

Aron Simis

INTRODUÇÃO

ÀS FUNÇÕES ALGEBRICAS

E FUNÇÕES ABELIANAS

Para Glória,

liberta, em seu primeiro quarto de século.

PREFÁCIO

"et je l'ai reconnu avec d'autant plus de plaisir que c'est sur un sujet dont je m'occupe depuis plus de quarante ans que j'ai été ainsi surpassé par M. Jacobi, mon émule".

Legendre, à Academia de Ciências de Paris, na Sessão de 5 de novembro de 1827.

A teoria das funções algébricas e das funções elípticas é uma das mais belas aquisições da Matemática, tanto na sua qualidade estética como na profundidade de seus métodos e resultados, que dificilmente pode ser exagerada.

Pode-se dizer, quase sem risco de imprecisão, que todos os bons matemáticos da segunda metade do Século XVIII e de todo o século seguinte se ocuparam, de uma maneira ou de outra, de problemas nesta área. Nomes como Euler, Gauss, Legendre, Abel, Jacobi, Lejeune-Dirichlet, Weierstrass, Cauchy, Appel, Cayley, Glaisher, Halphen, Hermite, Gudermann, Klein, Liouville, Riemann, Noether, Kronecker, Dedekind, Neville (não necessariamente por ordem cronológica ou de importância) testaram o melhor de seu repertório neste assunto.

O resultado é um acúmulo incomensurável de escritos, tabelas e teoremas, como poucas partes da Matemática clássica podem reclamar para si. Além disso, o progresso da teoria fêz-se acompanhar de eventos aos quais não faria mos total injustiça se assim os chamássemos: picantes. (Por exemplo, as queixas de Legendre a Jacobi sobre a pre tensa mania de Gauss em apossar-se da precedência na des coberta de certos teoremas).

Nada disso, contudo, deve servir de desculpa para os defeitos do texto que se segue. Na verdade, a recípro ca disto poderia ser verdadeira.

Ao escrever este trabalho, tentei, na medida do possível, dar uma visão intermediária entre a clássica e a moderna. Por em prática tal empresa é, por si só, tarefa monumental. A uma certa altura, sobrevem a crise e o equi líbrio entre a "charla de corredor" e o rigor matemático torna-se oscilante.

Grosso modo, os capítulos que se seguem repartem-se do seguinte modo (em conteúdo e estilo).

Capítulo I serve de motivação às funções algébricas. A ênfase é sobre as superfícies de Riemann em folhas, na concepção original de Riemann e seus seguidores, e nas chamadas funções multivalentes. A respeito dessas últimas, bem expressou-se Ahlfors: "There is thus a clear need for

a concept that emphasizes rather than circumvents multi-valuedness" (L. Ahlfors, Complex Analysis, Ch. 8).

Capítulo II ocupa-se da construção dos ramos de uma função algébrica. O principal instrumento é a chamada transformação quadrática local. A determinação explícita dos ramos é feita comodamente através do método do polígono de Newton, provavelmente insuperável em sua simplicidade e objetividade.

Capítulo III trata das funções algébricas do ponto de vista geométrico, isto é, em essência, a teoria dos revestimentos ramificados do plano \mathbb{C} ou da esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Uma seção deste capítulo é dedicada inteiramente ao problema da resolução das singularidades de uma curva plana. Aqui, o método da dilatação ("blowing-up") e as transformações quadráticas de Cremona constituem ponto alto.

Capítulo IV versa sobre funções elíticas e integrais abelianas. A importância desta parte não pode ser contestada. Basta lembrar Gauss, que assim se pronunciou a respeito do célebre teorema de Abel: "... a descoberta mais importante do que fez nas Matemáticas o século em que vivemos".

Uma palavra final sobre o texto: Procurei entre-

mear o mesmo com exercícios que não são difíceis, mas que podem ajudar o estudante em testar a sua compreensão do texto. A seleção séria de problemas nesta área é um trabalho "per se", o qual reservo para uma edição futura deste texto, caso haja interesse suficiente por parte do público matemático.

Chamo a atenção do leitor curioso para a bibliografia ao final do texto, onde procurei analisar brevemente as referências.

Meus agradecimentos são para Wilson Góes, sem o qual o aparecimento deste trabalho teria sido impossível.

Rio de Janeiro, inverno de 1975

Aron Simis

ÍNDICE

	pág.
CAPÍTULO I. Motivação	
I.1 - Uma função multivalente fundamental	1
I.2 - Um exemplo de função algébrica: \sqrt{z}	6
CAPÍTULO II. Funções Algébricas	
II.1 - Explicitação na vizinhança de um ponto não crítico	13
II.2 - Comportamento na vizinhança de um ponto crítico	25
II.3 - Descrição do método do polígono de Newton	52
CAPÍTULO III. Superfícies de Riemann Algébricas	
III.1 - Funções algébricas à luz dos revesti- mentos ramificados de \mathbb{C}	73
III.2 - Resolução das singularidades de uma curva algébrica; recobrimentos rami- ficados da esfera de Riemann	89
CAPÍTULO IV. Integrais Abelianas	
IV.1 - Integrais $\int R(t)dt$, $R(t)$ uma função racional sobre a esfera de Riemann	153
IV.2 - Integrais abelianas: classificação	157

	pág.
IV.3 - Funções elíticas e o problema da inversão em gênero 1	179
APÊNDICE	199
BIBLIOGRAFIA	207

I. MOTIVAÇÃO

I.1. Uma função multivalente fundamental.

