1}{t}$

d) $F(t) = e^{-t}$ e) $F(t) = \int_0^t \operatorname{sen} \frac{1}{s}\, ds$ f) $F(t) = t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t}$

Dizemos que uma função $F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é *absolutamente contínua* se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo

$$a \le s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le \ldots \le s_n < t_n \le b$$

com

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - s_i) \le \delta \text{ temos } \sum_{i=1}^{n} |F(t_i) - F(s_i)| \le \varepsilon.$$

EXERCÍCIO 5 - Demonstrar que toda função absolutamente contínua é de variação limitada.

EXERCÍCIO 6 - Seja

$$f \in \mathfrak{L}_1([a,b]) \quad \text{e} \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt, \; x \in [a,b];$$

demonstrar que F é absolutamente contínua.

EXERCÍCIO 7 - Dar exemplo de uma função contínua monótona crescente que não é absolutamente contínua.

[Sugestão: procurar uma função que só cresce no conjunto triádico de Cantor. Para isto tomar $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ onde $f_0(0) = 0$, $f_0(1) = 1$ e f_0 é linear entre 0 e 1.

$$f_1(0) = 0,\ f_1(\tfrac{1}{3}) = f_1(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{1}{2},\ f_1(1) = 1$$

e f_1 é linear nos intervalos intermediários;

$f_2(0) = 0$, $f_2(\frac{1}{9}) = f_2(\frac{2}{9}) = \frac{1}{4}$, $f_2(\frac{1}{3}) = f_2(\frac{2}{3}) = \frac{1}{2}$, $f_2(\frac{7}{9}) = f_2(\frac{8}{9}) = \frac{3}{4}$, $f_2(1) = 1$ e f_2 é linear nos intervalos intermediários, etc. Demonstrar que a sequência f_n converge uniformemente.]

<u>EXERCÍCIO 8</u> - Demonstrar que f do exercício 7 satisfaz $f' = 0$ q.s.

O ponto chave na demonstração do Teorema de Lebesgue que segue é um teorema que diz que

Toda função monótona crescente $\phi:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *(não necessariamente contínua) é derivável em quase todos os pontos de* $[a,b]$ *e a sua derivada* ϕ' *(que portanto está definida q.s.) é integrável e temos*

$$\int_a^b \phi'(t)dt \le \phi(b) - \phi(a)$$

(a igualdade porém só vale se ϕ for absolutamente contínua).

Daí segue que toda função de variação limitada, e em particular toda função absolutamente contínua é derivável q.s. e a sua derivada é integrável.

O teorema fundamental deste Apêndice é o

<u>TEOREMA DE LEBESGUE</u> - a) Seja

$$f \in \mathcal{L}_1([a,b]) \quad \text{e} \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

$x \in [a,b]$. Então F é absolutamente contínua e temos $F' = f$ q.s.

b) Reciprocamente: seja $F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ absolutamente contínua; então F' é integrável em $[a,b]$ e

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

<u>EXERCÍCIO 9</u> - Sejam F e G absolutamente contínuas e f e g as suas derivadas (definidas q.s.)

a) Demonstrar que FG é absolutamente contínua e que

$$(FG)' = F'G + FG' \text{ q.s.}$$

b) Demonstrar que vale a fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b f(t)G(t)dt + \int_a^b F(t)g(t)dt = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Lembramos que para funções integráveis segundo Riemann não há uma correspondência perfeita entre a integração e a diferenciação: existem funções $f \in R([a,b])$ tais que se

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

então não é verdade que em todo ponto $x \in [a,b]$ existe

$$F'(x) = f(x) \ [\square].$$

Isto não é siquer verdade no complementar de um subconjunto enumerável de $[a,b]$ $[\square]$. Além disto, uma função contínua $F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ter derivada $F'(t)$ em todo ponto $t \in [a,b]$, com F' limitada, mas F' não integrável segundo Riemann (ver Gelbaum-Olmsted, "Counter examples in Analysis", Cap. VIII, Exemplo 35.)

Se porém nos restringirmos às funções $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que são *regradas*, isto é, que são tais que para todo $t \in [a,b[$ existe $f(t+)$ e para todo $t \in]a,b]$ existe $f(t-)$, então existe novamente um elegante teorema que estabelece uma correspondência perfeita entre a integração e a diferenciação.

Lembremos inicialmente que dada uma função

$$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

são equivalentes as seguintes propriedades:

i) f é regrada;

ii) Dado $\varepsilon > 0$ existe uma função em escada $\phi:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in [a,b]$ temos $|f(t) - \phi(t)| \leq \varepsilon$;

iii) Dado $\varepsilon > 0$ existe $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ tal que para quaisquer $s,t \in]t_{i+1}, t_i[$, $i=1,\ldots,n$, temos

$$|f(t)-f(s)| \leq \varepsilon.$$

Daí segue facilmente que toda função regrada é integrável segundo Riemann [□], e que ela tem apenas um conjunto enumerável de pontos de descontinuidade [□].

Vale o seguinte resultado:

Seja $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função regrada e*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

Então para todo $t \in [a,b[$ *existe* $F'_+(t) = f(t+)$ [□], *onde*

$$F'_+(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}[F(t+h) - f(t)],$$

e para todo $t \in]a,b]$ *existe* $F'_-(t) = f(t-)$. *Portanto* F *é contínua e exceto num conjunto enumerável de pontos de* $[a,b]$ *existe* $F'(t) = f(t)$ [□]. *Além disto, se* $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é regrada e* $F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função contínua tal que no complementar de um conjunto enumerável existe*

$$F'(t) = f(t)$$

então

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b] \ [**□].$$

APÊNDICE C - O TEOREMA DE FUBINI E APLICAÇÕES

No presente Apêndice apresentamos o teorema de Fubini. Este teorema permite reduzir o cálculo da integral de uma função $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{r+s})$ ao cálculo de duas integrais sucessi vas, em $\mathbb{R}^r$ e $\mathbb{R}^s$, efetuadas em uma ordem qualquer (ver o teorema 1 abaixo). No caso particular em que $r = s = 1$ o cálculo de uma integral dupla se reduz portanto ao cálculo de duas primitivas. O teorema de Fubini é muito importante e damos diversas aplicações suas. A demonstração deste teorema é dada na $2^{\underline{a}}$ parte deste texto (Capítulo IV, §3) num contexto mais geral. No Capítulo V nós necessitamos do teorema de Fubini apenas sob a forma como é apresentada no presente Apêndice.

Seja $X \subset \mathbb{R}^r$ um conjunto mensurável com $m_r X > 0$. Dada uma função $g \in \mathcal{L}_1(X)$ escrevemos a sua integral como

$$\int_X g(x)dx.$$

De modo análogo dado um conjunto mensurável $Y \subset \mathbb{R}^s$ com $m_s Y > 0$ e dada $h \in \mathcal{L}_1(Y)$, escrevemos sua integral como

$$\int_Y h(y)dy.$$

Se $f \in \mathcal{L}_1(X \times Y)$ então no presente Apêndice escrevemos sua integral como

$$\int_{X\times Y} f(x,y)dxdy.$$

<u>OBSERVAÇÃO 1</u> - Pode-se demonstrar que sob as hipóteses acima o conjunto $X \times Y \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ é mensurável e temos

$$m_{r+s}(X\times Y) = m_r(X)m_s(Y).$$

OBSERVAÇÃO 2 - Pode-se também demonstrar que se $g:X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $h:Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ são funções mensuráveis então a função

$$f:(x,y)\in X\times Y \longrightarrow g(x)h(y)\in\overline{\mathbb{R}}$$

é mensurável.

Dada uma função $f:X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, para todo $(x,y)\in X\times Y$ escrevemos

$$f^x(y) = f_y(x) = f(x,y).$$

Os resultados fundamentais deste Apêndice são os teoremas 1 e 2 que seguem

TEOREMA 1 (Fubini) - Sejam $X\subset\mathbb{R}^r$, $Y\subset\mathbb{R}^s$ conjuntos mensuráveis e $f\in\mathcal{L}_1(X\times Y)$; então vale

1 - Para quase todo $x\in X$ temos $f^x\in\mathcal{L}_1(Y)$.

1' - Para quase todo $y\in Y$ temos $f_y\in\mathcal{L}_1(X)$.

2 - A função $x\in X \longrightarrow \int_Y f(x,y)dy\in\overline{\mathbb{R}}$ é integrável.

2' - A função $y\in Y \longrightarrow \int_X f(x,y)dx\in\overline{\mathbb{R}}$ é integrável.

3 - $\int_X\left[\int_Y f(x,y)dy\right]dx = \int_{X\times Y} f(x,y)dxdy = \int_Y\left[\int_X f(x,y)dx\right]dy$

TEOREMA 2 (Tonelli) - Sejam $X\subset\mathbb{R}^r$ e $Y\subset\mathbb{R}^s$ conjuntos mensuráveis. Dada uma função mensurável $f:X\times Y \longrightarrow [0,\infty]$ temos

1 - Para quase todo $x\in X$ a função $f^x:Y \longrightarrow [0,\infty]$ é mensu

rável.

1' - Para quase todo $y \in Y$ a função $f_y : X \longrightarrow [0,\infty]$ é mensurável.

2 - A função $x \in X \longrightarrow \int_Y f(x,y)dy \in [0,\infty]$ é mensurável.

2' - A função $y \in Y \longrightarrow \int_X f(x,y)dx \in [0,\infty]$ é mensurável.

3 - $\int_X \left[\int_Y f(x,y)dy\right]dx = \int_{X\times Y} f(x,y)dxdy = \int_Y \left[\int_X f(x,y)dx\right]dy$ $(\leq\infty)$.

<u>COROLÁRIO 2.1</u> - Nas condições do teorema de Tonelli, se uma das três integrais

$$\int_X \left[\int_Y f(x,y)dy\right]dx, \quad \int_{X\times Y} f(x,y)dxdy, \quad \int_Y \left[\int_X f(x,y)dx\right]dy$$

for finita, as duas outras também o são e as três são iguais. [□].

<u>COROLÁRIO 2.2</u> - Sejam $X \subset \mathbb{R}^r$ e $Y \subset \mathbb{R}^s$ conjuntos mensuráveis e seja $f : X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Se uma das três integrais

$$\int_X \left[\int_Y |f(x,y)|dy\right]dx, \quad \int_{X\times Y} |f(x,y)|dxdy, \quad \int_Y \left[\int_X |f(x,y)|dx\right]dy$$

for finita, as três são finitas e iguais e são também finitas e iguais as três integrais

$$\int_X \left[\int_Y f(x,y)dy\right]dx, \quad \int_{X\times Y} f(x,y)dxdy, \quad \int_Y \left[\int_X f(x,y)dx\right]dy \quad [□].$$

<u>OBSERVAÇÃO 3</u> - Uma função mensurável $f: X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pode ser tal que existem e são finitas as integrais iteradas

$$\int_X \left[\int_Y f(x,y)\,dy \right] dx \quad \text{e} \quad \int_Y \left[\int_X f(x,y)\,dx \right] dy$$

(não necessariamente iguais) e apesar disto pode não existir

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,dxdy.$$

Quando isto acontece temos necessariamente

$$\int_{X\times Y} |f(x,y)|\,dxdy = \int_{X\times Y} f_+(x,y)\,dxdy = \int_{X\times Y} f_-(x,y)\,dxdy = \infty \;[\square]$$

A seguir damos um exemplo concreto desta asserção: sejam

$$X = Y = \left]0,1\right[\quad \text{e} \quad f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

f é contínua e portanto mensurável e para cada $x \in \left]0,1\right[$ temos

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \frac{1}{x^2+1} \;\left(\text{pois } f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{y}{x^2+y^2}\right);$$

portanto

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \text{arc tg } x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Como temos $f(y,x) = -f(x,y)$ segue-se que

$$\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\,dx\right]dy = -\frac{\pi}{2}$$

donde se conclue que f não é integrável, o que se pode verificar diretamente pois

$$\int_0^x f(x,y)\,dy = \frac{1}{2x}; \text{ portanto } \int_0^1 |f(x,y)|\,dy \geq \frac{1}{2x},$$

donde se segue que

$$\int_0^1\left[\int_0^1 |f(x,y)|\,dy\right]dx = \infty$$

<u>OBSERVAÇÃO 4</u> - Como já dissemos, o teorema de Fubini permite reduzir o cálculo de uma integral dupla ao cálculo de integrais iteradas, o que é particularmente vantajoso em $\mathbb{R}^2$ pois então o cálculo das integrais iteradas se reduz à procura de primitivas.

<u>EXERCÍCIO 1</u> - Verificar se as seguintes funções definidas em $\mathbb{R}^2$ são integráveis:

a) $f(x,y) = e^{-\pi(x-y)^2}$ b) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{(1+x^2)(1+y^2)}$

c) $f(x,y) = e^{-|x-y^3|}$ d) $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x-y) & \text{se } |x-y| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |x-y| \geq \pi \end{cases}$

$$\text{e)}\quad f(x,y) = \frac{xe^{-|x-y|}}{1+y^2}$$

OBSERVAÇÃO 5 - Dada uma função mensurável $g:\mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se definimos $f(x,y) = g(x-y)$ então f nunca é integrável em $\mathbb{R}^2$ (a menos que tenhamos $g = 0$ q.s.). De fato: se não temos $g = 0$ q.s. então

$$\int_{\mathbb{R}} |g| = a > 0 \text{ (eventualmente } \infty)$$

e para todo y temos

$$\int |f(x,y)|dx = \int |g|, \text{ portanto } \int\left[\int |f(x,y)|dx\right]dy = \infty$$

EXERCÍCIO 2 - Verifique para que valores de $\alpha > 0$ são integráveis as seguintes funções definidas em $\mathbb{R}^2$:

$$\text{a)}\quad f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x-y) & \text{se } |x-y| \le \dfrac{1}{1+|y|^\alpha} \\ 0 & \text{se } |x-y| > \dfrac{1}{1+|y|^\alpha} \end{cases} \qquad \text{b)}\quad f(x,y) = \frac{xe^{-|x|}}{1+|x-y|^\alpha}$$

$$\text{c)}\quad f(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha & \text{se } |x| \le \dfrac{1}{1+|y|^\alpha} \\ 0 & \text{se } |x| > \dfrac{1}{1+|y|^\alpha} \end{cases} \qquad \text{d)}\quad f(x,y) = \frac{xye^{-\pi x^2}}{1+|y|^\alpha}$$

EXERCÍCIO 3 - Verifique para que valores de $\alpha > 0$ é integrável a seguinte função definida em $]0,1[\times]0,1[$:

$$f(x,y) = \frac{1}{(1-xy)^\alpha}.$$

EXERCÍCIO 4 - Verifique se a seguinte função definida em $[-1,1]\times[-1,1]$ é integrável

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

[Sugestão: $\int_0^1 f(x,y)\,dy = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+1)}$].

EXERCÍCIO 5 - Deduzir do teorema de Tonelli que

$$m_{r+s}(X\times Y) = m_r(X)m_s(Y).$$

EXERCÍCIO 6 - Sejam $g\in\mathfrak{L}_1(X)$ e $h\in\mathfrak{L}_1(Y)$; para todo $(x,y)\in X\times Y$ definimos $f(x,y) = g(x)h(y)$. Demonstrar que $f\in\mathfrak{L}_1(X\times Y)$ e que

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,dxdy = \left(\int_X g(x)\,dx\right)\left(\int_Y h(y)\,dy\right)$$

[Sugestão: aplicar a observação 2].

EXERCÍCIO 7 - Dada $f:E \longrightarrow [0,\infty]$ definimos

$$\Omega_f = \{(x,t)\in E\times[0,\infty] \mid 0\le t\le f(x)\}$$

*a) Demonstrar que a função f é mensurável se e somente se Ω_f é um subconjunto mensurável de $E\times[0,\infty]$.

*b) Demonstrar que se f é mensurável então $\int_E f = m\Omega_f$.

[Sugestão: aplicar o teorema de Tonelli].

- ¤ -

CAPÍTULO III

OS ESPAÇOS $L_p(E)$

Neste capítulo definimos os espaços $\mathcal{L}_p(E)$ e $L_p(E)$ das funções e classes de equivalências de funções, respectivamente, p-integráveis $f:E \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. No §2 demonstramos as desigualdades de Hölder e de Minkowsky das quais segue que a aplicação

$$f \in L_p(E) \longrightarrow \|f\|_p = \left[\int_E |f(t)|^p dt\right]^{1/p}$$

é uma norma. O resultado fundamental deste capítulo é o teorema de Fischer-Riesz do §3 que diz que os espaços $L_p(E)$ são espaços de Banach, isto é, são completos. No Apêndice damos a linguagem de espaços normados subjacente a este capítulo.

Em todo este capítulo, a menos de menção explícita em contrário, todos os conjuntos e funções são mensuráveis.

§1 - OS ESPAÇOS $\mathcal{L}_p(E)$ e $L_p(E)$, $1 \leq p \leq \infty$

Sejam E um conjunto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$; indicamos por $\mathcal{L}_p(E)$ o conjunto das funções mensuráveis $f:E \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\|f\|_p < \infty$ onde

$$\|f\|_p = \left[\int_E |f(t)|^p dt\right]^{1/p} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{supess}_{t\in E} |f(t)| = \inf\{c \mid m\{t\in E \mid |f(t)|>c\}=0\} = \inf\{c \mid |f|\leq c \text{ q.s.}\}$$

Como temos $|f(t)+g(t)| \leq 2 \sup[|f(t)|,|g(t)|]$ segue-se que

$$|f(t)+g(t)|^p \leq 2^p \sup[|f(t)|^p,|g(t)|^p] \leq 2^p[|f(t)|^p+|g(t)|^p]$$

para $1 \leq p < \infty$ e é imediato, portanto, que $\mathcal{L}_p(E)$ é um espaço vetorial.

Consideramos duas funções $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_p(E)$ como *equivalentes* se elas só diferem num conjunto de medida nula. Pela Observação 10 do §3, capítulo I, isto equivale a dizer que $\|f_1-f_2\|_p = 0$ o que implica que $\|f_1\|_p = \|f_2\|_p$. Indicamos por $L_p(E)$ o espaço destas classes de equivalência, isto é, o espaço vetorial quociente de $\mathcal{L}_p(E)$ pelo espaço vetorial

$$N_p = \{f\in\mathcal{L}_p(E) \mid \|f\|_p=0\}.$$

Considerações análogas às acima valem para funções mensuráveis $f:E \longrightarrow \mathbb{C}$. Indicamos indiferentemente por $\mathcal{L}_p(E)$ e $L_p(E)$ os espaços vetoriais reais ou complexos.

Se $f:E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável tal que $\|f\|_p < \infty$ então temos $m\{t\in E \mid |f(t)| = \infty\} = 0$ (pela observação 3.6 do capítulo I) e definindo

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } |f(t)| < \infty \\ 0 & \text{se } |f(t)| = \infty \end{cases}$$

temos $\tilde{f}\in\mathcal{L}_p(E)$ e $\|f-\tilde{f}\|_p = 0$. Para definir $L_p(E)$ nada perdemos portanto ao considerar apenas funções finitas (se admitíssimos funções não finitas em $\mathcal{L}_p(E)$ perderíamos a estrutura de espaço vetorial neste espaço).

Por abuso de notação, dada a classe de equivalência $\dot{f}\in L_p(E)$ de $f\in\mathcal{L}_p(E)$ escrevemos $\|f\|_p$ em vez de $\|\dot{f}\|_p$, f em vez de $\dot{f}$, etc.

Queremos demonstrar que a aplicação

$$f\in L_p(E) \longrightarrow \|f\|_p \in \mathbb{R}_+$$

é uma norma, isto é, que temos

SN_1 - $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \ \|f\|_p$ para todo $\lambda\in\mathbb{R}$ e $f\in L_p(E)$
SN_2 - $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ para quaisquer $f,g\in L_p(E)$
SN_3 - $\|f\|_p = 0$ implica $f = 0$ (mais precisamente, $\dot{f} = 0$, isto é, $f = 0$ q.s.).

As propriedades SN_1 e SN_3 são imediatas e SN_2 é imediata para $p = 1$ e $p = \infty$; para demonstrar SN_2 quando $1 < p < \infty$ va mos precisar das desigualdades de Hölder e de Minkowsky.

§2 - AS DESIGUALDADES DE HÖLDER E DE MINKOWSKY

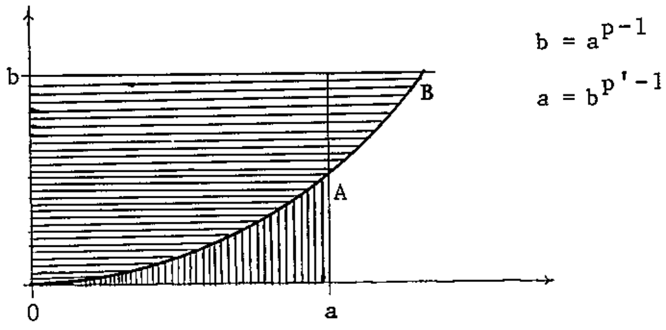
Dado $1 \leq p \leq \infty$ indicamos por p' o elemento de $[1,\infty]$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; temos $p'' = p$, $1' = \infty$, $2' = 2$. Dizemos que p e p' são *expoentes conjugados*.

LEMA 2.1.1 - Seja $1 < p < \infty$; para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}_+$ temos

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos a curva $b = a^{p-1}$ $(a = b^{\frac{1}{p-1}} = b^{p'-1})$ que é estritamente crescente (convexa se $p \geq 2$ e côncava se $p \leq 2$). Temos então $ab \leq$ área OaA + área OBb, isto é,

$$ab \leq \int_0^a t^{p-1}dt + \int_0^b t^{p'-1}dt = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$



TEOREMA 2.2 (A desigualdade de Hölder) - Dados $f \in L_p(E)$ e $g \in L_{p'}(E)$ temos

$$fg \in L_1(E) \quad \text{e} \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

DEMONSTRAÇÃO - Para $p = 1$ e $p = \infty$ o resultado é imediato [□] e supomos pois que $1 < p < \infty$. Do mesmo modo podemos supor que

$$\|f\|_p > 0 \quad \text{e} \quad \|g\|_{p'} > 0$$

pois senão o resultado é imediato (pois teríamos $fg = 0$).

Para todo $t \in E$ sejam

$$a(t) = \frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \quad \text{e} \quad b(t) = \frac{|g(t)|}{\|g\|_{p'}}.$$

Pelo Lema 2.1.1 aplicado ao par $(a(t), b(t))$ temos

$$\frac{|f(t)g(t)|}{\|f\|_p \ \|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(t)|^p}{(\|f\|_p)^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(t)|^{p'}}{(\|g\|_{p'})^{p'}}$$

e integrando esta desigualdade em E vem

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \int_E |f(t)g(t)| dt \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \ \square$$

COROLÁRIO 2.2.1 - Sejam $mE < \infty$, $1 \leq p < q \leq \infty$. Então temos

$$L_q(E) \subset L_p(E).$$

DEMONSTRAÇÃO - De $p < q$ segue se que $\frac{q}{p} > 1$ e portanto existe

$$(\frac{q}{p})' = \frac{q}{q-p} \ [\square].$$

Seja $f \in L_q(E)$ e apliquemos a desigualdade de Hölder relativamente ao par $(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p})$:

$$(\|f\|_p)^p = \int_E |f(t)|^p dt = \int_E |f(t)|^p \cdot 1 \, dt \leq$$

$$\leq \left[\int_E |f(t)|^{p\frac{q}{p}} dt \right]^{\frac{p}{q}} \left[\int 1 \, dt \right]^{\frac{q-p}{p}} = (\|f\|_q)^p m(E)^{\frac{q-p}{q}} \quad .$$

e portanto $\|f\|_p \leq m(E)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$.

<u>COROLÁRIO 2.2.2</u> - A aplicação

$$(f,g) \in L_2(E) \times L_2(E) \longrightarrow \int_E f(t)\overline{g(t)} dt \in \mathbb{C}$$

é um produto interno e vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_E f(t)\overline{g(t)} dt \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

<u>EXERCÍCIO 1</u> - Sejam $p,q \in [1,\infty]$, $p \neq q$; demonstrar que

$$L_q(\mathbb{R}^n) \not\subset L_p(\mathbb{R}^n).$$

**<u>EXERCÍCIO 2</u> - Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ com $mE = \infty$ e $p,q \in [1,\infty]$ com $p \neq q$; demonstrar que $L_q(E) \not\subset L_p(E)$.

**<u>EXERCÍCIO 3</u> - Seja $f \in C([c,d] \times [a,b])$; demonstrar que temos

$$\left[\int_c^d \left|\int_a^b f(t,s)ds\right|^p dt\right]^{1/p} \leq \int_a^b \left[\int_c^d |f(t,s)|^p dt\right]^{1/p} ds \quad \text{(Minkowsky)}$$

[Sugestão: para $1<p<\infty$ aplicar a desigualdade de Hölder relativa ao par (p',p) a

$$\int_c^d \left[\left|\int_a^b f(t,s)ds\right|^{p-1} \times \left|\int_a^b f(t,s)ds\right] dt\right].$$

TEOREMA 2.3 (a desigualdade de Minkowsky) - Dado $f,g \in L_p(E)$ temos

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

DEMONSTRAÇÃO - A desigualdade é imediata para $p=1$ ou $p=\infty$ de modo que supomos $1<p<\infty$. Temos

$$(\|f+g\|_p)^p = \int_E |f(t)+g(t)|^p dt = \int_E |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)+g(t)|dt \leq$$

$$\leq \int_E |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)|dt + \int_E |f(t)+g(t)|^{p-1}|g(t)|dt.$$

Apliquemos a desigualdade de Hölder relativa ao par (p',p) ao primeiro somando do 2º membro acima:

$$\int_E |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)|dt \leq \left[\int_E |f(t)+g(t)|^{(p-1)p'} dt\right]^{1/p'} \left[\int_E |f(t)|^p dt\right]^{1/p} =$$

$$= \left[\int_E |f(t)+g(t)|^p dt\right]^{1/p'} \|f\|_p = (\|f+g\|_p)^{p/p'} \|f\|_p$$

onde usamos que $(p-1)p' = p$ [□]. De modo análogo temos

$$\int_E |f(t)+g(t)|^{p-1}|g(t)|dt \leq (\|f+g\|_p)^{p/p'}\|g\|_p$$

donde se segue que

$$(\|f+g\|_p)^p \leq (\|f+g\|_p)^{p/p'}(\|f\|_p+\|g\|_p)$$

isto é, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pois $p - \frac{p}{p'} = 1$ [□].

COROLÁRIO 2.3.1 - $L_p(E)$ é um espaço normado.

* EXERCÍCIO 4 - Sejam $p_1,\dots,p_k \in [1,\infty]$ com $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = 1$. Dados $f_j \in L_{p_j}(E)$, $j=1,\dots,k$, demonstrar que

$$f_1\dots f_k \in L_1(E) \text{ e que } \|f_1\dots f_k\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1}\dots\|f_k\|_{p_k}$$

* EXERCÍCIO 5 - Sejam $p,q,r \in [1,\infty]$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$; dados

$$f \in L_p(E) \quad \text{e} \quad g \in L_q(E)$$

demonstrar que

$$fg \in L_r(E) \text{ e que } \|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$$

* EXERCÍCIO 6 - Seja $1 \leq p \leq \infty$, para $x \in \mathbb{C}^n$ definimos

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right]^{1/p} \text{ se } 1 \leq p < \infty \text{ e } \|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

Demonstrar que a aplicação $x \in \mathbb{C}^n \longrightarrow \|x\|_p$ é uma norma.

