

César Camacho e Alcides Lins Neto
Introdução à Teoria das
Folheações

COPYRIGHT © by CÉSAR CAMACHO E ALCIDES LINS NETO (1977)

Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida,
por qualquer processo, sem a permissão dos autores.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Rua Luiz de Camões, 68
20.000 - Rio de Janeiro - RJ

PREFÁCIO

Um dos objetivos deste livro é apresentar alguns teoremas que representam peças fundamentais no desenvolvimento da teoria das folheações.

Estes teoremas foram escolhidos não somente por sua relevância e profundidade mas também pela sua simplicidade técnica com o intuito de dar ao texto um caráter introdutório.

Motivados pelo teorema de Frobenius, apresentamos no Capítulo I um pequeno curso sobre campos de vetores e formas diferenciais.

O estudo das folheações do ponto de vista global começa com o capítulo II onde apresentamos vários exemplos.

No Capítulo III é introduzida a noção de holonomia e são demonstrados os teoremas de estabilidade de G. Reeb, um dos quais caracteriza uma folheação globalmente toda vez que a topologia de uma folha seja suficientemente simples.

O Capítulo IV é dedicado ao estudo das folheações transversais às fibras de um fibrado. Mostra-se aí o teorema de C. Ehresmann que caracteriza as subvariedades compactas que podem ser folhas de uma folheação local.

No Capítulo V fazemos uma exposição sobre os métodos de A. Halfliger que o levaram a demonstrar que não

existem folheações analíticas de codimensão um em variedades compactas simplesmente conexas.

Estes métodos formam parte também da demonstração do teorema de S.P. Novikov o qual afirma que em variedades compactas, simplesmente conexas, de dimensão três qualquer folheação de classe C^2 e codimensão um possui uma folha compacta. O teorema de Novikov é exposto no Capítulo VI.

No Capítulo VII se estudam folheações geradas por ações (localmente livres) de R^2 . Mostramos aí o teorema de E. Lima: Não existem ações localmente livres de R^2 em S^3 .

O estudo das propriedades assintóticas das folhas de uma folheação teve um dos seus pontos culminantes nos teoremas de Sacksteder. No Capítulo VIII trataremos deste assunto, incluindo também num apêndice uma exposição do exemplo clássico de Denjoy de um fluxo em T^2 com conjuntos minimais excepcionais.

Finalmente, o Capítulo IX trata dos teoremas de Reeb sobre a estrutura topológica das folhas de uma forma diferencial integrável na vizinhança de uma singularidade.

Para a leitura deste texto é necessário um conhecimento elementar da teoria de variedades diferenciáveis e dos teoremas básicos da teoria de grupos fundamentais e espaços de recobrimento. Como referências recomendamos [14]

para variedades e [6] (capítulo I) e [18] para a teoria de espaços de recobrimento.

Este livro foi baseado em notas de aula de cursos lecionados pelos autores no Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Expressamos aqui o nosso agradecimento a Maria José Pacífico que leu a versão preliminar, apresentando va liosas sugestões.

César Camacho e
Alcides Lins Neto

Rio de Janeiro, maio de 1977.

ÍNDICE

	pag.
CAPÍTULO I - TEOREMA DE FROBENIUS	1
§1. Campos de Vetores e Derivadas de Lie	2
§2. O Teorema de Frobenius	11
§3. Formas Diferenciais	21
§4. Teorema de Frobenius para formas	36
CAPÍTULO II - FOLHEAÇÕES	46
CAPÍTULO III - HOLONOMIA E OS TEOREMAS DE ESTABILIDADE	59
§1. Holonomia de uma folha	60
§2. Lema de Trivialização Global	75
§3. Teorema de Estabilidade Local	77
§4. Teorema de Estabilidade Completa	80
CAPÍTULO IV - ESPAÇOS FIBRADOS E FOLHEAÇÕES	91
§1. Espaços Fibrados	91
§2. Folheações Transversais as Fibras de um Espaço Fibrado	97
§3. Existência de germes de folheações	104
§4. Exemplo de Hector	106
CAPÍTULO V - FOLHEAÇÕES ANALÍTICAS E CODIMENSÃO 1 ..	119
§1. A construção de Haefliger	120

§2. Demonstração dos resultados	131
CAPÍTULO VI - TEOREMA DE NOVIKOV	144
§1. Demonstração do Teorema 2	147
§2. Demonstração do Teorema 1	158
CAPÍTULO VII - AÇÕES DO GRUPO \mathbb{R}^2	200
§1. Propriedades Elementares	200
§2. O Teorema do posto de S^3	207
§3. Teorema de Poincaré-Bendixson para ações de \mathbb{R}^2	211
CAPÍTULO VIII - CONJUNTOS MINIMAIS DE FOLHEAÇÕES ..	222
§1. Estrutura transversal de uma folheação	225
§2. Minimais em folheações	231
§3. Construção do exemplo de Sacksteder	234
APÊNDICE 1	251
APÊNDICE 2 - O EXEMPLO DE DENJOY	258
CAPÍTULO IX - PONTOS SINGULARES DE 1-FORMAS COMPLETAMENTE INTEGRÁVEIS	273
§1. Classificação das singularidades	273
§2. Centros	277
§3. Singularidades de 1-formas analíticas	281
REFERÊNCIAS	304

CAPÍTULO I

TEOREMA DE FROBENIUS

Uma folheação de dimensão q de uma variedade diferenciável M é, a grosso modo, uma decomposição de M numa união disjunta de subvariédades conexas de dimensão q chamadas folhas. Os planos tangentes às folhas de finem um campo de q -planos, o qual é dito completamente integrável.

O teorema de Frobenius determina condições necessárias e suficientes para que um campo de q -planos em M seja completamente integrável.

Os campos de q -planos podem ser definidos localmente por q campos de vetores linearmente independentes ou dualmente por $n-q$, $n = \dim M$, 1-formas linearmente independentes. Com o pretexto de demonstrar o teorema de Frobenius faremos neste capítulo um curto curso sobre campos de vetores e formas diferenciais. Esclarecemos ao leitor que para uma boa compreensão dos capítulos subsequentes o único resultado indispensável do Capítulo I é o teorema de Frobenius (2.2).

§1. Campos de Vetores e Derivadas de Lie.

Seja $M \subset \mathbb{R}^k$ uma variedade diferenciável de classe C^∞ e dimensão n . Em cada $p \in M$ consideremos o subespaço $T_p M \subset \mathbb{R}^k$ de todos os vetores tangentes a M em p .

Definimos o espaço fibrado tangente de M como o conjunto $TM = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^k \mid p \in M, v \in T_p M\}$, dotado da projeção $\pi: TM \rightarrow M, \pi(p, v) = p$.

Para cada carta local de $M, x: U \rightarrow \mathbb{R}^n, U \subset M$, definimos uma carta de $TM, \bar{x}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ por $\bar{x}(p, v) = (x(p), dx(p).v)$. Como as mudanças de coordenadas $\bar{y} \circ \bar{x}^{-1}(x(p), w) = (y(p), d(y \circ x^{-1})(x(p)).w)$ são de classe C^∞ , TM possui uma estrutura de variedade C^∞ .

Um campo de vetores de classe C^r em M é uma aplicação $C^r X: M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X: M \rightarrow M$ é a identidade. Dada uma carta local $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de M e a base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$, denotamos por $\frac{\partial}{\partial x_i}$ o campo de vetores em U definido por $\frac{\partial}{\partial x_i} = x^*(e_i) = \bar{x}^{-1}(x(p), e_i)$. É claro que para todo $p \in U$ $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\}$ é uma base de $T_p M$. Logo se X é um campo de vetores em M teremos a sua expressão local $X(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ nos pontos $p \in U$ e X é C^r se e só se todas as X_i são de classe C^r . No que segue denotaremos por $\mathfrak{X}^r(M)$ o conjun

to de campos de vetores de classe C^r em M .

DEFINIÇÃO 1 - Seja $X \in \mathfrak{X}^0(M)$. Uma curva C^1 , $\gamma: (a,b) \rightarrow M$ é dita curva integral de X se $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ para todo $t \in (a,b)$.

O resultado a seguir é corolário imediato do teorema da existência e unicidade das soluções de equações diferenciais ordinárias em \mathbb{R}^n .

1.1 - TEOREMA (Existência e unicidade) - Seja X um campo de vetores de classe C^r , $r \geq 1$, em M . Dados $p_0 \in M$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ existem $\epsilon > 0$ e uma vizinhança U_{p_0} de p_0 em M tais que para todo $p \in U_{p_0}$ existe uma curva integral γ de X definida em $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ com $\gamma(t_0) = p$. Se $\gamma_1: I_1 \rightarrow M$ e $\gamma_2: I_2 \rightarrow M$ são duas curvas integrais de X tais que $t_0 \in I_1 \cap I_2$ e $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$, então $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ em $I_1 \cap I_2$.

Do teorema acima podemos concluir que para cada $p \in M$ existe $a < 0 < b$ e uma curva integral de X , $\gamma: (a,b) \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$, tal que se $\gamma_1: I_1 \rightarrow M$ é outra curva integral de X com $0 \in I_1$ e $\gamma_1(0) = p$, então $I_1 \subset (a,b)$. O intervalo (a,b) é denominado intervalo maximal de definição da solução que passa por p e vamos denotá-lo por I_p .
Seja $V = \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in I_p\}$. A aplicação $\varphi: V \rightarrow M$

tal que $t \rightarrow \varphi(t, p)$ é a curva integral de X com $\varphi(0, p) = p$ é denominada fluxo de X . Do Teorema 1.1 segue-se que V é aberto em $\mathbb{R} \times M$ e que φ possui a seguinte propriedade: $\varphi(s+t, p) = \varphi(s, \varphi(t, p)) = \varphi(s, \varphi(t, p)) = \varphi(t, \varphi(s, p))$, sempre que as expressões façam sentido, isto é, sejam compatíveis com o domínio V . Além disso, do teorema da dependência diferenciável das soluções de uma equação diferencial com respeito às condições iniciais (veja [22]), podemos deduzir que φ é da mesma classe de diferenciabilidade de X .

Seja $X_t(p) = \varphi(t, p)$ e para $t_0 \in \mathbb{R}$ fixo, suponhamos que a aplicação $X_{t_0} : M \rightarrow M$ está definida para todo $p \in M$. Neste caso, temos que $X_{-t_0} : M \rightarrow M$ está definida e além disso que $X_{t_0}(X_{-t_0}(p)) = X_{-t_0}(X_{t_0}(p)) = p$ para todo $p \in M$. Isto implica que $X_{t_0} : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo C^r , cuja inversa é X_{-t_0} .

1.2 - Mudança de variável.

Sejam M e N duas variedades e $f: M \rightarrow N$ um difeomorfismo C^r ($r \geq 1$). Se X é um campo de vetores de classe C^s em N , podemos definir um campo de vetores $f^*(X)$ em M pela fórmula $f^*(X)(p) = df^{-1}(f(p)) \circ o(X(f(p))) = (df(p))^{-1}(X(f(p)))$. O campo $f^*(X)$ é de classe C^ℓ , onde $\ell = \min(s, r-1)$. Analogamente se Y é um campo de vetores C^s em M podemos definir um campo

de vetores $f_*(Y) = df(f^{-1}(p))o(Y(f^{-1}(p)))$, o qual é de classe C^l . O seguinte resultado é consequência imediata das definições:

1.2.1 - PROPOSIÇÃO - Sejam X um campo de vetores em M ,
 $g: N \rightarrow P$ e $f: P \rightarrow M$ difeomorfismos
 C^r ($r \geq 1$) e $\varphi: V \rightarrow M$ o fluxo de X . Valem as seguintes propriedades:

a) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ e $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

b) Seja $\Psi: W \rightarrow M$ o fluxo de $f^*(X)$, onde W é o domínio maximal de Ψ . Então $W = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid (t, f(p)) \in V\}$ e $\Psi(t, f(p)) = f(\varphi(t, p))$ para todo $(t, p) \in V$.

A propriedade b) acima nos diz que se conhecermos as curvas integrais de $f^*(X)$ e o difeomorfismo f , então conhecemos as curvas integrais de X e reciprocamente.

1.3 - Derivada de Lie.

Sejam X e Y dois campos de vetores de classe C^r em M . Para simplificar suponhamos que o fluxo de X está definido em $\mathbb{R} \times M$. A derivada de Lie de Y na direção de X é o campo de vetores $L_X Y$ em M definido por

$$L_X Y(p) = \left. \frac{d}{dt} (X_t^*(Y)(p)) \right|_{t=0}$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, $X_t^*(Y)(p)$ é um vetor em $T_p M$, logo $\frac{d}{dt}(X_t^*(Y)(p))_{t=0}$ é um vetor de $T_p M$. Observemos que $t \rightarrow X_t^*(Y)(p) = DX_{-t}(X_t(p)).Y(X_t(p))$ é diferenciável mesmo que X seja de classe C^1 . Além disso devido ao caráter local da definição, a hipótese do fluxo de X estar definido em $\mathbb{R} \times M$ é desnecessária. Basta considerarmos uma vizinhança U de p e $\epsilon > 0$ tal que o fluxo de X está definido em $(-\epsilon, \epsilon) \times U$.

1.3.1 - PROPOSIÇÃO - Valem as seguintes propriedades

- a) L é anti-simétrico, isto é, $L_X Y = -L_Y X$.
- b) L é bilinear.
- c) Se $f: N \rightarrow M$ é um difeomorfismo C^r ($r \geq 2$) e X, Y são campos C^s ($s \geq 1$) em M , então

$$f^*(L_X Y) = L_{f^*(X)}(f^*(Y))$$

- d) Se $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções C^r e X, Y são campos C^r em M ($r \geq 1$) então $L_{(fX)}(gY) = f.gL_X Y + f.dg(X).Y - g.df(Y).X$

- e) (Expressão local da derivada de Lie). Sejam X e Y campos C^r ($r \geq 1$) em M e $x: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta local. Suponhamos que as expressões de X e Y na carta (x, U) sejam respectivamente

$$X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial/\partial x_i \quad \text{e} \quad Y = \sum_{j=1}^n \beta_j \partial/\partial x_j. \quad \text{Então}$$

$$L_X(Y) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} - \beta_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \right) \right) \circ \partial x_j.$$

f) Sejam X e Y campos C^r ($r \geq 1$) em M e X_t , Y_t os fluxos de X e Y respectivamente. Então os fluxos de X e Y comutam (isto é, $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$, $s, t \in \mathbb{R}$) se e somente se $L_X Y = 0$.

Observação: Denotaremos $L_X Y$ também por $[X, Y]$ que é a notação mais usual. Esta notação é conhecida por "colchete de Lie de X e Y " e é motivada pelo fato de L ser bilinear.

Demonstração: a) Suponhamos inicialmente que X e Y são de classe C^2 e que os fluxos de X e

Y estão definidos em $\mathbb{R} \times M$. Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M &\rightarrow M \text{ definida por } \varphi(s, t, p) = Y_{-s} \circ X_{-t} \circ Y_s \circ X_t(p). \\ \text{É claro que } \varphi &\text{ é } C^2. \text{ Temos } \left. \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|_{s=0}(t, p) = \\ &= \frac{d}{ds} (Y_{-s} \circ X_{-t} \circ Y_s \circ X_t(p)) \Big|_{s=0} = -Y(Y_{-s} \circ X_{-t} \circ Y_s \circ X_t(p)) \Big|_{s=0} + \\ &+ DY_{-s}(X_{-t} \circ Y_s \circ X_t(p)) \circ DX_{-t}(Y_s \circ X_t(p)) \circ Y(Y_s \circ X_t(p)) \Big|_{s=0} = \\ &= -Y(p) + X_t^*(Y)(p). \text{ Logo } \frac{\partial}{\partial t} \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|_{s=0} \right) \Big|_{t=0} = L_X Y. \text{ Por outro lado} \\ \text{do } \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0}(s, p) &= DY_{-s}(X_{-t} \circ Y_s \circ X_t(p)) \circ [-X(X_{-t} \circ Y_s \circ X_t(p)) + \\ &+ DX_{-t}(Y_s \circ X_t(p)) \circ DY_s(X_t(p)) \circ X(X_t(p))] \Big|_{t=0} = \\ &= DY_{-s}(Y_s(p)) \cdot [-X(Y_s(p)) + DY_s(p) \cdot X(p)] = -Y_s^*(X) + X, \text{ já} \\ \text{que } X_0 = Y_0 &= \text{identidade de } M. \text{ Temos então que} \\ \left. \frac{\partial}{\partial s} \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} \right) \right|_{s=0} &= -L_Y X. \text{ Como } \varphi \text{ é } C^2, \text{ pelo teorema de} \end{aligned}$$

Schwarz segue-se que $L_X Y = -L_Y X$. Se X e Y são de classe C^1 , consideremos duas seqüências X_n, Y_n de campos de classe C^2 , tais que $X_n \rightarrow X$ e $Y_n \rightarrow Y$ na topologia uniforme C^1 . É fácil verificar que $L_{X_n} Y_n \rightarrow L_X Y$ e $L_{Y_n} X_n \rightarrow L_Y X$ na topologia uniforme C^0 , logo $L_X Y = -L_Y X$. A extensão do resultado é óbvia no caso em que os fluxos de X e Y não estão definidos em $\mathbb{R} \times M$.

b) É imediato da definição que se $a, b \in \mathbb{R}$, então

$L_X(aY_1 + bY_2) = aL_X Y_1 + bL_X Y_2$. Como L é anti-simétrica, segue-se que L é linear também em X .

c) Pela Proposição 1.2.1 o fluxo de $f^*(X)$ é

$$\begin{aligned} & (t, p) \rightarrow f^{-1} \circ X_t \circ f(p), \text{ logo: } (L_{f^*(X)} f^*(Y))(p) = \\ & = \frac{d}{dt} [((f^{-1} \circ X_t \circ f)^* \cdot f^*(Y))(p)]_{t=0} = \frac{d}{dt} [(X_t \circ f)^*(Y)(p)]_{t=0} = \\ & = \frac{d}{dt} [D(f^{-1} \circ X_{-t})(X_t \circ f(p)) \cdot Y(X_t \circ f(p))]_{t=0} = \\ & = \frac{d}{dt} [Df^{-1}(X_{-t} \circ X_t \circ f(p)) \cdot DX_{-t}(X_t \circ f(p)) \cdot Y(X_t \circ f(p))]_{t=0} = \\ & = Df^{-1}(f(p)) \cdot \left(\frac{d}{dt} [X_t^*(Y)(f(p))]_{t=0} \right) = Df^{-1}(f(p)) \cdot (L_X Y)(f(p)) = \\ & = f^*(L_X Y)(p). \end{aligned}$$

d) Suponhamos inicialmente $f \equiv 1$. Temos que: $L_X(gY) =$

$$\begin{aligned} & = \frac{d}{dt} (X_t^*(gY))_{t=0} = \frac{d}{dt} (DX_{-t}(X_t) \cdot (g(X_t) \cdot Y(X_t)))_{t=0} = \\ & = \frac{d}{dt} (g(X_t) \cdot X_t^*(Y))_{t=0} = \frac{d}{dt} (g(X_t))_{t=0} Y + g \frac{d}{dt} (X_t^*(Y))_{t=0} = \\ & = Dg(X)Y + gL_X Y. \end{aligned}$$

Caso $f \neq 1$, temos: $L_{fX}(gY) = dg(fX)Y + gL_{fX}(Y) =$

$$= f.dg(X).Y - g.L_Y(fX) = f.dg(X).Y - g.df(Y).X + f.gL_X Y.$$

e) Se X e Y são campos constantes em \mathbb{R}^n , é fácil

$$\begin{aligned} & \text{ver que } L_X Y = 0. \text{ Temos então que } [\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j] = \\ & = L_{X^*(e_i)}(X^*(e_j)) = 0. \text{ Se } X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial/\partial x_i \text{ e} \\ & Y = \sum_{j=1}^n \beta_j \partial/\partial x_j, \text{ vem que } [X, Y] = \sum_{i,j} [\alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}] = \\ & = \sum_{i,j} (\alpha_i d\beta_j (\partial/\partial x_i) \cdot \partial/\partial x_j - \beta_j d\alpha_i (\partial/\partial x_j) \cdot \partial/\partial x_i + \\ & + \alpha_i \beta_j [\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j]) = \sum_{i,j} (\alpha_i \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} \partial/\partial x_j - \beta_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \partial/\partial x_i) = \\ & = \sum_j (\sum_i (\alpha_i \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} - \beta_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j})) \partial/\partial x_j. \end{aligned}$$

f) Suponhamos $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$ para $t, s \in \mathbb{R}$ e que

X e $Y \in C^2$. Como já vimos anteriormente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (X_{-t} \circ Y_{-s} \circ X_t \circ Y_s)_{s=0} &= X_t^*(Y) - Y \text{ e como } X_{-t} \circ Y_{-s} \circ \\ \circ X_t \circ Y_s &\text{ independe de } s, \text{ temos } X_t^*(Y) = Y, \text{ para todo} \\ t \in \mathbb{R}. \text{ Daí vem que } [X, Y] &= 0. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que $[X, Y] = 0 = \frac{d}{dt}(X_t^* Y)_{t=0}$. Temos então que $\frac{d}{dt}(X_t^*(Y)) = \frac{d}{ds}(X_{t+s}^*(Y))_{s=0} = \frac{d}{ds}(X_s^*(X_t^*(Y)))_{s=0} = [X, X_t^*(Y)]$. Por outro lado $0 = X_t^*([X, Y]) = [X_t^*(X), X_t^*(Y)] = [X, X_t^*(Y)]$, logo $\frac{d}{dt}(X_t^*(Y)) = 0$ e portanto $X_t^*(Y) = X_0^*(Y) = Y$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como o fluxo de $X_t^*(Y)$ (para t fixo) é $(s, p) \rightarrow X_{-t} Y_s X_t(p)$, vem que $X_{-t} \circ Y_s \circ X_t = Y_s$, como queríamos demonstrar.

1.4 - Ações do grupo \mathbb{R}^k .

Sejam G um grupo de Lie e $1 \in G$ o elemento unitário. Dizemos que $\varphi: G \times M \rightarrow M$ é uma ação C^r ($r \geq 0$), se φ é de classe C^r e satisfaz às seguintes propriedades:

a) Para todo $p \in M$, $\varphi(1, p) = p$.

b) Se $g_1, g_2 \in G$, então $\varphi(g_1 \cdot g_2, p) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, p))$.

Segue-se imediatamente da definição que se colocamos $\varphi_g(x) = \varphi(g, x)$, então para todo $g \in G$ φ_g é um homeomorfismo de M , cujo inverso é $\varphi_{g^{-1}}$. Se φ for C^r ($r \geq 1$), as aplicações $\varphi_g: M \rightarrow M$ são difeomorfismos C^r de M .

EXEMPLO 1 - Um difeomorfismo $f: M \rightarrow M$ gera uma ação

$\varphi: \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$, colocando-se $\varphi(0, p) = p$ e para $n > 0$, $\varphi(n, p) = f^n(p) = f \circ \dots \circ f(p)$ (n -vezes) e $\varphi(-n, p) = (f^{-1})^n(p)$.

EXEMPLO 2 - Seja X um campo de vetores em M , cujo fluxo φ está definido em $\mathbb{R} \times M$. Então φ é uma ação do grupo aditivo \mathbb{R} em M .

EXEMPLO 3 - (ações do \mathbb{R}^k) Suponha que X^1, \dots, X^k são campos de vetores tais que os colchetes

$$[X^i, X^j] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

Sejam X_t^1, \dots, X_t^k os fluxos de X^1, \dots, X^k

respectivamente e suponha que estes fluxos estão definidos em $\mathbb{R} \times M$.

Defina $\varphi: \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ por $\varphi(t_1, \dots, t_k, p) = X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_k}^k(p)$. Pela Proposição 1.3.1, todos os fluxos acima comutam, logo φ define uma ação de \mathbb{R}^k em M .

Reciprocamente, suponha que $\varphi: \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ é uma ação C^r ($r \geq 2$) do grupo aditivo \mathbb{R}^k em M . Fixemos uma base

$\{e_1, \dots, e_k\}$ de \mathbb{R}^k e definamos $\varphi_i(t, p) = \varphi(te_i, p)$.

É claro que para todo $i = 1, \dots, k$, $\varphi_i: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ é uma ação de \mathbb{R} em M . Estas induzem campos X^i ,

$X^i(p) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_i(t, p) \right|_{t=0}$, de classe C^{r-1} . Por outro lado

X^1, \dots, X^k , comutam dois a dois e portanto $[X^i, X^j] = 0$, $1 \leq i, j \leq k$. Os campos X^1, \dots, X^k , são chamados geradores da ação φ .

§2. O Teorema de Frobenius.

Seja M uma variedade de dimensão n . Uma distribuição ou campo de k -planos em M é uma aplicação π que associa a cada $x \in M$ um subespaço π_x de dimensão k de $T_x M$. Uma subvariedade imersa $F \subset M$ é dita subvariedade integral de π se para todo $x \in F$, $T_x F \subset \pi_x$.

Quando por cada ponto de M passa uma única subvariedade integral de dimensão k , dizemos que π é completamente integrável ou que π define uma folheação de dimensão k

de M . Neste caso as subvariedades integrais conexas e máximas pela ordem de inclusão são chamadas folhas.

EXEMPLO 4 - Seja X um campo de classe C^r ($r \geq 1$) sem singularidades definido numa variedade. Então X define uma distribuição de 1-planos completamente integrável em M . As folhas neste caso são as curvas integrais de X .

Todo campo de k -planos π pode ser definido localmente por k campos de vetores linearmente independentes X^1, \dots, X^k , tais que $\{X^1(x), \dots, X^k(x)\}$ é uma base de $\pi(x)$. A distribuição π é dita de classe C^r ($r \geq 0$) quando para todo $x_0 \in M$, existem uma vizinhança U de x_0 em M e campos X^1, \dots, X^k de classe C^r definidos em U , tais que para todo $x \in U$, $\{X^1(x), \dots, X^k(x)\}$ é uma base de π_x .

Observação: Seja $\mathcal{G}^k(M)$ o espaço de planos de dimensão k tangentes a M , $\mathcal{G}^k(M) = \{(x, \alpha) \mid \alpha \text{ é um subespaço de dimensão } k \text{ de } T_x M\}$. Em $\mathcal{G}^k(M)$ pode ser definida uma estrutura de espaço fibrado sobre M , cuja fibra em $x \in M$ é a variedade de Grassmann de subespaços de dimensão k de $T_x M$ (veja [14]). Um campo de k -planos pode ser pensado como sendo uma seção $\pi: M \rightarrow \mathcal{G}^k(M)$.

Pode ser provado facilmente que π é de classe

C^r no sentido acima definido se e somente se $\pi: M \rightarrow \mathbb{Q}^k(M)$ é C^r .

2.1 - PROPOSIÇÃO - Sejam X e Y dois campos de classe C^r ($r \geq 1$) em M .

Suponhamos que $f: N \rightarrow M$ é uma subvariedade imersa em M tal que para todo $x \in N$, $X(f(x))$ e $Y(f(x)) \in Df(T_x N)$. Então $[X, Y](f(x)) \in Df(T_x N)$ para todo $x \in N$.

Demonstração: Dado $x_0 \in N$, seja $V \subset N$ uma vizinhança de x_0 em N tal que $f|_V: V \rightarrow M$ é um mergulho. Sejam $\epsilon > 0$ e $U \subset V$ vizinhança de x_0 , tais que para todo $|t| \leq \epsilon$ e $x \in U$, $X_t(f(x))$ está definido. Como X é tangente a N , podemos supor também que $X_t(f(x)) \in f(V)$, diminuindo U se necessário. Temos então que $X_t/f(U): f(U) \rightarrow f(V)$ é um difeomorfismo local. Como Y é tangente a N (logo a $f(V)$) para todo $q \in f(U)$, $X_t^*(Y)(q) \in T_q(f(U))$ e portanto $\frac{d}{dt}(X_t^*(Y)(q))_{t=0} \in T_q(f(U))$, como queríamos.

COROLÁRIO - Seja π uma distribuição de k -planos definida em $U \subset M$ por k campos de vetores C^r ($r \geq 1$) linearmente independentes, X^1, \dots, X^k . Se π for completamente integrável então para todo $x \in U$ $[X^i, X^j](x) \in \pi(x)$, $i \leq i, j \leq k$.

Demonstração: Para todo $x \in M$ passa uma subvariedade integral F de dimensão k . Pela proposição anterior $[X^i, X^j](x) \in T_x F = \Pi(x)$.

DEFINIÇÃO 2 - Um sistema formado por k campos de vetores C^r ($r \geq 1$) em U , X^1, \dots, X^k é dito involutivo se para todo $x \in U$, $[X^i, X^j](x)$ é combinação linear de $X^1(x), \dots, X^k(x)$.

O corolário acima nos diz que uma condição necessária para que os campos linearmente independentes X^1, \dots, X^k definam uma distribuição de k -planos completamente integrável é que o sistema X^1, \dots, X^k seja involutivo.

EXEMPLO 5 - Sejam X e Y os campos em \mathbb{R}^3 definidos por $X(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ e $Y(x_1, x_2, x_3) = (0, ax_1 + bx_2, \alpha x_1 + \beta x_2)$, onde $a\beta - b\alpha \neq 0$. Afirmamos que o campo de 2-planos π , gerado por X e Y em $\mathbb{R}^3 - \{x \mid x_1 = x_2 = 0\}$, não possui superfícies integrais de dimensão 2. De fato $[X, Y] = \frac{\partial Y}{\partial x_1} = (0, a, \alpha)$ e se π admitisse alguma superfície integral teríamos $(0, a, \alpha) = mX + nY$, onde m e n são funções. Mas a identidade acima implica que $m = 0$, $a = n(ax_1 + bx_2)$ e $\alpha = n(\alpha x_1 + \beta x_2)$, logo $\frac{a}{ax_1 + bx_2} = \frac{\alpha}{\alpha x_1 + \beta x_2}$, ou seja $(a\beta - b\alpha)x_2 = 0$, logo a superfície integral, se existisse, teria que estar conti-

da no plano $\{x_2 = 0\}$. É fácil verificar que o plano $x_2 = 0$ não é superfície integral de π .

2.2 - TEOREMA (Frobenius) - Seja π um campo de k -planos de classe C^r ($r \geq 1$) em M . As seguintes afirmações são equivalentes:

- a) π é completamente integrável.
- b) Dados dois campos C^r , X e Y , definidos num aberto $U \subset M$ tais que para todo $x \in U$, $X(x), Y(x) \in \pi(x)$, então $[X, Y](x) \in \pi(x)$. Para abreviar diremos que X e Y são tangentes a π .
- c) Para cada $x_0 \in M$ existem uma vizinhança U de x_0 e um difeomorfismo C^r $f: U \rightarrow (-1, 1)^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, tal que os subconjuntos de U definidos por $F_x = \{q \in U \mid f_j(q) = f_j(x), j = k+1, \dots, n\}$ são subvariedades integrais de π .

Demonstração: a) \Rightarrow b). É corolário da Proposição 2.1.

c) \Rightarrow a). É imediato. Observe que c) implica que as superfícies integrais são únicas.

b) \Rightarrow c). Vamos mostrar por indução em k , dimensão de π .

Para $k = 1$ temos o seguinte:

LEMA - Seja X um campo de classe C^r definido no aberto $U \subset M$, tal que $X(x_0) \neq 0$, $x_0 \in U$. Então exis-

tem uma vizinhança V de p em M e um difeomorfismo C^r , $f: V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times D^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f_*(X) = (1, 0, \dots, 0)$.

Em particular as curvas integrais de X em V são definidas pelas equações $f_2(q) = C_2, \dots, f_n(q) = C_n$, onde C_2, \dots, C_n são constantes.

Este lema é usualmente conhecido como teorema do fluxo tubular curto.

Demonstração: Como $X(x_0) \neq 0$, existe um mergulho

$$\varphi: D^{n-1} \rightarrow M, \text{ onde } D^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \|x\| < 1\},$$

tal que $\varphi(0) = x_0$ e $D\varphi(x_0) \cdot \mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R} \cdot X(x_0) = T_{x_0} M$, onde $\mathbb{R} \cdot X(x_0)$ é o subespaço de dimensão um de $T_{x_0} M$ gerado por $X(x_0)$. Podemos supor sem perda de generalidade que o fluxo de X , X_t , está definido em $(-\delta, \delta) \times \varphi(D^{n-1})$, onde $\delta > 0$ é suficientemente pequeno. Definamos

$$\Psi: (-\delta, \delta) \times D^{n-1} \rightarrow M \text{ por } \Psi(t, x) = X_t(\varphi(x)). \text{ Temos}$$

$$D\Psi(0, 0) \cdot (1, 0) = \frac{\partial}{\partial t}(X_t(\varphi(0)))_{t=0} = X(x_0) \text{ e } (D\Psi(0, 0)) \cdot \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} = D\varphi(0) \cdot \mathbb{R}^{n-1}. \text{ Temos então que } D\Psi(0, 0) \cdot \mathbb{R}^n = T_{x_0} M,$$

logo pelo teorema da função inversa existem $\delta \geq \epsilon > 0$ e um disco \tilde{D}^{n-1} contendo a origem tais que

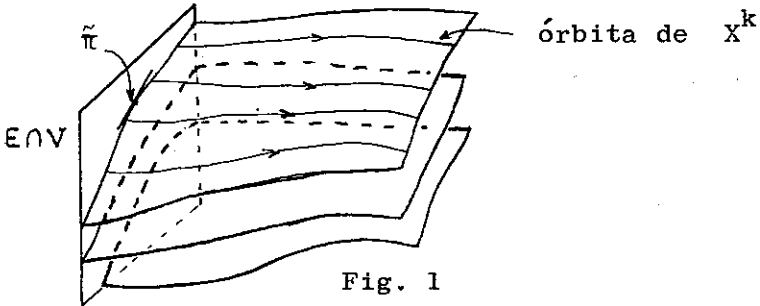
$$\Psi: (-\epsilon, \epsilon) \times \tilde{D}^{n-1} \rightarrow \Psi((-\epsilon, \epsilon) \times \tilde{D}^{n-1}) = V \text{ é um difeomorfismo}$$

C^r . Seja $f: V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times \tilde{D}^{n-1}$ a inversa de Ψ . É imediato que $f_*(X) = (1, 0, \dots, 0)$. Isto mostra o Lema 1.

Suponhamos que b) \Rightarrow c) para distribuições de

dimensão ι , $\iota = 1, \dots, k-1$. Seja π uma distribuição C^r de dimensão k em M . Como o problema é essencialmente local podemos supor que π é uma distribuição C^r de de finida num aberto W do \mathbb{R}^n e que $x_0 = 0 \in W$. Sejam X^1, \dots, X^k campos de vetores C^r definidos numa vizinhança $V \subset W$ de 0 , tais que para todo $x \in V$, $\{X^1(x), \dots, X^k(x)\}$ é uma base de $\pi(x)$. Como $X^k(0) \neq 0$, o subespaço E , ortogonal a $X^k(0)$, tem dimensão $n-1$. Diminuindo V se necessário, podemos supor que para todo $x \in V$, $X^k(x) \notin E$.

Consideremos a distribuição de planos $\tilde{\pi}$ definida em $E \cap V$ por $\tilde{\pi}(x) = \pi(x) \cap E$. É claro que $\dim(\tilde{\pi}(x)) = k-1$ para $x \in E \cap V$.



Afirmamos que $\tilde{\pi}$ é de classe C^r e satisfaz

b). Com efeito, suponhamos que $E = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n = 0\}$, $X^k(0) = (0, \dots, 0, 1)$ e $X^j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j)$ com $\alpha_n^k(x) > 0$, $x \in V$. Então os campos Y^1, \dots, Y^{k-1} em V , dados por $Y^j = X^j - \frac{\alpha_n^j}{\alpha_n^k} X^k$, define $\tilde{\pi}$. Logo $\tilde{\pi}$

é C^r . Mostremos agora que $\tilde{\pi}$ satisfaz b).

Sejam X e Y dois campos de vetores em $E \cap V$, tangentes a $\tilde{\pi}$. Podemos escrever $X = \sum_{j=1}^{k-1} a_j Y^j$ e $Y = \sum_{j=1}^{k-1} b_j Y^j$ e daí $[X, Y] = \sum_{i,j} a_i b_j [Y^i, Y^j] + \sum_{i,j} (a_i db_j(Y^i) - b_i da_j(Y^i)) Y^j$.

Para mostrarmos que $[X, Y]$ é tangente a $\tilde{\pi}$ basta provarmos que para todo $1 \leq i, j \leq k-1$, $[Y^i, Y^j]$ é tangente a $\tilde{\pi}$. Como π satisfaz à propriedade b) basta provarmos que $[Y^i, Y^j]$ é tangente a $\tilde{\pi}$. Por outro lado, para $x \in E \cap V$, $Y^i(x), Y^j(x) \in E$, portanto $[Y^i, Y^j](x) \in E$ e daí vem que $[Y^i, Y^j]$ é tangente a $\tilde{\pi}$. Isto mostra a afirmação.

Pela hipótese de indução $\tilde{\pi}$ satisfaz c), logo existem vizinhanças V_1 de 0 em E , U_1 de 0 em \mathbb{R}^{n-1} e um difeomorfismo C^r $g: V_1 \rightarrow U_1$, $g = (g_1, \dots, g_{n-1})$, tal que os subconjuntos de V_1 definidos pelas equações $g_k(x) = C_k, \dots, g_{n-1}(x) = C_{n-1}$ são as subvariedades integrais de $\tilde{\pi}$ em V_1 . Sejam $\varphi = g^{-1}: U_1 \rightarrow V_1$ e $\delta > 0$ tal que o fluxo de X^k, X_t^k está definido em $(-\delta, \delta) \times V_1$. Definamos $\Psi: (-\delta, \delta) \times U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\Psi(t, x) = X_t^k(\varphi(x))$. Como $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(0, 0) = X^k(0)$ e $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0, 0) = D\varphi(0)$, existem $\epsilon > 0$, uma vizinhança $U \subset U_1$ de 0 em \mathbb{R}^{n-1} e W de 0 em \mathbb{R}^n tais que $\Psi: (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow W$ é um difeomorfismo C^r . Denotemos os pontos $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ por (t, x) , $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e

$x \in U$. Seja $f: W \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times U$ o difeomorfismo inverso de Ψ e escrevamos $f = (\alpha, \beta)$, onde $\alpha: W \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}): W \rightarrow U$. Vamos provar que as superfícies definidas pelas equações $\beta_i(x) = C_i$, $k \leq i \leq n-1$, são superfícies integrais de π em W . Basta provarmos que para todo $x \in W$, $\pi(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid D\beta_i(x) \cdot v = 0, k \leq i \leq n-1\} = (Df(x))^{-1}(F)$, onde $F = \{(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \mid u_k = \dots = u_{n-1} = 0\}$. Como $(Df(x))^{-1}(F)$ tem dimensão k , basta provarmos que $(Df(x))^{-1}(F) \subset \pi(x)$. Seja $w = (\lambda, v, 0) \in F$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = (v_1, \dots, v_{k-1})$ e coloquemos $f(x) = (t, y)$. Temos $(Df(x))^{-1}(w) = D\Psi(t, y) \cdot (\lambda, v, 0) = D(X_t^k \circ \varphi)(t, y) \cdot (\lambda, v, 0) = \lambda \frac{\partial}{\partial t}(X_t^k \circ \varphi)(t, y) + DX_t^k(\varphi(y)) \circ D\varphi(y) \cdot (v, 0) = \lambda X^k(x) + DX_t^k(\varphi(y)) \circ D\varphi(y) \cdot (v, 0)$. Como $\lambda X^k(x) \in \pi(x)$, basta provarmos que $DX_t^k(\varphi(y)) \circ D\varphi(y) \cdot (v, 0) \in \pi(x)$. Observemos que $D\varphi(y) \cdot (v, 0) \in \tilde{\pi}(\varphi(y))$, logo $D\varphi(y) \cdot (v, 0) = \sum_{i=1}^{k-1} y_i Y^i(\varphi(y))$ e portanto $DX_t^k(\varphi(y)) \circ D\varphi(y) \cdot (v, 0) = \sum_{i=1}^{k-1} y_i DX_t^k(\varphi(y)) \circ Y^i(\varphi(y))$. Basta então mostrarmos que $DX_t^k(\varphi(y)) \circ D\varphi(y) \cdot (v, 0) = \sum_{i=1}^{k-1} y_i DX_t^k(\varphi(y)) \circ Y^i(\varphi(y))$. Basta então mostrarmos que $DX_t^k(z) \cdot Y^i(z) \in \pi(X_t^k(z))$ para todo $z \in E \cap W$ e $1 \leq i \leq k-1$, ou seja $((X_t^k)^*(Y^i))(x) \in \pi(x)$ para todo $x \in W$ e $1 \leq i \leq k-1$. Como $Y^i = X^i - a^i X^k$, temos $(X_t^k)^*(Y^i) = (X_t^k)^*(X^i) - (a^i \circ X_t^k) \cdot (X_t^k)^*(X^k) = (X_t^k)^*(X^i) - (a^i \circ X_t^k) \cdot X^k$. É suficiente mostrarmos que

$(X_t^k)*(X^i)(x) \in \pi(x)$ para todo $x \in W$ e $1 \leq i \leq k-1$.

Consideremos as curvas em T_x^M , $z_i(t) = ((X_t^k)*(X^i))(x)$, $1 \leq i \leq k-1$. É fácil ver que para todo $i = 1, \dots, k-1$, $z_i(t)$ é de classe C^1 e que $z_i'(t) = \frac{d}{dt}((X_t^k)*(X^i))(x) = (X_t^k)*[X^k, X^i](x)$. Como o sistema X^1, \dots, X^k é involutivo podemos escrever $[X^k, X^i](x) = \sum_{j=1}^k \gamma_{ij}^j(x) X^j(x)$, logo $z_i'(t) = \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{ij}^j(X_t^k(x)) \cdot z_j(t) + \gamma_{ik}^k(X_t^k(x)) \cdot X^k(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \mu_{ij}^j(t) z_j(t) + \mu_{ik}^k(t) X^k(x) (*)$. Temos então que $z_1(t), \dots, z_{k-1}(t)$ satisfazem o sistema (*) com as condições iniciais $z_i(0) = X^i(x) \in \pi(x)$. Temos que provar que $z_i(t) \in \pi(x)$ para $-\epsilon < t < \epsilon$ e $i = 1, \dots, k-1$.

O sistema (*) pode ser escrito como $Z' = A(t)Z + \mu(t)(**)$, onde $Z = (z_1, \dots, z_{k-1}) \in (T_x^M)^{k-1}$, $\mu(t) = (\mu_1^k(t)X^k(x), \dots, \mu_{k-1}^k(t)X^k(x)) \in (\pi(x))^{k-1}$, $Y(0) = (X^1(x), \dots, X^{k-1}(x)) \in (\pi(x))^{k-1}$ e $A(t): (T_x^M)^{k-1} \rightarrow (T_x^M)^{k-1}$ é definida por $A(t)(z_1, \dots, z_{k-1}) = (\sum_{j=1}^{k-1} \mu_{1j}^j(t)z_j, \dots, \sum_{j=1}^{k-1} \mu_{k-1j}^j(t)z_j)$. Como é sabido da teoria de equações diferenciais a solução de (**) pode ser obtida como limite da seqüência de curvas $\{Z_n: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (T_x^M)^{k-1}\}_{n \geq 0}$ definida indutivamente por $Z_0(t) = (X^1(x), \dots, X^{k-1}(x)) = Z_0$ e $Z_{n+1}(t) = \int_0^t [A(\tau)Z_n(\tau) + \mu(\tau)]d\tau$. Como $Z_0 \in (\pi(x))^{k-1}$ e $\mu(\tau) \in (\pi(x))^{k-1}$ e $A(\tau)(\pi(x))^{k-1} \subset (\pi(x))^{k-1}$ para todo

τ , é fácil ver que para todo $n \geq 0$, $Z_n(-\epsilon, \epsilon) \subset (\pi(x))^{k-1}$, logo a solução de (**) está contida em $(\pi(x))^{k-1}$, como queríamos demonstrar.

O teorema de Frobenius motiva o conceito de folheação.

DEFINIÇÃO 3 - Uma folheação \mathcal{F} de classe C^r e dimensão k de uma variedade M de dimensão n , é uma decomposição de M em subvariedades conexas imersas de dimensão k com as seguintes propriedades:

- i) Dado $x \in M$ existe uma única subvariedade da decomposição acima que passa por x . Esta subvariedade é chamada de folha de \mathcal{F} por x e será denotada por F_x .
- ii) Dado $x_0 \in M$ existem uma vizinhança U de x_0 em M e um difeomorfismo C^r , $\alpha: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, tal que para toda folha F_y , $F_y \cap U$ está contido nos subconjuntos $\alpha_{k+1}(x) = c_{k+1}, \dots, \alpha_n(x) = c_n$.

No próximo capítulo esta definição será analisada com mais detalhes e serão dados alguns exemplos.

§3. Formas Diferenciais.

As formas diferenciais são os "duais" dos cam-

pos de vetores. Mais especificamente, seja TM o fibrado tangente de M . Uma 1-forma de classe C^r em M é uma aplicação C^r , $\omega: TM \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $p \in M$ a aplicação $\omega_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\omega_p(v) = \omega(p, v)$, é linear. Para cada $p \in M$, ω_p é um elemento de $(T_p M)^*$, dual de $T_p M$. Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação C^r ($r \geq 1$). A derivada de f , $df: TM \rightarrow \mathbb{R}$ define uma 1-forma de classe C^{r-1} em M . Se $x: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ é uma carta local e $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ é a base de $T_p M$ associada à carta (x, U) , podemos definir 1-formas C^∞ dx_1, \dots, dx_n por $dx_i(p)(\frac{\partial}{\partial x_j}(p)) = \delta_{ij}$ ($= 0$ se $i \neq j$ e 1 se $i = j$). É claro que $\{dx_1(p), \dots, dx_n(p)\}$ forma uma base de $T_p M^*$.

Dada uma 1-forma ω em V , temos que

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i, \text{ onde } \omega_1, \dots, \omega_n \text{ são funções de } U \text{ em } \mathbb{R} \text{ da mesma classe que } \omega. \text{ É fácil ver que } \omega_i(p) = \omega_p(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)).$$

Por exemplo se $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^r ($r \geq 1$), então

$$df = \sum_{i=1}^n df(\frac{\partial}{\partial x_i}) dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

EXEMPLO 6 - Uma distribuição de k -planos π , de classe C^r , pode ser definida localmente em termos de $n-k$ 1-formas diferenciais de classe C^r . De fato, seja $p_0 \in M$ e consideremos uma vizinhança U de p_0 onde estão definidos k -campos linearmente independentes

X^1, \dots, X^k de classe C^r e tangentes a π . Como $\{\partial/\partial x_1(p_0), \dots, \partial/\partial x_n(p_0)\}$ é uma base de $T_{p_0}M$, é fácil ver que existem $i_1, \dots, i_{n-k} \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\{X^1(p_0), \dots, X^k(p_0), \partial/\partial x_{i_1}(p_0), \dots, \partial/\partial x_{i_{n-k}}(p_0)\}$ também é uma base de $T_{p_0}M$. Reordenando a base canônica de \mathbb{R}^n , podemos supor $i_1 = k+1, \dots, i_{n-k} = n$. Por continuidade, existe uma vizinhança $V \subset U$ de p_0 tal que para todo $p \in V$, $\{X^1(p), \dots, X^k(p), \partial/\partial x_{k+1}(p), \dots, \partial/\partial x_n(p)\}$ é uma base de T_pM . Sejam $\omega^1, \dots, \omega^n$ as n 1-formas definidas em V tais que $\omega^i(X^j) = \delta_{ij}$, onde $X^j = \partial/\partial x_j$ se $j \geq k+1$.

É fácil ver que $\omega^1, \dots, \omega^n$ são 1-formas de classe C^r e que $\{\omega^1_p, \dots, \omega^n_p\}$ é uma base de $(T_pM)^*$ para todo $p \in V$.

É claro da construção que para todo $p \in V$, $\pi(p) = \{v \in T_pM \mid \omega_p^{k+1}(v) = \dots = \omega_p^n(v) = 0\}$. A distribuição π é então a interseção dos núcleos de $\omega^{k+1}, \dots, \omega^n$. Mais adiante veremos como se formula o teorema de Frobenius em termos de formas diferenciais.

3.1 - k-formas, produtos exterior e interior.

Seja $(TM)^k = \{(p, v_1, \dots, v_k) \mid p \in M, v_1, \dots, v_k \in T_pM\}$. Em $(TM)^k$ pode ser definida uma estrutura de variedades diferenciável C^∞ da seguinte maneira:

Seja $P: (TM)^k \rightarrow M$ a projeção $P(p, v_1, \dots, v_k) = p$. Da
 da uma carta local $x: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$, seja $V = P^{-1}(U)$. Defini-
 mos uma carta $(Tx)^k: V \rightarrow \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^k$ por
 $(Tx)^k(p, v_1, \dots, v_k) = (x(p), Dx_p \cdot v_1, \dots, Dx_p \cdot v_k)$. É fá-
 cil ver que a coleção de todas as cartas $((Tx)^k, P^{-1}(U))$,
 onde (x, U) é uma carta em M , define um atlas em $(TM)^k$.
 Uma k -forma diferencial η de classe C^r em M é sim-
 plesmente uma aplicação de classe C^r , $\eta: (TM)^k \rightarrow \mathbb{R}$, tal
 que para todo $p \in M$ a aplicação $\eta_p: (T_p M)^k \rightarrow \mathbb{R}$ defini-
 da por $\eta_p(v_1, \dots, v_k) = \eta(p, v_1, \dots, v_k)$ é k -multili-
 near alternada, isto é, η_p é linear em cada coordenada
 e $\eta_p(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) = -\eta_p(v_1, \dots, v_{i+1},$
 $v_i, \dots, v_k)$. Vamos denotar o conjunto das k -formas dife-
 renciais de classe C^r em M por $\Lambda^{k,r}(M)$, ou simples-
 mente $\Lambda^{k,r}$ quando não houver confusão.

DEFINIÇÃO 4 - Sejam $\alpha \in \Lambda^{k,r}$ e $\beta \in \Lambda^{\ell,r}$. O produto ex-
 terior de α por β é a $(k+\ell)$ -forma em M
 definida por:

$$\alpha \wedge \beta(p, v_1, \dots, v_{k+\ell}) = \alpha_p \wedge \beta_p(v_1, \dots, v_{k+\ell}) =$$

$$= \frac{1}{k! \ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \epsilon(\sigma) \alpha_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)})$$

onde $S_{k+\ell}$ é o conjunto de permutações do conjunto
 $\{1, \dots, k+\ell\}$ e $\epsilon(\sigma)$ é o sinal da permutação σ .

A partir da definição, as seguintes propriedades podem ser verificadas:

3.1.1 PROPOSIÇÃO - Sejam $\alpha \in \Lambda^{k,r}$, $\beta \in \Lambda^{\ell,r}$ e $\gamma \in \Lambda^{m,r}$.

Então:

a) $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+\ell,r}$

b) Se $\ell = m$ então $\alpha \wedge (f\beta + \gamma) = f(\alpha \wedge \beta) + \alpha \wedge \gamma$ e $(f\beta + \gamma) \wedge \alpha = f(\beta \wedge \alpha) + \gamma \wedge \alpha$, onde $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^r .

c) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

d) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha$.

Para a demonstração, veja [30].

Vejamos agora como uma k -forma pode ser escrita numa carta local. Seja $x: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta local. Para cada $p \in U$, o conjunto $\{\partial/\partial x_1(p), \dots, \partial/\partial x_n(p)\}$ é uma base de $T_p M$ e $\{dx_1(p), \dots, dx_n(p)\}$ é a sua base dual. Consideremos o conjunto de k -formas

$\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\} = B_k^n$. Como é fácil ver B_k^n contém $\binom{n}{k}$ elementos e se $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ então $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} (\partial/\partial x_{j_1}, \dots, \partial/\partial x_{j_k}) = \delta_{IJ}$, onde $I = (i_1, \dots, i_k)$, $J = (j_1, \dots, j_k)$ e $\delta_{IJ} = 0$ se $I \neq J$ e $\delta_{II} = 1$. Por outro lado se ω é uma k -forma

em U , $p \in U$ e $v_1, \dots, v_k \in T_p M$, onde $v_i = \sum_{j=1}^n v_i^j \partial/\partial x_j(p)$, $1 \leq i \leq k$, temos $\omega_p(v_1, \dots, v_k) =$

$$= \sum_I v_1^{i_1}, \dots, v_k^{i_k} \omega_p(\partial/\partial x_{i_1}(p), \dots, \partial/\partial x_{i_k}(p)), \text{ onde}$$

$I = (i_1, \dots, i_k)$ percorre todas as seqüências em

$$\{1, \dots, n\}. \text{ Como } \omega_p \text{ é alternada vem que } \omega_p(v_1, \dots, v_k) = \\ = \sum_J \sum_{\sigma \in S_k} \epsilon(\sigma) v_1^{j_{\sigma(1)}}, \dots, v_k^{j_{\sigma(k)}} \omega_p(\partial/\partial x_{j_1}(p), \dots, \partial/\partial x_{j_k}(p))$$

onde J percorre todas as seqüências crescentes com k elementos em $\{1, \dots, n\}$. Ora, como

$$dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \epsilon(\sigma) v_1^{j_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge v_k^{j_{\sigma(k)}},$$

temos finalmente que

$$\omega = \sum_J \omega(\partial/\partial x_{j_1}, \dots, \partial/\partial x_{j_k}) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

que é a expressão de ω na carta (x, U) .

DEFINIÇÃO 5 - Sejam $\omega \in \Lambda^{k,r}$ e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $k \geq 1$. O produto interior de X por ω é a $(k-1)$ -forma $i_X(\omega)$ definida por $(i_X(\omega))_p(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega_p(X(p), v_1, \dots, v_{k-1})$.

A seguinte proposição é imediata da definição:

3.1.2 - PROPOSIÇÃO - Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $\alpha \in \Lambda^{k,r}$, $\beta \in \Lambda^{\ell,r}$ e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r .

Então valem as seguintes propriedades:

- a) $i_{(fX+Y)}(\alpha) = fi_X(\alpha) + i_Y(\alpha)$
- b) $i_X(f\alpha + \beta) = fi_X(\alpha) + i_X(\beta)$ se $k = \ell$

$$c) i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X(\beta)$$

$$d) i_X(i_Y(\alpha)) = -i_Y(i_X(\alpha)) \text{ se } k \geq 2.$$

EXEMPLO 7 - Uma distribuição de k -planos π de classe

C^r , pode ser definida localmente em termos de uma $(n-k)$ -forma de classe C^r . De fato, dado $p_0 \in M$, consideremos uma vizinhança U de p_0 onde estão definidos k campos de vetores linearmente independentes X^1, \dots, X^k de classe C^r , tangentes a π . Podemos supor que U é o domínio de uma carta local $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Seja $\Omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. É claro que Ω é C^∞ .

Seja η a $(n-k)$ -forma de classe C^r definida por $\eta = i_{X^k}(\dots i_{X^1}(\Omega)\dots)$. Para cada $p \in M$ consideremos o subespaço $\tilde{\pi}(p)$ de $T_p M$ definido por $\tilde{\pi}(p) = \{v \in T_p M \mid i_v(\eta_p) = 0\}$. Afirmamos que $\tilde{\pi}(p) = \pi(p)$. De fato, de d) da Proposição 3.1.2, segue-se que $i_{X^i}(\eta) = 0$, $1 \leq i \leq k$, logo $\pi(p) \subset \tilde{\pi}(p)$. Por outro lado se $v \notin \pi(p)$, o conjunto $\{X^1(p), \dots, X^k(p), v\}$ é linearmente independente e isto implica que $i_v(\eta_p) \neq 0$, logo $v \notin \tilde{\pi}(p)$.

Suponhamos agora que $\tilde{\eta}$ é uma outra $(n-k)$ -forma C^r em U , tal que $\pi(p) \subset \{v \in T_p M \mid i_v(\tilde{\eta}_p) = 0\}$. Afirmamos que $\tilde{\eta} = f\eta$ onde $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ é C^r . De fato, dado $p \in U$, sejam Λ o espaço vetorial de aplicações $(n-k)$ -lineares em $T_p M$ e $N = \{\alpha \in \Lambda \mid i_v \alpha = 0 \text{ para } v \in \pi(p)\}$.

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de $T_p M$ tal que $\{v_1, \dots, v_k\}$ é uma base de $\pi(p)$, temos que $\alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_{(n-k)}}) \neq 0$ para $i_1 < \dots < i_{(n-k)}$ se e somente se $i_j = k+j$, $1 \leq j \leq n-k$, logo N é um subespaço de Λ de dimensão um e portanto $\tilde{\eta}_p = f(p)\eta_p$. Como $\eta \neq 0$ em U , temos que f é de classe C^r .

Sejam agora $\omega^{k+1}, \dots, \omega^n$ como no Exemplo 1. Como $\pi(p) = \{v \in T_p M \mid i_v(\omega_p^i) = 0, k+1 \leq i \leq n\}$ é fácil ver que $\pi(p) = \{v \in T_p M \mid i_v(\omega^{k+1} \wedge \dots \wedge \omega^n) = 0\}$. Concluímos daí que $\omega^{k+1} \wedge \dots \wedge \omega^n = f\eta$. Este argumento mostra em particular que se $\tilde{\eta}$ é uma $(n-k)$ -forma tal que $\tilde{\pi}(p) = \{v \mid i_v(\tilde{\eta}_p) = 0\}$ é de dimensão k para todo $p \in M$, então $\tilde{\eta}$ é localmente decomponível, isto é, dado $p \in M$ existe uma vizinhança U de P e $n-k$ 1-formas $\alpha^{k+1}, \dots, \alpha^n$ tais que $\tilde{\eta} = \alpha^{k+1} \wedge \dots \wedge \alpha^n$. Além disso $\tilde{\pi}(q) = \{v \in T_q M \mid i_v(\alpha^i) = 0, k+1 \leq i \leq n\}$.

Em certos casos um campo de k -planos π pode ser representado globalmente por uma $(n-k)$ -forma como acima (veja Exercício 11).

3.2 - Mudança de variável e formas co-induzidas.

Uma k -forma diferencial pode ser escrita num aberto U , onde está definida uma carta local $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

como $\omega = \sum_J \omega(\partial/\partial x_{j_1}, \dots, \partial/\partial x_{j_k}) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} =$
 $= \sum_J \omega_J dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$, onde $J = (j_1, \dots, j_k)$ percorre todas as seqüências crescentes de k -elementos em $\{1, \dots, n\}$. No somatório $\omega_J: U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^r , para todo J . Podemos pensar que $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ é a base dual da base canônica do \mathbb{R}^n e sendo assim podemos representar ω em $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ como $\sum_J \omega_J \circ x^{-1} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$ expressão que denotamos por $x_*(\omega)$. Evidentemente se $(v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ temos $(x_*(\omega))_q(v_1, \dots, v_k) = \omega_{x^{-1}(q)}(dx^{-1}(q).v_1, \dots, dx^{-1}(q).v_k)$. Mais geralmente se $f: M \rightarrow N$ é um difeomorfismo C^s e $\omega \in \Lambda^{k,r}(M)$ podemos definir uma k -forma $f_*(\omega) \in \Lambda^{k,\ell}(N)$, $\ell = \min(r, s-1)$, por $(f_*(\omega))_q(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f^{-1}(q)}(df^{-1}(q).v_1, \dots, df^{-1}(q).v_k)$. Analogamente se $\omega \in \Lambda^{k,r}(N)$ podemos definir uma k -forma $f^*(\omega) \in \Lambda^{k,\ell}(M)$ por $(f^*(\omega))_p(n_1, \dots, n_k) = \omega_{f(p)}(df(p).n_1, \dots, df(p).n_k)$. A forma $f^*(\omega)$ é chamada de forma co-induzida por f e ω . Observe que o operador $f^*: \Lambda^{k,r}(N) \rightarrow \Lambda^{k,\ell}(M)$ pode ser definido para $f: M \rightarrow N$ qualquer de classe C^s ($s \geq 1$), mesmo que M e N tenham dimensões distintas. Como no caso de campos de vetores, $f_*: \Lambda^{k,r}(M) \rightarrow \Lambda^{k,\ell}(N)$ só fica definida se f for um difeomorfismo. Vejamos algumas propriedades do operador f^* .

3.2.1 - PROPOSIÇÃO - Valem as seguintes propriedades:

- a) Se $f: M \rightarrow N$ é C^s e $l = \min(r, s-1)$ então $f^*: \Lambda^{k,r}(N) \rightarrow \Lambda^{k,l}(M)$ é linear.
- b) Se $\alpha \in \Lambda^{k,r}(M)$, $\beta \in \Lambda^{j,r}(M)$ e f é como em a), então $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$.
- c) Se $f: M \rightarrow N$ e $g: N \rightarrow P$, então $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- d) Se f é um difeomorfismo então $f^*(i_X(\alpha)) = i_{f^*(X)}(f^*(\alpha))$.

No caso em que f é um difeomorfismo as propriedades b e d nos dizem que os produtos exterior e interior são "naturais" com respeito à mudança de variáveis. Deixamos a demonstração a cargo do leitor (veja Exercício 1).

Observação: Uma definição equivalente de f^* é a seguinte: Seja $\Lambda^{0,r}(N)$ o conjunto de funções reais de classe C^r definidas em N . Colocando $\Lambda^r(N) = \Lambda^{0,r}(N) \oplus \dots \oplus \Lambda^{n,k}(N)$ e analogamente $\Lambda^r(M)$ então f^* é o único operador linear de $\Lambda^r(N)$ em $\Lambda^r(M)$ que satisfaz

- a) $f^*(g) = g \circ f$ se $g \in \Lambda^{0,r}(N)$
- b) $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$ se $\alpha, \beta \in \Lambda^r(N)$.

3.3 - Derivada exterior.

Vamos agora definir um "operador de derivação"

em $\Lambda^r(M)$, $d: \Lambda^r(M) \rightarrow \Lambda^{r-1}(M)$, tal que para todo $k \geq 0$, $d(\Lambda^{k,r}(M)) \subset \Lambda^{k+1,r-1}(M)$, isto é, se $\alpha \in \Lambda^{k,r}(M)$ então $d\alpha \in \Lambda^{k+1,r-1}(M)$. O operador d será definido através de cartas locais em M , mas veremos que ele está definido intrinsecamente.

Consideremos o \mathbb{R}^n com as coordenadas canônicas (x_1, \dots, x_n) e seja $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ a base dual da base canônica $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\}$. Como já vimos, se η é uma k -forma em \mathbb{R}^n , existem $\binom{n}{k}$ funções η_J , $J = (j_1 < \dots < j_k) \subset \{1, \dots, n\}$, tais que

$\eta = \sum_J \eta_J dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$. Como queremos que d seja linear, basta definirmos d em formas do tipo

$h dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$, $0 \leq k \leq n$. Se $\alpha \in \Lambda^{0,r}(\mathbb{R}^n)$ definimos

$d\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} dx_i$. Se $\alpha = h dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$, colocamos

$d\alpha = dh \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$. Observemos que é natural colocar-se $d(dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}) = 0$, já que $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$

é uma k -forma que não depende do ponto. É claro que d está bem definida pelas duas propriedades acima. Seja agora

$f: U \rightarrow V$ um difeomorfismo C^∞ entre abertos do \mathbb{R}^n :

Afirmção: Se w é uma k -forma em V , então $f^*(dw) =$

$= d(f^*w)$. De fato, se $k = 0$, temos $d(f^*w) =$

$= d(w \circ f) = dw(f) \cdot df = f^*(dw)$. Se $w = h dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$, temos $f^*(w) = h \circ f df_{j_1} \wedge \dots \wedge df_{j_k}$, onde $f = (f_1, \dots, f_n)$,

logo $d(f^*w) = d(h_0 f) \wedge df_{j_1} \wedge \dots \wedge df_{j_k} = f^*(dh) \wedge$
 $\wedge f^*(dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}) = f^*(dh \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}) = f^*(dw)$.
O caso geral segue-se da linearidade de d .

Seja $w \in \Lambda^{k,r}(M)$. Definimos dw como sendo a
única $(k+1)$ -forma em M de classe C^{r-1} tal que para
toda carta local $x: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ temos $x_*(dw) = d(x_*w)$.

Se $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ são cartas locais com
 $U \cap V \neq \emptyset$. Em $U \cap V$ temos $x^*(d(x_*(w))) =$
 $= y^*y_*x^*(d(x_*(w))) = y^*(x \circ y^{-1})^*(d(x_*(w)))$. Pela afirma-
ção anterior, temos $x^*(d(x_*(w))) = y^*d((x \circ y^{-1})^*(x^{-1})^*(w))$
 $= y^*d(y_*(w))$, o que mostra que d está bem definida.

3.3.1 - PROPOSIÇÃO - Valem as seguinte propriedades:

- a) Se $\alpha \in \Lambda^{k,r}(M)$, $r \geq 2$, então $d^2(\alpha) = d(d(\alpha)) = 0$.
- b) Se $\alpha \in \Lambda^{k,r}(N)$ e $f: M \rightarrow N$ é de classe C^r ($r \geq 1$)
então $f^*(d\alpha) = d(f^*(\alpha))$.
- c) Se $\alpha \in \Lambda^{k,r}(M)$ e $\beta \in \Lambda^{l,r}(M)$, $r \geq 1$, então
 $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.

Deixamos a verificação para o leitor (veja Exercício 2).

3.4 - Derivada de Lie.

Como no caso de campos, a derivada de Lie para
formas mede a "variação infinitesimal" da forma na dire-

ção de um fluxo.

DEFINIÇÃO 4 - Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $\omega \in \Lambda^{k,r}(M)$, $r \geq 1$. A derivada de Lie de ω na direção de X e a k -forma de classe C^{r-1} em M , $L_X \omega$, definida por:

$$(L_X \omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \frac{d}{dt}((X_t^*(\omega))_p(v_1, \dots, v_k))_{t=0}.$$

A fórmula acima é inteiramente análoga à derivada de Lie para campos de vetores. Por exemplo se f é uma 0-forma, temos $L_X(f) = \frac{d}{dt}(X_t^*(f))_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ X_t)_{t=0} = df(X)$. Neste caso também se usa a notação $L_X(f) = X(f)$.

3.4.1 - PROPOSIÇÃO - Valem as seguintes propriedades:

a) Se $f: M \rightarrow N$ é um difeomorfismo então $f^*(L_X \omega) = L_{f^*(X)} f^*(\omega)$.

b) $L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_X(\beta)$.

c) $L_X(\omega) = i_X(d\omega) + d(i_X(\omega))$

d) L é bilinear.

e) Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é C^r então $L_{fX}(\omega) = fL_X(\omega) + df \wedge i_X(\omega)$

f) $L_X(d\omega) = d(L_X \omega)$

g) $i_{[X,Y]}(\omega) = L_X(i_Y(\omega)) - i_Y(L_X(\omega))$

h) $i_{[X,Y]}(\omega) = i_X d(i_Y(\omega)) - i_Y d(i_X(\omega)) + d(i_X(i_Y(\omega))) + i_X(i_Y(d\omega))$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } (L_{f^*(X)}(f^*(w)))_p &= \frac{d}{dt}((f^*X)_t(f^*(w)))_{p, t=0} = \\
 &= \frac{d}{dt}((f^{-1} \circ X_t \circ f)^*(f^*(w)))_{p, t=0} = \\
 &= \frac{d}{dt}((X_t \circ f)^*(w))_{p, t=0} = \frac{d}{dt}(f^*(X_t^*(w)))_{p, t=0} = \\
 &= \frac{d}{dt}(f_p^*(X_t^*(w)))_{p, t=0}, \text{ onde } f_p^*: \Lambda^k(T_{f(p)}N) \rightarrow \Lambda^k(T_pM) \text{ é} \\
 &\text{definida por } f_p^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{f(p)}(df_p \cdot v_1, \dots, \\
 &df_p \cdot v_k) \text{ é linear. Temos então que } (L_{f^*(X)}f^*(w))_p = \\
 &= f_p^*\left(\frac{d}{dt}(X_t^*(w))_{p, t=0}\right) = (f^*(L_X(w)))_p.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } L_X(\alpha \wedge \beta) &= \frac{d}{dt}(X_t^*(\alpha \wedge \beta))_{t=0} = \frac{d}{dt}(X_t^*(\alpha) \wedge X_t^*(\beta))_{t=0} = \\
 &= \frac{d}{dt}(X_t^*(\alpha))_{t=0} \wedge \beta + \alpha \wedge \frac{d}{dt}(X_t^*(\beta))_{t=0} = \\
 &= L_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_X(\beta).
 \end{aligned}$$

c) A demonstração é feita em três passos:

1) A fórmula é verdadeira para 0 e 1-formas
 $(i_X f = 0$ se f é uma função).