Ao primeiro contacto com os rudimentos da Análise Complexa deparamo-nos com um fenómeno incômodo: a existência de funções multivalentes, isto é, "funções" que a cada ponto do domínio associam (geralmente) mais de um ponto do contradomínio. É claro que tais funções aparecem também em Análise Real, mas no caso complexo elas se revelam particularmente marcantes, envolvendo aspectos topológicos e analíticos delicados.

O estudo de tais funções deu origem a uma das teorias mais belas da Matemática, que persiste até hoje como uma área em permanente efervescência, a saber, a teoria das Superfícies de Riemann e das integrais abelianas.

Para refrescar idéias, comecemos por recordar a definição da função argumento. A idéia do argumento de um número complexo $z = x+iy$ advém da representação deste número complexo em coordenadas polares, $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$: o ângulo θ seria o argumento de z . É claro que esta "definição" peca pela falta de rigor e não resiste tão logo entusiásmo-nos em estabele

cer fórmulas para o argumento, tais como "o argumento de um produto é a soma dos argumentos dos fatores", etc.

Ao introduzirmos, eficaz e rigorosamente, a noção de argumento de um número complexo, esbarramos no fenômeno de função multivalente. Recordemos que a aplicação $y \mapsto e^{iy}$, de \mathbb{R} em \mathbb{C} , onde e^z denota a função exponencial complexa, é um homomorfismo do grupo aditivo de \mathbb{R} sobre o grupo multiplicativo U dos complexos z tais que $|z| = 1$. O núcleo deste homomorfismo é um subgrupo discreto maximal de \mathbb{R} , isto é, da forma $r\mathbb{Z} = \{rm \mid m \in \mathbb{Z}\}$ para um $r \in \mathbb{R}$ positivo (fixo). Ponhamos $r = 2\pi$ (isto é uma definição do número transcendente π !). Passando ao quociente, obtemos um isomorfismo $\varphi: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} U$ de grupos induzido pelo homomorfismo $y \mapsto e^{iy}$. Por definição, o argumento $\arg(z)$ de $z \in U$ é $\varphi^{-1}(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Se $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, é arbitrário, definimos $\arg(z) = \arg(z/|z|)$. (N.B. $\arg(0)$ não está definido.)

Desta maneira, o argumento de um número complexo não nulo é uma classe de equivalência de números reais, dois tais números diferindo por um múltiplo inteiro de 2π . Como função de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ em \mathbb{R} , o argumento é uma função multivalente. Não é possível tornar $\arg(z)$ uma função univalente de todo o plano \mathbb{C} menos $\{0\}$. Contudo, restringindo-nos a certas regiões $\Omega \subset \mathbb{C}$ podemos, mediante

escolha judiciosa de um representante da classe de equivalência $\arg(z)$, definir uma função contínua de $z \in \Omega$.

Exemplo: Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Se $z \in \Omega$, existe um e um só representante $y \in \mathbb{R}$ de $\arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tal que $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Isto determina uma função univalente $\operatorname{Arg}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Para mostrar que Arg é uma função contínua, basta verificar que a restrição $\Omega \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ de Arg é contínua (já que Arg é a composta $\Omega \xrightarrow{\psi} \Omega \cap U \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\psi(z) = z/|z|$ é obviamente contínua). Ora, tal restrição é a inversa de $y \mapsto e^{iy}$, com $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Por outro lado, $y \mapsto e^{iy}$ é uma aplicação contínua bijetiva de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (compacto!) sobre $U \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ (Hausdorff!), logo, é um homeomorfismo. A inversa é, portanto, contínua.

A função $\operatorname{Arg}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é um exemplo de determinação da função multivalente \arg . Mais geralmente, se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um aberto simplesmente conexo (isto é, conexo e tal que todo caminho fechado $\gamma \subset \Omega$ é homotópico a um ponto) não contendo 0, existe uma determinação $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de \arg (e uma única a menos de múltiplos de 2π).

Um tratado clássico de funções analíticas diria neste contexto: "se z percorre um caminho fechado que não contorna a origem 0 (por exemplo, o caminho C na

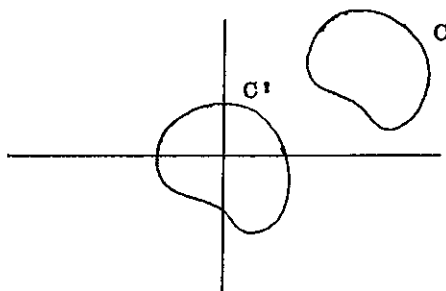


figura acima), o argumento de z parte de um certo valor θ e retorna ao mesmo valor; se z percorre um caminho fechado contornando 0 (C' na figura acima) um número inteiro m de vezes, o argumento de z parte de um certo valor θ e retorna a $\theta + 2\pi m$.