**EXERCÍCIO 7 - Seja $1 \leq p \leq \infty$; para $x = (x_n)_{n\in Z} \in \mathbb{R}^Z$ seja

$$\|x\|_p = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p\right]^{1/p} \text{ se } 1 \le p < \infty \quad \text{e} \quad \|x\|_\infty = \sup_{n\in Z} |x_n|.$$

Definimos

$$\ell_p(Z) = \{x \in \mathbb{R}^Z \mid \|x\|_p < \infty\}.$$

a) Demonstrar que $\ell_p(Z)$ é um espaço vetorial e que a aplicação

$$x \in \ell_p(Z) \longrightarrow \|x\|_p \in \mathbb{R}_+$$

é uma norma.

b) Demonstrar que $\ell_p(Z)$ munido da norma $\| \ \|_p$ é completo.

c) Seja $1 \le p < q \le \infty$; demonstrar que $\ell_p(Z) \subset \ell_q(Z)$ (compare com o Corolário 2.2.1).

*<u>COROLÁRIO 2.3.2</u> - Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $1 \le p < \infty$; as funções em patamar nulas fora de U são densas em $L_p(U)$.

DEMONSTRAÇÃO - Segue os passos da demonstração do Corolário 5.4.2 do Capítulo I [□].

*<u>COROLÁRIO 2.3.3</u> - Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $1 \le p < \infty$; $K(U)$ é denso em $L_p(U)$.

DEMONSTRAÇÃO - Segue do Corolário 2.3.2 como o Corolário I.5.4.3 segue do Corolário I.5.4.2 [□].

<u>EXERCÍCIO 8</u> - Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $1 \le p < \infty$; demonstrar que $\mathcal{D}(U)$ é denso em $L_p(U)$. [Sugestão: Veja Cap.II.7.2].

* EXERCÍCIO 9 - Seja $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $h \in \mathbb{R}^n$; definimos a função $\tau_h f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (a *transladada* h de f) por $(\tau_h f)(t) = f(t-h), t \in \mathbb{R}^n$. Seja $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$

a) Demonstrar que $\tau_h f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ e que $\|\tau_h f\|_p = \|f\|_p$

b) Demonstrar que $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$.

[Sugestão: aplicar o Corolário 2.3.3 e demonstrar o resultado para $\phi \in K(\mathbb{R}^n)$].

* EXERCÍCIO 10 - Seja $f \in L_1(E)$ uma função limitada; demonstrar que $f \in L_p(E)$ para todo $p \geq 1$.

**EXERCÍCIO 11 - Seja $f \in L_p(E)$ uma função limitada; demonstrar que $f \in L_q(E)$ para todo $q \geq p$.

**EXERCÍCIO 12 - Seja $1 \leq p < q \leq \infty$, dado $f \in L_p(E) \cap L_q(E)$ demonstrar que para todo $r \in [p,q]$ temos $f \in L_r(E)$.

§3 - O TEOREMA DE FISCHER-RIESZ

Um dos grandes triunfos da teoria de integração de Lebesgue foi o teorema de Fischer e Riesz que afirma que os espaços $L_p(E)$ são completos. Naturalmente não foi esta a formulação original do teorema; Fischer e Riesz demonstraram independentemente (em 1906) que uma condição necessária e suficiente para que uma sequência $(c_k)_{k \in Z}$ de números complexos seja a sequência dos coeficientes de Fourier de uma série convergindo em média quadrática (isto é, em $L_2([0,1])$) é que tenhamos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty.$$

O ponto chave de sua demonstração era a prova de que o espaço $L_2([0,1])$ é completo.

<u>TEOREMA 3.1</u> (Fischer-Riesz) - O espaço $L_p(E)$ é completo e dada uma sequência f_k que converge para f (na norma $\| \ \|_p$) existe uma subsequência f_{k_r} que converge para f q.s.

<u>OBSERVAÇÃO</u> - Veja porém a Observação 3.12 do Capítulo I mas também o Exercício 1 que segue.

DEMONSTRAÇÃO - A: consideremos primeiro o caso em que $1 \le p < \infty$. Seja f_k uma $L_p(E)$ - sequência de Cauchy; dado $\frac{1}{2^r} > 0$ existe $n(r)$ tal que para $n, m \ge n(r)$ temos

$$\|f_n - f_m\| < \frac{1}{2^r}.$$

Então por recorrência podemos escolher uma subsequência crescente n_r tal que $\|f_{n_{r+1}} - f_{n_r}\| < \frac{1}{2^r}$.

Definimos

$$g_k = \sum_{r=1}^{k} |f_{n_{r+1}} - f_{n_r}| \quad \text{e} \quad g = \sum_{r=1}^{\infty} |f_{n_{r+1}} - f_{n_r}|$$

(esta função podendo tomar valores ∞); pela desigualdade de

Minkowsky temos $\|g_k\|_p \leq 1$ e aplicando o Lema de Fatou (I,3.2) à sequência de funções g_k^p vem

$$(\|g\|_p)^p = \int_E \lim g_k^p \leq \lim \int g_k^p \leq 1$$

e portanto g é finita q.s. donde se segue que a série

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

é absolutamente convergente q.s.; indicando por f a sua soma então f está definida q.s. De

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_k}$$

segue que $f = \lim_{n\to\infty} f_{n_k}$ q.s. e f é portanto mensurável.

Temos $\|f-f_n\|_p \longrightarrow 0$ pois dado $\varepsilon > 0$ existe n_ε tal que para $n,m \geq n_\varepsilon$ temos $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$, então pelo Lema de Fatou para cada $n \geq n_\varepsilon$ temos

$$(*) \qquad \int |f-f_n|^p \leq \underline{\lim}_{k} \int |f_{n_k} - f_n|^p \leq \varepsilon^p$$

e portanto $f-f_n \in L_p(E)$. Como temos $f_n \in L_p(E)$ segue-se que $f \in L_p(E)$ e de (*) vem $\|f-f_n\|_p \leq \varepsilon$ para $n \geq n_\varepsilon$.

B: consideremos agora o caso em que $p = \infty$. Seja f_k uma $L_\infty(E)$-sequência de Cauchy. Então os conjuntos

$$A_{n,m} = \{t \in E \mid |f_n(t)-f_m(t)| > \|f_n-f_m\|_\infty\}$$

e

$$B_n = \{t \in E \mid |f_n(t)| > \|f_n\|_\infty\}$$

tem medida nula e o mesmo se dá com o conjunto

$$E_0 = \bigcup_{n \neq m} A_{n,m} \cup \bigcup_{k \in N} B_k.$$

Portanto para $t \in CE_0$ a sequência $f_k(t)$ é uma sequência de Cauchy e seja $f(t)$ o seu limite. f é definida q.s. (isto é, em CE_0) e dado $\varepsilon > 0$ existe n_ε tal que para $n,m \geq n_\varepsilon$ temos

$$\|f_n-f_m\|_\infty < \varepsilon;$$

portanto em CE_0 temos $|f_n-f_m| \leq \|f_n-f_m\|_\infty < \varepsilon$ para $n,m \geq n_\varepsilon$. Fazendo $m \to \infty$ vem $|f-f_n| \leq \varepsilon$ em CE_0 para $n \geq n_\varepsilon$. Portanto

$$\|f-f_n\|_\infty \leq \varepsilon \text{ para } n \geq n_\varepsilon$$

e como temos $f_n \in L_\infty(E)$ segue-se que

$$f \in L_\infty(E) \text{ (e } f_n \xrightarrow{L_\infty} f) \ \square$$

<u>EXERCÍCIO 1</u> - Seja f_k uma sequência de Cauchy de $L_p(E)$ tal que existe uma subsequência f_{n_k} que converge q.s. para f. Demonstrar que $f \in L_p(E)$ e que $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k-f\|_p = 0$.

<u>EXERCÍCIO 2</u> - Sejam $p > 1$ e $f_n \in \mathcal{L}_p(E)$ com $\|f_n\|_p \leq M$ para todo $n \in N$, tais que $f_n \longrightarrow f$ q.s.

a) Demonstrar que $f \in \mathcal{L}_p(E)$.

[Sugestão: aplicar o Lema de Fatou]

*b) Demonstrar que para todo $A \subset E$ com $mA < \infty$ temos

$$\int_A f_n \longrightarrow \int_A f.$$

[Sugestão: aplicar o teorema de Egoroff].

<u>OBSERVAÇÃO</u> - O fato de que os espaços $L_p(E)$ são espaços de Banach é muito importante na Análise Funcional pois então se aplicam a eles os teoremas fundamentais que valem para espaços de Banach e não para espaços normados: o princípio da limitação uniforme, o teorema de Banach-Steinhaus, o teorema da aplicação aberta e o teorema do gráfico fechado. Para estes teoremas ver a referência [H-AFA] ou [H-TA].

Um resultado muito importante dos espaços L_p é o teorema de representação de Riesz que enunciamos a seguir. Para a sua demonstração ver a referência [R], Capítulo 11.

<u>TEOREMA 3.2</u> - Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e $1 \leq p < \infty$. A aplicação

$$g \in L_{p'}(E) \longrightarrow F_g \in (L_p(E))',$$

onde para todo $f \in L_p(E)$ definimos $F_g(f) = \int_E fg$, é uma isometria do espaço de Banach $L_{p'}(E)$ *sobre* o dual topológico

$$(L_p(E))' \text{ de } L_p(E),$$

isto é, para todo $g \in L_{p'}(E)$ temos $\|F_g\| = \|g\|_{p'}$ (onde a norma do funcional linear F_g é definida por

$$\|F_g\| = \sup\left\{\left|\int_E fg\right| \mid f \in L_p(E), \|f\|_p \le 1\right\}.$$

* EXERCÍCIO 3 - Com as notações do Teorema 3.2, demonstrar que para $1 \le p < \infty$ temos $\|F_g\| = \|g\|_{p'}$. [Sugestão: aplicar a desigualdade de Hölder para mostrar que $\|F_g\| \le \|g\|_{p'}$; tomar

$$f(t) = |g(t)|^{p'/p} \operatorname{sg} g(t)$$

para demonstrar a igualdade].

APÊNDICE - ESPAÇOS NORMADOS

Neste Apêndice fazemos uma rápida apresentação dos resultados da teoria dos espaços normados que são necessários neste capítulo e em alguns outros pontos deste texto. Para um tratamento mais completo veja [H-TA], Apêndices A e B, [H-AFA], [H-St.L], [R], Capítulo 10.

1. ESPAÇOS NORMADOS

No que segue consideramos sempre espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. A passagem a espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais se faz por adaptações obvias, substituindo, quando for o caso, os espaços vetoriais de sequências e funções a valores complexos por sequências e funções a valores reais etc.

Dado um espaço vetorial E sobre o corpo $\mathbb{C}$, uma *seminorma* sobre E é uma aplicação

$$p : x \in E \longrightarrow p(x) \in \mathbb{R}_+$$

que têm as seguintes propriedades:

SN_1 - $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para todo $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

SN_2 - $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para quaisquer $x, y \in E$.

Dizemos que uma seminorma é uma *norma* se ainda vale a propriedade

SN_3 - $p(x) = 0$ implica $x = 0$.

Um *espaço normado* é um espaço vetorial munido de uma norma. Em geral escrevemos $\|x\|$ (lê-se *norma de* x) em vez de $p(x)$.

Num espaço normado E a função

$$(x,y) \in E \times E \longrightarrow d(x,y) = \|x-y\| \in \mathbb{R}_+$$

é uma *distância*, isto é, estão satisfeitas as propriedades [□]

d_1 - $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

d_2 - Propriedade simétrica: $d(y,x) = d(x,y)$ para quaisquer $x, y \in E$

d_3 - Propriedade triangular: para quaisquer $x, y, z \in E$ temos

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Lembramos que num espaço métrico temos automaticamente a noção de sequência convergente: dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in N}$ de pontos de E *converge* para $x\in E$, escrevemos $x_n \xrightarrow{E} x$ ou simplesmente $x_n \longrightarrow x$, se temos $d(x_n,x) \longrightarrow 0$.

Consideramos sempre um espaço normado como munido da distância associada à sua norma e da topologia (convergência) deduzida desta distância.

<u>EXERCÍCIO 1</u> - a) Seja E um espaço vetorial e $\| \ \|$ uma norma sobre E. Demonstrar que a distância deduzida da norma satisfaz as propriedades:

d_4 - Para quaisquer $x,y,z\in E$ temos $d(x+z,y+z) = d(x,y)$.

d_5 - Para quaisquer $x,y\in E$ e $\lambda\in\mathbb{C}$ temos $d(\lambda x,\lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.

b) Demonstrar que reciprocamente se uma distância sobre um espaço vetorial E satisfaz as propriedades d_4 e d_5, ela provem de uma e uma só norma sobre E.

Lembramos que uma sequência $(x_n)_{n\in N}$ de pontos de um espaço métrico é uma *sequência de Cauchy* se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que para $n,m \geq n_\varepsilon$ temos $d(x_n,x_m) \leq \varepsilon$. Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy [□]. Dizemos que um espaço métrico é *completo* se, reciprocamente, toda sequência de Cauchy for convergente. Um espaço normado que é completo em relação à sua distância natural se chama *espaço de Banach*.

EXEMPLOS DE ESPAÇO NORMADOS:

EXEMPLO N1 - $\mathbb{C}$ - Sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos a função

$$\lambda \in \mathbb{C} \longrightarrow |\lambda| \in \mathbb{R}_+$$

é uma norma. Do fato de $\mathbb{R}$ ser completo segue que $\mathbb{C}$ é completo [*□].

EXEMPLO N2 - $C(K)$ - Dado um espaço compacto K, indicamos por $C(K)$ o conjunto das funções definidas em K e a valores complexos que são contínuas. *A menos de menção explícita em contrário, $C(K)$ é sempre munido da norma*

$$x \in C(K) \longrightarrow \|x\| = \sup_{t \in K} |x(t)|$$

Esta norma define sobre $C(K)$ a topologia da convergência uniforme, isto é, $d(x_n, x) \longrightarrow 0$ se e somente se a sequência de funções x_n de $C(K)$ converge uniformemente para a função x [□].

EXERCÍCIO 2 - Demonstrar que $C(K)$ é completo.
[Sugestão: o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas é uma função contínua].

EXEMPLO N3 - $C_{L_1}([a,b])$ - Indica o espaço vetorial $C([a,b])$ munido da norma

$$x \in C([a,b]) \longrightarrow \|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\,dt \in \mathbb{R}_+$$

EXERCÍCIO 3 - Demonstrar que o espaço $C_{L_1}([a,b])$ não é completo.

Nos itens 2 e 3 que seguem vamos ver duas categorias importantes de espaços normados, os espaços prehilbertianos (item 2) e o espaço das aplicações lineares contínuas de um espaço normado E num espaço normado F (item 3).

2. ESPAÇOS PREHILBERTIANOS

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Um *produto interno* sobre E é uma aplicação

$$f:(x,y)\in E\times E \longrightarrow f(x,y)\in\mathbb{C}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

H_1 - f é *sesquilinear*, isto é, para quaisquer

$$x,x_1,x_2,y,y_1,y_2\in E \quad e \quad \lambda,\mu\in\mathbb{C}$$

temos

$$f(x_1+x_2,y) = f(x_1,y) + f(x_2,y), \; f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$$

$$f(x,y_1+y_2) = f(x,y_1) + f(x,y_2), \; f(x,\mu y) = \bar{\mu} f(x,y)$$

H_2 - f é *hermitiana*, isto é, para quaisquer $x,y\in E$ temos $f(y,x) = \overline{f(x,y)}$.

H_3 - f é *positiva*, isto é, para todo $x\in E$ temos $f(x,x) \geq 0$.

H_4 - f é *definida*, isto é, $f(x,x) = 0$ implica $x = 0$.

Em geral escrevemos $(x|y)$ em vez de $f(x,y)$ e definimos $\|x\| = (x|x)^{1/2}$ (ver o teorema 2 que segue). Um *espaço prehilbertiano* é um espaço vetorial munido de um produto interno.

TEOREMA 1 - A desigualdade de Cauchy-Schwarz - Num espaço prehilbertiano E, para quaisquer $x,y \in E$ temos

$$|(x|y)| \leq \|x\| \ \|y\|.$$

DEMONSTRAÇÃO - Existe θ tal que $(x|y) = e^{i\theta}|(x|y)|$ e portanto $(y|x) = \overline{(x|y)} = e^{-i\theta}|(x|y)|$. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ temos, por H_3 e H_1, que

$$0 \leq (\lambda x + e^{i\theta}y|\lambda x + e^{i\theta}y) = \lambda\bar{\lambda}\|x\|^2 + \lambda e^{-i\theta}(x|y) + \bar{\lambda}e^{i\theta}(y|x) + \|y\|^2 =$$

$$= \lambda\bar{\lambda}\|x\|^2 + \lambda|(x|y)| + \bar{\lambda}|(x|y)| + \|y\|^2$$

Tomando então $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda|(x|y)| + \|y\|^2 \geq 0$$

e portanto, $4|(x|y)|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ donde segue o resultado.

TEOREMA 2 - Num espaço prehilbertiano E a aplicação

$$x \in E \longrightarrow \|x\| = (x|x)^{1/2} \in \mathbb{R}_+$$

é uma norma.

DEMONSTRAÇÃO - É imediata a verificação das propriedades SN_1 e SN_3. Resta demonstrar SN_2, isto é, que $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$:

$$\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = \|x\|^2 + (x|y) + \overline{(x|y)} + \|y\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 + 2\mathcal{Re}(x|y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x|y)| + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\|^2 + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

onde aplicamos o teorema 1. □

Consideramos sempre um espaço prehilbertiano como munido da norma deduzida de seu produto interno bem como da distância e topologia correspondentes. Um espaço prehilbertiano que é completo chama-se *espaço de Hilbert*.

EXEMPLOS DE ESPAÇOS PREHILBERTIANOS:

<u>EXEMPLO H1</u> - $\mathbb{C}^n$ - O espaço das n-uplas $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ de números complexos é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno

$$(x,y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow (x|y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j} \in \mathbb{C} \ [\square].$$

<u>EXEMPLO H2</u> - $C_{L_2}([a,b])$ - Indica o espaço $C([a,b])$ munido do seguinte produto interno

$$(x,y) \in C([a,b]) \times C([a,b]) \longrightarrow (x|y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt \in \mathbb{C}.$$

A distância correspondente a este produto interno

$$d(x,y) = \left[\int_a^b |x(t)-y(t)|^2 dt\right]^{1/2}$$

se chama *distância média quadrática.* $C_{L_2}([a,b])$ não é completo.

[□]

3 - APLICAÇÕES LINEARES CONTÍNUAS

TEOREMA 3 - Sejam E e F espaços normados e $f: E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. São equivalentes as seguintes propriedades

a) f é contínua no ponto $x = 0$

b) $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| < \infty$

c) Existe $M \geq 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$

d) f é contínua.

DEMONSTRAÇÃO - a) $\Longrightarrow$ b): sendo f contínua na origem então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| \leq \delta$ implica $\|f(x)\| \leq \varepsilon$. Portanto $\|x\| \leq 1$ implica $\|f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$.

b) $\Longrightarrow$ c): seja $M = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$. Então para todo $x \in E$ temos $\|f(x)\| \leq M\|x\|$: para $x = 0$ isto é evidente e para $x \neq 0$ isto segue de $\|f(\frac{x}{\|x\|})\| \leq M$.

c) $\Longrightarrow$ d): segue imediatamente de

$$\|f(x)-f(x_0)\| = \|f(x-x_0)\| \leq M\|x-x_0\|.$$

d) $\Longrightarrow$ a): é evidente.

Indicamos por $L(E,F)$ o espaço vetorial das aplicações lineares contínuas de E em F. *Consideramos sempre* $L(E,F)$ *munido da norma*

$$f \in L(E,F) \longrightarrow \|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|.$$

EXERCÍCIO 4 - Demonstrar que a aplicação $f \in L(E,F) \longrightarrow \|f\| \in \mathbb{R}_+$ é uma norma.

EXERCÍCIO 5 - Seja $f \in L(E,F)$

a) Demonstrar que $\|f\| = \inf\{M \mid \|f(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E\}$

b) Demonstrar que $\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$ para todo $x \in E$.

Definimos $E' = L(E,\mathbb{C})$, o *dual topológico* de E, e

$$L(E) = L(E,E),$$

o espaço dos endomorfismos contínuos de E.

TEOREMA 4 - Sejam E e F espaços normados, F completo; então $L(E,F)$ é completo.

DEMONSTRAÇÃO - Ver [H-TA], Apêndice 2, teorema 4.

* EXERCÍCIO 6 - Demonstrar o Teorema 4.

EXERCÍCIO 7 - Sejam E, F e G espaços normados, $u \in L(E,F)$ e $v \in L(F,G)$. Demonstrar que $v \circ u \in L(E,G)$ e que $\|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|$

EXERCÍCIO 8 - Demonstrar que é contínua a aplicação

$$x \in C([a,b]) \longrightarrow x \in C_{L_1}([a,b]).$$

* <u>EXERCÍCIO 9</u> - Demonstrar que não é contínua a aplicação

$$x \in C_{L_1}([a,b]) \longrightarrow x \in C([a,b]).$$

* <u>EXERCÍCIO 10</u> - Demonstrar que é contínua a aplicação

$$x \in C_{L_2}([a,b]) \longrightarrow x \in C_{L_1}([a,b]).$$

* <u>EXERCÍCIO 11</u> - Demonstrar que não é contínua a aplicação

$$x \in C_{L_1}([a,b]) \longrightarrow x \in C_{L_2}([a,b]).$$

- ¤ -

CAPÍTULO IV

MEDIDA ABSTRATA E INTEGRAÇÃO

Este capítulo não é prerequisito para o capítulo V, para cuja leitura basta o conhecimento do Apêndice "O teorema de Fubini" do capítulo II.

Neste capítulo retomamos o estudo da medida abstrata e da integral correspondente. Não vamos ter necessidade de demonstrar novamente os resultados dos capítulos anteriores que valem neste contexto geral, pois, como já dissemos na ocasião, as demonstrações para a medida e a integral de Lebesgue foram feitas de modo a serem válidas para uma medida qualquer e para a integral deduzida dela.

§1 - MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Lembremos que dado um conjunto X, dizemos que uma classe $\mathcal{A} \subset P(X)$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$, é uma *σ-álgebra* (sobre X) se valem as seguintes propriedades:

$(\tilde{A})$ - $A \in \mathcal{A} \implies CA \in \mathcal{A}$

(A_σ) - $A_k \in \mathcal{A}$ $(k \in N) \implies \bigcup_{k \in N} A_k \in \mathcal{A}$

Um *espaço com medida* é um conjunto X com uma σ-álgebra M e uma função $\mu : M \longrightarrow [0,\infty]$ que satisfaz

(M_0) - $\mu\phi = 0$

(M_σ) - μ é σ-*aditiva*, isto é, dados $M_k \in M$ $(k \in N)$ dois a dois disjuntos, temos

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{k\in N}} M_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu M_k$$

Dizemos então que os elementos de M são *conjuntos μ-mensuráveis* (ou *mensuráveis*, simplesmente) e que μ é uma *medida*; indicamos por (X,M,μ) o espaço com medida.

Por abuso de linguagem falamos simplesmente na medida μ estando subentendidos X e M que lhe são associados.

Dizemos que uma medida μ é *finita* se temos $\mu X < \infty$.

Dizemos que uma medida μ é *σ-finita* se existem $M_k \in M$, $k \in N$, com $\mu M_k < \infty$ e tais que $X = \bigcup_{k\in N} M_k$.

Dizemos que uma medida μ é *completa* se $\mu M = 0$ e $A \subset M$ implica $A \in M$.

<u>EXEMPLO</u> - A medida de Lebesgue m sobre $X = \mathbb{R}^n$ restrita à σ-álgebra B dos conjuntos borelianos, isto é, $(\mathbb{R}^n, B, m)$ é uma medida que não é completa (ver o exercício 23, cap.I,§1).

<u>TEOREMA 1.1</u> - Dado um espaço (X,M,μ) com medida não completa, existe um espaço $(X,\hat{M},\hat{\mu})$ com uma medida completa e tal

que

i) $\mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{M}}$

ii) $\hat{\mu}_{|\mathcal{M}} = \mu$

iii) $\hat{M} \in \hat{\mathcal{M}} \iff \hat{M} = M \cup A$ onde $M \in \mathcal{M}$ e A é subconjunto de um conjunto de μ-medida nula.

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que $\hat{\mathcal{M}}$ é uma σ-álgebra [$\square$] e que definindo $\hat{\mu}\hat{M} = \mu M$ obtemos uma medida com as propriedades desejadas [$\square$].

Dizemos que a medida $\hat{\mu}$, mais precisamente $(X, \hat{\mathcal{M}}, \hat{\mu})$, é a *completada* da medida μ, isto é, de $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

EXERCÍCIO 1 - Demonstrar que a completada da medida de Lebesgue restrita à σ-álgebra dos conjuntos borelianos de $\mathbb{R}^n$ é a medida de Lebesgue sobre a σ-álgebra dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que são mensuráveis segundo Lebesgue.

EXEMPLOS DE MEDIDAS:

EXEMPLO M.1 - A medida de Lebesgue sobre a σ-álgebra de todos os subconjuntos mensuráveis de um conjunto mensurável $X \subset \mathbb{R}^n$.

EXEMPLO M.2 - A medida de Lebesgue restrita à σ-álgebra dos subconjuntos borelianos de um conjunto mensurável $X \subset \mathbb{R}^n$.

EXEMPLO M.3 - A *medida de contagem* sobre um conjunto X: dado um conjunto X tomamos $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ e para $M \subset X$ definimos

$$\nu M = \begin{cases} |M| \text{ (número de elementos de M) se M for finito} \\ \\ \infty \text{ se M for infinito.} \end{cases}$$

EXEMPLO M.4 - Seja $X = \Lambda \times \mathbb{R}$ onde Λ é um conjunto qualquer que consideramos munido da topologia discreta (Exemplo $\Lambda = \mathbb{R}_d$, isto é, $\mathbb{R}$ munido da topologia discreta — Lembremos que $0 \subset \Lambda \times \mathbb{R}$ é aberto se e somente 0^λ é aberto para todo $\lambda \in \Lambda$, onde dado $A \subset \Lambda \times \mathbb{R}$ definimos $A^\lambda = \{x \in \mathbb{R} \mid (\lambda, x) \in A\}$). Tomamos

$$\mathcal{M} = \{M \subset \Lambda \times \mathbb{R} \mid M^\lambda \in \mathfrak{M} \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\}$$

onde $\mathfrak{M}$ indica a σ-álgebra dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são mensuráveis segundo Lebesgue. Dado $M \in \mathcal{M}$ definimos

$$\mu_0 M = \sum_{\lambda \in \Lambda} m M^\lambda$$

onde m indica a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$.

$(\Lambda \times \mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu_0)$ é uma medida completa [$\square$] que é σ-finita se e somente se Λ é enumerável [$\square$].