2) Se a fórmula for verdadeira para as formas
 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, então ela é verdadeira para
 $\alpha_1 + \dots + \alpha_m$.

3) Se a fórmula for verdadeira para $\alpha \in \Lambda^{k,r}$ e
 $\beta \in \Lambda^{l,r}$ então ela é verdadeira para $\alpha \wedge \beta$.

Provaremos apenas 1 e 3, já que 2 é imediato.

1) Para 0-formas é imediato das definições. Seja

$w \in \Lambda^{1,r}(M)$. Se (x, U) é uma carta local, podemos es-

$$\begin{aligned} \text{crever } \omega &= \sum_i \omega_i dx_i, \text{ logo } L_X(\omega) = \sum_i L_X(\omega_i dx_i) = \\ &= \sum_i (L_X(\omega_i) dx_i + \omega_i L_X(dx_i)). \text{ Colocando-se } X = \sum_i X_i \partial/\partial x_i, \\ \text{temos } d(i_X(dx_i)) &= dX_i = d\left(\frac{d}{dt}(x_i \circ X_t)\right)_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}(d(x_i \circ X_t))_{t=0} = \frac{d}{dt}(X_t^*(dx_i))_{t=0} = L_X(dx_i), \text{ logo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_X(\omega) &= \sum_i (i_X(dw_i)dx_i + \omega_i d(i_X(dx_i))). \text{ Por outro lado} \\ i_X(dw) + d(i_X(\omega)) &= i_X(\sum_i dw_i \wedge dx_i) + d(\sum_i \omega_i X_i) = \\ &= \sum_i (i_X(dw_i)dx_i - X_i dw_i + X_i d\omega_i + \omega_i dX_i) = \\ &= \sum_i (i_X(dw_i)dx_i + \omega_i d(i_X(dx_i))) = L_X(\omega), \text{ como queríamos.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Temos: } L_X(\alpha \wedge \beta) &= L_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_X(\beta) = (i_X(d\alpha) + \\ &+ d(i_X\alpha)) \wedge \beta + \alpha \wedge (i_X(d\beta) + d(i_X\beta)) = (i_X(d\alpha) \wedge \beta + \\ &+ (-1)^{k+1} d\alpha \wedge i_X\beta) + ((-1)^k d\alpha \wedge i_X\beta + \alpha \wedge d(i_X\beta)) + \\ &+ (d(i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k-1} i_X\alpha \wedge d\beta) + ((-1)^k i_X\alpha \wedge d\beta + \\ &+ \alpha \wedge i_X d\beta) = i_X(d\alpha \wedge \beta) + d((-1)^k \alpha \wedge i_X\beta) + d(i_X\alpha \wedge \beta) + \\ &+ (-1)^k i_X(\alpha \wedge d\beta) = i_X(d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta) + d(i_X\alpha \wedge \beta + \\ &+ (-1)^k \alpha \wedge i_X\beta) = i_X(d(\alpha \wedge \beta)) + d(i_X(\alpha \wedge \beta)), \text{ como queríamos.} \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração basta observar que localmente qualquer k -forma ω se escreve como $\sum_J \omega_J dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$, usar 1, 2 e 3 e fazer indução no grau.

As propriedades d), e) e f) são imediatas a partir de c).

$$\begin{aligned}
 &g) \text{ e } h). \text{ Primeiramente nós temos: } L_X(i_Y(\omega)) - i_Y(L_X(\omega)) = \\
 &= \frac{d}{dt}(X_t^*(i_Y(\omega)))_{t=0} - i_Y\left(\frac{d}{dt}(X_t^*(\omega))_{t=0}\right) = \\
 &= \frac{d}{dt}[X_t^*(i_Y(\omega)) - i_Y(X_t^*(\omega))]_{t=0} = \frac{d}{dt}X_t^*[i_Y(\omega) - i_{X_t^*}(Y)(\omega)]_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt}X_t^*(i_{(Y-X_t^*(Y))}(\omega))_{t=0} = \frac{d}{dt}X_t^*(i_o(\omega))_{t=0} + \\
 &+ X_o^*\left(\frac{d}{dt}(i_{(Y-X_t^*(Y))}(\omega))_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}(i_{(Y-X_t^*(Y))}(\omega))_{t=0}. \text{ Ora,} \\
 &\frac{d}{dt}(i_{(Y-X_t^*(Y))}(\omega))_{t=0} = i_{\frac{d}{dt}(Y-X_t^*(Y))_{t=0}}(\omega) = i_{[X,Y]}(\omega),
 \end{aligned}$$

logo $L_X(i_Y(\omega)) - i_Y(L_X(\omega)) = i_{[X,Y]}\omega$. Por outro lado

$$\begin{aligned}
 L_X(i_Y(\omega)) - i_Y(L_X(\omega)) &= i_X d(i_Y(\omega)) + d(i_X(i_Y(\omega))) = \\
 &- i_Y d(i_X(\omega)) - i_Y(i_X d\omega), \text{ por c), como queríamos.}
 \end{aligned}$$

Observação: A parte a) da proposição expressa o fato da derivada de Lie ser intrínseca. A parte b) mostra que a derivada de Lie satisfaz à regra de Leibnitz. A fórmula c) é útil em computações que envolvem a derivada de Lie. Observe que ela pode ser tomada como definição de L_X . As fórmulas h) e g) serão utilizadas no próximo parágrafo.

§4. Teorema de Frobenius para formas.

Seja π uma distribuição de $(n-k)$ -planos de classe C^r ($r \geq 1$) em M . Como já vimos π pode ser escrita localmente em termos de uma k -forma ou de k 1-formas

mas de classe C^r . Gostaríamos de expressar a integrabilidade de π em termos destas formas. Um campo de $(n-k)$ -planos será chamado de distribuição de codimensão k .

4.1 - Teorema de Frobenius para formas. - Seja π uma dis

tribuição de planos de codimensão k e classe C^r ($r \geq 1$), definida em M , variedade de dimensão n . Seja U um aberto de M onde π está definida por uma k -forma η ou por k 1-formas

$\omega_1, \dots, \omega_k$. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) π é completamente integrável em U .

b) Para todo $i = 1, \dots, k$, $d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0$.

c) Se $X \in \mathfrak{X}^r(U)$ é um campo tangente a π , então

$$L_X(\eta) = f\eta \text{ para alguma função } f: U \rightarrow \mathbb{R}.$$

d) Se $X, Y \in \mathfrak{X}^r(U)$ são dois campos tangentes a π então $[X, Y]$ é tangente a π .

Demonstração: Precisamos de um lema:

LEMA - Seja α uma 2-forma. Então $\alpha \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0$

se e somente se (localmente) existem 1-formas

$$\eta_1, \dots, \eta_k \text{ tais que } \alpha = \sum_{i=1}^k \omega_i \wedge \eta_i.$$

Demonstração: Suponhamos primeiramente que $\alpha \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge$

$$\wedge \omega_k = 0. \text{ Dado } p \in U, \text{ existe um aberto}$$

$p \in V \subset U$ onde estão definidas 1-formas $\omega_{k+1}, \dots, \omega_n$

tais que para todo $q \in V$, $\{\omega_1(q), \dots, \omega_n(q)\}$ é uma base de $(T_q M)^*$. Podemos então escrever $\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} \omega_i \wedge$

ω_j em V . Como $\alpha \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0$, vem que $\alpha_{ij} = 0$

se $k < i < j$, logo $\alpha = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i < j}} \alpha_{ij} \omega_i \wedge \omega_j = \sum_{1 \leq i \leq k} \omega_i \wedge$

$\sum_{i < j} \alpha_{ij} \omega_j = \sum_{1 \leq i \leq k} \omega_i \wedge \eta_i$. A recíproca é óbvia.

a) \Rightarrow b) - Dado $p \in U$, seja V vizinhança de p onde estão definidas 1-formas $\omega_{k+1}, \dots, \omega_n$, tais que para todo $q \in V$, $\{\omega_1(q), \dots, \omega_n(q)\}$ é uma base de $(T_q M)^*$. Seja $\{X^1, \dots, X^n\}$ a base dual de $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Como é fácil ver $\pi(q)$ é o subespaço de $T_q M$ gerado por $\{X^{k+1}(q), \dots, X^n(q)\}$, $q \in V$. Podemos escrever

$d\omega_\ell = \sum_{i < j} a_{ij}^\ell \omega_i \wedge \omega_j$, onde $a_{ij}^\ell = i_{X^j} (i_{X^i} (d\omega_\ell))$. Basta provarmos que $a_{ij}^\ell = 0$ se $k < i < j$. Por h) da Proposição 3.4.1, temos que

$$i_{X^j} (i_{X^i} (d\omega_\ell)) = i_{X^i} d(i_{X^j} (\omega_\ell)) - i_{X^j} d(i_{X^i} (\omega_\ell)) + i_{[X^j, X^i]} (\omega_\ell)$$

(aqui $i_{X^j} (i_{X^i} (\omega_\ell)) = 0$, já que ω_ℓ é uma 1-forma). Se $\ell \leq k < i < j$, temos $i_{X^i} (\omega_\ell) = i_{X^j} (\omega_\ell) = i_{[X^i, X^j]} (\omega_\ell) = 0$ em V , logo $i_{X^j} (i_{X^i} (\omega_\ell)) = a_{ij}^\ell = 0$. Resulta que

$$d\omega_\ell = \sum_{i=1}^k \omega_i \wedge \eta_i^\ell, \quad \ell = 1, \dots, k, \text{ como queríamos.}$$

b) \Rightarrow c) - Suponhamos que $d\omega_\ell = \sum_{i=1}^k \omega_i \wedge \eta_i^\ell$ em V , $1 \leq \ell \leq k$.
Seja $X \in \mathfrak{X}^r(U)$ um campo de vetores tangentes

a) π . Por c) da Proposição 3.4.1, $L_X(\eta) = i_X(d\eta) + d(i_X(\eta)) = i_X(d\eta)$, já que $i_X\eta = 0$. Como já vimos no Exemplo 7 do §3; $\eta = h \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$, onde $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^r . Temos então $d\eta = \frac{1}{h} dh \wedge \eta + h \sum_{\ell=1}^k (-1)^\ell d\omega_\ell \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_\ell \wedge \dots \wedge \omega_k$, onde o símbolo $\hat{\omega}_\ell$ indica a omissão de ω_ℓ no produto. Temos então $i_X(d\eta) = \frac{dh(X)}{h} \eta + h \sum_{\ell=1}^k (-1)^\ell i_X(d\omega_\ell) \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_\ell \wedge \dots \wedge \omega_k = \frac{dh(X)}{h} \eta + h \sum_{\ell=1}^k (-1)^\ell i_X(\sum_{i=1}^k \omega_i \wedge \eta_i^\ell) \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_\ell \wedge \dots \wedge \omega_k = f\eta$, onde $f = \frac{dh(X)}{h} - \sum_{i,\ell=1}^k \eta_i^\ell(X)$. Portanto $L_X\eta = f\eta$, como queríamos.

c) \Rightarrow d) - Sejam X e Y dois campos tangentes a π . Pela relação g) da Proposição 3.4.1 temos

$$i_{[X,Y]}(\eta) = L_X(i_Y(\eta)) - i_Y(L_X(\eta)) = L_X(i_Y(\eta)) - f i_Y(\eta).$$

Como $i_X(\eta) = i_Y(\eta) = 0$, vem que $i_{[X,Y]}(\eta) = 0$, logo $[X,Y]$ é tangente a π , como queríamos.

d) \Rightarrow a) - Decorre do Teorema 2.2.

EXERCÍCIOS.

1. Sejam $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $f^*: \Lambda^k(N) \rightarrow \Lambda^k(M)$ a aplicação co-induzida. Mostre que:
 - a) f^* é linear.
 - b) Se $\alpha \in \Lambda^k(M)$ e $\beta \in \Lambda^j(M)$ então $f^*(\alpha \wedge \beta) =$

$$= f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta).$$

c) Se $f: M \rightarrow N$ e $g: N \rightarrow P$, então $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

d) Se f é um difeomorfismo então $f^*(i_X(\alpha)) = i_{f^*(X)}(f^*(\alpha))$.

2. Demonstre as seguintes propriedades:

a) Se $\alpha \in \Lambda^{k,r}(M)$, $r \geq 2$, então $d^2(\alpha) = 0$.

b) Se $\alpha \in \Lambda^{k,r}(M)$ e $f: M \rightarrow N$ é C^r ($r \geq 1$), então $f^*(d\alpha) = d(f^*(\alpha))$.

c) Se $\alpha \in \Lambda^{k,r}(M)$ e $\beta \in \Lambda^{j,r}(M)$, $r \geq 1$, então

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

3. Seja X um campo de classe C^1 definido na variedade M , compacta sem bordo. Mostre que o fluxo de X está definido em $\mathbb{R} \times M$.

4. Sejam $f: M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^1 e $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Mostre que f comuta com o fluxo de X se e somente se $f^*(X) = X$.

5. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ ($r \geq 1$) e X_t, Y_t os fluxos de X e Y . Suponha que $[X, Y] = f \cdot Y$, onde $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é C^{r-1} .

Mostre que:

$$a) \text{ Para todo } t \in \mathbb{R}, (X_t^*(Y))_p = e^{\int_0^t f(X_\tau(p)) d\tau} Y(p),$$

$p \in M$.

b) Se $s, t \in \mathbb{R}$, então $X_{-t} \circ Y_s \circ X_t(p) = Y_{\gamma(s,t,p)}(p)$, onde γ satisfaz à equação $\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s,t,p) = g(t, Y_{\gamma(s,t,p)}(p))$ com condição inicial $\gamma(0,t,p) = 0$, sendo $g(t,x) = e^{\int_0^t f(X_\tau(x)) d\tau}$

c) Mostre que para todo $t \in \mathbb{R}$, X_t leva órbitas de Y sobre órbitas de Y . Em particular se $Y(p) = 0$ para algum $p \in M$, então $Y(X_t(p)) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

6. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{R}^n)$ e DX, DY suas derivadas no sentido usual. Mostre que $[X, Y] = DY(X) - DX(Y)$.

7. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}^2(M)$. Mostre que:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

8. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^n)$, $r \geq 1$, tais que $[X, Y] = 0$. Suponha que $X(0) = 0$ e que $DX(0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo.

a) Mostre que $Y(0) = 0$.

b) Seja X_t o fluxo de X . Se $W^S(0) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} X_t(p) = 0\}$, mostre que $W^S(0)$ é invariante pelo fluxo de Y .

9. Sejam X^1, \dots, X^k campos C^r em \mathbb{R}^n , $n \geq k \geq 1$ e $r \geq 1$. Suponha que $[X^i, X^j] = 0$ para todo i, j e que

$X^1(0), \dots, X^k(0)$ são linearmente independentes. Mostre que existem vizinhanças U e V de 0 e um difeomorfismo C^r , $f: U \rightarrow V$, tais que $f^*(X^i) = \partial/\partial x_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

10. Sejam X e Y campos de vetores de classe C^r em \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ e $r \geq 2$. Suponha que $X(0) \neq 0$ e $Y(0) = 0$. Mostre que existem vizinhanças U e V de 0 e um difeomorfismo C^r , $f: U \rightarrow V$, tais que $f^*(X) = \partial/\partial x_1$ e $f^*(Y) = \sum_{i=1}^n Y_i(x_2, \dots, x_n) \partial/\partial x_i$.
 Mostre que o campo $Z = \sum_{i=2}^n Y_i(x_2, \dots, x_n) \partial/\partial x_i$, satisfaz $[f^*(X), Z] = 0$ e o par $X, f_*(Z)$ gera uma ação de \mathbb{R}^2 em V , cujas órbitas coincidem com as órbitas da ação gerada por X e Y , numa vizinhança de 0 .

11. Campos de planos orientáveis.

Dado um espaço vetorial E de dimensão $n \geq 1$, diremos que as duas bases ordenadas de E , $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$ definem a mesma orientação em E , se a matriz de mudança de base $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, definida por $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$, tem determinante positivo.

Seja B o conjunto de bases de E . Em B a relação $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ quando \mathcal{B} e \mathcal{B}' definem a mesma orientação em E , é uma relação de equivalência. O quocien

te B/\sim possui duas classes de equivalência.

Seja π um campo de k -planos contínuo em M .

Consideremos uma cobertura de M por abertos

$(U_i)_{i \in I}$, tal que para cada $i \in I$, π/U_i é definido por k campos de vetores contínuos X_i^1, \dots, X_i^k . Para cada $x \in U_i$, as bases $\beta_i(x) = \{X_i^1(x), \dots, X_i^k(x)\}$ e $\beta_i^-(x) = \{-X_i^1(x), X_i^2(x), \dots, X_i^k(x)\}$ definem as duas orientações de $\pi(x)$, $\mathcal{O}_i^+(x)$ e $\mathcal{O}_i^-(x)$, digamos.

Dizemos que π é orientável se para todo $x \in M$ é possível definir uma orientação $\mathcal{O}(x)$ em $\pi(x)$ de tal forma que para todo $i \in I$, $\mathcal{O}/U_i \equiv \mathcal{O}_i^+$ ou \mathcal{O}_i^- . Se $k = \dim(M)$ e $\pi(x) = T_x M$, dizemos que M é orientável.

Dizemos que π é transversalmente orientável se existe uma métrica riemanniana em M tal que a distribuição de $(n-k)$ -planos π^\perp , ortogonal a π , é orientável.

- Mostre que o fato de π ser transversalmente orientável independe da métrica riemanniana.
- Seja η uma $(n-k)$ -forma definida num aberto $U \subset M$, tal que $\pi(x) = \{v \in T_x M \mid i_v \eta = 0\}$, $x \in U$. Mostre que o conjunto $\mathcal{O}^+(x) = \{\beta = \{v_1, \dots, v_{n-k}\} \mid \beta \text{ é base de } \pi^\perp(x) \text{ e } \eta_x(v_1, \dots, v_{n-k}) > 0\}$ define uma das orientações de $\pi^\perp(x)$.
- Mostre que existe $\eta \in \Lambda^{n-k}(M)$ tal que

$\pi(x) = \{v \in T_x M \mid i_v \eta = 0\}$ se e somente se π é transversalmente orientável.

- d) Mostre que M^n é orientável se e somente se existe uma n -forma C^∞ em M que não se anula em nenhum ponto de M .
- e) Suponha que existe um campo de k -planos π em M que é orientável e transversalmente orientável. Mostre que M é orientável.
- f) Suponha que M e π são transversalmente orientáveis. Mostre que π é transversalmente orientável.
- g) Seja π um campo de $(n-1)$ -planos. Então π é transversalmente orientável se e somente se existe um campo de vetores em M transversal a π .

12. Recobrimento duplo orientável. Seja π um campo de k -planos não orientável em M .

- a) Mostre que existe um recobrimento $p: \tilde{M} \rightarrow M$ com duas folhas tal que o campo de k -planos $\tilde{\pi} = p^*(\pi)$ em \tilde{M} , definido por $\tilde{\pi}(x) = (Dp(x))^{-1}(\pi(p(x)))$, é orientável. Mostre que \tilde{M} é conexa.
- b) Se M é simplesmente conexa então todo campo de k -planos em M é orientável. Em particular M é orientável.

Sugestão: a) Coloque $\tilde{M} = \{(x, \theta(x)) \mid x \in M \text{ e } \theta(x) \text{ é uma das orientações de } \pi(x)\}$. Defina

uma estrutura de variedade diferenciável em \tilde{M} tal que $p: \tilde{M} \rightarrow M$ definida por $p(x, \theta(x)) = x$ define um recobrimento duplo.

13. Dê exemplo de um campo de 1-planos não orientável em T^2 . Determine o seu recobrimento duplo.
14. Seja η uma $(n-k)$ -forma de classe C^∞ em M^n , tal que para todo $q \in M$, $\pi(q) = \{v \in T_q M \mid i_v(\eta_q) = 0\}$ tem dimensão k . Mostre que π é completamente integrável se e somente se para todo $q_0 \in M$ existe uma vizinhança U de q_0 e $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ que não se anula tal que $\eta = f\alpha$, onde $d\alpha = 0$.

CAPÍTULO II

FOLHEAÇÕES

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^∞ .

DEFINIÇÃO 1 - Uma folheação \mathfrak{F} de codimensão p e classe C^r está definida por uma coleção de cartas locais

$$M \supset U_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{R}^m \quad i \in I$$

da variedade tais que:

(1) $\bigcup_{i \in I} U_i = M.$

(2) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ as mudanças de coordenadas

$$h_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \text{ tem a forma}$$

$$h_{ji}(x, y) = (h^1(x, y), h^2(y)) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p.$$

e são de classe C^r .

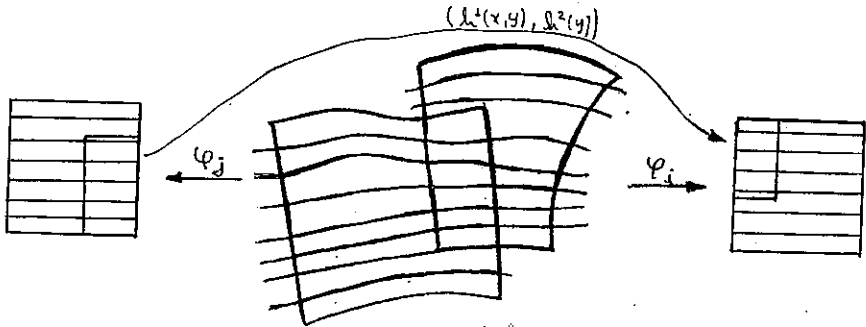


Fig. 1

As componentes conexas de $\varphi_i^{-1}(x, y_0)$ $y_0 = \text{constante}$, são denominadas placas de U_i . Elas são subvariedades mergulhadas de U_i de codimensão p . A condição (2) expressa que se $\alpha_i \subset U_i$, $\beta_j \subset U_j$ são placas então ou $\alpha_i \cap \beta_j = \emptyset$ ou $\alpha_i \cap \beta_j$ é aberto em α_i e β_j .

Se $\pi_2: \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ é a projeção $\pi_2(x, y) = y$, definimos $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^p$ por $f_i = \pi_2 \circ \varphi_i$. As placas de U_i são então as componentes conexas de $f_i^{-1}(y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}^p$. No caso em que $r \geq 1$ podemos tomar a seguinte definição equivalente:

DEFINIÇÃO 2 - Uma folheação \mathcal{F} de codimensão p e classe C^r está definida por uma coleção de submersões,

$$U_i \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}^p \quad i \in I$$

tais que

- (1) Para todo $i \in I$, U_i é aberto em M e $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.
- (2) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ existem homeomorfismos de classe C^r $g_{ij}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ tais que $f_j = g_{ji} \circ f_i$ nos pontos de $U_i \cap U_j$.

As aplicações f_i são denominadas aplicações distinguidas da folheação e as sub-variedades $f_i^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^p$, placas de U_i .

Caso $r \geq 1$, os planos tangentes às placas definem um campo de planos de dimensão p e classe C^{r-1} . Como foi visto no Capítulo I este campo de planos é completamente integrável. Reciprocamente temos pelo teorema de Frobenius que um campo de planos completamente integrável de codimensão p e classe C^r define uma folheação de classe C^r e codimensão p .

Uma folha de \mathfrak{F} é um subconjunto conexo que é união maximal de placas de \mathfrak{F} . Isto é, se F é uma folha e α é uma placa com $\alpha \cap F \neq \emptyset$ então $\alpha \subset F$.

De definição segue-se que toda folha é uma sub-variedade imersa de codimensão p e que M é a união disjunta das folhas de \mathfrak{F} .

As folhas podem não ser subvariedades mergulhadas, de facto veremos que é possível que todas as folhas sejam densas em M .

No que segue estudaremos diversos exemplos de folheações.

EXEMPLO 1 - Submersões. Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n respectivamente e $f: M \rightarrow N$ uma submersão, isto é, uma aplicação C^r , $r \geq 1$, cuja derivada $Df(q)$ tem posto máximo igual a n em todos os pontos $q \in M$.

Pelo teorema da forma local das submersões ([15]) as componentes conexas das subvariedades $f^{-1}(y)$ definem uma folheação de codimensão n e classe C^r . Neste caso todas as folhas de \mathcal{F} são mergulhadas.

Um exemplo específico disto é dado por $M = \mathbb{R}^3$, $N = \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = \alpha(r)e^{x_3}$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ onde α é uma função C^∞ igual a 1 numa vizinhança de zero e $\alpha(1) = 0$, $\alpha'(1) \neq 0$.

Todas as folhas são invariantes por translações ao longo do eixo x_3 .

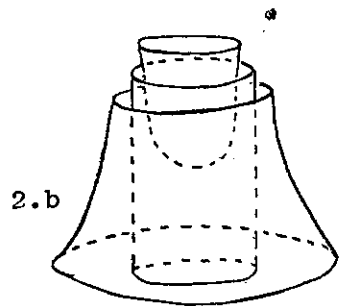
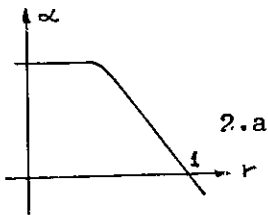


Fig. 2

Outro exemplo de folheação gerada por submersões é o definido pelas fibras de um espaço fibrado.

Em particular temos a vizinhança tubular de uma subvariedade na forma do seguinte

Teorema da Vizinhança Tubular (veja [14]) - Seja $N \subset M$ uma vizinhança $T(N) \supset N$ e uma submersão $\pi: T(N) \rightarrow N$ de classe C^r tal que $\pi(q) = q$ para $q \in N$.

EXEMPLO 2 - Aplicações transversais a uma folheação. Generalizando o exemplo anterior, seja \mathcal{F} uma folheação C^r de codimensão p de uma variedade N e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^s , $1 \leq s \leq r$, transversal a \mathcal{F} , isto é, para cada $x \in M$, $f(x) = y$,

$$Df(x).(TM_x) + T_y \mathcal{F} = T_y N$$

onde $T_y \mathcal{F}$ é o subespaço de $T_y N$ tangente a folha de \mathcal{F} em y .

Pelo teorema de transversalidade [16] se F é uma folha de \mathcal{F} então $f^{-1}(F)$ é uma subvariedade imersa em M de codimensão p . As componentes conexas de $f^{-1}(F)$ onde F é uma folha arbitrária de \mathcal{F} definem as folhas de uma folheação de M . Esta folheação será denotada $f*\mathcal{F}$. Ela é de classe C^s e codimensão p .

Quando f é uma submersão ela é transversal a qualquer

folheação de N e assim $f^*\tilde{\mathcal{F}}$ está definida. Em particular se $\tilde{\mathcal{F}}$ é a folheação por pontos de N , $f^*\tilde{\mathcal{F}}$ é a folheação do Exemplo 1.

EXEMPLO 3 - Campos de vetores. As curvas integrais de um campo de vetores aparecem como soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Se o campo não possui singularidades as curvas integrais definem uma folheação de dimensão um .

Um exemplo específico é a suspensão de um difeomorfismo $f: N \rightarrow N$, definido como segue:

No produto $N \times [0,1] \ni (x,t)$ consideremos a relação de equivalência que identifica os pontos $(x,0)$ e $(f(x),1)$ e M a variedade obtida como o quociente de $N \times [0,1]$ por esta identificação.

Então o campo $\partial/\partial t$ em $N \times [0,1]$ induz um campo sem singularidades x em M . Por exemplo se $N = \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x$, obtemos que M é a faixa de Moebius.

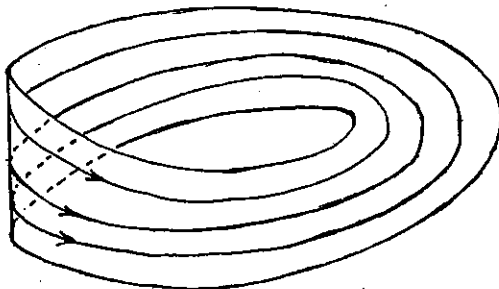


Fig. 3

Esta maneira de obter folheações será generalizada no Capítulo IV à suspensão de grupos de difeomorfismos.

EXEMPLO 4 - Campos de vetores holomorfos. Analogamente ao caso anterior, as equações diferenciais ordinárias no domínio complexo definem campos de vetores holomorfos que possuem curvas integrais complexas.

Fora dos zeros do campo, as curvas integrais tem dimensão real dois. Por exemplo a equação linear

$$\frac{dz}{dT} = A.z \quad , \quad A \in Gl(n, \mathbb{C}) \quad , \quad T \in \mathbb{C}$$

tem por soluções as curvas a parâmetro complexo,

$$z = z(T) = \exp(T.A)z_0 \quad , \quad z(0) = z_0.$$

EXEMPLO 5 - Ações de grupos de Lie. Uma ação de um grupo de Lie G numa variedade M é uma aplicação

$$\varphi: G \times M \rightarrow M$$

tal que $\varphi(e, x) = x$ e $\varphi(g_1 \cdot g_2, x) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, x))$ onde $e \in G$ é a identidade de G e $g_1, g_2 \in G$, $x \in M$ são arbitrários.

A órbita de $x \in M$, $\mathcal{O}_x = \{\varphi(g, x) \mid g \in G\}$ é parametrizada por G e sua dimensão pode ser qualquer número de zero a $\dim G$.

A ação φ é dita localmente livre se $\dim \mathcal{O}_x = \dim G$ pa

ra todo $x \in M$.

As ações de $G = \mathbb{R}$ são também chamadas fluxos e induzem campos

$$X(x) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) \right|_{t=0} .$$

Reciprocamente, todo campo de vetores numa variedade compacta induz um fluxo. Assim φ é localmente livre se e só se X não se anula em nenhum ponto.

Sejam M, N variedades diferenciáveis compactas e X, Y campos de vetores sem singularidades em M e N respectivamente. Se $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ e $\psi: \mathbb{R} \times N \rightarrow N$ são os fluxos induzidos por X e Y então

$$\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^2 \times (M \times N) \rightarrow M \times N$$

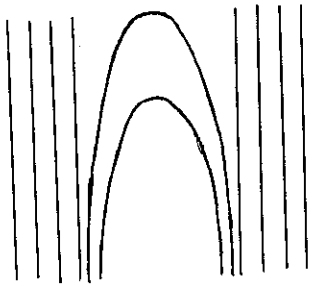
definida por $\tilde{\varphi}(s, t, x, y) = (\varphi(s, x), \psi(t, y))$ é uma ação localmente livre de \mathbb{R}^2 .

Como as órbitas de φ e ψ são imersões injetivas de \mathbb{R} ou S^1 teremos que as órbitas de $\tilde{\varphi}$ são imersões injetivas de \mathbb{R}^2 , $\mathbb{R} \times S^1$ ou $S^1 \times S^1$.

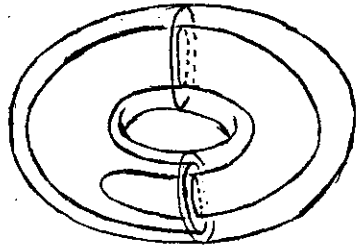
EXEMPLO 6 - Folheação de Reeb de S^3 . ([24]) - O seguinte exemplo desempenhou um papel importante no desenvolvimento da teoria das folheações.

Consideremos a folheação de classe C^∞ do plano (x, y) dada pelas retas $x = a$, $|a| \geq 1$, e pelo gráfico das fun-

ções $y = -\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + b$, $b \in \mathbb{R}$ para $|x| < 1$.



4.a



4.b

Fig. 4

Girando a faixa $|x| \leq 1$ em volta do eixo y obtemos uma folheação \mathfrak{F} de um cilindro sólido C invariante por translações ao longo do eixo.

Seja $C_0 = \{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ a parte de C entre as coordenadas $y = 0, y = 1$. Em C_0 introduzimos a seguinte relação de equivalência

$$(x_1, x_2, 0) \sim (x_1, x_2, 1).$$

A variedade C_0/\sim é difeomorfa a $D^2 \times S^1$ e \mathfrak{F} induz uma folheação \mathcal{R} de $D^2 \times S^1$, chamada folheação de Reeb de $D^2 \times S^1$. Na figura 4.b ilustramos esta folheação.

A esfera $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ pode ser considerada como a união dos dois toros sólidos $T_i \simeq D^2 \times S^1$, $i = 1, 2$, unidos ao longo do bordo por um difeomorfismo que leva meridianos de ∂T_1 em paralelos de ∂T_2 e vice-versa. O toro sólido T_1 pode ser defini

do pelas equações $\sum_{i=1}^4 x_1^2 = 1$ e $x_1^2 + x_2^2 \leq 1/2$ e o toro sólido T_2 pelas equações $\sum_{i=1}^4 x_1^2 = 1$ e $x_1^2 + x_2^2 \geq 1/2$. Considerando-se em T_1 e em T_2 folheações R_1 e R_2 , análogas à anterior, onde $\partial T_1 = \partial T_2$ é uma folha de R_1 e R_2 , obtemos uma folheação de codimensão um de S^3 . Esta folheação é a chamada folheação de Reeb de S^3 .

EXEMPLO 7 - Turbilhionização de uma folheação. Seja $\tilde{\mathcal{F}}$ uma folheação de codimensão um de uma variedade M de dimensão três. Suponhamos que existe um mergulho

$$\varphi: S^1 \times D^2 \rightarrow M$$

tal que (i) $\varphi|_{S^1 \times \{x\}}$ é transversal a $\tilde{\mathcal{F}}$ para todo $x \in D^2$ e (ii) $\varphi(\theta \times D^2)$ está contido numa folha para todo $\theta \in S^1$.

Podemos então modificar $\tilde{\mathcal{F}}$ no toro sólido $\varphi(S^1 \times D^2)$ sem mudar a folheação no exterior, como segue:

No cilindro sólido $R \times D^2$ consideremos a folheação C^∞ definida pelo cilindro $x_1^2 + x_2^2 = 1/2$ mais os gráficos das funções $x_3 = a(x_1^2 + x_2^2) + b$, $b \in R$, nos pontos (x_1, x_2) com $x_1^2 + x_2^2 \neq 1/2$.

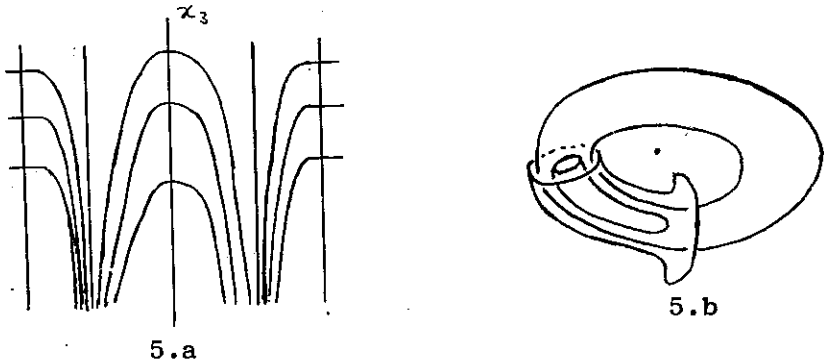


Fig. 5

Aqui $\alpha(r) = 0$ numa vizinhança de $r = 1$ e $\frac{d^n \alpha}{dr^n}(r) \rightarrow -\infty$ quando $r \rightarrow 1/2$, para todo $n \geq 0$.

Como esta folheação é invariante por translações ao longo do eixo x_3 ela define uma folheação de $S^1 \times D^2$ que por sua vez induz via φ uma folheação \mathfrak{F}' de M com mais uma folha compacta.

Dizemos que \mathfrak{F}' é obtida de \mathfrak{F} por turbilhonização.

EXEMPLO 8 - Folheações em variedades de dimensão três. Es

boçaremos aqui uma demonstração do teorema de Lickonish [13], Novikov-Zeishang [20]: Toda variedade compacta, orientável de dimensão três admite uma folheação de codimensão um.

A demonstração de [20] é baseada no seguinte resultado sobre a topologia das variedades de dimensão três.

TEOREMA (H. Wallace, [36]) - Seja M uma variedade orientável, compacta, de dimensão três. Existem toros sólidos mergulhados, disjuntos T_i em M e T_i' em S^3 $i = 1, \dots, n$ tais que $M - \bigcup_{i=1}^n T_i$ e $S^3 - \bigcup_{i=1}^n T_i'$ são difeomorfas.

Mostra-se então que os toros T_i' podem ser tomados transversais a folheações de Reeb de S^3 . Usando o processo de turbilhonização obtemos uma folheação C^∞ de $S^3 - \bigcup_{i=1}^n T_i'$ onde cada componente $\partial T_i'$ do bordo é uma folha compacta.

Pelo Teorema de Wallace isto induz uma folheação de $M - \bigcup_{i=1}^n T_i$ onde os bordos ∂T_i são folhas.

Esta folheação é completada a uma folheação de M , definindo uma folheação de Réeb em cada toro sólido T_i .

Observação: Usando decomposições de Alexander, B. Lawson ([12]) mostrou em 1970 a existência de folheações de codimensão um nas esferas S^{2^k+3} $k = 1, 2, 3$. Este resultado foi generalizado para qualquer esfera de dimensão ímpar por Durfee [4] e Tamura [32].

Posteriormente, e com métodos diferentes W. Thurston ([33], [34]) mostrou que qualquer campo de planos de codimensão um numa variedade compacta orientável de dimensão n , é homotópico a um campo de planos comple-

tamente integrável.

No caso $n = 3$ este resultado já era conhecido ([37]).

Em particular tem-se que qualquer variedade compacta de característica de Euler zero admite uma folheação de codi mensão um.

CAPÍTULO III

HOLONOMIA E OS TEOREMAS DE ESTABILIDADE

Neste capítulo \mathfrak{F} denota uma folheação de codimensão p e classe C^r , $r \geq 0$, de uma variedade M . O nosso objetivo é estudar o comportamento das folhas vizinhas de uma folha F fixada a priori. Mostraremos que este problema é equivalente ao estudo das órbitas de uma representação de $\pi_1(F)$ no grupo de germes de difeomorfismo de \mathbb{R}^p mantendo $0 \in \mathbb{R}^p$ fixo. Esta representação, chamada holonomia de F associa a cada classe $[\alpha] \in \pi_1(F)$ um germe de difeomorfismo $f_{[\alpha]}$ de uma seção transversal Σ a F . A órbita $\{f_{[\alpha]}^n(x) \in \Sigma; n \in \mathbb{Z}\}$, consiste dos retornos sucessivos "sobre α " da folha F_x . Daí segue-se que quanto menor é $\pi_1(F)$ menor será a recorrência das folhas vizinhas. O Teorema de Estabilidade Local expressa isto da maneira seguinte: Se F é uma folha compacta de \mathfrak{F} com grupo fundamental finito, então existe uma vizinhança V de F saturada pelas folhas de \mathfrak{F} tal que toda folha em V é compacta com grupo fundamental finito.

O Teorema de Estabilidade Completa oferece a seguinte versão global:

Se $\text{cod } \mathfrak{F} = 1$ e M é compacta, conexa, e existe uma folha compacta com grupo fundamental finito então todas as folhas são compactas e têm grupo fundamental finito.

§1. Holonomia de uma folha.

Um disco coordenado de uma folheação \mathfrak{F} é um aberto $U \subset M$ homeomorfo a $D^{n-p} \times D^p$, tal que a restrição \mathfrak{F}/U é equivalente à folheação trivial $D^{n-p} \times \{x\}$ de $D^{n-p} \times D^p$, onde D^j denota um disco de dimensão j . Uma placa de \mathfrak{F} em U é uma folha de \mathfrak{F}/U .

DEFINIÇÃO 1 - Sejam F uma folha de \mathfrak{F} e $\gamma: [0,1] \rightarrow F$ um caminho contínuo. Uma cadeia subordinada a γ , é uma coleção de discos coordenados de \mathfrak{F} , $(U_i)_{i=0}^k$, tal que: a) Existe uma partição de $I = [0,1]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{i+1} = 1$ tal que $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, $0 \leq i \leq k$. b) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cup U_j$ está contido em um disco coordenado V_{ij} .

Observação 1: Dada uma curva $\gamma: I \rightarrow F$ como acima, sempre existe uma cadeia subordinada a γ . De fato, tomemos inicialmente uma cobertura $(V_i)_{i=0}^l$ de $\gamma(I)$ por discos coordenados tal que $\bigcup_i \overline{V_i}$ é compacto. Seja δ o

número de Lebesgue da cobertura $(V_i)_{i=0}^l$. Para cada $x \in \gamma(I)$ existe um disco coordenado U_x contendo x e com diâmetro menor que $\delta/2$. Basta considerar agora uma cobertura de $\gamma(I)$ por discos $(U_i = U_{x_i})_{i=0}^k$. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, o diâmetro de $U_i \cup U_j$ é menor que δ , logo $U_i \cap U_j \subset V_n$ para algum $n \in \{0, \dots, l\}$.

Vamos agora definir a holonomia de um caminho.

Consideremos dois discos de dimensão p , \tilde{D}_0 e \tilde{D}_1 , centrados em $y_0 = \gamma(0)$ e $y_1 = \gamma(1)$ respectivamente, topologicamente transversais às folhas de \mathfrak{F} (isto é, se U é um disco coordenado que contém y_0 , então \tilde{D}_0 intersepta cada placa de U em no máximo um ponto).

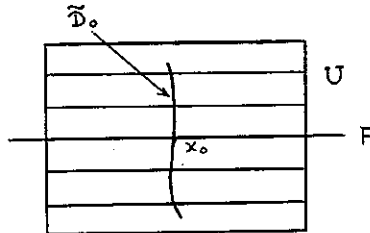


Fig. 1

Fixemos agora uma cadeia subordinada a γ , $(U_i)_{i=0}^k$, e uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = 1$ satisfazendo à condição a) da Definição 1. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ fixemos um disco mergulhado $D_i \subset U_{i-1} \cap U_i$, de dimensão p , centrado em $x_i = \gamma(t_i)$, transversal às placas de U_i . Tomemos $D_0 \subset \tilde{D}_0 \cap U_0$ e $D_{k+1} \subset \tilde{D}_1 \cap U_k$.

Para cada $x \in D_i$ suficientemente próximo de x_i , a placa de U_i que passa por x intercepta D_{i+1} num único ponto $f_i(x)$.

O domínio da aplicação f_i é um disco $D'_i \subset D_i$ e $f_i: D'_i \rightarrow D_{i+1}$ é um homeomorfismo sobre $f_i(D'_i)$. Seja \hat{D}_0 o domínio da aplicação $f_\gamma = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_0: \hat{D}_0 \rightarrow D_{k+1} \subset \tilde{D}_1$. A aplicação $f_\gamma: \hat{D}_0 \rightarrow \tilde{D}_1$ é um homeomorfismo sobre $f_\gamma(\hat{D}_0)$. Chamaremos f_γ de aplicação de holonomia associada a γ e \mathfrak{F} .

Afirmção - A aplicação f_γ independe dos discos $(D_i)_{i=1}^k$, da partição $(0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = 1)$ e da cadeia subordinada $(U_i)_{i=0}^k$.

Demonstração: Fixemos primeiramente a cadeia subordinada $(U_i)_{i=0}^k$ e a partição. Suponhamos que $(D_i)_{i=1}^k$ e $(B_i)_{i=1}^k$ são duas coleções de discos como acima. Estamos supondo evidentemente que $D_0 = B_0$, $D_{k+1} = B_{k+1}$ e $x_i \in D_i \cap B_i$, $i = 1, \dots, k$. Para cada $x \in D_i$, próximo de x_i podemos definir $\beta_i(x) \in B_i$, interceptando a placa de U_i que passa por x com B_i . Temos então definido um homeomorfismo $\beta_i: \hat{D}_i \rightarrow \hat{B}_i$, onde $x_i \in \hat{D}_i \subset D_i$ e $x_i \in \hat{B}_i \subset B_i$. Sejam $f_i: D'_i \rightarrow D_{i+1}$ e $g_i: B'_i \rightarrow B_{i+1}$ como anteriormente. Ora, $U_i \cup U_{i+1} \subset V$, disco coordenado, logo o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{D}_i \cap D'_i & \xrightarrow{f_i} & \hat{D}_{i+1} \\
 \beta_i \downarrow & & \downarrow \beta_{i+1} \\
 \hat{B}_i \cap B'_i & \xrightarrow{g_i} & \hat{B}_{i+1}
 \end{array}$$

O diagrama comuta porque uma placa de V intercepta cada disco transversal em no máximo um ponto. Restringindo as aplicações f_i, g_i e β_i , $0 \leq i \leq k$ a domínios convenientes, temos que $f_Y = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_0 = \beta_{k+1}^{-1} \circ g_k \circ \beta_k \circ \beta_k^{-1} \circ g_{k-1} \circ \beta_{k-1} \circ \dots \circ \beta_1 \circ \beta_1^{-1} \circ g_0 \circ \beta_0 = g_Y$, já que evidentemente β_0 e β_{k+1} são aplicações identidades. Com argumento análogo mostra-se que f_Y independe da partição $(0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = 1)$.

Tomemos agora $(U_i)_{i=0}^k$ e $(U'_i)_{i=0}^{k'}$ duas cadeias subordinadas a γ . se Para todo $i \in \{0, \dots, k'\}$, $U'_i \subset U_j$ para algum j , é imediato que f_Y e f'_Y coincidem na interseção de seus domínios. O argumento é análogo ao anterior. Caso isto não ocorra, pela Observação 1, podemos construir uma cadeia subordinada a γ , $\{U''_i\}_{i=0}^{k''}$ tal que para todo $i \in \{0, \dots, k''\}$, $U''_i \subset U_j \cap U'_n$ para algum $j \in \{0, \dots, k\}$ e $n \in \{0, \dots, k'\}$. Isto implica que $f_Y = f''_Y$ e $f'_Y = f''_Y$ nas interseções de seus domínios, logo $f_Y = f'_Y$. Isto prova a afirmação.

Observação 2: Segue da definição de f_Y os seguintes fatos:

- a) $f_Y(x_0) = x_{k+1}$
- b) Se $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, então $f_{Y^{-1}} = (f_Y)^{-1}$.
- c) Se \tilde{x} é de classe C^r ($r \geq 1$), as aplicações intermediárias f_i ($0 \leq i \leq k$), são C^r , logo f_Y é C^r .

Como f_γ possui uma inversa f_γ^{-1} , também C^r , f_γ é um difeomorfismo C^r .

d) Se $\tilde{\gamma}$ é obtida de γ por uma pequena deformação na folha, com extremidades fixas, então $f_{\tilde{\gamma}} = f_\gamma$, numa vizinhança $D''_0 \subset D'_0$ de x_0 . Prova-se isto observando-se que para $\tilde{\gamma}$ próxima de γ , existe uma cadeia $(U_i)_{i=0}^k$, subordinada a γ e $\tilde{\gamma}$ simultaneamente.

e) Se $B_0 \subset U_0$ e $B_{k+1} \subset U_k$ são outros discos transversais a $\tilde{\gamma}$, centrados em x_0 e x_{k+1} , as projeções ao longo das placas de U_0 e U_{k+1} definem homeomorfismos C^r , $\varphi_0: B_0 \rightarrow D_0$ e $\varphi_{k+1}: B_{k+1} \rightarrow D_{k+1}$. A nova transformação de holonomia, $B_0 \supset B'_0 \xrightarrow{g_\gamma} B_{k+1}$ satisfaz

$$g_\gamma(x) = \varphi_{k+1}^{-1} \circ f_\gamma \circ \varphi_0(x) \quad , \quad x \in B'_0 .$$

Em particular, se γ é um caminho fechado, $D_{k+1} = D_0$ e $B_{k+1} = B_0$, então g_γ e f_γ são conjugados, isto é, $g_\gamma = \varphi^{-1} \circ f_\gamma \circ \varphi$, onde $\varphi = \varphi_0 = \varphi_{k+1}$.

DEFINIÇÃO 2 - Sejam E, F espaços topológicos e $x \in E$.

No conjunto de aplicações $E \supset V \xrightarrow{f} F$ onde V é uma vizinhança de x , introduzimos a relação de equivalência R :

fRg se existe uma vizinhança $W \ni x$ tal que $f|_W = g|_W$.

A classe de equivalência de f é denominada germe de f

em x .

Quando $E = F$ o conjunto $G(x, E)$ de germes de homeomorfismos locais que deixam fixo x é um grupo com a multiplicação germe $(f) \cdot$ germe $(g) =$ germe $(f \circ g)$.

1.1 - PROPOSIÇÃO - Sejam $\gamma_i: I \rightarrow M$, $i = 0, 1$ caminhos contínuos contidos numa folha F de \mathfrak{F} tais que $\gamma_i(0) = y_0$, $\gamma_i(1) = y_1$ $i = 0, 1$. Sejam Σ_0 , Σ_1 seções transversais a F em y_0 , y_1 ;

$\Sigma_0 \simeq V_i \xrightarrow{f_{\gamma_i}} \Sigma_1$ aplicações de holonomia associadas a γ_i e $\tilde{\phi}_{\gamma_i}$ o germe de f_{γ_i} em y_0 .

(1) Se $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ rel $(0, 1)$ então $\tilde{\phi}_{\gamma_0} = \tilde{\phi}_{\gamma_1}$.

(2) Se $y_0 = y_1$ e $\Sigma_0 = \Sigma_1$, então a transformação $\gamma \rightarrow \tilde{\phi}_\gamma$ induz um homomorfismo

$$\tilde{\phi}: \pi_1(F, y_0) \rightarrow G(y_0, \Sigma_0) \quad , \quad \tilde{\phi}([\gamma]) = \tilde{\phi}_\gamma$$

do grupo fundamental de F em y_0 no grupo de germes de homeomorfismos C^r de Σ_0 mantendo y_0 fixo.

Demonstração: Seja $H: I \times I \rightarrow F$ a homotopia entre γ_0 e γ_1 , i.e. $H(t, 0) = \gamma_0(t)$, $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ e $H(0, s) = y_0$, $H(1, s) = y_1$ para todo $s, t \in I$.

Para cada caminho $\gamma_s: I \rightarrow F$, $\gamma_s(t) = H(t, s)$, existe uma cadeia subordinada a γ_s . Por continuidade, esta cadeia é também subordinada a qualquer $\gamma_{s'}$, com s' próximo de

s. Consequentemente podemos encontrar uma coleção de cadeias $(C_i)_{i=1}^n$ e uma partição de $I: 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ tais que para qualquer $i = 1, \dots, n$ C_i é subordinada a todos os caminhos $\gamma_s, s_{i-1} \leq s \leq s_i$. Isto implica por d da Observação 2 que $\text{germe}(f_{\gamma_{s_{i-1}}}) = \text{germe}(f_{\gamma_{s_i}})$ para todo $i = 1, \dots, n$. Logo $\Phi_{\gamma_0} = \Phi_{\gamma_1}$.

Por este motivo, quando $y_0 = y_1$ a aplicação $\Phi: [\gamma] \rightarrow \Phi_\gamma$ está bem definida. Finalmente, se C_λ, C_μ são cadeias subordinadas a λ e μ então $C_\lambda \cup C_\mu$ é uma cadeia

subordinada a $\lambda \circ \mu$. Isto quer dizer que $\Phi_{\lambda \circ \mu} = \Phi_\lambda \circ \Phi_\mu$ e assim Φ é um homomorfismo entre os grupos $\pi_1(F, y_0)$ e $G(y_0, \Sigma_0)$.

DEFINIÇÃO 3 - O subgrupo $\text{Hol}(F, y_0) = \Phi(\pi_1(F, y_0))$ é chamado grupo de holonomia de F em y_0 .

Dados $y_0, y_1 \in F$, qualquer caminho $\alpha: I \rightarrow F$ com $\alpha(0) = y_0$ e $\alpha(1) = y_1$ induz um isomorfismo

$$\alpha^*: \text{Hol}(F, y_0) \rightarrow \text{Hol}(F, y_1)$$

$$\text{pondo } \alpha^*(\Phi_\mu) = \Phi_\alpha \circ \Phi_\mu \circ \Phi_{\alpha^{-1}}.$$

Desta maneira podemos falar do grupo de holonomia de F como sendo qualquer grupo isomorfo a $\text{Hol}(F, y_0)$.

EXEMPLO 1 - Na folheação de Reeb de S^3 o grupo fundamental da folha compacta é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

O seu grupo de holonomia pode ser representado por dois difeomorfismos C^∞ $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = g(0) = 0$ tais que $f(x) = x$ para $x \geq 0$ e $f(x) < x$ se $x < 0$; $g(x) = x$ se $x \leq 0$ e $g(x) < x$ para $x > 0$ (veja a figura abaixo).

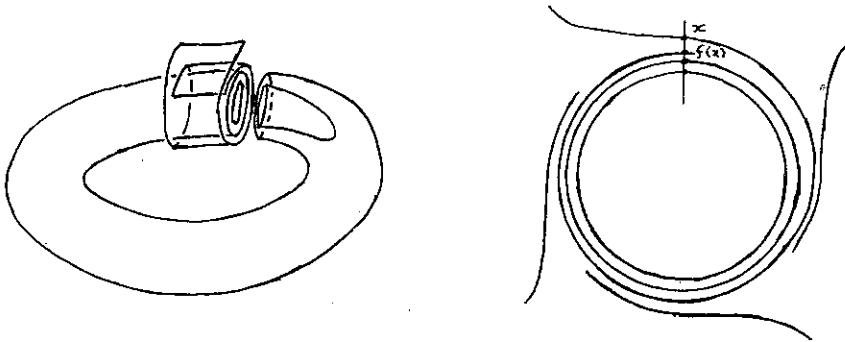


Fig. 2

A holonomia de F induz uma ação local de $\pi_1(F)$ em Σ_0 definida assim: Para cada $[\gamma] \in \pi_1(F, x_0)$ e $x \in \Sigma_0$, suficientemente próximo de x_0 , associamos o ponto $f_\gamma(x) \in \Sigma_0$. Quando F é compacta, esta ação caracteriza a folheação numa vizinhança de F .

Mais precisamente, sejam (M, \mathcal{F}) , (M', \mathcal{F}') folheações de codimensão p e classe C^r , $r \geq 1$, $F \subset M$, $F' \subset M'$ fo-

lhas compactas. Dizemos que as holonomias de F e F' são conjugadas quando existem seções transversais a F e F', Σ_0 , Σ'_0 , $\Sigma_0 \cap F = x_0$, $\Sigma'_0 \cap F' = x'_0$ e um homeomorfismo $h: F \cup \Sigma_0 \rightarrow F' \cup \Sigma'_0$ tais que $h(x_0) = x'_0$ e para cada $[\gamma] \in \pi_1(F, x_0)$ tem-se

$$h \circ f_\gamma \circ h^{-1}(x') = f_{h \circ \gamma}(x')$$

para $x' \in \Sigma'_0$ suficientemente próximo de x'_0 .

1.2 - TEOREMA - Sejam F e F' folhas compactas de \mathfrak{F} e \mathfrak{F}' respectivamente. As holonomias de F e F' são conjugadas se e somente se existem vizinhanças $V \supset F$, $V' \supset F'$ e um homeomorfismo C^r , $H: V \rightarrow V'$, $H(F) = F'$, enviando folhas de $\mathfrak{F}|V$ em folhas de $\mathfrak{F}'|V'$.

Demonstração: Suponhamos primeiro que exista a equivalência local H. Fixado $x_0 \in F$ sejam

$\Sigma_0, \Sigma'_0 = H(\Sigma_0)$ seções transversais passando por x_0 e $x'_0 = H(x_0)$.

Seja $[\gamma] \in \pi_1(F, x_0)$ e $C = (U_i)_{i=0}^n$ uma cadeia subordinada a γ . Os abertos $U'_i = H(U_i)$ definem uma cadeia $C' = (U'_i)_{i=0}^n$ subordinada a $H \circ \gamma$. Segue daí que as transformações de holonomia $\Sigma_0 \supset W_0 \xrightarrow{f_\gamma} \Sigma_0$, $W_0 \ni x_0$ e $\Sigma'_0 \supset W'_0 \xrightarrow{f_{H \circ \gamma}} \Sigma'_0$, $W'_0 \ni x'_0$, satisfazem

$$H \circ f_\gamma \circ H^{-1}(x') = f_{H \circ \gamma}(x') \quad x' \in \Sigma'_0 \text{ perto de } x'_0.$$

Logo as holonomias de F e F' são conjugadas.

Suponhamos agora que as holonomias de F e F' são conjugadas.

Precisamos do seguinte resultado:

1.3 - LEMA - Sejam A folha de \mathfrak{F} e $K \subset A$ um compacto.

Existem uma vizinhança U de K em M e uma retração $\pi: U \rightarrow V$, onde $V \subset A$ é uma união de placas contidas em A , tal que para todo $x \in V$, $\pi^{-1}(x)$ é um disco de dimensão p topologicamente transversal a \mathfrak{F} .

Admitamos por enquanto que o lema está demonstrado. Como F e F' são compactas existem vizinhanças V de F , V' de F' e retrações $\pi: V \rightarrow F$ e $\pi': V' \rightarrow F'$. Seja $h: F \cup \Sigma_0 \rightarrow F' \cup \Sigma'_0$ um homeomorfismo que conjugua as holonomias de F e F' . Podemos supor sem perda de generalidade que $\Sigma_0 = \pi^{-1}(x_0)$ e $\Sigma'_0 = (\pi')^{-1}(h(x_0))$. Dado $x \in F$, $x \neq x_0$, seja $\gamma: I \rightarrow F$ uma curva ligando x_0 a x . Sejam $f_\gamma: D_x \subset \pi^{-1}(x_0) \rightarrow \pi^{-1}(x)$ e $f'_{h(\gamma)}: D_{h(x)} \rightarrow (\pi')^{-1}(h(x))$ as transformações de holonomia de γ e $h \circ \gamma$. Para $y \in f_\gamma(D_x)$ definimos $H(y) = f'_{h(\gamma)}(h(f_{\gamma^{-1}}(y)))$ (veja a figura abaixo)

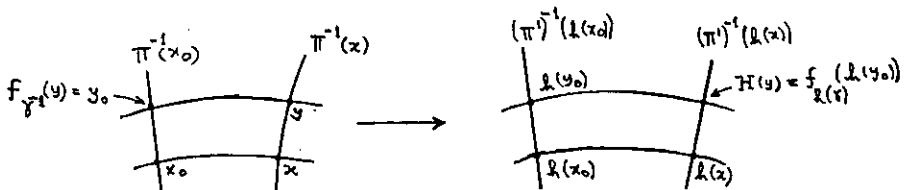


Fig. 3

Esta definição independe do caminho γ escolhido. Com efeito, se $\mu: I \rightarrow F$ é outro caminho com $\mu(0)=x_0$ e $\mu(1) = x$, temos por hipótese $h \circ f_{\mu}^{-1} \circ \gamma = f_{h(\mu^{-1} \circ \gamma)} \circ h$, conseqüentemente $f_{h(\mu)} \circ h \circ f_{\mu}^{-1} = f_{h(\gamma)} \circ h \circ f_{\gamma}^{-1} = H$.

Vejamos agora o domínio de H .

Dado $x \in F$ seja U_x um disco coordenado de \mathfrak{F} tal que para todo $y \in U_x \cap F$, $\pi^{-1}(y)$ intercepta todas as placas de U_x e $U_x \cap F$ contém apenas uma placa. Fixada uma curva γ que liga x_0 a x , podemos supor que para todo $z \in U_x$, a placa de U_x por z corta $\pi^{-1}(x)$ num ponto z_1 , no domínio de f_{γ}^{-1} . Seja $U'_{h(x)}$ um disco coordenado de \mathfrak{F}' tal que toda placa de $U'_{h(x)}$ corta $(\pi')^{-1}(h(x))$ num ponto do domínio de $f'_{h(\gamma^{-1})}$. Diminuindo eventualmente U_x e $U'_{h(x)}$, podemos supor também que $h(f_{\gamma}^{-1}(\pi^{-1}(x) \cap U_x)) = f'_{h(\gamma^{-1})}((\pi')^{-1}(h(x)) \cap U'_{h(x)})$ e $h(U_x \cap F) = U'_{h(x)} \cap F'$. Com estas propriedades H está definida em U_x e $h(U_x) = U'_{h(x)}$. Como F é compacta podemos obter uma vizinhança de F , $U = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$, onde H está definida.

Da construção é imediato que $H: U \rightarrow H(U) = U'$ e um homeomorfismo e que H leva folhas de \mathfrak{F}/U em folhas de \mathfrak{F}'/U' . Com isto terminamos a demonstração do Teorema 1.2.

Demonstração do Lema 1.3 : Caso \mathfrak{F} seja de classe C^r ,

$r \geq 1$, o lema é imediato. De

fato, como $K \subset A$ é compacto, $K \subset W$, onde W é uma superfície mergulhada, união de placas de \mathfrak{F} . Seja

$\pi: V \rightarrow W$ uma vizinhança tubular de classe C^r de W .

Como as fibras $\pi^{-1}(x)$, $x \in W$, interceptam W transversalmente apenas em x , é claro que se $y \in \pi^{-1}(x)$ está suficientemente próximo de x então $\pi^{-1}(x)$ intercepta a folha de \mathfrak{F} por y , transversalmente em y . Podemos então diminuir V , obtendo uma vizinhança $U \subset V$, tal que para todo $x \in U \cap A$, $\pi^{-1}(x)$ intercepta \mathfrak{F}/U transversalmente.

No caso em que \mathfrak{F} é de classe C^0 , a demonstração é bem mais técnica.

Consideramos primeiramente uma cobertura

$(U_i)_{i=0}^k$ de K por discos coordenados. Diminuindo, se necessário, cada U_i , podemos supor que $K \cap U_i$ está contido em apenas uma placa de U_i , digamos P_i . Para cada $i \in \{0, \dots, k\}$ existe um homeomorfismo $h_i: U_i \rightarrow D^{n-p} \times D^p \subset \mathbb{R}^n$, tal que $h_i(P_i) = D^{n-p} \times \{0\}$ e se P é uma placa de U_i , $h_i(P) = D^{n-p} \times \{y\}$, onde $y \in D^p$. Se $p_1: D^{n-p} \times D^p \rightarrow D^{n-p} \times \{0\}$ é a primeira projeção, podemos definir uma retração $\pi_i = h_i^{-1} \circ p_1 \circ h_i$. É claro que cada fibra $\pi_i^{-1}(x)$, $x \in P_i$, intercepta uma placa de U_i em exatamente um ponto. A dificuldade é que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$,

π_i não coincide com π_j em $U_i \cap U_j$. Podemos entretanto definir uma retração π , com as propriedades desejadas, tirando uma "média" das π_i , da seguinte maneira: Seja $(U'_i)_{i=0}^k$ uma outra cobertura de K por disco coordenados tais que $\overline{U'_i} \subset U_i$, $0 \leq i \leq k$. Coloquemos $P'_i = P_i \cap U'_i$, $W_\ell = \bigcup_{i=0}^{\ell} U'_i$, $V_\ell = \bigcup_{i=0}^{\ell} P'_i$. Vamos definir indutivamente uma seqüência de retrações $(p_i)_{i=0}^k$, $p_i: W_i \rightarrow V_i$, satisfazendo às propriedades desejadas. Em W_0 colocamos $p_0 = \pi_0$. Suponhamos que $p_\ell: W_\ell \rightarrow V_\ell$ está definida, onde $0 \leq \ell < k$. Definimos $p_{\ell+1}: W_{\ell+1} = W_\ell \cup U'_{\ell+1} \rightarrow V_{\ell+1} = V_\ell \cup P'_{\ell+1}$ através da interseção de suas fibras com as placas de $U_{\ell+1}$, como se segue. Podemos supor que $U_{\ell+1} = D^{n-p} \times D^p$, as folhas de $\pi/U_{\ell+1}$ são os discos $D^{n-p} \times \{y\}$ e as fibras de $\pi_{\ell+1}$ são os discos $\{x\} \times D^p$. Nestas coordenadas $U_{\ell+1} \cap W_\ell$ é um aberto de $D^{n-p} \times D^p$ e as fibras de p_ℓ são discos contínuos de dimensão p que interceptam as placas $D^{n-p} \times \{y\}$ em exatamente um ponto. Sejam $\alpha, \beta: U_{\ell+1} \rightarrow \mathbb{R}$ funções C^∞ tais que $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha/(U_{\ell+1} - U'_{\ell+1}) = 0$, $\beta/(\bigcup_{i=0}^{\ell} U_i - W_\ell) = 0$ e $(\alpha + \beta)/W_{\ell+1} = 1$. Dados $x \in W_{\ell+1} \cap U_{\ell+1}$ e P placa de $U_{\ell+1}$ próxima de $P_{\ell+1} = D^{n-p} \times \{0\}$, definimos a interseção de $p_{\ell+1}^{-1}(x)$ com P como sendo o ponto $z = \alpha(x) \cdot (P \cap \pi_{\ell+1}^{-1}(x)) + \beta(x) \cdot (P \cap \pi_{\ell}^{-1}(x))$. Como $\alpha(x) + \beta(x) = 1$ e P é convexo, é claro que $z \in P$. Na figura abaixo ilustramos a idéia:

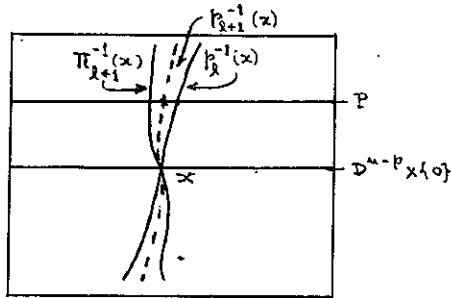


Fig. 4

Verifica-se facilmente que $p_{\ell+1}$ satisfaz às propriedades requeridas. Observe que o domínio de $p_{\ell+1}$ não é exatamente $W_{\ell+1}$, mas sim uma vizinhança aberta de $V_{\ell+1}$, a qual estamos denotando também por $W_{\ell+1}$ para simplificar a notação. Com isto concluímos a demonstração do Lema 1.3.

Observação 3: Usando o Lema 1.3 podemos definir a holonomia de uma folha F de \mathfrak{F} da seguinte forma: Se $\gamma: I \rightarrow F$ é uma curva contínua com $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$, sejam U vizinhança de $\gamma(I)$ em M , V vizinhança de $\gamma(I)$ em F e $\pi: U \rightarrow V$ como em 1.3. Dado $y_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, suficientemente próximo de x_0 , existe um único caminho $\tilde{\gamma}: I \rightarrow M$, contido na folha F_{y_0} de \mathfrak{F} por y_0 , e tal que $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ e $\tilde{\gamma}(t) \in \pi^{-1}(\gamma(t))$ para todo $t \in I$. O caminho $\tilde{\gamma}$ é uma espécie de levantamento de γ à folha F_{y_0} ao longo das fibras de π . A aplicação $f_{\gamma}(y_0) = \tilde{\gamma}(1)$ está bem definida para y_0 próximo

de x_0 e coincide com a aplicação de holonomia associada a γ .

Observação 4: Do Lema 1.3 podemos concluir o seguinte:

Seja $K \subset F$, um compacto. Então existe uma cobertura $(U_i)_{i=1}^k$ de K por discos coordenados tais que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cap U_j$ é um disco coordenado. Isto implica em particular que se $P \subset U_i$ e $Q \subset U_j$ são placas então $P \cap Q = \emptyset$ ou $P \cap Q$ é homeomorfo a um disco.