É claro que tais afirmações vagas não fazem sentido, a não ser para os exegetas clássicos ou num sentido puramente heurístico. Seu significado exato é dado pela noção de determinação introduzida acima (uma pequena lição: ler as fontes originais, mas com espírito crítico).

Exercício 1: Usando a definição de argumento, mostre que todo complexo z escreve-se na forma

$$z = |z|e^{i\theta}, \text{ onde } \theta \text{ é um representante de } \arg(z).$$

Exercício 2: Usando o Exercício 1, mostre que a solução mais geral da equação $e^t = z$ (em t) é da forma $\log|z| + i \arg(z)$. Isto determina uma função multivalente $\log: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Encontre determinações de

\log (isto é, funções contínuas $\text{Log}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Ω aberto conexo de \mathbb{C} , tais que $e^{\text{Log}(z)} = z$ para $z \in \Omega$) e mostre que duas determinações de \log num aberto conexo Ω diferem por um múltiplo inteiro de $2\pi i$.

Exercício 3: Mostre que uma determinação de \log num aberto conexo Ω admite derivada em todos os pontos de Ω . Calcule a função derivada em Ω . Vale a mesma situação para uma determinação de \arg ?

Exercício 4: Usando o Exercício 1, mostre que as soluções (em z) da equação $z^n = a$ (onde n é inteiro positivo e $a \in \mathbb{C}$ fixo) são da forma $z = |a|^{1/n} e^{i(\frac{\theta + 2\pi k}{n})}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, onde θ é um representante arbitrário de $\arg(a)$.

Exercício 5: Calcule explicitamente (isto é, na forma $a+bi$) as raízes cúbicas complexas da unidade. SUGESTÃO: mostre que a parte real e imaginária da função e^{iy} são as funções trigonométricas usuais $\cos y$ e $\sin y$, respectivamente. Use o Exercício 4.

I.2. Um exemplo de função algébrica: \sqrt{z} .

O Exercício 4 ensinou-nos como calcular as raízes n -ésimas de um número complexo dado (n inteiro, ≥ 1). Tal resultado pode ser obtido em tabelas trigonométricas para grandes valores de n . Quando, porém, surge a questão da "continuidade" das soluções ao variarem os dados, torna-se urgente por de lado as tabelas e clarear as idéias.

É natural, então, tentar definir as raízes de um número complexo como função deste complexo numa certa região do plano \mathbb{C} . Para isso, usamos as funções (multi-valentes) que já conhecemos. Dado um número complexo (fixo) α , definimos a função multivalente z^α em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pela fórmula:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}.$$

Interessar-nos-emos especialmente pelo caso em que α é um número racional. É fácil verificar que se $\alpha = n$ é um inteiro ≥ 1 , todas as determinações de z^α num aberto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ ($0 \notin \Omega$) coincidem, de maneira que neste caso recuperamos as funções univalentes $z \mapsto z^n$ usuais (analíticas em todo \mathbb{C}).

Se α é racional não inteiro, estamos diante de funções genuinamente multivalentes. Por simplicidade, su

ponhamos que $\alpha = \frac{1}{2}$.

Temos $z^{1/2} = e^{1/2 \log z} = e^{\log(|z|^{1/2})} e^{(i/2) \arg(z)}$
 $= |z|^{1/2} e^{(i/2) \arg(z)}$. Em termos de um representante
 $\theta \in \arg(z)$, obtemos então:

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi k)}, \quad k = 0, 1.$$

Assim, fixado um aberto $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ simplesmente conexo, $z^{1/2}$ admite exatamente duas determinações em Ω (1). Como as determinações são funções $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ contínuas, segue-se que uma determinação está dada tão logo se especifique seu valor num único complexo $z \in \Omega$. Por exemplo, se $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \begin{matrix} \operatorname{Im}(z) = 0 \\ \operatorname{Re}(z) \leq 0 \end{matrix}\}$ as duas determinações de $z^{1/2}$ são dadas desde que se especifique se $1^{1/2} = 1$ ou $1^{1/2} = -1$ (a posteriori vemos que as determinações são tais que, respectivamente, $k = 0$ e $k = 1$).