EXEMPLO M.5 - Tomamos X e $\mathcal{M}$ como no exemplo M.4 e dado $M \in \mathcal{M}$ definimos

$$\mu_1 M = \inf\{\mu_0 U \mid U \supset M, \text{ U é aberto}\}.$$

μ_1 é σ-aditiva; de fato, seja

$$M = \dot{\bigcup_{k \in N}} M_k .$$

Se $M^\lambda \neq \phi$ para uma infinidade não enumerável de índices $\lambda \in \Lambda$ então existe $k \in N$ tal que $M_k^\lambda \neq \phi$ para uma infinidade não enumerável de índices $\lambda \in \Lambda$ e portanto $\mu_1 M_k = \infty = \mu_1 M$. Se $M^\lambda = \phi$ exceto para um conjunto enumerável de índices $\lambda \in \Lambda$ então temos $\mu_1 M = \mu_0 M$ e $\mu_1 M_k = \mu_0 M_k$ e o resultado segue do fato de μ_0 ser σ-aditiva.

$(\Lambda \times \mathbb{R}, M, \mu_1)$ é um espaço com uma medida completa.[□]

<u>EXERCÍCIO</u> <u>2</u> - Com a notação dos exemplos M.4 e M.5, demonstrar que $\mu_0 = \mu_1$ se e somente se Λ é enumerável.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>3</u> - Com a notação dos exemplos M.4 e M.5 seja Λ não enumerável e $M = \Lambda \times \{0\}$. Demonstrar que $\mu_0 M = 0$ e que $\mu_1 M = \infty$.

<u>EXEMPLO</u> <u>M.6</u> - Seja X um conjunto não enumerável e M a σ-álgebra gerada pelos subconjuntos enumeráveis de X. Dado $M \in M$ definimos

$$\mu_1 M = \begin{cases} 0 \text{ se } M \text{ é enumerável} \\ \\ 1 \text{ se } CM \text{ é enumerável} \end{cases}$$

(X, M, μ_1) é um espaço com uma medida completa[□]que é finita.

EXEMPLO M.7 - Tomamos X e $\mathcal{M}$ como no exemplo M.6 e para $M \in \mathcal{M}$ definimos

$$\mu_\infty M = \begin{cases} 0 \text{ se } M \text{ é enumerável} \\ \\ \infty \text{ se } CM \text{ é enumerável} \end{cases}$$

$(X, \mathcal{M}, \mu_\infty)$ é um espaço com uma medida completa[□] que não é σ-finita.

EXEMPLO M.8 - Seja $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M} = \mathrm{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty]$ uma função mensurável. Para todo $M \in \mathrm{M}(\mathbb{R}^n)$ definimos $m_f(M) = \int_M f$.

Do Corolário 3.3.2 do Capítulo I segue-se que

$$(\mathbb{R}^n, \mathrm{M}(\mathbb{R}^n), m_f)$$

é um espaço com medida.

EXERCÍCIO 4 .- Com a notação do exemplo M.8:

**a) Dar uma condição necessária e suficiente para que a medida m_f seja completa.

b) Dar uma condição necessária e suficiente para que a medida m_f seja finita [σ-finita].

EXEMPLO M.9 - No §2 vamos demonstrar que dada uma função monótona crescente $v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, existe uma medida m_v definida sobre a σ-álgebra $\mathcal{B}$ dos conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ e tal que para todo intervalo $[a,b[\subset \mathbb{R}$ temos $m_v([a,b[) = v(b-) - v(a-)$. Esta medida se chama de *medida de Lebesgue-Stieltjes* definida pe la função v.

EXERCÍCIO 5 - Com as notações do exemplo M.9 demonstrar que $m_v(\{t\}) = v(t+) - v(t-)$, $m_v(]c,d[) = v(d-) - v(c+)$, $m_v(]c,d]) = v(d+) - v(c+)$.

EXEMPLO M.10 - No §3 vamos demonstrar que dados dois espaços com medidas completas $(X,\mathcal{A},\mu)$ e $(Y,\mathcal{B},\nu)$ definindo então $(\mu\times\nu)(A\times B) = \mu(A)\cdot\nu(B)$ para os conjuntos $A\times B \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ (onde fazemos a convenção de que $\infty\cdot 0 = 0\cdot\infty = 0$), a função $\mu\times\nu$ pode ser estendida de modo único a uma medida (que ainda indicamos por $\mu\times\nu$) definida sobre a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. Pelo teorema 1.1 esta medida pode ser estendida de modo único a uma medida sobre a σ-álgebra completa gerada por $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ (isto é, a menor σ-álgebra completa que contém $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$). Esta nova extensão, ainda indicada por $\mu\times\nu$, é chamada de *medida produto*. Para a medida produto vamos demonstrar o importante teorema de Fubini (ver §3).

* EXERCÍCIO 6 - Demonstrar que em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a σ-álgebra gerada pelos conjuntos de forma $A\times B$ (onde A e B são mensuráveis) não é completa. [Sugestão: qualquer conjunto $X\times\{0\}$ com $X\subset\mathbb{R}$, tem medida nula].

EXERCÍCIO 7 - Com a notação do exemplo M.10 sejam $g:X \longrightarrow \mathbb{R}$ μ-mensurável e $h:Y \longrightarrow \mathbb{R}$ ν-mensurável; definimos:

$$f(x,y) = g(x)h(y), \ (x,y) \in X \times Y.$$

Demonstrar que f é $\mu\times\nu$-mensurável.

[Sugestão: $f = g_2 \cdot h_1$ onde $g_2(x,y) = g(x)$ e $h_1(x,y) = h(y)$].

OBSERVAÇÃO - Lembremos que nos capítulos I, II e III da 1ª parte as demonstrações foram feitas de tal modo que os resultados que não usassem fatos particulares da estrutura de $\mathbb{R}^n$ ainda fossem validos, e com a mesma demonstração, para espaços com medidas quaisquer. Não há pois necessidade de repetir as demonstrações. Para alguns dos resultados precisamos supor que a medida é completa.

Dado um espaço com uma medida $(X,\mathcal{M},\mu)$ falamos em conjuntos μ-mensuráveis, propriedades validas μ-quase sempre, funções μ-mensuráveis, funções μ-simples, funções μ-integráveis, etc. Indicamos por $\mathcal{L}_1(X,\mu)$ o conjunto das funções $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$ que são μ-integráveis e indicamos a sua μ-integral por

$$\int_X f d\mu \quad \text{ou} \quad \int_X f(x) d\mu(x).$$

Quando não houver perigo de confusão muitas vezes suprimimos a referência à medida μ nas noções precedentes.

A seguir explicitamos os principais resultados e noções dos capítulos I, II e III que ainda valem para espaços com medidas quaisquer; a notação (c) indica que supomos que a medida é completa.

Cap.I, §1: a seção 1.3 que foi feita para medidas quais quer; os exercícios 16, 17, 19, 20 e 27.

Cap.I, §2: a noção de função mensurável, as observações 2.1 e 2.2; os exercícios 1, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11; o teorema 2.2; os corolários 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3; os exercícios 12, e 14; a observação 2.3 (c); as observações 2.4, 2.5 e 2.6,o toerema 2.3.

Cap.I, §3: as noções de função simples e de representação canônica, as observações 3.1 a 3.3, o teorema 3.1, o exercício 1; a noção de integral de uma função mensurável positiva, as observações 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8; o teorema 3.2; os exercícios 2 e 3; o teorema 3.3, a observação 3.9,o exercício 4, os corolários 3.3.1 e 3.3.2; os exercícios 6, 7 e 8, a noção de função integrável; a observação 3.10, o teorema 3.4; os corolários 3.4.1 e 3.4.2;a observação 3.11, o corolário 3.4.3, os exercícios 9, 10 e 11, a observação 3.12; o teorema 3.5; os exercícios 14 e 15, a observação 3.13, o exercício 18.

Cap.I, §4: as noções de integral superior e de integral inferior; o teorema 4.1 (c); o exercício 4 (que supõe que E é σ-finito).

Cap.II, §2: os exercícios 2 e 3; o teorema 2.3, o exercício 5.

Cap.II, §5: o teorema 5.1 e as observações 5.1 e 5.2.

Cap.II, §6: o teorema 6.1; a observação 6.1 e o teorema 6.1 bis.

Cap.III: todos os resultados se estendem exceto, evidentemente, os corolários 2.3.2 e 2.3.3; no teorema 3.2 supõe-se que a medida seja σ-finita quando $p = 1$. É fácil ver quais os exercícios que se estendem.

EXERCÍCIO 8 - Verificar a validade da extensão dos resultados acima referidos para medidas e integrais quaisquer.

EXERCÍCIO 9 - Seja $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ uma enumeração dos números racionais.

a) Demonstrar que existe uma e uma só medida μ definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $\mu\{r_n\} = \frac{1}{2^n}$, $\mu\{x\} = 0$ se x é irracional e $\mu\mathbb{R} = 1$. O mesmo vale sem a hipótese $\mu\mathbb{R} = 1$?

b) Determinar as funções μ-mensuráveis.

c) Determinar as funções μ-integráveis.

d) Seja $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mu)$ demonstrar que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(r_n).$$

EXERCÍCIO 10 - Determinar as funções mensuráveis do exemplo

M.3. Determinar $L_p(X,\nu)$, $1 \le p \le \infty$.

EXERCÍCIO 11 - Determinar as funções mensuráveis do exemplo M.6. Determinar as funções integráveis.

EXERCÍCIO 12 - Determinar as funções mensuráveis do exemplo M.7. Demonstrar que se uma função $f \ge 0$ é μ_∞-mensurável então

$$\int_X f d\mu_\infty = 0 \text{ ou } \infty.$$

§2 - MEDIDA EXTERIOR

Lembremos que uma *medida exterior* sobre um conjunto X é uma aplicação $\mu^*: \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ tal que

(M_0^*) - $\mu^*\phi = 0$

(M_σ^*) - μ^* é *σ-subaditiva*, isto é, para $A \subset \bigcup_{n\in N} A_k$ temos

$$\mu^* A \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^* A_k.$$

Dada uma medida exterior μ^* sobre X, exatamente como no capítulo I dizemos que um subconjunto $M \subset X$ é *mensurável*, ou melhor, μ^*-*mensurável*, se para todo $A \subset X$ temos

$$\mu^* A = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap CM).$$

Ainda vale o análogo da Observação 1.4 do capítulo I e a demonstração do teorema que segue é idêntica à do Teorema I, 1.4.

TEOREMA 2.1 - Seja μ^* uma medida exterior sobre X e M a classe dos subconjuntos μ^*-mensuráveis de X; temos

a) M é uma σ-álgebra;

b) a restrição μ de μ^* a M é uma medida;

c) μ é uma medida completa.

Nas condições do teorema 2.1 dizemos que μ é a *medida induzida* por μ^*.

* EXERCÍCIO 1 - Seja $\mu^*: P(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma medida exterior; dado $A \subset X$ definimos a *medida interior* de A por $\mu_* A = \mu^* X - \mu^*(CA)$ (veja o exercício 22, do capítulo I, §1). Demonstrar que todo conjunto $A \subset X$ com $\mu_* A = \mu^* A$ é μ-mensurável se para todo $E \subset X$ existe um conjunto mensurável $M \supset E$ tal que $\mu^* M = \mu^* E$.

Lembremos que para obter a medida de Lebesgue no §1 do capítulo I, nós construímos a função m que estende a função ℓ (volume de intervalo) para conjuntos mensuráveis quaisquer. Lembremos ainda que nesta construção definimos inicialmente a medida exterior de Lebesgue, m^*.

No que segue vamos generalizar este processo partindo de uma função ℓ qualquer definida numa classe arbitrária I de subconjuntos de um conjunto X. Primeiro construímos a medida exterior μ_ℓ^* definida por ℓ (teorema 2.2; veja o teorema 1.1 do capítulo I) e a seguir damos condições necessárias e suficientes para que a função μ_ℓ^* seja um prolongamento de ℓ (teorema 2.3; veja o teorema I.1.2) e para que os conjuntos de $\mathcal{I}$ sejam μ_ℓ^*-mensuráveis (teorema 2.4; veja o teorema I.1.5).

No fim deste parágrafo este processo de construção de uma medida μ_ℓ a partir de uma função ℓ é aplicado para definir a medida de Lebesgue-Stieltjes (o exemplo 1) e a medida produto (o exemplo 2).

<u>TEOREMA 2.2</u> - Seja $\mathcal{I}\subset\mathcal{P}(X)$ tal que existe uma sequência $I_k\in\mathcal{I}$ com $\bigcup_{k\in N} I_k = X$; seja $\ell:\mathcal{I} \longrightarrow [0,\infty]$ uma função que toma valores arbitrariamente pequenos (eventualmente o valor 0).

Para todo $A\subset X$ definimos

$$\mu_\ell^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \mid I_k\in\mathcal{I} \quad \text{e} \quad \bigcup_{k\in N} I_k\supset A\right\}.$$

Então a função $\mu_\ell^*: \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ é uma medida exterior e para todo $I\in\mathcal{I}$ temos $\mu_\ell^*(I) \leq \ell(I)$.

A demonstração segue os passos da demonstração do do teorema I.1.1 [$\square$].

<u>COROLÁRIO 2.2.1</u> - a) Dados $A\subset X$ e $\varepsilon>0$ existe $M\in\mathcal{I}_\sigma$, $M\supset A$, tal que $\mu_\ell^*(M) \leq \mu_\ell^*(A)+\varepsilon$.

b) Dado $A \subset X$ existe $M \in I_{\sigma\delta}$, $M \supset A$, tal que $\mu_{\ell}^{*}(M) = \mu_{\ell}^{*}(A)$.

A demonstração segue os passos da demonstração da proposição I.5.1.

<u>TEOREMA 2.3</u> - Nas condições do teorema 2.1 temos $\mu_{\ell}^{*}(I) = \ell(I)$ para todo $I \in \mathcal{I}$ se e somente se ℓ é *σ-subaditiva*, isto é, se e somente se está satisfeita a condição

(*) dados $I, I_k \in \mathcal{I}$, $k \in N$, com $I \subset \bigcup_{k \in N} I_k$ temos

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - É imediata [□].

<u>EXERCÍCIO 2</u> - Seja $X = Q$, a reta racional, tomamos

$$\mathcal{I} = \{|a,b| \subset Q \mid a,b \in Q, a \leq b\}$$

e definimos $\ell(|a,b|) = b-a$. Demonstrar que ℓ não é σ-subaditiva.

<u>EXERCÍCIO 3</u> - Sejam $\mathcal{I}', \mathcal{I}'' \subset \mathcal{P}(X)$ e $\ell' : \mathcal{I}' \longrightarrow [0,\infty]$, $\ell'' : \mathcal{I}'' \longrightarrow [0,\infty]$ satisfazendo as condições do Teorema 2.2

a) Demonstrar que $\mu_{\ell'}^{*} \leq \mu_{\ell''}^{*}$ se e somente se para todo $I' \in \mathcal{I}'$ e para quaisquer $I_k'' \in \mathcal{I}''$ com

$$\bigcup_{k \in N} I_k'' \supset I' \text{ temos } \ell'(I') \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell''(I_k'').$$

b) Demonstrar que $\mu_{\ell'} = \mu_{\ell''}$ se e somente se temos

$$\mu_{\ell'}^{*} \leq \mu_{\ell''}^{*} \text{ e } \mu_{\ell''}^{*} \leq \mu_{\ell'}^{*}.$$

Dizemos que uma classe $\mathcal{I}\subset\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{I}\neq\emptyset$, é uma *semiálgebra* se satisfaz as propriedades

(S_1) - $I_1, I_2\in\mathcal{I} \Longrightarrow I_1\cap I_2\in\mathcal{I}$

(S_2) - $I\in\mathcal{I} \Longrightarrow$ existem $I_1,\ldots,I_m\in\mathcal{I}$ dois a dois disjuntos tais que $CI = I_1\dot{\cup}\ldots\dot{\cup}I_m$.

<u>OBSERVAÇÃO</u> <u>2.1</u> - Se $\mathcal{I}$ é uma semiálgebra então $\phi\in\mathcal{I}$ [□].

<u>EXEMPLOS</u> <u>DE</u> <u>SEMIÁLGEBRAS</u>

<u>EXEMPLO</u> <u>S.1</u> - Seja $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{I}$ o conjunto dos intervalos da forma $[a,b[$, $-\infty<a<b\leq\infty$, ou da forma $]-\infty,c[$, $c\in\mathbb{R}$ [□].

<u>EXEMPLO</u> <u>S.2</u> - Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre X (ver a definição no Capítulo I, §1.3) e $\mathcal{B}$ uma álgebra sobre Y. Os conjuntos da forma $A\times B$ com $A\in\mathcal{A}$ e $B\in\mathcal{B}$ formam uma semiálgebra sobre $X\times Y$.

De fato (S_1) segue de

$$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2) = (A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$$

e (S_2) segue de

$$C(A\times B) = (\tilde{A}\times B)\dot{\cup}(A\times\tilde{B})\dot{\cup}(\tilde{A}\times\tilde{B}) \text{ [□].}$$

Quando $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são as σ-álgebras dos conjuntos mensuráveis de medidas, sobre X e Y, respectivamente, dizemos que os conjuntos $A\times B$, onde $A\in\mathcal{A}$ e $B\in\mathcal{B}$ são *retângulos mensuráveis*.

<u>EXEMPLO</u> <u>S.3</u> - Seja $X = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{I}$ o conjunto dos intervalos da forma $J_1\times\ldots\times J_n$ onde $J_i = [a_i,b_i[$ com $-\infty<a_i<b_i\leq\infty$ ou $J_i =]-\infty,c_i[$

com $c_i \in \mathbb{R}$. Dos exemplos S.1 e S.2 segue-se que I é uma semiálgebra sobre $\mathbb{R}^n$.

<u>EXEMPLO</u> <u>S.4</u> - Seja $X = \mathbb{R}^n$, o conjunto de todos os intervalos $I \subset \mathbb{R}^n$ que são da forma $|a,b| = \prod_{1 \le i \le n} |a_i, b_i|$ com $-\infty < a_i < b_i \le \infty$, é uma semiálgebra.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>4</u> - Sobre a semiálgebra do exemplo S.3 definimos $\ell'(J_1 \times \ldots \times J_n) = \prod_{1 \le i \le n} \ell(J_i)$ onde $\ell([a_i, b_i[) = b_i - a_i$ e $\ell(]-\infty, c_i[) = \infty$ (e $\infty \cdot 0 = 0$). Sobre a semiálgebra do exemplo S.4 consideramos ℓ, o volume habitual dos intervalos. Demonstrar que nos dois exemplos obtemos a mesma medida sobre $\mathbb{R}^n$ (isto é, a medida de Lebesgue do $\mathbb{R}^n$). [Sugestão: aplicar o exercício 3].

<u>EXERCÍCIO</u> <u>5</u> - Dada uma sequência I_k de elementos de uma semiálgebra I, demonstrar que existe uma sequência $J_k \in I$ de conjuntos dois a dois disjuntos e existe uma sequência de inteiros $1 = r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$ tal que para todo $k \in N$ temos

$$\bigcup_{1 \le j \le k} I_j = \dot{\bigcup_{1 \le s \le r_k}} J_s .$$

<u>EXERCÍCIO</u> <u>6</u> - Seja I uma semiálgebra sobre X; demonstrar que a classe dos subconjuntos de X que são reunião de um número finito de elementos de I dois a dois disjuntos, é uma álgebra sobre X e que é a menor álgebra sobre X que contém I.

[Sugestão: usar o exercício 5].

<u>TEOREMA 2.4</u> - Seja $\mathcal{I}\subset P(X)$ uma semiálgebra e $\ell:\mathcal{I}\longrightarrow[0,\infty]$ uma função subaditiva tal que $\ell(\phi)=0$. Então os conjuntos $I\in\mathcal{I}$ são μ_ℓ^*-mensuráveis se e somente se ℓ é *aditiva*, isto é, se e somente se está satisfeita a condição

(**) dados $I,I_1,\ldots,I_m\in\mathcal{I}$ com $I_1,\ldots,I_m$ dois a dois disjuntos e tais que $I=I_1\dot\cup\ldots\dot\cup I_m$ temos $\ell(I)=\ell(I_1)+\ldots+\ell(I_m)$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - É imediato que $\mathcal{I}$ e ℓ satisfazem as hipóteses do teorema 2.2 [□]. Vamos supor que ℓ é aditiva; queremos demonstrar que se $I\in\mathcal{I}$ então I é μ_ℓ^*-mensurável. Basta demonstrar que para todo $A\subset X$ temos $\mu_\ell^*(A)\geq\mu_\ell^*(A\cap I)+\mu_\ell^*(A\cap CI)$.

Seja $\varepsilon>0$ e $I_k\in\mathcal{I}$, $k\in N$, tal que

$$\bigcup_{k\in N} I_k\supset A \quad e \quad \sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_k)\leq\mu_\ell^*(A)+\varepsilon.$$

$\mathcal{I}$ sendo uma semiálgebra temos $CI=J_1\dot\cup\ldots\dot\cup J_m$ com $J_i\in\mathcal{I}$. Portanto

$$I_k=(I_k\cap I)\dot\cup(I_k\cap CI)=(I_k\cap I)\dot\cup(I_k\cap J_1)\dot\cup\ldots\dot\cup(I_k\cap J_m)$$

e pela hipótese (**) temos então

$$\ell(I_k)=\ell(I_k\cap I)+\ell(I_k\cap J_1)+\ldots+\ell(I_k\cap J_m).$$

Mas $\bigcup_{k\in N}(I_k\cap I)\supset A\cap I$ e portanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k \cap I) \geq \mu_\ell^*(A \cap I)$$

pela definição de μ_ℓ^*. Por outro lado

$$\bigcup_{k\in N}(I_k \cap CI) = \bigcup_{k\in N}\left[\bigcup_{1\leq i\leq m} I_k \cap J_i\right] \supset A \cap CI$$

e portanto pela definição de μ_ℓ^* temos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{i=1}^{m} \ell(I_k \cap J_i) \geq \mu_\ell^*(A \cap CI).$$

Daí segue-se que

$$\mu_\ell^*(A)+\varepsilon \geq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k \cap I) + \sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{i=1}^{m} \ell(I_k \cap J_i)$$

$$\geq \mu_\ell^*(A \cap I) + \mu_\ell^*(A \cap CI).$$

Reciprocamente, suponhamos que todos os conjuntos $I \in \mathcal{I}$ são μ_ℓ^*-mensuráveis, vamos demonstrar que ℓ é aditiva. Todos os conjuntos $I \in \mathcal{I}$ sendo mensuráveis temos $\mu_\ell^*(I) = \mu_\ell(I)$ e pelo Teorema 2.3 temos $\mu_\ell(I) = \ell(I)$. Por outro lado de

$$I = \dot{\bigcup_{1\leq j\leq m}} I_j \text{ com } I, I_1, \ldots, I_m \in \mathcal{I}$$

e do fato destes conjuntos serem mensuráveis segue-se que

$$\mu_\ell I = \sum_{j=1}^{m} \mu_\ell I_j \text{ e portanto } \ell(I) = \sum_{j=1}^{m} \ell(I_j). \ \square$$

COROLÁRIO 2.4.1 - Seja $\mathcal{I}\subset\mathcal{P}(X)$ uma semiálgebra e $\ell:\mathcal{I}\longrightarrow[0,\infty]$ uma função σ-subaditiva e aditiva. Então

a) Dados $A\subset X$ e $\varepsilon>0$ existe $M\in\mathcal{I}_\sigma$ tal que $M\supset A$ e

$$\mu_\ell M\leq\mu_\ell^* A+\varepsilon.$$

b) Dado $A\subset X$ existe $M\in\mathcal{I}_{\sigma\delta}$ com $M\supset A$ tal que $\mu_\ell M=\mu_\ell^* A$.

DEMONSTRAÇÃO - Segue do corolário 2.2.1.

COROLÁRIO 2.4.2 - Sob as hipóteses do teorema 2.4 seja

$$(X,A,\nu)$$

uma medida sobre X tal que $\mathcal{I}\subset A\subset\mathcal{M}_\ell$ (onde $\mathcal{M}_\ell$ é a σ-algebra dos conjuntos μ_ℓ^*-mensuráveis) e tal que $\nu I=\ell(I)$ para todo $I\in\mathcal{I}$. Então $\nu=\mu_{\ell|A}$.

EXEMPLO 1 - A Medida de Lebesgue-Stieltjes - Seja $u:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Para os conjuntos da semiálgebra do Exemplo S.1 definimos

$$\ell_u([a,b[)=u(b-)-u(a-),\quad \ell_u(]-\infty,c[)=u(c-)-u(-\infty+).$$

Vamos demonstrar que ℓ_u é σ-subaditiva e aditiva e que portanto a medida m_u definida por ℓ_u (isto é, pela medida externa definida por ℓ_u) prolonga ℓ_u e os intervalos acima são m_u-mensuráveis.

De fato: é imediato que ℓ_u é aditiva [$\square$]. Para demonstrar que ℓ_u é σ-subaditiva vamos considerar diversos ca sos.

I - $$[a,b[\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k,b_k[;$$

queremos demonstrar que

$$\ell_u([a,b[) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell_u([a_k,b_k[).$$

Dado $\varepsilon>0$ tomemos $\bar{b}<b$ tal que $u(\bar{b}-)>u(b-)-\varepsilon$ e para todo $k\in N$ tomemos $\bar{a}_k<a_k$ tal que $u(\bar{a}_k)>u(a_k-)-\frac{\varepsilon}{2^k}$; portanto para todo $a_k'\in]\bar{a}_k,a_k[$ temos $u(a_k'-)>u(a_k-)-\frac{\varepsilon}{2^k}$ e então

$$\ell_u([a_k',b_k[) \leq \ell_u([a_k,b_k[)+\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Os abertos $]a_k',b_k[$, $k\in N$, formam um recobrimento aberto de $[a,\bar{b}]$ que contém então um subrecobrimento finito, seja

$$]a_{k_1}',b_{k_1}[,\ldots,]a_{k_m}',b_{k_m}[$$

e podemos supor que $b_{k_{j-1}}>a_{k_j}'$. (De fato: se $]a_{m_j}',b_{m_j}[$, $j=1,\ldots,r$ é um subrecobrimento finito de $[a,\bar{b}]$, entre os intervalos deste subrecobrimento que contêm a tomemos um de maior extremidade direita $]a_{k_1}',b_{k_1}[$, e repetimos o processo em relação a b_{k_1}, etc.). Então os $[a_{k_j}',b_{k_j}[$, $j=1,\ldots,m$ formam um recobrimento de $[a,\bar{b}]$ e temos

$$\sum_{j=1}^{m} \ell_u([a'_{k_j},b_{k_j}[) = u(b_{k_m}-) - u(a'_{k_1}-) + \sum_{j=2}^{m} [u(b_{k_{j-1}}-) - u(a'_{k_j}-)] \geq$$

$$\geq u(b_{k_m}) - u(a'_{k_1}) \geq u(\bar{b}-) - u(a-) > u(b-) - u(a-) - \varepsilon = \ell_u([a,b[) - \varepsilon.$$

Por outro lado $\ell_u([a'_k,b_k[) \leq \ell_u([a_k,b_k[) + \frac{\varepsilon}{2^k}$ e portanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell_u([a_k,b_k[) + \varepsilon > \ell_u([a,b[) - \varepsilon$$

donde se segue o resultado pois $\varepsilon > 0$ é arbitrário.

IIa: quando $[a,b[\subset\bigcup_j]-\infty,c_j[\cup \bigcup_k [a_k,b_k[$ e não existe $c_j>a$ a demonstração é como no caso I.