Provemos o fato acima. Seja $(V_i)_{i=1}^k$ uma cobertura de K em F por discos de dimensão $n-p$ tais que se $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ então $V_i \cap V_j$ é homeomorfo a um disco. Deixamos para o leitor a verificação da existência de uma tal cobertura. Diminuindo se necessário os V_i 's podemos supor que para todo i , \bar{V}_i está contido num disco coordenado $W_i \subset U$ de \mathfrak{F} . Se P é uma placa de W_i próxima de $W_i \cap \bar{V}_i$, para todo $x \in \bar{V}_i$, $\pi^{-1}(x)$ corta P em exatamente um ponto. Por este motivo existe um disco coordenado $U_i \subset \pi^{-1}(V_i)$ tal que para toda placa P de U_i , $\pi: P \rightarrow V_i$ é um homeomorfismo. É fácil ver que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e P é placa de U_i e Q placa de U_j , onde $P \cap Q \neq \emptyset$, então $\pi: P \cap Q \rightarrow V_i \cap V_j$ é um homeomorfismo. A cobertura $(U_i)_{i=1}^k$ satisfaz às propriedades desejadas.

§2. Lema de Trivialização Global.

Denotemos por \mathfrak{F} uma folheação de classe C^r , $r \geq 0$, e codimensão p de uma variedade M .

2.1 - LEMA - Seja $\gamma: I \rightarrow M$ um caminho contínuo, simples (isto é, injetivo) cuja imagem está contida numa folha F de \mathfrak{F} . Existe uma vizinhança $W \supset \gamma(I)$ e um homeomorfismo de classe C^r .

$$h: D^{n-p} \times D^p \rightarrow W$$

tal que $h^*\mathfrak{F}$ é a folheação cujas folhas são as superfícies $p^{-1}(y)$ onde $p: D^{n-p} \times D^p \rightarrow D^p$ é a projeção $p(x,y) = y$.

Demonstração: Seja $(U_i)_{i=0}^k$ uma cobertura de $\gamma(I)$ por discos coordenados tais que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cap U_j$ é um disco coordenado de \mathfrak{F} . Seja $\pi: U = \bigcup_{i=0}^k U_i \rightarrow W \subset F$ uma retração como no lema 1.3. Como γ não tem auto-interseções, podemos supor que para cada i , U_i intercepta no máximo U_{i-1} e U_{i+1} e $U_0 \cap U_k = \emptyset$. Sejam $x_0 = \gamma(0)$, $x_1 = \gamma(1)$ e $D_0 = \pi^{-1}(x_0)$, $D_1 = \pi^{-1}(x_1)$. É claro que cada folha de \mathfrak{F}/U corta D_0 no máximo uma vez. A aplicação de holonomia $D_0 \supset D'_0 \xrightarrow{f_\gamma} D_1$ está bem definida num disco $D'_0 \ni x_0$. Seja V o saturado de D'_0 pelas folhas de $\mathfrak{F} | \bigcup_{i=0}^k U_i$ e

$f: V \rightarrow D'_0$ a aplicação que a cada $x \in V$ associa a interseção da folha $\mathfrak{F}|_V$ passando por x com D'_0 . Como \mathfrak{F} é C^r , f também é de classe C^r .

Seja $A \subset F$ a folha de \mathfrak{F}/V contendo γ . É claro que reduzindo A se necessário podemos supor que A é homeomorfo ao disco D^{n-p} por um homeomorfismo $k_1: D^{n-p} \rightarrow A$. Seja $k_2: D^p \rightarrow D'_0$ um homeomorfismo tal que $k_2(0) = x_0$. Se \mathfrak{F} é de classe C^r podemos tomar k_1 e k_2 difeomorfismos C^r . Definimos $h: D^{n-p} \times D^p \rightarrow V$ pondo $h(x,y) = \pi^{-1}(k_1(x)) \cap f^{-1}(k_2(y))$. Desta forma h é um homeomorfismo que envia a superfície $p^{-1}(y) = D^{n-p} \times \{y\}$, $y \in D^p$, na folha $f^{-1}(k_2(y))$ de \mathfrak{F}/V . Se \mathfrak{F} é de classe C^r , $r \geq 1$, é fácil ver que h é um difeomorfismo C^r .

Quando $\text{cod}(\mathfrak{F}) = 1$, este resultado pode ser melhorado como mostra o seguinte lema que será de utilidade em capítulos subsequentes.

2.2 - LEMA - Sejam F uma folha de uma folheação em M de codimensão um, transversalmente orientável e $f_0: K \rightarrow F$ uma aplicação contínua homotópica a uma constante, K compacto e conexo por caminhos. Existe uma família contínua de aplicações $f_t: K \rightarrow M$, $t \in I = [0,1]$, tal que $f_t(K)$ está contido numa folha F_t . Para $x \in K$ fixo, a curva $t \rightarrow f_t(x)$ é normal a \mathfrak{F} .

Demonstração: Seja \mathfrak{h} um campo normal a \mathfrak{F} e denotemos por $h_t(x)$ a trajetória parametrizada de x .

Suponhamos que f_0 é homotópica à aplicação constante $C: K \rightarrow F$, $C(x) = y_0$ e seja $x_0 \in K$ tal que $f_0(x_0) = y_0$. Dado um caminho $\gamma: I \rightarrow K$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$, o caminho $\tilde{\gamma}: I \rightarrow F$, $\tilde{\gamma} = f_0 \circ \gamma$ induz uma aplicação de holonomia

$$J_{y_0} \supset V \xrightarrow{g_{\tilde{\gamma}}} J_y, \quad V \ni y_0, \quad y = f_0(x),$$

onde J_y denota um segmento integral de \mathfrak{h} . Para $t \geq 0$ suficientemente pequeno definimos $f_t(x) = g_{\tilde{\gamma}}(h_t(y_0))$.

Esta definição independe de γ . Com efeito, seja $\mu: I \rightarrow K$ outro caminho, $\mu(0) = x_0$, $\mu(1) = x$ e $H: K \times I \rightarrow F$ a homotopia entre f_0 e C , isto é, $H(x,0) = f_0(x)$, $H(x,1) = y_0$ para todo $x \in K$. Então a aplicação $\tilde{H}: I \times I \rightarrow F$, $\tilde{H}(s,u) = H(\gamma * \mu^{-1}(s), u)$ é uma homotopia entre o caminho $\tilde{\gamma} * \tilde{\mu}^{-1}(s)$ e o caminho constante $\tilde{C}(s) = y_0$. Logo $\tilde{\gamma} \sim \tilde{\mu}$ e os germes de $g_{\tilde{\gamma}}$ e $g_{\tilde{\mu}}$ em y_0 coincidem.

Pela compacidade de K , existe um intervalo $[0, \epsilon]$ tal que $f_t(x)$, $t \in [0, \epsilon]$ está bem definida para todo $x \in K$. Basta então reparametrizar a curva integral J_{y_0} para obter o mesmo para todo $t \in [0, 1]$.

§3. Teorema de Estabilidade local (Reeb [23] e [24])

3.1 - TEOREMA - Seja \mathfrak{F} uma folheação de classe C^0 e

codimensão p de uma variedade M . Seja F uma folha compacta com grupo de holonomia finito. Existe uma vizinhança U de F , saturada por \mathfrak{F} na qual todas as folhas são compactas com grupo de holonomia finito.

Além disso podemos definir uma retração $\pi: U \rightarrow F$ tal que para toda folha $F' \subset U$, $\pi|_{F'}: F' \rightarrow F$ é um recobrimento com um número finito de folhas.

A vizinhança U pode ser tomada arbitrariamente pequena.

Demonstração: Como F é compacta, pela Observação 4 do §1 existe uma cobertura $(U_i)_{i=0}^k$ de F por discos coordenados, onde \bar{U}_i é compacto e $U_i \cap U_j$ é um disco coordenado se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Podemos definir também uma retração $\pi: \bigcup_{i=0}^k U_i \rightarrow F$ com as propriedades do Lema 1.3. Coloquemos $V = \bigcup_{i=0}^k U_i$.

Em cada U_i distinguimos um disco $D_i = \pi^{-1}(x_i)$, de dimensão p , centrado em $x_i \in U_i \cap F$ e topologicamente transversal a \mathfrak{F} . Por hipótese existem caminhos fechados $\gamma_j: I \rightarrow F$, $\gamma_j(0) = \gamma_j(1) = x_0$, $j = 1, \dots, m$ e correspondentes aplicações de holonomia $f_j: \tilde{W}_j \subset D_0 \rightarrow D_0$, tais que $\text{Hol}(F, x_0) = \{f_0 = 1, f_1, \dots, f_m\}$. Consequentemente, se $W = \bigcap_{j=1}^m \tilde{W}_j$, o domínio de todas as aplicações de holonomia contém W .

Mostremos agora que existe $W_0 \subset W$, vizinhança de x_0 , tal que se $y \in W_0$, então a folha \tilde{F}_y da restrição \mathfrak{F}/V que passa por y , não corta o bordo de V . Isto implica em particular que se F_y é a folha de \mathfrak{F} por y , então $F_y = \tilde{F}_y$. Além disso se $S(W_0)$ é o saturado de W_0 por \mathfrak{F} , então $S(W_0) \subset V$.

Observemos primeiramente que se $y \in W$ então $\tilde{F}_y \cap D_0 \subset \{f_j(y) \mid j = 0, \dots, m\}$. Com efeito, se existisse $z \in \tilde{F}_y \cap D_0$ tal que $z \neq f_j(y)$, $j = 0, \dots, m$, existiria uma curva $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \tilde{F}_y$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = y$, $\tilde{\gamma}(1) = z$ e $\tilde{\gamma}(I) \subset V$. Como $\pi(y) = \pi(z) = x_0$, a curva $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ induz um elemento $f_{[\gamma]} \in \text{Hol}(F, x_0)$ tal que $f_{[\gamma]} \neq f_j$, $j = 0, \dots, m$, absurdo.

O mesmo tipo de argumento mostra que para todo $i = 0, \dots, k$ existe uma vizinhança W_i de x_0 em D_0 , tal que para todo $y \in W_i$, $\tilde{F}_y \cap D_i$ contém no máximo $m+1$ pontos. Coloquemos $W'_0 = W \cap W_1 \cap \dots \cap W_k$ e para $y \in W'_0$, $\tilde{F}_y \cap D_i = \{q(i, j, y) \mid 1 \leq j \leq \ell_i\}$, onde $\ell_i \leq m+1$. Seja $P(i, j, y)$ a placa de U_i por $q(i, j, y)$.

Seja d uma distância em M . Temos $d(\partial V, F) = \delta > 0$. Coloquemos $\delta_i(y) = \max_{1 \leq j \leq \ell_i} d(x_0, P(i, j, y))$, para $y \in W'_0$ e $1 \leq i \leq k$.

Para $i = 0$ temos $\lim_{y \rightarrow x_0} \max_{1 \leq j \leq \ell_0} d(x_0, q(0, j, y)) \leq$
 $\leq \lim_{y \rightarrow x_0} \max_{0 \leq j \leq m} d(x_0, f_j(y)) = 0$, logo $\lim_{y \rightarrow x_0} \delta_0(y) = 0$. Ana-

logamente $\lim_{y \rightarrow x_0} \delta_i(y) = 0$ para $1 \leq i \leq k$. Concluimos daí que existe uma vizinhança $W_0 \subset W'_0$ de x_0 , tal que para todo $y \in W_0$ e $i = 0, \dots, k$, $\delta_i(y) \leq \delta/2$. Temos então que para todo $y \in W_0$ e $i = 0, \dots, k$ as placas de $\tilde{F}_y \cap U_i$ estão longe de ∂V , logo $\tilde{F}_y \subset V$.

O argumento acima também mostra que para todo $y \in W_0$ a folha $F_y = \tilde{F}_y$ é compacta. De fato, para todo $y \in W_0$, F_y é coberta por um número finito de placas $P(i, j, y)$, $0 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq \ell_i \leq m+1$, logo F_y é compacta. Em particular $U = S(W_0)$ é uma vizinhança de F tal que $\pi = \pi/U: U \rightarrow F$ é uma retração tal que $\pi/F': F' \rightarrow F$ é uma aplicação de recobrimento com um número finito de folhas, para toda folha $F' \subset U$.

Falta mostrarmos que o grupo de holonomia das folhas $F' \subset U$ é finito. Basta observarmos que para todo $j = 0, \dots, m$ $f_j: W_0 \rightarrow W_0$ está definida e portanto $\text{Hol}(F') \subset \{f_0, \dots, f_m\}$.

§4. Teorema de Estabilidade Completa. (Reeb [23] e [24])

TEOREMA - Seja \mathfrak{F} uma folheação de codimensão um e classe C^0 de uma variedade compacta e conexa M .

Se uma folha de \mathfrak{F} é compacta e tem grupo fundamental finito, então todas as folhas de \mathfrak{F} são compactas e têm grupo fundamental finito.

Demonstração: Pela conexidade de M basta provar que o conjunto U , união das folhas compactas com grupo fundamental finito, é aberto, fechado e não vazio. Por hipótese $U \neq \emptyset$. Mostremos que U é aberto. Seja F uma folha em U . Como $\pi_1(F)$ é finito, a holonomia de F é finita. Pelo teorema de estabilidade local existe uma vizinhança $V \supset F$ saturada por \mathfrak{F} . Qualquer folha F' em V é um recobrimento finito de F , portanto F' é compacta e $\pi_1(F')$ é isomorfo a um subgrupo de $\pi_1(F)$, logo é finito. Assim $V \subset U$ e U é aberto.

Provaremos agora que $\partial U = \bar{U} - U$ é uma união de folhas compactas com grupo fundamental finito.

Dado $x \in \partial U$ a folha que passa por x está contida em ∂U . Com efeito, seja ℓ_x um segmento transversal a \mathfrak{F} passando por x e $x_n \in \ell_x \cap U$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Para qualquer $y \in F_x$ seja ℓ_y um segmento transversal e $\alpha: I \rightarrow F$, $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$.

Pelo lema de trivialização global, existe uma vizinhança $W \supset \alpha(I)$ tal que a folha de \mathfrak{F}/W que passa por x_n intercepta ℓ_y num único ponto $y_n \in \ell_y \cap U$. Consequentemente $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in \partial U$.

Seja $(V_i)_{i=1}^n$ uma cobertura de ∂U por discos coordenados. Para cada $F \subset U$, $F \cap V_i$ é constituído de um número finito de placas $k_i(F)$. Seja \tilde{U} uma componente conexa de U . Vamos mostrar que existe um inteiro positivo $N_i(\tilde{U})$ tal que para toda folha $F \subset \tilde{U}$, $k_i(F) \leq N_i(\tilde{U})$. Fixemos um segmento aberto $\ell \subset V_i$ que corta cada placa de V_i exatamente uma vez. Seja $F_0 \subset \tilde{U}$ uma folha tal que $F_0 \cap \ell \neq \emptyset$. Veremos que para toda folha $F \subset \tilde{U}$, $k_i(F) \leq 2k_i(F_0) + 2$.

Consideremos uma vizinhança $W \subset \tilde{U}$ de F_0 , saturada por \mathcal{F} , onde está definida uma retração $\pi: W \rightarrow F_0$, tal que para toda folha $\tilde{F} \subset W$, $\pi/\tilde{F}: \tilde{F} \rightarrow F_0$ é uma aplicação de recobrimento com um número finito de folhas. Afirmando que $k_i(\tilde{F}) \leq 2k_i(F_0) + 2$, para toda folha $\tilde{F} \subset W$.

Basta provarmos que para todo $x_0 \in F_0$, $\pi^{-1}(x_0) \cap \tilde{F}$ contém no máximo dois pontos. Com efeito, isto implica que \tilde{F} corta cada componente de $\ell \cap W$ no máximo em dois pontos. Como F_0 poderia passar pelas extremidades de ℓ , temos $k_i(\tilde{F}) \leq 2k_i(F_0) + 2$.

Verifiquemos que $\#(\pi^{-1}(x_0) \cap \tilde{F}) \leq 2$. Observemos primeiramente que se $\gamma: I \rightarrow F_0$ é uma curva contínua com $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ então pode ser definida uma aplicação de holonomia $f_{[\gamma]}: \pi^{-1}(x_0) \rightarrow \pi^{-1}(x_0)$,

De fato, se $y \in \pi^{-1}(x_0)$, como $\pi/F_y: F_y \rightarrow F$ é um recobrimento, pelo teorema de levantamento de caminhos ([6]), existe uma única curva $\gamma_y: I \rightarrow F_y$ tal que $\gamma_y(0) = y$ e $\pi \circ \gamma_y = \gamma$. É evidente que $\gamma_y(1) = f_{[\gamma]}(y)$ define a aplicação de holonomia de $[\gamma]$. Basta provarmos agora que o grupo de holonomia de F_0 , $\text{Hol}(F_0)$, possui no máximo dois elementos.

Seja $f \in \text{Hol}(F_0)$. Afirmamos que $f^2 = 1$, identidade de $\pi^{-1}(x_0)$.

Seja \leq uma ordem natural em $\pi^{-1}(x_0)$ e sejam ι' e ι'' as componentes conexas de $\pi^{-1}(x_0) - \{x_0\}$. Evidentemente $f^2(\iota') \subset \iota'$. Se existisse $y \in \iota'$ tal que $x_0 < f^2(y) < y$, digamos, teríamos $(f^2)^k(y) < (f^2)^{k-1}(y) < \dots < f^2(y) < y$, logo a seqüência $\{f^{2k}(y) \mid k \in \mathbb{N}\}$ possuiria uma infinidade de pontos distintos, o que contraria o fato de $\text{Hol}(F_0)$ ser finito. Concluimos daí que todo elemento de $\text{Hol}(F_0)$ tem ordem ≤ 2 . Em particular $\text{Hol}(F_0)$ é abeliano. Além disso se $g \in \text{Hol}(F_0)$ é tal que $g(\iota') \subset \iota'$ então $g = 1$.

Suponhamos que existam $f, g \in \text{Hol}(F_0)$ tais que $f, g \neq 1$. Dado $y \in \iota'$, temos $f(y), g(y) \in \iota''$ e $f(y) \leq g(y)$, digamos. Aplicando f à desigualdade acima obtemos $y = f^2(y) \geq fg(y)$. Aplicando g obtemos $gf(y) \geq y$. Como $fg = gf$, vem que $fg(y) = gf(y) = y$, logo $f = g^{-1} = g$

e portanto $\#Hol(F_0) = 2$.

Suponhamos agora que F é uma folha contida em $\partial W \cap \tilde{U}$. Pelo argumento anterior, a folha F é recoberta pelas folhas vizinhas $F_y \subset W$, para as quais $k_i(F_y) \leq 2k_i(F_0) + 2$. Por outro lado, para cada ponto $x \in F \cap \ell$, existe pelo menos um ponto $x' \in F_y \cap \ell$, se F_y está suficientemente próxima de F , logo $k_i(F_y) \geq k_i(F)$ e portanto $k_i(F) \leq 2k_i(F_0) + 2$. Caso as folhas vizinhas de F recubram F duas vezes temos $2k_i(F) \leq k_i(F_y) \leq 2k_i(F_0) + 2$, logo $k_i(F) \leq k_i(F_0) + 1$. Em qualquer caso, se F_y é uma folha vizinha de F , temos $k_i(F_y) \leq 2k_i(F_0) + 2$ (podemos supor aqui que F não passa pelas extremidades de ℓ).

O argumento acima mostra que o conjunto $\{y \in \tilde{U} \mid k_i(F_y) \leq 2k_i(F_0) + 2\}$ é aberto e fechado em \tilde{U} . Como \tilde{U} é conexo temos que $k_i(F) \leq 2k_i(F_0) + 2 = N_i$, para toda folha $F \subset \tilde{U}$.

Suponhamos agora que exista $F \subset \partial U$ não compacta. Como $\bigcup_{i=1}^n V_i \supset \partial U$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $F \cap V_i$ contém uma infinidade de placas. Podemos supor que $F \subset \partial \tilde{U}$. Sejam $x_0, \dots, x_m \in \ell \cap F$, onde $m > N_i$ e $\gamma: I \rightarrow F$ uma curva simples que passa por x_0, \dots, x_m . Pelo lema de trivialização global, as folhas $F_y \subset \tilde{U}$ próximas de F cortam V_i pelo menos m vezes, o que é um

absurdo. Temos então que F é compacta.

Falta mostrarmos que $F \subset \partial U$ tem grupo fundamental finito. Isto decorre do fato de F ser recoberta pelas folhas vizinhas contidas em U .

De fato, se W é uma vizinhança de F onde está definida uma retração $\pi: W \rightarrow F$ como no Lema 1.3 e $\tilde{F} \subset U \cap W$, temos que $\pi/\tilde{F}: \tilde{F} \rightarrow F$ é um recobrimento com um número finito k de folhas. Como $\pi_1(\tilde{F})$ é finito temos que $\#\pi_1(F) = k \cdot \#\pi_1(\tilde{F})$. Com isto terminamos a demonstração do teorema.

Uma consequência interessante é a seguinte:

COROLÁRIO - Seja \mathfrak{F} uma aplicação C^1 de uma variedade M^n compacta conexa, com bordo $\partial M = \bigcup_{i=1}^k F_i$, onde $k \geq 1$, $F_i \simeq S^{n-1}$ e para todo $i = 1, \dots, k$, F_i é uma folha de \mathfrak{F} . Suponhamos que \mathfrak{F} admite um campo transversal não nulo. Então $k = 2$ e existe um difeomorfismo $h: M \rightarrow S^{n-1} \times [0,1]$ que leva folhas de \mathfrak{F} nas subvariedades $S^{n-1} \times \{t\}$, $t \in [0,1]$.

Demonstração: Pelo teorema da estabilidade completa, todas as folhas de \mathfrak{F} são compactas e têm grupo fundamental finito. Seja $\tilde{M} = \{y \in M \mid F_y \simeq S^{n-1}\}$. Mostraremos que \tilde{M} é aberto e fechado em M .

Qualquer folha $F \subset \tilde{M}$ é simplesmente conexa. Como as folhas vizinhas a F recobrem F , existe uma vizinhança W de F tal que toda folha $\tilde{F} \subset W$ é homeomorfa a S^{n-1} , logo \tilde{M} é aberto.

Suponhamos que existe $F \subset M - \tilde{M}$. Neste caso $\text{Hol}(F)$ contém dois elementos. Além disso existe uma vizinhança W de F , saturada por \mathfrak{F} , cujo bordo ∂W é constituído de folhas de \mathfrak{F} que recobrem F . Como $\text{Hol}(F)$ contém dois elementos ∂W é constituído de uma única folha de \mathfrak{F} , logo ∂W é conexo. Consequentemente podemos supor que X aponta para o interior da região W . Se $t \subset \bar{W}$ é um segmento de órbita de X que corta ∂W em dois pontos p_1 e $p_2 = X_t(p_1)$, $t > 0$, temos que $X(p_2)$ aponta para fora de W , absurdo. Temos então que $\tilde{M} = M$.

Seja M/\mathfrak{F} o espaço de folhas de \mathfrak{F} . M/\mathfrak{F} é o quociente de M pela relação de equivalência que identifica dois pontos se eles estão na mesma folha de \mathfrak{F} . Dada uma folha $F \neq F_i$, $1 \leq i \leq k$, existe uma vizinhança W de F , saturada por \mathfrak{F} , tal que \mathfrak{F}/W é equivalente à folheação produto $S^{n-1} \times \{t\}$ de $S^{n-1} \times (a,b)$, onde (a,b) é um segmento transversal a F . Por este motivo em M/\mathfrak{F} pode-se introduzir uma estrutura de variedade de dimensão k um, compacta, conexa e com bordo, onde $\partial(M/\mathfrak{F}) = \bigcup_{i=1}^k [F_i]$, sendo $[F_i]$ a classe de equivalência de F_i . Ora, toda

variedade de dimensão um, compacta, conexa e com bordo é difeomorfa ao intervalo fechado $[0,1]$. Temos então que $k = 2$ e M é difeomorfa a $S^{n-1} \times [0,1]$.

Além disso existe um difeomorfismo C^r , $h: S^{n-1} \times [0,1] \rightarrow M$ tal que $h^*(\mathfrak{F})$ é a folheação trivial $S^{n-1} \times \{t\}$ de $S^{n-1} \times [0,1]$. Este difeomorfismo pode ser construído usando as trajetórias do campo transversal X . Deixamos os detalhes para o leitor.

EXEMPLO 2 - Vamos construir aqui uma folheação \mathfrak{F} em uma variedade de dimensão 3 que possui duas folhas F_1 e F_2 difeomorfas ao plano projetivo. As outras folhas de \mathfrak{F} são difeomorfas a S^2 .

Consideremos inicialmente $\tilde{M} = S^2 \times [1,2]$, folheada trivialmente por $S^2 \times \{t\}$, $t \in [1,2]$.

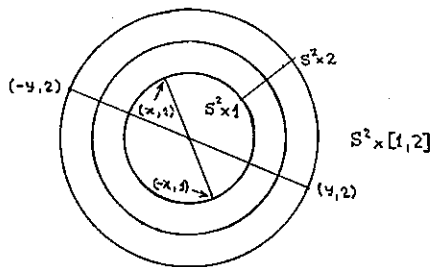


Fig. 5

Em \tilde{M} consideremos a relação de equivalência \sim tal que $(x,t) \sim (x', t')$ se e somente se $x = x'$,

$t = t'$ ou $x = -x'$ quando $t = t' = 1$.

ou quando $t = t' = 2$. Tomando-se $M = \tilde{M}/\sim$, temos que $S^2 \times \{1\}$ e $S^2 \times \{2\}$ são transformadas em dois planos projetivos F_1 e F_2 . As outras folhas $S^2 \times \{t\}$ são transformadas em esferas. Com isto temos uma folheação \mathfrak{F} em M com as propriedades desejadas.

Observação: O teorema de estabilidade de Reeb foi generalizado por W. Thurston [35] da maneira seguinte: Se F é uma folha compacta de uma folheação \mathfrak{F} transversalmente orientável, de codimensão um e classe C^1 e se a holonomia de \mathfrak{F} não é trivial, então $H^1(F, \mathbb{R}) \neq 0$.

EXERCÍCIOS.

1. Descreva a holonomia das folhas da folheação de Reeb.
2. Seja \mathfrak{F} uma folheação de codimensão um em M , definida por uma 1-forma fechada ω ($d\omega \equiv 0$) que não se anula. Mostre que a holonomia de qualquer folha de \mathfrak{F} é trivial.

Sugestão: Use o teorema de Stokes ([30]).

3. Sejam $f: M \rightarrow N$ uma submersão C^r ($r \geq 1$) e \mathfrak{F} a folheação de M cujas folhas são as componentes conexas de $f^{-1}(p)$, $p \in N$. Seja F uma folha de \mathfrak{F} .
 - a) Mostre que a holonomia de F é trivial.

- b) Suponha que todas as folhas de \mathcal{F} são compactas. Mostre que qualquer folha de \mathcal{F} é difeomorfa a F (M conexa).
- c) Suponha que todas as folhas de \mathcal{F} são compactas e que $N = \mathbb{R}$. Mostre que M é difeomorfa a $F \times \mathbb{R}$ e \mathcal{F} é equivalente à folheação $F \times \{t\}$, $t \in \mathbb{R}$.
4. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um, transversalmente orientável e de classe C^r ($r \geq 1$), definida em uma variedade compacta e conexa. Suponha que \mathcal{F} possui uma folha compacta F que tem grupo fundamental finito.
- a) Mostre que todas as folhas de \mathcal{F} são difeomorfas a F .
- b) Mostre que existe uma submersão $f: M \rightarrow S^1$ tal que as folhas de \mathcal{F} são as superfícies de nível $f^{-1}(p)$, $p \in S^1$.
5. Seja \mathcal{F} como no Exercício 4), exceto que \mathcal{F} não possui folha compacta com grupo fundamental finito. Suponha que todas as folhas de \mathcal{F} são compactas. Mostre que \mathcal{F} satisfaz a) e b) do Exercício 4).
6. Dê um exemplo mostrando que o teorema de estabilidade completa não é verdadeiro em variedades não compactas.
7. Mostre que não existe folheação de codimensão um em \mathbb{R}^3 com todas as folhas compactas.

8. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um e classe C^r , $r \geq 1$, em M^3 . Suponha que \mathcal{F} possui uma folha F difeomorfa a T^2 . Sejam $[\alpha]$ e $[\beta]$ geradores de $\pi_1(F)$ e $f_{[\alpha]}$, $f_{[\beta]}$ os respectivos germes de holonomia. Se $f_{[\alpha]}(x) = \lambda x$, onde $0 < \lambda \neq 1$, mostre que $f_{[\beta]}$ é linear. Descreva as folhas de \mathcal{F}/V , onde V é uma vizinhança tubular de F , suficientemente pequena.

CAPÍTULO IV

ESPAÇOS FIBRADOS E FOLHEAÇÕES

Neste capítulo estudaremos folheações transversais às fibras de um espaço fibrado E . Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma tal folheação é que E tenha grupo estrutural discreto. Como aplicação deste fato obtém-se o seguinte resultado ([5]): Seja $V \subset M$ uma subvariedade compacta de classe C^2 de M . Uma condição necessária e suficiente para que toda vizinhança de V contenha uma vizinhança saturada por uma folheação de dimensão igual a $\dim V$ é que o espaço fibrado normal a V tenha grupo estrutural discreto.

§1. Espaços Fibrados.

Um espaço fibrado $E (= (E, \pi, B, F))$ consiste de variedades diferenciáveis E, B, F e de uma aplicação diferenciável $\pi: E \rightarrow B$. Além disso existe uma cobertura $(U_i)_{i \in J}$ de B e para cada $i \in J$ difeomorfismos φ_i que fazem o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \times F \\
 \searrow \pi & & \swarrow p \\
 & U_i &
 \end{array}$$

isto é, $\pi = p \circ \varphi_i$, onde p é a primeira projeção. Em particular π é uma submersão e E é localmente difeomorfo ao produto de um aberto em B por F .

O espaço E é chamado espaço total, B a base e F a fibra do fibrado. A aplicação π é chamada projeção. Se $x \in B$, a subvariedade $F_x = \pi^{-1}(x) \simeq F$ é chamada de fibra de E sobre x .

Dados $i, j \in J$ tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ podemos definir $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \text{Dif}(F)$ tal que a aplicação ϕ_{ij} que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \\
 \varphi_i \swarrow & & \searrow \varphi_j \\
 U_i \cap U_j \times F & \xrightarrow{\phi_{ij}} & U_i \cap U_j \times F
 \end{array}$$

se escreve $\phi_{ij}(x, y) = (x, g_{ij}(x, y))$. Para cada $x \in U_i \cap U_j$, a aplicação $g_{ij}^x: F \rightarrow F$ definida por $g_{ij}^x(y) = g_{ij}(x, y)$ é um difeomorfismo.

Quando F é um espaço vetorial e todos os $g_{ij}(x)$ são automorfismos lineares de F , dizemos que E é um espaço fibrado vetorial.

Dizemos que o espaço fibrado E tem grupo estrutural discreto se para quaisquer i e j , a aplicação $x \rightarrow g_{ij}^x$ é

localmente constante. Quando E tem grupo estrutural discreto as folheações de $\pi^{-1}(U_i)$ dadas pelas submersões

$$\pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\varphi_i} U_i \times F \xrightarrow{q} F \quad q(x,y) = y,$$

definem as cartas locais de uma folheação transversal às fibras de E (veja Exercício 1).

Um exemplo de espaço fibrado é a vizinhança tubular de raio ϵ de uma subvariedade $N^n \subset \mathbb{R}^m$ (veja [14]). No caso a fibra é a bola de raio ϵ de \mathbb{R}^{m-n} . Outros exemplos são os seguintes:

EXEMPLO 1 - O Espaço Fibrado Tangente. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^r . Para cada $p \in M$ seja $T_p M$ o espaço de vetores tangentes a M em p , e

$$TM = \{(p, v_p) \mid p \in M, v_p \in T_p M\}.$$

Se $\pi: TM \rightarrow M$ é $\pi(p, v_p) = p$ então $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ é um espaço fibrado vetorial de classe C^{r-1} . Com efeito, dada uma carta local $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de M , introduzimos uma carta local $(*)$ $\bar{x}: \pi^{-1}(U) \rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^n$ para TM da maneira seguinte:

$$\bar{x}(p, X(p)) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = (x(p), \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (x(p), D_x(p) \cdot X(p))$$

Quando $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n, y: V \rightarrow \mathbb{R}^n, U \cap V \neq \emptyset$ e $X(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} =$

$= \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{\partial}{\partial y^j}$ temos que

$y \circ \bar{x}^{-1}(x^1(p), \dots, x^n(p), \alpha^1, \dots, \alpha^n) = (y^1(p), \dots, y^n(p), \beta^1, \dots, \beta^n)$ com

$$(**) \quad \beta_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \alpha_k .$$

Isto nos permite definir ao mesmo tempo uma estrutura de variedade diferenciável de classe C^{r-1} por (**), e uma estrutura de espaço fibrado vetorial por (*) e (**).

Uma seção de um espaço fibrado é uma aplicação $\sigma: B \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = \text{identidade}$. Consideraremos apenas seções diferenciáveis.

Uma seção do espaço fibrado tangente é chamada campo de vetores em M. Assim, um campo de vetores X será, para todos os efeitos uma aplicação que a cada $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_p M$.

EXEMPLO 2 - Espaço Fibrado Normal. Sejam \langle , \rangle uma métrica riemanniana em M^m e $N^n \subset M^m$ uma subvariedade de M . Dado $p \in M$, seja $T_p N^\perp \subset T_p M$ o subespaço de vetores normais a $T_p N$ e defina $\nu(N) = \{(p, v_p) \mid p \in N, v_p \in T_p N^\perp\}$ e

$$\pi: \nu(N) \rightarrow N, \quad \pi(p, v_p) = p.$$

Então $(\nu(N), \pi, N, \mathbb{R}^{m-n})$ é um espaço fibrado vetorial.

Com efeito, como N é uma subvariedade, para cada $p \in N$

existe uma carta local $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , $U \ni p$, tal que $q \in U \cap N$ se e somente se $x(q)$ tem as $m-n$ últimas coordenadas nulas. Estas funções coordenadas x^{n+1}, \dots, x^m definem campos de vetores $X_{n+1} = \text{grad } x^{n+1}, \dots, X_m = \text{grad } x^m$ os quais formam uma base de $T_q N^\perp$.

Assim definimos cartas locais $\bar{x}: \pi^{-1}(U \cap N) \rightarrow x(U \cap N) \times \mathbb{R}^{m-n}$

$$\bar{x}(q, X(q)) = \left(\sum_{i=n+1}^m \alpha_i X_i \right) = (x(q), \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_m)$$

cujas mudanças de coordenadas são: (*) Se $y: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é como acima e $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, então $\bar{y} \circ \bar{x}^{-1}(x(q), \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_m) = (y(q), \beta_{n+1}, \dots, \beta_m)$ para $q \in U \cap \tilde{U}$, onde

$$X(q) = \sum_{i=n+1}^m \alpha_i X_i = \sum_{j=n+1}^m \beta_j Y_j, \quad Y_j = \text{grad } y^j, \quad n+1 \leq j \leq m,$$

é

$$\beta_j = \sum_{i=n+1}^m \langle X_i, \frac{\partial}{\partial y^j} \rangle \alpha_i$$

Fica assim determinada uma estrutura de variedade C^{r-1} em $\nu(N)$ e por (*) uma estrutura de fibrado vetorial.

EXEMPLO 3 - O Espaço Fibrado dos Vetores Unitários Tangentes.

Sejam \langle , \rangle uma métrica riemaniana em

$$T^1 M = \{(p, v_p) \mid p \in M, v_p \in T_p M, |v_p| = 1\}.$$

Indiquemos por $\pi: T^1 M \rightarrow M$ a aplicação $\pi(p, v_p) = p$. Então $(T^1 M, \pi, M, S^{n-1})$ é um espaço fibrado cuja fibra é a esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \approx T_p M$.

Com efeito, seja $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta local de M , onde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Coloquemos $g_{ij}^x = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$. A matriz $G_x = (g_{ij}^x)_{1 \leq i, j \leq n}$ é simétrica e positiva definida, logo possui uma única raiz quadrada $A_x = (a_{ij}^x)_{1 \leq i, j \leq n}$, simétrica e positiva definida. Definamos cartas locais para T^1M , colocando

$$(*) \quad \bar{x}: \pi^{-1}(U) \rightarrow x(U) \times S^{n-1}$$

$$\bar{x}(p, v) = (x(p), A_x(Dx(p).v)).$$

Se $v = \sum_{i=1}^n v_i \partial/\partial x_i$, temos $A_x(Dx(p).v) = \sum_{i,j} a_{ij}^x v_j e_i = \sum_i \alpha_i e_i$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica do \mathbb{R}^n , logo a norma de $A_x(Dx(p).v)$ no produto interno usual é $\sum_j \alpha_j^2 = \sum_{i,j,k} v_i a_{ij}^x a_{jk}^x v_k = \sum_{i,k} v_i g_{ik}^x v_k = 1$, como queríamos.

Se $y: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é outra carta local em M , com $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, então

$$\bar{y} \circ \bar{x}^{-1}(x(p), \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (y(p), \beta_1, \dots, \beta_n),$$

onde $\sum_i \alpha_i^2 = \sum_i \beta_i^2 = 1$ e $\beta_i = \sum_{\ell} \left(\sum_{j,k} a_{ij}^y \frac{\partial y_j}{\partial x_k} a_x^{k\ell} \right) \alpha_\ell$,

sendo $(a_x^{jk})_{1 \leq j, k \leq n} = A_x^{-1}$. Como $B = (b_{i\ell})_{1 \leq i, \ell \leq n}$, onde

$$b_{i\ell} = \sum_{j,k} a_{ij}^y \frac{\partial y_j}{\partial x_k} a_x^{k\ell},$$

transforma vetores unitários em

vetores unitários, B é ortogonal (isto é $B^{-1} = B^t$). Di-

zemos então que T^1M é um espaço fibrado com grupo estrutural $O(n)$, grupo das matrizes ortogonais $n \times n$.

§2. Folheações Transversais às Fibras de um Espaço Fibrado.

DEFINIÇÃO 1 - Seja E um espaço fibrado com base B e fibra F . Dizemos que uma folheação \mathfrak{F} de E é transversal às fibras, quando \mathfrak{F} satisfaz às seguintes propriedades:

- a) Para todo $x \in E$ a folha L_x de \mathfrak{F} que passa por x é transversal à fibra $F_{\pi(x)}$. Além disso $\dim(L_x) + \dim(F) = \dim(E)$.
- b) Para toda folha L de \mathfrak{F} , $\pi/L: L \rightarrow B$ é uma aplicação de recobrimento, onde $\pi: E \rightarrow B$ é a projeção do fibrado.

No caso em que a fibra é compacta, a condição a) implica a condição b) (veja Exercício 2).

No Capítulo II já vimos um exemplo de folheação deste tipo. Trata-se da suspensão de um difeomorfismo $f: F \rightarrow F$ a uma folheação de dimensão um do espaço $E = [0,1] \times F / \sim$ onde \sim é a relação de equivalência que identifica $(0,y)$ com $(1, f(y))$. E é fibrado sobre S^1 com grupo estrutural discreto. Com efeito podemos tomar como cartas locais de E os quocientes \tilde{U}, \tilde{V} de $U = (\epsilon, 1-\epsilon) \times F$, $V = [0, 2\epsilon) \cup (1-2\epsilon, 1] \times F$. Então $\tilde{U} \cap \tilde{V}$ tem duas componentes conexas W_{12}, W_{21} e $g_{12}: W_{12} \rightarrow \text{Dif}(F)$, $g_{21}: W_{21} \rightarrow \text{Dif}(F)$ estão dadas por $g_{12}(x) = \text{identidade}$

$$e \ g_{21}(x) = f.$$

Este processo de suspensão pode ser generalizado da maneira seguinte. Sejam dadas variedades conexas B, F e uma representação (i.e. homomorfismo de grupo) φ :

$$\varphi: \pi_1(B) \rightarrow \text{Dif}^r(F)$$

de $\pi_1(B)$. no grupo de difeomorfismo de classe C^r de F . Se $p: \tilde{B} \rightarrow B$ é o recobrimento universal de B então φ induz uma ação $\tilde{\varphi}$ de $\pi_1(B)$ em $\tilde{B} \times F$:

$$\tilde{\varphi}: \pi_1(B) \times \tilde{B} \times F \rightarrow \tilde{B} \times F$$

dada por: $\tilde{\varphi}(g, (\tilde{x}, y)) = (g.\tilde{x}, \varphi(g).y)$ onde $g.\tilde{x}$ denota a imagem de \tilde{x} pela transformação de recobrimento associada a g . Recordemos que uma transformação de recobrimento é um difeomorfismo $h: \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ tal que $p \circ h = p$. Além disso o conjunto de transformações de recobrimento é um grupo naturalmente isomorfo a $\pi_1(B)$, isto porque \tilde{B} é o recobrimento universal de B (veja [6]). Estamos confundindo a curva g com a transformação associada a ela por este isomorfismo.

A ação $\tilde{\varphi}$, definida acima, satisfaz à seguinte propriedade:

Para todo $\tilde{x} \in \tilde{B}$ existe uma vizinhança V de \tilde{x} em \tilde{B} tal que se $g \in \pi_1(B)$ e $g \neq 1$ então $\tilde{\varphi}(g, V \times F) \cap (V \times F) =$

$= \emptyset$. Com efeito, seja V uma vizinhança de \tilde{x} tal que $p: V \rightarrow p(V)$ é um difeomorfismo. Para todo $g \in \pi_1(B)$, $g.V \cap V = \emptyset$, pois se existisse $y \in g(V) \cap V$, teríamos que $y = g(x)$ com $x \in V$, logo $p(x) = p(y)$ e p não seria biunívoca em V . Temos então que $\tilde{\varphi}(g, V \times F) = (g.V \times \varphi(g).F) \cap (V \times F) = \emptyset$.

Introduzimos em $\tilde{B} \times F$ a relação de equivalência que identifica dois pontos quando eles estão na mesma trajetória de $\tilde{\varphi}$, isto é, $(\tilde{x}, y) \sim (\tilde{x}', y')$ se existe $g \in \pi_1(B)$ tal que $\tilde{\varphi}(g, (\tilde{x}, y)) = (\tilde{x}', y')$. Pela propriedade acima mencionada, o espaço quociente de $\tilde{B} \times F$ por esta relação de equivalência é uma variedade diferenciável. Denotaremos esta variedade por $E(\varphi)$.

Da expressão de $\tilde{\varphi}$ segue que ela preserva as fibras de $\tilde{B} \times F \xrightarrow{p_1} \tilde{B}$, $p_1(\tilde{x}, y) = \tilde{x}$. Podemos então definir uma aplicação $\pi_\varphi: E(\varphi) \rightarrow B$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{B} \times F & & \\
 & \nearrow \pi & & \searrow p_1 & \\
 E(\varphi) & & & & \tilde{B} \\
 & \searrow \pi_\varphi & & \nearrow p & \\
 & & B & &
 \end{array}$$

No diagrama acima π é a projeção da relação de equivalência e p_1 a primeira projeção.

As cartas locais em $E(\varphi)$ são tomadas de tal forma que se $V \subset \tilde{B}$ é um aberto tal que $g.V \cap V = \emptyset$ para

$g \neq 1$, então $\pi: V \times F \rightarrow \pi(V \times F) = \pi_{\varphi}^{-1}(p(V))$ é um difeomorfismo. Decorre daí que $\Psi_V = (\pi/V \times F)^{-1}: \pi_{\varphi}^{-1}(p(V)) \rightarrow V \times F$ é um difeomorfismo C^r . Estes difeomorfismos induzem em $E(\varphi)$ uma estrutura de fibrados com base B , fibra F e projeção π_{φ} .

De fato, se $U, V \subset \tilde{E}$ são dois abertos como acima e $p(U) \cap p(V) \neq \emptyset$, temos que

$$\Psi_U \circ \Psi_V^{-1}: (p^{-1}(p(U)) \cap V) \times F \rightarrow (U \cap p^{-1}(p(V))) \times F$$

e $\Psi_U \circ \Psi_V^{-1}(x, y) = \tilde{\varphi}(g, x, y)$ para algum $g \in \pi_1(B)$. Uma curva fechada que representa g pode ser obtida da seguinte forma:

Consideremos $x_0 \in p(U) \cap p(V)$. Como $p/U: U \rightarrow p(U)$ e $p/V: V \rightarrow p(V)$ são difeomorfismos, existem $x_1 \in p^{-1}(p(U)) \cap V$ e $x_2 \in U \cap p^{-1}(p(V))$ únicos, tais que $p(x_1) = p(x_2) = x_0$. Seja $\gamma: I \rightarrow \tilde{E}$ uma curva tal que $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$. Se g é a classe de $p \circ \gamma$ em $\pi_1(B)$, temos que $g \cdot x_1 = x_2$ e $g \cdot (p^{-1}(p(U)) \cap V) = U \cap p^{-1}(p(V))$, logo para todo $(x, y) \in (p^{-1}(p(U)) \cap V) \times F$, $(g \cdot x, \varphi(g) \cdot y) \in (U \cap p^{-1}(p(V))) \times F$ e $(x, y) \sim (g \cdot x, \varphi(g) \cdot y)$. Isto mostra que $\Psi_U \circ \Psi_V^{-1}(x, y) = \tilde{\varphi}(g, x, y)$. Em particular

$(E(\varphi), \pi_{\varphi}, B, F)$ tem grupo estrutural discreto.

A folheação trivial $\tilde{E} \times F \xrightarrow{p_2} F$, $p_2(\tilde{x}, y) = y$, também é preservada pela ação $\tilde{\varphi}$. Consequentemente ela induz uma folheação $\mathfrak{F}(\varphi)$ de $E(\varphi)$ transversal às fibras

$\{\pi_\varphi^{-1}(b)\}_{b \in B}$. Esta folheação é por definição a suspensão da ação $\varphi: \pi_1(B) \rightarrow \text{Dif}^r(F)$.

Se $\tilde{E} \times \{f\}$ é uma folha da folheação produto então $\pi(\tilde{E} \times \{f\})$ é uma folha de $\mathfrak{F}(\varphi)$. Reciprocamente, se L é uma folha de $\mathfrak{F}(\varphi)$, então existe $f \in F$, não necessariamente único, tal que $L = \pi(\tilde{E} \times \{f\})$. Além disso $\pi/\tilde{E} \times \{f\} : \tilde{E} \times \{f\} \rightarrow L$ é um recobrimento e $(\pi_\varphi/L) \circ (\pi/\tilde{E} \times \{f\}) = p \circ (p_1/\tilde{E} \times \{f\})$. Decorre daí que $\pi_\varphi/L: L \rightarrow B$ é um recobrimento, logo $\mathfrak{F}(\varphi)$ é uma folheação transversal às fibras de E .

Reciprocamente temos o seguinte

2.1 - TEOREMA - Seja \mathfrak{F} uma folheação de classe C^r , $r \geq 1$, transversal as fibras de um fibrado (E, π, B, F) . Existe uma representação $\varphi: \pi_1(B) \rightarrow \text{Dif}(F)$ tal que a suspensão de φ ao fibrado $(E(\varphi), \pi, B, F)$ é diferenciavelmente equivalente a \mathfrak{F} . Em particular E tem grupo estrutural discreto se e só se existe uma folheação transversal às fibras.

Demonstração: Fixemos $x_0 \in B$ e identifiquemos F com a fibra $\pi^{-1}(x_0)$.

Para cada caminho fechado $\alpha: I \rightarrow B$, $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, definimos uma aplicação de holonomia global

$\varphi_\alpha: F \rightarrow F$ da maneira seguinte:

Dado $y \in F$, seja L_y a folha de \mathcal{F} por y .

Como $\pi/L_y: L_y \rightarrow B$ é uma aplicação de recobrimento, existe um único caminho $\tilde{\alpha}_y: I \rightarrow L_y$ tal que $\tilde{\alpha}_y(0) = y$ e $\pi \circ \tilde{\alpha}_y = \alpha$. Definimos $\varphi_\alpha(y) = \tilde{\alpha}_y(1)$. É claro que $\varphi_\alpha(y)$ só depende da classe de homotopia de α . Podemos então escrever $\varphi_\alpha = \varphi_{[\alpha]}$. Além disso temos que $\varphi_{[\alpha]}^{-1} = (\varphi_{[\alpha]})^{-1}$ e se $[\beta] \in \pi_1(B)$, $\varphi_{[\alpha * \beta]} = \varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]}$. Verifica-se facilmente que $\varphi_{[\alpha]}$ é de classe C^r . Como $\varphi_{[\alpha]}$ possui uma inversa $\varphi_{[\alpha]}^{-1}$ que é também de classe C^r , $\varphi_{[\alpha]}$ é um difeomorfismo C^r . Assim

$$\varphi: \pi_1(B, x_0) \rightarrow \text{Dif}^r(F), \quad \varphi([\alpha]) = \varphi_{[\alpha]}$$

é um homomorfismo de grupo.

Seja $\mathcal{F}(\varphi)$ a suspensão de φ . A seguir mostraremos como se constroi um difeomorfismo $g: E \rightarrow E(\varphi)$ de classe C^r que leva fibras de E em fibras de $E(\varphi)$ e folhas de \mathcal{F} em folhas de $\mathcal{F}(\varphi)$.

Fixemos $x_0 \in B$ e um difeomorfismo C^r ,

$h: \pi^{-1}(x_0) \rightarrow \pi_\varphi^{-1}(x_0)$. Dado $y \in E$ sejam $x = \pi(y)$ e

$\alpha: I \rightarrow B$ uma curva contínua tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = x_0$.

Como $\pi/L_y: L_y \rightarrow B$ é um recobrimento, existe uma única curva $\tilde{\alpha}: I \rightarrow L_y$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = y$ e $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Esta curva define um ponto $f_x(y) = \tilde{\alpha}(1) \in \pi^{-1}(x_0)$. O ponto $f_x(y)$

se aplica num ponto $z = h(f_x(y)) \in \pi_\varphi^{-1}(x_0)$. Sejam A_z a folha de $\mathcal{F}(\varphi)$ por z e $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$. Como

$\pi_\varphi/A_z: A_z \rightarrow B$ é um recobrimento, existe uma única curva $\bar{\alpha}^{-1}: I \rightarrow A_z$ que levanta α^{-1} e $\bar{\alpha}^{-1}(0) = z$. Definimos então $g(y) = \bar{\alpha}^{-1}(1) \in \pi_\varphi^{-1}(x)$. A construção é análoga à do teorema 1.2 do Capítulo III. Verifica-se como lá que g é um homeomorfismo e que leva fibras de E em fibras de $E(\varphi)$ e folhas de \mathcal{F} em folhas de $\mathcal{F}(\varphi)$. No caso que estamos estudando o homeomorfismo que conjuga as holonomias (globais) de \mathcal{F} e $\mathcal{F}(\varphi)$ é a identidade e portanto g é um difeomorfismo C^r . Com isto terminamos a demonstração do teorema.

EXEMPLO 4 - Como exemplo específico de suspensão temos o seguinte:

$B = T^2$, $F = S^1$, $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $\varphi: \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \text{Dif}(S^1)$ definida por dois difeomorfismos comutativos de $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$: $f = \varphi(1, 0)$ é a aplicação antípoda $f(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$ e $g = \varphi(0, 1)$ é $g = X_1$ onde X_t é o fluxo do campo de vetores $X(x_1, x_2) = x_1 x_2 (\alpha x_2, -\alpha x_1)$. Como $df \circ X = X \circ f$ temos que $f \circ g = g \circ f$. Os gráficos de f e g são os seguintes:

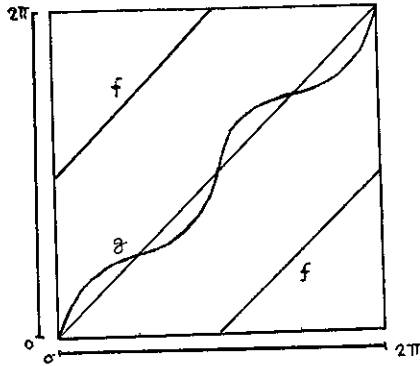


Fig. 1

Neste caso $E(\varphi) = T^2 \times S^1$, a base é T^2 e a fibra é S^1 . Há duas folhas homeomorfas a T^2 . As demais são homeomorfas a cilindros se acumulando nos toros.

Um outro exemplo devido a Sacksteder mostra a existência de conjuntos minimais excepcionais em folheações C^∞ de $V_2 \times S^1$ transversal as fibras $\{x\} \times S^1$, $x \in V_2$, onde V_2 é a superfície compacta orientável de gênero dois. Estudaremos este exemplo no Capítulo VIII.

§3. Existência de germes de folheações.

3.1 - TEOREMA - Seja $V \subset M$ uma subvariedade compacta de classe C^2 de M . Existe uma vizinhança $\mathcal{U} \supset V$ e uma folheação \mathfrak{F} de \mathcal{U} da qual V é uma das folhas se e somente se o espaço fibrado normal de V em M

guma métrica riemaniana tem grupo estrutural discreto.

Demonstração: Suponhamos que existam \mathcal{U} e \mathfrak{F} . Sejam

$(U_i, f_i)_{i \in I}$ cartas locais de \mathfrak{F} , $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} U_i$,

$f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^p$ submersões com mudanças de coordenadas

$h_{ki}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$f_k(x) = h_{ki} \circ (f_i(x)) \quad , \quad x \in U_i \cap U_k.$$

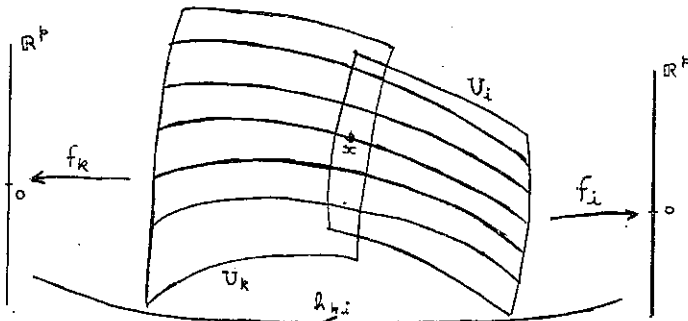


Fig. 2

Seja $\pi: \nu(V) \rightarrow V$ o fibrado normal de V com fibra \mathbb{R}^p .

Para cada $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^p$, $x \in V$, $L_i(x) = df_i(x) | TV_x^\perp: TV_x^\perp \rightarrow$

\mathbb{R}^p é um isomorfismo. Se (e_1, \dots, e_p) é uma base de

\mathbb{R}^p então os vetores $X_i^j(x) = (L_i(x))^{-1} \cdot e_j \quad j=1, \dots, p$

formam uma base de TV_x^\perp .

As cartas locais de $\nu(V)$ podem ser definidas agora como

$$\bar{x}_i: \pi^{-1}(V \cap U_i) \rightarrow V \cap U_i \times \mathbb{R}^p$$

$$\bar{x}_i(x, X(x)) = \sum_{j=1}^p \alpha_j X_i^j(x) = (x, L_i(x)X(x)) = (x, \sum_{j=1}^p \alpha_j e_j).$$

Se $U_i \cap U_k \neq \emptyset$ as mudanças de coordenadas serão

$$\bar{x}_k \circ \bar{x}_i^{-1}(x, L_i(x)X(x)) = (x, L_k(x)X(x)).$$

Logo se $\bar{x}_k \circ \bar{x}_i^{-1}(x, v) = (x, g_{ki}(x).v)$ tem-se $g_{ki}(x) = L_k(x)L_i^{-1}(x) = Dh_{ki}$ e assim $\nu(V)$ tem grupo estrutural discreto.

Reciprocamente, suponhamos que $\nu(V)$ tem grupo estrutural discreto. Pelo teorema anterior existe uma folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ transversal as fibras de ν da qual a seção nula é uma folha. Pelo teorema da vizinhança tubular, existe uma vizinhança seção-nula difeomorfa a uma vizinhança tubular de V . Logo existe uma folheação de uma vizinhança de V .

§4. Exemplo de Hector. ([8])

Neste parágrafo veremos um exemplo de folheação de codimensão um em $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, cujas folhas são densas e transversais às fibras $\{x\} \times \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$. Esta folheação satisfaz à condição a) da Definição 1, mas não à condição b), isto é, $\pi/L: L \rightarrow \mathbb{R}^2$ não é um recobrimento, onde L é uma folha e π a primeira projeção.

Consideremos o cilindro sólido $D^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, onde $D^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ e seja $S^1 \times \mathbb{R} = \partial(D^2 \times \mathbb{R})$. Dado um difeomorfismo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$f(x) = x$ para todo $x \in (a,b)$, vamos definir uma folheação $\mathfrak{F}(f)$ em $D^2 \times \mathbb{R} - (\{0\} \times (-\infty, a] \cup \{0\} \times [b, \infty))$, como se segue:

Consideremos em $S^1 \times \mathbb{R}$ uma folheação $\mathcal{Q}(f)$, suspensão de f , tal que para todo $z \in (a,b)$ o círculo $S^1 \times \{z\}$ é uma folha de $\mathcal{Q}(f)$ e as folhas de $\mathcal{Q}(f)$ são transversais às retas $\{q\} \times \mathbb{R}$, $q \in S^1$.

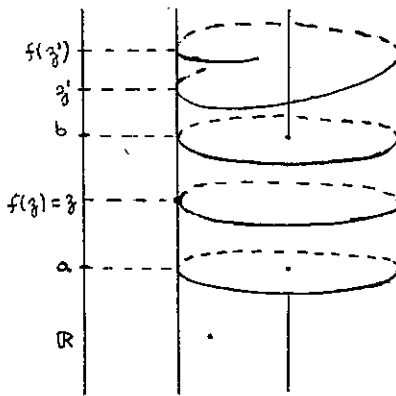


Fig. 3

Definimos agora as folhas de $\mathfrak{F}(f)$, saturando as folhas de $\mathcal{Q}(f)$ pelo fluxo do campo radial $X(x,y,z) = (-x,-y,0)$, para dentro de $D^2 \times S^1$, como na figura abaixo.

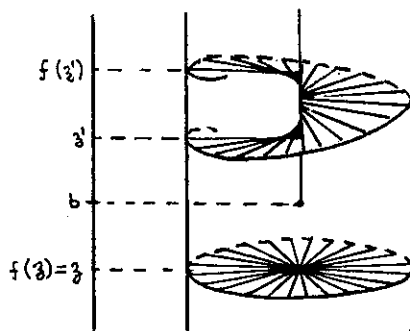


Fig. 4

Assim, se $t \rightarrow (\cos t, \sin t, z(t)) = \gamma(t)$ é a parametrização de uma folha de $\mathcal{G}(f)$ que passa por um ponto $(x, y, z) \in S^1 \times D^2$, tal que $z > b$ ou $z < a$, então $\gamma(r, t) = (r \cos t, r \sin t, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$, é parametrização de uma folha de $\mathcal{F}(f)$. As folhas de $\mathcal{F}(f)$ na região $D^2 \times (a, b)$ são os discos $D^2 \times \{z\}$, $z \in (a, b)$.

Consideremos agora um difeomorfismo C^∞ ,

$h: D^2 \times \mathbb{R} \rightarrow D^2 \times \mathbb{R} - (\{0\} \times (-\infty, a] \cup \{0\} \times [b, \infty))$ que satisfaz às seguintes propriedades:

- a) $h(\{0\} \times (a, b)) = \{0\} \times \mathbb{R}$
- b) Para todo $x \in D^2 - \{0\}$, $h(\{x\} \times \mathbb{R}) = \{x\} \times \mathbb{R}$.
- c) h é a identidade numa vizinhança produto de $S^1 \times \mathbb{R}$.

Podemos definir um difeomorfismo h como acima tomando por exemplo $h = g^{-1}$, sendo g é o difeomorfismo $g(x_1, x_2, z) = (x_1, x_2, \alpha(r^2)\beta(z) + (1 - \alpha(r^2))z)$ onde $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ e os gráficos de α e β são como nas figuras abaixo:

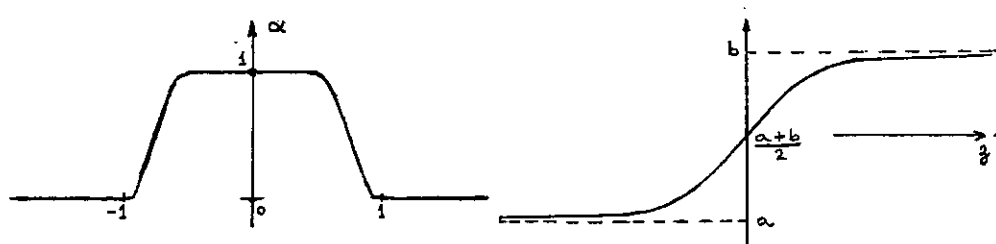


Fig. 5

É claro que na construção acima podemos ter

$a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Coloquemos $\mathfrak{F}^*(f) = h^*(\mathfrak{F}(f))$. É claro que $\mathfrak{F}^*(f)$ é uma folheação em $D^2 \times \mathbb{R}$, cujas folhas são transversais às fibras $\{x\} \times \mathbb{R}$, $x \in D^2$. Além disso $\mathfrak{F}^*(f)$ coincide com $\mathfrak{F}(f)$ uma vizinhança de $S^1 \times \mathbb{R}$.

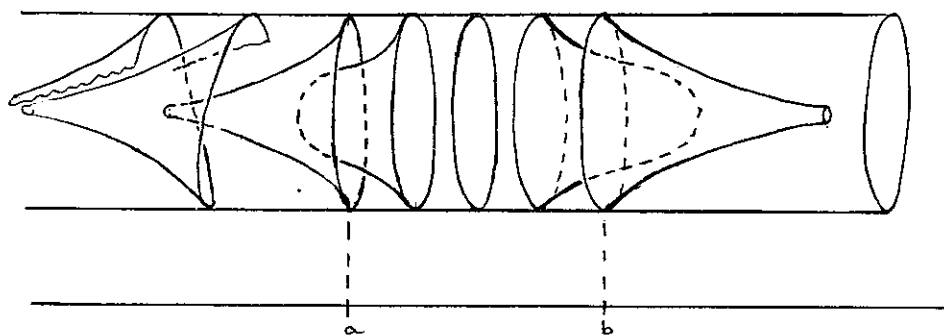


Fig. 6

A idéia agora é colar várias folheações destas, definidas inicialmente em cilindros sólidos disjuntos, grudando os bordos destes cilindros da maneira seguinte.

Suponhamos então que $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são difeomorfismos com $f_i(x) = x$ se $x \in (a_i, b_i)$, $i = 1, 2$. Podemos supor que as folhas de $\mathcal{G}(f_i)$, $i = 1, 2$, são horizontais na região V_i de $S^1 \times \mathbb{R}$ definida por $V_i = \{(1, \theta, z) \in S^1 \times \mathbb{R} \mid \theta_i - \pi/2 < \theta < \theta_i + \pi/2\}$, onde estamos escrevendo o ponto $(x_1, x_2) \in S^1$ em coordenadas polares

e $\theta_i \in S^1$ é fixo, como na figura abaixo.

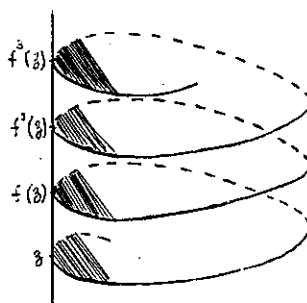


Fig. 7

Com esta restrição as folhas de $\mathfrak{F}(f_i)$ são horizontais na região $\tilde{V}_i = \{(r, \theta, z) \in D^2 \times \mathbb{R} \mid 0 < r < 1, \theta_i - \pi/2 < \theta < \theta_i + \pi/2\}$.

Como $\mathfrak{F}^*(f_i)$ coincide com $\mathfrak{F}(f_i)$ numa vizinhança $A_i \times \mathbb{R}$ de $S^1 \times \mathbb{R}$, onde $A_i = \{(r, \theta) \mid 1 - \epsilon < r < 1\}$, temos que as folhas de $\mathfrak{F}^*(f_i)/((A_i \cap V_i) \times \mathbb{R})$, são horizontais.

Colamos agora os dois cilindros por um difeomorfismo $g: (A_1 \cap V_1) \times \mathbb{R} \rightarrow (A_2 \cap V_2) \times \mathbb{R}$ da forma $g(x, z) = (\alpha(x), z)$ onde $\alpha: A_1 \cap V_1 \rightarrow A_2 \cap V_2$ é um difeomorfismo. Obtemos assim uma folheação $\mathfrak{F}(f_1, f_2)$, como na figura abaixo.

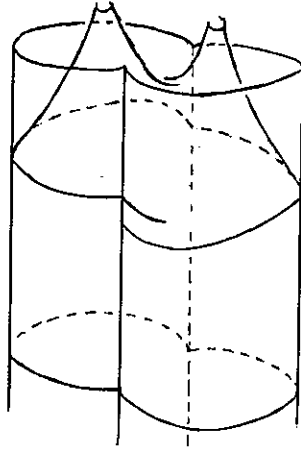


Fig. 8

A região onde está definida $\mathfrak{F}(f_1, f_2)$ é um produto da forma $U \times \mathbb{R}$, onde U é difeomorfa ao disco unitário D^2 . Sendo assim podemos considerar $\mathfrak{F}(f_1, f_2)$ como sendo uma folheação de $D^2 \times \mathbb{R}$, transversal às fibras $\{x\} \times \mathbb{R}$, $x \in D^2$.

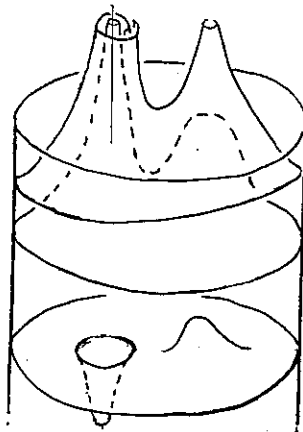


Fig. 9

Vejaamos agora como uma folha F de $\mathfrak{F}(f_1, f_2)$ intercepta uma fibra $\{x_0\} \times \mathbb{R}$, $x_0 \in D^2$. Observemos inicialmente que em todas as etapas do processo de construção, fibras verticais foram transformadas em fibras verticais. Se ι_1 e ι_2 são os eixos dos cilindros iniciais, existem $a \neq b \in D^2$ tais que ι_1 é transformado em $\{a\} \times \mathbb{R}$ e ι_2 em $\{b\} \times \mathbb{R}$, no final do processo. Se considerarmos $\mathfrak{F}(f_1, f_2)$ restrita a $(D^2 - \{a, b\}) \times \mathbb{R}$ é fácil ver que para toda folha F desta nova folheação $\pi/F: F \rightarrow D^2 - \{a, b\}$ é um recobrimento, onde π é a projeção $\pi(x, z) = x$, $x \in D^2$, $z \in \mathbb{R}$. Temos então que a nova folheação satisfaz às hipóteses a) e b) da Definição 1.

Dado $x_0 \in D^2 - \{a, b\}$, se $\gamma: I \rightarrow D^2 - \{a, b\}$ é uma curva contínua tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, podemos obter uma transformação de holonomia $g_{[\gamma]}: \{x_0\} \times \mathbb{R} \rightarrow \{x_0\} \times \mathbb{R}$ como no Teorema 2.1 deste capítulo. Ora, o grupo fundamental de $D^2 - \{a, b\}$ é o grupo livre com dois geradores, α e β , os quais podem ser tomados como na figura abaixo:

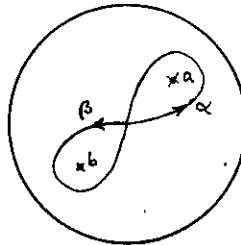


Fig. 10

É fácil ver que as transformações de holonomia $g[\alpha]$ (ou $g[\alpha]^{-1}$) e $g[\beta]$ (ou $g[\beta]^{-1}$) são conjugadas a f_1 e f_2 respectivamente, por intermédio de um mesmo difeomorfismo. Temos então que as interseções da folha F de $\mathfrak{F}(f_1, f_2)$ que passa por (x_0, z) , podem ser representadas pelo conjunto $\Theta(z) = \{f_1^{k_1} \circ f_2^{\ell_1} \circ f_1^{k_2} \circ f_2^{\ell_2} \circ \dots \circ f_1^{k_j} \circ f_2^{\ell_j}(z) \mid k_1, \dots, k_j, \ell_1, \dots, \ell_j \in \mathbb{Z}\}$.