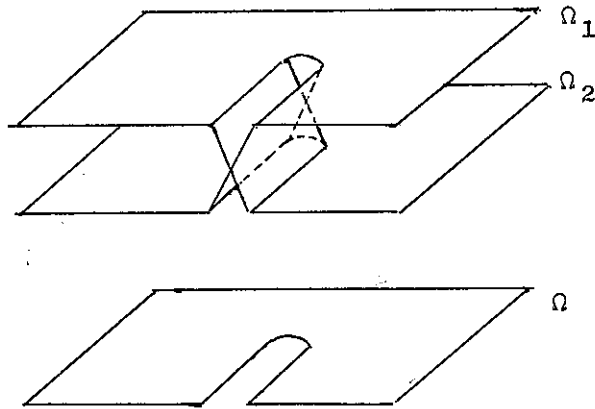
Equivalentemente, uma determinação de $z^{1/2}$ em $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \begin{matrix} \operatorname{Im}(z) = 0 \\ \operatorname{Re}(z) \leq 0 \end{matrix}\}$ é dada por $z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i \frac{\theta}{2}}$, onde θ é o único representante de $\arg(z)$ tal que $-\pi < \theta < \pi$. A outra determinação é $z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}$. (2)

(1) Isto não é uma demonstração, evidentemente. Mais adiante, daremos uma demonstração deste fato em toda a generalidade.

(2) Isto é, o representante de $\arg(z)$ escolhido é $\theta + 2\pi$, ou seja, o único representante de $\arg(z)$ compreendido entre π e 3π (exclusive).

Outra escolha qualquer do representante θ acarreta que $z^{1/2}$ recaia numa dessas determinações.

Chamemos de u_1, u_2 respectivamente as duas determinações de $z^{1/2}$ em $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} = 0\}$. Tomemos duas cópias Ω_1, Ω_2 de Ω (superpostas sobre Ω), onde



u_1 e u_2 , respectivamente, têm seu domínio. Mais precisamente, os pontos de Ω estão em correspondência biunívoca com os elementos do conjunto $\{(z, u_1(z)) \mid z \in \Omega\}$. Chamemos Ω_1 tal conjunto. Procedamos analogamente para u_2 , obtendo Ω_2 . Em outras palavras, Ω_1 (respectivamente, Ω_2) é o gráfico em \mathbb{C}^2 da função u_1 (resp., u_2) e a bijeção $\Omega_1 \xrightarrow{\pi_1} \Omega$ (resp. $\Omega_2 \xrightarrow{\pi_2} \Omega$) é dada pela projeção usual do gráfico da função sobre o domínio da função.

A idéia de Riemann consistia em fabricar por "co-

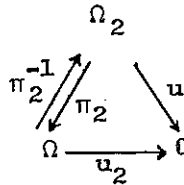
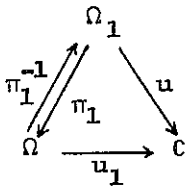
lagem" uma superfície S a partir de Ω_1 e Ω_2 e uma função (genuinamente univalente) $u: S \rightarrow \mathbb{C}$ tais que:

(i) Em S tem sentido dizer se uma função $S \rightarrow \mathbb{C}$ (em particular u) é ou não holomorfa.

(ii) u é efetivamente holomorfa em S .

(iii) Para todo $z \in \Omega$, $u_1(z) = u(z, u_1(z))$ e $u_2(z) = u(z, u_2(z))$. Em outras palavras, tem-se:

$$u_1 = u \circ \pi_1^{-1} \text{ e } u_2 = u \circ \pi_2^{-1}, \text{ isto é:}$$



(Grosseiramente, dizemos que a restrição de u a Ω_1 e Ω_2 coincide com u_1 e u_2 , respectivamente.)

Solucionado o problema acima, a função u globalmente definida em S é uma função univalente que "substitui" a função multivalente original definida implicitamente por $u^2 = z$. A superfície S , imaginada por Riemann, ficou sendo conhecida como superfície de Riemann, começam assim a teoria geométrica das funções algébricas.

Eis o procedimento de Riemann para construir o par (S, u) .

Como S vai ser obtida a partir de Ω_1 e Ω_2 por um processo de colagem e u deve satisfazer as relações $u_1 = u \circ \pi_1^{-1}$ e $u_2 = u \circ \pi_2^{-1}$, é natural tentar definir:

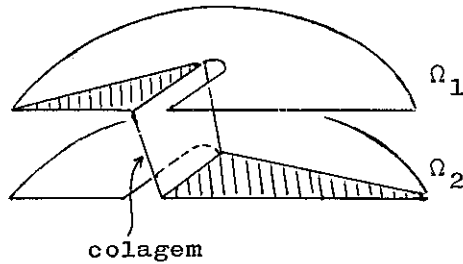
$$u(P) = \begin{cases} u_1(\pi_1(P)) & \text{se } P \in \Omega_1 \\ u_2(\pi_2(P)) & \text{se } P \in \Omega_2 \end{cases}$$