IIb: $[a,b[\subset\bigcup_j]-\infty,c_j[\cup \bigcup_k [a_k,b_k[$ e $\sup_j c_j \geq b$; então dado $\varepsilon>0$ existe $\bar{b}<b$ tal que $u(\bar{b}-)>u(b-)-\varepsilon$ e existe $c_j \geq \bar{b}$ e portanto $u(c_j-)>u(b-)-\varepsilon$ donde segue que

$$\ell_u(]-\infty,c_j[) = u(c_j-) - u(-\infty+) > u(b-) - u(a-) - \varepsilon = \ell_u([a,b[- \varepsilon$$

o que implica o resultado pois $\varepsilon > 0$ é arbitrário.

IIc: quando $[a,b[\subset\bigcup_j]-\infty,c_j[\cup \bigcup_k [a_k,b_k[$ e $a<\sup_j c_j<b$, então necessariamente existe $c_i = \sup_j c_j$ ou existe $a_i = \inf_k a_k$ [□] e a demonstração é então imediata pois no primeiro caso temos

$$[a,b[= [a,c_i[\dot{\cup}[c_i,b[\text{ com } [a,c_i[\subset]-\infty,c_i[\text{ e } [c_i,b[\subset\bigcup_k [a_k,b_k[\quad \text{(caso I)}$$

e no segundo caso temos

$$[a,b[\subset[a,a_i[\dot{\cup}[a_i,b[\text{ com } [a,c_i[\subset]-\infty,c_i[\text{ e } [a_i,b[\subset\bigcup_j[a_k,b_k[\quad \text{(caso I)}.$$

III - Se em vez de intervalos $[a,b[$ consideramos intervalos $]-\infty,c[$ a demonstração é imediata: se $]-\infty,c[\subset\bigcup_{k\in N} I_k$ e se algum dos I_k é da forma $]-\infty,\bar{c}[$, então caimos no caso

$$[\bar{c},c[\subset\bigcup_{k\in N} I_k\cap[\bar{c},\infty[$$

que já consideramos acima. Se temos $]-\infty,c[\subset\bigcup_{k\in N}[a_k,b_k[$ então para todo $a\in]-\infty,c[$ temos

$$u(c-)-u(a-) = \ell_u([a,c[) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\ell_u([a_k,b_k[)$$

pelo que já demonstramos. Portanto por passagem ao limite temos

$$\ell_u(]-\infty,c[) = u(c-)-u(-\infty+) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\ell_u([a_k,b_k[) \quad \square$$

A medida m_u deduzida da função crescente u se chama de *medida de Lebesgue-Stieltjes* associada à função u; a integral correspondente se chama de *integral de Lebesgue-Stieltjes*.

<u>EXERCÍCIO 6</u> - a) Demonstrar que os conjuntos borelianos da reta são mensuráveis em relação a qualquer medida de Lebesgue-Stieltjes.

b) Demonstrar que todo boreliano limitado da reta têm medida finita em relação a qualquer medida de Lebesgue-Stieltjes.

*c) Dar exemplo de uma medida de Lebesgue-Stieltjes m_u e e de um conjunto mensurável segundo a medida de Lebesgue mas não m_u-mensurável.

d) Demonstrar que as funções contínuas $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são mensuráveis em relação a qualquer medida de Lebesgue-Stieltjes.

EXERCÍCIO 7 - Seja μ uma medida definida sobre a σ-álgebra dos conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ e que é finita sobre todo boreliano limitado. Para todo $t \in \mathbb{R}$ definimos $u(t) = \mu([0,t[)$ se $t \geq 0$ e $u(t) = -\mu([t,0[)$ se $t \leq 0$.

a) Demonstrar que u é uma função monótona crescente, contínua à esquerda.

*b) Seja m_u a medida associada a u. Demonstrar que para todo subconjunto boreliano B de $\mathbb{R}$ temos $m_u B = \mu B$. [Sugestão: basta mostrar a igualdade para intervalos de forma $[a,b[$ e $]-\infty,c[$].

EXERCÍCIO 8 - Sejam $u_1, u_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções monótonas crescentes tais que para todo $t \in \mathbb{R}$ temos $u_1(t-) = u_2(t-)$ (e portanto $u_1(t+) = u_2(t+)$)

a) Demonstrar que $m_{u1} = m_{u2}$

b) Demonstrar que dada uma função u monótona crescente existe uma função u_- monótona crescente e contínua à esquerda tal que $m_{u_-} = m_u$.

EXERCÍCIO 9 - Seja $u:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente

a) Demonstrar que a medida m_u é σ-finita

b) Demonstrar que a medida m_u é finita se e somente se u é limitada

c) Seja u limitada, demonstrar que $m_u(\mathbb{R}) = u(\infty-)-u(-\infty+)$.

EXERCÍCIO 10 - Seja u uma função monótona crescente e $[a,b]\subset\mathbb{R}$ tal que $u(t) = u(a)$ para $t \leq a$ e $u(t) = u(b)$ para $t \geq b$.

a) Seja $f\in\mathfrak{L}_1(\mathbb{R}, m_u)$. Demonstrar que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)du(t) = \int_{[a,b]} f(t)du(t)$$

b) Demonstrar que todas as funções contínuas

$$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

são u-integráveis.

EXERCÍCIO 11 - Seja $u:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente limitada

a) Demonstrar que $C^*(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}, m_u)$

b) Demonstrar que $C^*(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{L}_p(\mathbb{R}, m_u)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

**EXERCÍCIO 12 - Seja $u:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente

a) Por analogia com o que foi feito no §4.1 do capítulo I, definir a "integral de Darboux-Stieltjes inferior":

$$\underline{\int_a^b} f(t)du(t)$$

e a "integral de Darboux-Stieltjes superior"

$$\overline{\int_a^b} f(t)du(t)$$

e a "integral de Darboux-Stieltjes"

$$\int_a^b f(t)du(t)$$

(quando as duas anteriores coincidem).

b) Demonstrar o análogo do Teorema I.4.1 para a medida m_u

c) Demonstrar o análogo do Teorema I.4.2 para a integral de Darboux-Stieltjes e a integral de Lebesgue-Stieltjes.

d) Por analogia com o Teorema I.4.3 demonstrar que dada uma função limitada $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, existe a integral de Darboux-Stieltjes

$$\int_a^b f(t)du(t)$$

se e somente se o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem m_u-medida nula.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>13</u> - Seja $u:[0,1] \longrightarrow [0,1]$ a função definida no exercício 3 do Apêndice B do capítulo II e seja K o conjunto triádico de Cantor. Demonstrar que $m_u(K)=1$ e que $m_u(CK)=0$.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>14</u> - Seja $g \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R})$, $g \geq 0$. Definimos

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} g(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Demonstrar que $u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função absolutamente contínua, crescente e limitada

b) Dados $a < b$ demonstrar que

$$m_u(|a,b|) = \int_a^b g(t)dt$$

*c) Demonstrar que $M \subset \mathbb{R}$ é m_u-mensurável se e somente se existe $F \in \mathcal{F}_\sigma$ e $G \in \mathcal{G}_\delta$ com $F \subset M \subset G$ tal que $\int_F g = \int_G g$

d) Demonstrar que todo conjunto mensurável $M \subset \mathbb{R}$ é m_u-mensurável.

*e) Seja $M \subset \mathbb{R}$; demonstrar que M é m_u-mensurável se e somente se $\chi_M g$ é mensurável

*f) Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$; demonstrar que f é m_u-mensurável se e somente se fg é mensurável. [Sugestão: considerar $f \geq 0$ e aplicar o Teorema 3.1 do capítulo I].

*g) Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$; demonstrar que f é m_u-integrável se e somente se fg é integrável e que então temos

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)du(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt$$

[Sugestão: considerar $f \geq 0$ e aplicar o Teorema 3.1 do capítulo I].

<u>EXEMPLO 2</u> - <u>A MEDIDA PRODUTO</u> - Sejam $(X,\mathcal{A},\nu)$ e $(Y,\mathcal{B},\mu)$ espaços com medidas e consideremos a semiálgebra $\mathcal{R}$ formada pelos conjuntos da forma $A\times B$ com $A\in\mathcal{A}$ e $B\in\mathcal{B}$ (retângulos mensuráveis; ver o Exemplo S.2). Para todo $A\times B\in\mathcal{R}$ definimos

$$\lambda(A\times B) = \mu(A)\cdot\nu(B).$$

Para demonstrar que λ pode ser estendida a uma medida completa sobre $X\times Y$ (definida sobre a σ-álgebra completa gerada por $\mathcal{R}$) precisamos demonstrar que λ é σ-subaditiva e aditiva (Teoremas 2.3 e 2.4). A medida completa então obtida pelos Teoremas 2.4 e 2.1 é denominada *medida produto* (das medidas μ e ν) e é indicada por $\mu\times\nu$.

Demonstração de que λ é σ-subaditiva: seja

$$A\times B\subset \bigcup_{k\in N} A_k\times B_k,$$

podemos supor que $A\times B \neq \phi$ e queremos provar que

$$\lambda(A\times B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k\times B_k).$$

Dado $x\in X$, seja $N_x = \{k\in N \mid x\in A_k\}$. Para todo $x\in A$ temos

$$B\subset \bigcup_{k\in N_x} B_k$$

e portanto

$$\nu B \leq \sum_{k\in N_x} \nu B_k, \text{ isto é, } \chi_A(x)\nu B \leq \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}(x)\nu B_k$$

donde se segue

$$\int_X \chi_A(x)\nu B d\mu(x) \leq \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}(x)\nu B_k\right) d\mu(x).$$

Pelo teorema da convergência monótona (aplicado à medida μ e à 2ª integral acima) temos

$$\mu(A)\nu(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\nu(B_k).$$

Demonstração da aditividade de λ: seja

$$A\times B = \dot{\bigcup_{1\leq k\leq m}} A_k\times B_k;$$

a demonstração de que

$$\lambda(A\times B) = \sum_{k=1}^{m} \lambda(A_k\times B_k)$$

é análoga à demonstração acima, substituindo $\bigcup$ por $\dot{\bigcup}$ e as desigualdades por igualdades (poder-se-ia mesmo considerar

$$A\times B = \dot{\bigcup_{k\in N}} A_k\times B_k).$$

<u>OBSERVAÇÃO 1</u> - Dados $r,s\in N$ a medida de Lebesgue m_{r+s} de $\mathbb{R}^{r+s}$ é o produto da medida m_r sobre $\mathbb{R}^r$ pela medida m_s sobre $\mathbb{R}^s$.

De fato dos teoremas 1.2 e 1.5 do capítulo I segue-se que dados intervalos $|a,b|\subset\mathbb{R}^r$ e $|c,d|\subset\mathbb{R}^s$ temos

$$m_{r+s}(|a,b|\times|c,d| = m_r(|a,b|)\times m_s(|c,d|).$$

O resultado segue pois do fato de que $\mathcal{M}_{r+s}$ é a σ-álgebra completa gerada pela semiálgebra $\mathcal{I}_{r+s}$ dos intervalos de $\mathbb{R}^{r+s}$, que coincide com a σ-álgebra completa gerada por $\mathcal{M}_r\times\mathcal{M}_s$ (pois $\mathcal{I}_{r+s}\subset\mathcal{M}_r\times\mathcal{M}_s\subset\mathcal{M}_{r+s}$).

EXERCÍCIO 15 - Demonstrar que se μ é uma medida definida sobre a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ e tal que $\mu([a,b]) = m([a,b])$ para todo $[a,b]\subset\mathbb{R}^n$ então $\mu \equiv m$ (mas veja o Exercício 5 do §3).

OBSERVAÇÃO 2 - No $\mathbb{R}^n$ a função volume de intervalo definida sobre a semiálgebra do Exemplo S.4 (ou do Exemplo S.3) é σ-subaditiva e aditiva. A σ-subaditividade segue do teorema I.1.2 através do teorema 2.3; a aditividade segue dos teoremas I.1.5 e I.1.2 através do teorema 2.4.

§3 - O TEOREMA DE FUBINI

Neste § vamos examinar propriedades da medida produto definida no § precedente.

No exemplo 2 precedente vimos que se $(X,\mathcal{A},\mu)$ e $(Y,\mathcal{B},\nu)$ são espaços com medidas, então sobre a σ-álgebra $\tilde{\mathcal{R}}$ de $X\times Y$ gerada pelos retângulos mensuráveis de $X\times Y$ existe uma medida λ tal que para todo $A\times B\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ temos

$$\lambda(A\times B) = \mu(A)\nu(B);\ \lambda = (\mu\times\nu)_{|\tilde{R}}.$$

<u>Notação</u> - Lembremos que dado um conjunto $E\subset X\times Y$, para todo $x\in X$ e $y\in Y$ definimos

$$E^x = \{y\in Y \mid (x,y)\in E\} \text{ e } E_y = \{x\in X \mid (x,y)\in E\}.$$

É imediato que temos

$$\chi_{E^x}(y) = \chi_E(x,y),\ (CE)^x = CE^x, \left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)^x = \bigcup_{i\in I} E_i^x \text{ e } \left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)^x = \bigcap_{i\in I} E_i^x \ [\square]$$

e o análogo em relação a $y\in Y$.

Dada uma função $f\colon X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, para todo $x\in X$ e $y\in Y$ escrevemos

$$f^x(y) = f_y(x) = f(x,y).$$

O teorema fundamental deste § é o

<u>TEOREMA 3.1</u> (Teorema de Fubini) - Sejam (X,A,μ) e (Y,B,ν) espaços com medidas completas e seja $f\in\mathcal{L}_1(X\times Y),\mu\times\nu)$. Então

1 - Para μ-quase todo $x\in X$ temos $f^x\in\mathcal{L}_1(Y,\nu)$

1' - Para ν-quase todo $y\in Y$ temos $f_y\in\mathcal{L}_1(X,\mu)$

2 - A função $x\in X \longrightarrow \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ é μ-integrável

2' - A função $y\in Y \longrightarrow \int_X f(x,y)d\mu(x)$ é ν-integrável

$$3 - \int_X \left[\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu)(x,y) =$$

$$= \int_Y \left[\int_X f(x,y)d\mu(x) \right] d\nu(y).$$

Para demonstrar o Teorema de Fubini vamos precisar dos seguintes lemas:

<u>LEMA 3.1.1</u> - a) Seja $E \in \tilde{R}$, para todo $x \in X$, o conjunto E^x é ν-mensurável (e, analogamente, para todo $y \in Y$ o conjunto E_y é μ-mensurável).

b) Seja $g: X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função $\tilde{R}$-mensurável; para cada $x \in X$ e função g^x é ν-mensurável (e, analogamente, para cada $y \in Y$ a função g_y é μ-mensurável).

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - a) Dado $x \in X$ seja $R_x = \{E \subset X\times Y \mid E^x \in \mathcal{B}\}$; basta provar que R_x é uma σ-álgebra que contêm R para seguir que ela contêm $\tilde{R}$ e temos portanto nosso resultado

i) R_x contêm R pois se $E = A\times B$ e $R = A\times\mathcal{B}$ então temos

$$E^x = B \text{ se } x \in A \quad \text{e} \quad E^x = \phi \text{ se } x \notin A.$$

ii) se $E \in R_x$ então $CE \in R_x$ pois $(CE)^x = CE^x \in \mathcal{B}$

iii) se $E_k \in R_x$ $(k \in N)$ então $\bigcup_{k\in N} E_k \in R_x$ pois $\left(\bigcup_{k\in N} E_k\right)^x = \bigcup_{k\in N} E_k^x$

b) Dizer que g é $\tilde{R}$-mensurável equivale a dizer que dado $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $E = \{(x,y) \in X\times Y \mid g(x,y) > \alpha\} \in \tilde{R}$. Por a) segue que E^x é ν-mensurável e como

$$E^x = \{y \in Y \mid (x,y) \in E\} = \{y \in Y \mid g(x,y) > \alpha\} = \{y \in Y \mid g^x(y) > \alpha\}$$

segue que g^x é ν-mensurável.

<u>LEMA 3.1.2</u> - Seja $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ com $(\mu\times\nu)(E) < \infty$; para todo $x \in X$ definimos $g(x) = \nu E^x$. Então a função g é μ-integrável e

$$\int_X g\,d\mu = (\mu\times\nu)(E).$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Vamos demonstrar o lema sucessivamente para $E \in \mathcal{R}$, $E \in \mathcal{R}_\sigma$ e $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$.

a) Se $E = A\times B \in \mathcal{R} = \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ então o resultado é trivial pois

$g(x) = \nu B$ se $x \in A$ e $g(x) = 0$ se $x \notin A$; portanto

$$\int_X g\,d\mu = \int_A \nu B\,d\mu = \mu(A)\cdot\nu(B) = (\mu\times\nu)(A\times B).$$

b) Seja $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ com $E_k \in \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ é uma semiálgebra podemos supor que os E_k são dois a dois disjuntos (veja o Exercício 3 do §2). Para $x \in X$ definimos $g_k(x) = \nu E_k^x$. Então temos

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$$

e portanto g é μ-mensurável pois os g_k o são por a). Pelo corolário 3.3.1 do capítulo I temos

$$\int_X g\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X g_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu\times\nu)(E_k) = (\mu\times\nu)\left(\dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} E_k\right) = (\mu\times\nu)(E).$$

c) Seja $E = \bigcap_{k\in N} E_k$ com $E_k \in R_\sigma$. Como $E_1,\ldots,E_k \in R_\sigma$ implica $E_1\cap\ldots\cap E_k \in R_\sigma$ [□] podemos supor que $E_k \supset E_{k+1}$ e que $\int_X g_1 d\mu = (\mu\times\nu)(E_1) < \infty$ (pois pelo Corolário 2.4.1 a existe $E_1 \in R_\sigma, E_1 \supset E$, com $(\mu\times\nu)(E_1) \le (\mu\times\nu)(E)+\varepsilon$ e portanto g_1 é finita μ-q.s. pela observação 3.5 do Capítulo I. Seja $x\in X$ tal que $g_1(x) < \infty$; então como temos $E_k^x \supset E_{k+1}^x$ e $E^x = \bigcap_{k\in N} E_k^x$ segue-se do teorema 1.3 b do capítulo I que

$$g(x) = \nu E^x = \lim_{k\to\infty} \nu E_k^x = \lim_{k\to\infty} g_k(x),$$

isto é, $g_k \longrightarrow g$ μ-q.s. Portanto g é μ-mensurável e pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue temos

$$\int_X g d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k d\mu = \lim_{k\to\infty} (\mu\times\nu)(E_k) = (\mu\times\nu)\left(\bigcap_{k\in N} E_k\right) = (\mu\times\nu)(E). \ \blacksquare$$

<u>LEMA 3.1.3</u> - Seja $E\subset X\times Y$ um conjunto $\mu\times\nu$-mensurável tal que $(\mu\times\nu)(E) = 0$; então para μ-quase todo $x\in X$ temos $\nu E^x = 0$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Pelo Corolário 2.4.1 existe $M\in R_{\sigma\delta}, M\supset E$ tal que $(\mu\times\nu)(M) = 0$. Pelo Lema 3.1.2 temos

$$\int_X \nu(M^x)\, d\mu(x) = (\mu\times\nu)(M) = 0$$

e portanto $\nu(M^x) = 0$ para μ-quase todo x (pela Observação 3.4 do capítulo I). Como temos $E^x \subset M^x$ e como a medida μ é completa então para μ-quase todo $x\in X$ o conjunto E^x é ν-mensurável e $\nu E^x = 0$.

LEMA 3.1.4 - Seja $E \subset X \times Y$ um conjunto $\mu\times\nu$-mensurável tal que $(\mu\times\nu)(E) < \infty$. Então para μ-quase todo $x \in X$ o conjunto E^x é ν-mensurável e a função

$$x \in X \longrightarrow g(x) = \nu E^x$$

(que está definida para μ-quase todo $x \in X$) é μ-mensurável e temos

$$\int_X g d\mu = (\mu\times\nu)(E).$$

DEMONSTRAÇÃO - Pelo Corolário 2.4.1 existe $M \in R_{\sigma\delta}$, $M \supset E$, tal que

$$(\mu\times\nu)(M) = (\mu\times\nu)(E);$$

então $M_0 = M \sim E$ também é $\mu\times\nu$-mensurável, $M = E \dot{\cup} M_0$ e

$$(\mu\times\nu)(M_0) = 0.$$

Portanto pelo Lema 3.13 para μ-quase todo x temos que M_0^x é ν-mensurável e $\nu M_0^x = 0$. Então $g(x) = \nu E^x = \nu M^x - \nu M_0^x = \nu M^x$ para μ-quase todo x. Portanto g é μ-mensurável pois pelo Lema 3.1.2 a função $x \in X \longrightarrow \nu M^x$ é μ-mensurável e pelo mesmo lema temos

$$\int_X g d\mu = (\mu\times\nu)(M) = (\mu\times\nu)(E). \ \blacksquare$$

LEMA 3.1.5 - Seja $\phi: X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma função $\mu\times\nu$-simples que é nula fora de um conjunto de $\mu\times\nu$-medida finita. Então para μ-quase todo $x\in X$ a função ϕ^x é ν-integrável e a função

$$x\in X \longrightarrow \int_Y \phi(x,y)d\nu(y)$$

é μ-integrável e temos

$$\int_X\left[\int_Y \phi(x,y)d\nu(y)\right]d\mu(x) = \int_{X\times Y} \phi(x,y)d(\mu\times\nu)(x,y).$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Segue do Lema 3.1.4 por combinação linear.

<u>DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE FUBINI</u> - Por razões de simetria basta demonstrar 1), 2) e a primeira igualdade de 3). Como temos $f = f_+ - f_-$ com f_+ e f_- integráveis, basta fazer as demonstrações para $f \geq 0$.

a) Pelo Lema 3.1.5 o teorema é verdadeiro se f é uma função $\mu\times\nu$-simples, nula fora de um conjunto de $\mu\times\nu$-medida finita.

b) Pelo Teorema 3.1 do capítulo I existe uma sequência ϕ_k de funções $\mu\times\nu$-simples positivas tal que $\phi_k \uparrow f$. Temos

$$\int_{X\times Y} \phi_k d(\mu\times\nu) \leq \int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu) < \infty$$

e da observação 3.6 do capítulo I segue-se que ϕ_k é nula fora de um conjunto de $\mu\times\nu$-medida finita. De $\phi_k(x,y)\uparrow f(x,y)$ segue-se que para cada $x\in X$ temos $\phi_k^x \uparrow f^x$ e então pelo Lema 3.1.5

f^x é ν-mensurável para μ-quase todo $x \in X$. Pelo teorema da convergência monótona para μ-quase todo $x \in X$ temos

$$\int_Y f^x d\nu = \lim_{k\to\infty} \int_Y \phi_k^x d\nu$$

isto é,

$$\int_Y f(x,y)d\nu(y) = \lim_{k\to\infty} \int_Y \phi_k(x,y)d\nu(y) \qquad \mu\text{-qs}$$

e como pelo Lema 3.1.5 as funções

$$x \in X \longrightarrow \int_Y \phi_k(x,y)d\nu(y)$$

são μ-mensuráveis segue-se que a função

$$x \in X \longrightarrow \int_Y f(x,y)d\nu(y)$$

é μ-mensurável.

Do teorema da convergência monótona segue-se que

$$\int_X \left[\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right] d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_X \left[\int_Y \phi_k(x,y)d\nu(y) \right] d\mu(x).$$

As funções ϕ_k sendo $\mu\times\nu$-simples então pela parte a) temos

$$\int_X \left[\int_Y \phi_k(x,y)d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int_{X\times Y} \phi_k d(\mu\times\nu)$$

e, novamente pelo teorema da convergência monótona, temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{X\times Y} \phi_k d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu).$$

Como por hipótese temos

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu) < \infty,$$

segue que a função

$$x\in X \longrightarrow \int_Y f(x,y)d\nu(y),$$

que já mostramos ser μ-mensurável, é de fato μ-integrável e é portanto finita μ-q.s. Logo a função f^x, que mostramos ser μ-mensurável para μ-quase todo $x\in X$, é de fato ν-integrável para μ-quase todo $x\in X$, o que completa a demonstração do teorema.

EXERCÍCIO 1 - Deduzir os lemas 3.1.1 a 3.1.5 do Teorema de Fubini.

TEOREMA 3.2 (O Teorema de Tonelli) - Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ e $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espaços com medidas completas e σ-finitas e seja

$$f:X\times Y \longrightarrow [0,\infty]$$

uma função $\mu\times\nu$-mensurável. Então temos

1 - Para μ-quase todo $x\in X$ a função f^x é ν-mensurável

1' - Para ν-quase todo $y \in Y$ a função f_y é μ-mensurável

2 - A função $x \in X \longrightarrow \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ é μ-mensurável

2' - A função $y \in Y \longrightarrow \int_X f(x,y)d\mu(x)$ é ν-mensurável

3 - $\int_X \left[\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu) = \int_Y \left[\int_X f(x,y)d\mu(x) \right] d\nu(y)$

DEMONSTRAÇÃO - Das hipóteses segue que a medida $\mu\times\nu$ é σ-finita [□] e portanto a sequência de funções $\mu\times\nu$-simples $\phi_k \uparrow f$ que existe pelo teorema 3.1 do capítulo I pode ser tomada tal que cada ϕ_k é nula fora de um conjunto de $\mu\times\nu$-medida finita [□]. Vale então a mesma demonstração do Teorema de Fubini.

COROLÁRIO 3.2.1 - Sob as hipóteses do teorema de Tonelli se uma das três integrais de 3) é finita, as duas outras também o são e as três são iguais.

COROLÁRIO 3.2.2 - Sob as hipóteses do teorema de Tonelli seja $f: X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função $\mu\times\nu$-mensurável. Se uma das três integrais

$$\int_X \left[\int_Y |f| d\nu \right] d\mu, \quad \int_{X\times Y} |f| d(\mu\times\nu) \text{ e } \int_Y \left[\int_X |f| d\mu \right] d\nu$$

for finita as três são finitas e iguais e também são finitas e iguais as integrais

$$\int_X \left[\int_Y f d\nu \right] d\mu, \quad \int_{X\times Y} f d(\mu\times\nu) \quad e \quad \int_Y \left[\int_X f d\mu \right] d\nu \text{ [□].}$$

OBSERVAÇÃO 1 - Uma função $f: X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pode ser $\mu\times\nu$-mensurável (onde μ e ν são medidas completas e σ-finitas) e tal que existem e são finitas as integrais iteradas

$$\int_Y \left[\int_X f d\nu \right] d\mu \quad e \quad \int_Y \left[\int_X f d\mu \right] d\nu$$

(não necessariamente iguais) e apesar disto pode não existir $\int_{X\times Y} f d(\mu\times\nu)$. Quando isto acontece temos

$$\int_{X\times Y} |f| d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f_+ d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f_- d(\mu\times\nu) = \infty.$$

EXEMPLO - Seja $X = Y =]0,1[$ e

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

f é contínua e portanto mensurável e para cada $x \in]0,1[$ temos

$$\int_0^1 f(x,y)dy = \frac{1}{x^2+1} \quad \left(\text{pois } f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

e portanto

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)dy \right] dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \text{arc tg } x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Como temos $f(y,x) = -f(x,y)$ segue-se que

$$\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\,dx\right]dy = -\frac{\pi}{2}$$

e se conclue portanto que f não é absolutamente integrável o que se pode verificar diretamente por

$$\int_0^x f(x,y)\,dy = \frac{1}{2x};$$

portanto

$$\int_0^1 |f(x,y)|\,dy \geq \frac{1}{2x}$$

donde se segue que

$$\int_0^1\left[\int_0^1 |f(x,y)|\,dy\right]dx = \infty.$$

OBSERVAÇÃO 2 - O teorema de Fubini permite reduzir o cálculo de uma integral dupla ao cálculo de integrais iteradas, o que é particularmente vantajoso em $\mathbb{R}^2$ pois então o cálculo das integrais iteradas se reduz à procura de primitivas.