Consideremos agora difeomorfismos $f_1, \dots, f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como anteriormente. Usando o mesmo processo anterior, podemos definir indutivamente uma folheação $\mathfrak{F}(f_1, \dots, f_k)$ em $D^2 \times \mathbb{R}$, transversal às fibras $\{x\} \times \mathbb{R}$, $x \in D^2$. Como anteriormente a interseção da folha de $\mathfrak{F}(f_1, \dots, f_k)$ que passa por (x_0, z) pode ser representada pelo conjunto $\Theta(z) = \{ \prod_{i=1}^n f_{j_i}^{\ell_i}(z) \mid j_i, \dots, j_n \in \{1, \dots, k\}, \ell_1, \dots, \ell_n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N} \}$, onde $\prod_{i=1}^n f_{j_i}^{\ell_i}(z) = f_{j_1}^{\ell_1} \circ \dots \circ f_{j_n}^{\ell_n}(z)$

Observemos finalmente que como D^2 é difeomorfo a \mathbb{R}^2 , podemos considerar $\mathfrak{F}(f_1, \dots, f_k)$ como sendo uma folheação em $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, transversal às fibras $\{x\} \times \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$.

Veremos agora que existem difeomorfismos $(f_i)_{i=1}^4$, tais que todas as folhas de $\mathfrak{F}(f_1, \dots, f_4)$ são densas em \mathbb{R}^3 .

Primeiramente fixemos $\varphi: \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ tal que

$\varphi(x) = 0$ se $x \leq 0$, $\varphi(x) = 1$ se $x \geq 1$ e $\varphi'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Definamos $f_1(x) = x + \alpha\varphi(x)$, onde $\alpha > 0$ é irracional. É claro que f_1 é um difeomorfismo C^∞ e que $f_1(x) = x$ se $x \leq 0$ e $f_1(x) = x + \alpha$ se $x \geq 1$. Coloquemos $f_2(x) = f_1^{-1}(x + \alpha)$. Temos que f_2 é um difeomorfismo C^∞ e $f_2(x) = x$ se $x \geq 1$. Analogamente definamos $f_3(x) = x + \varphi(x)$ e $f_4(x) = f_3^{-1}(x + 1)$. Afirmamos que se α é irracional, então todas as folhas de $\mathfrak{F}(f_1, \dots, f_4)$ são densas em \mathbb{R}^3 .

De fato, sejam $g_1(x) = f_1 \circ f_2(x) = x + \alpha$ e $g_2(x) = f_3 \circ f_4(x) = x + 1$. Basta provarmos que para todo $z \in \mathbb{R}$, o conjunto $B = \{g_1^m g_2^n(z) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em \mathbb{R} . Ora, $g_1^m g_2^n(z) = z + m\alpha + n$ e como α é irracional o conjunto $\{m\alpha + n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em \mathbb{R} , logo B é denso em \mathbb{R} .

EXERCÍCIOS.

1. Seja (E, π, B, F) um fibrado com grupo estrutural discreto. Mostre que existe uma folheação transversal às fibras de E .
2. Seja (E, π, B, F) um espaço fibrado, onde F é compacto. Seja \mathfrak{F} uma folheação de E tal que para todo $x \in E$, se L_x é folha de \mathfrak{F} por x , então $\dim(L_x) + \dim(F) = \dim(E)$ e L_x é transversal à fibra $F_{\pi(x)}$. Mostre

que $\pi/L: L \rightarrow B$ é um recobrimento, se L é uma folha de \mathfrak{F} .

Sugestão: Mostre que para todo $b \in B$ existem uma vizinhança U de b em B e um difeomorfismo $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tal que para todo $y \in F$, $\varphi^{-1}(U \times \{y\})$ é uma placa de \mathfrak{F} .

3. Considere o fibrado $(\mathbb{R}^3, \pi, \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, onde $\pi: \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a primeira projeção. Seja \mathfrak{F} uma folheação de \mathbb{R}^3 transversal às fibras $\{x\} \times \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$, tal que $\pi/L: L \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um recobrimento, para toda folha L de \mathfrak{F} . Mostre que existe um difeomorfismo $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $h^*(\mathfrak{F})$ é a folheação trivial $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$ em \mathbb{R}^3 . Generalize este resultado para um fibrado qualquer tal que a base é simplesmente conexa e a fibra tem dimensão 1. No caso em que a fibra tem dimensão > 1 e a base é simplesmente conexa, mostre que todas as folhas de \mathfrak{F} são difeomorfas. Compare este exercício com o exemplo de Hector (§4).

4. Seja $f: M^m \rightarrow N^n$ uma submersão C^r ($r \geq 1$) e suponha que todas as subvariedades $f^{-1}(x)$, $x \in N$ são compactas e conexas. Suponha também que M é conexa. Pelo Exercício 3 do Capítulo III todas as subvariedades $f^{-1}(x)$, $x \in N$, são difeomorfas. Diremos que $f^{-1}(x)$ é a fibra de f em x .

Seja \mathcal{F} uma folheação de dimensão n em M cujas folhas são transversais às fibras de f .

- a) Mostre que para toda folha L de \mathcal{F} , $f|_L: L \rightarrow N$ é um recobrimento. Em particular se N é simplesmente conexa, então todas as folhas de \mathcal{F} são difeomorfas a N .
- b) Seja $F = \pi^{-1}(x_0)$, $x_0 \in N$. Defina uma representação $\varphi: \pi_1(N) \rightarrow \text{Dif}^1(F)$ tal que para toda folha L de \mathcal{F} , $L \cap F = \{\varphi(g).x \mid g \in \pi_1(N)\}$, onde $x \in L \cap F$ é fixado.
- c) Seja $f: M \rightarrow S^1$ uma submersão como acima. Mostre que existe uma folheação transversal às fibras de f . Suponha que $f^{-1}(x) = S^2$ para algum $x \in S^1$. Mostre que qualquer folheação transversal às fibras de f possui uma folha difeomorfa a S^1 .

Sugestão: Em c) use que todo difeomorfismo

$g: S^2 \rightarrow S^2$ possui um ponto fixo ou um ponto periódico de período dois.

5. Fibrção de Hopf. Seja $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Dado $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ considere a ação $\varphi_m: S^1 \times S^3 \rightarrow S^3$ definida por $\varphi_m(e^{i\theta}, z_1, z_2) = (e^{i\theta} z_1, e^{im\theta} z_2)$.

- a) Mostre que todas as órbitas de φ são difeomorfas a S^1 .

b) Seja S^3/φ_m o espaço quociente de S^3 pela relação de equivalência que identifica pontos da mesma órbita de φ_m . Mostre que é possível colocar em S^3/φ_m uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão dois tal que $S^3/\varphi_m \simeq S^2$ e a projeção da relação de equivalência $\pi: S^3 \rightarrow S^3/\varphi_m$ é uma submersão.

c) Mostre que não existe folheação de codimensão um em S^3 , transversal às órbitas de φ_m .

Observação: Para $m = 1$ a aplicação $f: S^3 \rightarrow S^2$ definida por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, 2(x_2x_3 - x_1x_4), 2(x_1x_3 + x_2x_4))$ é uma submersão cujas fibras são as órbitas de φ_1 .

6. Considere $F = S^1$, $B = K^2$ garrafa de Klein. A garrafa de Klein pode ser pensada como sendo o quadrado $[-1,1]^2$ com as arestas identificadas como mostra a figura abaixo:

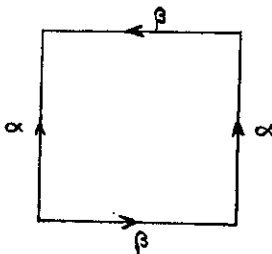


Fig. 11

Na figura acima o ponto $(-1, y)$ é identificado com $(1, y)$ e o ponto $(x, -1)$ com $(-x, 1)$, $\alpha(t) = (1, t)$

e $\beta(t) = (t, -1)$, $t \in [-1, 1]$.

O grupo fundamental de K^2 é o grupo livre gerado pelas classes das curvas α e β com a relação $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta = 1$ (veja [18]).

a) Mostre que $\varphi: \pi_1(K^2) \rightarrow \text{Dif}(S^1)$, $\varphi(\alpha)(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$ e $\varphi(\beta)(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\theta_0)}$, define uma representação.

b) Seja $\mathcal{F}(\varphi)$ a suspensão de φ a $E(\varphi)$. Mostre que $\mathcal{F}(\varphi)$ não é orientável nem transversalmente orientável, mas $E(\varphi)$ é orientável.

c) Suponha que $\theta_0/2\pi$ é irracional. Mostre que todas as folhas de $\mathcal{F}(\varphi)$ são densas. Mostre que duas folhas de $\mathcal{F}(\varphi)$ são difeomorfas à faixa de Moëbius infinita e as demais ao cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

CAPÍTULO V

FOLHEAÇÕES ANALÍTICAS DE CODIMENSÃO 1

O objetivo desta capítulo é mostrar uma obstrução à existência de folheações analíticas de codimensão 1. O método que vamos expor é devido a Haefliger [7]. Este método tem implicações em outras partes da teoria das folheações, como por exemplo no teorema de Novikov (Capítulo VI) e na teoria de ações do grupo \mathbb{R}^2 (Capítulo VII). Enunciamos abaixo o principal resultado deste capítulo.

TEOREMA ([7]) - Seja M uma variedade analítica real na qual está definida uma folheação analítica de codimensão 1. Toda curva fechada transversal a \mathcal{F} representa um elemento de ordem infinita de $\pi_1(M)$.

COROLÁRIO - Seja M uma variedade analítica compacta com grupo fundamental finito. Então não existe folheação analítica de codimensão 1 em M .

Em particular não existem folheações analíticas em S^3 .

§1. A construção de Haefliger.

A idéia para demonstrar o teorema acima pode ser resumida do seguinte modo. Seja $\gamma: S^1 \rightarrow M$ uma curva transversal à folheação \mathfrak{F} , de codimensão 1. Suponhamos que γ é homotópica a constante em M . Então γ se estende a uma aplicação diferenciável $g: D^2 \rightarrow M$, a qual pode ser tomada transversal às folhas de \mathfrak{F} , exceto num número finito de pontos $\{p_1, \dots, p_\ell\}$, onde a tangencia de g com as folhas de \mathfrak{F} é não degenerada.

Obtemos assim uma folheação $\mathfrak{F}^* = g^*(\mathfrak{F})$ do disco D^2 com singularidades $\{p_1, \dots, p_\ell\}$. Esta folheação é definida pelas órbitas de um campo de vetores Y em D^2 , transversal ao bordo e cujas singularidades são centros ou selas:

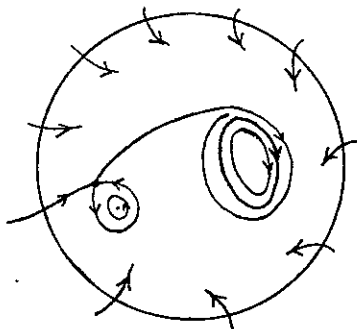


Fig. 1

O teorema de Poincaré-Bendixson será aplicado a Y para mostrar a existência de uma curva fechada invariante por Y . $\gamma: S^1 \rightarrow D^2$ tal que a curva $\tilde{\gamma} = g \circ \gamma: S^1 \rightarrow M$ possui

uma holonomia $f_{\tilde{\gamma}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{\tilde{\gamma}}(0) = 0$, a qual para pontos $x \in \mathbb{R}$ próximos de $0 \in \mathbb{R}$ satisfaz $f(x) = x$ se $x < 0$ e $f(x) \neq x$ para $x > 0$. Consequentemente \mathfrak{F} não pode ser analítica.

No seguinte lema \mathfrak{F} é uma folheação de codimensão 1 e classe C^r , ($r \geq 2$) definida em uma variedade M com $\dim(M) \geq 3$.

1.1 - LEMA - Seja $\tilde{g}: D^2 \rightarrow M$ contínua e tal que a restrição $\tilde{g}/\partial D^2$ é transversal a \mathfrak{F} . Para todo $\epsilon > 0$ existe $g: D^2 \rightarrow M$ de classe C^∞ , satisfazendo às seguintes propriedades:

a) $d_0(g, \tilde{g}) < \epsilon$, onde $d_0(g, \tilde{g}) = \sup_{x \in D^2} d(g(x), \tilde{g}(x))$, sendo d uma distância em M induzida por uma métrica riemanniana fixa.

b) $g/\partial D^2$ é transversal a \mathfrak{F} .

c) O conjunto $T = \{p \in D^2 \mid g \text{ não intercepta } \mathfrak{F} \text{ transversalmente em } p\}$ é finito. Coloquemos $T = \{p_1, \dots, p_\ell\}$.

d) Para todo $i = 1, \dots, \ell$, consideremos uma vizinhança trivializadora U_i de $g(p_i)$ e um segmento δ_i , transversal a \mathfrak{F} , contido em U_i . Sejam $\pi_i: U_i \rightarrow \delta_i$ a projeção ao longo das placas de \mathfrak{F} em U_i e V_i vizinhança de p_i em D^2 tal que $g(V_i) \subset U_i$. Então p_i é

uma singularidade não degenerada de $\pi_i \circ g: V_i \rightarrow \delta_i$, isto é, a derivada segunda $d^2(\pi_i \circ g)(p_i)$ é não degenerada.

e) Se $i \neq j$, $g(p_i)$ e $g(p_j)$ estão em folhas distintas de \mathfrak{F} .

Demonstração: Pelo teorema de Stone-Weierstrass, podemos

supor que \tilde{g} é de classe C^∞ (veja [11]).

Sejam U_1, \dots, U_k vizinhanças trivializadoras de \mathfrak{F} tais que $\bigcup_{i=1}^k U_i \supset \tilde{g}(D^2)$. Para $1 \leq i \leq k$ consideremos uma carta local $\alpha_i: U_i \xrightarrow{C^r} \mathbb{R}^m$ ($m = \dim(M)$) tal que $\alpha_i(U_i) = (-1, 1)^m = I \times \dots \times I = Q$ e $(\alpha_i^{-1})^*(\mathfrak{F}/U_i)$ é a folheação trivial em Q cujas folhas são da forma $I^{m-1} \times \{x^m\}$, $x^m \in I$.

Coloquemos $V_i = \tilde{g}^{-1}(U_i) \subset D^2$ e

$\tilde{g}_i = \alpha_i \circ (\tilde{g}/V_i): V_i \rightarrow Q$. Temos $\tilde{g}_i = (\tilde{g}_i^{-1}, \dots, \tilde{g}_i^m)$ e

portanto \tilde{g} intercepta \mathfrak{F} transversalmente em $p \in V_i$ se e somente se $D\tilde{g}_i^m(p) \neq 0$. Como D^2 é compacto existem

coberturas de D^2 por abertos $(W_i)_{i=1}^k$ e $(Z_i)_{i=1}^k$, onde

$\bar{Z}_i \subset W_i \subset \bar{W}_i \subset V_i$. Seja $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} \inf\{d(\tilde{g}(x), y) \mid$

$x \in \bar{W}_i, y \in \partial U_i\}$. Para toda $f: D^2 \rightarrow M$ tal que

$d_0(f, \tilde{g}) < \delta$, temos $f(\bar{W}_i) \subset U_i$ e portanto está definida

$\alpha_i \circ f: \bar{W}_i \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, k$. A demonstração de que existe

g satisfazendo a), c) e d) do lema se reduz ao seguinte

lema auxiliar:

LEMA - Sejam Z, W, V abertos do \mathbb{R}^l , onde $\bar{Z} \subset W \subset \bar{W} \subset V$ e \bar{V} é compacto. Seja $h: \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r ($r \geq 2$). Para todo $\epsilon \geq 0$ existe $f: \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r tal que $d_r(f, h) < \epsilon$, $f/(V-W) = h/(V-W)$ e f/\bar{Z} é de Morse

Uma função é dita de Morse se todas as suas singularidades são não degeneradas. No enunciado acima

$$d_r(f, h) = \max_{0 \leq j \leq r} \sup_{x \in \bar{V}} \{ \|D^j f(x) - D^j h(x)\| \}.$$

Mostraremos primeiro o Lema 1.1 e em seguida o Lema auxiliar.

Consideremos inicialmente $Z = Z_1$, $W = W_1$, $V = V_1$ e $h = \tilde{g}_1^m$. Pelo lema auxiliar existe $f_1: V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_1/(V_1 - W_1) \equiv \tilde{g}_1^m/(V_1 - W_1)$, f_1/\bar{Z}_1 é de Morse e se $g_1: V_1 \rightarrow M$ é definida por $\alpha_1 \circ g_1 = (\tilde{g}_1^1, \tilde{g}_1^2, \dots, \tilde{g}_1^{m-1}, f_1)$ então $d_r(g_1, \tilde{g}/V_1) < \min(\epsilon/k, \delta)$. Pela condição $d_0(g_1, \tilde{g}_1/V_1) < \delta$ temos que $g_1(W_1) \subset U_1$ e como $g_1/(V_1 - W_1) \equiv \tilde{g}/(V_1 - W_1)$, podemos estender g_1 a D^2 , colocando $g_1/(D^2 - W_1) \equiv \tilde{g}/(D^2 - W_1)$. Temos que $d_r(g_1, \tilde{g}) < \epsilon/k$ e g_1/\bar{Z}_1 satisfaz c) e d) do Lema 1.1.

Suponhamos por indução construída uma aplicação $g_j: D^2 \rightarrow M$ tal que $d_r(\tilde{g}, g_j) < j\epsilon/k$, $g_j/(D^2 - \bigcup_{i=1}^j W_i) \equiv \tilde{g}/(D^2 - \bigcup_{i=1}^j W_i)$ e $g_j/(\bigcup_{i=1}^j \bar{Z}_i)$ satisfaz c) e d) do Lema 1.1. Coloquemos $\alpha_i \circ (g_j/V_i) = (g_{j,i}^1, \dots, g_{j,i}^m)$. Pela hipótese de indução $g_{j,i}^m/\bar{Z}_i$ é de Morse para $i = 1, \dots, j$.

Ora, o conjunto das funções de Morse é aberto na topologia C^r uniforme, $r \geq 2$, pois a condição de uma singularidade q ser não degenerada é expressa pelo fato da matriz Hessiana $(\frac{\partial^2 h(q)}{\partial x_i \partial x_j})_{1 \leq i, j \leq 2}$ ser não singular, o que é uma condição aberta. Portanto existe $\mu > 0$ tal que se $h: D^2 \rightarrow M$ satisfaz $d_r(h, g_j) < \mu$ e $\alpha \circ h = (h_1^1, \dots, h_1^m)$, então h_1^m / \bar{Z}_i é de Morse para $i = 1, \dots, j$. Pelo lema auxiliar existe $f_{j+1}: V_{j+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_{j+1} / (V_{j+1} - W_{j+1}) \equiv g_{j, j+1}^m / (V_{j+1} - W_{j+1})$, f_{j+1} / \bar{Z}_{j+1} é de Morse e se $g_{j+1}: V_{j+1} \rightarrow M$ é definida por $\alpha_{j+1} \circ g_{j+1} = (g_{j, j+1}^1, \dots, g_{j, j+1}^{m-1}, f_{j+1})$ então $d_r(g_{j+1}, g_j / V_{j+1}) < \min(\epsilon/k, \delta, \mu)$.

Da construção segue que g_{j+1} se estende a uma aplicação C^r em D^2 , colocando-se $g_{j+1} / (D^2 - W_j) \equiv g_j / (D^2 - W_j)$. É claro que $d_r(g_{j+1}, \tilde{g}) < (j+1)\epsilon/k$, $g_{j+1} / (D^2 - \bigcup_{i=1}^{j+1} W_i) \equiv \tilde{g} / (D^2 - \bigcup_{i=1}^{j+1} W_i)$ e $g_{j+1} / (\bigcup_{i=1}^{j+1} \bar{Z}_i)$ satisfaz c) e d) do Lema 1.1.

Decorre do argumento acima que existe $g = g_k: D^2 \rightarrow M$ satisfazendo a), c) e d) do Lema 1.1. Se tomarmos ϵ suficientemente pequeno g também satisfaz b), uma vez que \tilde{g} satisfaz. Deixamos para o leitor a verificação de que podemos obter g satisfazendo e) do Lema 1.1.

Demonstração do lema auxiliar: Sejam $h: \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ como no

enunciado e $\epsilon > 0$. Pelo teorema da densidade das funções de Morse (veja [19] §6.), dado $\delta > 0$ existe $f_0: \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse tal que $d_r(h, f_0) < \delta$. Seja $\varphi: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $\varphi/Z \equiv 1$, $\varphi/(R^l - W) \equiv 0$ e $\varphi \geq 0$. Coloquemos $f = \varphi f_0 + (1-\varphi)h$. Temos que $f/\bar{Z} \equiv f_0$, $f/(V-W) \equiv h$ e $f-h = \varphi(f_0-h) = \varphi.\alpha$. Diferenciando $\varphi.\alpha$ k -vezes obtemos $D^k(\varphi.\alpha) = \sum_{j=0}^k C_j^k D^j(\varphi).D^{k-j}(\alpha)$, onde C_j^k é uma constante, $k = 0, \dots, r$. Temos então,

$$\|D^k(\varphi.\alpha)\|_0 \leq \sum_{j=0}^k C_j^k \|D^j\varphi\|_0 \|D^{k-j}\alpha\|_0 \leq \delta \sum_{j=0}^k C_j^k \|D^j\varphi\|_0 \leq \mu.\delta,$$

onde $\mu = \max_{0 \leq k \leq r} \{ \sum_{j=0}^k C_j^k \|D^j\varphi\|_0 \}$. Logo se δ for suficientemente pequeno $\|f-h\|_r < \epsilon$, como queríamos. Com isto concluímos a demonstração do Lema 1.1.

Consideremos agora $g: D^2 \rightarrow M$ como no Lema 1.1 e $\{p_1, \dots, p_\ell\}$ o conjunto dos pontos de D^2 , onde g não intercepta \mathfrak{F} transversalmente. Em $D^2 - \{p_1, \dots, p_\ell\}$ consideremos a folheação $\mathfrak{F}^* = g^*(\mathfrak{F})$, definida pelo campo de linhas $\pi(q) = (Dg(q))^{-1}(T_{g(q)} F_{g(q)})$, onde $F_{g(q)}$ é a folha de \mathfrak{F} que passa por $g(q)$. É fácil ver que se ℓ é uma linha integral de π , então $g(\ell) \subset F$, onde F é uma folha de \mathfrak{F} . Além disso $g^{-1}(A)$ é uma união de linhas integrais de π , podendo também conter no máximo um ponto do conjunto $\{p_1, \dots, p_\ell\}$.

1.2 - LEMA - Existe um campo de vetores Y em D^2 de

Classe C^{r-1} tal que as curvas integrais de Y em $D^2 - \{p_1, \dots, p_\ell\}$ são curvas integrais de \mathfrak{F}^* e as singularidades de Y são p_1, \dots, p_ℓ .

Demonstração: Sejam U_1, \dots, U_k vizinhanças trivializadoras de \mathfrak{F} com $\bigcup_{i=1}^k U_i \supset g(D^2)$ e para $1 \leq i \leq k$, $\alpha_i: U_i \rightarrow I^m$ um difeomorfismo C^r tal que $(\alpha_i^{-1})^*(\mathfrak{F}/U_i)$ é a folheação trivial cujas folhas são da forma $I^{m-1} \times \{x^m\}$, $x^m \in I$. Para cada $i = 1, \dots$, coloquemos, como no Lema 1.1, $V_i = g^{-1}(U_i)$ e $g_i = \alpha_i \circ g = (g_i^1, \dots, g_i^m)$. Em V_i , as curvas integrais de \mathfrak{F}^* estão contidas nos conjuntos $(g_i^m)^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, logo \mathfrak{F}^* é tangente ao campo de vetores $Y_i = (\frac{\partial g_i^m}{\partial v}, -\frac{\partial g_i^m}{\partial u})$, onde escrevemos $z = (u, v) \in D^2$. Se $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ não podemos esperar que $Y_i = Y_j$ em $V_i \cap V_j$. No entanto se $q \in V_i \cap V_j$ e $Y_i(q) \neq 0$, então $Y_j(q) \neq 0$ e $Y_i(q), Y_j(q)$ têm a mesma direção mas sentido eventualmente oposto.

Mostremos que para todo $i = 1, \dots, k$ podemos escolher $Y_i = \{(\frac{\partial g_i^m}{\partial v}, -\frac{\partial g_i^m}{\partial u})$ ou $(-\frac{\partial g_i^m}{\partial v}, \frac{\partial g_i^m}{\partial u})\}$ de tal forma que se $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ e $q \in V_i \cap V_j - \{p_1, \dots, p_\ell\}$ então $Y_i(q)$ e $Y_j(q)$ têm a mesma direção e sentido. Com efeito, em cada $x \in D^2$ podemos tomar duas orientações de \mathfrak{F}^* : aquela de Y_i ou a de $-Y_i$ quando $x \in V_i$. Para determinar uma orientação global de \mathfrak{F}^* , fixamos

$q_0 \in D^2$ e uma orientação local $\Theta(q_0)$. Se $q \in D^2$ seja $\gamma: [0,1] \rightarrow D^2$ uma curva contínua simples tal que $\gamma(0) = q_0$ e $\gamma(1) = q$. Sejam $q_0 \in W_0, W_1, \dots, W_n$ vizinhanças onde estão definidas orientações locais e tais que $\bigcup_{i=1}^n W_i \supset \gamma([0,1])$ e $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ somente se $j = i-1$ ou $i+1$.

Definamos agora uma orientação Θ_i em cada W_i de tal forma que se $x \in W_{i-1} \cap W_i$ então $\Theta_{i-1}(x) = \Theta_i(x)$ e $\Theta(q_0) = \Theta_0(q_0)$. Desta forma podemos definir $\Theta(q) = \Theta_n(q)$. Devemos provar que $\Theta(q)$ está bem definida. Isto decorre do fato que D^2 é simplesmente conexo, já que se $\tilde{\gamma}: [0,1] \rightarrow D^2$ é outro caminho contínuo ligando q_0 a q então γ é homotópico a $\tilde{\gamma}$ em D^2 . Deixamos para o leitor a verificação dos detalhes.

Seja $\{\varphi_i\}_{i=1}^k$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{V_i\}_{i=1}^k$ de D^2 . Temos que $\sum_{i=1}^k \varphi_i = 1$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ e $\text{supp}(\varphi_i) \subset V_i$ para todo $i = 1, \dots, k$. Definamos $Y = \sum_{i=1}^k \varphi_i Y_i$.

Verifiquemos agora Y satisfaz às condições desejadas.

Se $q \in D^2 - \{p_1, \dots, p_k\}$, existe $1 \leq i_0 \leq k$ tal que $Y_{i_0}(q) \neq 0$ e $\varphi_{i_0}(q) \neq 0$. Se $j \neq i_0$ é tal que $\varphi_j(q)Y_j(q) \neq 0$, temos que $\varphi_{i_0}(q)Y_{i_0}(q)$ tem a mesma direção e sentido que $\varphi_j(q)Y_j(q)$, logo $\sum_{i=1}^k \varphi_i(q)Y_i(q) \neq 0$. Concluimos daí que o conjunto de singularidades de Y é

$\{p_1, \dots, p_l\}$. Desta observação e da construção segue-se que as órbitas não singulares de Y coincidem com as curvas integrais de \mathcal{F}^* .

1.3 - Algumas propriedades do campo Y .

Seja $p \in V_i$ uma singularidade de Y . Como sabemos a aplicação $g_i^m: V_i \rightarrow \mathbb{R}$ é uma integral primeira de Y em V_i e p é uma singularidade não degenerada de g_i^m . Da teoria de funções de Morse (veja [19] §2) é sabido que existe um difeomorfismo $\alpha: U \rightarrow W$, onde U é uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^2 e W é uma vizinhança de p , tal que $g_i^m \circ \alpha(x,y) = g_i^m(p) + q(x,y)$, onde $q(x,y) = x^2 + y^2$, $-x^2 - y^2$ ou $x^2 - y^2$. Nos dois primeiros casos p é um centro de Y , isto é, as órbitas não singulares de Y em W são todas fechadas. No último caso p é uma sela de Y , isto é, existem duas curvas diferenciáveis δ_1 e δ_2 que se cortam transversalmente em p , tais que $\delta_i - \{p\}$ é constituída de duas trajetórias regulares α_i^1 e α_i^2 de Y ($i=1, 2$) e estas são as únicas trajetórias da restrição Y/W que se acumula em p .

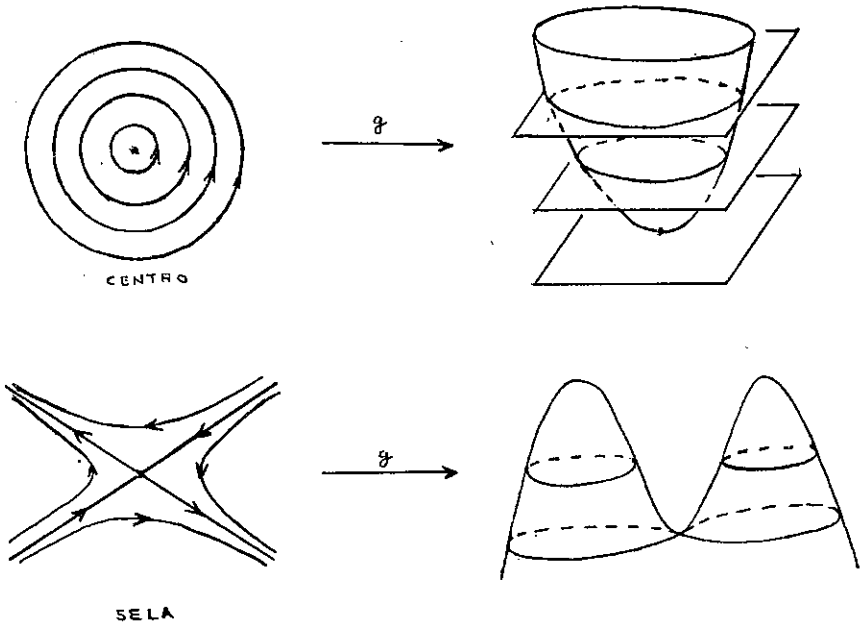


Fig. 2

As trajetórias α_i^j são chamadas de separatrizes de Y . Duas delas, α_1^1 e α_1^2 digamos, são caracterizadas pela propriedade $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_1^j(t) = p$ ($j = 1, 2$) e as outras duas pela propriedade $\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha_2^j(t) = p$. As trajetórias do primeiro tipo são chamadas de separatrizes estáveis e as do segundo tipo de separatrizes instáveis.

O fato de $g/\partial D^2$ ser transversal a \mathfrak{F} implica que Y é transversal a $\partial D^2 = S^1$. Podemos supor que Y aponta para dentro de D^2 ao longo de S^1 (tomando $-Y$ em lugar de Y , se necessário).

Dada uma trajetória γ de Y definimos o conjunto ω -limite (resp. α -limite) de γ por $\omega(\gamma) = \{x \in D^2 \mid x = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n), \text{ onde } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty\}$ (resp. $\alpha(\gamma) = \{x \mid x = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n), \text{ onde } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty\}$). Vejamos como podem ser os conjuntos $\omega(\gamma)$ e $\alpha(\gamma)$. Pelo teorema de Poincaré-Bendixson $\omega(\gamma)$ é uma singularidade, uma órbita fechada ou um gráfico de Y . Um gráfico é um conjunto conexo formado de selas e separatrizes de selas. Analogamente $\alpha(\gamma)$ só pode ser uma singularidade, uma órbita fechada, um gráfico de Y ou $\alpha(\gamma) = \emptyset$, caso γ seja uma trajetória de Y proveniente de S^1 .

Sejam p e q selas de Y e γ uma separatriz tal que $\alpha(\gamma) = p$ e $\omega(\gamma) = q$. Dizemos que γ é uma ligação de selas. Como $g(p)$, $g(\gamma)$ e $g(q)$ estão contidas numa mesma folha de \mathfrak{F} , concluímos da condição e) do Lema 1.1 que $p = q$. Podemos dizer então que Y não possui ligações de selas distintas e isto implica que os gráficos de Y são constituídos de uma sela e de no máximo duas separatrizes de Y , como numa das figuras abaixo.

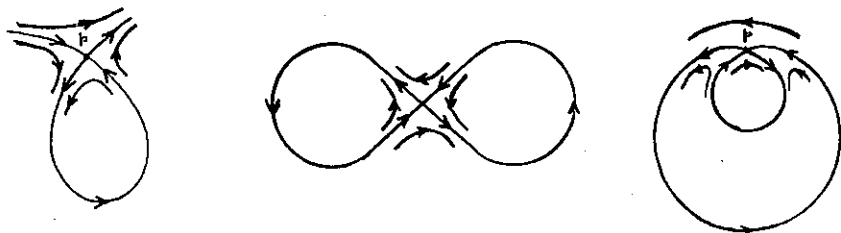


Fig. 3

§2. Demonstração dos resultados.

2.1 - Demonstração do teorema. Seja $\gamma: S^1 \rightarrow M$ uma curva fechada transversal à folheação \mathfrak{F} , analítica de codimensão um. Seja $[\gamma]$ a classe de homotopia de γ e suponhamos que $[\gamma]$ tem ordem finita, $[\gamma]^n = 1$. Seja $\delta: S^1 \rightarrow M$ dada por $\delta(e^{i\theta}) = \gamma(e^{in\theta})$. Então $[\delta] = [\gamma]^n = 1$, logo δ é transversal a \mathfrak{F} e se estende a uma aplicação $\tilde{g}: D^2 \rightarrow M$, a qual podemos supor diferenciável. Sejam $g: D^2 \rightarrow M$ como no Lema 1.1 e Y campo de vetores em D^2 como no Lema 1.2.

A demonstração do teorema consiste em encontrar uma curva fechada $\Gamma \subset D^2$, constituída de órbitas de Y e tal que a holonomia de $g(\Gamma) \subset A$ (folha de \mathfrak{F}) não pode ser analítica. Mais especificamente, Γ será uma órbita fechada ou gráfico de Y tal que se $\tilde{\alpha} \subset \alpha$, são segmentos analíticos transversais a \mathfrak{F} , com $\tilde{\alpha} \cap g(\Gamma) = \{p_0\}$,

$\tilde{\alpha} - \{p_0\} = \alpha_1 \cup \alpha_2$, α_1 e α_2 segmentos conexos, e $h: \tilde{\alpha} \rightarrow \alpha$ é a transformação de holonomia relativa ao caminho $g(\Gamma)$, então h/α_1 é a identidade mas $h/\alpha_2 \neq$ identidade. Isto é impossível, visto que h deve ser um difeomorfismo analítico e sendo assim, se h/α_1 é a identidade, deveríamos ter $h/\tilde{\alpha} \equiv$ identidade, contradição.

Dizemos que um subconjunto $\Gamma \subset D^2$ é um ciclo

limite de Y se Γ não se reduz a uma singularidade e existe uma órbita γ de Y tal que $\omega(\gamma) \supset \Gamma$ ou $\alpha(\gamma) \supset \Gamma$ e $\gamma \cap \Gamma = \emptyset$. Pelo teorema de Poincaré-Bendixson, se Γ é um ciclo limite de Y , então Γ é uma órbita fechada ou um gráfico. Dizemos que uma região $S \subset D^2$ é saturada por Y , se para todo $x \in S$ a órbita de Y por x , $\Theta(x)$, está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\Theta(x) \subset S$.

Diremos que uma região $R \subset D^2$ tem holonomia nula se R for saturada por Y , R não contém ciclos limites e para todo $x \in R$, $\Theta(x)$ é uma singularidade, uma órbita fechada ou $\Theta(x) \subset \Gamma$, onde Γ é um gráfico de Y . Na figura abaixo ilustramos alguns exemplos de regiões com holonomia nula:

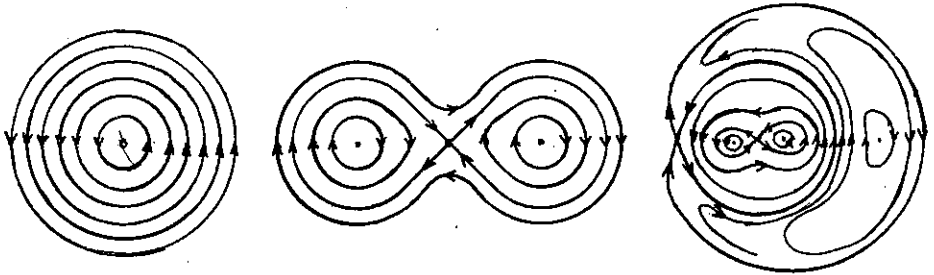


Fig. 4

Consideremos o conjunto $\mathcal{R} = \{R \subset D^2 \mid R \text{ é conexo e tem holonomia nula}\}$, com a relação de ordem parcial da inclusão, isto é, $R' \leq R$ se e somente se $R' \subset R$. Afirmamos que existe $R_0 \in \mathcal{R}$ tal que o bordo $\partial R_0 \subset D^2$.

contém uma curva fechada Γ com a propriedade desejada, isto é, $g(\Gamma)$ é um caminho numa folha A de \mathfrak{F} , cuja homotopia é a identidade apenas de um lado.

A demonstração será feita em cinco passagens:

i) Existe $R \in \mathcal{R}$ difeomorfo a um disco. De fato, pelo teorema do índice de Poincaré (veja [16] pg.144), como Y é transversal a ∂D^2 , $\#(\text{centros de } Y) - \#(\text{selas } Y) = -1$, logo Y possui pelo menos um centro, por exemplo p_1 . Como p_1 é um centro de Y , existe uma vizinhança V de p_1 , difeomorfa a um disco, onde todas as órbitas de Y são fechadas.

ii) Se $R \in \mathcal{R}$, então $R \cap \partial D^2 = \emptyset$. Decorre imediatamente do fato de Y ser transversal a ∂D^2 .

iii) \mathcal{R} possui pelo menos um elemento maximal. Seja $R_1 \subset R_2 \subset \dots$ uma seqüência crescente de elementos em \mathcal{R} . É fácil ver que $\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i = R$ é uma cota superior de todo R_i , $1 \leq i < \infty$ e que $R \in \mathcal{R}$. Pelo lema de Zorn, \mathcal{R} possui pelo menos um elemento maximal.

iv) Se R_0 é um elemento maximal de \mathcal{R} , então ∂R_0 é constituído de órbitas fechadas e gráficos de Y . De fato, sejam $q \in \partial R_0$ e $\mathcal{O}(q)$ a órbita de q . Como R_0 é saturado por Y , $\mathcal{O}(q) \subset \partial R_0$. Suponhamos que $\mathcal{O}(q)$ não é fechada. Neste caso $\omega(\mathcal{O}(q))$ tem que se reduzir a um

ponto singular.

Com efeito, suponhamos por absurdo que $w(\Theta(q))$ contenha um ponto x tal que $Y(x) \neq 0$. Seja ℓ um pequeno segmento transversal a Y com $x \in \ell$ e sejam $x_1 \neq x_2 \in \ell \cap \Theta(q)$ dois pontos sucessivos de interseção. Seja μ a curva simples fechada formada pela união dos segmentos limitados por x_1 e x_2 em $\Theta(q)$ e ℓ (veja Figura 5). Seja $S \subset D^2$ a região limitada por μ . Como é fácil de ver as órbitas vizinhas de $\Theta(q)$ penetram em S através de ℓ e não saem mais, logo não podem ser fechadas, absurdo.

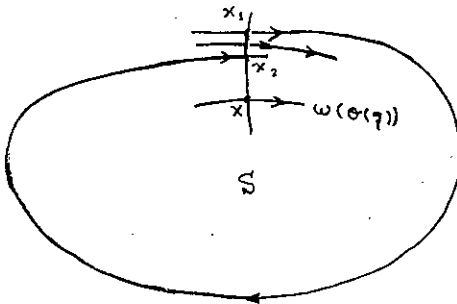


Fig. 5

Analogamente $\alpha(\Theta(q))$ é também uma singularidade. Ora, $w(\Theta(q))$ e $\alpha(\Theta(q))$ necessariamente são selas, pois os centros estão contidos no interior de R_0 , logo $w(\Theta(q)) = \alpha(\Theta(q)) = p$, pois Y não possui ligação entre selas distintas. Seja Γ a componente conexa de ∂R_0 que contém q . É fácil ver que $\Theta(q) \cup \{p\} \subset \Gamma$ e também que Γ

contém pelo menos uma órbita não singular, logo Γ é um gráfico de Y .

v) Existe um elemento maximal R_0 de \mathcal{R} , tal que ∂R_0 contém uma curva fechada Γ com as propriedades de sejadas. Seja R_1 um elemento maximal de \mathcal{R} . Suponhamos inicialmente que ∂R_1 contém uma órbita fechada γ . Sejam $\delta' \subset \delta$ segmentos transversais a Y com $\delta' \cap \gamma = \{p\}$ e tais que esteja definida uma transformação de Poincaré $h: \delta' \rightarrow \delta$. É claro que $h/\delta' \cap R_1$ é a identidade. Por outro lado se $h/\delta' \cap (D^2 - R_1)$ fosse a identidade existiria uma vizinhança U de γ constituída de órbitas fechadas e R_1 não seria maximal. Logo $g(\gamma)$ é uma curva fechada contida numa folha F de \mathfrak{F} e que possui holonomia não analítica.

Resta-nos analisar o caso em que para todo elemento maximal $R \in \mathcal{R}$, ∂R contém apenas gráficos. Observemos que neste caso o número de maximais distintos em \mathcal{R} é finito, pois para todo maximal $R \in \mathcal{R}$, ∂R contém pelo menos uma sela e o número de selas é finito.

Sejam R um elemento maximal de \mathcal{R} , Γ uma componente conexa de ∂R e s a sela de Y contida em Γ . Consideremos primeiramente o caso em que Γ contém apenas uma separatriz γ , como na figura abaixo:



Fig. 6

Sejam γ_1 e γ_2 as outras separatrizes (locais) de s , onde $w(\gamma_1) = \alpha(\gamma_2) = s$. Diremos que R é do tipo I se $\gamma_1 \neq \gamma_2$, isto é, $\alpha(\gamma_1)$ e $w(\gamma_2) \neq s$. Afirmamos que existe pelo menos um maximal R_1 que não é do tipo I.

De fato, se a é o número de centros e b o número de selas contidos no disco fechado limitado por $\Gamma = \gamma \cup \{s\}$. Pelo teorema do índice de Poincaré $a = b$. Se todos os maximais fossem do tipo I, teríamos $\#(\text{centros de } Y) - \#(\text{selas de } Y) = 0$; já que todo centro de Y está contido num maximal. Mas como já vimos a diferença acima é igual a um.

Seja R_1 um maximal que não é do tipo I. É claro que ∂R_1 possui uma componente conexa Γ a qual contém uma sela s tal que todas as suas separatrizes estão ligadas, como numa das figuras abaixo:

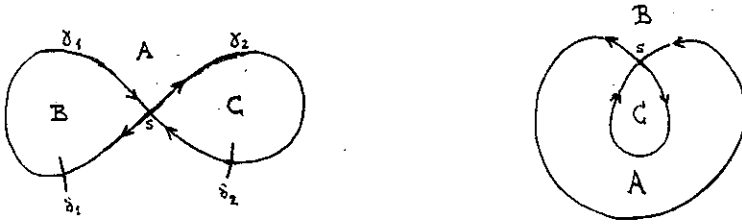


Fig. 7

Sejam A, B, C as componentes conexas de $D^2 - \Gamma$, onde $\partial A = \Gamma$. Sejam γ_1 e γ_2 as separatrizes de s . Consideremos δ_1 e δ_2 duas transversais a Y , tais que $\delta_1 \cap \gamma_1 \neq \emptyset$ e $\delta_2 \cup \gamma_2 \neq \emptyset$. É fácil ver que toda órbita de Y passando por um ponto de δ_1 suficientemente próximo de γ_1 volta a tocar δ_1 em tempos positivos. Podemos então definir transformações de Poincaré, $h_1^+ : \delta_1 \cap A \rightarrow \delta_1 \cap A$ e $h_1^- : \delta_1 \cap B \rightarrow \delta_1 \cap B$, onde $\delta_1 \subset \delta_1$, $\delta_1 \cap \gamma_1 \neq \emptyset$ e estamos supondo que $\delta_1 \cap C = \emptyset$. Analogamente podemos definir transformações de Poincaré $h_2^+ : \delta_2 \cap A \rightarrow \delta_2 \cap A$ e $h_2^- : \delta_2 \cap C \rightarrow \delta_2 \cap C$, onde estamos supondo $\delta_2 \cap B = \emptyset$.

Como $s \in \partial R_1$, para algum $i = 1, 2$, h_i^+ ou h_i^- não é a identidade numa vizinhança de $\delta_i \cap \gamma_i$, já que R_1 é maximal. Por outro lado, h_1^+ é a identidade numa vizinhança de $\delta_1 \cap \gamma_1$ se e somente se h_2^+ é a identidade numa vizinhança de $\delta_2 \cap A$ (veja a figura abaixo).

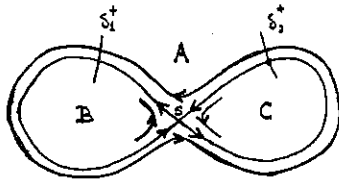


Fig. 8

Temos dois casos a considerar:

- 1) Dois dos homeomorfismos h_1^+ , h_1^- ou h_2^- são a identidade numa vizinhança de $\delta_1 \cap \gamma_1$ ou $\delta_2 \cap \gamma_2$.
- 2) Apenas um entre os homeomorfismos h_1^+ , h_1^- ou h_2^- é a identidade.

Caso 1: Suponhamos por exemplo que h_1^+ e h_1^- são a identidade. Afirmamos que neste caso a curva fechada $\mu = \{s\} \cup \gamma_2$ satisfaz à propriedade desejada.

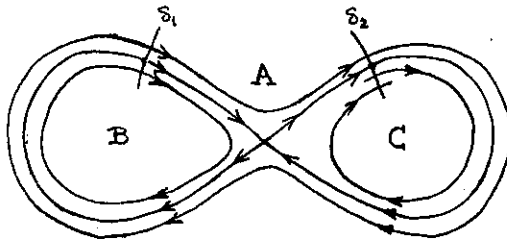


Fig. 9

Sejam f_1 e f_2 os germes de holonomia relati

vos a $g(\gamma_1 \cup \{s\})$ e $g(\gamma_2 \cup \{s\})$ respectivamente, onde $f_1: g(\delta_1) \rightarrow g(\delta_1)$ e $f_2: g(\delta_2) \rightarrow g(\delta_2)$. Coloquemos $\mu_i^+ = g(\delta_i \cap A)$, $i = 1, 2$, $\mu_1^- = g(\delta_1 \cap B)$, $\mu_2^- = g(\delta_2 \cap C)$, $f_i^+ = f_i/\mu_i^+$ e $f_i^- = f_i/\mu_i^-$, $i = 1, 2$. Por construção h_i^- é conjugado f_i^- , $i = 1, 2$ e h_i^+ a $f_i^+ \circ (\iota^{-1} \circ f_2^+ \circ \iota)$, onde $\iota: \mu_1^+ \rightarrow \mu_2^+$ é o germe de holonomia relativo ao segmento de $g(\Gamma)$ contido entre $\delta_1 \cap \gamma_1$ e $\delta_2 \cap \gamma_2$. Temos então que $f_1^- = \text{id}_{\mu_1^-}$ e $f_1^+ \circ (\iota^{-1} \circ f_2^+ \circ \iota) = \text{id}_{\mu_1^+}$. Como f_1 é analítico $f_1^+ = \text{id}_{\mu_1^+}$, logo $f_2^+ = \text{id}_{\mu_2^+}$ e portanto $f_2^- = \text{id}_{\mu_2^-}$, contra a hipótese de $h_2^- \neq \text{id}$. O argumento nos outros casos é análogo e deixamos a verificação para o leitor.

Caso 2: Neste caso mostraremos que no interior de algum dos discos limitados por Γ existe um gráfico $\tilde{\Gamma}$ como no caso 1.

Suponhamos por absurdo que não existe maximal como no caso 1. Sejam $R_1, \dots, R_k \in \mathcal{R}$ os maximais que não são do tipo I. Para cada $i = 1, \dots, k$, sejam $\Gamma_i^1, \dots, \Gamma_i^{k_i}$ as componentes conexas de ∂R_i . Para cada j , $1 \leq j \leq k_i$, o gráfico Γ_i^j contém duas separatrizes distintas e uma sela, logo $D^2 - \Gamma_i^j$ possui três componentes conexas, sendo que duas delas não contêm ∂D^2 . Introduzimos em $\{R_1, \dots, R_k\}$ a relação de ordem $R_k < R_i$

se para algum $j \in \{1, \dots, k_i\}$, R_k está contido em uma das duas componentes conexas de $D^2 - \Gamma_i^j$ que não contém ∂D^2 . Seja R_i um elemento minimal de $\{R_1, \dots, R_k\}$ e seja Γ_i^j uma componente conexa de ∂R_i que satisfaz 2). Coloquemos $D^2 - \Gamma_i^j = A \cup B \cup C$, onde por exemplo $\partial D^2 \subset A$. Temos então $\Gamma_i^j = \{s\} \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$, onde γ_1 e γ_2 são as separatrizes de s . Como Γ_i^j satisfaz 2), temos $B \cap R_i = \emptyset$ ou $C \cap R_i = \emptyset$, pois se $B \cap R_i \neq \emptyset$ e $C \cap R_i \neq \emptyset$ as órbitas em $B \cup C$ vizinhas de Γ_i^j seriam fechadas, contra a hipótese.

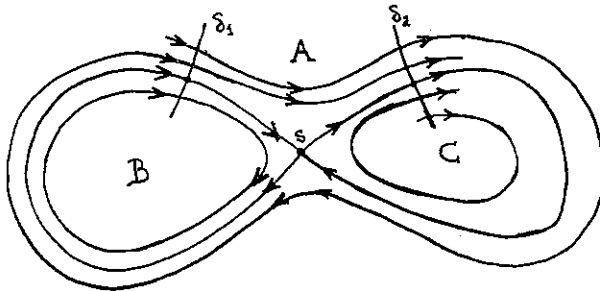


Fig. 10

Suponhamos que $C \cap R_i = \emptyset$. Pelo teorema do índice de Poincaré existe pelo menos um centro contido no interior de C . Este centro está contido em algum maximal R de \mathcal{R} , onde $R \neq R_i$. Portanto o conjunto $\mathcal{S} = \{R \in \mathcal{R} \mid R \text{ é maximal de } \mathcal{R} \text{ e } R \subset C\}$ é não vazio. Por outro lado se $R \in \mathcal{S}$ é do tipo I, $\#(\text{centros de } R) - \#(\text{selas de } R) = 0$ e como $\#(\text{centros de } C) - \#(\text{selas de } C) = 1$, exis-

te pelo menos um elemento $R \in \mathcal{S}$ que não é do tipo I. Mas por definição $R < R_i$, logo R_i não é minimal, absurdo.

2.2 - Demonstração do Corolário: Seja M uma variedade analítica compacta com grupo fundamental finito. Basta provarmos que toda folheação \mathcal{F} de codimensão um em M possui uma transversal fechada, o que será feito no lema abaixo.

2.2.1 - LEMA - Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um de uma variedade compacta M^m . Então existe uma curva fechada $\gamma: S^1 \rightarrow M$, transversal a \mathcal{F} .

Demonstração: Consideremos uma métrica riemaniana em M e o campo de linhas π , normal a \mathcal{F} . Seja $\xi: \mathbb{R} \rightarrow M$ uma linha integral. Como M é compacta o conjunto $\omega(\xi) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\xi(n, \infty)}$ é não vazio. Seja $p_0 \in \omega(\xi)$ e consideremos $\alpha: U \rightarrow I^m$ uma carta trivializadora de \mathcal{F} , tal que $(\alpha^{-1})^*(\mathcal{F}/U)$ é a folheação trivial $I^{m-1} \times \{t\}$, $t \in I$. Como $p_0 \in \omega(\xi)$, se a curva ξ não é fechada, ela corta U numa infinidade de segmentos $(\xi_i)_{i=1}^\infty$, $\xi_i: (s_i, t_i) \rightarrow U$, $s_i < t_i < s_{i+1}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = \infty$. Coloquemos $\xi_i^* = \alpha \circ \xi_i: (s_i, t_i) \rightarrow I^m$. Podemos escrever $\xi_i^* = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^m)$ e como ξ é transversal a \mathcal{F} , temos $\frac{d\xi_i^m}{dt} \neq 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que todos os segmentos ξ_i cortam a placa de U que contém p_0 e que $\alpha(p_0) = 0 \in I^m$.

Por outro lado existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $\frac{d\xi_i^m}{dt}$ e $\frac{d\xi_j^m}{dt}$ têm o mesmo o mesmo sinal. Suponhamos por exemplo que $i < j$ e $\frac{d\xi_i^m}{dt}, \frac{d\xi_j^m}{dt} < 0$. Como ξ_i e ξ_j cortam a placa de U que contém p_0 , existem $\lambda_i \in (s_i, t_i)$ e $\lambda_j \in (s_j, t_j)$ tais que $\xi_i^m(\lambda_i) < 0 < \xi_j^m(\lambda_j)$.

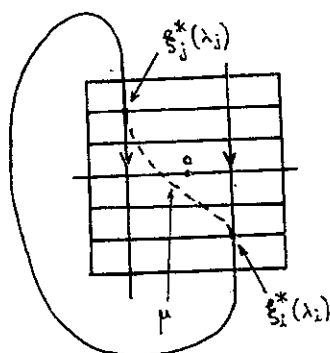


Fig. 11

Seja $\mu: [0,1] \rightarrow Q$ uma curva diferenciável tal que $\mu(0) = \xi_j^*(\lambda_j), \mu(1) = \xi_i^*(\lambda_i), \mu'(0) = (\xi_j^*)'(0), \mu'(1) = (\xi_i^*)'(1)$ e $(\mu^m)'(t) < 0$, onde $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^m)$. Definamos $\gamma: [0,2] \rightarrow M$ por $\gamma(t) = \alpha^{-1}(\mu(t))$ para $t \in [0,1]$ e $\gamma(t) = \xi((\lambda_j - \lambda_i)t + 2\lambda_i - \lambda_j)$ para $t \in [1,2]$. Verifica-se facilmente que γ é uma curva fechada transversal a \mathfrak{F} . Com isto provamos o lema e consequentemente o corolário.

EXERCÍCIOS.

1. Mostre que não existem folheações de S^3 por planos.

2. Seja \mathcal{F} uma folheação analítica de codimensão um em M . Seja F uma folha de \mathcal{F} . Suponha que γ é uma curva fechada em F , homotópica a uma constante em M . Mostre que a holonomia de γ tem ordem finita.
3. Seja \mathcal{F} uma folheação analítica de codimensão um de uma variedade simplesmente conexa. Mostre que \mathcal{F} não possui folha compacta.
4. Seja \mathcal{F} uma folheação analítica de codimensão um em \mathbb{R}^3 . Mostre que as folhas de \mathcal{F} são fechadas (como subconjunto de \mathbb{R}^3). Em particular uma folheação analítica de \mathbb{R}^3 não possui folha densa. Compare este resultado com o exemplo de Hector (Capítulo IV, §4.).
- Sugestão: Caso exista uma folha não fechada, mostre que \mathcal{F} admite uma transversal fechada.
5. Seja \mathcal{F} uma folheação analítica de codimensão um em uma variedade simplesmente conexa M . Suponha que existe uma curva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ que corta todas as folhas de \mathcal{F} . Mostre que para toda folha F de \mathcal{F} , $F \cap \gamma(\mathbb{R})$ contém apenas um ponto. Conclua que \mathcal{F} possui uma integral primeira analítica, isto é, existe uma submersão analítica $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que as folhas de \mathcal{F} são as superfícies de nível de f . Mostre que $M \approx F \times \mathbb{R}$, onde $F = f^{-1}(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}$.

CAPÍTULO VI

TEOREMA DE NOVIKOV

Neste capítulo vamos demonstrar o teorema de Novikov (veja [20]). Este teorema é um dos mais profundos da teoria de folheações e tem algumas implicações interessantes no contexto da topologia diferencial, como por exemplo no cálculo do posto de uma variedade (veja o Capítulo VII).

Antes de enunciar o teorema vejamos o que vem a ser uma componente de Reeb de uma folheação \mathfrak{F} numa variedade de dimensão 3.

Seja $\tilde{\mathfrak{F}}$ a folheação de Reeb usual em $D^2 \times S^1$ (veja Capítulo II). Dizemos que $R \subset M$ é uma componente Reeb de \mathfrak{F} se R é difeomorfa a $D^2 \times S^1$ e existe um homeomorfismo $h: D^2 \times S^1 \rightarrow R$ tal que h leva folhas de $\tilde{\mathfrak{F}}$ em $D^2 \times S^1$ sobre folhas de \mathfrak{F} em R . Em particular ∂R é uma folha de \mathfrak{F} difeomorfa ao toro T^2 .

TEOREMA 1 (Novikov) - Seja M uma variedade compacta, orientável, sem bordo, de dimensão 3

e com grupo fundamental finito. Toda folheação de codimensão 1 em M possui uma componente de Reeb.

COROLÁRIO 1 - Seja M é uma variedade de dimensão 3, compacta, sem bordo e simplesmente conexa (S^3 por exemplo). Toda folheação de codimensão 1 em M possui uma componente de Reeb e em particular uma folha difeomorfa a T^2 .

COROLÁRIO 2 - Toda folheação de uma variedade de dimensão 3, compacta, sem bordo, com grupo fundamental finito, possui uma folha compacta, difeomorfa a um toro ou a uma garrafa de Klein.

COROLÁRIO 3 - Seja M uma variedade compacta, de dimensão 3, sem bordo, com grupo fundamental finito. Se X é um campo de vetores sem singularidades em M , transversal a uma folheação, então X possui órbitas não periódicas (um conjunto aberto) e pelo menos uma órbita periódica.

Assim por exemplo não existe folheação transversal à fibração de Hopf em S^3 (veja exercício 5, Cap. IV). O mesmo vale para um campo de vetores em S^3 que não possui órbitas fechadas. Para a existência de um tal campo de vetores veja [29].

Na demonstração do Teorema 1 usaremos o conceito de ciclo evanescente.

DEFINIÇÃO 1 - Seja A_0 uma folha de \mathfrak{F} . Dizemos que a curva fechada $f_0: S^1 \rightarrow A_0$ é um ciclo evanescente se f_0 se estende a uma aplicação diferenciável

$F: [0, \epsilon] \times S^1 \rightarrow M$ satisfazendo às seguintes propriedades:

a) Para todo $t \in [0, \epsilon]$, a curva $f_t: S^1 \rightarrow M$, definida por $f_t(x) = F(t, x)$ está contida numa folha A_t de \mathfrak{F} .

b) Para todo $x \in S^1$ a curva $t \rightarrow F(t, x)$ é transversal a \mathfrak{F} .

c) Para $t > 0$, a curva f_t é homotópica a constante na folha A_t e f_0 não é homotópica a constante em A_0 .

Vamos chamar uma aplicação F como acima de extensão coerente do ciclo evanescente f_0 .

EXEMPLO 1 - Seja \mathfrak{F} a folheação de Reeb no toro sólido $D^2 \times S^1$. Qualquer meridiano do toro do bordo $S^1 \times S^1$, é um ciclo evanescente.

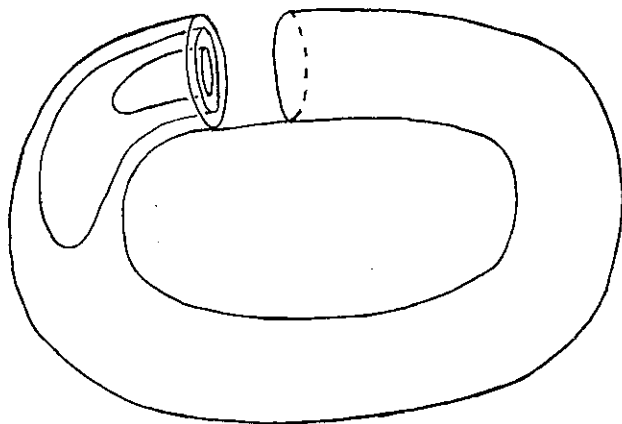


Fig. 1

Lembremos que uma folheação de codimensão 1 em M é dita transversalmente orientável, se existe um campo de vetores em M transversal a \mathfrak{F} . O Teorema 1 é consequência do seguinte:

TEOREMA 2 (Novikov) - Seja M uma variedade de dimensão 3, compacta, sem bordo e orientável.

Seja \mathfrak{F} uma folheação transversalmente orientável em M . Se A_0 é uma folha de \mathfrak{F} contendo um ciclo evanescente, então A_0 é o bordo de uma componente de Reeb de \mathfrak{F} .

§1 - Demonstração do Teorema 2.

O seguinte Lema foi demonstrado no Capítulo III.

1.1 LEMA (Lema de holonomia) - Seja \mathfrak{F} uma folheação de codimensão 1 de uma variedade M de dimensão m . Sejam A_0 uma folha de \mathfrak{F} , K uma variedade compacta conexa (com ou sem bordo) e $F_0: K \rightarrow A_0$ uma aplicação de classe C^r ($r \geq 0$). Suponha que F_0 é homotópica a uma constante (a imagem da homotopia sempre em A_0). Então F_0 se estende a uma aplicação $G: (-\epsilon, \epsilon) \times K \rightarrow M$, satisfazendo às seguintes propriedades:

i) Para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ a aplicação $F_t: K \rightarrow M$ definida por $F_t(x) = G(t, x)$, $x \in K$, é tal que $F_t(K) \subset A_t$, folha de \mathfrak{F} .

ii) Para todo $x \in K$, a curva $t \rightarrow G(t, x)$ é normal a \mathfrak{F} (estamos fixando aqui uma métrica riemanniana em M).

Observe que se F_0 é uma imersão, então G é uma imersão (por construção).

Suponhamos \mathfrak{F} transversalmente orientável e fixemos X , um campo normal a \mathfrak{F} com relação a uma métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em M (também fixada). Dizemos que a curva transversal a \mathfrak{F} , $\gamma: I \rightarrow M$ é positiva (resp. negativa), se para todo $t \in I$, $\langle \gamma'(t), X(\gamma(t)) \rangle > 0$ (resp. < 0). Sejam $f_0: S^1 \rightarrow A_0$ um ciclo evanescente e $F: [0, \epsilon] \times S^1 \rightarrow M$ uma extensão coerente de f_0 . Dizemos

que f_0 é um ciclo evanescente positivo (resp. negativa), se as curvas $t \mapsto F(t, x)$ são transversais positivas (resp. negativas). Se além disso as curvas $t \mapsto F(t, x)$ são ortogonais às folhas de \mathfrak{F} , diremos que F é uma extensão normal de f_0 .

1.2 - LEMA - Seja $f_0: S^1 \rightarrow A_0$ um ciclo evanescente positivo.

i) Seja $\tilde{F}: [0, \delta] \times S^1 \rightarrow M$ diferenciável, tal que $\tilde{F}(0, x) = f_0(x)$ e as curvas $t \mapsto \tilde{F}(t, x)$ são transversais positivas. Então existe um aberto U de $[0, \delta] \times S^1$ contendo $0 \times S^1$, $\epsilon > 0$ e um difeomorfismo $h: [0, \epsilon] \times S^1 \rightarrow U$ tal que $\tilde{F} \circ h$ é uma extensão coerente positiva de f_0 e $h(0, x) = f_0(x)$ se $x \in S^1$. Em particular podemos sempre supor que a extensão coerente é normal.

ii) Se $\bar{f}_0: S^1 \rightarrow A_0$ é homotópica a f_0 em A_0 , então \bar{f}_0 é um ciclo evanescente positivo.

Demonstração: i) Fixemos $x_0 \in S^1$ e consideremos uma extensão coerente positiva de f_0 , $F: [0, \epsilon] \times S^1 \rightarrow M$. Sejam $x_0 \in S^1$ e ι uma transversal a \mathfrak{F} por $F(0, x_0) = f_0(x_0)$, contendo a curva $t \mapsto F(t, x_0)$. Consideremos o difeomorfismo de holonomia $g: \iota' \rightarrow \iota$ re-

lativo a f_0 , onde $\iota' \subset \iota$. É claro que g é a identidade de nos pontos positivos de ι . Consideremos agora \tilde{F} como em i) e seja $\tilde{F}^*(\mathfrak{F})$ a folheação induzida por \mathfrak{F} em $[0, \delta] \times S^1$. Como as curvas $t \mapsto \tilde{F}(t, x)$ são transversais a \mathfrak{F} , é claro que $\tilde{F}^*(\mathfrak{F})$ é uma folheação regular de $[0, \delta] \times S^1$ e como a aplicação de holonomia de f_0 no segmento $t \mapsto \tilde{F}(t, x_0)$ é a identidade, segue-se que as folhas de $\tilde{F}^*(\mathfrak{F})$ são círculos, numa vizinhança de $0 \times S^1$. Designemos o círculo integral de $\tilde{F}^*(\mathfrak{F})$ passando por $(t, x_0) \in [0, \delta] \times S^1$, por $S_t(x_0)$ (x_0 é fixo). Da construção segue-se que a curva $t \mapsto (t, x)$ intersepta o círculo S_α em apenas um ponto $(t(\alpha, x), x) = h(\alpha, x)$. Além disso $h(0, x) = x$ e h é um difeomorfismo de uma vizinhança $[0, \tilde{\epsilon}] \times S^1$ de $0 \times S^1$ sobre uma vizinhança de $0 \times S^1$ (veja a figura abaixo).

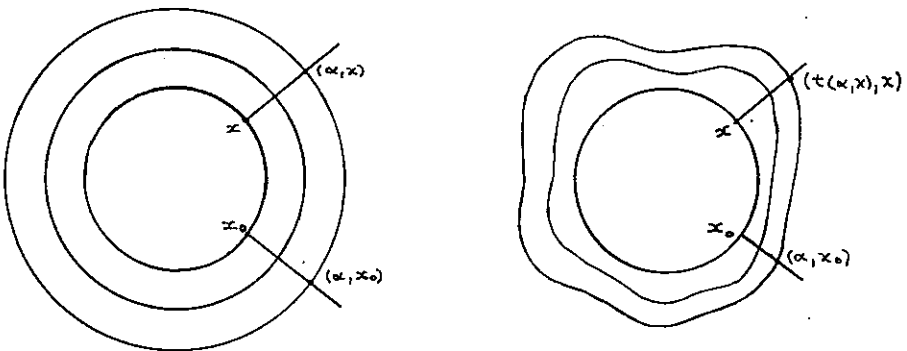


Fig. 2

Pela construção $G = \tilde{F} \circ h$, satisfaz às condições a) e b) da definição de extensão coerente. Designemos

por \tilde{A}_t a folha de \mathfrak{F} que contém a curva $g_t(x)=G(t,x)$.
 Sejam U uma vizinhança de $f_0(x_0)$ que trivializa \mathfrak{F} ,
 $\tilde{U}_t \subset \tilde{A}_t$ a placa de U que contém $g_t(x_0)$ e U_t a placa
 de U que contém $f_t(x_0)$. Reparametrizando o intervalo
 $[0, \tilde{\epsilon}]$, podemos supor que $U_t = \tilde{U}_t$ e portanto $\tilde{A}_t = A_t$.
 Com esta reparametrização obtemos uma aplicação
 $\bar{F}: [0, \bar{\epsilon}] \times S^1 \rightarrow M$ satisfazendo a) e b) da definição de ex
ensão coerente. Seja \bar{f}_t definida por $\bar{f}_t(x) = \bar{F}(t,x)$.
 Pela construção de \bar{F} , é claro que para t pequeno as
 curvas \bar{f}_t e f_t estão próximas na métrica intrínseca de
 A_t e portanto são homotópicas (veja [16]). Portanto, res-
 tringindo-se \bar{F} a um domínio da forma $[0, \epsilon] \times S^1$, $\epsilon \leq \bar{\epsilon}$,
 temos que \bar{F} é uma extensão coerente positiva de f_0 .