Suponhamos que $L_1 \subset \Omega_1$ e $L_2 \subset \Omega_2$ sejam as partes "coladas" a fim de fabricar S ; se $P_1 \in L_1$, seja $P_2 = w(P_1) \in L_2$ o ponto de L_2 colado a P_1 (uma tal função $w: L_1 \rightarrow L_2$ é chamada de "colagem" ou "transição"). Como queremos que u seja ao menos univalente em S , devemos exigir que $u(P_1) = u(P_2) = u(w(P_1))$ para todo $P_1 \in L_1$. A esta altura a função de colagem w e os pedaços L_1, L_2 a serem colados poderiam ser os mais diversos possíveis. Entretanto, queremos que S seja um espaço topológico e u contínua. Consideremos então o aberto simplesmente conexo $\Omega' = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \begin{matrix} \operatorname{Im}(z) = 0 \\ \operatorname{Re}(z) \geq 0 \end{matrix}\}$ e as duas determinações v_1 e v_2 de \sqrt{z} em Ω' . Pelo princípio do prolongamento analítico⁽³⁾, a determinação u_1 coincide com uma das determinações v_1, v_2 (digamos, v_1) num setor aberto contendo o semi-eixo $\operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \leq 0$

(3)

Ou melhor, olhando para os desenvolvimentos em séries convergentes das determinações.

(por exemplo) excluindo-se esse semi-eixo. Imaginemos a parte superior desse setor em Ω_1 colada à parte inferior do setor correspondente em Ω_2 ao longo do semi-eixo negativo (a função de colagem sendo a "identidade!").



Definimos

$$u(P) = \begin{cases} u_1(P), & \text{se } P \in \text{setor superior em } \Omega_1 \\ & \text{e } P \notin \text{semi-eixo colado} \\ u_2(P), & \text{se } P \in \text{setor inferior em } \Omega_2 \\ & \text{e } P \notin \text{semi-eixo colado} \\ v_1(P), & \text{se } P \in \text{semi-eixo colado} \end{cases}$$

Desta forma, u está bem definida na parte (setor superior de Ω_1) \cup (semi-eixo colado) \cup (setor inferior de Ω_2). Tomando os setores complementares em Ω_1 e Ω_2 respectivamente e procedendo de maneira análoga, obtemos a superfície procurada S . Topologia: decretamos que um subconjunto $U \subset S$ é aberto se a interseção de U com as diversas partes que compõem S é um aberto. Resulta então que

u é automaticamente contínua nesta topologia. Por construção, u satisfaz a propriedade (iii). Finalmente, digamos que uma função (univalente) $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa se para todo $P \in S$, existe uma vizinhança aberta $U \subset S$ de P tal que $\pi: U \rightarrow \mathbb{C}$ é bijetora e $f \circ \pi^{-1}|_{\pi(U)}: \pi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa. Aqui $\pi: S \rightarrow \mathbb{C}$ é a aplicação definida às custas das projeções $\pi_1: \Omega_1 \rightarrow \Omega$ e $\pi_2: \Omega_2 \rightarrow \Omega$ (N.B. π é holomorfa!). Resulta, então, que u é holomorfa.

Observações: (1) A construção de Riemann é um modelo

ideal, não sendo topologicamente possível em \mathbb{R}^3 sem auto-interseções⁽⁴⁾.

(2) A colagem dupla ao longo do semi-eixo negativo é um estratagema artificioso (se bem que engenhoso!) do ponto de vista topológico. Do ponto de vista analítico não ajuda em nada, já que a consideração de determinações e do prolongamento analítico (essencialmente, o espaço de "germes") já resolve a questão.

(3) A faceta espetaculosa da construção de Riemann é que, uma vez convenientemente interpretada e refeita, fornece um instrumento geométrico eficaz. Adiante, veremos como fazer isto (essencialmente, a consideração de curvas algébricas e suas ramificações sobre \mathbb{C}).

(4) Na verdade, quando consideramos os gráficos Ω_1, Ω_2 de u_1, u_2 respectivamente, estamos em $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$!

II. FUNÇÕES ALGÉBRICAS

II.1. Explicitação na vizinhança de um ponto não crítico.

Retomemos a função multivalente $\sqrt{z} = z^{1/2}$. Qualquer que seja a determinação u de $z^{1/2}$ num aberto simplesmente conexo Ω , tem-se $(u(z))^2 = z$ para todo $z \in \Omega$. Consequentemente, se $P = P(X, Y)$ é o polinômio $X - Y^2$, vemos que os pares $(z, u(z)) \in \mathbb{C} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ são zeros de P .

O ponto de vista das funções algébricas é exatamente este: começamos com um polinômio $P(X, Y)$ a duas indeterminadas, com coeficientes em \mathbb{C} , e consideramos os zeros da equação $P(z, w) = 0$. Tais zeros definem w implicitamente como função multivalente de z ; precisamente, para cada $z \in \mathbb{C}$ existem $0 \leq k \leq \text{grau}_w P$ complexos w_1, \dots, w_k tais que $P(z, w_i) = 0$ ($1 \leq i \leq k$).

Começaremos com a parte mais elementar da teoria, a saber, a explicitação das funções $w_i = w_i(z)$ na vizinhança de um ponto "não crítico". A consideração dos pontos críticos é mais delicada e será tratada no parágrafo seguinte.

O que segue é, essencialmente, o teorema das fun-

ções implícitos a uma variável para funções algébricas e suas conseqüências.