EXERCÍCIO 2 - Verificar se as seguintes funções definidas em $\mathbb{R}^2$ são integráveis

a) $f(x,y) = e^{-\pi(x-y)^2}$ b) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{(1+x^2)(1+y^2)}$

c) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{1+(x-y)^4}$ d) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+y^2}\, e^{-|x-y|}$

e) $f(x,y) = \dfrac{sh(tg[sen(x-y)])}{1+(x-y)^2}$

EXERCÍCIO 3 - Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, impar (isto é $f(-x) = -f(x)$) e limitada, $f \not\equiv 0$. Verifique para que valores de α são integráveis as seguintes funções definidas em $\mathbb{R}^2$

a) $g(x,y) = \dfrac{f(x-y)}{1+[(x-y)^2+y^2]^\alpha}$ b) $h(x,y) = \dfrac{f(x+y)}{1+|x+y|^\alpha}$

EXERCÍCIO 4 - Seja $X = Y = [0,1]$; e seja ν a medida de contagem sobre $X = [0,1]$ (ver o Exemplo M.3) e m a medida de Lebesgue restrita a σ-álgebra dos conjuntos borelianos de $[0,1]$. Seja $\Delta = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid x=y\}$ e $f = \chi_\Delta$

a) Demonstrar que $\Delta \in R_{\sigma\delta}$ e é portanto $\nu \times m$-mensurável

b) Demonstrar que $\int_X \left[\int_Y f(x,y)dy \right] d\nu(x) = 0$ e que

$$\int_Y \left[\int_X fd\nu \right] dy = 1$$

*c) Demonstrar que $\int_{X \times Y} fd(\nu \times m) = \infty$

d) Porque o resultado de b) e c) não está em contradição com o Teorema de Tonelli?

EXERCÍCIO 5 - Sobre $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ consideremos as medidas μ_0 e μ_1 dos Exemplos M.4 e M.5 do §1

a) Demonstrar que μ_0, μ_1 e $\nu\times m$ (a medida produto da medida de contagem ν sobre $\mathbb{R}_d$ (Exemplo M.3) pela medida de Lebesgue m sobre $\mathbb{R}$) coincidem sobre os conjuntos $\nu\times m$-mensuráveis da forma $A\times B$ com νA e mB finitos.

b) Demonstrar que μ_0, μ_1 e $\nu\times m$ são medidas distintas sobre $\mathbb{R}_d\times\mathbb{R}$. [Sugestão: achar conjuntos M_0 e M_1 tais que $\mu_0(M_0) \neq (\nu\times m)(M_0)$ e $\mu_1(M_1) \neq (\nu\times m)(M_1)$, considerar o Exerc. 4].

<u>EXERCÍCIO 6</u> - Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ e $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espaços com medidas completas e seja $f:X\times Y \longrightarrow [0,\infty]$ uma função $\mu\times\nu$-mensurável tal que o conjunto $\{(x,y)\in X\times Y \mid f(x,y)>0\}$ é σ-finito. Demonstrar que valem 1), 1'), 2), 2') e 3) do Teorema de Tonelli.

<u>EXERCÍCIO 7</u> - Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ e $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espaços com medidas completas, $g\in\mathcal{L}_1(X,\mu)$, $h\in\mathcal{L}_1(Y,\nu)$ e $f(x,y) = g(x)h(y)$. Demonstrar que $f\in\mathcal{L}_1(X\times Y,\mu\times\nu)$ e que $\int_{X\times Y} f(\mu\times\nu) = \int_X g d\mu \cdot \int_Y h d\nu$.
[Sugestão: aplicar o Exercício 7 do §1 e o Exercício 6].

A relação clássica que existe entre as noções de integral definida e de área é generalizada pelo seguinte

<u>TEOREMA 3.3</u> - Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ uma medida completa e σ-finita; seja $f:X \longrightarrow [0,\infty]$ e $\Omega_f = \{(x,y)\in X\times[0,\infty] \mid 0\leq y\leq f(x)\}$

a) f é μ-mensurável se e somente se Ω_f é um subconjunto $\mu\times m$-mensurável de $X\times[0,\infty]$

b) Se f é μ-mensurável então temos $\int_X f d\mu = (\mu\times m)(\Omega_f)$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja f uma função μ-mensurável. Então

$$\bar{f}:(x,y)\in X\times[0,\infty] \longrightarrow f(x)\in[0,\infty]$$

é μ×m-mensurável [□] e como $pr_2:(x,y)\in\times[0,\infty] \longrightarrow y\in[0,\infty]$ também é μ×m-mensurável, segue-se que o conjunto

$$\Omega_f = \{(x,y)\in X\times[0,\infty] \mid pr_2(x,y) \le \bar{f}(x,y)\}$$

é μ×m-mensurável [□] e pelo teorema de Tonelli temos então

$$(*)\quad (\mu\times m)(\Omega_f) = \int_{X\times[0,\infty]} \chi_{\Omega_f}\, d(\mu\times m) = \int_X\left[\int_{[0,\infty]} \chi_{\Omega_f}(x,y)dy\right]d\mu(x) =$$

$$= \int_X f(x)d\mu(x).$$

Reciprocamente, se Ω_f é μ×m-mensurável então pelo Teorema de Tonelli segue-se (*) e que f é μ-mensurável.

OBSERVAÇÃO 3 - Do Lema 3.1.4 segue imediatamente que se (X,A,μ) é uma medida completa e $f:X \longrightarrow [0,\infty]$ é tal que o conjunto Ω_f é μ×m-mensurável com $(\mu\times m)(\Omega_f) < \infty$ então f é μ-mensurável e

$$\int_X f d\mu = (\mu\times m)(\Omega_f)$$

TEOREMA 3.4 (Minkowsky) - Sejam (X,A,μ) e (Y,B,ν) espaços com medidas completas σ-finitas e seja $f:X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função μ×ν-mensurável; dado $1 \le p < \infty$ temos

$$\left[\int_Y\left[\int_X |f(x,y)|d\mu(x)\right]^p d\nu(y)\right]^{1/p} \le \int_X\left[\int_Y |f(x,y)|^p d\nu(y)\right]^{1/p} d\mu(x).$$

DEMONSTRAÇÃO - Para $p=1$ o resultado é imediato pelo teorema de Tonelli. Seja pois $p>1$ e indiquemos por A e B o 1º e 2º membro, respectivamente da desigualdade acima. Para todo $y \in Y$ tomemos

$$F(y) = \left[\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x) \right]^{p-1};$$

temos:

$$A^p = \int_Y \left[\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x) \right]^p d\nu(y) = \int_Y \left[\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x) \right]^{p-1} \left[\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x) \right] d\nu(y)$$

$$= \int_Y F(y) \left[\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x) \right] d\nu(y) \overset{(T)}{=} \int_X \left[\int_Y F(y)\,|f(x,y)|\,d\nu(y) \right] d\mu(x)$$

$$\overset{(H)}{\leq} \int_X \left[\int_Y F(y)^{p'}\,d\nu(y) \right]^{1/p'} \left[\int_Y |f(x)|^p d\nu(y) \right]^{1/p} d\mu(x)$$

$$= \left[\int_Y F(y)^{p'}\,d\nu(y) \right]^{1/p'} \int_X \left[\int_Y |f(x,y)|^p d\nu(y) \right] d\mu(x)$$

$$= \left[\int_Y \left[\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x) \right]^{(p-1)p'} d\nu(y) \right]^{1/p'} B$$

$$= \left[\int_Y \left[\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x) \right]^{p} d\nu(y) \right]^{1/p'} B = (A^p)^{1/p'} B = A^{p-1} B'$$

onde aplicamos sucessivamente o Teorema de Tonelli (passagem $\overset{(T)}{=}$), a desigualdade de Hölder (passagem $\overset{(H)}{\leq}$) e as relações $(p-1)p' = p$ e $\frac{p}{p'} = p-1$.

COROLÁRIO 3.4.1 - Se a integral do 1º membro do Teorema aci ma for finita (e a fortiori, se a do 2º membro for finita) temos

$$\left[\int_Y \left|\int_X f(x,y)d\mu(x)\right|^p d\nu(y)\right]^{1/p} \leq \int_X\left[\int_Y |f(x,y)|^p d\nu(y)\right]d\mu(x) \quad [\square].$$

*APÊNDICE A

TEOREMAS DE DECOMPOSIÇÃO

Neste Apêndice estendemos a noção de medida para a de medida com sinal ou carga e damos, sem demonstração, diversos teoremas de decomposição de cargas e medidas. Para as demonstrações ver as referências [R], Cap.11, [K], Cap. 5 e [Z], Cap. 6.

Um espaço com *carga* (também chamado *medida com sinal*) é um conjunto X com uma σ-álgebra M e uma função

$$\mu : M \longrightarrow [-\infty,\infty]$$

que satisfaz

(C1) - μ assume no máximo um dos valores $-\infty$ ou ∞

(C2) - $\mu\phi = 0$

(C3) Dados $M_k \in M$ ($k \in N$) dois a dois disjuntos temos

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{k\in N}} M_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu M_k$$

(esta série sendo absolutamente convergente ou divergente para ∞ ou $-\infty$, independente da ordem dos termos).

Dizemos que os conjuntos $M \in \mathcal{M}$ são μ-*mensuráveis* ou, simplesmente, *mensuráveis*. Indicamos por $(X,\mathcal{M},\mu)$ o espaço com a carga e em geral falamos simplesmente na carga μ estando subentendidos X e $\mathcal{M}$ que lhe são associados.

EXEMPLOS - 1) Toda medida é uma carga

2) Dados dois espaços com medidas $(X,\mathcal{M}_1,\mu_1)$ e $(X,\mathcal{M}_2,\mu_2)$ sendo pelo menos uma delas finita, então $(X,\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2,\mu_2-\mu_1)$ é um espaço com carga [$\square$].

3) Dado um espaço com medida $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $f:X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que é μ-integrável, para todo $M \in \mathcal{M}$ definimos $\mu_f(M) = \int_M f d\mu$. Então $(X,\mathcal{M},\mu_f)$ é um espaço com carga [$\square$].

Dado um espaço com carga $(X,\mathcal{M},\mu)$ dizemos que um conjunto $A \in \mathcal{M}$ é μ-*positivo* (ou simplesmente, *positivo*) se para todo $M \in \mathcal{M}$ temos $\mu(M \cap A) \geq 0$. Dizemos que um conjunto $A \in \mathcal{M}$ é μ-*negativo* (ou, simplesmente, *negativo*) se para todo $M \in \mathcal{M}$ temos $\mu(M \cap A) \leq 0$. Dizemos que um conjunto $A \in \mathcal{M}$ é μ-*nulo* (ou, simplesmente, *nulo*) se para todo $M \in \mathcal{M}$ temos $\mu(M \cap A) = 0$.

<u>EXERCÍCIO 1</u> - Demonstrar que todo conjunto que é ao mesmo tempo positivo e negativo é nulo.

<u>TEOREMA 1</u> (Teorema de Decomposição de Hahn) - Dado um espa-

ço com uma carga (X,M,μ) existe um subconjunto μ-positivo X_+ e um subconjunto μ-negativo X_- tal que $X_+\cap X_-=\phi$ $X=X_+\dot{\cup}X_-$.

A decomposição $X=X_+\dot{\cup}X_-$ se chama *decomposição de Hahn* e ela é essencialmente única (ver o Exercício que segue).

EXERCÍCIO 2 - Seja (X,M,μ) um espaço com carga e sejam $X=X_+\dot{\cup}X_-$ e $X=X_+'\dot{\cup}X_-'$ duas decomposições de Hahn de X. Demonstrar que para qualquer $M\in M$ temos

$$\mu(M\cap X_+') = \mu(M\cap X_+) \quad \text{e} \quad \mu(M\cap X_-') = \mu(M\cap X_-).$$

Dados dois espaços com medidas (X,M,μ_1) e (X,M,μ_2) dizemos que as medidas μ_1 e μ_2 são *mutuamente singulares*, escrevemos $\mu_1\perp\mu_2$ se existem $X_1,X_2\in M$ disjuntos tais que $X=X_1\dot{\cup}X_2$ e $\mu_1(X_2)=\mu_2(X_1)=0$. Apesar da simetria da definição, muitas vezes dizemos que μ_1 é *singular em relação a* μ_2 ou que μ_1 é μ_2-*singular*.

EXERCÍCIO 3 - Sobre $X=[0,1]$ consideremos a σ-álgebra dos conjuntos borelianos, a medida de Lebesgue m restrita a B e a medida m_u definida no Exercício 10 do §2. Demonstrar que m e m_u são mutuamente singulares.

Dado um espaço com carga (X,M,μ) seja $X = X_+\dot{\cup}X_-$ sua decomposição de Hahn. Para todo $M\in M$ definimos

$$\mu_+(M) = \mu(M\cap X_+), \quad \mu_-(M) = -\mu(M\cap X_-) \quad \text{e} \quad |\mu|(M) = \mu_+(M)+\mu_-(M).$$

μ_+, μ_- e $|\mu|$ são medidas [□] denominadas, respectivamente, *variação positiva*, *variação negativa* e *variação total* da carga μ. As medidas μ_+ e μ_- são mutuamente singulares [□] e temos $\mu = \mu_+ - \mu_-$; esta decomposição da carga μ na diferença de duas medidas mutuamente singulares é chamada *decomposição de Jordan* de μ.

TEOREMA 2 (Teorema de Decomposição de Jordan) - Dado um espaço com carga $(X,\mathcal{M},\mu)$ a decomposição de Jordan $\mu = \mu_+ - \mu_-$ de μ na diferença de duas medidas mutuamente singulares é única. Se $\mu = \mu_2 - \mu_1$ onde μ_1 e μ_2 são medidas então

$$\mu_2(M) \geq \mu_+(M) \text{ e } \mu_1(M) \geq \mu_-(M) \text{ para todo } M \in \mathcal{M}.$$

Dadas duas medidas $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $(X,\mathcal{M},\nu)$ dizemos que ν é *absolutamente contínua relativamente a* μ ou simplesmente μ-*absolutamente contínua*, escrevemos $\nu \ll \mu$, se $M \in \mathcal{M}$ com $\mu M = 0$ implica $\nu M = 0$.

EXERCÍCIO 4 - Seja $u:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente e m_u a medida definida por ela (ver o Exemplo 1 do §2) restrita à σ-álgebra $\mathcal{B}$ dos conjuntos borelianos de $[a,b]$. Demonstrar que m_u é absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue (restrita a $\mathcal{B}$) se e somente se a função u for absolutamente contínua.

EXERCÍCIO 5 - Demonstrar que uma medida ν é μ-absolutamente contínua se e somente se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $M \in \mathcal{M}$ com $\mu M \leq \delta$ temos $\nu M \leq \varepsilon$. [Sugestão: veja a demonstração do Teorema 2.3 do capítulo II].

EXEMPLO - Seja $f:X \longrightarrow [0,\infty]$ μ-mensurável; para todo $M \in \mathcal{M}$ definimos

$$\nu M = \mu_f M = \int_M f d\mu.$$

Então ν é uma medida [□]; veja o Exemplo M.8 do §1] que é μ-absolutamente contínua.

Reciprocamente, o Teorema de Radon-Nikodym diz que toda medida μ-absolutamente contínua é deste tipo:

TEOREMA 3 (Radon-Nikodym) - Seja $(X,\mathcal{M},\mu)$ um espaço com uma medida σ-finita e seja $(X,\mathcal{M},\nu)$ um espaço com uma medida ν que é μ-absolutamente contínua. Então existe uma função $f:X \longrightarrow [0,\infty]$ que é μ-mensurável tal que para todo $M \in \mathcal{M}$ temos

$$\nu M = \mu_f M = \int_M f d\mu.$$

A função f é única no sentido que se $\hat{f}$ é outra função com a mesma propriedade então $\hat{f} = f$ μ-q.s.

A função f definida no teorema precedente se denomina de *derivada de Radon-Nikodym* de ν relativamente a μ escrevemos $f = \left[\frac{d\nu}{d\mu}\right]$.

EXERCÍCIO 6 - Com a notação do Exercício 14 do §2 demonstrar que $g = \left[\frac{dm_u}{dm}\right]$ $\left(= \frac{du}{dt}\right.$ q.s., veja o Exercício 4).

TEOREMA 4 (Teorema de Decomposição de Lebesgue) - Sejam

$$(X,\mathcal{M},\mu) \text{ e } (X,\mathcal{M},\nu)$$

espaços com medidas σ-finitas. Existe uma medida ν_s que é μ-singular e uma medida ν_{ac} que é μ-absolutamente contínua tais que $\nu = \nu_s + \nu_{ac}$. As medidas ν_s e ν_{ac} são únicas.

*APÊNDICE B

TIPOS DE CONVERGÊNCIA

Neste Apêndice damos resultados que relacionam diferentes tipos de convergência que se pode definir sobre o espaço das funções mensuráveis. Para as demonstrações ver a referência [M], Cap. 7.

Seja $(X,\mathcal{M},\mu)$ um espaço com medida. Indicamos por $\mathcal{M}(X,\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$ que são mensuráveis (i.é, μ-mensuráveis).

Em $\mathcal{M}(X,\mathbb{R})$ além da convergência simples e da convergência uniforme vimos no fim do §2 do capítulo I as noções de convergência quase sempre (que abreviamos por q.s.) e de convergência quase uniforme (que abreviamos por q.u.). No capítulo III definimos a convergência L_p, $1 \le p \le \infty$, e vamos agora definir a convergência em medida que abreviamos por med.

Dizemos que uma sequência $f_k \in M(X,\mathbb{R})$ *converge em medida* para uma função $f \in M(X,\mathbb{R})$ (escrevemos $f_k \xrightarrow{\text{med.}} f$) se para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$\lim_{k\to\infty} \mu\{x\in X \mid |f_k(x)-f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

***<u>EXERCÍCIO 1</u>-Definir "sequência de Cauchy em medida" e mostrar que toda sequência de Cauchy em medida de $M(X,\mathbb{R})$ é convergente em medida.

No diagrama abaixo damos as implicações que exis-

$$\begin{tikzcd}
q.s & q.u \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, shift right] \\
L_p \arrow[u, Rightarrow, dashed] \arrow[ur, Rightarrow, dashed] \arrow[r, Rightarrow] & \text{med.} \arrow[ul, Rightarrow, dashed] \arrow[u, Rightarrow, dashed, shift right]
\end{tikzcd}$$

tem entre as convergências q.s., q.u., L_p e med. em $M(X,\mathbb{R})$. Uma flexa I $\Rightarrow$ II indica que $f_k \xrightarrow{I} f$ implica $f_k \xrightarrow{II} f$, uma flexa I $\dashrightarrow$ II indica que $f_k \xrightarrow{I} f$ implica que existe uma subsequência f_{k_r} tal que $f_{k_r} \xrightarrow{II} f$.

<u>EXERCÍCIO 2</u> - Demonstrar que $L_p \Longrightarrow$ med.

<u>EXERCÍCIO 3</u> - Demonstrar que q.u. $\Longrightarrow$ med.

* <u>EXERCÍCIO 4</u> - Demonstrar que med. $\dashrightarrow$ q.u.

$L_p \dashrightarrow$ q.s. segue do Teorema de Fischer-Riesz (capítulo III, Teorema 3.1) e as outras implicações são imedia tas (usando eventualmente os Exercícios 2, 3 e 4) [□].

EXERCÍCIO 5 - Dar contra-exemplos mostrando que, em geral, não existem outras implicações além das indicadas no diagrama precedente.

Quando (X,M,μ) é uma medida finita, isto é, quando $\mu(X) < \infty$, temos as implicações do diagrama abaixo. A implicação

$$\mu(X) < \infty: \quad \begin{tikzcd} q.s \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, shift left] & q.u \arrow[d, Rightarrow, shift right] \\ L_p \arrow[u, Rightarrow, dashed] \arrow[ur, Rightarrow, dashed] \arrow[r, Rightarrow] & med. \arrow[u, Rightarrow, dashed, shift right] \arrow[ul, Rightarrow, dashed, shift left] \end{tikzcd}$$

ção q.s. $\Longrightarrow$ q.u. é o Teorema de Egoroff (capítulo I, Teorema 2.3). As outras implicações seguem dela e das implicações do diagrama precedente. [□]

* EXERCÍCIO 6 - Seja $\mu(X) < \infty$; para $f,g \in M(X,\mathbb{R})$ definimos

$$d(f,g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu$$

a) Demonstrar que $d(f,g) = 0$ se e somente se $f = g$ μ-q.s., que $d(g,f) = d(f,g)$ e que $d(f,h) \leq d(f,g)+d(g,h)$

b) Demonstrar que $d(f_k,f) \longrightarrow 0 \iff f_k \xrightarrow{\text{med.}} f$.

No diagrama que segue consideramos apenas sequências $f_k \in L_p(X,\mu)$, $1 \leq p < \infty$, tais que existe

$$g \in L_1(X,\mu) \text{ com } |f_k|^p \leq g \ \mu\text{-q.s.}$$

$$|f_k|^p \le g \in L_1(X,\mu): \quad \begin{tikzcd} q.s \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow, shift right] \arrow[dr, Rightarrow] & q.u \arrow[d, Rightarrow, shift right] \arrow[dl, Rightarrow] \\ L_p \arrow[u, Rightarrow, dashed, shift right] \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[ur, Rightarrow, dashed, shift left] & \text{med.} \arrow[u, Rightarrow, dashed, shift right] \arrow[ul, Rightarrow, dashed, shift left] \end{tikzcd}$$

* <u>EXERCÍCIO 7</u> - Demonstrar a implicação q.s. $\Longrightarrow$ q.u. do diagrama precedente. [Sugestão: analisar a demonstração do Teorema de Egoroff].

**<u>EXERCÍCIO 8</u> - Demonstrar a implicação med. $\Longrightarrow$ L_p do diagrama precedente.

As outras implicações do diagrama precedente são consequências imediatas das implicações do 1º diagrama e dos Exercícios 7 e 8. [□]

<u>EXERCÍCIO 9</u> - Dar contra-exemplos mostrando que, em geral, não existem outras implicações além das indicadas no diagrama precedente.

- ¤ -

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES (II)

Em todo este capítulo consideramos $\mathbb{R}^n$ munido da medida de Lebesgue. Este capítulo é independente do capítulo IV.

§1 - O PRODUTO DA CONVOLUÇÃO

No capítulo II já definimos o produto de convolução $f_2 * f_1$ de duas funções $f_1 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in C^*(\mathbb{R}^n)$

$$(f_2 * f_1)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_2(x-y) f_1(y) dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

e demonstramos que $f_2 * f_1 = C^*(\mathbb{R}^n)$ (ver Cap.II, §5, Exemplo 6).

No Exemplo 4 do §6 do Cap.II e nos exercícios que o seguem vimos como hipóteses de diferenciabilidade de f_2 implicam as propriedades correspondentes de diferenciabilidade em $f_2 * f_1$.

A seguir fizemos aplicações destas propriedades para obter fórmulas integrais para as soluções da equação do calor e da equação de Laplace (ver Cap.II, §5, Exemplo 7 e aplicações a) e b) que o seguem e §6, Exemplo 6 e aplicações

a) e b) que o seguem).

No presente § vamos estender o produto de convolução para funções de $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ e ver novas propriedades deste produto. Vamos por seu intermédio estudar a δ-convergência (sequências de Dirac) e fazer novas aplicações às equações diferenciais parciais acima mencionadas.

1.1 - CONVOLUÇÃO DE FUNÇÕES INTEGRÁVEIS

Notação - Dado $A\subset\mathbb{R}^n$ escrevemos $\sigma(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \mid x-y\in A\}$.

LEMA 1.1 - Dado $A\subset\mathbb{R}^n$ mensurável então $\sigma(A)$ é mensurável.

DEMONSTRAÇÃO - Como a aplicação $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow x-y\in\mathbb{R}^n$ é contínua então se A é aberto, $\sigma(A)$ também é aberto e pelo corolário I.1.5.1 o Lema é verdade neste caso. O Lema também é verdade quando A é um G_δ pois então $\sigma(A)$ também o é já que

$$A = \bigcap_{k\in N} O_k \text{ implica que } \sigma(A) = \bigcap_{k\in N} \sigma(O_k).$$

O Lema ainda é verdade se A tem medida nula pois então pelo teorema I.5.2 existe $G\in G_\delta$ com $G\supset A$ e $mG = 0$ e basta demonstrar que $m[\sigma(G)] = 0$ o que segue do teorema de Tonelli:

$$m[\sigma(G)] = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \chi_{\sigma(G)}(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\sigma(G)}(x,y)\,dx\right]dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} m(G+y)\,dy = 0.$$

Finalmente se A é um conjunto mensurável qualquer novamente pelo teorema I.5.2 existe $G \in G_\delta$ com $G \supset A$ e $m(G \sim A) = 0$. Então temos $\sigma(A) = \sigma(G) \sim \sigma(G \sim A)$ e como já demonstramos que $\sigma(G)$ e $\sigma(G \sim A)$ são mensuráveis segue-se que $\sigma(A)$ é mensurável. $\square$

Dada uma função $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definimos a função $\sigma f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ por $(\sigma f)(x,y) = f(x-y)$.

<u>LEMA 1.2</u> - Seja $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Então a função $\sigma f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - O resultado é imediato pois dado $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $(\sigma f)^{-1}(]\alpha,\infty]) = \sigma(f^{-1}(]\alpha,\infty])$ [$\square$].

Dadas funções $f,g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ escrevemos

$$(f*g)(x) = (f(y) \underset{y}{*} g(y))(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

quando a integral está definida. Lembremos novamente que a função $f*g$ se chama *produto da convolução* de f por g.

<u>EXERCÍCIO 1</u> - Demonstrar que $f*g = g*f$, isto é, que as duas funções estão definidas nos mesmos pontos de $\mathbb{R}^n$ e são iguais. [Sugestão: fazer a mudança de variáveis $y = z-x$].

<u>TEOREMA 1.3</u> - Dados $f,g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ a função

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

está definida e temos $f*g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ com $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.

DEMONSTRAÇÃO - Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ seja $F(x,y) = f(x-y)g(y)$. Do Lema 1.2 segue que F é mensurável em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e pelo teorema de Tonelli temos

$$\iint |f(x-y)g(y)|\,dxdy = \int\left[\int |f(x-y)|\,|g(y)|\,dx\right]dy =$$

$$= \|f\|_1 \int |g(y)|\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Do teorema de Fubini segue-se então que para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy$ e que $f*g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. $\square$

No teorema que segue temos outra demonstração do teorema 1.3.

EXERCÍCIO 2 - Sejam $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$; demonstrar que $\mathcal{F}(f*g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$ onde $\mathcal{F}h$ indica a transformada de Fourier da função h (ver capítulo II, §5, Exemplo 3).

EXERCÍCIO 3 - Dados $f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ demonstrar que $(f*g)*h = f*(g*h)$. [Sugestão: aplicar o teorema de Fubini].

* EXERCÍCIO 4 - Dar exemplo de duas funções $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ que sejam contínuas e não identicamente nulas, tais que $f*g = 0$. [Sugestão: aplicar o Exercício 2 e lembrar que se $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\mathcal{F}f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ então $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ q.s. (ver o teorema 2.6 que segue)].