Seja agora X um campo normal a \mathfrak{F} e designemos
 por X_t o seu fluxo. Defina $\tilde{F}(t,x) = X_t(f_0(x))$, $t \geq 0$.
 Pelo argumento anterior podemos reparametrizar as curvas
 $t \mapsto \tilde{F}(t,x)$ por $\alpha \mapsto \tilde{F}(t(\alpha,x),x)$ de tal forma que
 $\bar{F}(\alpha,x) = \tilde{F}(t(\alpha,x),x)$ é uma extensão coerente normal posi-
 tiva de f_0 .

ii) Observemos inicialmente que existe $\epsilon > 0$ tal que
 se $\bar{f}_0: S^1 \rightarrow A_0$ e $d_0(f_0, \bar{f}_0) < \epsilon$, então \bar{f}_0 é um
 ciclo evanescente, onde d_0 é a distância intrínseca de
 A_0 . A demonstração deste fato pode ser feita consideran-

do-se extensões normais positivas $F: [0, \delta] \times S^1 \rightarrow M$ e $\bar{F}: [0, \bar{\delta}] \times S^1 \rightarrow M$ de f_0 e \bar{f}_0 respectivamente, onde F é coerente. A prova de que a restrição de \bar{F} a um intervalo da forma $[0, \epsilon] \times S^1$ ($0 < \epsilon \leq \bar{\delta}$) é coerente, reduz-se como em i) a provar que as curvas f_t e \bar{f}_t estão próximas para t pequeno, na métrica intrínseca de A_t e portanto são homotópicas.

Suponhamos agora que f_0 e \bar{f}_0 são homotópicas em A_0 e que f_0 é um ciclo evanescente. Seja $\varphi: [0, 1] \times S^1 \rightarrow A_0$ uma homotopia ligando f_0 e \bar{f}_0 . Pela observação anterior e por compacidade do intervalo $[0, 1]$, existe n_0 inteiro positivo tal que se $\varphi(\frac{k}{n_0}, x) = \varphi_k(x)$ é um ciclo evanescente positivo, então $\varphi_{k+1}(x)$ é um ciclo evanescente positivo. Por transitividade concluímos que $\varphi_{n_0}(x) = \bar{f}_0(x)$ é um ciclo evanescente positivo. Isto conclui a demonstração do lema.

Dada uma folha A de \mathfrak{F} designamos por \hat{A} o seu recobrimento universal e por $\pi_A: \hat{A} \rightarrow A$ a projeção do recobrimento.

Sejam $f_0: S^1 \rightarrow A_0$ um ciclo evanescente positivo e $F: [0, \epsilon] \times S^1 \rightarrow M$ uma extensão coerente positiva de f_0 . Consideremos as curvas $f_t(x) = F(t, x)$. Como f_t é

homotópica a constante em A_t , podemos levantar f_t a uma curva $\tilde{f}_t: S^1 \rightarrow \hat{A}_t$ tal que $\pi_{A_t} \circ \hat{f}_t = f_t$ para $t > 0$. Diremos que F é uma extensão simples de f_0 se as curvas \hat{f}_t são curvas simples em \hat{A}_t para $t > 0$ (isto é \hat{f}_t é um mergulho para $t > 0$). No nosso caso para toda folha A de \mathfrak{F} , \hat{A} é difeomorfa a \mathbb{R}^2 , já que as únicas variedades simplesmente conexas de dimensão 2 são \mathbb{R}^2 e S^2 e \hat{A} não pode ser S^2 pelo teorema de estabilidade completa de Reeb.

Supomos abaixo que M é orientável e \mathfrak{F} é transversalmente orientável.

1.3 - PROPOSIÇÃO - Suponha que A_0 contém um ciclo evanescente f_0 o qual possui uma extensão coerente, positiva, normal e simples. Então A_0 é o bordo de uma componente de Reeb de \mathfrak{F} .

Demonstração: Seja f_0 um ciclo evanescente em A_0 que possui uma extensão coerente, positiva, normal e simples $F: [0, \epsilon] \times S^1 \rightarrow M$. Pela teoria de transversalidade e pelo lema 1.2, podemos aproximar f_0 por um ciclo evanescente $g_0: S^1 \rightarrow A_0$, tal que: i) g_0 é uma imersão. ii) Os pontos de auto-interseção de g_0 são duplos e transversais, isto é, os conjuntos da forma $g_0^{-1}(p)$

contêm no máximo dois pontos e se $p = g_0(x_1) = g_0(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$ em S^1 , então os vetores $g'_0(x_1)$ e $g'_0(x_2)$ geram o espaço tangente a A_0 em p .

Com esta consideração, é claro que o conjunto $B_0 = \{p \in g_0(S^1) \mid g_0^{-1}(p) \text{ contém dois elementos}\}$ é finito. Coloquemos $n_0 = \# B_0$. Seja G uma extensão coerente, positiva e normal de g_0 . Podemos supor como no Lema 1.2 que para t pequeno $g_t(S^1)$ está contida na mesma folha que $f_t(S^1)$ e g_t e f_t estão próximas na métrica intrínseca de A_t . Decorre daí que para t pequeno $\hat{g}_t: S^1 \rightarrow \hat{A}_t$ é uma curva simples. Além disso os pontos de auto-interseção de g_t em A_t são duplos e transversais. Sejam $B_t = \{p \in g_t(S^1) \mid g_t^{-1}(p) \text{ contém dois elementos}\}$ e $n_t = \# B_t$. Como $g_0(S^1)$ é compacta e as curvas $t \rightarrow G(t, x)$ são reparametrizações de trajetórias do campo normal, existe $\alpha > 0$ tal que, ou as curvas $g_{x_1} = G([0, \alpha], x_1)$ e $g_{x_2} = G([0, \alpha], x_2)$ não se interceptam, ou uma está contida na outra. Decorre daí que $n_t \leq n_0$ para $0 \leq t \leq \alpha$.

Pelo argumento anterior podemos supor então que para todo $t \in [0, \epsilon]$, f_t satisfaz às seguintes propriedades:

- i) f_t é uma curva imersa cujos pontos de auto-interseção são duplos e transversais em A_t .

ii) \hat{f}_t é uma curva simples (mergulhada) em \hat{A}_t , para $t > 0$.

iii) $n_t = \# B_t \leq n_0$.

Necessitamos agora de alguns lemas.

1.4 - LEMA - Seja $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ o disco fechado de raio 1.

Existe uma imersão diferenciável

$H: (0, \epsilon] \times D^2 \rightarrow M$, satisfazendo às seguintes propriedades:

a) As curvas $t \mapsto H(t, x)$ são normais positivas.

b) Para todo $t \in (0, \epsilon]$, $H(t \times D^2) \subset A_t$.

c) A restrição de H a $(0, \epsilon] \times S^1$ coincide com F .

Demonstração: A curva \hat{f}_ϵ é simples e fechada em $\hat{A}_\epsilon = \mathbb{R}^2$.

Logo pelo teorema de Jordan $\hat{f}_\epsilon(S^1)$ é bordo de um disco em \hat{A}_ϵ , o qual podemos supor que é o disco D^2 de raio 1. Portanto $f_\epsilon: S^1 \rightarrow A_\epsilon$ se estende a uma imersão $h_\epsilon: D^2 \rightarrow A_\epsilon$, onde h_ϵ é a restrição de π_{A_ϵ} a D^2 .

Pelo lema de holonomia h_ϵ se estende a uma imersão $\tilde{H}: (\epsilon', \epsilon] \times D^2 \rightarrow M$, $0 < \epsilon' < \epsilon$, satisfazendo à propriedade a) e também $\tilde{H}(t \times D^2) \subset \tilde{A}_t$, folha de \mathfrak{F} . Seja \tilde{F} a restrição de \tilde{H} a $(\epsilon', \epsilon] \times S^1$. Como $\tilde{F}(\epsilon, x) = h_\epsilon(x) = f_\epsilon(x) = F(\epsilon, x)$ e as curvas $t \mapsto \tilde{F}(t, x)$, $t \mapsto F(t, x)$ são reparametrizações de trajetórias do campo normal. fa-

zendo uma reparametrização do intervalo $(\epsilon', \epsilon]$, podemos supor que $\tilde{F}(t, x) = F(t, x)$, o que corresponde a tomar $\tilde{A}_t = A_t$. Portanto podemos definir $H: (\epsilon', \epsilon] \times D^2 \rightarrow M$ satisfazendo a), b) e c).

Supondo que $\epsilon' > 0$. Vamos provar que para todo $x \in D^2$, existe $\lim_{\substack{t \rightarrow \epsilon' \\ t > \epsilon'}} H(t, x) = H(\epsilon', x)$. Com efeito, a curva simples $\hat{f}_{\epsilon'}$ é bordo de um disco em $\hat{A}_{\epsilon'}$ e portanto, usando o mesmo argumento anterior, existem $\delta > 0$ e uma extensão $\bar{H}: (\epsilon' - \delta, \epsilon' + \delta) \times D^2 \rightarrow M$ satisfazendo a), b) e c). Se $\epsilon' < t_0 < \epsilon' + \delta$, a restrição \bar{h}_{t_0} de \bar{H} a $t_0 \times D^2$ é homotópica a constante em A_{t_0} e portanto \bar{h}_{t_0} se levanta a $\hat{h}_{t_0}: D^2 \rightarrow \hat{A}_{t_0}$. Por construção $\partial(\hat{h}_{t_0}(D^2)) = \partial(\hat{h}_{t_0}(D^2))$, pois $\bar{H} = H = F$ em $t_0 \times S^1$. Como $\hat{A}_{t_0} \simeq \mathbb{R}^2$, e $\hat{h}_{t_0}, \bar{h}_{t_0}$ são mergulhos segue-se da propriedade anterior que $\hat{h}_{t_0}(D^2) = \bar{h}_{t_0}(D^2)$. Isto implica que para todo $x \in D^2$, existe $y \in D^2$, tal que $\hat{h}_{t_0}(x) = \bar{h}_{t_0}(y)$. Logo $H(t, x) = \bar{H}(t, y)$ para todo $t \in (\epsilon', \epsilon' + \delta)$ e portanto existe $\lim_{\substack{t \rightarrow \epsilon' \\ t > \epsilon'}} H(t, x) = \bar{H}(\epsilon', y)$. Este argumento mostra que podemos estender H a $(\epsilon' - \delta, \epsilon] \times D^2$, desde que $f_{\epsilon'}$ seja homotópica a constante em $A_{\epsilon'}$ e $\hat{f}_{\epsilon'}$ seja uma curva simples em $\hat{A}_{\epsilon'}$. Por conexidade podemos estender H a $(0, \epsilon] \times D^2$.

Como a construção de H foi feita usando órbitas do campo normal, claramente H é uma imersão. Isto demonstra o Lema 1.4.

Uma passagem importante é a seguinte:

1.5 - LEMA - Sejam $H: (0, \epsilon] \times D^2 \rightarrow M$ como no Lema 1.4, h_t a restrição de H a $t \times D^2$ e $D_t = h_t(D^2)$.

Existe uma seqüência decrescente $\tau_n \rightarrow 0$, $\tau_n > 0$, tal que:

a) $A_{\tau_n} = A_{\tau_{n+1}} = A$ para $n \geq 1$.

b) $D_{\tau_{n+1}} \cong D_{\tau_n}$ para $n \geq 1$.

c) Para todo $n \geq 1$, existe uma transformação

$g_n: D^2 \rightarrow D^2$, tal que $g_n: D^2 \rightarrow g_n(D^2)$ é um difeomorfismo e $h_{\tau_n} = h_{\tau_{n+1}} \circ g_n$.

Demonstração: Seja $U = \{x \in D^2 \mid \text{existe } \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} H(t, x)\}$.

Então U é um aberto em D^2 , contendo S^1 e $U \neq D^2$. Com efeito, que U é aberto decorre do fato das curvas $t \mapsto H(t, x)$ serem reparametrizações de órbitas do campo normal e do teorema do fluxo tubular para campos de vetores. $U \supset S^1$ porque a restrição de H a $(0, \epsilon] \times S^1$ coincide com F . Finalmente se $U = D^2$, H se estenderia continuamente a $0 \times D^2$ o que acarretaria que f_0 seria homotópica a constante em A_0 , contradição.

Consideremos $x_0 \in D^2 - U$. Como M é compacta existe uma seqüência decrescente $s_n \rightarrow 0$, $s_n > 0$, tal que $p_n = H(s_n, x_0)$ e $p_n \rightarrow p_0 \in A$, folha de \mathcal{F} . Seja V uma vizinhança trivializadora de p_0 . Podemos supor que $p_n \in V$ para todo n .

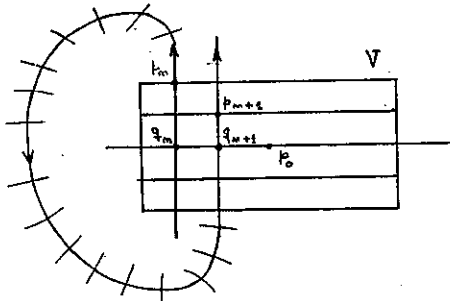


Fig. 3

Como a curva $\gamma(t) = H(t, x_0)$ é normal a \mathcal{F} , para todo $n \geq 1$ existe $t_n > 0$ tal que $q_n = H(t_n, x_0) \in A$ e o segmento de γ entre s_n e t_n está contido em V (veja a figura 3). Claramente a seqüência t_n é decrescente, $t_n \rightarrow 0$ e $A_{t_n} = A$ para todo n . Isto prova a).

É claro que para n suficientemente grande,

$p_0 \in D_{t_n}$. Fixemos $\hat{p}_0 \in \pi_A^{-1}(p_0)$ e vizinhanças W de p_0 em A e \hat{W} de \hat{p}_0 em \hat{A} tais que $\pi_A: \hat{W} \rightarrow W$ é um difeomorfismo. Consideremos uma seqüência $\hat{q}_n \in \hat{W}$, $\hat{q}_n \rightarrow \hat{p}_0$ com $\pi_A(\hat{q}_n) = q_n = h_{t_n}(x_0)$. Seja $\hat{h}_{t_n}: D^2 \rightarrow \hat{A}$ o único levantamento de h_{t_n} tal que $\hat{h}_{t_n}(x_0) = \hat{q}_n$ ($n \geq 1$) e co-

loquemos $\hat{D}_n = \hat{h}_{t_n}(D^2)$. Se $m, n \in \mathbb{N}$, as curvas $h_{t_m}(S^1) = f_{t_m}(S^1)$ e $h_{t_n}(S^1) = f_{t_n}(S^1)$ são disjuntas em A e os círculos $\hat{h}_{t_m}(S^1)$ e $\hat{h}_{t_n}(S^1)$ são simples e disjuntos em \hat{A} e portanto $\hat{D}_n \subset \hat{D}_m$ ou $\hat{D}_m \subset \hat{D}_n$, já que estes discos possuem um ponto comum \hat{p}_0 . Daí concluímos que $D_{t_m} \supseteq D_{t_n}$ ou $D_{t_n} \supseteq D_{t_m}$

Seja $\lim(A) = \bar{A} - A$, aderência de A . Seja d_A a distância intrínseca de A . Como a seqüência de curvas $h_{t_n}(S^1)$ converge a $f_0(S^1)$, segue-se que $f_0(S^1) \subset \lim(A)$, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} d_A(p_0, h_{t_n}(S^1)) = \infty$. Podemos então escolher uma subsequência decrescente $\tau_k = t_{n_k}$ de t_n , tal que $d_A(p_0, h_{\tau_k}(S^1))$ é crescente e tende a infinito. A seqüência τ_n satisfaz a) e b) do lema.

Observe agora que para todo $n \in \mathbb{N}$, $h_{\tau_n}: D^2 \rightarrow \hat{D}_n$ é um difeomorfismo e que $\hat{D}_n \subset \hat{D}_{n+1}$. Defina $g_n: D^2 \rightarrow D^2$ por $g_n = (\hat{h}_{\tau_{n+1}})^{-1} \circ \hat{h}_{\tau_n}$. O difeomorfismo g_n evidentemente satisfaz c). Com isto terminamos a demonstração do lema.

Observação. O fato de $d_A(p_0, h_{\tau_n}(S^1)) \rightarrow \infty$, implica que

$\bigcup_{n \geq 1} \hat{D}_n = \hat{A}$. Decorre daí que $\bigcup_{n \geq 1} D_{\tau_n} = A$. Usaremos esta

observação mais adiante.

Consideremos agora a variedade com bordo e esqui na K_n , obtida de $[\tau_{n+1}, \tau_n] \times D^2$, identificando-se cada ponto da forma $(\tau_n, x) \in \tau_n \times D^2$ com $(\tau_{n+1}, g_n(x)) \in \tau_{n+1} \times D^2$ (veja a figura 4). Seja $\pi_n: [\tau_{n+1}, \tau_n] \times D^2 \rightarrow K_n$ a projeção da relação de equivalência.

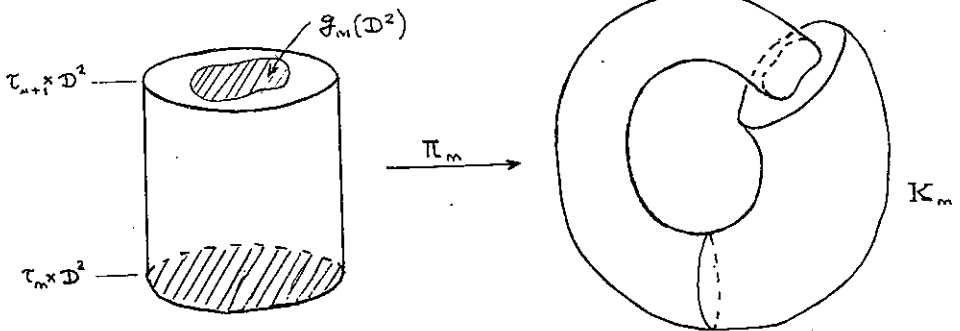


Fig. 4

Observe que para todo $x \in D^2$, $H(\tau_{n+1}, g_n(x)) = h_{\tau_{n+1}}(g_n(x)) = h_{\tau_n}(x) = H(\tau_n, x)$. Portanto existe uma aplicação $\bar{H}_n: K_n \rightarrow M$ tal que $\bar{H}_n = H \circ \pi_n$. Como H e π_n são imersões, \bar{H}_n é uma imersão. Nesta construção está contida a principal idéia da demonstração do teorema de Novikov.

1.6 - LEMA - Valem as seguintes propriedades:

- a) A_0 é folha compacta.

- b) A_0 é o bordo de uma sub-variedade com bordo $V \subset M$, tal que $V = \bigcup_{t \in [0, \epsilon]} A_t$.
- c) Para todo $t \in (0, \epsilon]$, $\bar{A}_t - A_t = \lim(A_t) = A_0$
- d) Para todo $t \in (0, \epsilon]$, A_t é difeomorfa a \mathbb{R}^2 .

Na demonstração de a) usamos o seguinte:

Lema auxiliar - Se A é uma folha não compacta de uma folheação \mathfrak{F} de codimensão um de uma variedade compacta, então para todo $p \in A$ existe uma curva fechada γ , transversal a \mathfrak{F} , passando por p .

Demonstração do lema auxiliar: Como M é compacta e A não é compacta, $\lim A = \bar{A} - A \neq \emptyset$. Consideremos um ponto $x_0 \in \lim A$ e seja U uma vizinhança trivializadora de \mathfrak{F} , tal que $x_0 \in U$. Seja $\iota \subset U$ um segmento normal a \mathfrak{F} tal que $x_0 \in \iota$. Como $x_0 \in \lim A$, existe uma seqüência de pontos distintos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \iota \cap A$. Consideremos o segmento ι com uma orientação, como na figura abaixo.

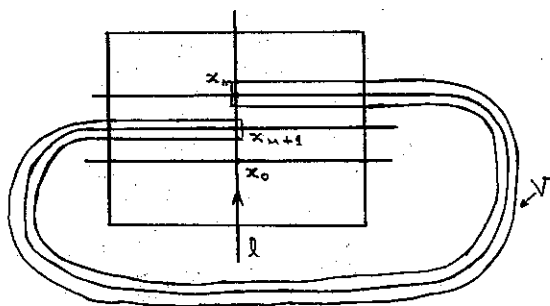


Fig. 5

Seja $\alpha: [0,1] \rightarrow A$ uma curva diferenciável sem auto-interseções, tal que $\alpha(0) = x_n \neq \alpha(1) = x_{n+1}$. Pelo lema de trivialização global (Capítulo III), existe uma vizinhança V de $\alpha([0,1])$ tal que \mathfrak{F}/V é equivalente à folheação produto $D^{n-1} \times \{t\}$ em $D^{n-1} \times (-\rho, \rho)$. Suponhamos primeiramente que \mathfrak{F} é transversalmente orientável. Neste caso podemos supor que a orientação de l é compatível com a orientação positiva de \mathfrak{F}/V , logo l corta V como na figura abaixo:

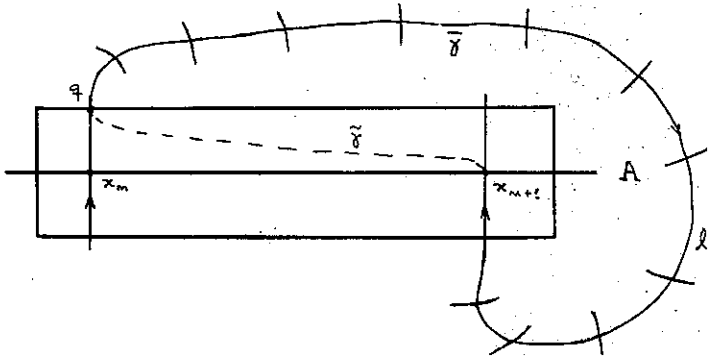


Fig. 6

Sejam δ_n e δ_{n+1} as componentes conexas de $\delta \cap V$ que contêm x_n e x_{n+1} respectivamente e $\bar{\gamma}$ o segmento de l que começa em x_n e termina em x_{n+1} . É claro que $\delta V \cap \delta_n$ contém dois pontos, q e q' digamos, onde podemos supor que $q > q'$ em δ (a orientação de δ induz uma ordem natural). Como x_{n+1} está "abaixo" de q (veja a figura 6) e \mathfrak{F}/V é a folheação horizontal em V , existe uma curva $\tilde{\gamma}: [0,1] \rightarrow V$, transversal a \mathfrak{F}/V , compatível com a orientação positiva de \mathfrak{F}/V e tal que $\tilde{\gamma}(0) = x_{n+1}$ e $\tilde{\gamma}(1) = q$. Podemos supor também que os vetores tangentes de $\bar{\gamma}$ e $\tilde{\gamma}$ em x_{n+1} e q coincidem. Sendo assim a curva $\gamma: [0,1] \rightarrow M$ definida por $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(2t)$ se $t \in [0, 1/2]$ e $\gamma(t) = \bar{\gamma}(2t-1)$ se $t \in [1/2, 1]$ é uma curva fechada de classe C^1 , transversal a \mathfrak{F} e que corta A em x_{n+1} .

Dado x , um ponto arbitrário de A , seja $\beta: [0,1] \rightarrow A$ uma curva diferenciável sem auto-interseções e tal que $\beta(0) = x_{n+1}$ e $\beta(1) = x$. Seja W uma vizinhança de $\beta([0,1])$ tal que \mathfrak{F}/W é equivalente a uma folheação horizontal $D^{n-1} \times \{t\}$ em $D^{n-1} \times (-\epsilon, \epsilon)$. É claro que $\gamma \cap W$ contém dois pontos q e q' com $q > q'$, digamos. Podemos então definir uma curva $\tilde{\mu}: [0,1] \rightarrow W$, transversal a \mathfrak{F} e tal que $\tilde{\mu}(0) = q'$, $\tilde{\mu}(1) = q$ e $\tilde{\mu}(1/2) = x$, supondo sem perda de generalidade que os vetores tangentes de γ e $\tilde{\mu}$ em q e q' coincidem. Unindo-se a curva $\tilde{\mu}$ com o segmento de γ contido no exterior de W , obtemos uma curva fechada μ , transversal a \mathfrak{F} e que corta A em x (veja a figura abaixo).

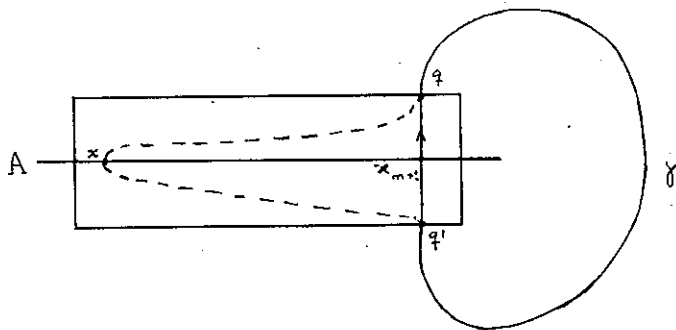


Fig. 7

Suponhamos agora que \mathfrak{F} não seja transversalmen

te orientável. Neste caso o argumento é o mesmo do caso anterior, exceto que devemos considerar uma vizinhança trivializadora V que contenham pelo menos três pontos da sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, como numa das figuras abaixo.

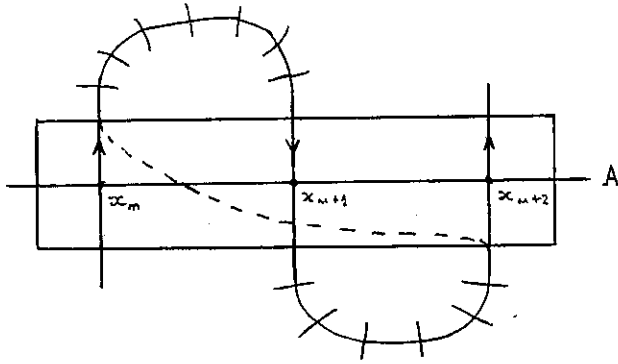


Fig. 7.a

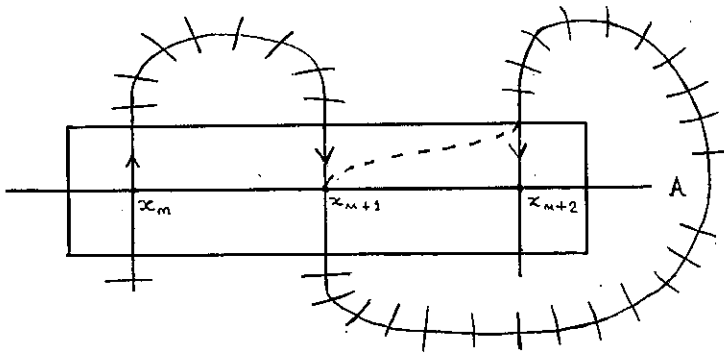


Fig. 7.b

Demonstração do Lema 1.6: Suponhamos por absurdo que A_0 não é compacta. Fixemos

$x_0 \in S^1$ e seja $q_0 = f_0(x_0)$. Pelo lema auxiliar existe uma curva fechada γ , transversal a \mathcal{F} passando por q_0 . Modificando a curva γ um pouco, podemos obter uma curva fechada positiva $\tilde{\gamma}$, satisfazendo às seguintes propriedades:

- i) $\tilde{\gamma}$ intersepta $F([0, \epsilon] \times S^1)$ ao longo do segmento normal $\{f_t(x_0) | t \in [0, \alpha]\}$, onde $0 < \alpha \leq \epsilon$.
- ii) $\tilde{\gamma}$ não intersepta o segmento normal $\{f_t(x) | t \in [0, \alpha]\}$ se $x \neq x_0$.

Reparametrizando $\tilde{\gamma}$ podemos supor sem perda de generalidade que $\tilde{\gamma}(t) = f_t(x_0)$ para $t \in [0, \alpha]$. Sejam $0 < \tau_{n+1} < \tau_n < \alpha$ como no lema 1.5 e $H_n: K_n \rightarrow M$ como na construção anterior ao lema 1.6. Para cada $x \in D^2$ consideremos a curva $\beta_x(t) = \pi_n(t, x)$. Por construção $\bar{H}_n(\beta_x(t)) = H(t, x)$ e portanto a curva $\beta_x(t)$ se aplica por \bar{H}_n numa trajetória do campo normal. Em particular $\tilde{\gamma}(t) = \bar{H}_n(\beta_{x_0}(t))$ para $t \in [\tau_{n+1}, \tau_n]$.

Vamos agora levantar $\tilde{\gamma}$ a uma curva $\bar{\gamma}$ em K_n tal que $\bar{H}_n \circ \bar{\gamma} = \tilde{\gamma}$. Definimos $\bar{\gamma}(t) = \beta_{x_0}$ se $t \in [\tau_{n+1}, \tau_n]$. Como $\beta_{x_0}(t)$ está no interior de K_n

para $\tau_n < t < \tau_n + \mu$, podemos levantar $\tilde{\gamma}$ no intervalo $[\tau_{n+1}, \tau_n + \mu]$, $\mu > 0$ (veja figura 8).

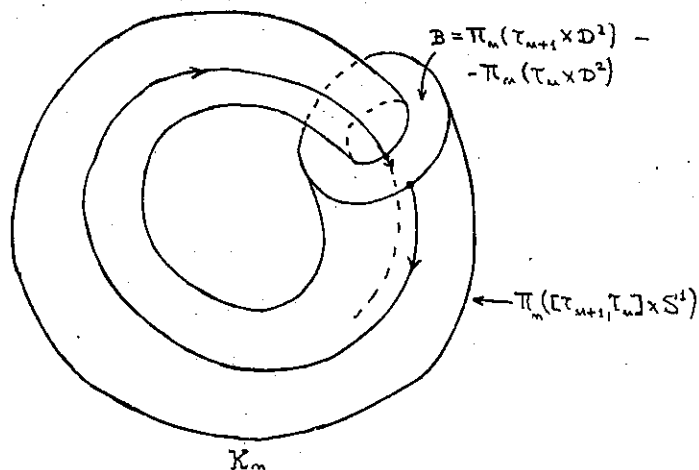


Fig. 8

Ora, como \bar{H}_n é um difeomorfismo local, podemos continuar a levantar $\tilde{\gamma}$ enquanto $\bar{\gamma}$ estiver no interior de K_n . Só seremos obrigados a parar de levantar $\tilde{\gamma}$ quando $\bar{\gamma}$ tocar novamente ∂K_n . Por outro lado $\bar{\gamma}$ tem que voltar a cortar ∂K_n , pois $\tilde{\gamma}$ é uma curva fechada. Ora, só existem duas possibilidades para $\bar{\gamma}$ intersepar ∂K_n : 1ª) Em $\pi_n([\tau_{n+1}, \tau_n] \times S^1)$. Esta é impossível, já que $\tilde{\gamma}$ só corta $H([\tau_{n+1}, \tau_n] \times S^1)$ ao longo do segmento $t \rightarrow f_t(x_0) = \tilde{\gamma}(t)$, $t \in [\tau_{n+1}, \tau_n]$.

2ª) Em $B = \pi_n(\tau_{n+1} \times D^2) - \pi_n(\tau_n \times D^2)$. Esta também não é

póssível. De fato, como $\bar{H}_n(B) \subset A = A_{\tau_n}$, se \bar{Y} saísse de K_n num ponto $z \in B$, o seu vetor tangente neste ponto estaria apontando para fora de K_n , logo o vetor tangente a \tilde{Y} no ponto $\bar{H}_n(z)$ estaria apontando no sentido negativo de \mathfrak{F} , absurdo. Isto demonstra a).

Consideremos agora as regiões conexas e compactas $V_n = \bar{H}_n(K_n) = H([\tau_{n+1}, \tau_n] \times D^2) \subset M$, $n \geq 1$. Observe no argumento acima que a curva $\beta_x(t)$ penetra no interior de K_n e não sai mais, para todo $x \in D^2$. Isto corresponde ao fato de que as curvas integrais positivas do campo normal ao penetrarem em V_n , não saem mais. Em particular $V_{n-1} \subset V_n$. Coloquemos $V = \bigcup_{n \geq 1} V_n$. É claro que V é conexo, compacto e sua fronteira $\partial V \supset A_0$. Mostraremos a seguir que $\partial V = A_0$.

Observemos inicialmente que $\bigcup_{t \in [\tau_{n+1}, \epsilon]} D_t = V_n \subset \bigcup_{t \in [0, \epsilon]} A_t$, logo $\bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{t \in [\tau_{n+1}, \epsilon]} D_t = \bigcup_{n \geq 1} V_n \subset \bigcup_{t \in [0, \epsilon]} A_t$. Como $\bigcup_{t \in [0, \epsilon]} D_t = \bigcup_{t \in [0, \epsilon]} A_t$ (veja observação no fim do Lema 1.5), segue-se que $V = \overline{\bigcup_{t \in [0, \epsilon]} A_t}$ e portanto V é saturado por \mathfrak{F} . Isto implica que ∂V é saturado por \mathfrak{F} .

Suponhamos que \tilde{A}_0 é uma outra folha de \mathfrak{F} em

∂V . Seja δ uma pequena transversal por um ponto de A_0 . Da construção de V segue-se que $\lim(A = A_{\tau_n}) \supseteq A_0$. Como $A = \bigcup_{n \geq 1} D_{\tau_n}$ e $D_{\tau_{n+1}} \supseteq D_{\tau_n}$ ($n \geq 1$), existe uma seqüência $n_k \rightarrow \infty$ tal que $\delta \cap (D_{\tau_{n_k}} - D_{\tau_{n_k-1}}) \neq \emptyset$. Como A é conexa, existe uma curva contínua $\beta: [1, \infty) \rightarrow A$ tal que $\beta(k) = p_k \in \delta \cap (D_{\tau_{n_k}} - D_{\tau_{n_k-1}})$. Por outro lado para todo $k \geq 1$, $\beta[k, k+1] \cap \partial D_{\tau_{n_k}} \neq \emptyset$, logo se $k \geq 1$ existe $s_k \in [k, k+1]$ tal que $\beta(s_k) = h_{\tau_{n_k}}(x_k)$ com $x_k \in S^1$. Seja $w(\beta) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\beta[n, \infty)}$. Do argumento acima temos que $w(\beta) \cap A_0 \neq \emptyset$ e $w(\beta) \cap \tilde{A}_0 \neq \emptyset$. Por outro lado como M é compacta, $w(\beta)$ é conexo, logo $A_0 = \tilde{A}_0$. Isto prova b). c) decorre imediatamente de b) e de que $\partial V \supseteq \lim(A_t) \supseteq A_0$ para todo t .

Para provar d) vamos usar o seguinte fato:

"Seja N uma variedade sem bordo de dimensão 2, cujo recobrimento universal é \mathbb{R}^2 . Então existe uma transformação de recobrimento $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que tem ordem infinita (isto é, $f^k \neq$ identidade se $k \neq 0$)". Deixamos a demonstração como exercício para o leitor (veja exercício 1).

Lembremos que uma transformação de recobrimento é um difeomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\pi \circ f = \pi$, onde $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow N$

é a projeção do recobrimento. Um fato que será usado abaixo é o seguinte: Se f é uma transformação de recobrimento e $f(x) = x$ para algum $x \in \mathbb{R}^2$, então $f =$ identidade. O seguinte corolário será usado na demonstração de d):

Lema - Seja $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \geq 1} \hat{D}_n$, onde para todo n , \hat{D}_n é um disco, $D_n \subset \hat{D}_{n+1}$ e $\partial \hat{D}_n \cap \partial \hat{D}_{n+1} = \emptyset$. Seja $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow N$ um recobrimento e suponha que para todo n , $\pi(\partial \hat{D}_n)$ é uma curva fechada em N cujas auto-interseções são duplas e transversais. Seja $m_k =$ número de auto-interseções de $\pi(\partial \hat{D}_k)$. Se a seqüência m_k é limitada, então $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow N$ é um difeomorfismo.

Demonstração - Suponha que π não é um difeomorfismo.

Neste caso existe uma transformação de recobrimento $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de ordem infinita. Seja $z_0 \in \hat{D}_1$ e coloquemos $z_k = f^k(z_0)$. Caso $z_k = z_l$ com $k \neq l$, teríamos $f^{k-l} =$ identidade, contra a hipótese. Logo a seqüência $\{z_k | k \in \mathbb{Z}\}$ é constituída de pontos distintos.

Por outro lado para todo $k \neq 0$, $f^k(\hat{D}_n)$ contém pontos fora de \hat{D}_n , pois caso contrário pelo teorema do ponto fixo de Brower f^k teria um ponto fixo em \hat{D}_n logo seria a identidade.

Para n fixo, seja k_n tal que

$z_0, \dots, z_{k_n} \in \hat{D}_n$ e $z_{k_n+1} \notin \hat{D}_n$. Ora, $\partial\hat{D}_n \cap f^j(\partial\hat{D}_n)$ contém pelo menos dois pontos, $1 \leq j \leq k_n$, pois $z_j \in \hat{D}_n \cap f^j(\hat{D}_n)$ e $\hat{D}_n \cap (\mathbb{R}^2 - f^j(\hat{D}_n)) \neq \emptyset$. Sejam $p_j, p'_j \in \partial\hat{D}_n \cap f^j(\partial\hat{D}_n)$, $1 \leq j \leq k_n$. Como $\pi \circ f^j = \pi$, $\pi(p_j)$ e $\pi(p'_j)$ correspondem a pontos de auto-interseção de $\pi(\partial\hat{D}_n)$ e como estes pontos são todos duplos, para $1 \leq i \leq k_n$ e $i \neq j$ temos $p_i \neq p_j, p'_j$, logo o número de auto-interseção de $\pi(\partial\hat{D}_n)$, $m_n \geq k_n$. Como $\bigcup_{n \geq 1} \hat{D}_n = \mathbb{R}^2$, segue-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$ e portanto m_n não é limitada contra a hipótese.

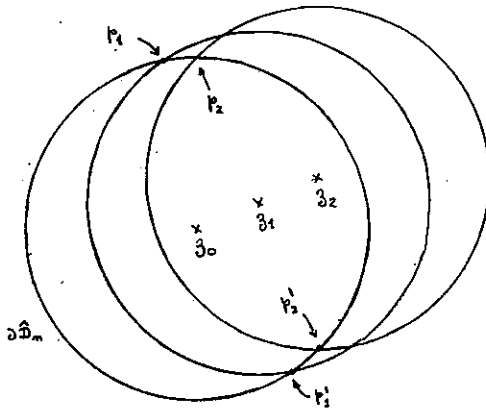


Fig. 9

Vejamos agora como se prova d). Provaremos que $A_{\tau_n} = A \simeq \mathbb{R}^2$. A demonstração de que $A_t \simeq \mathbb{R}^2$, $t \neq \tau_n$ é análoga.

Pela observação iii) anterior ao Lema 1.4, se n_t é o número de auto-interseções da curva $f_t(S^1) \subset A_t$, então $n_t \leq n_0$. Ora n_{τ_k} é o número de auto-interseções de $\pi_A(\partial \hat{D}_k) = f_{\tau_k}(S^1)$. Segue-se do Lema anterior que $A \simeq \mathbb{R}^2$ e $\pi_A: \hat{A} \rightarrow A$ é um difeomorfismo. Em particular $n_{\tau_k} = 0$ para todo k . Isto prova o Lema 1.6.

1.7 - LEMA - V é difeomorfa a $D^2 \times S^1$ e \mathfrak{F}/V é equivalente à folheação de Reeb em $D^2 \times S^1$.

Demonstração: Vamos usar aqui que M é orientável. Sejam

$$K_n = \pi_n([\tau_{n+1}, \tau_n] \times D^2) \text{ e } \bar{H}_n: K_n \rightarrow M. \text{ Podemos}$$

supor sem perda de generalidade que se $t \in (\tau_{n+1}, \tau_n)$ então $A_t \neq A_{\tau_n}$, $n \geq 1$. De fato, se tal ocorresse teríamos $D_{\tau_n} \subset D_t \subset D_{\tau_{n+1}}$, ou $D_t \subset D_{\tau_n}$ ou $D_{\tau_{n+1}} \subset D_t$, como já vimos anteriormente. As duas últimas possibilidades não ocorrem. Com efeito, se $D_t \supseteq D_{\tau_{n+1}}$, por exemplo, teríamos $\partial D_t \cap V_n = \emptyset$, logo $t < \tau_{n+1}$, já que $\partial D_t = f_t(S^1)$ e as órbitas do campo normal ao penetrarem em V_n não saem mais. Portanto $D_{\tau_n} \subset D_t \subset D_{\tau_{n+1}}$. Por outro lado o conjunto $B_n = \{t \in [\tau_{n+1}, \tau_n] \mid A_t = A_{\tau_n}\}$ é discreto, já que duas curvas distintas $f_t(S^1)$ e $f_s(S^1) \subset A_{\tau_n}$ estão longe na métrica intrínseca de A . Completando a seqüência $\{\tau_k\}$ com os pontos dos conjuntos B_n , $n \geq 1$, obtemos uma

nova seqüência $\{\tau'_n\}$ com a propriedade desejada. Mostraremos a seguir que $\bar{H}_n: K_n \rightarrow V_n$ é um difeomorfismo.

Na prova de d) do Lema 1.6, mostramos que para todo $t \in [0, \epsilon]$, a curva $f_t(S^1)$ é simples e isto implica que a restrição de H a $t \times D^2$ é biunívoca. Como $A_{t'} \neq A_t$ se $\tau_{n+1} < t' < t \leq \tau_n$, segue-se que \bar{H}_n é biunívoca e portanto é um difeomorfismo.

Por outro lado M é orientável, logo para todo $n \geq 1$, V_n é orientável e portanto K_n também é. Segue daí que o difeomorfismo de identificação $g_n: D^2 \rightarrow D^2$, do qual obtivemos K_n , mantém a orientação de D^2 . Concluímos então que K_n e V_n são toros sólidos topológicos para todo $n \geq 1$.

Vamos agora construir uma seqüência de toros de dimensão 2, $\{T'_n\}$, satisfazendo às seguintes propriedades:

- i) Para todo n , $T'_n \subset V_{n+1} - V_{n-1}$.
- ii) Uma órbita do campo normal intersepta T'_n no máximo em um ponto.
- iii) T'_n é o bordo de uma região $R'_n \subset V_{n+1}$, difeomorfa ao toro sólido.

Lembremos que uma órbita do campo X , normal a \mathfrak{F} , por um ponto de ∂V_n após algum tempo penetra no in-

terior de V_n e não sai mais. Por exemplo se $p \in f_{\tau_{n+1}}(S^1)$, a órbita positiva do campo normal por p , após algum tempo atinge $f_{\tau_n}(S^1)$, em seguida penetra no interior de V_n e não sai mais.

Consideremos um cilindro $C \subset D_{\tau_{n+1}} - D_{\tau_{n-1}}$ tal que $\partial C = f_{\tau_{n+1}}(S^1) \cup \gamma$, onde γ é um círculo tal que $\gamma \cap f_{\tau_n}(S^1) = \emptyset$. Saturando-se C por X num intervalo $[0, \mu]$, $\mu \neq 0$, obtemos uma região U de V_n difeomorfa $C \times [0, \mu]$ onde o campo normal é representado em $C \times [0, \mu]$ pelo campo $\frac{\partial}{\partial t} = (0, 1)$ (veja a figura 10). Tomemos μ de tal forma que $f_{\tau_n}(S^1) \subset U$. Construimos agora

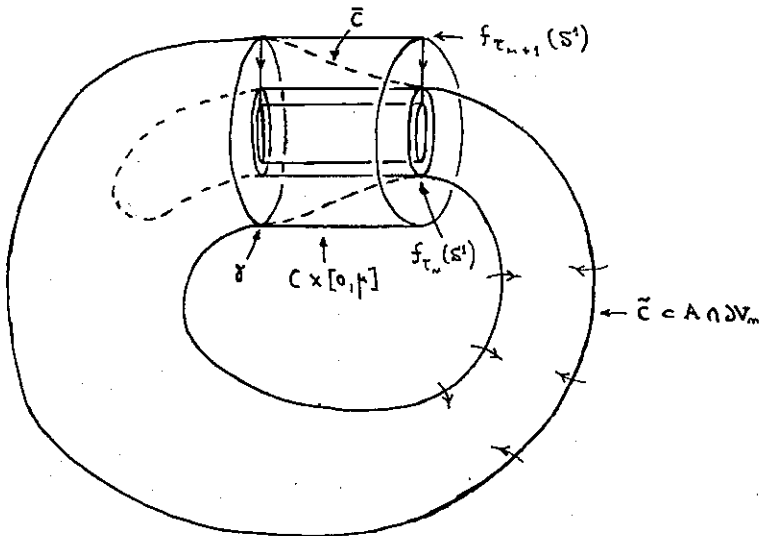


Fig. 10

T_n colando o cilindro $\tilde{C} = (D_{\tau_{n+1}} - D_{\tau_n}) - C$ tal que $\partial\tilde{C} = \gamma \cup f_{\tau_n}(S^1)$, com um cilindro \bar{C} transversal a X , $\bar{C} \subset C \times [0, \mu]$ e $\partial\bar{C} = f_{\tau_n}(S^1) \cup \gamma$. Fica a cargo do leitor preencher os detalhes da construção de \bar{C} (veja a figura 10). É claro da construção que $T_n = \bar{C} \cup \tilde{C}$, satisfaz às propriedades i), ii) e iii) desejadas.

Consideremos agora $p \in A_0$. A órbita de X por p penetra na região V limitada por A_0 e não sai mais. Além disso, como $V = \bigcup V_n$, $V_n \subset V_{n+1}$ e A_0 é compacta, dado $\delta > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq m_0$, $X_\delta(p) \in \text{int}(V_n)$, para todo $p \in A_0$. Ora, isto implica que para n suficientemente grande, para todo $p \in A_0$, o segmento de órbita $\{X_t(p) \mid t \in [0, \delta]\}$ corta T_n num único ponto e isto define uma transformação de Poincaré $P: A_0 \rightarrow T_n$. Este argumento já mostra que A_0 é difeomorfa a um toro T^2 . Como A_0 é compacta, podemos multiplicar o campo normal X por uma função positiva φ de classe C^r ($r \geq 1$), tal que para o campo $Y = \varphi X$, temos $Y_{t_0}(A_0) = T_n$ (n grande e fixo e $t_0 \in (0, \delta]$). Os detalhes da construção da função φ devem ser preenchidos pelo leitor. A aplicação $Y_{t_0}: V \rightarrow R'_n$ é um difeomorfismo de V sobre o toro sólido R'_n , cujo bordo é T_n .

Vamos mostrar agora que \mathfrak{F}/V é equivalente à

folheação de Reeb usual do toro sólido. Construiremos um homeomorfismo $h: V \rightarrow D^2 \times S^1$ o qual levará folhas de \mathfrak{F} em V em folhas da folheação de Reeb em $D^2 \times S^1$. Cabe observar que em geral é impossível construir uma equivalência h , como acima, que seja um difeomorfismo, pois isto implicaria que as holonomias de A_0 e de $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$ seriam conjugadas por um difeomorfismo, o que é falso em geral.

Consideremos os toros T'_n construídos anteriormente. Observe que na construção podemos supor que T'_n é transversal a \mathfrak{F} fora de $A \cap T'_n$. A figura abaixo ilustra a posição de T'_n com respeito às folhas de \mathfrak{F} em K_n (estamos considerando K_n identificado com V_n através

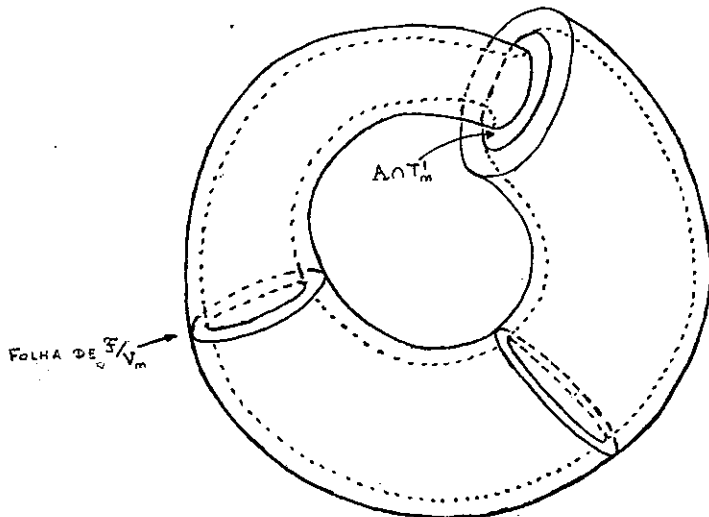


Fig. 11

do difeomorfismo \bar{H}_n). Modificando-se um pouco o toro T'_n , podemos obter um toro T_n próximo a T'_n , transversal à folheação \mathfrak{F} (veja a figura 12). Como T_n pode ser tomado arbitrariamente próximo de T'_n , o qual é transversal ao campo normal, podemos supor que T_n é transversal a \mathfrak{F}

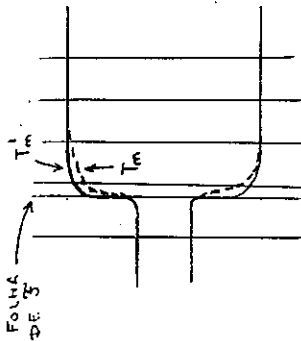


Fig. 12

e ao campo normal. Observemos que T_n satisfaz às seguintes propriedades:

- a) T_n intersepta cada folha de \mathfrak{F} em um círculo, o qual é o bordo de um disco nesta folha.
- b) T_n é o bordo de um toro sólido $R_n \subset V$.
- c) As trajetórias do campo normal cortam T_n no máximo uma vez.
- d) $T_n \subset V_{n+1} - V_{n-1}$ e portanto se n for suficientemente grande, toda trajetória positiva do campo normal por um ponto de A_0 corta T_n .

Consideremos agora a folheação de Reeb usual $\tilde{\mathfrak{F}}$, em $D^2 \times S^1$. Seja $\tilde{R} = \{(x, \theta) \in D^2 \times S^1 \mid \|x\| \leq 1/2, \theta \in S^1\}$ e $\tilde{T} = \partial\tilde{R}$ e seja \tilde{X} o campo normal a $\tilde{\mathfrak{F}}$ na métrica usual de $D^2 \times S^1$. Pela construção de \mathfrak{F} , \tilde{T} é transversal a $\tilde{\mathfrak{F}}$ e a \tilde{X} e \tilde{T} , \tilde{R} satisfazem propriedades análogas às propriedades a, b, c e d acima. É fácil ver que existe um difeomorfismo $\bar{h}: R_n \rightarrow \tilde{R}$ tal que se A é uma folha de \mathfrak{F} , $A \subset \text{int}(V)$, então $h(A \cap R_n) = \tilde{A} \cap \tilde{R}$, onde A é uma folha de $\tilde{\mathfrak{F}}$. Devemos agora estender \bar{h} a um homeomorfismo $h: V \rightarrow D^2 \times S^1$, levando folhas de \mathfrak{F} em folhas de $\tilde{\mathfrak{F}}$.

Denotaremos a órbita positiva do campo normal X a \mathfrak{F} (resp. \tilde{X} a $\tilde{\mathfrak{F}}$) passando pelo ponto $p \in V$ (resp. $p \in D^2 \times S^1$ em $t=0$, por $\mathfrak{O}_+(p)$ (resp. $\tilde{\mathfrak{O}}_+(p)$). Assim $\mathfrak{O}_+(p) = \{X_t(p) \mid t \geq 0\}$, onde X_t é o fluxo associado à X . Analogamente denotaremos por $\mathfrak{O}_-(p)$ (resp. $\tilde{\mathfrak{O}}_-(p)$) a órbita negativa de X (resp. \tilde{X}) passando por p em $t = 0$. Dado $q \in V - R_n$, seja A_q a folha de \mathfrak{F} por q . Temos duas possibilidades:

1ª) $q \in A_0$. Neste caso $\mathfrak{O}_+(q) \cap T_n = \{x\}$. Temos definido $\bar{h}(x) \in \tilde{T}$. Definimos $h(q) = \mathfrak{O}_-(\bar{h}(x)) \cap \partial(D^2 \times S^1)$. Claramente h fica bem definida em A_0 e $h: A_0 \rightarrow \partial(D^2 \times S^1)$ é um homeomorfismo.

2ª) $q \in \text{int}(V - R_n)$ - A extensão h , de \bar{h} , será defi

nida usando-se as trajetórias dos campos normais. Sejam $\{x\} = \mathcal{O}_+(q) \cap T_n$, $S_q = A_q \cap T_n$ e D_q o disco de A_q cujo bordo é S_q . Devemos escolher $h(q) \in \tilde{\mathcal{O}}_-(\bar{h}(x)) \cap \tilde{A}_{\bar{h}(S_q)}$, onde $\tilde{A}_{\bar{h}(S_q)}$ é a folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ que contém $\bar{h}(S_q)$. Observe que o conjunto $\tilde{\mathcal{O}}_-(\bar{h}(x)) \cap \tilde{A}_{\bar{h}(S_q)}$ é infinito e tem como único ponto de acumulação o ponto $\tilde{\mathcal{O}}_-(\bar{h}(x)) \cap \partial(D^2 \times S^1)$ (veja a figura 13) e portanto a escolha não pode ser arbitrária.

Ora, o conjunto $\mathcal{O}_+(q) \cap (A_q - D_q)$ é finito, já que ele se reduz à interseção de $\overline{A_q - D_q}$ com o segmento de $\mathcal{O}_+(q)$ limitado pelos pontos q e $\mathcal{O}_+(q) \cap T_n$. Seja $k(q) = \#(\mathcal{O}_+(q) \cap (A_q - D_q))$. Como $\tilde{\mathcal{O}}_-(\bar{h}(x))$ é naturalmente ordenado, faz sentido tomarmos o k -ésimo ponto do conjunto $\tilde{\mathcal{O}}_-(\bar{h}(x)) \cap \tilde{A}_{\bar{h}(S_q)}$. Definimos então $h(q) = k(q) -$
 $-$ ésimo ponto de $\tilde{\mathcal{O}}_-(\bar{h}(x)) \cap \tilde{A}_{\bar{h}(S_q)}$, a partir de $\bar{h}(x)$ (veja a figura 13 abaixo).

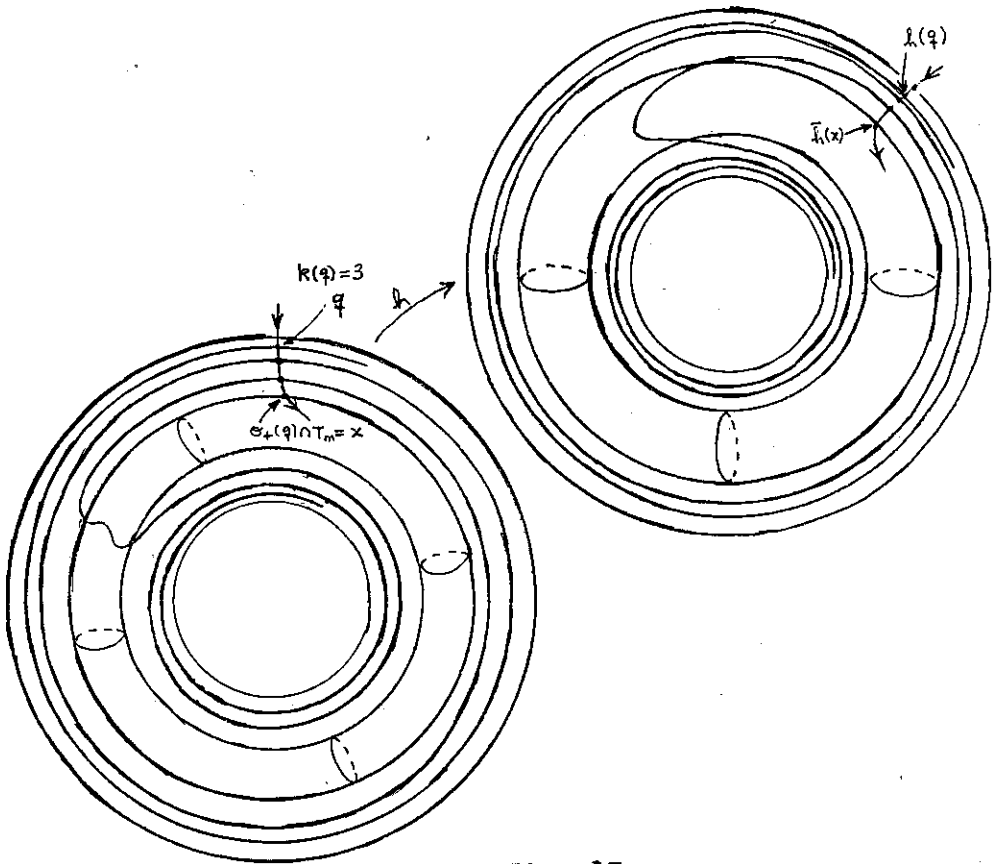


Fig. 13

Da definição segue que h leva folhas de \mathfrak{F} em folhas de $\tilde{\mathfrak{F}}$. Além disso h é injetiva, sobrejetiva e $h/R_n = \bar{h}$. A continuidade de h em $V-A_0$ é consequência do lema de trivialização global (Cap. III).

Verifiquemos que h é contínua em A_0 . Seja $\{q_n\}_{n \geq 1}$ uma seqüência em $V-A_0$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q_0 \in A_0$. Como $q_0 \in A_0$ e $\lim(A) = A_0$ para toda folha $A \subset \text{int}(V)$, segue-se que $k(q_n) \rightarrow \infty$ (veja Lema 1.6). Por outro lado,

se $\mathcal{O}_+(q_n) \cap T_n = \{x_n\}$ e $\mathcal{O}_+(q_0) \cap T_n = \{x_0\}$, temos que $x_n \rightarrow x_0$ e portanto $\bar{h}(x_n) \rightarrow \bar{h}(x_0)$. Daí tiramos que $\tilde{\mathcal{O}}_-(\bar{h}(x_n)) \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_-(\bar{h}(x_0))$, logo da construção, o conjunto dos pontos de acumulação da seqüência $h(q_n)$ está contido em $\tilde{\mathcal{O}}_-(\bar{h}(x_0))$. Como $k(q_n) \rightarrow \infty$, segue-se que o único ponto de acumulação de $h(q_n)$ é $\mathcal{O}_-(\bar{h}(x_0)) \cap \partial(D^2 \times S^1) = h(q_0)$, logo h é contínua e portanto é um homeomorfismo. Isto conclui a demonstração do Lema 1.7 e também da Proposição 1.3.

Para demonstrar o teorema 2 precisamos de mais um lema.

1.8 - LEMA - Sejam $f_0: S^1 \rightarrow A_0$ um ciclo evanescente positivo e $F: [0, \epsilon] \times S^1 \rightarrow M$ uma extensão coerente, normal, positiva de f_0 . Sejam $f_t(x) = F(t, x)$, $x \in S^1$ e A_t a folha de \mathcal{F} que contém $f_t(S^1)$. Então existe uma seqüência $t_n \rightarrow 0$ tal que para todo $n \geq 1$, a folha A_{t_n} contém um ciclo evanescente $g_n: S^1 \rightarrow A_{t_n}$, o qual possui uma extensão coerente, normal, positiva e simples.

Demonstração: Pelo Lema 1.2 podemos supor que $f_0: S^1 \rightarrow A_0$ é uma imersão cujas auto-interseções são duplas e transversais.

Sejam $f_t \rightarrow A_t$ como no lema e $\hat{f}_t: S^1 \rightarrow \hat{A}_t$

um levantamento de f_t . Seja $B_t = \{p \in \hat{f}_t(S^1) \mid p = f_t(x_1) = f_t(x_2) \text{ com } x_1 \neq x_2 \in S^1\}$. Como já vimos anteriormente podemos tomar ε pequeno de forma $n_t = \#B_t \leq \#B_0 = k$. Para $t > 0$ coloquemos, $\hat{B}_t = \{p \in \hat{f}_t(S^1) \mid p = \hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x_2) \text{ com } x_1 \neq x_2 \in S^1\}$. Claramente $\pi_{A_t}(\hat{B}_t) \subset B_t$ e portanto $\hat{n}_t = \#\hat{B}_t \leq n_t \leq k$. Suponhamos $B_0 = \{p_1, \dots, p_k\}$ e sejam $x_i \neq x'_i \in S^1$ tais que $f_0(x_i) = f_0(x'_i) = p_i$, $i = 1, \dots, k$. Pela unicidade das soluções do campo normal, se $p \in B_t$, então $p = f_t(x_i) = f_t(x'_i)$ para algum $i = 1, \dots, k$.

Sejam $K_1 = \{t \in [0, \varepsilon] \mid f_t(x_1) = f_t(x'_1)\}$ e $U_1 = \{t \in [0, \varepsilon] \mid \hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x'_1)\}$. Claramente K_1 é fechado e $K_1 \supseteq U_1$. Mostremos que U_1 é aberto. Seja $S^1 - \{x_1, x'_1\} = \alpha \cup \beta$, onde α e β são segmentos abertos e $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Se $t \in U_1$ temos que $\hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x'_1)$ e portanto a restrição de \hat{f}_t ao fecho $\bar{\alpha}$, de α , é uma curva fechada em \hat{A}_t , o que implica que a restrição $f_t/\bar{\alpha}$ é uma curva fechada em A_t homotópica a uma constante em A_t . Pelo lema de holonomia (1.1) existe $\delta > 0$ tal que para $s \in (t-\delta, t+\delta)$, $f_s/\bar{\alpha}$ é homotópica a uma constante em A_s , logo $\hat{f}_s/\bar{\alpha}$ é uma curva fechada em \hat{A}_s , o que implica que $s \in U_1$. Temos três possibi-

lidades:

1ª - Existe $\delta > 0$ tal que $[0, \delta] \cap U_1 = \emptyset$. Neste caso, restringindo F a $[0, \delta] \times S^1$ obtemos que $n_t < n_0 = k$. Passamos a raciocinar com $U_2 = \{t \in [0, \delta] \mid \hat{f}_t(x_2) = \hat{f}_t(x'_2)\}$.

2ª - Existe $\delta > 0$ tal que $(0, \delta] \subset U_1$ - Temos que $\hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x'_1)$ para $t \in (0, \delta]$, logo $f_t(x_1) = f_t(x'_1)$ para $t \in [0, \delta]$. Podemos considerar $g_0 = f_0/\bar{\alpha}$ e $\tilde{g}_0 = f_0/\bar{\beta}$ como aplicações de S^1 em A_0 . Como f_0 não é homotópica a constante em A_0 , podemos supor que g_0 não é homotópica a constante em A_0 . Tomemos $G = F/[0, \delta] \times \bar{\alpha}$ e $g_t(x) = G(t, x)$. Como $\hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x'_1)$ para $t \in (0, \delta]$, g_t é homotópica a constante em A_t para $t \in (0, \delta]$. Se $\hat{n}_t^1 = \# \{p \mid \hat{g}_t(x) = \hat{g}_t(x') = p, x \neq x' \in S^1\}$ temos que $\hat{n}_t^1 < \hat{n}_t \leq k$.

3ª - Existe uma seqüência $\tau_m^1 \rightarrow 0$ tal que $\tau_m^1 \in \bar{U}_1 - U_1$. Podemos supor que para todo $m \geq 1$, existe $\epsilon_m > 0$, tal que $(\tau_m^1, \tau_m^1 + \epsilon_m] \subset U_1$. Como no caso anterior temos $f_t(x_1) = f_t(x'_1)$ para $t \in [\tau_m^1, \tau_m^1 + \epsilon_m]$. Como $\tau_m^1 \in K_1 - U_1$, as restrições $f_{\tau_m^1}/\bar{\alpha}$ e $f_{\tau_m^1}/\bar{\beta}$ não são homotópicas a constante em $A_{\tau_m^1}$ e como $(\tau_m^1, \tau_m^1 + \epsilon_m] \subset U_1$, para $\tau_m^1 < t \leq \tau_m^1 + \epsilon_m$, temos que $f_t/\bar{\alpha}$ e $f_t/\bar{\beta}$ são

homotópicas a constante em A_t . Portanto para todo $m \geq 1$, $f_{\tau_m^1}/\bar{\alpha}$ é um ciclo evanescente positivo em $A_{\tau_m^1}$ e $F/[\tau_m^1, \tau_m^1 + \epsilon_m] \times \bar{\alpha}$ é uma extensão coerente, normal, positiva de $f_{\tau_m^1}/\bar{\alpha}$. Se $\hat{n}_t^m = \{p \in \hat{f}_t(\bar{\alpha}) \mid p = \hat{f}_t(x) = \hat{f}_t(x')\}$ com $x, x' \neq x_1, x'_1$ e $x \neq x' \in \bar{\alpha}$, então $\hat{n}_t^m < \hat{n}_t \leq k$.

Em qualquer dos casos obtivemos uma seqüência $\tau_m^1 \rightarrow 0$ tal que para todo $m \geq 1$, a folha $A_{\tau_m^1}$ contém um ciclo evanescente g_m , o qual possui uma extensão coerente, normal, positiva $G_m: [\tau_m^1, \tau_m^1 + \epsilon_m] \times S^1 \rightarrow M$ tal que o número de auto-interseções de \hat{g}_t^m , $\hat{n}_t^m \leq \min\{k-1, \hat{n}_t-1\}$. Nos dois primeiros casos $\tau_m^1 = 0$ para todo $m \geq 1$.

Fixando-se $m = m_0$ e $g_0 = g_{m_0}$, pelo mesmo argumento, podemos obter uma seqüência $\tau_m^{2, m_0} \rightarrow \tau_{m_0}^1$ tal que para todo $m \geq 1$, a folha $A_{\tau_m^{2, m_0}}$ contém um ciclo evanescente g_m^{2, m_0} , o qual possui uma extensão coerente, normal, positiva G_m^{2, m_0} tal que o número de auto-interseções de $\hat{g}_t^{2, m_0, m}$, $\hat{n}_t^{2, m_0, m} \leq \min\{k-2, \hat{n}_t-2\}$. Considerando-se a seqüência $\tau_m^{2, m} = \tau_m^2$, obtemos que $\tau_m^2 \rightarrow 0$ e que a folha $A_{\tau_m^2}$ possui um ciclo evanescente $g_m^2 = g_m^{2, m}$, o qual possui uma extensão coerente, normal, positiva $G_m^2 = G_m^{2, m}$,

tal que o número de auto-interseções de $\hat{g}_t^{2,m} = \hat{g}_t^{2,m,m}$, $\hat{n}_t^{2,m} \leq \min \{k-2, \hat{n}_t-2\}$. Prosseguindo com este argumento, ao fim de no máximo $k-2$ passos, obteremos uma seqüência $\tau_m \rightarrow 0$, tal que para todo $m \geq 1$, a folha A_{τ_m} contém um ciclo evanescente satisfazendo às propriedades desejadas. Lembrando que em cada passagem podemos sempre substituir o ciclo evanescente que possivelmente não é diferenciável num ponto, por um ciclo evanescente diferenciável (pelo Lema 1.2), isto conclui a demonstração do Lema 1.8.

1.9 - FIM DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2 - Suponha que A_0 contém um ciclo evanescente positivo $f_0: S^1 \rightarrow A_0$. Seja $F: [0, \epsilon] \times S^1 \rightarrow M$ uma extensão coerente, normal, positiva de f_0 . Pelo Lema 1.8, existe uma seqüência $\tau_m \rightarrow 0$, tal que para todo $m \geq 1$, a folha A_{τ_m} contém um ciclo evanescente positivo $g_m: S^1 \rightarrow A_{\tau_m}$, o qual possui uma extensão coerente, normal, positiva e simples. Pela Proposição 1.3, A_{τ_m} é compacta e é bordo de uma componente de Reeb de \mathfrak{F} , a qual denotamos por V^m . Afirmamos que $A_{\tau_m} = A_{\tau_l}$ e $V^m = V^l$, para $m, l \in \mathbb{N}$ arbitrários.