Proposição II.1 - Seja $P = P(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ um polinômio irreduzível e seja $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tal que

$$P(a, b) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial Y}(a, b) \neq 0.$$

Então existe um disco $D = \{z \mid |z-a| < \rho\}$ ($\rho > 0$) e uma única função analítica f em D satisfazendo as condições $f(a) = b$ e $P(z, f(z)) = 0$ para todo $z \in D$.

Demonstração: Consideremos o polinômio $Q(Y) = P(a, Y) \in \mathbb{C}[Y]$. Temos $Q(Y) = p_0(a)Y^n + p_1(a)Y^{n-1} + \dots + p_n(a)$, sendo $P(X, Y) = p_0(X)Y^n + p_1(X)Y^{n-1} + \dots + p_n(X)$. Se $Q(Y)$ fosse o polinômio nulo, ter-se-ia necessariamente $p_0(a) = \dots = p_n(a) = 0$, logo os polinômios $p_0(X), \dots, p_n(X)$ admitiriam o fator comum $X-a$. Em conseqüência, $P(X, Y)$ admitiria $X-a$ como fator, contra a hipótese de ser irreduzível. Logo, $Q(Y) \neq 0$.

Um polinômio a uma variável admite um número finito de raízes. Em particular, podemos escolher $\delta > 0$ tal que $Q(w) \neq 0$ para todo w tal que $0 < |w-b| \leq \delta$. Pelo princípio do argumento, tem-se

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-b|=\delta} \frac{\frac{\partial P}{\partial w}(a, w)}{P(a, w)} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-b|=\delta} \frac{Q'(w)}{Q(w)} dw = 1,$$

em virtude de b ser um zero simples de Q (por hipótese, $Q'(b) = \frac{\partial P}{\partial Y}(a,b) \neq 0$).

Consideremos o conjunto $K = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid \begin{matrix} z=a \\ |w-b|=\delta \end{matrix}\}$. Por construção, $P(z,w) \neq 0$ se $(z,w) \in K$. Como P é uma função contínua em \mathbb{C}^2 (com a topologia produto usual) resulta que, para cada $(z,w) \in K$, existe uma vizinhança aberta $U(z,w) \subset \mathbb{C}^2$ que não contém qualquer zero de P . Como K é compacto, K é coberto por uma família finita dentre $\{U(z,w) \cap K, (z,w) \in K\}$. A reunião dessa família finita contém uma vizinhança (hiper) cilíndrica de K . Em particular, existe $\rho > 0$ tal que P não admite qualquer zero no conjunto $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z-a| < \rho, |w-b| = \delta\}$. A expressão

$$n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-b|=\delta} \frac{\frac{\partial P}{\partial w}(z,w)}{P(z,w)} dw$$

é significativa e determina uma função contínua $n = n(z)$ no entorno $|z-a| < \rho$. Por outro lado, novamente pelo princípio do argumento, para cada valor de z , $n(z)$ é o número dos zeros de $P(z,w)$ no interior do disco $|w-b| \leq \delta$. Consequentemente, $n = n(z)$ assume apenas valores inteiros e, como $|z-a| < \rho$ é conexo, resulta que $n = n(z)$ é constante aí. Mas, $n(a) = 1$. Logo, para todo z tal que $|z-a| < \rho$, existe um único $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w-b| < \delta$

e tal que $P(z,w) = 0$. Isto define uma função (genuinamente univalente) f em $|z-a| < \rho$ e, necessariamente, $f(a) = b$.

Para ver que f é analítica em $|z-a| < \rho$, usamos a teoria dos resíduos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-b|=\delta} \frac{\frac{\partial P}{\partial w}(z,w)}{P(z,w)} w dw, \quad |z-a| < \rho.$$

Segue-se desta expressão que f é analítica.

Finalmente, a unicidade de f resulta do princípio do prolongamento analítico. Com efeito, seja f_1 outra função analítica em $|z-a| < \rho$ satisfazendo a $f_1(a) = b$ e $P(z, f_1(z)) = 0$ com $|z-a| < \rho$. Por continuidade, podemos tomar $0 < \rho_1 < \rho$ tal que $|f_1(z) - b| < \delta$ toda vez que $|z-a| < \rho_1$ (onde δ é determinado como acima). Por construção, para cada z tal que $|z-a| < \rho$, $P(z, Y)$ admite uma única raiz w tal que $|w-b| < \delta$. Logo, $f(z) = f_1(z)$ se $|z-a| < \rho_1$. Pelo princípio do prolongamento analítico, $f(z) = f_1(z)$ se $|z-a| < \rho$.

C.Q.D.

Como consequência da proposição acima temos a explicitação de funções algébricas na vizinhança de um ponto "não crítico".

Teorema II.2 - Seja $P = P(X, Y) = p_0(X)Y^n + p_1(X)Y^{n-1} + \dots + p_n(X) \in \mathbb{C}[X, Y]$ um polinômio irreduzível, onde $p_0(X)$ não é o polinômio (identicamente) nulo. Seja $a \in \mathbb{C}$ tal que

$$p_0(a) \neq 0$$

e $\frac{\partial P}{\partial Y}(a, w) \neq 0$ sempre que $P(a, w) = 0$.