TEOREMA 1.4 - Seja $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$; então temos $g*f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ e $\|g*f\|_p \leq \|g\|_p \|f\|_1$.

DEMONSTRAÇÃO - Para $p = \infty$ o resultado é imediato. Seja pois $1 \leq p < \infty$; pelo corolário III.2.4.1 temos

$$\|g*f\|_p = \left[\int |(g*f)(x)|^p dx\right]^{1/p} = \left[\int \left|\int g(x-y)f(y)dy\right|^p dx\right]^{1/p} \leq$$

$$\leq \int \left[\int |g(x-y)f(y)|^p dx\right]^{1/p} dy = \|g\|_p \|f\|_1 .$$

LEMA 1.5 - Seja $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$; temos $\lim\limits_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$.

DEMONSTRAÇÃO - Lembremos que para todo $h \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$(\tau_h f)(x) = f(x-h) \text{ onde } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dado $\varepsilon > 0$, pelo Corolário III.2.3.3 existe $\phi \in K(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f-\phi\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Então $\|\tau_h f - \tau_h \phi\|_p = \|\tau_h(f-\phi)\|_p = \|f-\phi\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$ e portanto

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h f - \tau_h \phi\|_p + \|\tau_h \phi - \phi\|_p + \|\phi - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|\tau_h \phi - \phi\|_p + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por hipótese ϕ é nula fora de um compacto K. Seja I um intervalo aberto limitado que contém K, seja $|I|$ o seu volume e $\delta > 0$ a distância de K a CI. Sendo ϕ uniformemente contínua, dado

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3|I|^{1/p}} > 0$$

existe $\delta' > 0$ tal que para $\|h\| \leq \delta'$ temos $|\phi(x-h)-\phi(x)| \leq \varepsilon'$. Tomando então $\|h\| \leq \inf(\delta,\delta')$ temos

$$\|\tau_h\phi-\phi\|_p = \left[\int |\phi(x-h)-\phi(x)|^p dx\right]^{1/p} \leq \left[\int_I (\varepsilon')^p dx\right]^{1/p} = |I|^{1/p}\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}.$$

TEOREMA 1.6 - Sejam $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então existe $f*g$ que é uniformemente contínua e limitada com

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

DEMONSTRAÇÃO - $f*g$ existe e é limitada pois se

$$F(x,y) = f(x-y)g(y)$$

então de $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ segue pela desigualdade de Hölder que $F^x \in L_1(\mathbb{R}^n)$ e que $\|F^x\|_1 = |(f*g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Provemos que $f*g$ é uniformemente contínua. Como temos $f*g = g*f$ (ver o exercício 1) podemos supor que $p < \infty$. Dado $h \in \mathbb{R}^n$ temos

$$(f*g)(x+h)-(f*g)(x) = \int \left[f(x+h-y)-f(x-y)\right] g(y)\,dy.$$

Portanto pela desigualdade de Hölder temos

$$|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)| \leq \int |f(x+h-y)-f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \leq$$

$$\leq \left[\int |f(x+h-y)-f(x-y)|^p dy\right]^{1/p} \|g\|_{p'} = \|\tau_{x+h}f^s - \tau_x f^s\|_p \|g\|_{p'}$$

onde $f^s(z) = f(-z)$. O resultado segue pois do Lema 1.5.

*TEOREMA 1.7 - Sejam $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então $f*g$ é uma função contínua que tende para zero no infinito.

DEMONSTRAÇÃO - No teorema 1.6 já demonstramos que $f*g$ é uma função uniformemente contínua limitada. Pelo Corolário III 2.3.2, dado $\varepsilon > 0$ existe uma função em patamar.

$$\psi = \sum_{j=1}^{r} c_j \chi_{I_j},$$

onde cada I_j é um intervalo limitado, tal que

$$\|g-\psi\|_{p'} \le \frac{\varepsilon}{2\|f\|_p}$$

e pelo teorema 1.6 temos $\|f*g-f*\psi\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}$. É pois suficiente demonstrar que $f*\psi$ tende para zero no infinito [□]. Evidentemente basta demonstrar isto quando $\psi = \chi_I$ onde I é um intervalo limitado. Temos

$$(f*\chi_I)(x) = \int_I f(x-y)\,dy = \int_I f^s(y-x)\,dy = \int_{\tau_x I} f^s(y)\,dy$$

e portanto

$$|(f*\chi_I)(x)| \le |I|^{1/p'}\left[\int_{\tau_x I} |f^s(y)|^p dy\right]^{1/p} \quad [□].$$

De $f^s \in L_p(\mathbb{R}^n)$ segue-se que

$$\lim_{k\to\infty} \left[\int_{\|y\|\geq k} |f^s(y)|^p dy\right]^{1/p} = 0 \ [\square]$$

e portanto

$$\left[\int_{\tau_x I} |f^s(y)|^p dy\right]^{1/p}$$

se torna arbitrariamente pequeno para $\|x\|$ suficientemente grande $[\square]$, o que completa a demonstração.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>5</u> - Lembremos que dado $1 \leq p \leq \infty$ e $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, escrevemos $f\in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ se para todo intervalo limitado $I\subset\mathbb{R}^n$ temos $f\in L_p(I)$. Escrevemos $f\in L_{p,c}(\mathbb{R}^n)$ se $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$ e se f é nula q.s. fora de um conjunto compacto. Demonstrar que se $L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $g\in L_{p',c}(\mathbb{R}^n)$ então $f*g$ está definida em todo $\mathbb{R}^n$ e é contínua.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>6</u> - Seja $f\in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $g\in L_{p',c}(\mathbb{R}^n)$ temos $f*g = 0$; demonstrar que então $f = 0$ q.s. [Sugestão: para todo intervalo $I\subset\mathbb{R}^n$ considerar $g = \chi_I$; aplicar o corolário I.5.2.1].

* <u>EXERCÍCIO</u> <u>7</u> - Seja $f\in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ temos $f*\phi = 0$; demonstrar que $f = 0$ q.s.

1.2 - <u>SEQUÊNCIAS</u> <u>DE</u> <u>DIRAC</u>

Dada uma função $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$ definimos:

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \ldots, \frac{x_n}{\varepsilon}\right);$$

é imediato que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \text{ e que } \|f_\varepsilon\|_1 = \|f\|_1.$$

TEOREMA 1.8 - Seja $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ com

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1;$$

dado $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, temos

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|g * f_\varepsilon - g\|_p = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO - Temos

$$\|g*f_\varepsilon - g\|_p = \left[\int |(g*f_\varepsilon)(x) - g(x)|^p dx\right]^{1/p} = \left[\int \left|\int g(x-y) f_\varepsilon(y)\,dy - g(x)\right|^p dx\right]^{1/p}$$

$$= \left[\int \left|\int \left[g(x-y) - g(x)\right] f_\varepsilon(y)\,dy\right|^p dx\right]^{1/p} \overset{(M)}{\le} \int \left[\int |g(x-y) - g(x)|^p |f_\varepsilon(y)|^p dx\right]^{1/p} dy$$

$$= \int \|\tau_y g - g\|_p |f_\varepsilon(y)|\,dy = \int_{\|y\| \le \delta} \|\tau_y g - g\|_p |f_\varepsilon(y)|\,dy + \int_{\|y\| \ge \delta} \|\tau_y g - g\|_p |f_\varepsilon(y)|\,dy$$

$$\le \sup_{\|y\| \le \delta} \|\tau_y g - g\|_p \, \|f_\varepsilon\|_1 + 2\|g\|_p \int_{\|y\| \ge \delta} |f_\varepsilon(y)|\,dy$$

$$= \sup_{\|y\| \le \delta} \|\tau_y g - g\|_p \, \|f\|_1 + 2\|g\|_p \int_{\|y\| \ge \delta/\varepsilon} |f(y)|\,dy$$

onde na passagem $\overset{(M)}{\leq}$ aplicamos o Corolário III.2.4.1. Do Lema 1.5 segue-se que dado $\varepsilon'>0$ existe $\delta>0$ tal que para

$$\|y\| \leq \delta \text{ temos } \|\tau_y g-g\|_p \; \|f\|_1 \leq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Além disto de $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ segue-se que para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno temos

$$2\|g\|_p \int_{\|y\|\geq\delta/\varepsilon} |f(y)|dy \leq \frac{\varepsilon'}{2}$$

donde se segue o resultado pois ε' é arbitrário.

TEOREMA 1.9 - Sejam $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ com

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$$

e $g\in L_\infty(\mathbb{R}^n)$; temos $g*f_\varepsilon \xrightarrow{u} g$ quando $\varepsilon\downarrow 0 \iff g$ é uniformemente contínua.

DEMONSTRAÇÃO $\Longrightarrow$ No Teorema 1.6 vimos que $g*f_\varepsilon$ é uniformemente contínua e limitada. Portanto se g é o limite uniforme das funções $g*f_\varepsilon$ quando $\varepsilon\downarrow 0$ então g é uniformemente contínua.

$\Longleftarrow$ Seja g uniformemente contínua (e limitada). Dado $x\in\mathbb{R}^n$ e $\delta>0$ temos

$$|(g*f_\varepsilon)(x)-g(x)| = \left|\int g(x-y)f_\varepsilon(y)dy-g(x)\right| = \left|\int \Big[g(x-y)-g(x)\Big]f_\varepsilon(y)dy\right| \leq$$

$$\leq \int_{\|y\|\leq\delta} |g(x-y)-g(x)|\,|f_\varepsilon(y)|dy + \int_{\|y\|\geq\delta} |g(x-y)-g(x)|\,|f_\varepsilon(y)|dy$$

$$\leq \sup_{\|y\|\leq\delta} |g(x-y)-g(x)| \;\|f\|_1 + 2\|g\|_\infty \int_{\|y\|\geq\delta/\varepsilon} |f(y)|dy.$$

Sendo g uniformemente contínua, dado $\varepsilon'>0$ existe $\delta>0$ tal que para $\|y\|\leq\delta$ o 1º somando da última somatória é $\leq\frac{\varepsilon'}{2}$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$. Como $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ então para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno também o 2º somando se torna $\leq\frac{\varepsilon'}{2}$ donde se segue o resultado.

<u>DEFINIÇÃO</u> - Uma sequência $f_k\in L_1(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz as propriedades (D_1), (D_2) e (D_3) que seguem se chama *sequência de Dirac* ou *sequência δ-convergente.*

(D_1) - $\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx \longrightarrow 1$ quando $k \longrightarrow \infty$

(D_2) - $\sup_{k\in N} \|f_k\|_1 < \infty$

(D_3) - Para todo $\varepsilon>0$ temos $\int_{\|x\|\geq\varepsilon} |f_k(x)|dx \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$.

<u>EXEMPLO</u> - Tomando uma sequência $\varepsilon_k\downarrow 0$, a sequência f_{ε_k} dos teoremas 1.8 e 1.9 é uma sequência de Dirac [ ] (veja também a Proposição II.7.2).

Os dois teoremas que seguem tem demonstração análoga à dos teoremas 1.8 e 1.9 respectivamente.

<u>TEOREMA 1.8 bis</u> - Seja f_k uma sequência de Dirac de $\mathbb{R}^n$ e se

ja $1 \leq p < \infty$. Para todo $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\lim_{k\to\infty} \|g*f_k-g\|_p = 0 \quad [\square].$$

TEOREMA 1.9 bis - Seja f_k uma sequência de Dirac de $\mathbb{R}^n$ e $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Então $g*f_k \xrightarrow{u} g$ se e somente se g é uniformemente contínua. $[\square]$

* EXERCÍCIO 8 - Seja $1 \leq p < \infty$ e $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Demonstrar que existe uma sequência de funções infinitamente deriváveis $g_k \in L_p(\mathbb{R}^n)$ tais que $\|g_k-g\|_p \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$. [Sugestão: tomar $g_k = f_k*g$ onde f_k é uma sequência de Dirac formada por funções infinitamente deriváveis].

* EXERCÍCIO 9 - Seja $1 \leq p < \infty$ e $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Demonstrar que existe uma sequência $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|\phi_k-g\|_p \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$. [Sugestão: mostrar que $\|g\chi_{B_m}-g\|_p \longrightarrow 0$ quando $m \longrightarrow \infty$ onde $B_m = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq m\}$ (ver a Proposição II.2.1); tomar uma sequência de Dirac conveniente $f_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, mostrar que

$$f_k*(g\chi_{B_m}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

(ver a Proposição II.7.2) e que $\|f_k*(g\chi_{B_m})-g\chi_{B_m}\|_p \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$, etc.].

APLICAÇÕES - I: *Seja* $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função uniformemente contínua e limitada; para todo* $t>0$ *definimos*

$$(1) \qquad u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right] ds.$$

Então u *é uma função contínua em* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ *que é infinitamente derivável para* $t>0$, *que satisfaz a* equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *e que é tal que* $u(x,0)=u_0(x)$, *mais precisamente, temos* $u_t \longrightarrow u_0$ *uniformemente quando* $t\downarrow 0$ (*onde, lembremos,* $u_t(x)=u(x,t)$).

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que $u(x,t)$ está bem definido para todo $x\in\mathbb{R}$ e $t>0$.

a) Demonstraremos inicialmente que $u_t \longrightarrow u_0$ uniformemente. Seja $f(x)=e^{-\pi s^2}$, então

$$f\in L_1(\mathbb{R}) \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds = 1 \text{ ; para todo } \varepsilon>0 \text{ seja } f_\varepsilon(s)=\frac{1}{\varepsilon}\, f\left(\frac{s}{\varepsilon}\right).$$

Pelo teorema 1.9 temos $u_0 * f_\varepsilon \xrightarrow{u} u_0$ quando $\varepsilon\downarrow 0$ e tomando $\varepsilon = 2a\sqrt{\pi t}$ temos

$$f_\varepsilon(s) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\pi\left(\frac{s}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2\right] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{s^2}{4a^2 t}\right];$$

portanto

$$u(x,t) = (u_0 * f_{2a\sqrt{\pi t}})(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-s)\exp\left[-\frac{s^2}{4a^2t}\right]ds =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right]ds.$$

b) Do Exercício 4 do §6 do Capítulo II segue-se que u é infinitamente derivável, o que completa a demonstração das afirmações acima. ▯

Mais geralmente, *se* $u_0 \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, *a função* u *dada por* (1) *está bem definida* [□] *e do Teorema 1.8 segue-se que*

$$u_t \xrightarrow{L_p(\mathbb{R})} u_0$$

quando $t \downarrow 0$. *Pode-se ainda demonstrar que para* $t>0$ *a função* u *é infinitamente derivável e satisfaz a equação do calor* (para $p=1$ a demonstração está feita na aplicação a do Exemplo 6 do §6 do capítulo II; para $p>1$ ver o exercício que segue).

* <u>EXERCÍCIO</u> <u>10</u> - Se $u_0 \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, demonstrar que u é infinitamente derivável se $t>0$.[Sugestão: para $|x|<n$ e $t>\tau>0$ temos

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left|u_0(s)\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right]\right| \leq g(s)$$

onde

$$g(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}}|u_0(s)|\exp\left[-\dfrac{(s+n)^2}{4a^2\tau}\right] & \text{se } s \leq -n \\ \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}}|u_0(s)| & \text{se } |s| \leq n \\ \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}}|u_0(s)|\exp\left[-\dfrac{(s-n)^2}{4a^2\tau}\right] & \text{se } s \geq n \end{cases}$$

Demonstrar que $g \in L_1(\mathbb{R})$; achar uma majoração análoga para as derivadas de u].

II: *Seja* $u_0 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função uniformemente contínua e limitada.*

Para $y>0$ *definimos*

(2) $$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)\ \frac{y}{(x-s)^2+y^2}\ ds;$$

então u *é uma função contínua em* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ *que é infinitamente derivável para* $y>0$, *que é harmônica, isto é, satisfaz* $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}=0$ *e tal que* $u(x,0)=u_0(x)$, *mais precisamente,* $u_y \longrightarrow u_0$ *uniformemente quando* $y\downarrow 0$.

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que u está bem definida para $y>0$.

a) Demonstremos inicialmente que $u_y \xrightarrow{u} u_0$ quando $y\downarrow 0$. Seja $f(s)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{s^2+1}$; temos

$$f\in L_1(\mathbb{R}) \ \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds = 1.$$

Para todo $y>0$ seja $f_y(s)=\frac{1}{y}\ f\left(\frac{s}{y}\right)=\frac{1}{\pi}\ \frac{y}{s^2+y^2}$; pelo teorema 1.9 temos $u_0 * f_y \xrightarrow{u} u_0$ quando $y\downarrow 0$ e por outro lado temos

$$(u_0 * f_y)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-s)\ \frac{y}{s^2+y^2}\ ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)\ \frac{y}{(x-s)^2+y^2}\ ds = u(x,y).$$

b) Do Exercício 5 do §6 do Capítulo II segue-se que a função u é infinitamente derivável, o que completa a demonstração das afirmações acima. □

Mais geralmente, *se* $u_0\in L_p(\mathbb{R})$, $1\le p<\infty$, *a função* u *dada por* (2) *está bem definida* [□] *e do Teorema 1.8 segue-se que*

$$u_y \xrightarrow{L_p(\mathbb{R})} u_0$$

quando $y \downarrow 0$. *Pode-se demonstrar que para* $y > 0$ *a função* u *é infinitamente derivável (e harmônica)*; para $p = 1$ a demonstração está feita na aplicação b do Exemplo 6 do §6, Capítulo II; para $p > 1$ ver o exercício que segue.

* EXERCÍCIO 11 - Com a notação acima, quando $u_0 \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, demonstrar que u é infinitamente derivável. [Sugestão: ver o Exercício 10].

*TEOREMA 1.10 - Sejam $1 \leq p < \infty$ e $f, g \in \mathcal{L}_p([a,b])$; são equivalentes as propriedades:

1) $f(t) = c + \int_a^t g(s)ds$ para quase todo $t \in [a,b]$

2) $\frac{1}{\varepsilon}[\tau_\varepsilon f - f] \longrightarrow g$ em $\mathcal{L}_p([a,b])$ quando $\varepsilon \to 0$, isto é,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^b \left| \frac{1}{\varepsilon}[f(t-\varepsilon) - f(t)] - g(t) \right|^p dt \right]^{1/p} = 0$$

3) Para todo $\phi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ temos

$$\int_a^b f(t)\phi'(t)dt = -\int_a^b g(t)\phi(t)dt.$$

OBSERVAÇÃO - Lembremos que $\mathcal{L}_p([a,b]) \subset \mathcal{L}_1([a,b])$ e portanto pelo Teorema de Lebesgue do Apêndice B do Capítulo II a propriedade 1) equivale a dizer que existe $f_0 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ absolutamente contínua tal que $f = f_0$ q.s. e $f_0' = g$ q.s. Lembremos ainda que dado um espaço de Banach E de funções definidas na reta tal que para $f \in E$ temos $\tau_h f \in E$ para todo $h \in \mathbb{R}$ (onde $(\tau_h f)(t) = f(t-h)$, o transladado h de f), então dizemos que $g \in E$ é a derivada de f no sentido de espaços de Banach se

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \frac{1}{\varepsilon}[\tau_\varepsilon f - f] - g \right\| = 0.$$

No caso do espaço de Banach $E = L_p([a,b])$ tomamos as funções $f \in E$ e suas transladadas nulas fora de $[a,b]$. Lembremos finalmente que dadas funções $f, g \in \mathcal{L}_1^{loc}(]a,b[)$ dizemos que g é a derivada de f no sentido da teoria das distribuições de Laurent Schwartz se vale 3) acima.

O teorema 1.10 exprime portanto a igualdade de três noções de derivada no espaço $\mathcal{L}_p([a,b])$: a noção de derivada no sentido do Teorema de Lebesgue, a noção de derivada no sentido de espaços de Banach com translações e a noção de derivada no sentido da teoria das distribuições.

<u>DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.10</u> - 1) $\Longrightarrow$ 2): de

$$f(t) = c + \int_a^t g(s)ds$$

para quase todo $t \in [a,b]$ segue-se que

$$\frac{1}{\varepsilon}[f(t+\varepsilon) - f(t)] = \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} g(s)ds = \left(\frac{1}{\varepsilon}\chi_{[-\varepsilon,0]} * g\right)(t) \text{ q.s. } [\square]$$

e pelo Teorema 1.8 temos $\frac{1}{\varepsilon}\chi_{[-\varepsilon,0]} * g \xrightarrow{L_p} g$ $[\square]$.

2) $\Longrightarrow$ 3): seja $\phi \in \mathcal{D}(]a,b[)$; ϕ sendo de $\mathcal{L}_{p'}([a,b])$ segue-se de 2) que

$$\int_a^b \left\{\frac{1}{\varepsilon}[f(t+\varepsilon)-f(t)]-g(t)\right\}\phi(t)dt \longrightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Temos

$$\int_a^b \frac{1}{\varepsilon}[f(t+\varepsilon)-f(t)]\phi(t)dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(s)\phi(s-\varepsilon)ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b f(s)\phi(s)ds =$$

$$= -\int_a^b f(s)\left\{\frac{1}{-\varepsilon}[\phi(s)-\phi(s-\varepsilon)]\right\}ds$$

onde tomamos $|\varepsilon|$ tão pequeno de modo que ϕ é nula fora de $[a+|\varepsilon|,b-|\varepsilon|]$; então a última integral tende para

$$-\int_a^b f(s)\phi'(s)ds \text{ pois } \frac{1}{-\varepsilon}[\phi(s)-\phi(s-\varepsilon)]$$

tende para $\phi'(s)$ *uniformemente em* $[a,b]$ [□]. Portanto temos 3).

3) $\Longrightarrow$ 1): Seja

$$G(t) = \int_a^t g(s)ds,$$

usando integração por partes temos

$$\int_a^b g(t)\phi(t)dt = -\int_a^b G(t)\phi'(t)dt$$

e portanto

$$\int_a^b [f(t)-G(t)]\phi'(t)dt = 0$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}([a,b])$. Seja $F(t) = f(t)-G(t)$ e seja $c \in C$ tal

que

$$\int_a^b [F(t)-c]dt = 0.$$

Evidentemente temos

$$\int_a^b \phi'(t)dt = 0 \text{ para todo } \phi \in \mathcal{D}([a,b])$$

e portanto

$$\int_a^b [F(t)-c]\phi'(t)dt = 0 \text{ para todo } \phi \in \mathcal{D}([a,b]).$$

Vamos demonstrar que $F(t) = c$ q.s., donde se segue 1). Dada qualquer função

$$\theta \in \mathcal{D}(]a,b[) \text{ com } \int_a^b \theta(t)dt = 1$$

então para todo $\phi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ temos

$$\phi - \theta \int_a^b \phi(s)ds = \psi' \text{ onde } \psi \in \mathcal{D}(]a,b[)$$

e portanto

$$\int_a^b [F(t)-c]\phi(t)dt = \int_a^b [F(t)-c]\psi'(t)dt + \int_a^b \phi(t)dt \int_a^b [F(t)-c]\theta(t)dt =$$

$$= \int_a^b \phi(t)dt \int_a^b [F(t)-c]\theta(t)dt.$$

Esta igualdade vale para qualquer

$$\theta \in \mathcal{D}(]a,b[) \text{ com } \int_a^b \theta(t)dt = 1$$

enquanto que o 1º membro da igualdade não depende de θ. Tomando então uma sequência limitada de funções

$$\theta_n \in \mathcal{D}(]a,b[) \text{ com } \int_a^b \theta_n(t)dt = 1 \text{ e tal que } \theta_n \longrightarrow \frac{1}{b-a}\,\chi_{]a,b[}$$

segue-se pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_a^b [F(t)-c]\theta_n(t)dt \longrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b [F(t)-c]dt$$

e esta última integral é nula pela escolha de c. Portanto temos

$$\int_a^b [F(t)-c]\phi(t)dt = 0 \text{ para todo } \phi \in \mathcal{D}(]a,b[).$$

Da Proposição II.7.2 segue-se que o mesmo vale para todo

$$\phi \in K(]a,b[);$$

do Corolário I.5.2.3 segue-se então que $F = c$ q.s. □

§2 - A TRANSFORMAÇÃO DE FOURIER DE FUNÇÕES INTEGRAVEIS

Em todo este § consideramos funções complexas $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$. *Lembremos que uma função complexa* f *é integrável se suas partes real e imaginária forem integráveis, ou, equivalentemente, se suas partes real e* *imaginária forem mensuráveis e* $|f|$ *integrável.* [□]

Lembremos que no Capítulo II, §5, Exemplo 3 definimos a *transformada de Fourier* de uma função $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ por

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i t\xi}dt, \ \xi\in\mathbb{R}^n, \text{ onde } t\cdot\xi = \sum_{j=1}^{n} t_j\xi_j,$$

Muitas vezes escrevemos $\mathcal{F}_t[f(t)]$ em vez de $\mathcal{F}f$ ou $\hat{f}$. De modo análogo definimos a *transformada de Fourier conjugada* por

$$(\overline{\mathcal{F}}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{2\pi i t\xi}dt, \ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

<u>OBSERVAÇÃO 1</u> - Para a transformada de Fourier conjugada valem resultados análogos que para a transformada de Fourier com demonstração semelhante e não os enunciamos no que segue.

<u>TEOREMA 2.1</u> - Seja $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$; então temos

1) A função $\xi\in\mathbb{R}^n \longrightarrow \hat{f}(\xi)\in\mathbb{C}$ é contínua e tende para zero quando $\|\xi\| \longrightarrow \infty$; $\hat{f}$ é portanto uniformemente contínua e limitada

2) Para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ temos $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n}|f(t)|dt$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Ver Capítulo II, §5, Exemplo 3 e Teorema II. 7.3.

<u>COROLÁRIO 2.1.1</u> - Sejam $f,f_k\in L_1(\mathbb{R}^n)$, $k\in\mathbb{N}$, tais que

$$f_k \xrightarrow{L_1(\mathbb{R}^n)} f; \text{ então } \hat{f}_k \xrightarrow{u} \hat{f}.$$

EXERCÍCIO 1 - Seja $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$; demonstrar que

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \pi t\xi dt = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|\xi|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen} \pi t\xi dt = 0.$$

EXERCÍCIO 2 - Seja $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$, demonstrar que seus coeficientes de Fourier

$$c_k[f] = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}dt, \; k \in Z,$$

tendem para zero quando $|k| \longrightarrow \infty$ *(o Lema de Riemann-Lebesgue)*.