De fato, como para todo $m \geq 1$, g_m é um ciclo evanescente positivo que possui extensão coerente simples,

segue-se que para $p \in A_{\tau_m}$, V^m contém inteiramente a órbita positiva $\mathcal{O}_+(p)$ do campo normal a \mathfrak{F} , passando por p em $t=0$ (veja Lema 1.6). Por outro lado, se $\ell > m$, existe um ponto $p = f_{\tau_\ell}(x_0) \in A_{\tau_\ell}$ tal que $\mathcal{O}_+(p) \cap V^m \neq \emptyset$, logo $V^\ell \cap V^m \neq \emptyset$. Como os bordos de V^m e V^ℓ são folhas de F , $V^\ell \supseteq V^m$. Pelo Lema 1.6 as folhas de F contidas em $\text{int}(V^\ell)$ são difeomorfas a planos e portanto $A_{\tau_m} = \partial V^m$, que é compacta, não pode estar contida no interior de V^ℓ , logo $A_{\tau_m} = A_{\tau_\ell}$ e $V^m = V^\ell$. Daí tiramos que $A_{\tau_m} = A_0$ e $V^m = V^1$ para todo $m \geq 1$, logo A_0 é o bordo de uma componente de Reeb de \mathfrak{F} , o que demonstra o Teorema 2.

1.10 - Observação - No Lema 1.8 é impossível demonstrar diretamente que $A_{\tau_m} = A_0$ para todo $m \geq 1$, sem usar a compacidade de M . A figura abaixo ilustra um exemplo de uma folheação \mathfrak{F} numa variedade não compacta de dimensão 3, onde uma folha A_0 contém um ciclo evanescente $f_0: [0,1] \rightarrow A_0$, com $f_0(0) = f_0(1)$, embora $\hat{f}_0: [0,1] \rightarrow \hat{A}_0$ seja uma curva aberta em \hat{A}_0 sem auto-interseções. O mesmo exemplo mostra que as folhas A_t , $t > 0$, não são necessariamente difeomorfas a planos.

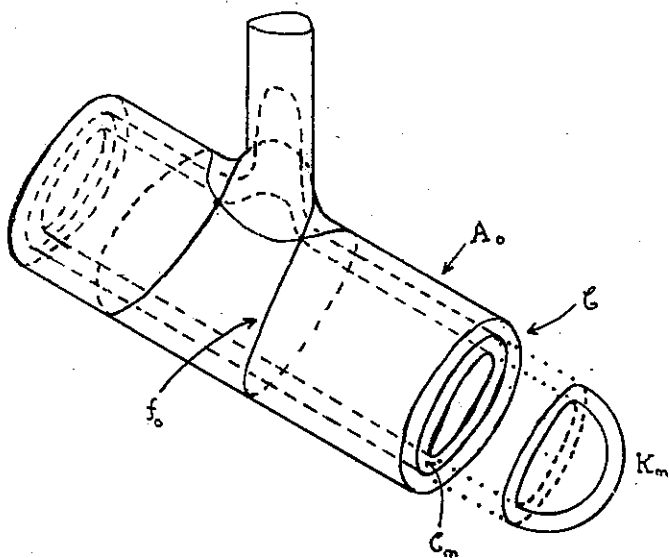


Fig. 14

No anel C , consideramos uma seqüência de sub-anéis $C_n \rightarrow \partial C \cap A_0$, nos quais colamos calotas sólidas abertas K_n , como na figura. As calotas sólidas K_n são folheadas trivialmente e as folhas de \mathcal{F} interseptom C em círculos concêntricos. As folhas no interior de A_0 são cilindros ou planos. Dada uma extensão coerente normal F de f_0 , o leitor deve verificar que: a) f_t é homotópica a constante em A_t , para $t > 0$. b) Existem seqüências $t_n \rightarrow 0$ e $s_n \rightarrow 0$ tais que para todo $n \geq 1$, A_{t_n} é um plano e A_{s_n} é um cilindro. c) Os levantamentos

$\hat{f}_{s_n} : S^1 \rightarrow \hat{A}_{s_n}$ são curvas simples, mas os levantamentos $\hat{f}_{t_n} \rightarrow \hat{A}_{t_n}$ não são curvas simples.

§2 - Demonstração do teorema 1

Seja M uma variedade compacta, sem bordo, orientável, de dimensão 3, com grupo fundamental finito. Seja \mathfrak{F} uma folheação em M . Pelo Teorema 2 basta mostrar \mathfrak{F} possui um ciclo evanescente.

Como M é compacta, e $\pi_1(M)$ é finito existe uma curva $\gamma : S^1 \rightarrow M$ e transversal a \mathfrak{F} e $n_0 \in \mathbb{N}$ $n_0 > 0$ tal que $[\gamma] \in \pi_1(M)$ satisfaz $[\gamma]^{n_0} = 1$. Seja $\alpha : S^1 \rightarrow M$ definida por $\alpha(\theta) = \gamma(n_0 \theta)$. Então $[\alpha] = 1$ e α é transversal a \mathfrak{F} . Como α é homotópica a constante, α se estende a $f : D^2 \rightarrow M$ podemos supor, sem perda de generalidade que f é C^∞ . Pela construção de Haefliger (lema 1.1 Cap. V) f pode ser aproximada por $g : D^2 \rightarrow M$ $g \in C^\infty$ satisfazendo às seguintes propriedades:

- a) g/S^1 é transversal a \mathfrak{F} .
- b) O conjunto $T = \{p \in D^2 \mid Dg_p \cdot \mathbb{R}^2 + T_{g(p)}\mathfrak{F} \neq T_{g(p)}M\}$ é finito, $T = \{p_1, \dots, p_l\}$.
- c) Para todo $i = 1, \dots, l$, consideremos uma vizinhança trivializadora U_i de $g(p_i)$ e uma transver-

sal δ_i a \mathfrak{F} , contida em U_i . Sejam $\pi_i: U_i \rightarrow \delta_i$ a projeção ao longo das placas de \mathfrak{F} em U_i e V_i vizinhança de p_i em D^2 tal que $g(V_i) \subset U_i$. Então a função $\pi_{i \circ} g: V_i \rightarrow \delta_i$ é de Morse.

- (d) Se $i \neq j$, $\mathcal{E}(p_i)$ e $\mathcal{E}(p_j)$ estão em folhas distintas de \mathfrak{F} .

Além disso, a folheação $\mathfrak{F}^* = g^* \mathfrak{F}$ de D^2 é definida pelas órbitas de um campo de vetores Y (Lema 1.2 Cap. V) cujas singularidades são $\{p_1, \dots, p_\ell\}$.

As condições a), b), c) e d) se traduzem nas seguintes propriedades de Y :

- a') Y é transversal a ∂D^2 . Podemos supor, substituindo Y por $-Y$ se necessário, que Y aponta para dentro de D^2 .
- b') O conjunto de singularidades de Y é finito igual a $\{p_1, \dots, p_\ell\}$.
- c') As singularidades de Y são centros ou selas.
- d') Y não possui ligação entre selas distintas.
- Observemos os seguintes fatos adicionais.
- e') Se c é o número de centros e s o número de selas de Y , então $c-s = 1$. Em particular $c \geq 1$.

Este fato decorre do teorema do índice de Poincaré (veja [16]).

Lembremos que um gráfico Γ de Y é uma figura conexa formada por selas e ligações de selas.

f') Se γ é uma órbita não singular de Y , então $\omega(\gamma)$ é uma sela, uma órbita fechada ou um gráfico de Y . Analogamente $\alpha(\gamma)$ é uma sela, uma órbita fechada, um gráfico de Y , ou $\alpha(\gamma) = \emptyset$ e neste caso γ provém do bordo de D^2 . Este fato decorre imediatamente do teorema de Poincaré-Bendixon.

g') Seja γ uma órbita fechada de Y tal que $g(\gamma)$ é homotópica a constante na folha $A_g(\gamma)$ de \mathfrak{F} . Neste caso pelo lema de holonomia γ está contida numa faixa C de órbitas fechadas de Y tal que se $\tilde{\gamma} \subset C$ é uma órbita fechada de Y , então $g(\tilde{\gamma})$ é homotópica a constante em $A_g(\tilde{\gamma})$.

h') Seja Γ um gráfico de Y . Segue-se de d') que Γ contém apenas uma sela \underline{s} e no máximo duas \underline{se} parâmetros de \underline{s} , como numa das figuras abaixo:

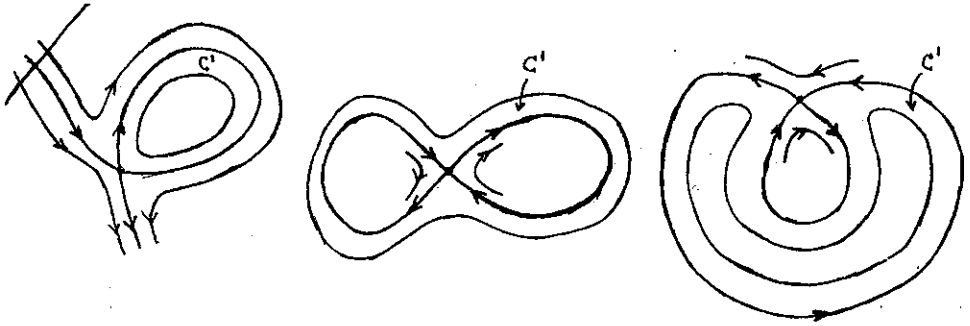


Fig. 15

Consideremos Γ orientada segundo o campo Y , como na figura acima. Seja V uma pequena vizinhança de Γ . $V-\Gamma$ é constituída de duas ou três regiões, conforme Γ contenha uma ou duas separatrizes de \underline{s} . Seja C' a componente conexa de $V-\Gamma$, tal que $\Gamma \subset \bar{C}'$ e C' não contém segmentos de separatrizes de \underline{s} (veja a figura 15). Suponha que $g(\Gamma)$ é homotópica a constante em $A_{g(\Gamma)}$. Neste caso, pelo lema de holonomia, existe uma faixa conexa de órbitas fechadas $C \subset C'$ tal que $\partial C \supset \Gamma$ e se $\gamma \subset C$ é uma órbita fechada de Y , então $g(\gamma)$ é homotópica a constante em $A_{g(\gamma)}$.

A demonstração de que \mathcal{F} possui um ciclo evanescente consiste em encontrar uma trajetória periódica ou um gráfico Γ de Y , tal que $g(\Gamma)$ é uma curva fechada não homotópica a constante em $A_{g(\Gamma)}$ e Γ está no bordo de

uma faixa C de órbitas fechadas de Y , $C = \{\gamma_t \mid t \in (0,1]\}$ tal que para $t > 0$ $g(\gamma_t)$ é homotópica a constante em $A_{g(\gamma)}$. Vamos começar a procurar \mathbb{F} partindo dos centros de Y .

Sejam c_1, \dots, c_k os centros e s_1, \dots, s_{k-1} as selas de Y . Para cada $i = 1, \dots, k$, g é tangente a \mathbb{F} em $g(c_i)$, sendo a tangência do tipo parabólica. Segue-se que existe uma vizinhança U de c_i tal que $U - \{c_i\}$ é constituída de órbitas fechadas γ_t de Y , $t \in (0, \epsilon)$, onde $g(\gamma_t)$ é homotópica a constante em $A_{g(\gamma_t)}$ (veja figura abaixo).

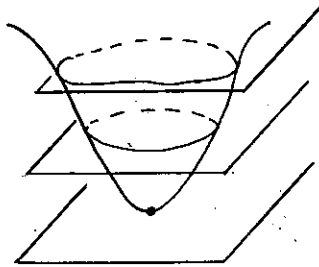


Fig. 16

Para $i = 1, \dots, k$, seja V_i o conjunto maximal conexo que contém c_i e é constituído de c_i e órbitas fechadas de Y homotópicas a constante nas respectivas folhas. Pela condição g') acima V_i é aberto (não va-

zio) e pela condição a') $V_i \subset \text{int}(D^2)$. Seja $\partial V_i = \bar{V}_i - V_i$. Como V_i não contém selas ∂V_i é uma curva fechada conexa em D^2 , constituída de órbitas de Y . Se ∂V_i é constituída de apenas uma órbita γ de Y , então γ é uma órbita fechada e $g(\gamma)$ não é homotópica a constante em $A_g(\gamma)$, como queríamos.

Caso contrário $\partial V_i = \Gamma_i$, gráfico de Y . Temos duas possibilidades:

I) Existe $1 \leq i \leq k$, tal que $g(\Gamma_i)$ não é homotópica a constante em $A_g(\Gamma_i)$. Neste caso estamos feitos: $g(\Gamma_i)$ é um ciclo evanescente em $A_g(\Gamma_i)$.

II) Para todo $i = 1, \dots, k$, $g(\Gamma_i)$ não é homotópica a constante em $A_g(\Gamma_i)$. Como $c-s=1$, segue-se que dois destes gráficos, digamos Γ_1 e Γ_2 contêm a mesma sela s_1 , como numa das figuras abaixo.

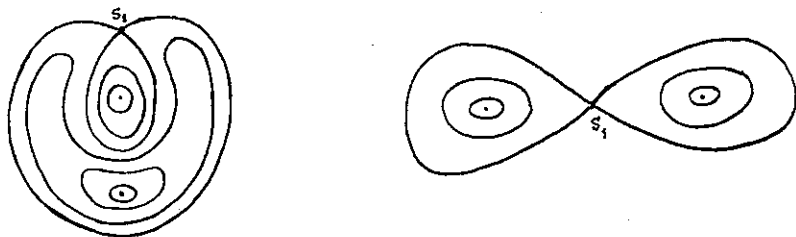


Fig. 17

Neste caso, $\bar{V}_1 \cup \bar{V}_2$ é homeomorfa a um disco

fechado ou a dois discos fechados com um ponto em comum. Consideremos o gráfico $\Gamma = \alpha(\bar{V}_1 \cup \bar{V}_2) = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$. Como $g(\bar{\Gamma}_1)$ e $g(\bar{\Gamma}_2)$ são homotópicas a constante em um $A_{g(\bar{\Gamma}_1)} = A_{g(\bar{\Gamma}_2)} = A_{g(\Gamma)}$, segue-se que $g(\bar{\Gamma})$ é homotópica a constante em $A_{g(\Gamma)}$. Logo por h'), existe uma vizinhança U de $\bar{\Gamma}$ tal que $U - \bar{\Gamma}$ é constituída de órbitas fechadas de Y , homotópicas a constante nas respectivas folhas.

Sejam $\bar{\Gamma}_1^1, \dots, \bar{\Gamma}_{k_1}^1$ onde $k_1 \leq k/2$, todos os gráficos de Y que são bordos de regiões da forma $\bar{V}_i \cup \bar{V}_j$ como acima. Para cada $i = 1, \dots, k_1$, seja V_i^1 o conexo maximal que contém $\bar{\Gamma}_i^1$ e tal que $V_i^1 - \bar{\Gamma}_i^1$ é constituído de centros e órbitas fechadas de Y , homotópicas a constante nas respectivas folhas. Por g'), V_i^1 é aberto e por a'), $\bar{V}_i^1 \subset \text{int}(D^2)$ para todo $i = 1, \dots, k_1$. Além disso ∂V_i^1 é uma curva fechada em D^2 constituída de órbitas de Y . Como antes temos duas possibilidades:

I₁) Existe $1 \leq i \leq k_1$ tal que $g(\partial V_i^1)$ não é homotópica a constante em $A_{g(\partial V_i^1)}$. Neste caso estamos feitos: $g(\partial V_i^1)$ é um ciclo evanescente em $A_{g(\partial V_i^1)}$.

II) Para todo $i = 1, \dots, k_1$, $g(\partial V_i^1)$ não é homotópica a constante em $A_{g(\partial V_i^1)}$. Neste caso ∂V_i^1 é um gráfico para todo $i = 1, \dots, k_1$. Como $c-s = 1$, pelo menos dois dos ∂V_i^1 , digamos ∂V_1^1 e ∂V_2^1 , contêm a mesma

sela.

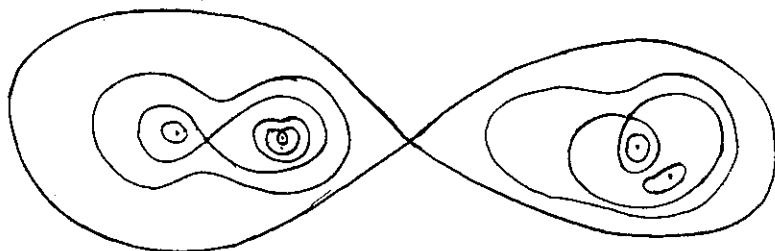


Fig. 18

Seja $\mathbb{r}_1^2 = \partial(\overline{V_1} \cup \overline{V_2})$. Claramente \mathbb{r}_1^2 é um gráfico de Y e $g(\mathbb{r}_1^2)$ é homotópica a constante em $A_{g(\mathbb{r}_1^2)}$.

Se k_2 é o número de gráficos como acima, temos evidentemente $1 \leq k_2 \leq k_1/2$. Além disso \mathbb{r}_1^2 possui uma vizinhança U tal que $U - \mathbb{r}_1^2$ é constituída de órbitas fechadas de Y homotópicas a constante nas respectivas folhas.

Sejam $\mathbb{r}_1^2, \dots, \mathbb{r}_{k_2}^2$ os gráficos de Y tais que $\mathbb{r}_1^2 = \partial(\overline{V_j^1} \cup \overline{V_k^1})$, onde $\overline{V_j^1} \cup \overline{V_k^1}$ é conexo. Para cada $i = 1, \dots, k_2$, seja V_i^2 o conexo maximal contendo \mathbb{r}_i^2 e tal que $V_i^2 - \mathbb{r}_i^2$ é constituído de centros, órbitas fechadas homotópicas a constante em suas respectivas folhas e gráficos da \mathbb{r}_j^1 . Como anteriormente temos duas possibilidades:

I₂) Para algum $i = 1, \dots, k_2$, $g(\partial V_i^2)$ não é homotópica a constante em $A_{g(\partial V_i^2)}$. Neste caso $g(\partial V_i^2)$ é um ciclo evanescente em $A_{g(\partial V_i^2)}$.

II₂) Para todo $i = 1, \dots, k_2$, $g(\partial V_i^2)$ é homotópica a constante em $A_{g(\partial V_i^2)}$. Neste caso, prosseguindo indutivamente com o argumento acima, obteremos ao fim de um número finito de passos uma órbita fechada ou gráfico Γ de Y , tal que $g(\Gamma)$ é um ciclo evanescente em $A_{g(\Gamma)}$. Isto porque a cada passagem do argumento indutivo, o número k_j , de regiões V_i^j , é tal que $k_j \leq k_{j-1}/2$ e se cairmos na hipótese II_j podemos passar para o estágio $j+1$ da indução.

Para finalizar a demonstração do Teorema 1, resta analisar o caso em que \mathcal{F} não é transversalmente orientável. Neste caso definiremos um recobrimento duplo $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ tal que $\mathcal{F}^* = \pi^*(\mathcal{F})$ é transversalmente orientável.

Seja η um campo de linhas de classe C^∞ , transversal a \mathcal{F} . Coloquemos $\tilde{M} = \{(p, v) \in TM \mid v \in \eta_p \text{ e } \|v\| = 1\}$ e $\pi(p, v) = p$. Como em cada $p \in M$ temos dois vetores com norma 1 em η_p , segue-se que $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ é um recobrimento duplo. Como \mathcal{F} não é transversalmente

orientável, segue-se que \tilde{M} é conexa. Além disso \mathfrak{F}^* é transversalmente orientável, sendo $X(p,v) = (v,0)$ um campo transversal a \mathfrak{F}^* , onde $v \in \eta_p$ e $\|v\| = 1$. Por outro lado como \tilde{M} é um recobrimento duplo de M , segue-se que \tilde{M} é compacta e tem grupo fundamental finito. Pela primeira parte da demonstração \mathfrak{F}^* possui uma componente de Reeb R^* . Seja $R = \pi(R^*)$. Como π leva folhas de \mathfrak{F}^* em folhas de \mathfrak{F} , segue-se que R é invariante por \mathfrak{F} . Além disso, como M é orientável, R tem que ser difeomorfa a um toro sólido, logo R é uma componente de Reeb de \mathfrak{F} .

EXERCÍCIOS.

1. Seja $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow N$ um recobrimento não trivial, isto é, $N \neq \mathbb{R}^2$. Mostre que existe uma aplicação de recobrimento $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f^k \neq$ identidade para todo $k \neq 0$.

Sugestão - Considere uma curva fechada simples γ em N , não homotópica a constante em N . Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação de recobrimento relativa a γ . Se $\tilde{\gamma}$ é um levantamento de γ , mostre que $\tilde{\gamma} * f(\tilde{\gamma}) * \dots * f^k(\tilde{\gamma})$ é uma curva simples, a não ser que $f =$ identidade.

2. Seja M uma variedade compacta, sem bordo, com grupo

fundamental finito. Mostre que toda folheação em M possui uma folha F , difeomorfa a um toro ou a uma garrafa de Klein. Mostre que $M-F$ possui duas componentes conexas.

3. a) Defina "componente de Reeb, não orientável"
b) Se \mathfrak{F} é uma folheação de uma variedade compacta com grupo fundamental finito, mostre que \mathfrak{F} possui uma componente de Reeb (orientável ou não).
4. Seja M uma variedade compacta de dimensão 3, sem bordo, com grupo fundamental finito. Se X é um campo de vetores em M , sem singularidades e transversal a uma folheação, então X possui órbitas não periódicas e pelo menos uma órbita periódica. Mostre que não existe folheação transversal à fibração de Hopf (veja exercício do Capítulo IV).
5. Seja \mathfrak{F} uma folheação em $D^2 \times S^1$ tal que $\partial(D^2 \times S^1) = T^2$ é a única folha compacta de \mathfrak{F} . Mostre que \mathfrak{F} é topologicamente equivalente à folheação de Reeb usual em $D^2 \times S^1$.
6. Dê exemplo de uma folheação em S^3 que possui uma componente de Reeb R tal que $S^3 - R$ não é homeomorfa a um toro sólido.
7. Seja \mathfrak{F} uma folheação de condimensão um em R^3 . Se

\mathfrak{F} possui uma folha compacta, então \mathfrak{F} possui uma componente de Reeb.

Sugestão - A folha compacta limita uma sub-variedade com bordo do \mathbb{R}^3 .

8. Seja \mathfrak{F} uma folheação de codimensão um em S^3 . Mostre que \mathfrak{F} possui pelo menos duas componentes de Reeb (possivelmente duas com o mesmo bordo).

Sugestão - Seja R uma componente de Reeb de \mathfrak{F} . Mostre que existe uma curva fechada transversal a \mathfrak{F} contida no interior de R . Há uma passagem delicada no exercício: Mostrar que existe um ciclo evanescente não contido em R .

CAPÍTULO VII

AÇÕES DO GRUPO \mathbb{R}^2

§1. Propriedades Elementares.

Neste Capítulo M denota uma variedade diferenciável de classe C^∞ .

Uma ação do grupo \mathbb{R}^2 de classe C^k em M é uma aplicação $\varphi: \mathbb{R}^2 \times M \rightarrow M$ de classe C^k que satisfaz as duas condições seguintes:

- (1) $\varphi(0, x) = x$ para todo $x \in M$
- (2) $\varphi(r_1, \varphi(r_2, x)) = \varphi(r_1 + r_2, x)$ para todo $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^2$ e $x \in M$.

Para qualquer $r \in \mathbb{R}^2$ a aplicação $\varphi_r: M \rightarrow M$ dada por $\varphi_r(x) = \varphi(r, x)$ é por (1) e (2) um difeomorfismo de classe C^k cuja inversa é φ_{-r} .

Reciprocamente, uma aplicação $\varphi: \mathbb{R}^2 \times M \rightarrow M$ é uma ação se $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Dif}^r(M)$, $\rho(r) = \varphi_r$, é um homomorfismo de \mathbb{R}^2 no grupo de difeomorfismos C^r de M .

Consideremos dois elementos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $r_1 \notin r_2 \mathbb{R}$. Os subgrupos a um parâmetro $G_i = \{tr_i \mid t \in \mathbb{R}\}$

2. geradas por φ_1, φ_2 e definidas por $\varphi_i: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$,
 $\varphi_i(t, x) = \varphi_i(t, x)$. Devido à comutatividade de \mathbb{R}^2 , te-
 mos

$$\varphi_1(s, \varphi_2(t, x)) = \varphi_2(t, \varphi_1(s, x))$$

para qualquer $s, t \in \mathbb{R}, x \in M$.

Seja o campo de vetores em M definido por

$$X_i(x) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i(t, x) \right|_{t=0}$$

Já vimos no Capítulo IX que $[X_1, X_2] = 0$ se e somente se a equação (*) é satisfeita para todo $s, t \in \mathbb{R}, x \in M$, onde ambos os membros estão bem definidos. Em particular, se M é compacta, s e t podem ser tomados arbitrariamente.

A aplicação que associa a cada $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ o campo $X(x) = \alpha_1 X_1(x) + \alpha_2 X_2(x)$ é uma aplicação linear. Com efeito, $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ temos

$$\begin{aligned} (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)(x) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \varphi_1(t, x) + \alpha_2 \varphi_2(t, x)) \right|_{t=0} \\ &= \alpha_1 \left. \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1(t, x) \right|_{t=0} + \alpha_2 \left. \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2(t, x) \right|_{t=0} \\ &= \alpha_1 X_1(x) + \alpha_2 X_2(x). \end{aligned}$$

De fato esta aplicação coincide com a derivada do homomorfismo definido.

A órbita de um ponto $x \in M$ (pela ação φ) é o

subconjunto $\mathcal{O}_x(\varphi) = \{\varphi(r, x) \in M \mid r \in \mathbb{R}^2\}$. Equivalentemente $\mathcal{O}_x(\varphi) = \{\varphi_1(t, \varphi_2(s, x)) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. Assim se $X_1(x)$, $X_2(x)$ são linearmente independentes então $\mathcal{O}_x(\varphi)$ tem dimensão dois. Por outro lado se alguma combinação linear $\alpha X_1(x) + \beta X_2(x) = 0$, então $\alpha X_1(y) + \beta X_2(y) = 0$ para qualquer $y \in \mathcal{O}_x(\varphi)$. Por exemplo se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ $\mathcal{O}_x(\varphi)$ coincide com a trajetória do campo X_2 por x , logo ela terá dimensão ≤ 1 .

O grupo de isotropia de $x \in M$ (pela ação φ) é o subgrupo de \mathbb{R}^2 definido como $G_x(\varphi) = \{r \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(r, x) = x\}$. É evidente que $G_x(\varphi)$ é fechado em \mathbb{R}^2 .

A aplicação $\Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ dada por $\Psi(r) = \varphi(r, x)$ induz a aplicação $\bar{\Psi}: \mathbb{R}^2/G_x(\varphi) \rightarrow M$, $\bar{\Psi}(\bar{r}) = \Psi(r)$ onde $\bar{r} = r + G_x(\varphi)$ é a classe de equivalência de r . Como $r_1 - r_2 \in G_x(\varphi)$ se e somente se $\varphi(r_1, x) = \varphi(r_2, x)$ concluímos que $\bar{\Psi}$ está bem definida e é injetiva. Pode-se demonstrar ainda que $\mathbb{R}^2/G_x(\varphi)$ tem estrutura diferenciável e $\bar{\Psi}$ possui derivada injetiva. (ver exercícios 2 e 3).

O tipo topológico das órbitas de φ pode ser então determinado classificando os subgrupos fechados de \mathbb{R}^2 .

1.1 - LEMA. Todo subgrupo fechado de \mathbb{R}^2 é isomorfo a um

dos seguintes: \mathbb{R}^2 , $\mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}$, \mathbb{R} , $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} , $\{0\}$.

Demonstração: Seja $G \subset \mathbb{R}^2$ um subgrupo fechado. Distinguímos dois casos:

- (1) G possui pontos de acumulação
- (2) G é discreto.

Consideremos o caso (1). Suponhamos primeiro que para qualquer seqüência infinita (x_n) , $x_n \in G$, $x_n \rightarrow 0$, existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e N tal que em coordenadas polares $x_n = (r_n, \theta_0)$ para $n \geq N$. Mostremos que $G \ni x_N \mathbb{R}$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno e $y \in x_N \mathbb{R}$, existe N' tal que $r_n = |x_n| < \epsilon$ para todo $n \geq N'$. Então existe inteiro $m > 0$ tal que o segmento (r, θ_0) , $(m-1)r_{N'} \leq r \leq mr_{N'}$ contém y e mx_n , $n > N'$. Logo $|mx_n - y| < \epsilon$ e como G é fechado concluímos que $y \in G$.

Temos duas possibilidades. Ou $G = x_N \mathbb{R} \approx \mathbb{R}$ ou $G \neq x_N \mathbb{R}$. Neste caso existe $\bar{x} \in G - x_N \mathbb{R}$ com $|\bar{x}|$ mínimo. Se $x \neq 0$ então $G = x_N \mathbb{R} + \bar{x} \mathbb{Z} \approx \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}$.

Por outro lado se existe uma seqüência (x_n) , $x_n = (r_n, \theta_n) \in G$, $r_n \rightarrow 0$, tal que para infinitos n os θ_n são diferentes, mostraremos que G é denso em \mathbb{R}^2 .

Tomando eventualmente subsequências, podemos assumir que

$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta_0$ existe. Dados $\epsilon > 0$ e $z \in (R, \theta_0)$ (como $r_n \rightarrow 0$ e $\theta_n \rightarrow \theta_0$, existe n_0 tal que se $n > n_0$ então $|\theta_n - \theta_0| < \epsilon$ e $|r_n| < \epsilon/2n$). Fixando $n > n_0$, existe $m_n \in \mathbb{Z}$ tal que $|m_n r_n - z| < \epsilon$ e neste caso $m_n x_n - z \rightarrow 0$, logo $z \in G$ e portanto para todo $z \in G$ temos $z \in G$. Como a sequência θ_n é constituída de ângulos distintos podemos formar uma sequência $y_n = x_n - x_{k_n} = (s_n, \varphi_n) \in G$ tal que $s_n \rightarrow 0$ e $\varphi_n \rightarrow \theta_1 \neq \theta_0$. Pelo mesmo argumento anterior $R_{\theta_1} \subset G$. Como G contém duas retas independentes, R_0 e R_{θ_1} , temos que $G = \mathbb{R}^2$.

Suponhamos agora que G não é discreto. Se existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $G \ni x\mathbb{Z}$ então claramente $G \approx \mathbb{Z}$. Caso contrário, seja $x_1 = (r_1, \theta_1) \in G$ tal que $|x_1| = \inf\{|x| \mid x \in G - 0\}$ e $x_2 \in G - x_1$ tal que $|x_2| = \inf\{|x| \mid x \in G - x_1 - \mathbb{R}\}$. Mostremos que $G \approx x_1\mathbb{Z} + x_2\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Para isto é suficiente provar que no paralelogramo de vértices $0, x_1, x_1 + x_2, x_2$ não existem outros elementos de G . Com efeito, no triângulo de vértices $0, x_1, x_2$ não existem outros elementos de G pela definição de x_1 e x_2 e se existisse $g \in G$ no triângulo $x_1, x_1 + x_2, x_2$ então $g - x_1 \in G$ e $|g - x_1| < |x_1|$, o que contradiz a definição de x_1 .

$x_1 + x_2 = x_2$ então $x_1 + x_2 = 0$ estaria no triângulo o, x_1, x_2 .

Deste lema obtemos que as órbitas de uma ação de \mathbb{R}^2 são imersões de alguma das seguintes variedades: ponto, $S^1, \mathbb{R}, S^1 \times S^1, S^1 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 1 - Seja $D^2 \times S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, y_1^2 + y_2^2 = 1\}$. Consideremos os campos de vetores

$$X(x_1, x_2, y) = (\rho(r)x_1 - \beta x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\beta x_1 + \rho(r)x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Y(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\alpha x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (\alpha x_1 - y_2) \frac{\partial}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}$$

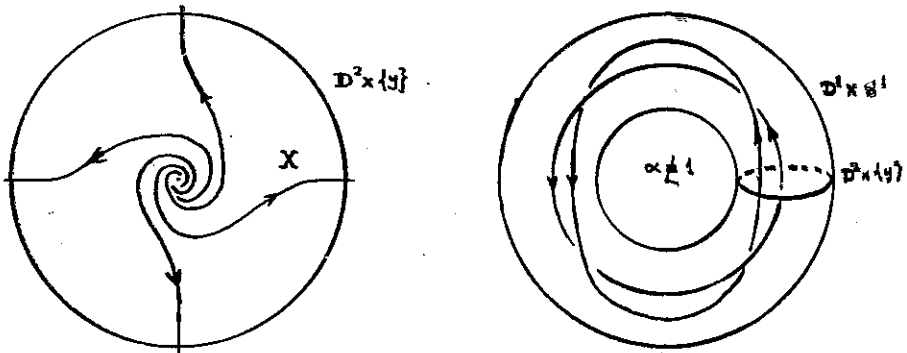


Fig. 1

onde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $\rho(r)$ é uma função C^∞ não negativa tal que $\rho(r) = 0$ se e só se $r=1$, $\frac{d^n \rho}{dr^n}(1) = 0$ para todo $n \geq 1$, e $\rho(r) = 1$ para r numa vizinhança de zero.

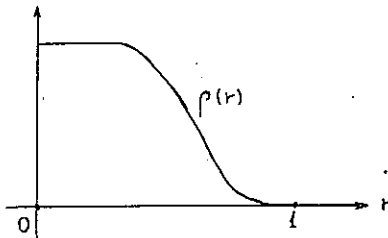


Fig. 2

É fácil ver que $[X, Y] = 0$, logo eles definem uma ação C^∞ de \mathbb{R}^2 em $D^2 \times S^1$. Só há duas órbitas compactas. Elas são $\{0\} \times S^1$ e $\partial(D^2 \times S^1)$. No caso em que α é um número irracional, todas as outras órbitas são planos densos em $D^2 \times S^1$. Quando α é racional elas são cilindros mergulhados.

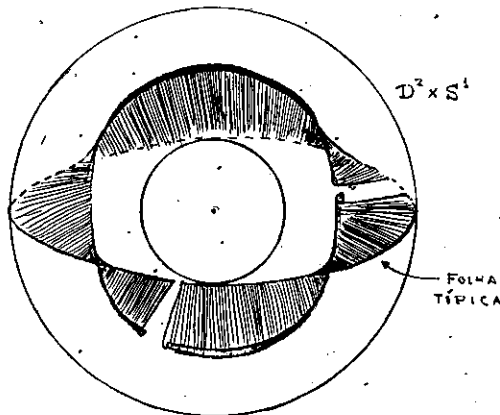


Fig. 3

Tomando duas cópias de $D^2 \times S^1$ e identificando-as ao longo do bordo $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$ por meio de um difeomorfismo

que envia paralelos de um em meridianos do outro e vice-versa, obtemos exemplos de ações de \mathbb{R}^2 em S^3 em que as órbitas de dimensão < 2 são dois círculos entrelaçados.

Outros exemplos de ações podem ser obtidos tomando a suspensão de uma ação $\varphi: \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \text{Dif}(S^1)$. Como vimos no Capítulo IV estas são ações localmente livres de \mathbb{R}^2 , isto é, a dimensão de qualquer órbita é dois.

§2. O Teorema do posto de S^3 .

Mostraremos neste parágrafo que é impossível definir ações localmente livres de \mathbb{R}^2 em S^3 .

Um resultado importante na direção desse teorema é a seguinte proposição.

2.1 - PROPOSIÇÃO ([17]) - Sejam X e Y campos de vetores comutativos em $D^2 \times S^1$ tais que nos pontos de $\partial(D^2 \times S^1)$ eles são linearmente independentes e tangentes a $\partial(D^2 \times S^1)$. Existe um ponto em $D^2 \times S^1$ onde X e Y são linearmente dependentes.

Demonstração: Seja $\varphi: \mathbb{R}^2 \times (D^2 \times S^1) \rightarrow D^2 \times S^1$ a ação induzida por X e Y . Por hipótese $\partial(D^2 \times S^1)$ é uma órbita de φ , logo existem $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$, tal que o grupo de isotropia de $\partial D^2 \times S^1$ é $r_1 \mathbb{Z} + r_2 \mathbb{Z}$.

Podemos supor que $S^1 \times S^1 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ é o quociente de \mathbb{R}^2 por $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Assim as curvas dadas fluxos $\varphi_1((t,x)) = \varphi_1((t, x_1, x_2))$, $\varphi_2((t,x)) = \varphi_2((t, x_1, x_2))$ $x \in \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$, definem os meridianos e paralelos de $S^1 \times S^1$. Sem perda de generalidade assumimos que $X(x) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1((t,x))|_{t=0}$ e $Y(x) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2((t,x))|_{t=0}$. O campo X é tangente ao bordo do disco $D^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ e Y é transversal a $D^2 \times \{0\}$ nos pontos do bordo $S^1 \times \{0\}$. Consequentemente a Proposição fica facilmente demonstrada com o seguinte lema.

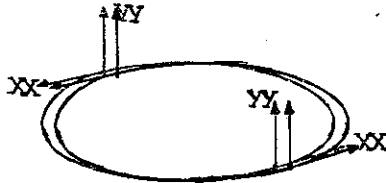


Fig. 44

2222 -- LEMA -- Considere o disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$: $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, $x_3 = 0$ e os campos de vetores $e_1(x) = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$, $e_2(x) = \frac{\partial}{\partial x_3}$ $x = (x_1, x_2, 0) \in D^2$. Então para qualquer extensão contínua $(e_1(x), e_2(x))_{x \in D^2}$ de $(e_1(x), e_2(x))_{x \in D^2}$ existe $x_0 \in D^2$ onde $e_1(x_0)$ e $e_2(x_0)$ são linearmente dependentes.

Demonstração: Primeiro observemos que se existisse uma extensão $(e_1(x), e_2(x))_{x \in D^2}$ de campos linearmente independentes, então também teríamos uma extensão por campos ortonormais. De fato, se $f_2(x) = e_2(x) - \langle \bar{e}_1(x), \bar{e}_2(x) \rangle e_1(x)$ e $\bar{e}_1(x) = \frac{e_1(x)}{|e_1(x)|}$, $\bar{e}_2(x) = \frac{f_2(x)}{|f_2(x)|}$ o par $(\bar{e}_1(x), \bar{e}_2(x))$ seria um sistema ortonormal.

Para demonstrar o lema, basta então mostrar que não existem extensões ortonormais do par $(e_1(x), e_2(x))_{x \in \partial D^2}$.

Seja $V_{2,3}$ o espaço dos pares ordenados de vetores ortonormais de \mathbb{R}^3 . O conjunto $(e_1(x), e_2(x))_{x \in \partial D^2}$ pode ser entendido como um caminho $\alpha: \partial D^2 \rightarrow V_{2,3}$, $\alpha(x) = (e_1(x), e_2(x))$. É suficiente então mostrar que α não é homotópico a um ponto.

Para provar isto identificamos $V_{2,3}$ com o espaço projetivo real $P_3(\mathbb{R})$ de dimensão três da maneira seguinte. A cada $(f_1, f_2) \in V_{2,3}$ associamos um vetor $w = w(f_1, f_2) \in B(0, \pi) \subset \mathbb{R}^3$ da bola de centro $0 \in \mathbb{R}^3$ e raio π definido assim: A matriz cujas colunas são $f_1, f_2, f_1 \times f_2$ é ortogonal e representa uma rotação positiva de ângulo $|w|$ tendo como eixo o vetor w . Como a rotação positiva de eixo w e ângulo π é igual a rotação positiva de eixo $-w$

e ângulo $-\pi$ esta correspondência passa a ser bem definida e um homeomorfismo quando os pontos antípodas de $\partial B(0, \pi)$ são identificados.

O caminho α representa um caminho de rotações de ângulos que vão deste $-\pi$ até π com eixo $\frac{\partial}{\partial x_3}$. Logo $[\alpha]$ é um elemento não nulo de $\pi_1(P_3(\mathbb{R}))$.

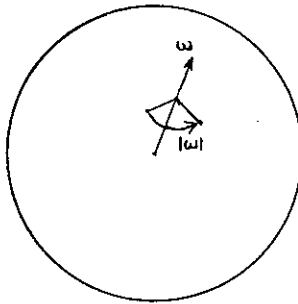


Fig. 5

DEFINIÇÃO 1 - O posto de uma variedade é o número máximo de campos de vetores comutativos linearmente independentes que a variedade admite. Este conceito foi introduzido por J. Milnor.

2.3 - TEOREMA - (E.Lima [17]). Toda variedade compacta de dimensão três com grupo fundamental finito tem posto um. Por exemplo S^3 tem posto um.

Demonstração: Como é bem conhecido, toda variedade de dimensão ímpar tem característica de Euler zero. Logo admite um campo de vetores sem singularidades e seu posto é ≥ 1 .

Procedendo por absurdo, suponhamos que existe uma ação localmente livre de \mathbb{R}^2 em alguma variedade compacta de dimensão três, com grupo fundamental finito. Pelo teorema de Novikov, existirá uma órbita compacta limitando um toro sólido mergulhado, onde estão definidos dois campos comutativos linearmente independentes, o que é impossível pela proposição 2.1.

§3. Teorema de Poincaré-Bendixson para ações de \mathbb{R}^2 .

Uma das versões do teorema de Poincaré-Bendixson para um fluxo ξ na esfera S^2 ou no plano, diz que todo conjunto minimal de ξ é uma órbita.

Nesta seção generalizamos este teorema para ações localmente livres de \mathbb{R}^2 em variedades de dimensão três. Uma versão mais geral envolvendo órbitas de dimensão < 2 se encontra em [2].

Seja $\varphi: \mathbb{R}^2 \times M \rightarrow M$ uma ação. Um subconjunto de M é dito invariante (por φ) se ele é união de órbitas de φ .

Um conjunto minimal de φ é um subconjunto

$\mu \subset M$ que é invariante, fechado, não vazio e tal que nenhum subconjunto propriamente contido em μ possui essas três propriedades.

3.1 TEOREMA - Seja $\varphi: \mathbb{R}^2 \times M \rightarrow M$ uma ação localmente livre numa variedade simplesmente conexa não compacta de dimensão três. Então qualquer conjunto minimal de φ é uma órbita.

Demonstração: Dado $p \in M$ definimos $\partial \mathcal{O}_p(\varphi) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{O}_p(\varphi) - K_n}$

onde $K_n \subset K_{n+1} \subset \mathcal{O}_p(\varphi)$ são vizinhanças compactas de p e $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \mathcal{O}_p(\varphi)$. É claro que $\overline{\mathcal{O}_p(\varphi)} = \mathcal{O}_p(\varphi) \cup \partial \mathcal{O}_p(\varphi)$.

Seja agora $\mu \subset M$ um conjunto minimal de φ e $p \in \mu$.

Procedendo por absurdo suponhamos que $\mu \neq \overline{\mathcal{O}_p(\varphi)}$. Como μ é minimal temos que $\mu = \overline{\mathcal{O}_p(\varphi)}$. Logo $\partial \mathcal{O}_p(\varphi)$ é não vazio e por ser fechado e invariante $\partial \mathcal{O}_p(\varphi) = \mu$. Isto significa que se $U \ni p$ é uma vizinhança coordenada da folheação $\mathcal{F}(\varphi)$ induzida por φ , a órbita $\mathcal{O}_p(\varphi)$ deixa como interseção com U infinitas placas, sendo cada uma delas acumulação de placas em $\mathcal{O}_p(\varphi)$.

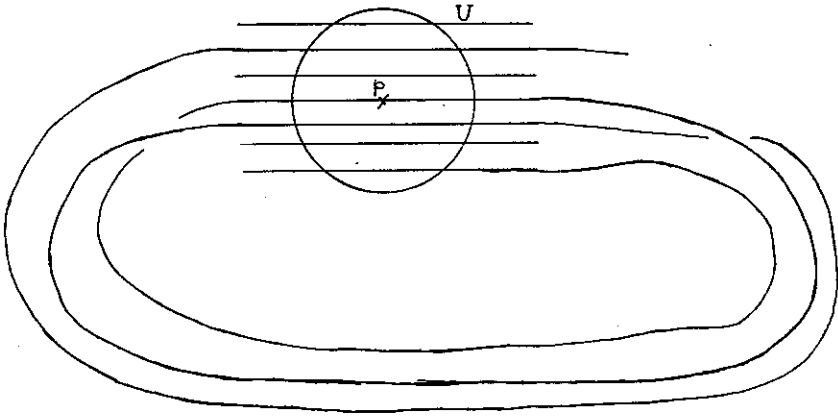


Fig. 6

Daí segue-se que existe um caminho fechado $\alpha: S^1 \rightarrow M$ passando por p e transversal as folhas de $\mathfrak{F}(\varphi)$.

Como M é simplesmente conexa α se estende a uma aplicação $A: D^2 \rightarrow M$ em posição geral com as folhas de $\mathfrak{F}(\varphi)$.

A folheação $A^*\mathfrak{F}(\varphi)$ de D^2 possui singularidades todas do tipo centro ou sela. Além disso ela é transversal ao bordo. Seja $q \in \partial D^2$ tal que $A(q) = p$.

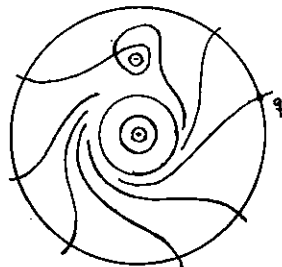


Fig. 7

Modificando ligeiramente A se necessário, podemos assumir que o ponto q não está contido numa separatriz de se la. Existirá então no conjunto limite do ponto q um ci- clo limite $\gamma: S^1 \rightarrow D^2$, induzindo uma curva $\tilde{\gamma}: S^1 \rightarrow M$, $\tilde{\gamma} = A \circ \gamma$, $\tilde{\gamma}(S^1) \subset \mathcal{O}_{x_0}(\varphi) \subset \mu$ com holonomia não trivial. Logo $\mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$ é homeomorfa a $R \times S^1$ ou $S^1 \times S^1$. Como $\mathcal{O}_{x_0}(\varphi) \neq \mu$, $\mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$ não pode ser um toro. Conseqüentemente $\mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$ é um cilindro imerso com $\partial \mathcal{O}_{x_0}(\varphi) \ni \mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$. Mostraremos a seguir que isto é impossível.

Como $G_x(\varphi) \neq 0$ existem $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^2$, $r_1 \in \text{Rr}_2$, tais que a órbita Γ do fluxo $\varphi_1(t, x_0) = \varphi(tr_1, x_0)$ é pe_{riódica} de período t_0 e as órbitas de $\varphi_2(t, x) = \varphi(tr_2, x)$ para $x \in \Gamma$ são transversais a Γ . Como φ_1 e φ_2 são co_{mutativos}, para todo $x \in \mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$, a órbita de φ_1 por x é periódica de período t_0 .

Seja C um cilindro de dimensão dois mergulhado em M , transversal às órbitas da ação φ com $\Gamma \subset C$. Mostra_{remos} a seguir que arbitrariamente próximo de Γ , existe um círculo $\Gamma' \subset \mathcal{O}_{x_0} \cap C$ tal que $\Gamma' \cap \Gamma = \emptyset$ e $\Gamma' \cup \Gamma$ é o bordo de um cilindro fechado $B \subset \mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$.

Seja V uma vizinhança cilíndrica de Γ em C , tal que as órbitas de φ_2 são transversais a V . Se $\epsilon > 0$

é pequeno, o conjunto $V_\epsilon = \{\varphi_2(t,x) \mid -\epsilon < t < \epsilon, x \in V\}$ é uma vizinhança de Γ em M e as órbitas de φ_2 em V_ϵ definem uma projeção $\pi: V_\epsilon \rightarrow V$. Como Γ é uma órbita periódica de φ_1 com período t_0 e $\Gamma \subset V_\epsilon$, existe uma vizinhança $U \subset V_\epsilon$ de Γ tal que para todo $x \in U$,

$\varphi_1(t,x) \in V_\epsilon$ para $|t| < 2t_0$. Como $\partial \mathcal{O}_{x_0}(\varphi) \supset \mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$, existem seqüências $x_n \in \Gamma$ e $s_n \in \mathbb{R}$, onde $|s_n| \rightarrow \infty$, tais que $\varphi_2(s_n, x_n) \rightarrow x_0 \in U$. Se n for suficientemente grande, $y_n = \varphi_2(s_n, x_n) \in U \cap \mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$, logo $\varphi_1(t, y_n) \in V_\epsilon$ para $|t| < 2t_0$ e como a órbita \mathcal{O}_n , de φ_1 por y_n , tem período t_0 , temos que $\mathcal{O}_n \subset V_\epsilon$. Se $\Gamma_n = \pi(\mathcal{O}_n)$, é claro que $\Gamma_n \subset \mathcal{O}_{x_0}(\varphi) \cap \mathcal{C}$ e $\Gamma_n \cap \Gamma = \emptyset$. Por outro lado se d é a distância intrínseca de $\mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$, $d(\Gamma, \mathcal{O}_n) \rightarrow \infty$, logo $\Gamma \cup \Gamma_n$ é o bordo de um cilindro $B_n \subset \mathcal{O}_{x_0}(\varphi)$, já que $d(\Gamma_n, \mathcal{O}_n)$ é limitada, pois $\mathcal{O}_n \subset \{\varphi_2(t,x) \mid x \in \Gamma_u, |t| < \epsilon\}$. Isto prova o que queríamos.

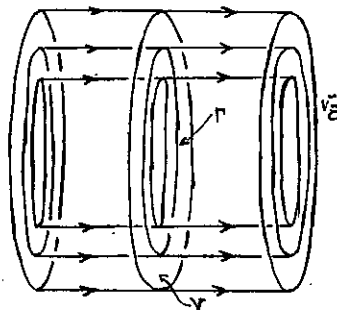


Fig. 8

Seja $A_n \subset \mathbb{C}$ o anel limitado por Γ e Γ_n .
 Como $\Gamma_n \rightarrow \Gamma$, existe n_0 tal que $A_{n_0} \cap B_{n_0} = \Gamma \cup \Gamma_{n_0}$.
 Temos então que $T = A_{n_0} \cup B_{n_0}$ é um toro topológico mergulhado em M .

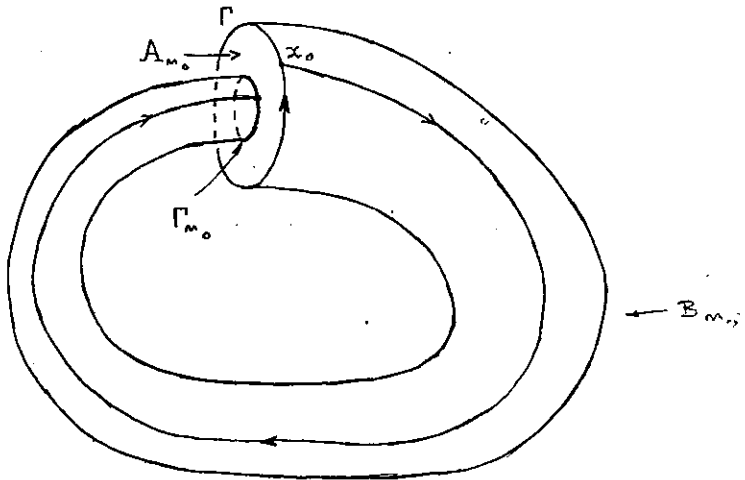


Fig. 9

Como M é simplesmente conexa, T é o bordo de um aberto limitado $W \subset M$ (veja [6]). Seja X o campo de vetores dado por $X(x) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2(t, x)|_{t=0}$. Temos que X é tangente a T nos pontos de B_{n_0} e X é transversal a T nos pontos de A_{n_0} . Podemos supor que para todo $x \in A_{n_0}$, $X(x)$ aponta para dentro de W . Isto implica que toda órbita de φ_2 ao penetrar em W não sai mais em tempos po-

sitivos, logo $\mathcal{O}_{x_0} \cap A_{n_0} = \mathbb{F}_{n_0} \cup \bar{\mathbb{F}}$, absurdo.

Observação. O teorema acima pode ser usado para demonstrar por absurdo o teorema do posto de S^3 , se observarmos que a hipótese de não compacidade não foi usada na demonstração.

Com efeito, como S^3 é compacta, toda ação $\varphi: \mathbb{R}^2 \times S^3 \rightarrow S^3$ possui um conjunto minimal μ (este fato será demonstrado no próximo capítulo). Se φ é localmente livre, μ teria que ser uma órbita compacta. Logo μ é difeomorfo a um toro $S^1 \times S^1$. Usando o teorema de Alexander (Proc. Nat. Acad. Sci. (1924) pp 6-8) segundo o qual para qualquer toro mergulhado μ , uma das componentes conexas de $S^3 - \mu$ é um toro sólido, caímos de novo na proposição 2.1 o que leva a um absurdo. Esta demonstração do teorema do posto foi apresentada em [17], quando o teorema de Novikov não tinha ainda sido demonstrado.

Um problema ainda em aberto relativo ao posto das variedades é o de determinar o posto de S^{2n+1} .

É bem conhecido que não existem campos de planos de dimensão dois em S^5 ([31]). Por outro lado se desconhece a existência de ações localmente livres de \mathbb{R}^2 em S^7 .

Em [25] H. Rosenberg, R. Roussarie, D. Weil

mostraram o seguinte resultado: Uma variedade compacta orientável de dimensão três tem posto dois se e só se ela é um fibrado sobre S^1 com fibra T^2 .

EXERCÍCIOS.

1. Em \mathbb{R}^n considere a estrutura de grupo aditivo. Seja $G \subset \mathbb{R}^n$ um sub-grupo fechado. Mostre que G é isomorfo a $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^l$, onde $0 \leq k, l \leq n$ e $k+l \leq n$.

Sugestão - Considere primeiro o caso em que G é discreto. Se G não é discreto mostre que G contém um subespaço de dimensão um do \mathbb{R}^n .

2. Seja G um sub-grupo fechado do \mathbb{R}^n . Considere \sim a relação de equivalência em \mathbb{R}^n definida por $r \sim r'$ se e somente se $r-r' \in G$. Denotemos a classe de equivalência de r por \bar{r} .

- a) Mostre que no espaço quociente \mathbb{R}^n/G pode ser introduzida uma estrutura de variedade diferenciável tal que a aplicação $(\bar{r}, \bar{r}') \in \mathbb{R}^n/G \times \mathbb{R}^n/G \rightarrow \overline{(r+r')} \in \mathbb{R}^n/G$ é de classe C^∞ . Se $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/G$ é a projeção da relação de equivalência, mostre que π é uma submersão de classe C^∞ .
- b) Suponha que G é isomorfo a $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^l$. Mostre que \mathbb{R}^n/G é difeomorfo a $\mathbb{R}^{n-k} \times (S^1)^l$.

3. Seja $\varphi: \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$ uma ação de classe C^r . Sejam G_x o grupo de isotropia de $x \in M$ e $\mathcal{O}(x)$ a órbita de x . Defina $\bar{\varphi}: \mathbb{R}^n/G_x \rightarrow \mathcal{O}(x)$ por $\bar{\varphi}(\bar{r}) = \varphi(r, x)$. Mostre que $\bar{\varphi}$ está bem definida e é uma imersão biunívoca.

4. Mostre que todas as órbitas de uma ação localmente livre de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 são planos. Conclua que todas as órbitas são sub-conjuntos fechados de \mathbb{R}^3 e em particular são meglhadas.

5. Dê exemplo de uma ação localmente livre de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 que não é topologicamente equivalente à ação produto:

$$\varphi((s, t), (x, y, z)) = (x+s, y+t, z) .$$

6. Ações linearmente induzidas em S^n . Sejam A e B matrizes comutativas $(n+1) \times (n+1)$.

a) Mostre que os campos lineares definidos em \mathbb{R}^{n+1} por A e B induzem a ação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^{n+1} cuja expressão é a seguinte

$$\varphi(s, t, x) = e^{sA+tB} \cdot x$$

Denotamos por e^Z a exponencial da matriz Z .

b) Defina $X(x) = A \cdot x - \langle x, A \cdot x \rangle x$ e $Y(x) = B \cdot x - \langle x, B \cdot x \rangle x$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual em \mathbb{R}^{n+1} . Mostre que X e Y são comutativos e

se $x \in S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ então $X(x)$ e $Y(x)$ são tangentes a S^n . Conclua que X e Y induzem uma ação Ψ de \mathbb{R}^2 em S^n .

- c) Seja $\pi: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$ definida por $\pi(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Mostre que a órbita de Ψ por $x \in S^n$ é dada pela expressão

$$\Psi(s, t, x) = \pi(e^{sA+tB} \cdot x)$$

- d) Mostre que a condição necessária e suficiente para que a ação Ψ degenerere numa ação de \mathbb{R} é que A , B e I sejam linearmente dependentes, onde I é a matriz identidade $(n+1) \times (n+1)$.
- e) Suponha que A , B e I não são linearmente dependentes e que todos os auto-valores de A e de B são distintos. Para $n = 2$ e 3 determine o tipo topológico das órbitas de Ψ de acordo com as formas canônicas de A e B .

7. Mostre que dois campos comutativos quaisquer, X e Y , em S^2 possuem uma singularidade comum (E.L.Lima).

Sugestão - Como $\chi(S^2) \neq 0$, existe uma singularidade de x_0 de X . Pela comutatividade, todo ponto no fecho de órbita de Y por x_0 é uma singularidade de X . Aplique o teorema de Poincaré-Bendixson.

8. Sejam X um campo de vetores em S^2 e $f: S^2 \rightarrow S^2$ um difeomorfismo que satisfaz

$$f \circ X_t = X_t \circ f, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mostre que X possui uma singularidade que é ao mesmo tempo ponto periódico de f .

CAPÍTULO VIII

CONJUNTOS MINIMAIS DE FOLHEAÇÕES

Seja \mathcal{F} uma folheação de uma variedade M . Um subconjunto $\mu \subset M$ é chamado minimal se é fechado, invariante, não vazio e tal que nenhum subconjunto próprio de μ tem essas três propriedades.

Exemplos de conjuntos minimais são as folhas compactas de \mathcal{F} . É fácil ver que sempre existem conjuntos minimais quando M é compacta.

No caso em que a codimensão de \mathcal{F} é um, mostraremos que os conjuntos minimais podem ser de três tipos: (1) μ é uma folha fechada, (2) $\mu = M$, ou (3) μ é, localmente, o produto de um subconjunto de cantor da reta por um disco de codimensão um. Estes últimos são chamados minimais não triviais ou minimais excepcionais.

Por exemplo quando $M = T^2$, todas as folhas dos fluxos racionais são compactas e no caso dos fluxos irracionais o único minimal é T^2 .

Poincaré introduziu o conceito de número de rotação de um

difeomorfismo f de S^1 , mostrando que este número é racional se e só se f possui pontos periódicos. Este teorema pode ser interpretado em termo de folheações da maneira seguinte. Uma folheação \mathcal{F} de T^2 não possui folhas compactas se e só se ela é equivalente a uma suspensão de um difeomorfismo de S^1 com número de rotação irracional. Poincaré conjecturou que neste caso toda folha de \mathcal{F} é densa. Observamos que Poincaré considerou somente difeomordismos analíticos.

Em 1916, Bohl ([1] observou (sem construir) que existiam exemplos de folheações C^0 de T^2 com minimais excepcionais. Em 1924 Kneser ([10] construiu exemplos de tais folheações.

Em 1932 A. Denjoy ([3]) construiu exemplos de folheações de classe C^1 em T^2 com todos os minimais excepcionais. Além disso mostrou o seguinte.

TEOREMA (Denjoy). Seja X um campo de vetores em T^2 , de classe C^2 , sem singularidades e sem órbitas fechadas. Então o fluxo de X é topologicamente equivalente a um fluxo irracional de T^2 .

Na realidade Denjoy provou este teorema na situação um pouco mais geral em que a derivada de X é de variação limitada. Uma boa exposição deste teorema pode ser

encontrada em M.M. Peixoto ([21]).

Em 1963 o teorema acima foi generalizado por A.J. Schwartz da maneira seguinte:

TEOREMA (Schwartz [28]). Sejam M uma variedade compacta de dimensão dois e X um campo de vetores de classe C^2 em M . Se μ é um minimal de X , então μ é uma órbita compacta de X ou $\mu = M$. Neste último caso $M = T^2$ e X é topologicamente equivalente a um fluxo irracional.

Estes resultados motivaram o estudo dos conjuntos minimais de folheações de codimensão um em variedades de dimensão ≥ 3 .

Em 1964 Sacksteder ([26]) demonstrou que existem folheações de classe C^∞ e codimensão um de $V_2 \times S^1$ possuindo minimais excepcionais. Aqui V_2 denota a variedade compacta orientável de gênero dois.

Além disso Sacksteder generalizou o teorema de Schwartz da maneira seguinte:

TEOREMA (Sacksteder [27]). Seja \mathfrak{F} uma folheação de codimensão um e classe C^2 numa variedade compacta sem bordo M . Suponha que \mathfrak{F} possui um minimal excepcional μ . Então existe uma folha F de

\mathfrak{F} contida em μ a qual possui um elemento da holonomia que é hiperbólica.

Esta afirmação significa o seguinte. Existe um elemento não trivial $[\gamma] \in \pi_1(F)$ tal que se $\Sigma' \subset \Sigma$ são segmentos transversais a \mathfrak{F} com $\Sigma' \cap \gamma = \{p\}$ e está definida a transformação de holonomia relativa a $[\gamma]$, $f: \Sigma' \rightarrow \Sigma'$ então $|Df(p)| \neq 1$. Isto implica em particular que p é um ponto fixo atrator ou repulsor de f , ou seja existe uma vizinhança U de p em Σ tal que para todo $q \in U$ temos que $f^n(q)$ está definido para todo $n \geq 0$ (ou $n \leq 0$) e $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(q) = p$ (ou $\lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(q) = p$).

Neste capítulo mostraremos o exemplo de Sacksteder e num dos apêndices o exemplo de Denjoy.

§1. Estrutura transversal de uma folheação

Como sabemos as folhas de uma folheação são sub-variedades imersas. Um dado importante, em muitos problemas da teoria de folheações, é o conhecimento de como as folhas estão imersas no ambiente. Neste parágrafo faremos um estudo geral deste problema.

Seja F uma folha de folheação \mathfrak{F} de codimensão k e classe C^r , definida em uma variedade M . Da-

dos $p_1, p_2 \in F$, consideremos um caminho γ em F ligando p_1 a p_2 . Sejam Σ_1 e Σ_2 discos abertos de dimensão k mergulhados em M , tais que $p_i \in \Sigma_i (i = 1, 2)$ e está definida uma transformação de holonomia $h: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, relativa ao caminho γ . Podemos supor sem perda de generalidade que $h(\Sigma_1) = \Sigma_2$. É fácil ver que $h(\Sigma_1 \cap F) = \Sigma_2 \cap F$ e portanto $\Sigma_1 \cap F$ é homeomorfo a $\Sigma_2 \cap F$. Informalmente podemos dizer que a "estrutura transversal" de uma folha é uniforme.

Por exemplo, suponhamos que $\Sigma_1 \cap F$ contém um aberto U de Σ_1 . Segue-se da construção acima que $\Sigma_2 \cap F$ contém o aberto $h(U) \subset \Sigma_2$.

Seja $\varphi: V \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma carta local de classe C^r que trivializa \mathfrak{F} , onde $p_1 \in V$. Podemos supor que $\varphi(\Sigma_1)$ é o plano de dimensão k do \mathbb{R}^m definido pelas equações $x_{k+1} = \dots = x_m = 0$ e $(\varphi^{-1})^*(\mathfrak{F}/V)$ é a folheação por planos do \mathbb{R}^m dada por $x_1 = c_1, \dots, x_k = c_k$, onde c_1, \dots, c_k são constantes reais. Seja $\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ a projeção $\pi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$. A folheação $(\varphi^{-1})^*(\mathfrak{F}/V)$ está definida pelos planos $\pi^{-1}(c)$. Temos então que $\varphi(F \cap V) = \pi^{-1}(\varphi(F \cap \Sigma_1))$, logo $F \cap V$ é homeomorfo ao produto $\mathbb{R}^{m-k} \times (F \cap \Sigma_1)$. Este argumento independe da seção transversal tomada. Podemos então enunciar a se-

guinte:

1.1 PROPOSIÇÃO - Sejam M uma variedade sem bordo e \mathfrak{F} uma folheação de codimensão k em M . Dados $p_1, p_2 \in F$, folha de \mathfrak{F} , existem vizinhanças U_1 de p_1 , U_2 de p_2 e um homeomorfismo $h: U_1 \rightarrow U_2$ tal que h leva folhas de \mathfrak{F}/U_1 em folhas de \mathfrak{F}/U_2 e $h(G \cap U_1) = G \cap U_2$ para toda folha G de \mathfrak{F} .

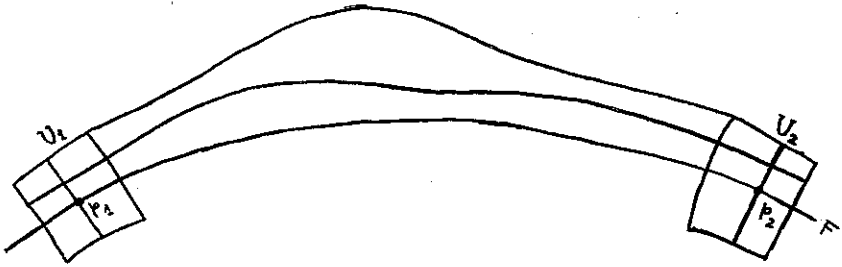


Fig. 1

COROLÁRIO 1 - Sejam M e \mathfrak{F} como na proposição 1, Σ uma seção transversal a \mathfrak{F} e F uma folha de \mathfrak{F} . Temos duas possibilidades para $\Sigma \cap F$:

- a) $\Sigma \cap F$ é um conjunto de pontos isolados. Isto ocorre se e somente se F está mergulhada em M .
- b) Todo ponto de $\Sigma \cap F$ é ponto de acumulação de seqüências em $\Sigma \cap F$.

Demonstração: Suponhamos que $\Sigma \cap F$ é constituído de pontos isolados. Sejam $p_1 \in F$ e $p_2 \in \Sigma \cap F$. Como p_2 não é acumulado por pontos de $\Sigma \cap F$, existe uma vizinhança V_2 de p_2 em M tal que \mathfrak{F}/V_2 é equivalente a uma folheação produto do tipo $\mathbb{R}^{m-k} \times c$ ($c \in \mathbb{R}^k$). Concluimos daí que $F \cap V_2$ é homeomorfa a \mathbb{R}^{m-k} . Pela Proposição 1.1 existem abertos $p_1 \in U_1$, $p_2 \in U_2 \subset V_2$ e um homeomorfismo $h: U_1 \rightarrow U_2$ tal que $h(F \cap U_1) = F \cap U_2$. Mas $F \cap U_2$ é homeomorfo a um aberto do \mathbb{R}^{m-k} , logo $F \cap U_1$ também é, consequentemente a topologia intrínseca de F coincide com a topologia em F induzida pela topologia do ambiente. A recíproca é óbvia.

Suponhamos agora que existe $p \in \Sigma \cap F$ que é ponto de acumulação de uma seqüência $p_n \in \Sigma \cap F$. O mesmo argumento anterior mostra que para toda seção transversal Σ' de dimensão k , se $q \in \Sigma' \cap F$ então q é ponto de acumulação de uma seqüência $q_n \in \Sigma' \cap F$.

EXEMPLO 1 - A subvariedade imersa esquimatizada na figura abaixo não pode ser folha de uma folheação de codimensão 1 em \mathbb{R}^2 .