Então existe $\rho > 0$ e n funções analíticas f_1, \dots, f_n em $|z-a| < \rho$ satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $P(z, f_i(z)) = 0$, $|z-a| < \rho$, $1 \leq i \leq n$.
- (ii) $f_i(a) = b_i$, onde b_1, \dots, b_n são as raízes de $P(a, Y)$.
- (iii) Se $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ é tal que $P(z, w) = 0$ e $|z-a| < \rho$, então $w = f_i(z)$ para algum i ($1 \leq i \leq n$).

Demonstração: Por hipótese, $\frac{\partial P}{\partial Y}(a, b_i) \neq 0$ para todo i ($1 \leq i \leq n$). Logo, b_1, \dots, b_n são distintos. Pela proposição anterior, existem funções f_1, \dots, f_n analíticas em $|z-a| < \rho$ ($\rho > 0$ convenientemente escolhido) tais que $f_i(a) = b_i$ e $P(z, f_i(z)) = 0$ se $|z-a| < \rho$. Restringindo ρ ainda mais podemos supor, usando o fato de que b_1, \dots, b_n são distintos, que $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ para $i \neq j$ e $|z_1-a| < \rho$, $|z_2-a| < \rho$. Neste caso, (iii) é evidentemente válido.

C.Q.D.

Até agora, vimos usando o termo "ponto não crítico" sem precisá-lo rigorosamente. Hora é chegada que o façamos pois trata-se de uma noção central da teoria das funções algébricas.

Definição II.3 - Seja $P = P(X,Y) = p_0(X)Y^n + \dots + p_n(X) \in \mathbb{C}[X,Y]$ um polinômio irredutível. Um ponto $a \in \mathbb{C}$ é um ponto não crítico (ou regular) de P (ou da função algébrica em z definida implicitamente pela equação $P(z,w) = 0$) se as seguintes condições são satisfeitas:

(1) $p_0(a) \neq 0$.

(2) Para todo w tal que $P(a,w)=0$, tem-se $\frac{\partial P}{\partial Y}(a,w) \neq 0$.

Caso contrário, a é um ponto crítico (da função algébrica).

Observação: A noção de ponto crítico de um polinômio

$P(X,Y)$ é uma noção relativa; a rigor, deveríamos dizer "ponto crítico relativamente à coordenada X " ou lembrar sempre que trata-se de um ponto crítico da função algébrica em z definido por $P(z,w) = 0$. Na teoria das curvas algébricas, tem-se a noção de ponto "singular" da curva algébrica definida pelo polinômio $P(X,Y)$: trata-se de um ponto $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tal que $P(a,b) = 0$ e

$\frac{\partial P}{\partial X}(a,b) = \frac{\partial P}{\partial Y}(a,b) = 0$. É claro que se $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ é um ponto singular da curva definida por P , então a (respectivamente b) é um ponto crítico da função algébrica em z (respectivamente, em w) definida implicitamente por $P(z,w) = 0$. Se $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ é um ponto não singular da curva definida por P , (a,b) pode ser ou não ponto crítico de P .

Enquanto a noção de ponto não singular da curva definida por P é uma noção intrínseca da curva (invariante mediante, por exemplo, uma mudança de coordenadas em \mathbb{C}^2), a de ponto crítico é relativa à coordenada que se quer tomar como variável "independente".

Exemplos: (1) 0 é um ponto crítico de \sqrt{z} (isto é, da equação $w^2 - z = 0$). Todo $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é um ponto não crítico de $w^2 - z = 0$; numa vizinhança pequena de a , temos duas funções holomorfas distintas que são precisamente as determinações de \sqrt{z} mencionadas no §I.

(2) 0 é o único ponto crítico de $zw - 1$.

(3) Os pontos críticos da equação $zw^2 + w - 1 = 0$ são 0 e $-1/4$, o que se vê por um cálculo direto como em (1) e (2). Esta equação satisfaz as condições da Proposição II.1 no ponto $(0,1)$, mas não as condições do Teorema II.2. Na verdade, para todo $a \neq 0, -1/4$, a

explicitação de w como função de z é dada, num disco aberto suficientemente pequeno, pela expressão $\frac{-1 + f(z)}{2z}$, onde $f(z)$ é uma das duas determinações de $\sqrt{1+4z}$ neste disco. Pela Proposição II.1, w pode ser também explicitada num entorno de 0 , mas admite aí apenas a determinação $\frac{-1 + \sqrt{1+4z}}{2z}$, onde $\sqrt{1+4z}$ é a determinação de $\sqrt{\quad}$ tal que $\sqrt{1} = 1$.

(4) Os pontos críticos de $w^2 - z(z-1) = 0$ são 0 e

1. Mais geralmente, se $Q(X)$ é um polinômio de grau m admitindo ao menos uma raiz simples, então o polinômio $Y^2 - Q(X)$ é irredutível (leitor: exercício).