EXEMPLOS - 1. Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado, temos

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi}\left[e^{-2\pi ia\xi} - e^{-2\pi ib\xi}\right].$$

De fato:

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\xi) = \int_a^b e^{-2\pi it\xi}dt = \frac{-1}{2\pi i\xi}\, e^{-2\pi it\xi}\Big|_{t=a}^{t=b} = \ldots$$

Como caso particular vem

(1) $$\hat{\chi}_{[-a,a]}(\xi) = \frac{\operatorname{sen} 2\pi a\xi}{\pi\xi}$$

2. Dada uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow C$ definimos a sua *simetrica* f^s por $f^s(t) = f(-t)$. Seja $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$; é imediato que

(2) $$\widehat{f^s} = \hat{f}^s, \; \overline{F}f = Ff^s$$

(3) Se f é par, isto é, $f^s = f$, então $\overline{F}f = Ff$

3. Lembremos que Y indica a função característica do intervalo $[0,\infty[$; temos

(4) $$\mathcal{F}_t[Y(t)e^{-t}](\xi)=\frac{1}{1+2\pi i\xi},\ \xi\in\mathbb{R}$$

De fato:

$$\mathcal{F}_t[Y(t)e^{-t}](\xi) = \int_0^\infty e^{-t}e^{-2\pi it\xi}dt = \frac{1}{1+2\pi i\xi}$$

4. Consideremos a função $f(t)=e^{-|t|}$ e seja

$$g(t) = Y(t)e^{-t}.$$

Então temos $f=g+g^s$ e de (2) e (4) segue-se que

$$\mathcal{F}_t[e^{-|t|}](\xi) = \hat{g}(\xi)+\hat{g}^s(\xi) = \frac{1}{1+2\pi i\xi}+\frac{1}{1-2\pi i\xi} = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$$

isto é, demonstramos que

(5) $$\mathcal{F}_t[e^{-|t|}](\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2},\ \xi\in\mathbb{R}$$

5. Dados $f_1,\dots,f_n\in\mathfrak{L}_1(\mathbb{R})$ seja

$$f(t_1,\dots,t_n) = f_1(t_1)\dots f_n(t_n);$$

então temos $f\in\mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n)$ e

$$\hat{f}(\xi_1,\dots,\xi_n) = \hat{f}_1(\xi_1)\dots\hat{f}_n(\xi_n),\ \xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n.\ [\square]$$

6. Seja $f\in\mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n)$ e $h\in\mathbb{R}^n$, temos

(6) $$\hat{f}(\xi+h) = \mathcal{F}_t[e^{-2\pi ith}f(t)](\xi)\quad [\square]$$

(7) $$F_t[f(t+h)](\xi) = e^{2\pi ih\xi}\hat{f}(\xi) \quad [\square]$$

7. Seja $f \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda > 0$; temos

(8) $$\hat{f}(\lambda\xi) = \frac{1}{\lambda^n} F_t[f(\tfrac{t}{\lambda})](\xi) \quad [\square]$$

(9) $$F_t[f(\lambda t)](\xi) = \frac{1}{\lambda^n}\hat{f}(\tfrac{\xi}{\lambda}) \quad [\square]$$

EXERCÍCIO 3 - Calcular a transformada de Fourier das seguintes funções:

$f(t) = e^{-a|t|}$ $(a>0)$, $f(t) = e^{-a|t-b|}$ $(a>0)$, $f(t) = Y(t-b)e^{-t}$

[Sugestão: aplicar (1) e (9)].

TEOREMA 2.2 - Seja $f \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R})$ tal que existe q.s. f' com

$$f' \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R})$$

e tal que

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt, \text{ isto é, } f \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R})$$

é uma função absolutamente contínua (conforme o Teorema de Lebesgue no Apêndice B do Capítulo II). Então temos

(10) $$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i\xi\hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

DEMONSTRAÇÃO - De $f' \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R})$ segue-se que

$$\widehat{f'}(\xi) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-2\pi it\xi}dt = \lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{x} f'(t)e^{-2\pi it\xi}dt =$$

$$\overset{(\mathrm{I})}{=} \lim_{x\to\infty}\left[f(t)e^{-2\pi it\xi}\Big|_{t=-x}^{t=x} + 2\pi i\xi\int_{-x}^{x} f(t)e^{-2\pi it\xi}dt\right]$$

onde na passagem (I) usamos a fórmula de integração para partes (conforme o Exercício 5 do Apêndice B do Capítulo II). O 2º somando do 2º membro acima tende para $2\pi i\xi\hat{f}(\xi)$ quando $x \longrightarrow \infty$. Resta pois demonstrar que o 1º somando tende para zero. Isto é imediato pois de $f'\in\mathfrak{L}_1(\mathbb{R})$ segue-se que existem os limites

$$f(\infty) = f(0) + \lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt \text{ e } f(-\infty) \quad [\square]$$

e de $f\in\mathfrak{L}_1(\mathbb{R})$ segue-se que estes limites são nulos. $[\square]$

<u>COROLÁRIO 2.2.1</u> - Sob as hipóteses do Teorema 2.2 temos

1) $\xi\hat{f}(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \longrightarrow \infty$

2) $|2\pi\xi\hat{f}(\xi)| \leq \|f'\|_1$ para todo $\xi\in\mathbb{R}$

<u>COROLÁRIO 2.2.2</u> - Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow C$ tal que

$$f, f', \ldots, f^{(m)} \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}) ;$$

temos

1) $\widehat{f^{(m)}}(\xi) = (2\pi i\xi)^m\hat{f}(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}$

2) $\xi^m\hat{f}(\xi) \longrightarrow 0$ quando $|\xi| \longrightarrow \infty$

3) $|(2\pi\xi)^m\hat{f}(\xi)| \le \|f^{(m)}\|_1$ para todo $\xi\in\mathbb{R}$

<u>EXERCÍCIO 4</u> - Calcular a transformada de Fourier de função $f(t) = te^{-|t|}\mathrm{sg}t$ onde $\mathrm{sg}t = 1$ se $t>0$, $\mathrm{sg}t = -1$ se $t<0$, $\mathrm{sg}0 = 0$.

<u>EXERCÍCIO 5</u> - Seja

$$f\in C^{(1)}(\mathbb{R}^n)\cap\mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n) \text{ com } \frac{\partial f}{\partial t_j}\in C(\mathbb{R}^n)\cap\mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n).$$

Demonstrar que $F\left[\frac{\partial f}{\partial t_j}\right](\xi) = 2\pi i\xi_j\hat{f}(\xi)$, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$.

<u>EXERCÍCIO 6</u> - Estender o exercício precedente para derivadas de ordem superior.

Dizemos que uma função $g:\mathbb{R}\longrightarrow C$ é, *rapidamente decrescente no infinito* se para todo $m\ge 1$ temos $t^m g(t)\longrightarrow 0$ quando $|t|\longrightarrow\infty$.

<u>COROLÁRIO 2.2.3</u> - Seja $f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ tal que para todo $m\ge 0$ temos $f^{(m)}\in\mathfrak{L}_1(\mathbb{R})$; então $\hat{f}$ é rapidamente decrescente no infinito [□].

<u>TEOREMA 2.3</u> - Seja $f\in\mathfrak{L}_1(\mathbb{R})$ tal que a função $t\in\mathbb{R}\longrightarrow tf(t)\in C$ é integrável; então temos

1) $\hat{f}\in C_*^{(1)}(\mathbb{R})$ e $\hat{f}'(\xi) = F_t[-2\pi itf(t)](\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}$

2) $|\hat{f}'(\xi)| \le \int_{-\infty}^{\infty}|2\pi tf(t)|dt$ para todo $\xi\in\mathbb{R}$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - ver Capítulo II, §6, Exemplo 4.

<u>COROLÁRIO 2.3.1</u> - Sejam $f\in\mathfrak{L}_1(\mathbb{R})$ e $m\in N$ tal que a função

$t\in\mathbb{R} \longrightarrow t^m f(t)\in C$ seja integrável, então temos

1) $\hat{f}\in C_*^{(m)}(\mathbb{R})$ e $\hat{f}^{(k)}(\xi) = F_t[(-2\pi it)^k f(t)](\xi)$, $k=1,2,\ldots,m$

2) $|\hat{f}^{(k)}(\xi)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |2\pi t|^k |f(t)|dt$, $k=1,2,\ldots,m$.

<u>COROLÁRIO 2.3.2</u> - Seja $f\in\mathfrak{L}_1(\mathbb{R})$ tal que para todo $m\in N$ a função $t\in\mathbb{R} \longrightarrow t^m f(t)\in C$ é integrável, então $\hat{f}\in C_*^{(\infty)}(\mathbb{R})$.

<u>COROLÁRIO 2.3.3</u> - Seja $\phi\in K(\mathbb{R})$; então $\hat{\phi}\in C_*^{(\infty)}(\mathbb{R})$.

<u>EXERCÍCIO 7</u> - Achar a transformada de Fourier das seguintes funções: $f(t) = t^2 e^{-|t|}$, $f(t) = te^{-a|t-b|}$ $(a>0)$.

<u>EXERCÍCIO 8</u> - Seja $f\in\mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n)$ tal que a função

$$t = (t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n \longrightarrow t_j f(t)\in C$$

seja integrável. Demonstrar que existe

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j}\hat{f}(\xi) = F_t[-2\pi it_j f(t)](\xi),\ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

<u>EXERCÍCIO 9</u> - Estender o exercício precedente para derivadas de ordem superior.

<u>EXERCÍCIO 10</u> - Seja $\phi\in K(\mathbb{R}^n)$. Demonstrar que $\hat{\phi}\in C_*^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$.

<u>EXEMPLO 6</u> - $F_t[e^{-\pi t^2}](\xi) = e^{-\pi\xi^2}$, $\xi\in\mathbb{R}$.

De fato: seja $f(t) = e^{-\pi t^2}$, dos Corolários 2.3.2 e 2.2.3 segue-se que $\hat{f}$ é infinitamente derivável e rapidamente decrescente no infinito. É evidente que f também tem estas mesmas propriedades. Temos

$(e^{-\pi t^2})' = -2\pi t e^{-\pi t^2}$, isto é, $f'(t) = -2\pi t f(t)$ e portanto

$$\widehat{f'}(\xi) = F_t[-2\pi t f(t)](\xi) = \frac{1}{i} F_t[-2\pi i t f(t)](\xi).$$

Pelo Teorema 2.3 temos $\frac{1}{i} F_t[-2\pi i t f(t)](\xi) = \frac{1}{i}\, \hat{f}'(\xi)$ e pelo Teorema 2.2 temos $\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$ donde se segue que

$$2\pi i \xi \hat{f}(\xi) = \frac{1}{i}\, \hat{f}'(\xi),$$

isto é, $\hat{f}$ satisfaz a equação diferencial $\hat{f}'(\xi) + 2\pi\xi\hat{f}(\xi) = 0$. Portanto $\hat{f}(\xi) = ce^{-\pi\xi^2}$ com

$$c = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1. \ \square$$

<u>EXERCÍCIO</u> <u>11</u> - Achar a transformada de Fourier das seguintes funções:

$$f(t) = e^{-at^2}\ (a>0),\ f(t) = te^{-t^2},\ f(t) = t^2 e^{-(t-a)^2},\ f(t) = (t^2+1)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

<u>EXERCÍCIO</u> <u>12</u> - Seja $f(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Demonstrar que $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi\|\xi\|^2}$ onde $\xi \in \mathbb{R}^n$. [Sugestão: aplicar o Exemplo 5].

No §1 já demonstramos que o produto de convolução de duas funções de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ é uma função de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$. No que segue vamos demonstrar que a transformação de Fourier leva o produto de convolução num produto ordinário.

<u>TEOREMA 2.4</u> - Sejam $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$; então temos

$$F[f*g](\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

DEMONSTRAÇÃO - Temos

$$F[f*g](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(t)e^{-2\pi it\xi}dt = \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(t-s)g(s)e^{-2\pi it\xi}ds\right]dt$$

$$\overset{(V)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(s)e^{-2\pi i(x+s)\xi}ds\right]dx =$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(s)e^{-2\pi is\xi}ds\right]\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx\right] = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi),$$

onde na passagem (V) fizemos a mudança de variáveis $t - s = x$ (isto é, $t_j - s_j = x_j$, $j=1,2,...,n$).

EXERCÍCIO 13 - Para $a > 0$ definimos $f_a(t) = Y(t)e^{-at}$, $t \in \mathbb{R}$. Calcular $f_a * f_a$ e $f_a * f_b$; achar a sua transformada de Fourier.

PROPOSIÇÃO 2.5 - Sejam $f, g \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n)$; então temos

$$\mathcal{F}[\hat{f}\cdot g](t) = (f*\mathcal{F}g)(t), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

DEMONSTRAÇÃO - Temos $\hat{f}\cdot g \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n)$ pois pelo Teorema 2.1 a função $\hat{f}$ é contínua e limitada. Pelo Teorema de Fubini temos então

$$\overline{F}[\hat{f}\cdot g](t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi)e^{2\pi i\xi t}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(s)e^{-2\pi is\xi}ds\right]g(\xi)e^{2\pi i\xi t}d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(s)\left[\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{2\pi i(t-s)\xi}d\xi\right]ds = \int_{\mathbb{R}^n}(\overline{F}g)(t-s)f(s)ds = [(\overline{F}g)*f](t)$$

$$= (f*\overline{F}g)(t). \quad \square$$

Para a aplicação da teoria da transformação de Fourier na solução de equações diferenciais parciais e em outros problemas vamos demonstrar as *fórmulas de reciprocidade* (ou de inversão) $\overline{F}Ff = f$ e $F\overline{F}f = f$. Quando temos apenas $f \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n)$, estas fórmulas não estão bem definidas pois geralmente não temos $\hat{f} \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n)$: basta ver os exemplos 1 e 3 acima.[□]

<u>TEOREMA 2.6</u> - Seja $f \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\hat{f} \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Então, mudando eventualmente f num conjunto de medida nula, temos para todo $t \in \mathbb{R}^n$ que

$$(\overline{F}Ff)(t) = f(t) \quad \text{e} \quad (F\overline{F}f)(t) = f(t).$$

<u>OBSERVAÇÃO 2</u> - Do Teorema 2.1 segue-se que $\overline{F}Ff$ e $F\overline{F}f$ são contínuas e portanto, mudando eventualmente a função f num conjunto de medida nula, f é contínua.

<u>DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.6</u> - Vamos provar a primeira igualdade; a demonstração da segunda é análoga.

Pela Proposição 2.5 temos

$$(*) \qquad \overline{F}[\hat{f}\cdot g](t) = (f*\overline{F}g(t), \quad t \in \mathbb{R}^n \text{ e } g \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n).$$

Seja $h \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n)$; dado $\varepsilon > 0$ tomemos $g(s) = h(\varepsilon s)$, $s \in \mathbb{R}^n$. Por (9) (aplicado a $\overline{F}$) temos

$$(\overline{F}g)(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^n}(\overline{F}h)(\frac{\xi}{\varepsilon})$$

que indicamos por $(\overline{F}h)_\varepsilon(\xi)$. Tomemos $h(s) = e^{-\pi\|s\|^2}$; Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue o primeiro membro de (*) converge para $(\overline{F}Ff)(t)$ quando $\varepsilon\downarrow 0$ pois

$$\overline{F}_s[\hat{f}(s)h(\varepsilon s)](t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(s)e^{2\pi i st}h(\varepsilon s)ds$$

com $|\hat{f}(s)e^{2\pi i st}h(\varepsilon s)| \leq |\hat{f}(s)|$ onde $|\hat{f}|\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ e $h(\varepsilon s) \longrightarrow h(0) = 1$ quando $\varepsilon\downarrow 0$. Por outro lado, do Exemplo 5 segue-se que

$$(\overline{F}h)(s) = e^{-\pi\|s\|^2}$$

(ver o Exercício 12) e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\overline{F}h)(s)ds = 1.$$

Então pelo Teorema 1.8 temos para o segundo membro de (*) que $f*(\overline{F}h)_\varepsilon \xrightarrow{L_1} f$ quando $\varepsilon\downarrow 0$. Portanto pelo Teorema III.3.1 existe uma sequência $\varepsilon_k\downarrow 0$ tal que para quase todo $t\in\mathbb{R}^n$ temos $[f*(\overline{F}h)_{\varepsilon_k}](t) \longrightarrow f(t)$ donde se segue que para quase todo $t\in\mathbb{R}^n$ temos $(\overline{F}Ff)(t) = f(t)$. $\square$

No fim do §4 daremos outra demonstração do Teorema 2.6 usando a teoria L_2 da transformação de Fourier e não o produto de convolução e a δ-convergência.

<u>EXERCÍCIO</u> <u>14</u> - Achar a transformada de Fourier da função

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

[Sugestão: ver (5) e (8)].

<u>COROLÁRIO 2.6.1</u> - Seja $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\hat{f}=0$, então $f=0$ q.s.

<u>COROLÁRIO 2.6.2</u> - Sejam $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ com $\hat{f}$ ou $\hat{g} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$, então temos

$$\overline{\mathcal{F}}[\hat{f} \cdot \hat{g}] = f * g.$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Das hipóteses segue que $\widehat{f*g} = \hat{f} \cdot \hat{g} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ e portanto $f*g = \overline{\mathcal{F}}[\widehat{f*g}] = \overline{\mathcal{F}}[\hat{f} \cdot \hat{g}]$.

*<u>COROLÁRIO 2.6.3</u> - Seja $f \in \mathcal{K}^{(m)}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \cap C^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ onde $m > \frac{n}{2}$; então $\hat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ (e portanto $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} f = f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} f$).

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Para $j=1,2,\dots,n$ temos

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

e portanto pelo Corolário 4.3.1 que segue temos

$$\left\| \overline{\mathcal{F}} \left[\frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \right] \right\|_2 = \left\| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \right\|_2,$$

que, pelo Exercício 5, implica que a função

$$\xi \in \mathbb{R}^n \longrightarrow |\xi_j|^m |\hat{f}(\xi)| \in \mathbb{R}$$

é de $L_2(\mathbb{R}^n)$: como temos $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R}^n)$ segue-se que a função

$$\xi \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \left(1 + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^m |\hat{f}(\xi)\right) \in \mathbb{R}$$

é de $L_2(\mathbb{R}^n)$. Do Exemplo 5 do Apêndice A do Capítulo II segue facilmente que a função

$$\xi \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \left(1 + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^m\right)^{-1} \in \mathbb{R}$$

é de $L_2(\mathbb{R}^n)$ pois $2m > n$ donde se segue, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, que a função

$$\xi \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^m} \times \left(1 + \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^m\right) \hat{f}(\xi) \in C$$

é de $L_1(\mathbb{R}^n)$ [□].

EXERCÍCIO 15 - Demonstrar que sob as hipóteses do Teorema 2.2 temos $\hat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ (e portanto $\overline{F}Ff = f = F\overline{F}f$). [Sugestão: seguir os passos da demonstração do Corolário 2.6.3].

§3 - APLICAÇÕES ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

No que segue vamos aplicar a teoria da transformação de Fourier para obter fórmulas integrais para as soluções de dois problemas de equações diferenciais parciais.

De modo geral há duas maneiras de proceder para achar estas fórmulas integrais:

1) Aplicam-se as regras de cálculo demonstradas no que precede mesmo sem saber se as condições de sua vali-

dade estão satisfeitas. Uma vez obtida a fórmula integral demonstra-se que efetivamente, sob certas hipóteses, ela dá a solução do problema.

2) Constrõe-se uma teoria em que se sabe a priori que a solução do problema é tal que as regras de cálculo que vão ser usadas para a sua dedução são válidas.

Nós vamos adotar o primeiro procedimento. A teoria das distribuições de Laurent-Schwartz e diversas de suas generalizações são teorias do segundo tipo.

PROBLEMA I - *Procurar a função*

$$u:(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty[\longrightarrow u(x,t)\in\mathbb{R}$$

que seja contínua, que satisfaça a equação do calor

$$(C_1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad \textit{para}\ t>0$$

e a condição inicial

$$(C_2)\qquad u(x,0)=u_0(x)\quad \textit{para todo}\ x\in\mathbb{R},$$

onde u_0 *é tal que* $u_0,\hat{u}_0\in L_1(\mathbb{R})$ (e u_0 é portanto uniformemente contínua tendendo para zero no infinito).

Para achar a fórmula integral da solução u de (C_1) e (C_2) vamos supor, como já dissemos, que são válidas as transformações que fazemos a seguir.

Façamos a transformação de Fourier na variável x, isto é, definimos

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-2\pi i x\xi}dx \quad \text{e} \quad \hat{u}_0(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)e^{-2\pi i x\xi}dx.$$

Aplicando esta transformação na equação (C_1) (isto é, admitindo que $F_x(\frac{\partial u}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t} F_x(u))$ e em (C_2), e usando 1) do Corolário 2.2.2 (com m=2) obtemos o sistema (onde ξ é considerado como parâmetro)

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{u}}{dt}(\xi,t) = a^2(2\pi i\xi)^2\hat{u}(\xi,t) \\ \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{u}}{dt} + 4a^2\pi^2\xi^2\hat{u} = 0 \\ \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

que têm como solução $\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi)e^{-4a^2\pi^2\xi^2t}$. Aplicando a transformação de Fourier conjugada a $\hat{u}$ e lembrando que

$$\overline{F}(\hat{f}\cdot\hat{g}) = f*g$$

(ver Corolário 2.6.3) vem

$$u(x,t) = \overline{F}_\xi[\hat{u}(\xi,t)](x) = [u_0(y) \underset{y}{*} \overline{F}_\xi(e^{-4a^2\pi^2\xi^2t})(y)](x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-y)\overline{F}_\xi[e^{-4a^2\pi^2\xi^2t}](y)dy.$$

Pelo Exemplo 6 de transformada de Fourier temos que

$$\overline{F}_\xi[e^{-\pi\xi^2}](y) = F_\xi[e^{-\pi\xi^2}](y) = e^{-\pi y^2}$$

pois a função $e^{-\xi\pi^2}$ é par((3) do §2). Aplicando então (9) do §2 com $\lambda = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$ temos

$$F_\xi[e^{-4a^2\pi^2\xi^2 t}](y) = F_\xi[e^{-\pi(2a\sqrt{\pi t}\xi)^2}](y) =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\pi\left(\frac{y}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{y^2}{4a^2 t}}$$

e portanto

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-y)\exp\left[-\frac{y^2}{4a^2 t}\right]dy$$

que por uma mudança de variáveis $x-y=s$ fica

$$(\alpha) \qquad u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right]ds$$

Lembremos que *esta fórmula integral dá a solução do problema* (C_1), (C_2) *em condições muito mais gerais do que foi deduzido.* Assim, no Capítulo II, §6, Exemplo 6, aplicação a) demonstramos que quando $u_0 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ então u dada por (α) é, para $t > 0$, infinitamente derivável e satisfaz a equação do calor (C_1). No Exercício 4 (no mesmo local) o mesmo resultado é enunciado para $u_0 \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R})$ e no Capítulo V, §1, Exercício 10 o mesmo resultado é enunciado para $u_0 \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$. Além disto, no Capítulo V, §1. na aplicação I demonstramos que se u_0 é uniformemente contínua e limitada então $u_t \xrightarrow{u} u_0$ quando $t \downarrow 0$ (onde, lembremos, $u_t(x) = u(x,t)$) o que implica que (C_2) está satisfeita [□]. No mesmo local também demonstramos que quando $u_0 \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, temos

$$u_t \xrightarrow{L_p(\mathbb{R})} u_0$$

quando $t \downarrow 0$, o que pode ser interpretado como uma generalização funcional analítica da condição (C_2).

PROBLEMA II - *Procurar uma função*

$$u: (x,y) \in \mathbb{R} \times [0,\infty[\longrightarrow u(x,y) \in \mathbb{C}$$

que seja contínua, que seja harmônica para $y > 0$, *isto é, que satisfaça a* equação de Laplace

$$(L_1) \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \;\; \textit{para} \;\; y > 0$$

e a condição de fronteira

$$(L_2) \qquad u(x,0) = u_0(x) \;\; \textit{para todo} \;\; x \in \mathbb{R}$$

onde u_0 *é tal que* $u_0, \hat{u}_0 \in L_1(\mathbb{R})$.

Novamente para achar a fórmula integral que dá uma solução u de (L_1) e (L_2) vamos aplicar os resultados demons trados precedentemente sem nos preocuparmos se as condições de sua validês estão satisfeitas.

Efetuemos a transformação de Fourier na primeira variável, isto é, tomemos

$$\hat{u}(\xi,y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-2\pi ix\xi}dx \quad e \quad \hat{u}_0(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)e^{-2\pi ix\xi}dx.$$

Fazendo então esta transformação na equação (L_1) (isto é, admitindo que $F_x(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} F_x(u)$) e em (L_2) e aplicando a relação 1) do Corolário 2.2.2 (com $m = 2$) obtemos o sistema (onde consideramos ξ como um parâmetro)

$$\begin{cases} (2\pi i\xi)^2\hat{u}(\xi,y) + \dfrac{d^2\hat{u}}{dy^2}(\xi,y) = 0 \\ \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\hat{u}}{dy^2} - 4\pi^2\xi^2\hat{u} = 0 \\ \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

que tem como solução $\hat{u}(\xi,y) = c_1(\xi)e^{2\pi\xi y} + c_2(\xi)e^{-2\pi\xi y}$ com

$$c_1(\xi) + c_2(\xi) = \hat{u}_0(\xi).$$

Entre as escolhas possíveis para c_1 e c_2 tomemos c_1 tal que $c_1(\xi) = 0$ para $\xi > 0$ e c_2 tal que $c_2(\xi) = 0$ para $\xi < 0$, isto é, tomamos

$$\hat{u}(\xi,y) = \hat{u}_0(\xi)e^{-2\pi|\xi|y}.$$

Esta escolha faz com que $\hat{u}$ se torne integrável como função de ξ. Aplicando a transformação de Fourier conjugada a $\hat{u}$ e lembrando que $\overline{F}[\hat{f}\cdot\hat{g}] = f*g$ (Conforme o Corolário 2.6.3) vem

$$u(x,y) = \overline{F}_\xi[\hat{u}(\xi,y)](x) = [u_0(t) \underset{t}{*} \overline{F}_\xi(e^{-2\pi|\xi|y})(t)](x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-t)\overline{F}_\xi[e^{-2\pi|\xi|y}](t)dt.$$

Pelo Exemplo 4 da transformada de Fourier temos que

$$\overline{F}_\xi[e^{-|\xi|}](t) = F_\xi[e^{-|\xi|}](t) = \frac{2}{1+4\pi^2t^2}$$

pois a função $e^{-|\xi|}$ é par ((3) do §2). Aplicando então (9) do §2 com $h = 2\pi y$ vem

$$F_\xi[e^{-2\pi y|\xi|}](t) = \frac{1}{2\pi y}\,\frac{2}{1+4\pi^2\left(\frac{t}{2\pi y}\right)^2} = \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{y^2+t^2}$$

e portanto

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-t)\,\frac{y}{y^2+t^2}\,dt$$

que por uma mudança de variáveis $x - t = s$ fica

$$(\beta) \qquad u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)\,\frac{y}{y^2+(x-s)^2}\,ds$$

Lembremos que *esta fórmula integral da uma solução do problema* (L_1) e (L_2) *em condições muito mais gerais do que aquelas em que foi deduzida.* Assim, no Capítulo II, §6, Exemplo 6, aplicação b), demonstramos que quando $u_0 \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R})$ então u dada por (β) é, para $y > 0$, infinitamente derivável e satisfaz a equação de Laplace (L_1). No Exercício 5 (no mesmo local) o mesmo resultado é enunciado para $u_0 \in \mathfrak{L}_\infty(\mathbb{R})$ e no Capítulo V, §1, Exercício 13 o mesmo é enunciado para $u_0 \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$. Além disto, no Capítulo V, §1, aplicação II demonstramos que quando u_0 é uniformemente contínua e limitada então $u_y \xrightarrow{u} u_0$ quando $y \downarrow 0$, o que implica que a condição de fronteira (L_2) está satisfeita. No mesmo local também demonstramos que se

$$u_0 \in L_p(\mathbb{R}), \quad 1 \le p < \infty,$$

temos $u_y \xrightarrow{L_p(\mathbb{R})} u_0$ quando $y \downarrow 0$ o que pode ser interpretado como uma generalização funcional-analítica da condição de fronteira (L_2).