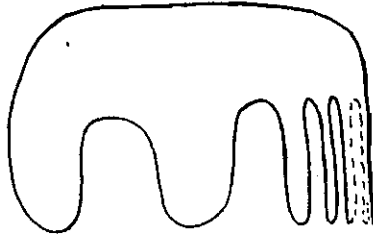


Fig. 2

COROLÁRIO 2 - Sejam M , \mathfrak{F} e F como no Corolário 1. Se \mathfrak{F} admite uma seção transversal Σ tal que $\overline{\Sigma \cap F}$ contém um aberto não vazio em $\overline{\Sigma}$, então o mesmo é verdade para qualquer seção transversal Σ' tal que $\Sigma' \cap F \neq \emptyset$. Neste caso para todo $p \in F$ existe um aberto U contendo p tal que $\overline{F \cap U} = \overline{U}$ e o conjunto $\overline{F} - \partial \overline{F}$ é um aberto que contém F .

Deixamos a verificação deste corolário para o leitor. Dizemos que uma folha F como acima é localmente densa.

Vejamos agora o que ocorre no caso em que \mathfrak{F} é uma folheação de codimensão um. Seja Σ um segmento transversal a \mathfrak{F} e consideremos uma folha F de \mathfrak{F} tal que $F \cap \Sigma \neq \emptyset$. Neste caso temos três possibilidades:

- a) $\Sigma \cap F$ é discreto. Como já vimos este caso ocorre se e somente se F está mergulhada em M .

- b) $\overline{\Sigma \cap F}$ contém um segmento aberto. Neste caso F é localmente densa e como já vimos $\overline{F} - \partial F$ é um aberto que contém F .
- c) $\Sigma \cap F$ não é discreto e $\overline{\Sigma \cap F}$ tem interior vazio. Neste caso dizemos que F é uma folha excepcional.

EXEMPLO 2 - Seja \mathfrak{F} a folheação de Reeb em S^3 . Toda folha de \mathfrak{F} é mergulhada (veja exercício 2).

Vejamos agora o que ocorre no caso de uma folha excepcional.

1.2 - TEOREMA - Sejam \mathfrak{F} uma folheação de codimensão um em M e F uma folha excepcional de \mathfrak{F} . Seja Σ um segmento aberto, limitado, transversal a \mathfrak{F} e tal que $\Sigma \cap F \neq \emptyset$. Então $\overline{\Sigma \cap F}$ é homeomorfo ao conjunto de Cantor.

Demonstração: $\overline{\Sigma \cap F}$ é um sub-conjunto compacto de $\overline{\Sigma}$.

Além disso como F não é mergulhada $\overline{\Sigma \cap F}$ é perfeito (isto é, $\overline{\Sigma \cap F}$ é fechado e não contém pontos isolados) e como F não é localmente densa, $\overline{\Sigma \cap F}$ tem interior vazio. A demonstração se reduz então ao seguinte lema, o qual será demonstrado no apêndice 1.

1.3 - LEMA - Seja $K \subset \mathbb{R}$ um sub-conjunto compacto com interior vazio e perfeito. Então existe um ho-

meomorfismo $h: K \rightarrow \mathbb{C}$, onde \mathbb{C} é o conjunto de Cantor usual em $[0,1]$, tal que se $x, x' \in K$ então $x < x'$ se e somente $h(x) < h(x')$.

§2. Minimais em folheações

Neste parágrafo vamos definir e estudar o conceito de minimal de folheação. No caso de folheações de codimensão um veremos a classificação dos minimais quanto à estrutura topológica transversal.

Seja M uma variedade onde está definida uma folheação \mathcal{F} de codimensão k . Um sub-conjunto $\mu \subset M$ é dito invariante ou saturado por \mathcal{F} se para todo $p \in \mu$ a folha de \mathcal{F} por p está inteiramente contida em μ .

DEFINIÇÃO 1 - Sejam M e \mathcal{F} como acima. Um subconjunto $\mu \subset M$ é dito minimal se satisfaz as seguintes propriedades:

- a) μ é invariante por \mathcal{F}
- b) μ é fechado e não vazio
- c) Se $\mu' \subset \mu$ é um sub-conjunto invariante, fechado e não vazio então $\mu' = \mu$.

EXEMPLOS:

EXEMPLOS:

1) Toda folha fechada de \mathcal{F} é um minimal.

2) Seja \mathcal{F} uma folheação em M tal que todas as folhas de \mathcal{F} são densas em M . Então o único minimal de \mathcal{F} é M . Um exemplo típico desta situação é o fluxo irracional do toro.

2.1 - PROPOSIÇÃO - Sejam M uma variedade compacta e \mathcal{F} uma folheação em M . Então \mathcal{F} possui um minimal.

Demonstração: Seja \mathcal{C} a coleção dos sub-conjuntos compactos não vazios de M , invariantes por \mathcal{F} . É claro que \mathcal{C} é não vazio: Se F é uma folha de \mathcal{F} então $\bar{F} \in \mathcal{C}$. Consideremos em \mathcal{C} a relação de ordem parcial dada pela inclusão de conjuntos. Dado uma sequência $\mu_1 \supseteq \mu_2 \supseteq \dots$ de elementos de \mathcal{C} , é claro que $\mu = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mu_i$ é não vazio, invariante, compacto e $\mu \subset \mu_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Pelo lema de Zorn \mathcal{C} contém elementos minimais. Um elemento minimal de \mathcal{C} é obviamente um minimal de \mathcal{F} .

2.2 - PROPOSIÇÃO - Seja μ um minimal de \mathcal{F} . Valem as seguintes propriedades:

a) Toda folha de \mathcal{F} , contida em μ , é densa em μ .

- b) Seja Σ um disco de dimensão k transversal a \mathfrak{F} tal que $\Sigma \cap \mu \neq \emptyset$. Se μ não se reduz a uma folha fechada de \mathfrak{F} , então $\bar{\Sigma} \cap \mu$ é um conjunto perfeito.
- c) Se μ tem interior não vazio, então $\mu = M$ (M conexa).
- d) Se \mathfrak{F} tem codimensão um, μ tem interior vazio e não é uma folha fechada, então $\mu \cap \Sigma$ é homeomorfo a um conjunto de Cantor, onde Σ é um segmento transversal a \mathfrak{F} cujos extremos não estão em μ e tal que $\bar{\Sigma} \cap \mu \neq \emptyset$. Neste caso dizemos que μ é um minimal excepcional.

Demonstração:

- a) Seja $F \subset \mu$ uma folha. Como \bar{F} é invariante fechado não vazio e $\bar{F} \subset \mu$ temos $\bar{F} = \mu$.
- b) Dado $p \in \Sigma \cap \mu$ seja F a folha de \mathfrak{F} por p . Se p fosse um ponto isolado de $\Sigma \cap \mu$, F seria uma folha mergulhada pelo corolário 1 da proposição 1.1. Por outro lado $\bar{F} = \mu$, logo μ contém outra folha além de F , digamos F' . Como p é ponto de acumulação de $F' \cap \Sigma$ e $F' \cap \Sigma$ está contido na acumulação de $F \cap \Sigma$, segue-se que p é ponto de acumulação de $F \cap \Sigma$, como queríamos.

c) Se μ tem interior não vazio, pelo Corolário 2 da Proposição 1.1 e por a), todas as folhas de \mathfrak{F} contidas em μ , são localmente densas o que implica que μ é aberto. Como μ é fechado e M é conexa, $\mu = M$.

d) É corolário imediato do teorema 1.2 e de b.

COROLÁRIO - Seja \mathfrak{F} uma folheação de codimensão um definida em uma variedade conexa M . Se μ é um minimal de \mathfrak{F} , então $\mu = M$, ou μ é uma folha fechada de \mathfrak{F} , ou μ é um minimal excepcional.

§3. Construção do exemplo de Sacksteder

Seja V_2 a variedade compacta orientável de dimensão 2 e genus 2 (bitoro). Como é sabido, V_2 pode ser representada por meio de um octágono regular em \mathbb{R}^2 no

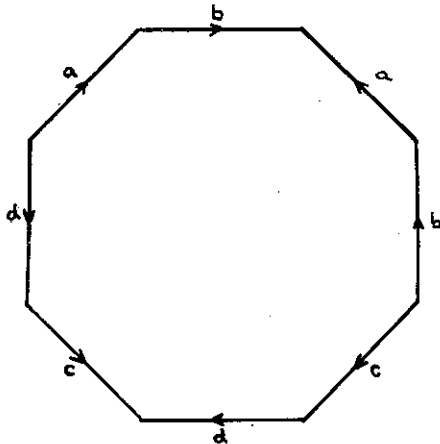


Fig. 3

Na figura, duas arestas com a mesma letra são identificadas, respeitando-se o sentido das setas. Sendo assim a, b, c e d representam quatro curvas fechadas em V_2 que se cortam num único ponto e tais que $V_2 - (a \cup b \cup c \cup d)$ é difeomorfo ao octógono. Nas figuras abaixo ilustramos o processo de reobter V_2 a partir do octógono.

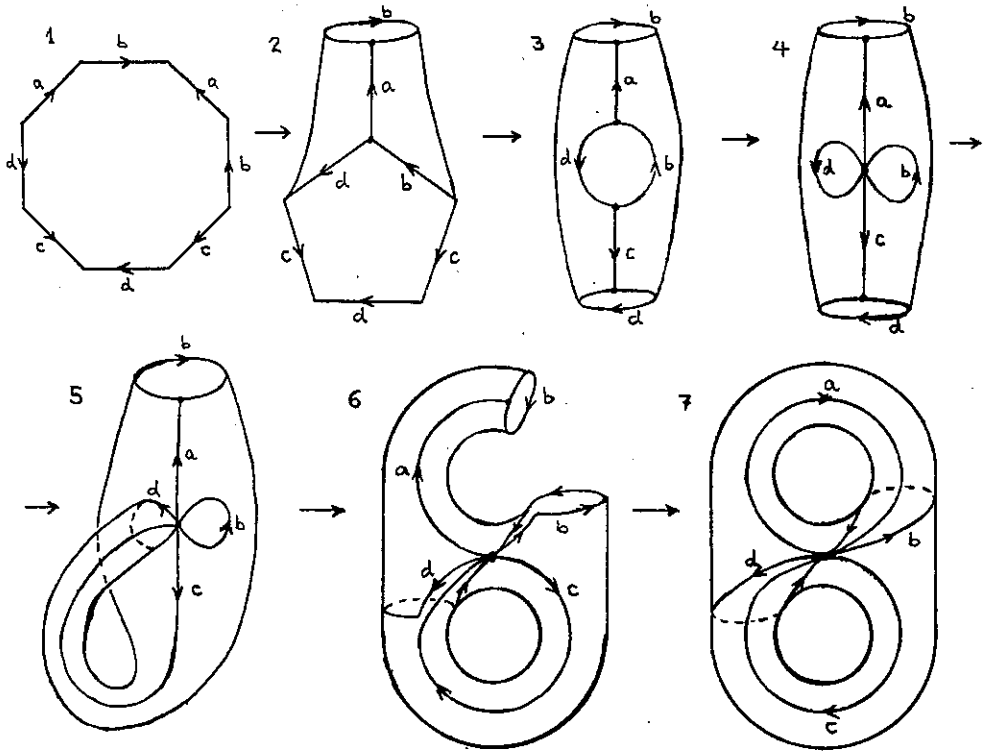


Fig. 4

Nas figuras acima primeiro identificamos as arestas

tas a, em seguida as arestas c. Observando que os vértices do octógono são todos identificados no mesmo ponto, na figura 4 identificamos as extremidades comuns das arestas b e d que na figura 3 formavam o bordo de um buraco. Na figura 5 identificamos as aresta d. Na figura 6 apenas mudamos a posição da figura, deformando um pouco a superfície. Finalmente na figura 7 identificamos as arestas b. Na figura 7 vemos a posição final das curvas a, b, c e d em V_2 . Como é sabido o grupo fundamental de V_2 é um grupo não abeliano gerado pelas curvas fechadas a, b, c e d, sendo que a única relação não trivial entre estas curvas é $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1$ (teorema de Van Kampen aplicado ao octógono, veja [18]).

LEMA 1 - Seja G o sub-grupo de $\pi_1(V_2)$ gerado por a e c. Então G é um grupo livre com dois geradores

Com isto queremos dizer que não existem relações não triviais entre a e c. Deixamos a demonstração como exercício para o leitor (veja exercício 5).

COROLÁRIO - Sejam f e g dois difeomorfismos C^∞ de S^1 .

A aplicação $\tilde{\varphi}: \{a, b, c, d\} \rightarrow \text{Dif}^\infty(S^1)$ tal que $\tilde{\varphi}(a) = f$, $\tilde{\varphi}(b) = \tilde{\varphi}(d) = 1$ e $\tilde{\varphi}(c) = g$ se estende a um homomorfismo $\varphi: \pi_1(V_2) \rightarrow \text{Dif}^\infty(S^1)$.

Demonstração: Como \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} e \underline{d} são geradores de $\pi_1(V_2)$, a definição de φ é óbvia. Basta mostrar que φ está bem definida: $\varphi(aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \cdot \varphi(a)^{-1} \cdot \varphi(b)^{-1} \cdot \varphi(c) \cdot \varphi(d) \cdot \varphi(c)^{-1} \cdot \varphi(d)^{-1} = ff^{-1}gg^{-1} = \text{id}_{S^1}$. Isto demonstra o

Sendo assim, dados dois difeomorfismos $f, g: S^1 \rightarrow S^1$, construímos uma folheação \mathcal{F} em uma variedade M de dimensão 3, suspendendo a representação dada pelo corolário acima (veja Capítulo IV). A variedade M é fibrada por círculos, \mathcal{F} é transversal às fibras e as folhas de \mathcal{F} são recobrimentos de V_2 .

Vejamos uma maneira simples de enxergar a folheação \mathcal{F} geometricamente. Sejam \tilde{b} e \tilde{d} duas curvas fechadas em V_2 que não se cortam e são homotópicas a \underline{b} e \underline{d} respectivamente. Sejam $\tilde{V}_2 = V_2 - (\tilde{b} \cup \tilde{d})$ e $\tilde{M} = \tilde{V}_2 \times S^1$. Na figura abaixo representamos \tilde{M} .

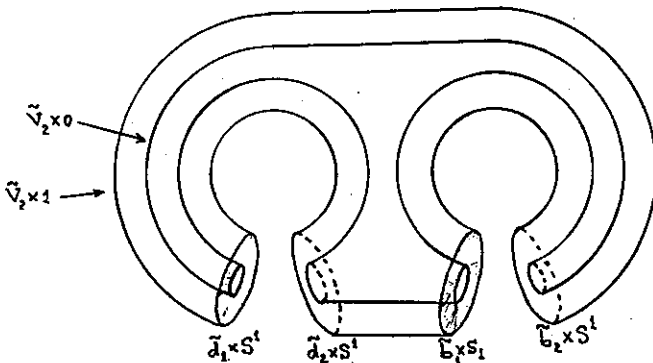


Fig. 5

Na figura acima temos representada a variedade com bordo $V_2 \times [0,1]$. A variedade \tilde{M} deve ser pensada como sendo $\tilde{V}_2 \times [0,1]$, onde identificamos $\tilde{V}_2 \times 0$ com $\tilde{V}_2 \times 1$ pela identidade de \tilde{V}_2 . Observa-se que \tilde{M} é uma variedade de dimensão 3 tal que $\partial\tilde{M}$ é constituído de quatro cópias de T^2 , a saber $\tilde{b}_1 \times S^1$, $\tilde{b}_2 \times S^1$, $\tilde{d}_1 \times S^1$ e $\tilde{d}_2 \times S^1$, onde \tilde{b}_1 e \tilde{b}_2 (resp. \tilde{d}_1 e \tilde{d}_2) são resultantes da retirada de \tilde{b} (resp. \tilde{d}) de V_2 . Temos então definidos dois difeomorfismos de identificação $\beta: \tilde{b}_2 \rightarrow \tilde{b}_1$ e $\delta: \tilde{d}_2 \rightarrow \tilde{d}_1$ (que podemos pensar intuitivamente como sendo as identidades em \tilde{b} e \tilde{d}). Dados os difeomorfismos de S^1 , f e g , definamos $\Psi: (\tilde{b}_2 \times S^1) \cup (\tilde{d}_2 \times S^1) \rightarrow (\tilde{b}_1 \times S^1) \cup (\tilde{d}_1 \times S^1)$ por $\Psi(x,y) = (\beta(x), f(y))$ se $(x,y) \in \tilde{b}_2 \times S^1$ e $\Psi(x,y) = (\delta(x), g(y))$ se $(x,y) \in \tilde{d}_2 \times S^1$. Consideremos em \tilde{M} a relação de equivalência \equiv definida por $(x,y) \equiv (x',y')$ se $x = x'$ e $y = y'$ ou $(x,y) = \Psi(x',y')$, ou $(x,y) = \Psi^{-1}(x',y')$ caso $(x',y') \in \partial\tilde{M}$. Desta forma $M = \tilde{M}/\equiv$ é uma variedade compacta de dimensão 3 e temos definida uma submersão $\pi: M \rightarrow V_2$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V}_2 \times S^1 = \tilde{M} & \xrightarrow{\pi_1} & \tilde{V}_2 \\ \tilde{p} \downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{\pi} & V_2 \end{array}$$

No diagrama acima π_1 é a projeção natural

$\pi_1(x,y) = x$, \tilde{p} é a projeção de identificação e p é a projeção natural de \tilde{V}_2 em V_2 . Por construção $\pi: M \rightarrow V_2$ define em M uma estrutura de espaço fibrado com base V_2 e fibra S^1 .

Seja $\tilde{\mathfrak{F}}$ a folheação produto em \tilde{M} , cujas folhas são da forma $\tilde{V}_2 \times \{x\}$, $x \in S^1$. Uma folha $\tilde{V}_2 \times \{x\}$ de $\tilde{\mathfrak{F}}$ intersepta $\partial\tilde{M}$ em quatro círculos $\tilde{b}_1 \times \{x\}$, $\tilde{b}_2 \times \{x\}$, $\tilde{d}_1 \times \{x\}$ e $\tilde{d}_2 \times \{x\}$. Observemos agora que o difeomorfismo de identificação Ψ , leva o círculo $\tilde{b}_2 \times \{x\}$ no círculo $\tilde{b}_1 \times \{f(x)\}$ e o círculo $\tilde{d}_2 \times \{x\}$ no círculo $\tilde{d}_1 \times \{g(x)\}$, ou seja, ao identificarmos os pontos de $\partial\tilde{M}$ através de Ψ , automaticamente colamos o bordo de uma folha de $\tilde{\mathfrak{F}}$ com o bordo de outra folha de $\tilde{\mathfrak{F}}$. Desta forma $\tilde{\mathfrak{F}}$ induz em M uma folheação \mathfrak{F} , cujas folhas são transversais às fibras $\pi^{-1}(x) \simeq S^1$.

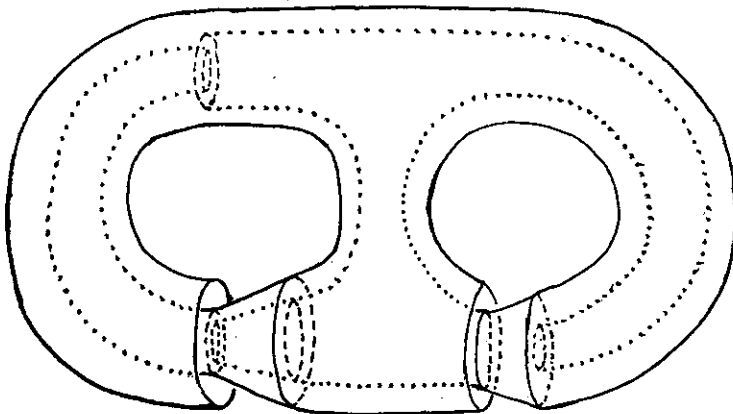


Fig. 6

Sejam $B = \tilde{p}(\tilde{b}_1 \times S^1) = \tilde{p}(\tilde{b}_2 \times S^1)$ e $D = \tilde{p}(\tilde{d}_1 \times S^1) = \tilde{p}(\tilde{d}_2 \times S^1)$. Se $t \in \tilde{b}_1$, é fácil ver que o círculo $C = \tilde{p}(t \times S^1) = \pi^{-1}(p(t))$ é transversal às folhas de \mathfrak{F} . Por abuso de linguagem vamos denotar o ponto $\tilde{p}(t \times x) \in C$ por $x \in S^1$. Seja A a folha de \mathfrak{F} por $x_0 \in C$. Se $\tilde{C} = \tilde{p}^{-1}(C)$ e $\tilde{x}_0 = \tilde{p}^{-1}(x_0)$, então a folha de \mathfrak{F} por \tilde{x}_0 é $\tilde{V}_2 \times \{x_0\}$, a qual corta $\partial\tilde{M}$ nos círculos $\tilde{b}_i \times \{x_0\}$, $\tilde{d}_i \times \{x_0\}$ $i=1,2$. Ao identificarmos os pontos de $\partial\tilde{M}$ por Ψ , a fim de obter M , o círculo $\tilde{b}_2 \times \{x_0\}$ é identificado com círculo $\tilde{b}_1 \times \{f(x_0)\}$ e o círculo $\tilde{d}_2 \times \{x_0\}$ com o círculo $\tilde{d}_1 \times \{g(x_0)\}$. Sendo assim podemos concluir que os pontos $f(x_0)$ e $g(x_0) \in C \cap A$. Analogamente $C \cap A$ contém os pontos $f^{-1}(x_0)$ e $g^{-1}(x_0)$. Destes fatos podemos concluir indutivamente que $C \cap A$ contém todos os pontos da forma $f^{k_1} \circ g^{l_1} \circ f^{k_2} \circ g^{l_2} \circ \dots \circ f^{k_n} \circ g^{l_n}(x_0)$, onde k_1, \dots, k_n e l_1, \dots, l_n são inteiros. Reciprocamente, se $x \in C \cap A$, seja γ uma curva em A ligando x a x_0 . Neste caso $\pi_0 \gamma = \bar{\gamma}$ é uma curva fechada em V_2 que passa por $\pi(x) = \pi(x_0)$. Como \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} e \underline{d} geram a homotopia de V_2 , $\bar{\gamma}$ é homotópica a uma curva em V_2 que se escreve como produtos de potências inteiras destes geradores. Seja $\varphi: \pi_1(V_2) \rightarrow \text{Dif}^\infty(S^1)$ a representação dada pelo corolário do Lema 1. Como $\varphi(b) = \varphi(d) = \text{id}$, temos que $\varphi(\bar{\gamma}) = f^{k_1} \circ g^{l_1} \circ \dots \circ f^{k_n} \circ g^{l_n}$, onde k_1, \dots, k_n e

t_1, \dots, t_n são inteiros. Observemos agora que a folha A é um recobrimento de V_2 , onde $\pi: A \rightarrow V_2$ é a projeção do recobrimento e γ é o levantamento de $\bar{\gamma}$ com $\gamma(0)=x_0$. Temos então que $x = \gamma(1) = f^{k_1} \circ g^{t_1} \circ \dots \circ f^{k_n} \circ g^{t_n}(x_0)$, logo $\mathcal{C} \cap A = \{h(x_0)\} | h = f^{k_1} \circ g^{t_1} \circ \dots \circ f^{k_n} \circ g^{t_n}$, onde k_1, \dots, k_n e $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$.

Seja G o grupo livre gerado por \underline{a} e \underline{c} . Como já vimos $\varphi: G \rightarrow \text{Dif}^\infty(S^1)$ é um homomorfismo, logo φ induz uma ação $\eta: G \times S^1 \rightarrow S^1$, dada por $\eta(g, x) = (\varphi(g))(x)$. A órbita de um ponto $x \in S^1$ por η é o conjunto $\mathcal{O}(x) = \{\eta(g, x) = (\varphi(g))(x) | g \in G\}$. Se A é uma folha de \mathfrak{F} e $x \in \mathcal{C} \cap A$, então $\mathcal{C} \cap A = \mathcal{O}(x)$. Em particular se $L \subset S^1$ é invariante por η (isto é, $\eta(g)(L) = L$ para todo $g \in G$) então o saturado de L pela folheação \mathfrak{F} intersepta S^1 em L . Reciprocamente se B é um conjunto saturado por \mathfrak{F} , então $\mathcal{C} \cap B$ é invariante por η . Dizemos que $K \subset S^1 = \mathcal{C}$ é um minimal de η se K é compacto, não vazio, invariante por η e para todo $K' \subset K$ com as três propriedades acima então $K' = K$.

LEMA 2 - $K \subset \mathcal{C}$ é minimal de η se e somente se o saturado $S(K)$ é um minimal de \mathfrak{F} . Em particular $S(K)$ é um minimal excepcional de \mathfrak{F} se e somente se K

é homeomorfo ao conjunto de Cantor.

Deixamos a verificação deste lema para o leitor (exercício 6).

Pelo Lema 2 acima, para construirmos o exemplo de Sacksteder, basta obtermos dois difeomorfismos $f, g \in \text{Dif}^\infty(S^1)$, tais que a ação do grupo G em S^1 , gerada por f e g , possua um minimal homeomorfo ao conjunto de Cantor. Consideraremos aqui o S^1 como sendo \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Sendo assim, um difeomorfismo f de S^1 pode ser pensado como um difeomorfismo de \mathbb{R} satisfazendo à propriedade de $f(x+k) = f(x) + k$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$. Definamos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = x + 1/3$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x+k) = g(x) + k$ se $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$ e o gráfico de g no intervalo $[0,1]$ tem o seguinte aspecto:

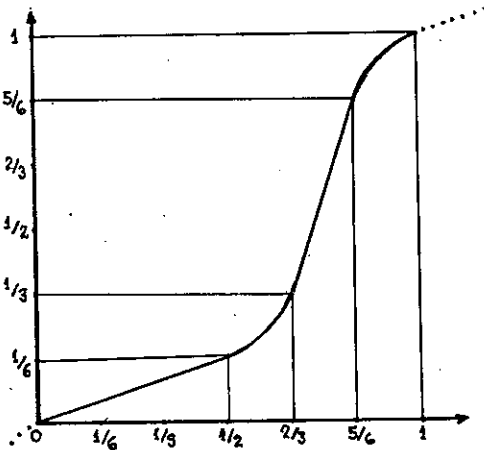


Fig. 7

O difeomorfismo g é definido de tal forma que $g(x) = x/3$ se $x \in [0, 1/2]$, $g(x) = 3x - 5/3$ se $x \in [2/3, 5/6]$, $g(1) = 1$, $g'(1) = 1/3$, $g^{(k)}(1) = 0$ se $k \geq 2$ e g é de classe C^∞ em $[0, 1]$. O difeomorfismo f corresponde a uma rotação de ângulo $2\pi/3$ em S^1 e sua expressão em \mathbb{R}/\mathbb{Z} é simplesmente $f(x(\text{mdl})) = (x+1/3)(\text{mdl})$.

Seja K o sub-conjunto de $[0, 1]$ definido por $K = \bigcap_{j=0}^{\infty} K_j$, onde para todo $j \in \mathbb{N}$, K_j é uma união de intervalos fechados, definido indutivamente da seguinte maneira:

$$K_0 = [0, 1/6] \cup [1/3, 1/2] \cup [2/3, 5/6] = [0, 1] - (1/6, 1/3) \cup (1/2, 2/3) \cup (5/6, 1).$$

Supondo definido $K_{j-1} = \bigcup_{n=1}^{3 \cdot 2^{j-1}} [\alpha_n^{j-1}, \beta_n^{j-1}]$, então K_j é definido a partir de K_{j-1} retirando-se do intervalo

$[\alpha_n^{j-1}, \beta_n^{j-1}]$ o seu terço médio, isto para todo $n = 1, \dots, 3 \cdot 2^{j-1}$. Sendo assim obtemos $K_j = \bigcup_{n=1}^{3 \cdot 2^j} [\alpha_n^j, \beta_n^j]$,

onde para todo $m = 1, \dots, 3 \cdot 2^j$ e para todo $n = 1, \dots, 3 \cdot 2^{j-1}$, $\beta_m^j - \alpha_m^j = \frac{1}{3}(\beta_n^{j-1} - \alpha_n^{j-1}) = \frac{1}{6 \cdot 3^j}$. É claro que K é compac-

to e não vazio. Da construção é fácil verificar que K é homeomorfo ao conjunto de Cantor usual, isto porque a par-

tir da 1ª etapa a construção de K é idêntica à do conjunto de Cantor.

LEMA 3 - Consideremos K como sub-conjunto de S^1 . Então K é um minimal da ação gerada por f e g .

Demonstração: Provemos primeiramente que K é invariante.

Vamos denotar por G o sub-grupo de $\text{Dif}^\infty(S^1)$ gerado por f e g . Da construção da seqüência $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, vem que $f(K_j) = K_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, logo $f(K) = K$. Além disso temos que $g(K_j \cap [0, 1/2]) = K_{j+1} \cap [0, 1/6]$ e $g(K_j \cap [2/3, 5/6]) = K_{j-1} \cap [1/3, 5/6]$ (se $j \geq 1$). Este fato decorre da construção

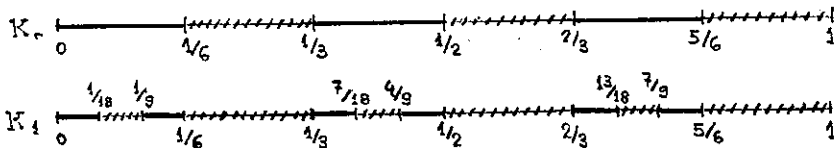


Fig. 8

de K_j e da expressão de g . Como $K_j \subset [0, 1/6] \cup [1/3, 1/2] \cup [2/3, 5/6]$, vem que $g(K_j) \subset K_{j+1} \cup K_{j-1} \subset K_{j-1}$. Por outro lado $g^{-1}(K_j \cap [0, 1/6]) = K_{j-1} \cap [0, 1/2]$ e $g^{-1}(K_j \cap [1/2, 5/6]) = K_{j+1} \cap [2/3, 5/6]$,

logo $g^{-1}(K_j) \subset K_{j-1}$. Temos então que $g(K) = g(\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j) =$
 $= \bigcap_{j=1}^{\infty} g(K_j) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} K_{j-1} = K$ e que $g^{-1}(K) = g^{-1}(\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j) =$
 $\bigcap_{j=1}^{\infty} g^{-1}(K_j) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} K_{j-1} = K$, logo $g(K) = K$. Concluimos daí
 que K é invariante por f e por g , e isto implica que
 K é invariante por G .

Como K é invariante por G , K contém um conjunto minimal μ . Queremos provar que $\mu = K$. Para isto basta mostrarmos que μ contém um ponto $x \in K$, tal que a órbita de x por G , $\mathcal{O}(x)$, é densa em K . Com efeito, se isto for verdadeiro, $\overline{\mathcal{O}(x)} \subset \mu$ é um fechado invariante não vazio, logo $\overline{\mathcal{O}(x)} = \mu = K$. Seja $x_0 \in \mu$. É fácil ver que $f^i(x_0) \in [0, 1/2]$ para $i = 0$ ou -1 , logo podemos supor que $x_0 \in [0, 1/2]$. Como μ é invariante por G , $g^n(x_0) = \frac{1}{3^n} x_0 \in \mu$ para todo $n \geq 0$, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x_0) = 0 \in \mu$. Daí vem que $f(0) = 1/3 \in \mu$. Basta mostrarmos então que $\overline{\mathcal{O}(1/3)} = K$. Para isto basta verificarmos que $I-K = \bigcup_{h \in G} h(1/6, 1/3)$.

De fato, seja $I-K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n, \beta_n)$. Como K é homeomorfo ao conjunto de Cantor usual, o conjunto $\{\beta_n | n \in \mathbb{N}\}$ é denso em K e como $I-K = \bigcup_{h \in G} h(1/6, 1/3)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $h \in G$ tal que $h(1/6, 1/3) =$

$= (\alpha_n, \beta_n)$, logo $h(1/3) = \beta_n$, já que $h' > 0$ para todo $h \in G$, ou seja, $\mathcal{O}(1/3) = \{\beta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Provemos que $I-K = \bigcup_{h \in G} h(1/6, 1/3)$. Como $(1/6, 1/3) \subset I-K$ e K é invariante, é imediato que $\bigcup_{h \in G} h(1/6, 1/3) \subset I-K$. Para mostrarmos que $I-K \subset \bigcup_{h \in G} h(1/6, 1/3)$ é suficiente provarmos que para todo $j \in \mathbb{N}$, $I-K_j \subset \bigcup_{h \in G} h(1/6, 1/3)$. Para $j=0$ $I-K_0 = (1/6, 1/3) \cup (1/2, 2/3) \cup (5/6, 1)$ e $(1/2, 2/3) = f(1/6, 1/3)$, $(5/6, 1) = f^2(1/6, 1/3)$. Suponhamos o fato verdadeiro para $j = 0, \dots, \ell-1$. Temos que $I-K_\ell \supseteq I-K_{\ell-1}$ e $(I-K_\ell) - (I-K_{\ell-1}) = \bigcup_{n=1}^{3 \cdot 2^{\ell-1}} I_n^\ell$, onde os intervalos I_n^ℓ têm comprimento $1/6 \cdot 3^\ell$. Como $(I-K_\ell) - (I-K_{\ell-1}) \subset (0, 1/6) \cup (1/3, 1/2) \cup (2/3, 5/6)$ para $\ell \geq 1$, dado $n \in \{1, \dots, 3 \cdot 2^{\ell-1}\}$, $f^i(I_n^\ell) \subset (0, 1/6)$ para algum $i \in \{0, -1, -2\}$. Por outro lado, como já vimos, $g^{-1}(K_j \cap [0, 1/6]) = K_{j-1} \cap [0, 1/2]$ para todo $j \in \mathbb{N}$, logo $g^{-1}((I-K_\ell) \cap (0, 1/6)) = (I-K_{\ell-1}) \cap (0, 1/2)$ e portanto $g^{-1} f^i(I_n^\ell) \subset I-K_{\ell-1}$. Pela hipótese de indução $g^{-1} f^i(I_n^\ell) = h(1/6, 1/3)$ para algum $h \in G$ e daí vem que $I_n^\ell = f^{-i} g h(1/6, 1/3)$, logo $I_n^\ell \subset \bigcup_{h \in G} h(1/6, 1/3)$.

Observação. Usando o mesmo tipo de construção do exemplo

de Sacksteder pode se obter exemplos de folheações C^∞ apresentando fenômenos topológicos muito interessantes. Em todos os casos o problema se reduz a construir uma ação de grupo livre gerado por n elementos em $\text{Dif}^\infty(S^1)$, que apresente um fenômeno topológico análogo. Para maiores detalhes veja os artigos de G. Hector [8] e [9].

EXERCÍCIOS

1. Seja F uma folha de uma folheação de codimensão k na variedade M . Seja Σ um disco de dimensão k transversal a \mathcal{F} e tal que $\Sigma \cap F \neq \emptyset$. Se $\overline{\Sigma \cap F}$ contém um aberto não vazio em $\overline{\Sigma}$ então $\overline{F - \partial F}$ é um aberto que contém F .
2. Mostre que todas as folhas da folheação de Reeb de S^3 são mergulhadas.
3. Dê exemplo de uma folheação de codimensão um em uma variedade M , compacta, sem bordo que possui uma folha F localmente densa mas tal que $\overline{F} \neq M$. Mostre que isto é impossível se $\dim(M) = 2$.
4. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um e classe C^2 em M . Se μ é um minimal excepcional então μ contém uma folha com holonomia infinita. Em particular

se todas as folhas de \mathcal{F} têm grupo fundamental finito, então \mathcal{F} não possui minimal excepcional.

5. Seja V_2 o bitoro. Como já vimos $\pi_1(V_2)$ é gerado por quatro elementos a, b, c e d , os quais satisfazem à relação $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1$. Seja G o sub-grupo de $\pi_1(V_2)$ gerado por a e c . Mostre que G é o grupo livre de dois geradores.
6. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão 1 transversal às fibras de um fibrado (E, π, B, F) , onde a fibra $F = S^1$. Fixemos $b_0 \in B$ e $F = \pi^{-1}(b_0)$. Consideremos a seguinte relação de equivalência em F : $x \sim x'$ se e somente se x e x' estão na mesma folha de \mathcal{F} .
- a) Defina o que vem a ser um minimal de \sim .
- b) Mostre que μ é minimal de \sim se e somente se o saturado $S(\mu)$ de μ por \mathcal{F} é um minimal de \mathcal{F} .
7. Neste exercício usamos as notações do Lema 3 (§3). Seja \mathcal{F} a folheação do exemplo de Sacksteder e consideremos $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ transversal a \mathcal{F} . Sejam F_1 e F_2 as folhas de \mathcal{F} que passam por 0 e $5/6$. Mostre que $F_1 \neq F_2$ e que as holonomias de F_1 e F_2 possuem elementos hiperbólicos.

8. Mostre que o grupo fundamental de qualquer folha da folheação do exemplo de Sacksteder não é finitamente gerado.

9. Seja $f: S^1 \rightarrow S^1$ um difeomorfismo. Se f possui um minimal excepcional, então f é de classe C^1 .

Sugestão. Use o teorema de Denjoy

10. Os conjuntos minimais de ações localmente livres de classe C^2 , de R^k em variedades compactas de dimensão $k+1$, são órbitas compactas, ou a variedade toda.

11. Número de rotação. Seja $f: S^1 \rightarrow S^1$ um homeomorfismo que mantém a orientação. Dizemos que $\tilde{f}: R \rightarrow R$ é um recobrimento de f se $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$, onde $\pi: R \rightarrow S^1$ é definida por $\pi(\alpha) = e^{2\pi i \alpha}$. Se \tilde{f} é um recobrimento de f então $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x)+1$ para todo $x \in R$.

a) Mostre que $\tilde{f}(x) = x + \phi(x)$ onde $\phi: R \rightarrow R$ é periódica.

b) Suponha que existe $\rho(\tilde{f}, x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \tilde{f}^k(x_0)$ para algum $x_0 \in R$. Mostre que para todo $x \neq x_0$ existe o limite e além disso $\rho(\tilde{f}, x) = \rho(\tilde{f}, x_0)$.

c) Mostre que $\rho(\tilde{f}, x)$ existe para ρ algum $x \in R$.

d) Mostre que se \bar{f} e \tilde{f} são dois levantamentos de f então $\rho(\bar{f}) - \rho(\tilde{f}) \in \mathbb{Z}$. Defina $\rho(f) = \rho(\bar{f}) = \rho(\bar{f})(\text{mdl})$, onde $t(\text{mdl}) = t - [t]$, sendo $[t]$ a parte inteira de t .

e) Calcule $\rho(f)$, onde $f(e^{2\pi i \theta}) = e^{2\pi i(\theta + \theta_0)}$.

f) Se f e g são homeomorfismos de S^1 , tais que $f \circ g = g \circ f$, mostre que $\rho(f \circ g) = (\rho(f) + \rho(g)) \pmod{1}$.
Em particular $\rho(f^k) = k\rho(f) \pmod{1}$.

g) Se h é um homeomorfismo de S^1 , mostre que $\rho(h^{-1} \circ f \circ h) = \rho(f)$.

h) Mostre que f possui um periódico de período q se e somente se $\rho(f) = p/q$, onde p e q são primos entre si.

Sugestão. Para c): Suponha primeiro que f tem um ponto periódico. Se f não tem ponto periódico, mostre que para todo $m \in \mathbb{Z}$, existe $p_m \in \mathbb{Z}$ tal que $p_m < \tilde{f}^m(x) - x < p_m + 1$ onde a desigualdade vale para todo $x \in \mathbb{R}$. Conclua que

$$\left| \frac{\tilde{f}^{mn}(0)}{mn} - \frac{\tilde{f}^m(0)}{m} \right| < \frac{1}{|m|}, \quad \text{logo} \quad \left| \frac{\tilde{f}^m(0)}{m} - \frac{\tilde{f}^n(0)}{n} \right| < \frac{1}{|m|} + \frac{1}{|n|}.$$

APÊNDICE 1

Mostraremos aqui o seguinte Lema.

LEMA - Seja $K \subset \mathbb{R}$ um subconjunto compacto, perfeito, com interior vazio. Existe um homeomorfismo $h: K \rightarrow \mathbb{C}$ onde \mathbb{C} é o conjunto de Cantor usual em $[0,1]$, tal que se $x, x' \in K$ então $x < x'$ se e somente se $h(x) < (x')$.

Demonstração: Podemos supor sem perda de generalidade que que $0,1 \in K$ e $K \subset [0,1]$. Colocando-se $I = [0,1]$, temos $I-K = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, onde I_n é um intervalo da forma (a_n, b_n) sendo $I_n \cap I_m = \emptyset$ se $n \neq m$. Seja $C \subset I$ o conjunto de Cantor usual. Temos $I-C = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, onde $J_1 = (1/3, 2/3)$, $J_2 = (1/9, 2/9)$, $J_3 = (7/9, 8/9)$, etc. ... Como os intervalos do conjunto $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots\}$ são disjuntos 2 a 2, podemos definir uma relação de ordem no conjunto \mathcal{I} , colocando $I_j < I_k$ se $a_j < a_k$ (ou $b_j < b_k$). Analogamente podemos definir uma relação de ordem no conjunto $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \dots\}$, colocando-se $J_j < J_k$ se os extremos de J_j são menores que os extremos de J_k . Temos então da construção do conjunto de Cantor que $J_2 < J_1 < J_3$, $J_4 < J_2 < J_5 < J_1 < J_6 < J_3 < J_7$, etc. . .

Vamos agora construir uma correspondência biunívoca e sobre $\varphi: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$ tal que se $I_j < I_k$ então $\varphi(I_j) < \varphi(I_k)$.

Definimos $\varphi(I_1) = J_1$. Suponhamos definidos $\varphi(I_1) = J_1, \varphi(I_2) = J_{n_2}, \dots, \varphi(I_k) = J_{n_k}$ de tal forma que se $I_i < I_j$ então $\varphi(I_i) < \varphi(I_j)$. Vamos definir $\varphi(I_{k+1})$. Temos três casos a considerar:

- a) Existem $r, r' \in \{1, \dots, k\}$ tais que $I_r < I_{k+1} < I_{r'}$ e se $j \in \{1, \dots, k\} - \{r, r'\}$ então $I_j < I_r$ ou $I_j > I_{r'}$.
- b) Existe $r \in \{1, \dots, k\}$ tal que $I_{k+1} < I_r < I_j$ para $j \neq r$ e $j \in \{1, \dots, k\}$.
- c) Existe $r \in \{1, \dots, k\}$ tal que $I_j < I_r < I_{k+1}$ para $j \neq r$ e $j \in \{1, \dots, k\}$.

Consideremos o caso a). Neste caso, o conjunto $A_{r,r'} = \{\iota \in \mathbb{N} \mid J_{n_r} < J_\iota < J_{n_{r'}}\}$ é infinito e os intervalos J_ι , com $\iota \in A_{r,r'}$, têm comprimento 3^{-m_ι} , onde $m_\iota \geq 1$. Seja $\iota_0 \in A_{r,r'}$, satisfazendo às seguintes propriedades:

- i) $3^{-m_\iota} \leq 3^{-m_{\iota_0}}$ para todo $\iota \in A_{r,r'}$.
- ii) Se $\iota_1 \in A_{r,r'}$ é tal que $m_{\iota_1} = m_{\iota_0}$ com $\iota_1 \neq \iota_0$,

então $J_{\iota_1} > J_{\iota_0}$.

É claro que o ι_0 acima definido é único, visto que o número de intervalos de J com um dado comprimento é finito. Definimos então $\varphi(I_{k+1}) = J_{\iota_0}$.

Nos casos b) e c) a definição de $\varphi(I_{k+1}) = J_{\iota_0}$ é inteiramente análoga e é deixada para o leitor (Sugestão: No caso b) coloque $A_r = \{\iota \in \mathbb{N} \mid J_\iota < J_{n_r}\}$).

Da definição é claro que φ é biunívoca e que se $I_i < I_j$ então $\varphi(I_i) < \varphi(I_j)$. Para mostrarmos que φ é sobre, coloquemos $B_n = \{J_\iota \mid \text{o comprimento de } J_\iota \text{ é } \geq 3^{-n}\}$ e provemos por indução que $\varphi(\mathcal{J}) \supseteq B_n$ para todo n . Como $\varphi(I_1) = J_1 = B_1$, temos que $\varphi(\mathcal{J}) \supseteq B_1$. Suponhamos por indução que $\varphi(\mathcal{J}) \supseteq B_j$ para $1 \leq j \leq k$. É fácil ver da construção do conjunto de Cantor usual C que $\# B_k = 2^{k-1}$. Pela hipótese de indução existem $\iota_1=1, \iota_2, \dots, \iota_{2^{k-1}} \in \mathbb{N}$ tais que $\varphi(I_{\iota_i}) = J_{\iota_i}$, $1 \leq i \leq 2^{k-1}$. Tomemos $J_\iota \in B_{k+1} - B_k$. Pela construção de C temos três possibilidades:

- a) Existem $r, r' \in \{1, \dots, 2^{k-1}\}$ tais que $J_r < J_\iota < J_{r'}$, e para todo $s \in \{1, \dots, 2^{k-1}\}$ com $s \neq r, r'$, $J_s < J_r$ ou $J_s > J_{r'}$.

β) Existe $r \in \{1, \dots, 2^k - 1\}$ tal que $J_\ell < J_r < J_s$ para todo $s \in \{1, \dots, 2^k - 1\}$ com $s \neq r$.

γ) Existe $r \in \{1, \dots, 2^k - 1\}$ tal que $J_s < J_r < J_\ell$ para todo $s \in \{1, \dots, 2^k - 1\}$ com $s \neq r$.

Vamos usar agora que K é perfeito e tem interior vazio. Esta hipótese implica o seguinte: Dado $I_j < I_{j'}$, os conjuntos $L_{j,j'} = \{s \in \mathbb{N} \mid I_j < I_s < I_{j'}\}$, $L_j = \{s \in \mathbb{N} \mid I_s < I_j\}$ e $\tilde{L}_{j'} = \{s \in \mathbb{N} \mid I_s > I_{j'}\}$ são infinitos. Deixamos para o leitor a verificação deste fato. Mostraremos abaixo que existe $I_m \in \mathcal{J}$ tal que $\varphi(I_m) = J_\ell$.

Suponhamos por exemplo que J_ℓ satisfaz α), acima. Podemos supor sem perda de generalidade que $\varphi(I_s) \neq J_\ell$ para $s \in \{1, \dots, 2^k - 1\}$. Como $L_{\ell_r, \ell_{r'}}$ é infinito, seja $m = \min(L_{\ell_r, \ell_{r'}})$. É claro que $m > 2^{k-1}$, $I_{\ell_r} < I_m < I_{\ell_{r'}}$, e para todo $s < m$, $I_s < I_{\ell_{r'}}$ ou $I_s > I_{\ell_r}$. Da construção de φ vem que $\varphi(I_m) = J_\ell$. Nos casos β) e γ) a demonstração é análoga e é deixada para o leitor.

Com isto construímos uma bijeção $\varphi: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$. A partir de φ vamos construir o homeomorfismo $h: K \rightarrow C$.

Primeiramente reenumeremos o conjunto \mathcal{J} de tal

forma que $\varphi(I_\ell) = J_\ell$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Temos então $I_\ell < I_m$ se e somente se $J_\ell < J_m$. Coloquemos $I_\ell = (a_\ell, b_\ell)$ e $J_\ell = (\alpha_\ell, \beta_\ell)$, $\ell \in \mathbb{N}$. Sejam $C_1 = \{\alpha_\ell, \beta_\ell \mid \ell \in \mathbb{N}\}$ e $K_1 = \{a_\ell, b_\ell \mid \ell \in \mathbb{N}\}$. Definamos $\tilde{h}: K_1 \rightarrow C_1$ por $\tilde{h}(a_\ell) = \alpha_\ell$ e $\tilde{h}(b_\ell) = \beta_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$. Da definição é claro que \tilde{h} é biunívoca sobre e que $x < y$ se e somente se $\tilde{h}(x) < \tilde{h}(y)$, $x, y \in K_1$. Como K e C têm interior vazio e são perfeitos, segue-se que $\bar{K}_1 = K$ e $\bar{C}_1 = C$. Vamos mostrar agora que para toda seqüência $\{x_n\}$ em K_1 tal que $x_n \rightarrow x$, então a seqüência $\{\tilde{h}(x_n)\}$ é convergente. Além disso se $\{x'_n\}$ é outra seqüência tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}(x_n)$. Estes dois fatos implicam que \tilde{h} é contínua e se estende a uma aplicação contínua $h: K \rightarrow C$.

Suponhamos primeiramente que $\{x_n\}$ é uma seqüência monótona. Neste caso $\{\tilde{h}(x_n)\}$ é uma seqüência monótona e limitada, logo $\{\tilde{h}(x_n)\}$ é convergente. Suponhamos agora que $\{x_n\}$ e $\{x'_n\}$ são seqüências monótonas em K_1 , tais que $\{x_n\}$ é crescente, $\{x'_n\}$ é decrescente e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x$. Temos $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}(x'_n) = y'$. Suponhamos por absurdo $y < y'$. Neste caso existe um intervalo $J_\ell \subset (y, y')$, $J_\ell = (\alpha_\ell, \beta_\ell) \in \mathcal{J}$. Pela construção \tilde{h} temos $x_n \leq a_\ell < b_\ell \leq x'_n$, o que é um absurdo, pois nes-

te caso $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n$. Temos então que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}(x_n) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}(x'_n)$. Consideremos agora uma seqüência qualquer
 $\{x_n\} \subset K_1$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Se a seqüência $\{\tilde{h}(x_n)\}$
 não convergisse, existiriam duas sub-sequências monótonas
 $\{\tilde{h}(x_{n_k})\}$ e $\{\tilde{h}(x_{m_k})\}$ tais que $y = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{h}(x_{n_k}) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{h}(x_{m_k}) = y'$.
 Se $\{x_{n_k}\}$ fosse crescente e $\{x_{m_k}\}$ decrescente teríamos
 $y = y'$, logo podemos supor que $\{x_{n_k}\}$ e $\{x_{m_k}\}$ são cres-
 centes. Neste caso podemos formar uma seqüência crescente
 $\{y_j\} \in K_1$ tal que para todo j , $y_j = x_{n_k}$ para algum k ou
 ou $y_j = x_{m_l}$ para algum l . Como $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = x$,
 temos $\lim_{j \rightarrow \infty} y_j = x$, logo $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{h}(x_{m_k}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{h}(y_j) =$
 $= \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{h}(x_{n_k})$ e portanto a seqüência $\{\tilde{h}(x_n)\}$ é convergen-
 te. Um argumento análogo a este mostra que se $\{x_n\}$ e
 $\{x'_n\}$ são duas seqüências em K_1 com o mesmo limite, en-
 tão $\{\tilde{h}(x_n)\}$ e $\{\tilde{h}(x'_n)\}$ têm o mesmo limite. Com isto
 provamos que \tilde{h} se estende a uma aplicação $h: K \rightarrow C$, on-
 de $h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}(x_n)$, sendo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Por um argumen-
 to análogo ao anterior a aplicação $\tilde{h}^{-1}: C_1 \rightarrow K_1$ se esten-
 de a uma aplicação contínua $g: C \rightarrow K$, onde $g(y) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}^{-1}(y_n)$, sendo $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Verifica-se facilmente

que $g \circ h = \text{identidade em } K$ e $h \circ g = \text{identidade em } C$
e isto mostra que $h: K \rightarrow C$ é homeomorfismo, como queríamos.

APÊNDICE 2

O EXEMPLO DE DENJOY

O exemplo de Denjoy é obtido como suspensão de um difeomorfismo $f: S^1 \rightarrow S^1$, de classe C^1 e que possui um minimal excepcional. Um sub-conjunto μ de S^1 é dito um minimal de f se μ é fechado, não vazio, $f(\mu) = \mu$ e para todo $\mu' \subset \mu$ com estas propriedades temos $\mu' = \mu$.

Pode-se provar usando argumentos análogos ao da Proposição 2.3 que um minimal μ de f só pode ser uma órbita periódica, todo o S^1 , ou homeomorfo ao conjunto de Cantor. Neste último caso μ é dito um minimal excepcional.

Consideremos o recobrimento universal do S^1 , $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\pi(x) = e^{2\pi i x}$. Se $\tilde{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um homeomorfismo tal que $\tilde{g}(x) = x + \phi(x)$, onde $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período 1, existe um único homeomorfismo $g: S^1 \rightarrow S^1$ satisfazendo $\pi \circ \tilde{g} = g \circ \pi$. Reciprocamente se $g: S^1 \rightarrow S^1$ é um homeomorfismo, existe um único homeomorfismo $\tilde{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{g}(0) = t_0$, onde $t_0 \in \pi^{-1}(g(1))$ é fixado. Como

existe apenas um elemento em $\pi^{-1}(g(1)) \cap [0,1)$, \tilde{g} será única se impusermos a condição $\tilde{g}(0) \in [0,1)$. Temos então uma correspondência biunívoca entre homeomorfismos de S^1 e homeomorfismos da reta da forma $x \rightarrow x + \phi(x)$, ϕ periódica de período 1 e $\phi(0) \in [0,1)$. Por exemplo se $g: S^1 \rightarrow S^1$ é definida por $g(e^{2\pi i x}) = e^{2\pi i(x+\alpha)}$, onde $\alpha \in [0,1)$, então $\tilde{g}(x) = x + \alpha$. No caso em que $\alpha \in [0,1) - \mathbb{Q}$, a órbita de um ponto $\pi(x_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, é o conjunto $\pi\{y_0 + n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\}$, o qual, como sabemos, é denso em S^1 , já que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Fixemos $\alpha \in [0,1) - \mathbb{Q}$, $y_0 \in (0,1)$. Coloquemos $\pi(y_0 + n\alpha) = x_n$ e para todo $n \in \mathbb{Z}$, consideremos $y_n \in (0,1)$ tal que $\pi(y_n) = x_n$. Seja $\{\iota_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ uma sequência de números positivos tais que:

$$1) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \iota_n = L < \infty$$

$$2) \quad \frac{1}{3} < \frac{\iota_{n+1}}{\iota_n} < \frac{5}{3}$$

$$3) \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\iota_{n+1}}{\iota_n} = 1$$

Podemos tomar por exemplo $\iota_n = 1/(n^2+1)$.

LEMA 1 - Existe um sub-conjunto $K \subset [0,1+L]$, homeomorfo ao conjunto de Cantor, satisfazendo às seguintes

propriedades:

a) $[0, 1 + L] - K = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$, onde $I_n \cap I_m = \emptyset$ se $m \neq n$, $I_n = (\alpha_n, \beta_n)$ com $\beta_n - \alpha_n = \ell_n$ e

$$\alpha_n = y_n + \sum_{0 < y_i < y_n} \ell_i.$$

b) Existe uma função contínua não decrescente $\mu: [0, 1 + L] \rightarrow I$ tal que $\mu(K) = I$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ $\mu([\alpha_n, \beta_n]) = \{y_n\}$ e μ é crescente nos conjuntos $K - \{\alpha_n | n \in \mathbb{Z}\}$ e $K - \{\beta_n | n \in \mathbb{Z}\}$.

c) A função $\mu^{-1}: I - \{y_n | n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow K - \{\alpha_n, \beta_n | n \in \mathbb{Z}\}$ é contínua e $\mu^{-1}(y) = y + \sum_{0 < y_i < y} \ell_i$ se $y \notin \{y_n | n \in \mathbb{Z}\}$.

Demonstração: Informalmente a idéia da construção de K é bem simples: Para todo $n \in \mathbb{Z}$, cortamos o intervalo $[0, 1]$ no ponto y_n e inserimos um intervalo de comprimento ℓ_n . Desta forma obtemos o intervalo $[0, 1 + L]$ e o conjunto K será o complementar dos intervalos inseridos. Vejamos a construção formal de K .

Para todo $k \in \mathbb{N}$ consideremos a seqüência $\{y_n^k\}_{n \in \mathbb{Z}}$, onde $y_n^k = y_n + \sum_{\substack{y_i < y_n \\ |i| \leq k}} \ell_i$. O conjunto $\{y_n^k | n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, satisfaz às seguintes propriedades:

$p_1)$ Seja $L_k = \sum_{|i| \leq k} \ell_i$. A seqüência $\{y_n^k\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é densa no conjunto $[0, 1 + L_k] - \bigcup_{|n| \leq k} (y_n^k, y_n^k + \ell_n)$.

$p_2)$ Para n fixo a seqüência $\{y_n^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge para $\alpha_n = y_n + \sum_{0 < y_i < y_n} \ell_i$.

$p_3)$ Seja K o fecho do conjunto $\{\alpha_n | n \in \mathbb{Z}\}$. Então K é perfeito, tem interior vazio e $[0, 1 + L] - K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n, \alpha_n + \ell_n)$.

PROVA - A propriedade p_2 decorre imediatamente da definição. Verifiquemos p_1 . Para $|j| \leq k$ e $y_n > y_j$, temos $y_n^k = y_n + \sum_{\substack{|i| \leq k \\ y_i < y_n}} \ell_i > y_j + \sum_{\substack{|i| \leq k \\ y_i < y_n}} \ell_i \geq y_i + \sum_{\substack{|i| \leq k \\ y_i < y_j}} \ell_i + \ell_j = y_j^k + \ell_j$. Analogamente se $y_n < y_j$, conclui-se que $y_n^k < y_j^k$, logo $\{y_n^k\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset [0, 1 + L_k] - \bigcup_{|j| \leq k} (y_j^k, y_j^k + \ell_j)$.

Mostremos a densidade.

Seja $y \in [0, 1 + L_k] - \bigcup_{|n| \leq k} (y_n^k, y_n^k + \ell_n)$. Suponhamos por exemplo que $y \in [y_i^k + \ell_i, y_j^k]$, uma das componentes conexas do complementar de $\bigcup_{|n| \leq k} (y_n^k, y_n^k + \ell_n)$. Tome-

mos $T = \sum_{\substack{|r| \leq k \\ y_r \leq y_i}} \ell_r = \sum_{\substack{|r| \leq k \\ y_r < y_j}} \ell_r$. Temos $y_i + T = y_i^k + \ell_i \leq y \leq y_j^k = y_j + T$, logo $y_i \leq y - T \leq y_j$.

Como $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é densa em $[0,1]$, existe uma sub-sequência $y_{n_j} \rightarrow y-T$, $y_{n_j} \in [y_i, y_j]$. Da definição de $\{y_n^k\}$, segue-se que $y_{n_j}^k = y_{n_j} + T \rightarrow y$, o que mostra a densidade. Provemos P_3 .

Para provarmos que K é perfeito, basta provarmos que para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe uma seqüência n_j , com $|n_j| \rightarrow \infty$ e $\alpha_{n_j} \rightarrow \alpha_n$. De fato, seja n_j é uma seqüência tal que $y_{n_j} \rightarrow y_n$ e $y_{n_j} < y_n$. Temos então que $\alpha_{n_j} = y_{n_j} + \sum_{y_i < y_{n_j}} t_i \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y_n + \sum_{y_i < y_n} t_i = \alpha_n$, como é fácil verificar. Mostremos que K tem interior vazio. Como $\alpha_n = y_n + \sum_{y_i < y_n} t_i$, segue-se que o segmento $(\alpha_n, \alpha_n + t_n) \subset [0, 1+L] - K$. Sejam $y \in K$ e $\epsilon > 0$. Como K é o fecho do conjunto $\{\alpha_n | n \in \mathbb{Z}\}$, existe uma seqüência n_j tal que $\alpha_{n_j} \rightarrow y$ e $|n_j| \rightarrow \infty$. Ora, como $t_{n_j} \rightarrow 0$, se j for suficientemente grande temos $(\alpha_{n_j}, \alpha_{n_j} + t_{n_j}) \subset (y-\epsilon, y+\epsilon)$, o que prova que K tem interior vazio. Falta provarmos que $[0, 1+L] - K = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\alpha_n, \alpha_n + t_n)$. Como vimos acima $K \subset [0, 1+L] - \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\alpha_n, \alpha_n + t_n)$. Por outro lado se $y \in [0, 1+L] - \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [\alpha_n, \alpha_n + t_n]$, coloquemos $T = \sum_{\alpha_i < y} t_i$.

Como $[0, y] \supseteq \bigcup_{\alpha_i < y} [\alpha_i, \alpha_i + \iota_i]$, vem que $y \geq T$. Como

$[y, 1+L] \supseteq \bigcup_{\alpha_i \geq y} [\alpha_i, \alpha_i + \iota_i]$, vem que $1+L-y \geq \sum_{\alpha_i \geq y} \iota_i = L-T$.

Temos então $0 \leq y-T \leq 1$. Seja $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

$|n_j| \rightarrow \infty$ e $y_{n_j} \rightarrow y-T$. Da construção vem que $|\alpha_{n_j} - y| \leq |y_{n_j} - (y-T)| + |T - \sum_{y_i < y_{n_j}} \iota_i|$. Caso $y_{n_j} > y-T$, temos

$|\alpha_{n_j} - y| \leq |y_{n_j} - (y-T)| + \sum_{y_{n_j} < y_i < y-T} \iota_i$. Caso $y_{n_j} < y-T$ temos

$|\alpha_{n_j} - y| \leq |y_{n_j} - (y-T)| + \sum_{y-T < y_i < y_{n_j}} \iota_i$. Em qualquer caso, como

$|n_j| \rightarrow \infty$, vem que $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{y-T < y_i < y_{n_j}} \iota_i = 0$, já que a série

$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \iota_i$ é convergente. Concluimos daí que $\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_{n_j} = y$,

logo $y \in K$, como queríamos. Isto prova p_3 .

Para terminarmos a demonstração do Lema 1, falta construirmos a função μ . Construiremos abaixo uma seqüência de funções $\mu_k: [0, 1+L] \rightarrow I$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \mu$, na topologia uniforme e $\mu_k(y_n^k) = y_n$.

Definamos $\mu_0(x) = x$ se $x \leq y_0^0 = y_0$, $\mu_0(x) = y_0$ se $y_0 \leq x \leq y_0 + \iota_0$, $\mu_0(x) = x - \iota_0$ se $y_0 + \iota_0 \leq x \leq 1 + \iota_0$ e $\mu_0(x) = 1$ se $x \geq 1 + \iota_0$.

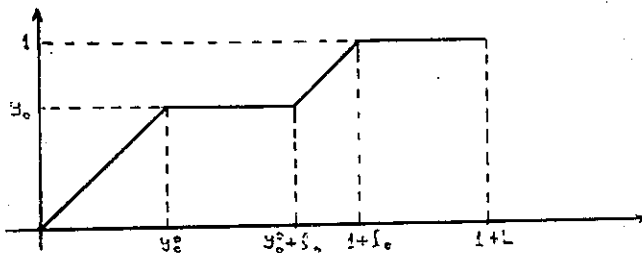


Fig. 1

Definamos agora $\mu_k: [0, l+L] \rightarrow I$ por $\mu_k(y) = y - \sum_{y_i < y} t_i$ se $y \in [0, l+L] - \bigcup_{|n| \leq k} [y_n^k, y_n^k + t_n]$,
 $\mu_k(y) = y_n^k$ se $y \in [y_n^k, y_n^k + t_n]$ e $\mu_k(y) = 1$ se $l+L_k \leq y \leq l+L$. Definição, é claro que μ_k é contínua.

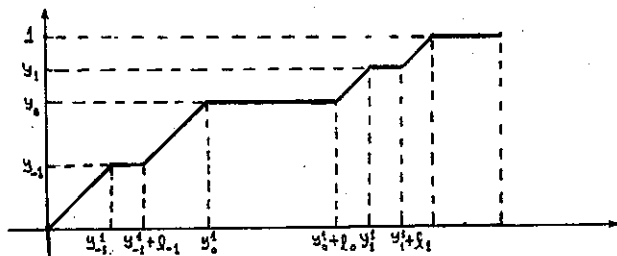


Fig. 2

Temos que $|\mu_{k+1}(y) - \mu_k(y)| \leq t_{k+1} + t_{-(k+1)}$,
 logo $\mu_k \rightarrow \mu$ uniformemente. Além disso $\mu(y) = y - \sum_{\alpha_i < y} t_i$
 se $y \in K$ e $\mu(y) = y_n$ se $y \in [\alpha_n, \alpha_n + t_n]$. Como μ é o
 limite uniforme de uma seqüência de funções contínuas e não

decrecentes, μ é contínua e não decrescente. Por outro lado se $y > y' \in K - \{\alpha_n + \ell_n | n \in \mathbb{Z}\}$, existem $\alpha_m < \alpha_n$ tais que $y' \leq \alpha_m < \alpha_n \leq y$, logo $\mu(y') \leq \mu(\alpha_m) = y_m < y_n = \mu(\alpha_n) \leq \mu(y)$ e portanto $\mu(y') < \mu(y)$. Concluimos daí que μ é crescente em $K - \{\alpha_n + \ell_n | n \in \mathbb{Z}\}$. Analogamente μ é crescente em $K - \{\alpha_n | n \in \mathbb{Z}\}$. Além disso $\mu(0) = 0$, $\mu(1+L) = 1$ e $\mu/([0, 1+L] - K)$ é localmente constante, logo $\mu(K - \{\alpha_n, \beta_n | n \in \mathbb{Z}\}) = I - \{y_n | n \in \mathbb{Z}\}$ e portanto existe $\mu^{-1}: I - \{y_n | n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow K - \{\alpha_n, \beta_n | n \in \mathbb{Z}\}$. Por outro lado $\mu_k: [0, 1+L]_k - \bigcup_{|n| \leq k} [y_n^k, y_n^k + \ell_n] \rightarrow I - \{y_n | |n| \leq k\}$ é homeomorfismo, logo $\mu_k^{-1}: I - \{y_n | n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow [0, 1+L]$ é bem definida e contínua para todo k . Como $|\mu_{k+1}^{-1}(x) - \mu_k^{-1}(x)| \leq \ell_{k+1} + \ell_{-(k+1)}$, vem que μ_k^{-1} converge para a restrição de μ^{-1} a $I - \{y_n | n \in \mathbb{Z}\}$. Logo $\mu^{-1}: I - \{y_n | n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow K - \{\alpha_n, \alpha_n + \ell_n | n \in \mathbb{Z}\}$ é contínua. Como $\mu(x) = x - \sum_{\alpha_i < x} \ell_i$ se $x \in K$, vem que $\mu^{-1}(y) = y + \sum_{y_i < y} \ell_i$ se $y \in I - \{y_n | n \in \mathbb{Z}\}$. Com isto demonstramos completamente o Lema 1.

Observação. Consideremos agora o difeomorfismo $\gamma: [0, 1] \rightarrow [0, 1+L]$ dado por $\gamma(x) = (1+L)x$. Por

abuso de linguagem denotaremos por K o conjunto $\gamma^{-1}(K)$, por $\mu: I \rightarrow I$ a aplicação $\mu \circ \gamma$, por α_n o ponto de $[0,1]$, $\gamma^{-1}(\alpha_n)$ e por β_n o ponto $\gamma^{-1}(\alpha_{n+1})$.