Observemos que a solução do sistema (L_1),(L_2) não é única pois se u é uma tal solução então $v(x,y) = u(x,y) + \lambda y$ também é solução do mesmo sistema. Se porém exigirmos que a solução seja limitada então segue do princípio de espelhamento para funções harmônicas que a solução é única (e que é então dada por (β)).

*§4 - A TRANSFORMAÇÃO DE FOURIER DE FUNÇÕES DE $L_2(\mathbb{R}^n)$

A definição de transformada de Fourier que demos no §2 não se aplica às funções de $L_2(\mathbb{R}^n)$ pois $L_2(\mathbb{R}^n) \not\subset L_1(\mathbb{R}^n)$. No que segue vamos mostrar como as noções de transformada de Fourier e de transformada de Fourier conjugada se estendem às funções de $L_2(\mathbb{R}^n)$ e vamos demonstrar que as transformações estendidas, que ainda indicamos por $\mathcal{F}$ e $\overline{\mathcal{F}}$, são isomorfismos recíprocos de $L_2(\mathbb{R}^n)$ sobre si mesmo, isto é, temos $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f$ para todo $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ e $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2 = \|\overline{\mathcal{F}}f\|_2$.

Lembremos que $L_2(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert em relação ao produto interno

$$(f,g) \in L_2(\mathbb{R}^n) \times L_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow (f|g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{g(t)}dt \in \mathbb{C}$$

O presente § é independente dos §§ precedentes exceto quanto às definições e uns poucos resultados elementares.

No que segue vamos precisar da seguinte relação

$$(*) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos 2\pi k\xi}{4\pi^2\xi^2}\, d\xi = \frac{|k|}{2}$$

DEMONSTRAÇÃO - Temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos s}{s^2}\, ds = -\left.\frac{1-\cos s}{s}\right|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } s}{s}\, ds = \pi$$

e basta pois fazer a mudança de variáveis $s = 2\pi k\xi$. ∎

Indiquemos por $X(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial das funções em patamar definidas em $\mathbb{R}^n$, isto é, das funções que são combinações lineares de funções características de hiperparalelepípedos (limitados) de $\mathbb{R}^n$. Temos evidentemente

$$X(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$$

e portanto a transformação de Fourier e a sua conjugada estão definidas para as funções de $X(\mathbb{R}^n)$.

Indiquemos por $X_{L_p}(\mathbb{R}^n)$ o espaço $X(\mathbb{R}^n)$ considerado como subespaço de $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Temos:

<u>TEOREMA 4.1</u> - A transformação de Fourier é uma isometria de $X_{L_2}(\mathbb{R}^n)$ em $L_2(\mathbb{R}^n)$, isto é, para todo $\phi \in X(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\|F\phi\|_2 = \|\phi\|_2 .$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Queremos demonstrar que para $\phi,\psi \in X(\mathbb{R}^n)$ temos $(\hat{\phi}|\hat{\psi}) = (\phi|\psi)$. Por causa da sesquilinearidade do produto interno é suficiente demonstrar esta relação quando ϕ e ψ são funções características de hiperparalelepípedos

$$\left(\prod_{1\leq j\leq n} [a_j, b_j]\right).$$

e pelo Exemplo 5 de transformada de Fourier é suficiente de monstrar a relação quando $n = 1$.

Sejam pois $\phi = \psi_{[a,b]}$ e $\psi = \phi_{[c,d]}$ onde $[a,b],[c,d] \subset \mathbb{R}$. Por um lado temos

$$(\chi_{[a,b]}|\chi_{[c,d]}) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(t)\overline{\chi_{[c,d]}(t)}dt = \ell([a,b]\cap[c,d])$$

(o comprimento de $[a,b]\cap[c,d]$). Por outro lado temos

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi}[e^{-2\pi ia\xi}-e^{-2\pi ib\xi}]$$

e portanto

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\xi)\overline{\hat{\chi}_{[c,d]}(\xi)} = \frac{1}{4\pi^2\xi^2}(e^{-2\pi ia\xi}-e^{-2\pi ib\xi})(e^{2\pi ic\xi}-e^{2\pi id\xi})$$

$$= \frac{1}{4\pi^2\xi^2}[e^{-2\pi i(a-c)\xi}-e^{-2\pi i(a-d)\xi}-e^{-2\pi i(b-c)\xi}+e^{-2\pi i(b-d)\xi}]$$

donde segue que

$$(\hat{\chi}_{[a,b]}|\hat{\chi}_{[c,d]}) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2\xi^2}[\cos 2\pi(a-c)\xi-\cos 2\pi(a-d)\xi-\cos 2\pi(b-c)\xi+\cos 2\pi(b-d)\xi]ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(a-c)\xi-1}{4\pi^2\xi^2}\,d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(a-d)\xi-1}{4\pi^2\xi^2}\,d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(b-c)\xi-1}{4\pi^2\xi^2}\,d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\ (b-d)\xi-1}{4\pi^2\xi^2}\,d\xi = \frac{1}{2}[-|a-c| + |a-d| + |b-c| - |b-d|]$$

por (*). Esta última expressão é igual a $\ell([a,b]\cap[c,d])$ [□] o que termina a demonstração.

PROPOSIÇÃO 4.2 - Sejam $\phi,\psi\in\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, temos $(F\phi|\psi) = (\phi|\overline{F}\psi)$.

DEMONSTRAÇÃO - Exatamente como na prova do Teorema precedente, é suficiente demonstrar a Proposição quando $n=1$ e

$$\phi = \chi_{[a,b]},\ \psi = \chi_{[c,d]}.$$

Temos

$$(F\chi_{[a,b]}|\chi_{[c,d]}) = \int_c^d\left[\int_a^b e^{-2\pi ix\xi}dx\right]d\xi =$$

$$= \int_a^b\overline{\left[\int_c^d e^{2\pi ix\xi}d\xi\right]}dx = (\chi_{[a,b]},\overline{F}\chi_{[c,d]})\ \square$$

Sendo $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ denso em $L_2(\mathbb{R}^n)$ (veja o Corolário III, 2.3.2) segue-se do Teorema4.1 que F e $\overline{F}$ se prolongam em isometrias de $L_2(\mathbb{R}^n)$ em $L_2(\mathbb{R}^n)$. Indiquemos provisoriamente por F_2 e $\overline{F}_2$ estas extensões. Temos a seguinte situação:

sobre $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ está definida F que é contínua de $\mathcal{X}_{L_1}(\mathbb{R}^n)$ em $C^*(\mathbb{R}^n)$; como $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L_1(\mathbb{R}^n)$ (Corolário III.2.3.2) F admite uma extensão contínua F_1 de $L_1(\mathbb{R}^n)$ em $C^*(\mathbb{R}^n)$ a qual coincide com F definida no início deste § pois esta também é contínua (por 2) do Teorema 2.1). Por outro lado temos a extensão contínua F_2 de F a $L_2(\mathbb{R}^n)$. Vamos demonstrar que sobre $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ temos $F_2 = F$, isto é, que se $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ então temos para quase todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ que

$$(F_2 f)(\xi) = (Ff)(\xi)$$

De fato: dado $m \in \mathbb{N}$ seja $f_{[m]} = f\chi_{[m,m]^n}$; pela Proposição II.2.1 temos

$$f_{[m]} \xrightarrow{L_1(\mathbb{R}^n)} f \quad \text{e} \quad f_{[m]} \xrightarrow{L_2(\mathbb{R}^n)} f;$$

pelo Corolário III.2.3.2 existe $\phi_m \in X(\mathbb{R}^n)$ que é nula fora de $[-m,m]^n$ e tal que $\| f_{[m]} - \phi_m \| \leq \frac{1}{(2m)^n}$.

Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\| f_{[m]} - \phi_m \|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[-m,m]^n}(t) \, | f_{[m]}(t) - \phi_m(t) | dt \leq$$

$$\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{[-m,m]^n}(t)|^2 dt \right]^{1/2} \| f_{[m]} - \phi_m \|_2 \leq (2m)^{n/2} \frac{1}{(2m)^n} = \frac{1}{(2m)^{n/2}}$$

e portanto

$$\phi_m \xrightarrow{L_1(\mathbb{R}^n)} f \quad \text{e} \quad \phi_m \xrightarrow{L_2(\mathbb{R}^n)} f$$

donde se segue, respectivamente, pelo Corolário 2.1.1 e pelo Teorema 4.1 que

$$\mathcal{F}\phi_m \xrightarrow{u} \mathcal{F}f \text{ e } \mathcal{F}\psi_m \xrightarrow{L_2(\mathbb{R}^n)} \mathcal{F}_2 f.$$

Pelo Teorema III.3.1 qualquer subsequência da sequência $\mathcal{F}\psi_m$ contém uma subsequência que converge para $\mathcal{F}_2 f$ q.s. o que com $\mathcal{F}\phi_m \xrightarrow{u} \mathcal{F}f$ implica que $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F}f$ q.s. ▯

Um resultado análogo vale para $\overline{\mathcal{F}}_2$. Passamos pois a escrever $\mathcal{F}$ e $\overline{\mathcal{F}}$ em lugar de $\mathcal{F}_2$ e $\overline{\mathcal{F}}_2$.

Seja E um espaço vetorial complexo [real] e

$$B: (x,y) \in E \times E \longrightarrow B(x,y) \in \mathbb{C}[\mathbb{R}]$$

uma forma sesquilinear (i.é. $B(\lambda x, \mu y) = \lambda\bar{\mu}B(x,y)$ e B é aditiva na primeira e na segunda variável) [bilinear simétrica, i.é $B(y,x) = B(x,y)$]. Então vale a *fórmula de polarização*

$$B(x,y) = \frac{1}{4}[B(x+y,x+y) - B(x-y,x-y) + iB(x+iy,x+iy) - iB(x-iy,x-iy)] \;[\square]$$

$$[B(x,y) = \frac{1}{4}[B(x+y,x+y) - B(x-y,x-y)] \;[\square]]$$

<u>TEOREMA 4.3</u> - Para todo $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ temos $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ e $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = f$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Para todo $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ temos pela Proposição 2.8 e por prolongamento contínuo $(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f|f) = (\overline{\mathcal{F}}f|\overline{\mathcal{F}}f) = \|\overline{\mathcal{F}}f\|_2^2$; lembrando que $\overline{\mathcal{F}}$ é uma isometria de $L_2(\mathbb{R}^n)$ em si mesmo segue que $\|\overline{\mathcal{F}}f\|_2 = \|f\|_2$ e portanto temos

$$(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f|f) = (f|f).$$

Da fórmula de polarização segue então que $(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f|g) = (f|g)$ pa ra todo $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ [□] o que implica que $F\overline{F}f = f$ [□]. De modo análogo demonstramos que $\overline{F}Ff = f$ para todo $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. □

<u>COROLÁRIO 4.3.1</u> - F e $\overline{F}$ são isomorfismos recíprocos, um do outro, de $L_2(\mathbb{R}^n)$ sobre si mesmo. [□]

<u>OBSERVAÇÃO</u> - Dado $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ seja $f_{[m]} = f\chi_{[-m,m]^n}$; vimos que

$$f_{[m]} \xrightarrow{L_2(\mathbb{R}^n)} f \text{ quando } m \longrightarrow 0$$

e portanto

$$\widehat{f_{[m]}} \xrightarrow{L_2(\mathbb{R}^n)} \hat{f},$$

isto é

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi) - \int_{[-m,m]^n} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx|^2 d\xi \longrightarrow 0 \text{ quando } m \longrightarrow \infty,$$

fato este que também é escrito como

$$\hat{f}(\xi) = \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{[-m,m]^n} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$$

onde "l.i.m." significa "limit in mean", isto é, "limite em média (quadrática)".

<u>EXERCÍCIO 1</u> - Seja $f(t) = \frac{1}{1+2\pi i t}$, $t \in \mathbb{R}$, achar $\overline{F}f$.
[Sugestão: ver (4) do §2].

<u>EXERCÍCIO 2</u> - Dado $f \in L_2(\mathbb{R})$ demonstrar que em quase todos os pontos $\xi \in \mathbb{R}$ temos

$$\hat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x\xi}-1}{-2\pi i x} f(x)dx.$$

[Sugestão:

$$\hat{f}(\xi) = \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-m}^{m} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{d}{d\xi} \int_0^{\xi}\int_{-m}^{m} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dxd\xi = \ldots]$$

Os resultados deste § isto é, a teoria L_2 da transformação de Fourier, pode ser utilizada para demonstrar a fórmula da reciprocidade da teoria L_1, isto é, o Teorema 2.6. É o que vamos fazer a seguir:

Demonstremos inicialmente a

<u>PROPOSIÇÃO 4.4</u> - Se $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi.$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - O resultado segue imediatamente do Teorema de Fubini:

$$\int f(t)\hat{g}(t)dt = \int f(t)\left[\int g(\xi)e^{-2\pi i\xi t}d\xi\right]dt =$$

$$= \int g(\xi)\left[\int f(t)e^{-2\pi i\xi t}dt\right]d\xi = \int \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi.$$

Vamos agora dar uma nova demonstração do Corolário 2.6.1 a partir dos resultados deste item

<u>TEOREMA 4.5</u> - Se $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\hat{f} = 0$ então $f = 0$ q.s.

DEMONSTRAÇÃO - Pelo Corolário I.5.4.2 é suficiente demonstrar que para todo hiperparalelepípedo

$$J = \prod_{1\leq j\leq n} [a_j, b_j],$$

onde $[a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$, temos

$$\int_J f(t)dt = 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$ seja $\chi_{[a_j,b_j],\varepsilon}(t) = 1$ se $t \in [a_j, b_j]$, nulo se

$$t \leq a_j - \varepsilon \quad \text{ou} \quad t \geq b_j + \varepsilon$$

e linear em $[a_j - \varepsilon, a_j]$ e $[b_j, b_j+\varepsilon]$. Temos

$$\chi'_{[a_j,b_j],\varepsilon}(\xi_j) = 2\pi i \xi_j \chi_{[a_j,b_j],\varepsilon}(\xi_j)$$

e como $\chi'_{[a_j,b_j],\varepsilon}$ é uma função em escada segue-se do Exemplo 1 de transformada de Fourier (§2.1) que a função

$$\xi_j \in \mathbb{R} \longrightarrow \xi_j \widehat{\chi'}_{[a_j,b_j],\varepsilon}(\xi_j) = 2\pi i \xi_j^2 \hat{\chi}_{[a_j,b_j],\varepsilon}(\xi_j) \in \mathbb{C}$$

é limitada e portanto temos $\hat{\chi}_{[a_j,b_j],\varepsilon} \in L_1(\mathbb{R})$ [□]. Definindo

$$\chi_{J,\varepsilon} = \prod_{1\leq j\leq n} \chi_{[a_j,b_j],\varepsilon},$$

do Exemplo 5 de transformada de Fourier (item 2.1) segue-se que $\hat{\chi}_{J,\varepsilon} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, além de termos $\chi_{J,\varepsilon} \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Então temos

$\hat{\chi}_{J,\varepsilon} \in L_2(\mathbb{R}^n)$ além de termos $\chi_{J,\varepsilon} \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 4.1 temos então $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\chi_{J,\varepsilon} = \chi_{J,\varepsilon}$. Da Proposição 4.4 segue-se portanto que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\chi_{J,\varepsilon}(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\chi_{J,\varepsilon}dt = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\cdot\overline{\mathcal{F}}\chi_{J,\varepsilon}dt = 0$$

pois $\hat{f} = 0$. Fazendo então $\varepsilon\downarrow 0$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\chi_{J,\varepsilon}dt \longrightarrow \int_J fdt$$

e portanto

$$\int_J f(t)dt = 0 \quad \square$$

<u>TEOREMA 4.6</u> - Seja $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\hat{f}\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Então temos

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f \text{ q.s.} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = f \text{ q.s.}$$

Demonstremos a primeira igualdade: de $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ segue-se pelo Teorema 2.1 que $\hat{f}$ é contínua e limitada, o que com $\hat{f}\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ implica que $\hat{f}\in\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$ [□]. Seja $f_0 = \overline{\mathcal{F}}\hat{f}$, então pelo Teorema 4.2 temos $f_0\in\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$ e pelo Teorema 2.1 f_0 é contínua e limitada pois $\hat{f}\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 4.4 temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi$$

para todo $g\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ e da Proposição 4.2 segue-se por prolongamento contínuo que temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0(t)\hat{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_0(\xi)g(\xi)d\xi) \text{ para todo } g\in\mathfrak{L}_2(\mathbb{R}^n) \text{ [□]}$$

e a última integral é igual a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi$$

pois $f_0 = \overline{\mathcal{F}}\hat{f}\in\mathfrak{L}_2(\mathbb{R}^n)$ e portanto pelo Teorema 4.3 temos $\mathcal{F}f_0 = \hat{f}$. Daí se segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(t)\hat{g}(t)dt \text{ para todo } g\in\mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n)\cap\mathfrak{L}_2(\mathbb{R}^n)$$

e em particular para $\hat{g} = \chi_{J,\varepsilon}$ (ver a demonstração do Teorema 4.5). Fazendo então $\varepsilon\downarrow 0$ segue-se, como na demonstração do Teorema 4.5, que

$$\int_J (f-f_0)(t)dt = 0$$

para todo hiperparalelepípedo $J\subset\mathbb{R}^n$ e portanto $f = f_0$ q.s., isto é, $f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$ q.s. $\square$

*APÊNDICE

TEORIA DAS PROBABILIDADES

Ainda que a formulação de muitos problemas na teoria das probabilidades se faça através da linguagem da teoria da medida e integração, o seu enfoque, a sua linguagem e os seus teoremas típicos são completamente distintos. No que segue damos alguns resultados típicos da teoria das probabilidades. Para um estudo desta teoria ver as referências [B], [C] e [L].

Uma medida μ, ou mais precisamente $(X,\mathcal{M},\mu)$, com $\mu X=1$ se chama *probabilidade*; o conjunto X se chama *espaço de probabilidades*, os conjuntos $M\in\mathcal{M}$ são chamados *eventos* e os pontos $x\in X$ são chamados *eventos elementares*. Dado $M\in\mathcal{M}$ o número μM se denomina de *probabilidade* de M (ou do evento M). Muitas vezes dizemos *quase certamente* ou μ-*quase certamente* em vez de μ-quase sempre. Em vez de convergência em medida de funções (ver o apêndice B do Capítulo IV) falamos em *convergência em probabilidade*.

Dada uma probabilidade $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $A\in\mathcal{M}$, chama-se *probabilidade condicional de* $M\in\mathcal{M}$ *em relação a* A ao número $\mu_A(M)=\mu(M;A)$ definido por

$$\mu_A(M) = \begin{cases} \mu(A\cap M)/\mu(A) & \text{se } \mu A>0 \\ 0 & \text{se } \mu A=0 \end{cases}$$

$\mu_A(M)$ mede a probabilidade do evento M quando temos o evento A.

Dizemos que dois eventos $M_1 M_2\in\mathcal{M}$ são *independentes* (ou *estocasticamente independentes*) se $\mu(M_1\cap M_2)=(\mu M_1)(\mu M_2)$ ou, equi valentemente [□], $\mu_{M_1}(M_2) = \mu(M_2)$ (e $\mu_{M_2}(M_1) = \mu(M_1)$).

Dizemos que eventos M_k ($k \in N$) são *independentes* (ou *estocasticamente independentes*) se para quaisquer $k_1, \ldots, k_n \in N$ temos

$$\mu\left(\bigcap_{1 \le i \le n} M_{k_i}\right) = \prod_{1 \le i \le n} \mu(M_{k_i}).$$

<u>TEOREMA 1</u> (Critério zero-um de Borel) - Sejam M_k ($k \in N$) eventos independentes, então

$$\mu(\overline{\lim} M_k) = 0 \text{ ou } 1 \text{ conforme temos } \sum_{k=1}^{\infty} \mu M_k < \infty \text{ ou} = \infty.$$

Dada uma probabilidade (X, M, μ), uma função mensurável $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é chamada *variável aleatória* (abreviamos v.a.). Dizemos que variáveis aleatórias f_k ($k \in N$) são *independentes* (ou *estocasticamente independentes*) se dados quaisquer conjuntos borelianos $B_1, \ldots, B_n$ da reta e quaisquer $k_1, \ldots, k_n \in N$ temos

$$\mu\left(\bigcap_{1 \le i \le n} \left\{x \in X \mid f_{k_i}(x) \in B_i\right\}\right) = \prod_{1 \le i \le n} \mu\left\{x \in X \mid f_{k_i}(x) \in B_i\right\}$$

(isto é, para quaisquer conjuntos borelianos B_k ($k \in N$) da reta, os eventos $f_k^{-1}(B_k)$ são independentes).

<u>PROPOSIÇÃO 2</u> - Sejam f e g v.a. independentes, finitas μ-q.s., não nulas μ-q.s. Uma condição necessária e suficiente para que f e g sejam μ-integráveis é que fg seja μ-integrável. Se esta condição está satisfeita temos

$$\int fgd\mu = \int fd\mu \cdot \int gd\mu .$$

Dada uma v.a. $f:X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, o número

$$E(f) = \int_X f(x)d\mu(x),$$

quando existe, é chamado *esperança matemática de* f. O número

$$\sigma^2(f) = \int_X [f-E(f)]^2 d\mu$$

se chama *variança de* f; temos [□]

$$\sigma^2(f) = \int_X f^2 d\mu - \left(\int_X fd\mu\right)^2$$

PROPOSIÇÃO 3 - Se a v.a. f é tal que $\sigma^2(f) = 0$ então temos $f = E(f)$ quase certamente.

PROPOSIÇÃO 4 - Se f e g são v.a. independentes com variança finita então $\sigma^2(f+g) = \sigma^2(f)+\sigma^2(g)$. [□]

O número $\sigma(f) = (\sigma^2(f))^{1/2}$ se denomina *desvio padrão* de f.

PROPOSIÇÃO 5 - Se f e g são v.a. independentes então

$$\sigma(f+g) = \sigma(f)+\sigma(g) \quad [\square]$$

PROPOSIÇÃO 6 (A desigualdade de Markov) - Seja $f:X \longrightarrow [0,\infty]$ uma v.a. com $E(f)$ finito, então

$$\mu\{x\in X|\ f(x) \geq \lambda E(f)\} \leq \frac{1}{\lambda} \text{ para todo } \lambda > 0 \ [\square]$$

PROPOSIÇÃO 7 (A desigualdade de Chebychev) - Seja $f:X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma v.a. com variança finita, então

$$\mu\{x\in X|\ |f(x)-E(f)| > \lambda\sigma(f)\} \leq \frac{1}{\lambda^2} \text{ para todo } \lambda > 0 \quad [\square]$$

A *covariança* entre v.a. f e g é o número

$$\sigma(f,g) = E[(f-E(f))(g-E(g))] = E(fg)-E(f)E(g)$$

Chama-se *coeficiente de correlação* entre as v.a f e g o número $\rho(f,g) = \frac{\sigma(f,g)}{\sigma(f)\sigma(g)}$; temos $-1 \leq \rho(f,g) \leq 1$.

PROPOSIÇÃO 8 - Se f e g são v.a. independentes então o seu suficiente de correlação é nulo

A toda v.a. f está associada uma função monótona crescente $v_f:\mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ definida por $v_f(t) = \mu f^{-1}]-\infty\ ,t[)$ que se chama *função de distribuição* associada à v.a. f. Quando $v_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s)ds$ com $\phi:\mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty]$ mensurável, dizemos que ϕ é a *densidade de probabilidade de* f. Temos

$$E(f) = \int_{-\infty}^{\infty} t dv_f(t) \ [\square] \quad \text{e} \quad \sigma^2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-E(f))^2 dv_f(t) \ [\square]$$

TEOREMA 9 (Lei dos Grandes Números) - Se f_k $(k\in N)$ é uma sequência de v.a. independentes com variança finita tal que existe

$$\lim_{n\to\infty} E(f_n) = a \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sigma_n^2(f) < \infty$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k \right) = a \text{ quase certamente.}$$

Na teoria das probabilidades o seguinte conceito de convergência é importante: dadas v.a. f, f_n ($n \in \mathbb{N}$) sejam v, v_n as respectivas funções de distribuição. Dizemos que a sequência f_n *converge em distribuição* para f se $v_n(t) \longrightarrow v(t)$ em todo ponto $t \in \mathbb{R}$ em que v é contínua.

TEOREMA 10 (Teorema do Limite Central) - Seja f_n, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de v.a. independentes identicamente distribuídas (isto é, que têm a mesma função de distribuição) tais que existem a esperança matemática $E(f_n) = E$ e a variança $\sigma^2(f_n) = \sigma^2$. Consideremos a sequência de v.a.

$$\tilde{f}_n = \frac{f_n^* - E}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ onde } f_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i$$

e seja $\tilde{v}_n$ a função de distribuição de $\tilde{f}_n$. Então para todo $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{v}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-s^2/2} ds$$

e a convergência é uniforme em $\mathbb{R}$.

<u>OBSERVAÇÃO</u> - Na teoria das probabilidades usa-se, em geral, uma notação diferente da precedente que utilizamos na teoria da medida e integração. Assim, o espaço com medida é geralmente indicado por (Ω, A, P), os elementos de Ω são indicados pela letra ω, os de A pelas letras A, B, etc. acompanhadas, eventualmente, de índices. A probabilidade condicional é indicada por $P_A(B)$ ou $P(B|A)$. As variáveis aleatórias são indicadas pelas letras X, Y, Z, etc. eventualmente acompanhadas de índices. $\bar{X} = E(X)$ e $\sigma^2(X)$ indicam portanto respectivamente a esperança matemática e a variança da v.a. X. Escreve-se $P[X \geq Y]$ para indicar $P\{\omega \in \Omega | X(\omega) \geq Y(\omega)\}$. A função de distribuição da v.a. X é indicada por F_X ou F e a medida sobre $\mathbb{R}$ definida por ela (isto é, a lei de probabilidade) é indicada por ν_X ou P_X.

REFERÊNCIAS

[B] - L.Breiman, *Probability*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1968.

[de B] - G.de Barra, *Introduction to Measure Theory*, Van Nostrand Reinhold, 1974.

[C] - Kai Lai Chung, *A course in probability theory*, Academic Press, 1974.

[D] - Djairo Guedes de Figueiredo, *Análise I*, Editora Universidade de Brasília e Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1975.

[E] - Elon Lages Lima, *Curso de Análise*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.

[H] - Thomas Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration*, The University of Wisconsin Press, 1970.

[H-AFA] - Chaim Samuel Hönig, *Análise Funcional e Aplicações*, 2 volumes. Instituto de Matemática e Estatística, USP, 1970.

[H-A I] - Chaim Samuel Hönig, *Análise Matemática*, notas de aula, Instituto de Matemática e Estatística, USP, 1977.

[H-St.L] - Chaim Samuel Hönig, *Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville*, Monografias de Matemática nº 9, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1971.

[H-TA] - Chaim Samuel Hönig, *Aplicações da Topologia à Análise*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.

[K] - G.Klambauer, *Real Analysis*, Elsevier, 1973.

[L] - M.Loève, *Probability theory*, D.Van Nostrand Comp., 1963.

[M] - M.E.Munroe, *Measure and Integration*, Addison-Wesley Publ. Co., 1971.

[R] - H.L.Royden, *Real Analysis*, Macmillan Comp., 1968.
[Z] - Pedro J.Fernandez, *Medida e Integração*, Projeto Euclides, Ins- tituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.

ÍNDICES DE TÓPICOS ESPECIAIS

- ▯ -

ÍNDICE DE NOTAÇÕES

- ¤ -

ÍNDICE ALFABÉTICO