LEMA 2 - Existe uma função contínua $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo às seguintes propriedades:

a) $h/K \equiv 1$

b) $h(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$

c) $\int_{\alpha_n}^{\beta_n} h(\tau) d\tau = (1+L)^{-1} \iota_{n+1} = \beta_{n+1} - \alpha_{n+1}$

d) Existe uma constante $k \in [0,1]$ tal que se $\tilde{f}(x) = k + \int_0^x h(\tau) d\tau$ então $\tilde{f}(\alpha_n) = \alpha_{n+1}$ se $y_n + \alpha < 1$ e $\tilde{f}(\alpha_n) = \alpha_{n+1} + 1$ se $y_n + \alpha > 1$, onde α é o mesmo número irracional usado na construção da sequência $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Demonstração: Basta definirmos h em $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\alpha_n, \beta_n)$. Coloquemos $h(t) = 1 + \lambda_n (\beta_n - t)(t - \alpha_n)$ se $t \in (\alpha_n, \beta_n)$, onde

$$\lambda_n = \frac{6}{(\beta_n - \alpha_n)^2} \left[\frac{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}}{\beta_n - \alpha_n} - 1 \right] = \frac{6(1+L)^2}{\iota_n^2} \left[\frac{\iota_{n+1}}{\iota_n} - 1 \right],$$

lembrando que $\beta_n - \alpha_n = (1+L)^{-1} \iota_n$. Verifiquemos b). Para $t \in (\alpha_n, \beta_n)$ vem $|h(t) - 1| = |\lambda_n (\beta_n - t)(t - \alpha_n)| \leq$

$$\leq \frac{|\lambda_n|}{4} (\beta_n - \alpha_n)^2 = \frac{3}{2} \left| \frac{\iota_{n+1}}{\iota_n} - 1 \right| < 1, \quad \text{já que } \frac{1}{3} < \frac{\iota_{n+1}}{\iota_n} < \frac{5}{3}.$$

Mostremos que h é contínua. Temos $\sup_{t \in (\alpha_n, \beta_n)} |h(t) - 1| =$

$$= \frac{3}{2} \left| \frac{\iota_{n+1}}{\iota_n} - 1 \right|, \quad \text{logo } \lim_{|n| \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in (\alpha_n, \beta_n)} |h(t) - 1| \right) = 0 \quad \text{e}$$

isto implica que h é contínua em K . A condição c) pode ser verificada diretamente, integrando a expressão de h no intervalo (α_n, β_n) . Verificaremos abaixo a condição d).

Designemos por m a medida de Lebesgue usual em \mathbb{R} .

Seja $c = (1+L)^{-1} (\alpha + \sum_{y_i < \alpha} \iota_i)$. Temos então:

$$\tilde{f}(\alpha_n) - c = \int_0^{\alpha_n} h(\tau) d\tau = \int_{K_n} h(\tau) d\tau + \int_{L_n} h(\tau) d\tau, \quad \text{onde}$$

$K_n = K \cap [0, \alpha_n]$ e $L_n = \bigcup_{\alpha_\ell < \alpha_n} (\alpha_\ell, \beta_\ell)$. Por outro lado,

$$\int_{L_n} h(\tau) d\tau = (1+L)^{-1} \sum_{\alpha_\ell < \alpha_n} \iota_{j+1} \quad \text{e} \quad \int_{K_n} h(\tau) d\tau =$$

$$= m(K \cap [0, \alpha_n]).$$

Da construção de $\{y_n^k\}_{n \in \mathbb{Z}}$, vem que

$$m([0, y_n^k] - \bigcup_{|j| \leq k} (y_j^k, y_j^k + \iota_j)) = m([0, y_n^k]) = y_n^k.$$

Como a função característica do conjunto $[0, (1+L)^{-1} y_n^k] -$

- $\bigcup_{|j| \leq k} ((1+L)^{-1} y_j^k, (1+L)^{-1} (y_j^k + t_j))$ converge pontualmente

para a função característica de $[0, \alpha_n] - \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} (\alpha_\ell, \beta_\ell)$,

vem que

$$m(K \cap [0, \alpha_n]) = m([0, \alpha_n] - \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} (\alpha_\ell, \beta_\ell)) = (1+L)^{-1} y_n.$$

Concluimos daí que $\int_0^{\alpha_n} h(\tau) d\tau = (1+L)^{-1} (y_n + \sum_{\alpha_j < \alpha_n} t_{j+1}) = (1+L)^{-1} (y_n + \sum_{y_j < y_n} t_{j+1})$.

Suponhamos primeiramente que $y_n + \alpha > 1$. Neste caso $y_{n+1} = y_n + \alpha - 1$, logo

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\alpha_n) - c &= (1+L)^{-1} y_n + (1+L)^{-1} \left(\sum_{0 < y_{i-1} < 1-\alpha} t_i + \sum_{1-\alpha < y_i < y_n} t_{i+1} \right) = \\ &= (1+L)^{-1} y_n + (1+L)^{-1} \left(\sum_{\alpha < y_{i-1} + \alpha < 1} t_i + \sum_{1 < y_i + \alpha < y_n + \alpha} t_{i+1} \right) \end{aligned}$$

S Se $\alpha < y_{i-1} + \alpha < 1$, temos $y_{i-1} + \alpha = y_i$ e se $1 < y_i + \alpha \leq y_n + \alpha$, temos $y_i + \alpha = y_{i+1} + 1$, logo

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\alpha_n) - c &= (1+L)^{-1} y_n + (1+L)^{-1} \left(\sum_{\alpha < y_i < 1} t_i + \sum_{0 < y_{i+1} < y_{n+1}} t_{i+1} \right) = \\ &= (1+L)^{-1} y_n + (1+L)^{-1} (L - \sum_{0 < y_i < \alpha} t_i) + (1+L)^{-1} \left(\sum_{0 < y_i < y_{n+1}} t_i \right) = \\ &= (1+L)^{-1} (y_n + \alpha - 1 + \sum_{0 < y_i < y_{n+1}} t_i) + (1-\alpha)(1+L)^{-1} + L(1+L)^{-1} - \\ &- (1+L)^{-1} \left(\sum_{0 < y_i < \alpha} t_i \right) = (1+L)^{-1} (y_{n+1} + \sum_{0 < y_i < y_{n+1}} t_i) + 1 - \end{aligned}$$

- $(1+L)^{-1}(\alpha + \sum_{0 < y_i < \alpha} t_i) = \alpha_{n+1} + 1 - c$. Temos então

$\tilde{f}(\alpha_n) = \alpha_{n+1} + 1$, como queríamos. Analogamente prova-se que $\tilde{f}(\alpha_n) = \alpha_{n+1}$ se $y_n + \alpha < 1$. Com isto demonstramos o Lema 2.

Consideremos agora a função $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ dada pelo Lema 2. Como $h/K \equiv 1$ e $0,1 \in K$, temos $h(0) = h(1) = 1$, logo podemos estender h a uma função contínua e periódica de período 1, $\hat{h}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, colocando $\hat{h}(x+n) = h(x)$ se $x \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{Z}$. Definamos $\hat{f}(x) = c + \int_0^x \hat{h}(\tau) d\tau$. Por d) do Lema 2 temos para $m, n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(\alpha_n + m) = \alpha_{n+1} + m$ se $y_n + \alpha < 1$ e $\hat{f}(\alpha_n + m) = \alpha_{n+1} + m + 1$ se $y_n + \alpha > 1$. Seja $\hat{K} = K + \mathbb{Z} = \{x+m \mid x \in K \text{ e } m \in \mathbb{Z}\}$. Como \hat{K} é o fecho do conjunto $\{\alpha_n + m \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, decorre do fato acima que $\hat{f}(\hat{K}) \subset \hat{K}$. Por outro lado de c) do Lema 2, temos que $\hat{f}(\alpha_n, \beta_n) = (\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$ se $y_n + \alpha < 1$ e $\hat{f}(\alpha_n, \beta_n) = (\alpha_{n+1} + 1, \beta_{n+1} + 1)$ se $y_n + \alpha > 1$. Decorre daí que $\hat{f}(\mathbb{R} - \hat{K}) = \mathbb{R} - \hat{K}$, logo $\hat{f}(\hat{K}) = \hat{K}$. Além disso, como \hat{f} é a integral de uma função positiva, \hat{f} é um difeomorfismo de classe C^1 em \mathbb{R} .

Lema 3 - Sejam $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $\pi(x) = e^{2\pi i x}$, $\mu: I \rightarrow I$ como na observação após o Lema 1 e $\tilde{K} = \pi(\hat{K}) = \pi(K) \subset S^1$. Seja $\tilde{\mu}: S^1 \rightarrow S^1$ tal que $\pi \circ \mu = \tilde{\mu} \circ (\pi/I)$ e

coloquemos $g(e^{2\pi i x}) = e^{2\pi i(x+\alpha)}$. Existe um difeomorfismo $f: S^1 \rightarrow S^1$ de classe C^1 satisfazendo às seguintes propriedades:

- a) $\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi$
- b) $\hat{\mu} \circ \hat{f} = g \circ \hat{\mu}$
- c) $f(\tilde{K}) = \tilde{K}$ e \tilde{K} é o único minimal de f .

Demonstração: Construção de f : Temos $\int_0^1 h(\tau) d\tau = \int_K h + \int_{I-K} h = m(K) + \sum_i (\beta_i - \alpha_i) = (1+L)^{-1} + L(1+L)^{-1} = 1$. Daí vem que $\hat{f}(x+1) = \hat{f}(x) + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, logo $\hat{f}(x) = x + \phi(x)$, onde ϕ é periódica de período 1. Portanto existe um único difeomorfismo de classe C^1 , $f: S^1 \rightarrow S^1$, tal que $\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi$.

Provemos b). Basta mostrarmos que $\hat{\mu} \circ \hat{f}(x) = \hat{\mu}(x) + \alpha$ para todo $x \in [0, 1]$, onde $\hat{\mu}/I = \mu$ e $\hat{\mu}(x+m) = \mu(x) + m$ se $x \in [0, 1]$ e $m \in \mathbb{Z}$. Se $x = \alpha_n$ e $y_n + \alpha < 1$, temos $\hat{\mu} \circ \hat{f}(\alpha_n) = \hat{\mu}(\alpha_{n+1}) = y_{n+1} = y_n + \alpha = \hat{\mu}(\alpha_n) + \alpha$. Analogamente se $x = \alpha_n$ e $y_n + \alpha > 1$, $\hat{\mu} \circ \hat{f}(\alpha_n) = \hat{\mu}(\alpha_{n+1} + 1) = \mu(\alpha_{n+1}) + 1 = y_{n+1} + 1 = y_n + \alpha = \hat{\mu}(\alpha_n) + \alpha$

Por continuidade a relação vale em K . Por outro lado se

$x \in (\alpha_n, \beta_n)$, $\hat{f}(x) \in (\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$ ou $\hat{f}(x) \in (1 + \alpha_{n+1}, 1 + \beta_{n+1})$, logo $\hat{\mu} \circ \hat{f}(x) = (y_{n+1}$ ou $y_{n+1}+1) = \hat{\mu}(x) + \alpha$.

Falta mostrarmos c). Como $\hat{f}(\hat{K}) = \hat{K}$, vem que $f(\tilde{K}) = \tilde{K}$. Coloquemos $\tilde{\alpha}_n = \pi(\alpha_n)$ e $\tilde{\beta}_n = \pi(\beta_n)$. Temos evidentemente $f(\tilde{\alpha}_n) = \tilde{\alpha}_{n+1}$ e $f(\tilde{\beta}_n) = \tilde{\beta}_{n+1}$, logo as órbitas $\{\tilde{\alpha}_n | n \in \mathbb{Z}\}$ e $\{\tilde{\beta}_n | n \in \mathbb{Z}\}$ são densas em K . Por outro lado a restrição

$$\mu: K - \{\alpha_n, \beta_n | n \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow I - \{y_n | n \in \mathbb{Z}\}$$

é um homeomorfismo, logo a restrição $\bar{\mu} = \tilde{\mu} / (\tilde{K} - \{\alpha_n, \beta_n | n \in \mathbb{Z}\})$

$$\bar{\mu}: \tilde{K} - \{\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n | n \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow I - \{\pi(y_n) = x_n | n \in \mathbb{Z}\}$$

é um homeomorfismo, logo

$$f / (\tilde{K} - \{\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n | n \in \mathbb{Z}\}) = \bar{\mu}^{-1} \circ (g / (I - \{x_n | n \in \mathbb{Z}\})) \circ \bar{\mu}$$

e portanto $f / (\tilde{K} - \{\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n | n \in \mathbb{Z}\})$ é conjugado a $g / (I - \{x_n | n \in \mathbb{Z}\})$, logo todas as órbitas de f em \tilde{K} são densas e portanto \tilde{K} é um minimal de f .

Por outro lado se $x \in \pi(\alpha_n, \beta_n)$, $f^k(x) \in \pi(\alpha_{n+k}, \beta_{n+k})$, logo $\lim_{|k| \rightarrow \infty} d(f^k(x), K) = 0$, onde d é uma distância em S^1 , já que $\lim_{|k| \rightarrow \infty} (\beta_{n+k} - \alpha_{n+k}) = 0$. Isto implica que \tilde{K} é o único minimal de f , como queríamos.

COROLÁRIO - Existe uma folheação de classe C^1 e codimensão um em T^2 que possui um minimal excepcional.

Demonstração: Basta tomarmos a suspensão do difeomorfismo f obtido no Lema 3.

CAPÍTULO IX

PONTOS SINGULARES DE 1-FORMAS COMPLETAMENTE INTEGRÁVEIS

Uma 1-forma ω é dita completamente integrável quando $\omega \wedge d\omega = 0$ em todos os pontos onde ela está definida. Pelo teorema de Frobenius ω define uma folheação de codimensão um fora dos zeros de ω (singularidades de ω).

O nosso propósito é estudar a estrutura topológica da folheação definida por ω na vizinhança de uma singularidade.

Para este efeito consideraremos ω definida em \mathbb{R}^n tendo $0 \in \mathbb{R}^n$ como singularidade. Veremos então que quando ω é analítica e $n \geq 3$ a estrutura topológica de ω é genericamente a mesma que a da sua parte linear. No caso especial dos centros é suficiente assumir ω de classe C^2 .

§1. Classificação das singularidades

Seja $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ uma forma completamente integrável em \mathbb{R}^n de classe C^1 tal que $a_i(0) = 0$ para $i = 1, \dots, n$.

numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$ podemos escrever para todo $i = 1, \dots, n$.

$$a_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0) \cdot x_j + R_i(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_i(x)}{|x|} = 0.$$

logo

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0) x_j dx_i + \sum_{i=1}^n R_i(x) dx_i$$

A forma $\omega_1 = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0) x_j dx_i$ é chamada a parte linear de ω em $0 \in \mathbb{R}^n$.

1.1 - LEMA - A forma ω_1 é completamente integrável.

Demonstração: Das expressões $\omega = \omega_1 + \sum_{i=1}^n R_i dx_i$ e

$$d\omega = d\omega_1 + \sum_{i=1}^n dR_i \wedge dx_i, \text{ obtemos que}$$

$$\omega \wedge d\omega = \omega_1 \wedge d\omega_1 + \sum_{i=1}^n (\omega_1 \wedge dR_i \wedge dx_i + R_i dx_i \wedge d\omega) = 0$$

Por outro lado verifica-se facilmente na expressão acima que $\omega_1 \wedge d\omega_1$ é a parte linear de $\omega \wedge d\omega$, enquanto que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\|x\|} (\omega \wedge d\omega - \omega_1 \wedge d\omega_1)_x = 0$. Isto implica que $\omega_1 \wedge d\omega_1 = 0$.

1.2 - PROPOSIÇÃO - Seja ω de classe C^1 , completamente integrável e $0 \in \mathbb{R}^n$ uma singularidade de ω . Temos duas possibilidades:

1) $d\omega|_{x=0} = 0$ e $(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0))_{1 \leq i, j \leq n}$ é uma matriz simétrica.

2) $d\omega|_{x=0} \neq 0$ e neste caso o posto de

$$(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0))_{1 \leq i, j \leq n} \text{ é } \leq 2.$$

Demonstração: Como $\omega_1 = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0) x_j dx_i$, temos

$$\begin{aligned} d\omega|_{x=0} &= d\omega_1 = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0) dx_j \wedge dx_i = \\ &= \sum_{i < j} (\frac{\partial a_j}{\partial x_i}(0) - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0)) dx_i \wedge dx_j \quad \text{logo } (\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0))_{1 \leq i, j \leq n} \\ &\text{é simétrica se e só se } d\omega_0 = 0. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que $d\omega_0 \neq 0$ e provemos que o posto de $(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0))_{1 \leq i < j \leq n}$ é ≤ 2 .

Como $\omega_1 \wedge d\omega_1 = 0$, temos $d\omega_1 \wedge d\omega_1 = 0$. Afir-
mamos que $d\omega_1 = \theta_1 \wedge \theta_2$, onde θ_1 e θ_2 são 1-formas
linearmente independentes e $\theta_i = \sum_{j=1}^n b_i^j dx_j$, onde os b_i^j
são constantes.

De fato, os coeficientes de ω_1 são lineares,
logo $d\omega_1 = \sum_{i < j} c_{ij} dx_i \wedge dx_j$, onde $c_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(0) - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0)$
é constante. Como $d\omega_1 \neq 0$, podemos supor que

$c_{12} = i_{e_2} i_{e_1} (dw_1) \neq 0$, onde $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$. Aplicando i_{e_1} á identidade $dw_1 \wedge dw_1 = 0$, obtemos $i_{e_1} (dw_1) \wedge dw_1 = 0$. Aplicando i_{e_2} a esta última relação, obtemos $dw_1 = \theta_1 \wedge \theta_2$, onde $\theta_1 = \frac{1}{c_{12}} i_{e_1} (dw_1)$ e $\theta_2 = i_{e_2} (dw_1)$, as quais claramente têm coeficientes constantes.

Como $\theta_1 = \sum_j b_1^j dx_j$ e $\theta_2 = \sum_j b_2^j dx_j$ são linearmente independentes, existe um isomorfismo linear S do \mathbb{R}^n tal que $S^*(\theta_1) = dy_1$ e $S^*(\theta_2) = dy_2$. Neste caso $d(S^*w_1) = dy_1 \wedge dy_2 = d(y_1 dy_2)$. Pelo lema de Poincaré ([30]), existe $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, quadrática, tal que $S^*(w_1) = y_1 dy_2 + dg$. A integrabilidade de w_1 implica que $dg \wedge dy_1 \wedge dy_2 = 0$. Daí segue-se que $\frac{\partial g}{\partial y_k} = 0$ para $k \geq 3$ e portanto

$$S^*w_1 = \frac{\partial g}{\partial y_1} dy_1 + (y_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2}) dy_2$$

e assim o posto de $(\frac{\partial a_1}{\partial x_j})_{1 \leq i, j \leq 2}$ é ≤ 2 .

EXEMPLO 1 - a) Seja $w = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 - x_3 dx_3 = df$ onde

$$f = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2). \text{ As folhas de } w$$

são as componentes conexas das superfícies de nível de $f/\mathbb{R}^3 - \{0\}$ e estão dadas na figura 1 abaixo.

b) A forma $\eta = x_2 dx_1 - 2x_1 dx_2$ em R^3 satisfaz $\eta \wedge d\eta = 0$. Além disso $d\eta = -3dx_1 \wedge dx_2 \neq 0$. O conjunto de singularidades de η é o eixo x_3 . As folhas de η são produtos do eixo x_3 com as órbitas do campo $X = 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ (ver figura 2).

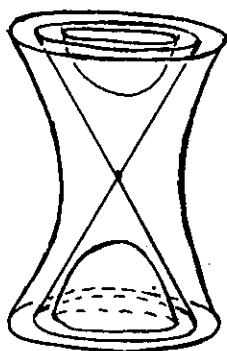


Fig. 1

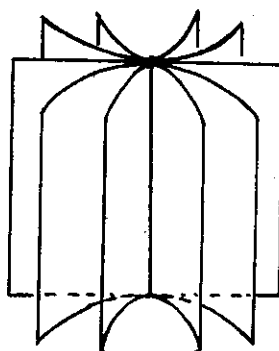


Fig. 2

§2. Centros.

Seja $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$ completamente integrável em R^n com uma singularidade em $0 \in R^n$.

DEFINIÇÃO - A singularidade $0 \in R^n$ de ω é dita simples ou não degenerada se $Da(0)$ é um isomorfismo, isto é, se $\det \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0) \right) \neq 0$.

Esta definição não depende do sistema de coordenadas escolhido. Além disso as singularidades simples são

isoladas.

Pela proposição anterior se $n \geq 3$ e $0 \in \mathbb{R}^n$ é uma singularidade simples então necessariamente $d\omega|_{x=0} = d\omega_1 = 0$. Consequentemente, $\omega_1 = df$ onde f é uma função quadrática. Mediante uma mudança de variáveis linear podemos supor f escrita como soma de quadrados. Daí

$$\omega_1 = d(x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2)$$

DEFINIÇÃO - A singularidade $0 \in \mathbb{R}^n$ de $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ é chamada centro quando $(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0))$ é definida

positiva ou negativa, isto é, quando ω_1 se escreve:

$\omega_1 = \pm d(x_1^2 + \dots + x_n^2)$ em algum sistema de coordenadas linear.

Neste caso as folhas de ω_1 são as esferas $x_1^2 + \dots + x_n^2 = \epsilon^2$. O nosso objetivo nesta seção é mostrar que se ω é de classe C^2 , então suas folhas também serão difeomorfias a esferas.

2.1 - TEOREMA (Reeb [24]) - Seja ω uma forma completamente integrável de classe C^2 definida numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^3$, $n \geq 3$. Suponha que $0 \in \mathbb{R}^3$ é um centro para ω . Então existe uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$ na qual todas as folhas de ω são difeomorfas

à esfera S^{n-1} .

Demonstração: Seja $w = \sum a_i(x) dx_i$ e $a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0)$. Va-

mos supor que a matriz (a_{ij}) é positiva de-
finida. Fazendo uma mudança de coordenadas linear podemos
supor que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$. Consideremos a
aplicação $\Psi: \mathbb{R} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\Psi(\rho, u) = \rho \cdot u$ onde
 $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1$.

Pondo $b_i = a_i \circ \Psi$, obtemos

$$\Psi^*(w)|_{(\rho, u)} = \sum_{i=1}^n \rho b_i(\rho, u) du_i + \left(\sum_{i=1}^n b_i(\rho, u) u_i \right) d\rho$$

Como $a_i(x) = x_i + r_i(x)$, onde $r_i(0) = \frac{\partial r_i}{\partial x_j}(0) = 0$, te-
mos $a_i(x) = x_i + \sum_{j=1}^n x_j \epsilon_{ij}(x)$ onde $\epsilon_{ij} \in C^1$ e $\epsilon_{ij}(0) = 0$,
logo

$$b_i(\rho, u) = \rho \left(u_i + \sum_{j=1}^n u_j \epsilon_{ij}(\rho u) \right)$$

Temos então

$$\begin{aligned} \Psi^*(w) &= \rho \left[\left(1 + \sum_j u_j \epsilon_{ij}(\rho u) \right) d\rho + \rho \sum_i \left(u_i + \sum_j u_j \epsilon_{ij}(\rho u) \right) du_i \right] \\ &= \rho \left[(1 + b(\rho, u)) d\rho + \sum_i c_i(\rho, u) du_i \right], \end{aligned}$$

onde $b(0, u) = 0 = c_i(0, u)$.

Conseqüentemente a forma \tilde{w} em $\mathbb{R} \times S^1$ dada por

$$\tilde{w}/(\rho, u) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} \Psi^* w & \text{se } \rho \neq 0 \\ d\rho & \text{se } \rho = 0 \end{cases}$$

é de classe C^1 e completamente integrável.

Da expressão vem que \tilde{w} não se anula em uma vizinhança V de $\{0\} \times S^{n-1}$. Além disso se $(0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$ é um vetor tangente a $\{0\} \times S^{n-1}$, $\tilde{w}_{(0,u)}(0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n) = 0$, logo $\{0\} \times S^{n-1}$ é uma superfície integral de \tilde{w} . Em V \tilde{w} define uma folheação \mathfrak{F} de classe C^1 sem singularidades. Como $n \geq 3$, a folha $\{0\} \times S^{n-1}$ é simplesmente conexa, logo pelo teorema da estabilidade de Reeb existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R} \times S^{n-1}$ de $\{0\} \times S^{n-1}$, saturada por folhas de \mathfrak{F} difeomorfas a S^{n-1} . As folhas de \mathfrak{F} em $((0, \infty) \times S^{n-1}) \cap W$ coincidem com as superfícies integrais de $\Psi^*(\omega)$ neste mesmo conjunto. Como $\Psi: (0, \infty) \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$, é um difeomorfismo que leva folhas de $\Psi^*(\omega)$ em folhas de ω , concluímos que as folhas de ω , em $\Psi(W) - \{0\}$ são difeomorfas a S^{n-1} . Observe que $\Psi(W)$ é uma vizinhança de 0 , difeomorfa a uma bola.

COROLÁRIO 1 - Seja M^n uma variedade compacta, conexa e ω uma 1-forma em M de classe C^2 completamente integrável com singularidades $x_1, \dots, x_k \in M$. Se $k \geq 1$, $n \geq 3$ e cada x_i é um centro então

- (i) Todas as folhas de ω são difeomorfas a S^{n-1} .
- (ii) $k = 2$ e M é homeomorfa a S^n .

Demonstração: Pelo teorema anterior existem bolas fechadas $\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_k$ centradas em x_1, \dots, x_k respectivamente, tais que para todo $i = 1, \dots, k$, as folhas de $\omega / (U_i - \{0\})$ são difeomorfas a S^{n-1} e $\partial \bar{U}_i \approx S^{n-1}$ é uma superfície integral de ω . Sejam U_i o interior de \bar{U}_i , $i = 1, \dots, k$ e $N = M - \bigcup_{i=1}^k U_i$. Então N é uma variedade compacta, conexa, com bordo $\partial N = \bigcup_{i=1}^k \partial U_i$ e ω/N define uma folheação sem singularidades \mathfrak{F} em N . Fixando-se uma métrica riemanniana \langle, \rangle em N o campo $X = \text{grad}(\omega)$ definido por $\langle X, v \rangle = \omega(v)$, é um campo sem singularidades transversal a \mathfrak{F} . Pelo Corolário 1 do teorema de estabilidade completa de Reeb, vem que $k = 2$, $N \approx S^{n-1} \times I$ e todas as folhas de \mathfrak{F} são difeomorfas a S^{n-1} . Temos então que $M = N \cup \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2$ é homeomorfo a S^n e todas as superfícies integrais de ω são difeomorfas a S^{n-1} .

§3. Singularidades de 1-formas analíticas

Nesta seção consideraremos uma 1-forma ω em \mathbb{R}^n , analítica e integrável em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e tal que $\omega_p = 0$ para algum $p \in U$. Tomando-se a translação $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow x + p \in \mathbb{R}^n$, podemos supor que $p = 0$. Como ω é analítico e $\omega_0 = 0$, podemos escrever

$w = \sum_{j=1}^{\infty} w_j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n w_j^i dx_i$ numa vizinhança $\tilde{U} \subset U$, onde

as funções $w_j^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são polinômios homogêneos de grau j . $\sum_{j=1}^{\infty} w_j$ é portanto a série de Taylor que representa w numa vizinhança de 0 .

Como já vimos $w_1 \wedge dw_1 = 0$ e se $w_1 = \sum_{i=1}^n a_i dx_i = \sum_{i,j=1}^n a_j^i x_j dx_i$, então a matriz $A = (a_j^i)_{1 \leq i \leq j \leq n}$ é simétrica ou tem posto ≤ 2 . Nesta seção, como na anterior suporemos que A é simétrica e tem posto n . Neste caso $w_1 = df$, onde $f\{x_1, \dots, x_n\} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_j^i x_i x_j$. Diremos que 0 é uma singularidade não degenerada de w . O nosso objetivo é provar o seguinte resultado:

3.1 - TEOREMA (Reeb [24]) - Seja w uma 1-forma analítica e integrável definida numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Suponha que $w_0 = 0$ e que w tem parte linear não degenerada $w_1 = df$. Então existem um difeomorfismo analítico h de uma vizinhança U de 0 sobre uma vizinhança V de 0 e uma função analítica $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $g(0) = 1$, $Dh(0)$ é a identidade e $h^*(w) = gdf$.

O Teorema 3.1 é corolário do seguinte:

3.2 - TEOREMA - Seja ω uma 1-forma analítica e integrável definida numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Suponha que $\omega_0 = 0$ e que ω tem parte linear não degenerada $\omega_1 = df$. Então ω possui uma integral primeira analítica, definida numa vizinhança da origem e não degenerada.

Na demonstração do Teorema 3.2, "complexificaremos" a forma ω , obtendo uma forma holomorfa em \mathbb{C}^n . Antes de demonstrarmos este teorema, teceremos alguns comentários sobre formas holomorfas integráveis em \mathbb{C}^n .

Denotaremos um ponto $z \in \mathbb{C}^n$ por

$z = (z_1, \dots, z_n)$, onde $z_j = x_j + iy_j$, $i = \sqrt{-1}$. Uma 1-forma holomorfa em um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ é uma aplicação holomorfa $\omega: U \rightarrow (\mathbb{C}^n)^*$, onde $(\mathbb{C}^n)^*$ é o dual de \mathbb{C}^n . Denotando por $\{dz_1, \dots, dz_n\}$ a base de $(\mathbb{C}^n)^*$, dual da base canônica de \mathbb{C}^n , podemos escrever $\omega = \sum_{j=1}^n \omega^j dz_j$, onde

para todo $j = 1, \dots, n$, $\omega^j: U \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa. Teremos então $\omega^j(z) = u^j(x, y) + iv^j(x, y)$, onde $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}^n$, logo $\omega = \alpha + i\beta$, onde $\alpha = \sum_{j=1}^n (u^j dx_j - v^j dy_j)$ e $\beta = \sum_{j=1}^n (u^j dy_j + v^j dx_j)$.

Suponhamos agora que ω não se anula em U .

Neste caso a equação $\omega = 0$ define um campo de planos de

codimensão complexa 1, isto é, de codimensão real 2. Diremos que w é integrável em U se o campo de planos definido por $w = 0$ é integrável.

3.3 - PROPOSIÇÃO - w é integrável se e somente se $w \wedge dw = 0$.

Demonstração: Observemos inicialmente que a equação $w=0$ em \mathbb{C}^n é equivalente às equações $\alpha = \beta = 0$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Suponhamos que $w \wedge dw = 0$. Neste caso $0 = (\alpha + i\beta) \wedge (d\alpha + id\beta) = (\alpha \wedge d\alpha - \beta \wedge d\beta) + i(\alpha \wedge d\beta + \beta \wedge d\alpha)$, ou seja $\alpha \wedge d\alpha = \beta \wedge d\beta$. Multiplicando-se ambos os membros da última equação por α , obtemos $\alpha \wedge \alpha \wedge d\alpha = \alpha \wedge \beta \wedge d\beta = 0$. Analogamente $\alpha \wedge \beta \wedge d\alpha = 0$, logo o sistema definido por $\alpha = \beta = 0$ é integrável, pelo teorema de Frobenius.

Suponhamos agora que o sistema $w = 0$ é integrável. Observemos que se $g: V \subset U \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica e não nula, então o sistema $g^*w = 0$ é equivalente ao sistema $w = 0$. Dado $z_0 \in U$, como $w_{z_0} \neq 0$, podemos supor que w^1 não se anula em uma vizinhança V de z_0 e portanto tomando-se $\tilde{w} = \frac{1}{w^1} w$, teremos $\tilde{w} = dz_1 + \sum_{j=2}^n \tilde{w}_j dz_j = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}$, onde $\tilde{\alpha} = dx_1 + \sum_{j=2}^n (\tilde{u}_j dx_j - \tilde{v}_j dy_j)$ e

$$\tilde{\beta} = dy_1 + \sum_{j=2}^n (\tilde{u}_j dx_j + \tilde{v}_j dy_j).$$

Se $e_1 = \partial/\partial x_1$ e $f_1 = \partial/\partial y_1$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= i_{e_1} (\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\alpha}) = i_{e_1} (\tilde{\alpha}) \wedge \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\alpha} - i_{e_1} (\tilde{\beta}) \tilde{\alpha} \wedge d\tilde{\alpha} + \\ &+ \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge i_{e_1} (d\tilde{\alpha}) = \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge L_{e_1} (\tilde{\alpha}), \text{ já que} \\ i_{e_1} (\tilde{\alpha}) &= 1, \quad i_{e_1} (\tilde{\beta}) = 0 \text{ e } L_{e_1} (\tilde{\alpha}) = i_{e_1} (d\tilde{\alpha}) + d(i_{e_1} \tilde{\alpha}) = \\ &= i_{e_1} (d\tilde{\alpha}). \text{ Analogamente } 0 = i_{f_1} (\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta}) = -\tilde{\alpha} \wedge d\tilde{\beta} + \\ &+ \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge L_{f_1} (\tilde{\beta}). \end{aligned}$$

Ora, como as funções $w^j = u^j + iv^j$ são holomorfas, temos pelas equações de Cauchy-Rieman que:

$$\begin{aligned} L_{e_1} (\tilde{\alpha}) &= \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_1} dx_j - \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_1} dy_j \right) = \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_1} dx_j + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_1} dy_j \right) = \\ &= L_{f_1} (\tilde{\beta}) \text{ e portanto } \tilde{\alpha} \wedge d\tilde{\beta} + \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Usando as identidades $i_{e_1} (\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta}) = i_{f_1} (\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\alpha}) = 0$, podemos concluir analogamente que $\tilde{\alpha} \wedge d\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta} = 0$. Logo $\tilde{w} \wedge d\tilde{w} = (\tilde{\alpha} \wedge d\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\beta}) + i(\tilde{\alpha} \wedge d\tilde{\beta} + \tilde{\beta} \wedge d\tilde{\alpha}) = 0$. Temos então $w \wedge dw = (w_1 w) \wedge d(w_1 w) = 0$, como queríamos.

Observação 1 - Observe que na demonstração acima usamos apenas que w é holomorfa na variável z_1 .

Podemos concluir daí que a proposição vale na seguinte si-

tuação um pouco mais geral: Sejam M uma variedade real e α, β duas 1-formas de classe C^r ($r \geq 1$) em $\mathbb{C} \times M$, considerada como variedade real. O campo de planos definido por $\alpha = \beta = 0$ é equivalente ao campo de planos definido por $w = \alpha + i\beta = 0$, onde w é agora uma 1-forma a valores complexos.

Suponhamos que w é holomorfa na variável $z \in \mathbb{C}$. Então o sistema $\alpha = \beta = 0$ é integrável se e somente se $w \wedge dw = (\alpha \wedge d\alpha - \beta \wedge d\beta) + i(\alpha \wedge d\beta + \beta \wedge d\alpha) = 0$. Diremos que uma 1-forma $w = \alpha + i\beta$ como acima é holomorfa na 1ª variável.

Um resultado importante na teoria de 1-forma holomorfas é o seguinte:

3.4 - TEOREMA DE FROBENIUS HOLOMORFO - Seja w uma 1-forma holomorfa integrável em um aberto de \mathbb{C}^n , tal que $w_{p_0} \neq 0$. Então existe uma vizinhança U de p_0 e uma função holomorfa $f: V \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $df(p) \neq 0$ se $p \in U$ e para todo $z \in f(U)$, $f^{-1}(z)$ é uma superfície integral de w .

A demonstração do teorema acima é inteiramente análoga à do caso real, tomando-se um sistema involutivo de campos holomorfos $\{X^1, \dots, X^{n-1}\}$, linearmente indepen-

dentos e tangentes à distribuição definida por $\omega \equiv 0$. A variedade integral por um ponto p , pode ser parametrizada localmente por

$$(z_1, \dots, z_{n-1}) \longrightarrow X_{z_1}^1 \circ \dots \circ X_{z_{n-1}}^{n-1} (p)$$

onde $z_j = x_j + iy_j$, $|z_j| < \epsilon$ e $X_{z_j}^j$ é o fluxo holomorfo local definido por X^j .

Consideraremos a seguir o problema análogo para 1-formas complexas holomorfas na 1ª variável. Sejam M uma variedade compacta, conexa, analítica real e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Seja ω uma 1-forma analítica e integrável em uma vizinhança U de $0 \times M$ em $\mathbb{K} \times M$, tal que $\omega_p \neq 0$, para todo $p \in U$. Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ suporemos que $\omega = \alpha + i\beta$ é holomorfa na 1ª variável.

3.5 - TEOREMA (Reeb [24]). Sejam M e ω como acima.

Suponha que $\{0\} \times M \subset \mathbb{K} \times M$ é uma variedade integral de ω e que M tem o primeiro número de Betti nulo. Então existem uma vizinhança compacta V de M e uma função analítica $f: V \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $df(p) \neq 0$ em V , $f|_{0 \times M} \equiv 0$ e para todo $q \in f(V)$, $f^{-1}(q)$ define uma variedade integral de ω . Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f é holomorfa na 1ª variável.

Observe que no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ este teorema nos dá

uma demonstração do teorema de estabilidade local de Reeb.

Demonstração: Denotaremos um ponto em $\mathbb{K} \times M$ por (ρ, x) ,

onde $\rho \in \mathbb{K}$, $x \in M$ e suporemos de uma vez por todas que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. A idéia da demonstração consiste em tentarmos uma solução da forma $f(\rho, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j g_j(x)$, onde $g_j: M \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica real, usando o desenvolvimento em série de ω em termos de ρ e a equação $\ast \omega \wedge d\omega = 0$.

Podemos escrever $\omega = \beta d\rho + \eta$, onde $\beta: U \rightarrow \mathbb{C}$ é analítico real e holomorfa na 1ª variável e $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ é holomorfa na 1ª variável e $i \frac{\partial}{\partial x}(\eta) = i \frac{\partial}{\partial y}(\eta) = 0$, onde $\rho = x + iy$, $\frac{\partial}{\partial x} = (1, 0, 0, \dots, 0) \in CxTM$ e $\frac{\partial}{\partial y} = (0, 1, 0, \dots, 0) \in CxTM$. Como $\{0\} \times M$ é variedade integral de ω e $\omega_p \neq 0$ para todo $p \in \{0\} \times M$, a função β não se anula numa vizinhança de $0 \times M$. Podemos supor então, sem perda de generalidade que $\omega = d\rho + \alpha$ (onde $\alpha = \frac{1}{\beta} \eta$). Como α é holomorfa na 1ª variável podemos escrever $\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \tilde{\alpha}_j$, onde $\tilde{\alpha}_j = u_j + iv_j$, u_j e v_j são formas analíticas reais em M e a série converge absolutamente para $|\rho| \leq \delta$, uniformemente em x .

Afirmção 1 - Podemos supor que $\tilde{\alpha}_1 = 0$.

De fato, da equação $\omega \wedge d\omega = 0$, tiramos,

$$\begin{aligned}
 0 &\equiv (d\rho + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \tilde{\alpha}_j) \wedge \sum_{j=1}^{\infty} (j\rho^{j-1} d\rho \wedge \tilde{\alpha}_j + \rho^j d\tilde{\alpha}_j) = \\
 &= \rho d\rho \wedge d\tilde{\alpha}_1 + \text{termos de ordem } \geq 2 \text{ em } \rho. \text{ Teremos então} \\
 d\rho \wedge d\tilde{\alpha}_1 &= 0 \text{ e como } \tilde{\alpha}_1 \text{ só depende das variáveis em } M, \\
 d\tilde{\alpha}_1 &= 0. \text{ Como o 1º número de Betti de } M \text{ é nulo, } \tilde{\alpha}_1 = dg, \\
 &\text{onde } g: M \rightarrow \mathbb{C} \text{ é analítica real. Consideremos a mudança} \\
 &\text{de variáveis } \varphi: \mathbb{C} \times M \rightarrow \mathbb{C} \times M, \text{ dada por } \varphi(\rho, x) = \\
 &= (e^{-g(x)}\rho, x). \text{ É claro que } \varphi^{-1}(0 \times M) = \{0\} \times M \text{ e que} \\
 \varphi^*(w) &= e^{-g(x)} d\rho + \sum_{j=2}^{\infty} \rho^j (e^{-jg(x)} \tilde{\alpha}_j).
 \end{aligned}$$

Dividindo-se $\varphi^*(w)$ por $e^{-g(x)}$, obtemos $\bar{w} = e^{g(x)}\varphi^*(w) = d\rho + \sum_{j=2}^{\infty} \rho^j \bar{\alpha}_j$, o que prova a afirmação 1.

Podemos supor então que

$$w = d\rho + \rho^2 \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \alpha_j$$

Tentemos agora uma integral primeira f , da forma

$$f(\rho, x) = \rho \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j f_j = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j+1} f_j$$

de onde tiramos

$$\begin{aligned}
 df &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \rho^k f_k \right) d\rho + \rho \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k df_k = \\
 &= \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \rho \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k df_k
 \end{aligned}$$

Impondo a condição $df \wedge w = 0$ que é equivalente a

$\frac{\partial f}{\partial \rho} w = df$, obtemos a equação:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \rho \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k df_k = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \rho \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(\sum_{k=1}^n kf_{k-1} \alpha_{n-k} \right)$$

A solução formal do problema é então equivalente à existência de funções analíticas $f_n: M \rightarrow \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, satisfazendo à equações (*)

$$df_n = \sum_{k=1}^n kf_{k-1} \alpha_{n-k}, \quad n \geq 1 \quad \text{e}$$

$$df_0 = 0. \quad \text{Fixemos } f_0 = 1.$$

Suponha por indução que determinamos funções f_j satisfazendo (*) para $0 \leq j \leq n-1$. Como M tem o primeiro número de Betti nulo, basta mostrarmos que

$$d \left(\sum_{k=1}^n kf_{k-1} \alpha_{n-k} \right) \equiv 0$$

Diferenciando a equação acima, obtemos:

$$(1) \quad d \left(\sum_{k=1}^n kf_{k-1} \alpha_{n-k} \right) = \sum_{k=1}^n k df_{k-1} \wedge \alpha_{n-k} + \sum_{k=1}^n kf_{k-1} d\alpha_{n-k}$$

Usando a hipótese de indução e que $df_0 = 1$, obtemos

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n kdf_{k-1} \wedge \alpha_{n-k} = \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} jkf_{j-1} \alpha_{k-j-1} \wedge \alpha_{n-k}$$

Por outro lado, da relação $w \wedge dw = 0$, obtemos:

$$0 = w \wedge dw = \rho^2 [d\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (d\alpha_n - \sum_{\substack{j+k=n-1 \\ j, k \geq 0}} (k+2) \alpha_j \wedge \alpha_k)] \wedge d\rho +$$

+ termos que não envolvem $d\rho$, de onde tiramos:

$$d\alpha_0 = 0 \text{ e } d\alpha_n = \sum_{\substack{j+k=n-1 \\ j, k \geq 0}} (k+2) \alpha_j \wedge \alpha_k, \text{ para } n \geq 1.$$

Usando-se que $\sum_{\substack{j+k=n-1 \\ j, k \geq 0}} \alpha_j \wedge \alpha_k = 0$, podemos escrever:

$$d\alpha_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+2+\zeta) \alpha_{n-k-1} \wedge \alpha_k, \text{ onde } \zeta \text{ é fixo}$$

Substituindo esta expressão na segunda parcela do segundo membro de (1), obtemos:

(3)

$$\sum_{k=1}^n k f_{k-1} d\alpha_{n-k} = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-r-1} (s+2+\zeta) r f_{r-1} \alpha_{n-r-s-1} \wedge \alpha_s =$$

$$\sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-r-1} (s-n)r f_{r-1} \alpha_{n-r-s-1} \wedge \alpha_s, \text{ tomando-se } \zeta = -n-2.$$

Basta agora observar que para cada termo de (2) da forma $j k f_{j-1} \alpha_{k-j-1} \wedge \alpha_{n-k}$, obtemos um único termo em (3) da forma $j k f_{j-1} \alpha_{n-k} \wedge \alpha_{k-j-1}$, bastando para isto fazer $r = j$ e $s = n-k$.

Falta mostrarmos que a série $\rho \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n f_n < \delta$ converge absolutamente numa região do tipo $\{(\rho, x) \mid |\rho| < \delta\}$. Observe que as funções f_n estão definidas a menos de constantes e portanto fixemos f_n , impondo as condições

$f_n(x_0) = 0$, $n \geq 1$ e $f_0 = 1$, onde $x_0 \in M$. O sistema $w = \alpha + i\beta = 0$ é integrável e portanto, dado $x_0 \in M$, se V_{x_0} é vizinhança trivializada de $O \times x_0$, existe uma única função analítica real $g_{x_0} : V_{x_0} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $dg_{x_0} \wedge w = 0$ e $g_{x_0}(\rho, x_0) = \rho$ para todo $(\rho, x_0) \in V_{x_0}$. Como a série $\rho \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j f_j(x)$ é a única que satisfaz formalmente à equação $df \wedge w = 0$ com as condições $f_j(x_0) = 0$ para $j \geq 1$, $f_0 = 1$, concluímos que a série de potências de g_{x_0} é $\rho \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j f_j(x)$, logo esta série converge absolutamente em V_{x_0} , para uma função analítica real, holomorfa em ρ . Seja $U_{x_0} = V_{x_0} \cap \cap (O \times M)$ para todo $x_0 \in M$ e U_{x_1}, \dots, U_{x_k} uma cobertura finita de M . Seja $V \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_k}$ uma vizinhança aberta de $O \times M$. É fácil verificar agora que a série $f(\rho, x) = \rho \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j f_j(x)$ converge absolutamente em V para uma função analítica real e holomorfa em ρ .

O teorema 3.2 é corolário do seguinte:

3.6 - TEOREMA (Reeb [24]) - Seja w uma 1-forma holomorfa integrável em \mathbb{C}^n tal que $w_0 = 0$ e a parte linear de w em 0 é

$w_1 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_i dz_j$, onde a matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ é simétrica e tem posto n . Então w admite uma integral primeira holomorfa $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ (V vizinhança de 0), tal que $f(0) = 0$, $df(0) = 0$ e $\partial^2 f / \partial z_i \partial z_j (0) = a_{ij}$.

Demonstração - Da álgebra linear sabemos que existem uma matriz complexa P , $n \times n$, tal que $P^t A P$ é a identidade $n \times n$. Fazendo-se a mudança de variáveis linear $z = Px$ obtemos $w^* = P^*(w) = \sum_{i=1}^n x_i dx_i +$ termos de ordem superior. Podemos então supor sem perda de generalidade que $w = \sum_{i=1}^n z_i dz_i + \sum_{j=2}^{\infty} w_j$, onde $w_j = \sum_{k=1}^n w_j^k(z) dz_k$, sendo $w_j^k(z)$ um polinômio homogêneo de grau j .

Consideremos agora a aplicação $\Psi: \mathbb{C} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida por $\Psi(\rho, x) = \rho x$, onde $\rho \in \mathbb{C}$ e $x = (x_1, \dots, x_n)$ com $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Temos $\Psi^*(w) = \rho d\rho + \sum_{j=2}^{\infty} \Psi^*(w_j)$, onde $\Psi^*(w_j) = \sum_{k=1}^n w_j^k(\rho x) d(\rho x_k) = \rho^j \left[\rho \sum_{k=1}^n w_j^k(x) dx_k + \left(\sum_{k=1}^n x_k w_j^k(x) \right) d\rho \right]$, teremos então

$$\Psi^*(w) = \rho \left[\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j h_j(x) \right) d\rho + \rho^2 \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \alpha_j \right]$$

onde $h_j(x) = \sum_{k=1}^n x_k w_{j+1}^k(x)$ é um polinômio homogêneo de grau $j+2$ e $\alpha_j = \sum_{k=1}^n w_{j+2}^k(x) dx_k$ tem os coeficientes homogêneos de grau $j+2$. Seja $\tilde{w} = \frac{1}{2} \Psi^*(w) =$

$$= (1 + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j h_j(x)) d\rho + \rho^2 \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \alpha_j \quad \text{e suponha que existe}$$

uma função $f(\rho, x) = \sum_{j=2}^{\infty} \rho^j f_j(x)$ tal que:

(1) f é integral primeira de \tilde{w} numa vizinhança de $0 \times S^{n-1}$ em $C \times S^{n-1}$ e $f_2(x) = 1$ para todo $x \in S^{n-1}$.

(2) Existe uma função holomorfa $g: U \rightarrow \mathbb{C}$, onde U é vizinhança de 0 em \mathbb{C}^n , tal que $f(\rho, x) = g(\rho x) = g \circ \Psi(\rho, x)$.

Afirmção - Nas hipóteses acima g é uma integral primeira de w , satisfazendo $\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j}(0) = 0$ se $i \neq j$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial z_i^2}(0) = 2$.

Demonstração: Como $\tilde{w} = \frac{1}{\rho} \Psi^*(w)$, f é integral primeira de $\Psi^*(w)$, logo $\Psi^*(dg \wedge w) = d(\Psi^*g) \wedge \Psi^*(w) = df \wedge \Psi^*(w) = 0$. Seja $E = \Psi(C \times S^{n-1}) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}^n\}$. Como $\Psi^*(dg \wedge w) = 0$, concluímos que $dg \wedge w = 0$ em E . Como $E \ni \mathbb{R}^n$ e $dg \wedge w$ é holomorfa, segue-se imediatamente que $dg \wedge w = 0$, o que prova a afirmação.

Pelo Teorema 3.5, existe uma função $\bar{f}(\rho, x) =$

$= \rho^2 \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \bar{f}_j(x)$, tal que \bar{f} é integral primeira de $\tilde{\omega}$ uma vizinhança de OxS^{n-1} . A fim de obtermos uma função f satisfazendo (1) e (2) acima é suficiente mostrarmos que é possível obter uma \bar{f} satisfazendo:

(3) $\bar{f}_0(x) = 1$ se $x \in S^{n-1}$.

(4) Para todo $j = 0, 1, 2, \dots$, \bar{f}_j é a restrição a S^{n-1} , de um polinômio homogêneo de grau $j+2$ em \mathbb{R}^n , f_j , sendo $f_0(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

De fato suponha que (3) e (4) estão demonstrados. Defina $g(z) = \sum_{j=2}^{\infty} f_{j-2}(z)$. Como a série $\rho^2 \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \bar{f}_j(x)$ converge absolutamente numa vizinhança de OxS^{n-1} , é imediato que a série $\sum_{j=2}^{\infty} f_{j-2}(z)$ converge numa vizinhança de 0 em \mathbb{C}^n . Teremos então $g(\rho x) = \sum_{j=2}^{\infty} f_{j-2}(\rho x) = \sum_{j=2}^{\infty} \rho^j \bar{f}_{j-2}(x) = \bar{f}(\rho, x)$ para $x \in S^{n-1}$ e $\rho \in S^{n-1}$ e $\rho \in \mathbb{C}$. Basta então mostrarmos a existência de \bar{f} satisfazendo (3) e (4).

A equação $d\bar{f} \wedge \tilde{\omega} = 0$ é equivalente à equação $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \rho} \tilde{\omega} = (1 + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j h_j(x)) d\bar{f}$ a qual é equivalente às seguintes equações de recorrência

$$(5) \quad \begin{cases} d\bar{f}_m = \sum_{j=1}^n [(j+1)\bar{f}_{j-1} \alpha_{m-j} - h_j d\bar{f}_{m-j}], & m \geq 1 \\ d\bar{f}_0 = 0 \end{cases}$$

Pelo Teorema 3.5 sabemos que as equações (5) têm solução, mas queremos mostrar que as \bar{f}_m podem ser determinadas satisfazendo (3) e (4). Suponha por indução que determinarmos $\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_{m-1}$ satisfazendo (3) e (4). Consideremos a 1-forma em \mathbb{R}^n , $\beta = \sum_{j=1}^n [(j+1) f_{j-1} \alpha_{m-j} - h_j df_{m-j}]$, onde f_j é um polinômio homogêneo em \mathbb{R}^n de grau $j+2$ que estende \bar{f}_j (para $j = 0, \dots, n-1$),

$\alpha_j = \sum_{k=1}^n \omega_{j+2}^k(x) dx_k$ considerada como 1-forma em \mathbb{R}^n (para $j = 0, \dots, n-1$) e $h_j(x) = \sum_{k=1}^n x_k \omega_{j+1}^k(x)$, considerando como função de \mathbb{R}^n em $\mathbb{C}(j = 1, \dots, n)$. Escrevamos

$\beta = \sum_{k=1}^n \beta_k(x) dx_k$. Então β satisfaz às seguintes propriedades:

(6) Os coeficientes β_k são polinômios homogêneos de grau $m+3$ em \mathbb{R}^3 .

(7) $\sum_{k=1}^n x_k \beta_k(x) = 0$

(8) β/S^{n-1} é exata.

Que β/S^{n-1} é exata é claro. (6) é imediato, da hipótese de indução. Provemos (7). Temos

$$\sum_{k=1}^n x_k \beta_k(x) = \sum_{j=1}^n [(j+1) f_{j-1} \left(\sum_{k=1}^n x_k \omega_{m-j+2}^k(x) \right)] -$$

$$- \sum_{j=1}^n h_j \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_{m-j}}{\partial x_k} \cdot x_k \right) = \sum_{j=1}^n (j+1) f_{j-1} h_{m-j+1} -$$

$$- \sum_{j=1}^n h_j (m-j+2) f_{m-j} = 0. \quad \text{A igualdade } \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f_{m-j}}{\partial x_k} =$$

$= (m-j+2) f_{m-j}$, decorre do fato de que f_{m-j} é homogênea de grau $m-j+2$. Agora basta provarmos o seguinte:

LEMA - Seja β uma 1-forma em \mathbb{R}^n satisfazendo (6), (7) e (8). Então existe um polinômio f , homogêneo de grau $m+2$, tal que $df/S^{n-1} = \beta/S^{n-1}$.

Demonstração: Façamos $m+2 = k$. Suponhamos mostrada a existência de um polinômio h , homogêneo de grau $k+2$, tal que $dh/S_r^{n-1} = \beta/S_r^{n-1}$, onde $S_r^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2\}$.

Neste caso, se $\alpha = dh - \beta$, temos $\alpha/S_r^{n-1} = 0$ e portanto $\alpha = \lambda \sum_{i=1}^n x_i dx_i$, logo $dh = \beta + \lambda \sum_{i=1}^n x_i dx_i$.

Como $\sum_{i=1}^n \beta_i x_i = 0$, tiramos $\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} x_i = (k+2)h$,

já que h é homogênea de grau $k+2$. Vemos assim que

$\sum_{i=1}^n x_i^2 (dh - \beta) = (k+2)h \sum_{i=1}^n x_i dx_i$. Como os coeficientes de

dh e β são polinômios, concluímos que o polinômio

$\sum_{i=1}^n x_i^2$ divide h , logo $h = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) f$, onde f é um poli-

nômio homogêneo de grau k . Temos então $df/S^{n-1} = \beta/S^{n-1}$, como queríamos.

Basta mostrar agora que existe um polinômio h , homogêneo de grau $k+2$, tal que $dh/S_r^{n-1} = \beta/S_r^{n-1}$.

Escreveremos $x \in \mathbb{R}^n$ como $x = (\bar{x}, y)$, onde $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $y \in \mathbb{R}$. Com esta notação podemos escrever:

$$(9) \quad \beta = \sum_{j=0}^{k+1} y^{k+1-j} \beta^j + \sum_{j=0}^{k+1} y^{k+1-j} b_j dy,$$

onde β^j é uma 1-forma em \mathbb{R}^{n-1} cujos coeficientes são polinômios homogêneos de grau j e b_j é um polinômio homogêneo de grau j em \mathbb{R}^{n-1} . Tentemos uma solução

$$(10) \quad h(x) = h(\bar{x}, y) = \sum_{j=0}^{k+2} y^{k+2-j} h_j(\bar{x})$$

onde $h_j(\bar{x})$ é um polinômio homogêneo de grau j em \mathbb{R}^{n-1} .

A equação $dh/S_r^{n-1} = \beta/S_r^{n-1}$ é equivalente às seguintes:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} dh_0 = 0 \\ dh_1 = \beta_0 \\ dh_{j+2} = [(k+2-j) h_j - b_j] \sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i + \beta^{j+1} \\ \text{para } j = 0, \dots, k \\ h_{k+1} = b_{k+1} \end{array} \right.$$

Estas equações podem ser deduzidas, tomando-se

$dy = -\frac{1}{y} \sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i$ em (9) e (10) e igualando-se os termos resultantes de mesmo grau em y (Justifique este procedimento).

Esqueçamos por um momento a equação $h_{k+1} = b_{k+1}$.

Podemos tomar $h_0 = \text{constante}$ e uma vez que β^0 é exata,

$$h_1(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i^0 x_i. \text{ Suponha, por indução que determinamos}$$

$h_0, h_1, \dots, h_{j+1}, j \leq k$. Temos

$$(12) \quad d\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i + \beta^{j+1}\right] = \\ = [(k+2-j)dh_j - db_j] \wedge \sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i + d\beta^{j+1}.$$

Tomando-se a derivada exterior da expressão (9) e usando o fato de que $d\beta/S_r^{n-1} = 0$, tiramos

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\beta^0 = 0, \quad d\beta^1 = 0 \\ d\beta^{j+1} = [db_j - (k+2-j)\beta^{j-1}] \wedge \sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i \\ \quad \text{para } j = 1, \dots, k \\ [db_{k+1} - \beta^k] \wedge \sum_{i=0}^{n-1} x_i dx_i = 0 \end{array} \right.$$

Estas equações podem ser obtidas como anterior-

mente, fazendo-se $dy = -\frac{1}{y} \sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i$ em $d\beta$ é igualando a zero os coeficientes das diferentes potências de y .

Substituindo-se (13) em (12), obtemos

$$\begin{aligned}
 (12) &= [(k+2-j) dh_j - db_j] \wedge \sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i + \\
 &+ [db_j - (k+2-j) \beta^{j-1}] \wedge \sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i = \\
 &= (k+2-j)[dh_j - \beta^{j-1}] \wedge \sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i = 0,
 \end{aligned}$$

já que dh_j satisfaz (11), por indução. Tendo-se (12)=0, podemos tomar

$$h_{j+2}(\bar{x}) = \frac{1}{j+2} \{ [(k+2-j)h_j - b_j] \sum_{j=1}^{n-1} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i^{j+1}(\bar{x}) \cdot x_i \}$$

que é um polinômio de grau $j+2$ e satisfaz (11).

Vamos agora mostrar que podemos determinar

h_0, \dots, h_{k+2} de tal forma que $h_{k+1} = b_{k+1}$. Com h determinada da maneira acima é fácil verificar que

$$(14) \quad \beta - dh = g \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i + y dy \right) + (b_{k+1} - h_{k+1}) dy$$

onde g é um polinômio homogêneo de grau k em \mathbb{R}^n . Usando-se que $(\beta - dh)/S_r^{n-1}$ é exata, teremos que

$$\begin{aligned}
 0 &= (db_{k+1} - dh_{k+1}) \wedge dy / S_r^{n-1} = \\
 &= \frac{1}{y} (dh_{k+1} - db_{k+1}) \wedge \sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i,
 \end{aligned}$$

logo $(dh_{k+1} - db_{k+1}) \wedge \sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i = 0$. Se $\varphi = h_{k+1} - b_{k+1}$,

tiramos da equação anterior que $\varphi(\bar{x}) = F\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)$, onde

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Como φ é um polinômio homogêneo de grau $k+1$,

$\varphi(\bar{x}) = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{\frac{k+1}{2}}$, onde λ é uma constante. Se $k=2$ e,

é par, é imediato que $\lambda = 0$ como queríamos, já que

$\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{\frac{2\ell+1}{2}}$ não é um polinômio, para $n \geq 3$. Se $k = 2\ell - 1$,

é ímpar, teremos $\varphi(\bar{x}) = h_{2\ell}(\bar{x}) - b_{2\ell}(\bar{x}) = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^\ell$.

Neste caso tomando-se $\tilde{h}(x) = \tilde{h}(\bar{x}, y) = h(\bar{x}, y) -$

$-\lambda y \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + y^2\right)^\ell$, é fácil ver que \tilde{h} satisfaz $\beta = d\tilde{h} +$

$+ g\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i dx_i + y dy\right)$, como queríamos.

Observe na demonstração acima que para k ímpar, a solução do sistema (11) é única e para k par ela fica definida pelo valor da constante h_0 , ou seja, se h satisfaz (11) então $h + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + y^2\right)^{k/2}$ também satisfaz, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

3.7 - DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.2 - Seja w uma 1-forma analítica real integrá

vel com parte linear não degenerada $w_1 = df_2 =$

$= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i dx_j$. Escrevamos $w = \sum_{i=1}^{\infty} w_i$ onde esta série

converge absolutamente numa região $R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < \delta\}$. Seja \tilde{w}

a 1-forma complexificada de ω , definida por $\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\omega}_i$, onde $\tilde{\omega}_i$ é definida a partir de ω_i substituindo-se a variável em \mathbb{R}^n $x = (x_1, \dots, x_n)$ pela variável $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. É imediato que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\omega}_i$ converge absolutamente na região $\tilde{V} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| < \delta\}$ e que $\tilde{\omega}$ é integrável em \tilde{V} . Pelo teorema 2.6, $\tilde{\omega}$ admite uma integral primeira holomorfa $\tilde{f}: V \subset \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}$, onde V é um aberto contendo o 0 em \mathbb{C}^n e a parte linear de $d\tilde{f}$ em 0 é $\tilde{\omega}_1$. Sejam $\tilde{\omega} = \alpha + i\beta$ e $\tilde{f} = u + iv$, onde $\alpha/\mathbb{R}^n = \omega$, $\beta/\mathbb{R}^n = 0$ e $u, v: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Como $d\tilde{f} \wedge \tilde{\omega} = 0$, temos $du \wedge \alpha - dv \wedge \beta = 0$. Restringindo a última igualdade a \mathbb{R}^n , obtemos $d(u/\mathbb{R}^n) \wedge \omega = 0$. É fácil verificar que $u/\mathbb{R}^n(x) = u(x, 0)$ é uma integral primeira de ω satisfazendo $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(0) = a_{ij}$.

3.8 - DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.1, A PARTIR DO TEOREMA 3.2

Precisamos de um lema

LEMA - Sejam $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ funções analíticas, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança de 0, $u(0) = v(0) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x_1}(0) \neq 0$. Seja $A_n = \{x \in U \mid u(x) = 0\}$ e suponha que $v/A_n = 0$. Então existem uma vizinhança $V \subset U$ de 0 e uma função analítica $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $v = g \cdot u$ e $g(0) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(0)$.

Demonstração: Pelo teorema das funções implícitas, existem coordenadas numa vizinhança V da origem tais que $u(x) = x_1$ e $A_U \cap V = \{x | x_1 = 0\}$. Temos

$$\begin{aligned} \text{portanto, } v(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (v(tx_1, x_2, \dots, x_n)) dt = \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x_1} (tx_1, x_2, \dots, x_n) dt \right) x_1 = g(x) u(x), \text{ onde } g(x) = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x_1} (tx_1, x_2, \dots, x_n) dt, \text{ logo } g(0) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(0). \end{aligned}$$

Demonstraremos agora o teorema 3.1 .

Seja \bar{f} uma integral primeira analítica e não degenerada em 0 de ω . Temos então que $d\bar{f} \wedge \omega = 0$ e portanto $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} \omega = \omega^1 d\bar{f}$. Devemos mostrar que ω^1 é divisível por $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}$ numa vizinhança da origem, isto é, que existe uma função analítica g tal que $\omega^1 = g \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}$. Sejam $A_i = \{x \in \mathbb{R}^n | \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(x) = 0\}$. Usando-se o fato de que \bar{f} é não degenerada na origem, existe uma vizinhança V de 0 , tal que $V \cap \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) = \{0\}$. Ora, se $x \in A_1 \cap V - \{0\}$, existe $j \neq 1$ tal que $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j}(x) \neq 0$ e por outro lado

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} \omega^j = \omega^1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j}, \text{ logo } \omega^1(x) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j}(x) = 0 \text{ o que implica que } \omega^1(x) = 0. \text{ Concluímos que } \omega^1/A_1 \cap V \equiv 0, \text{ logo pelo}$$

Lema, existe g analítica tal que $\omega^1 = g \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}$ e portanto $\omega = g d\bar{f}$.

REFERÊNCIAS

- [1] P. Bohl - Über die hinsichtlich der unabhängigen und abhängigen Variabeln periodische Differentialgleichung erster Ordnung, Acta Math 40 (1916) pp. 321-336.
- [2] C. Camacho - Poincaré-Bendixson Theorem for \mathbb{R}^2 -actions, Bol. da S.B.M., vol. 5 # 1 (1974).
- [3] A. Denjoy - Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, J.Math.Pures Appl. 11 (1932), pp. 333-375.
- [4] A.H. Durfee - Foliations of odd-dimensional spheres, Ann. of Math. 96 (1972), pp. 407-411.
- [5] C. Ehresman - Les Connexions Infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colóquio de Topologia de Bruxelas (1950).
- [6] M. Greenberg - Lectures on Algebraic Topology, N.Y., W.A. Benjamin, (1967).

- [7] A. Haefliger - Variétés Feuilletés, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 16 (1962), pp. 367-397.
- [8] G. Hector - Quelques Exemples de Feuilletages Espèces Rares, Ann. de L'Institut Fourier, tomo XXVI, fasc. 1 (1976), pp. 238-264.
- [9] G. Hector - Subexponential Leaves, Publications internes de l'U.E.R. de Math. Pures et Appl. # 78, Univ. des Sciences et Techniques de Lille I (preprint).
- [10] H. Kneser - Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen, Math. Ann. 91 (1924), pp. 135-154.
- [11] S. Lang - Analysis I, World Student Series Edition, Addison-Wesley Publ. Co., Inc. (1969).
- [12] H.B. Lawson - Codimension-one foliations of spheres, Ann. of Math. 94 (1971), pp. 494-503.
- [13] W.B.R. Lickorish - A foliation for 3-manifolds, Ann. of Math. 82 (1965), pp. 414-420.
- [14] E.L. Lima - Variedades Diferenciáveis, Monografias de Matemática # 15, IMPA (1973).
- [15] E.L. Lima - Análise no Espaço R^n , Ed. Universidade de Brasília e Ed. Edgar Blücher LTDA (1970).

- [16] E.L. Lima - Introdução à Topologia Diferencial, Notas de Matemática # 23, IMPA (1961).
- [17] E.L. Lima - Commuting vector fields on S^3 , Ann. of Math. 81 (1965), pp- 70-81.
- [18] E.L. Lima - Grupo Fundamental e Espaços de recobrimiento, 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (1977).
- [19] J. Milnor - Morse Theory, Ann. of Math. Studies # 51, Princeton University Press (1963).
- [20] S.P. Novikov - Topology of Foliations, A.M.S. Translation (1967), pp. 268-304.
- [21] M.M. Peixoto - Teoria Geométrica das Equações Diferenciais, 7º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (1969).
- [22] L.S. Pontryagin - Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley Publ. Co., Inc. (1962).
- [23] G.Reeb - Estruturas Folheadas, Notas de Matemática # 12, IMPA (1958).
- [24] G. Reeb - Sur certains propriétés topologiques des variétés feuilletées, Actual Sci.Ind # 1183, Hermann, Paris, (1952).

- [25] H. Rosemberg, R. Roussarie e D. Weil - A classification of closed orientable 3-manifolds of rank two, *Ann. of Math.* 91 (1970), pp. 449-464.
- [26] R. Sacksteder - On the existence of exceptional leaves in foliations of codimension-one, *Ann. de L'Inst. Fourier*, 14 (1964), pp. 221-226.
- [27] R. Sacksteder - Foliations and pseudo-groups, *Amer. J. of Math.* 87 (1965), 79-102.
- [28] A.J. Schwartz - A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds, *Amer. J. Math.* 85 (1963), pp. 453-458.
- [29] P.A. Schweitzer - Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations, *Ann. of Math.* 100 (1974), pp. 386-400.
- [30] Spivak - *Calculus on Manifolds*, New York, W.A. Benjamin (1965).
- [31] N.E. Steenrod - *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press (1951).
- [32] I. Tamura - Every odd dimensional homotopy sphere has a foliation of codimension one, *Comm. Math. Helv.* 47 (1972), pp. 73-79.

- [33] W.Thurston - A local construction of foliations for three-manifolds, Proc. of Symp. in Pure Math. Stanford Univ., 1973, Diff. Geometry, A.M.S. vol. 27, pt. 1 (1975).
- [34] W. Thurston - Existence of codimension one foliations, a aparecer.
- [35] W. Thurston - A generalization of the Reeb Stability Theorem, Topology vol. 13 #4 (1974), pp. 347-352.
- [36] A.H. Wallace - Modifications and cobounding manifolds, Canad.J.Math. 12 (1960), pp. 503-528.
- [37] J. Wood - Foliations on 3-manifolds, Ann. of Math. (2) 89 (1969), pp. 336-358.