Os pontos críticos de $w^2 - Q(z) = 0$ são as raízes do polinômio Q , em número de m (contando multiplicidades).

Não há diferença essencial entre $w^2 - Q(z) = 0$ e $w^2 - Q_1(z) = 0$ se Q, Q_1 não têm raízes múltiplas e se grau $Q = 2n$, grau $Q_1 = 2n+1$; a esta altura, contudo, não estamos em condições de explicar satisfatoriamente tal afirmação.

Exercício: Se $P = Y^2 - X(X^2-1)$, construa heurísticamente (isto é, como fizemos no §I) a superfície de Riemann associada à função algébrica $f(z)$ associada a $P(z,w) = 0$.

Exercício: No Exemplo (3) acima, considere a única função

holomorfa f num entorno de 0 tal que $f(0) = 1$ e $zf(z)^2 + f(z) = 1$. A título de verificação ligeira da expressão que define f na Proposição II.1, mostre diretamente dessa expressão que $f(0) = 1$.

Convém observar que não incluímos o ponto ∞ nas considerações sobre pontos críticos; é possível fazê-lo, decretando-se que ∞ é um ponto crítico de $P(z,w) = 0$ se 0 for um ponto crítico de $z^m P(\frac{1}{z}, w) = 0$, onde $m = \max_{0 \leq i \leq n} \{\text{grau } p_i(X)\}$.

Finalmente, os pontos críticos de $p_0(z)w^n + \dots + p_n(z) = 0$ que não anulam $p_0(X)$ são chamados pontos críticos genuínos da equação. Se $a \in \mathbb{C}$ é um tal ponto, a equação $P(a,w) = 0$ admite exatamente n raízes (contando multiplicidades). Bem entendido, tal distinção desaparece mediante a introdução de "pontos no infinito" (isto é, os pontos situados sobre a "reta no infinito" da superfície de Riemann associada a P).

O primeiro resultado sobre pontos críticos é um fenômeno típico de funções algébricas a uma variável z . A saber:

Proposição II.4 - Um polinômio irredutível $P = p_0(X)Y^n + \dots + p_n(X)$ admite apenas um número finito de pontos críticos.

Demonstração: Basta mostrar que os pontos críticos genuínos são em número finito. Isto segue-se do seguinte fato geral: se $P(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ é um polinômio irredutível e se $Q(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ não é divisível por $P(X,Y)$, então os zeros comuns de P e Q são em número finito. Eis uma demonstração puramente algébrica deste fato, admitindo-se conhecido que o anel de polinômios sobre um corpo qualquer é euclidiano (isto é, admite algoritmo de divisão). P e Q podem ser considerados como elementos de $\mathbb{C}(X)[Y]$, onde $\mathbb{C}(X)$ é o corpo das frações racionais a uma variável. A fortiori, P e Q não têm fator comum em $\mathbb{C}(X)[Y]$ (leitor: exercício), isto é, $\text{m.d.c.}(P,Q) = 1$. Do processo ensinado no Curso Primário para o cálculo do m.d.c., deduzimos que $1 = \varphi(Y)P + \psi(Y)Q$, para certos $\varphi(Y), \psi(Y) \in \mathbb{C}(X)[Y]$. Eliminando denominadores, encontramos

$$F(X) = \Phi(Y)P + \Psi(Y)Q,$$

para certos $F(X) \in \mathbb{C}[X]$, $\Phi(Y), \Psi(Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$. Como $F(X)$ tem apenas um número finito de raízes, resulta que existe apenas um número finito de $a \in \mathbb{C}$ que pode aparecer como primeira coordenada de zeros comuns a P e Q . Isto fornece a finitude dos pontos críticos de P (com $Q = \frac{\partial P}{\partial Y}$). Para demonstrar o fato mais geral mencionado basta verifi

car que o argumento acima é simétrico em relação a Y .

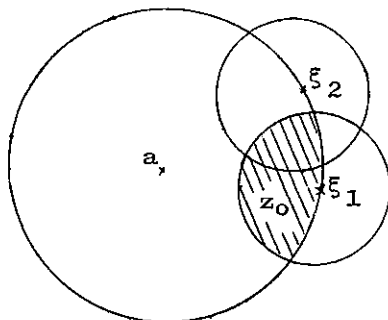
Vimos que, num entorno suficientemente pequeno de um ponto não crítico, a função algébrica multivalente em questão pode ser explicitada como uma função (genuína) analítica. A pergunta natural que surge é: quão generosamente pode ser tal entorno tomado? A resposta é dada pela

Proposição II.5 - Seja $P = P(X, Y)$ irredutível, sejam $a \in \mathbb{C}$ e $R > 0$ tais que P não admita pontos críticos no disco aberto $|z-a| < R$. Para todo b tal que $P(a, b) = 0$, existe uma única função analítica f em $|z-a| < R$ tal que $f(a) = b$ e $P(z, f(z)) = 0$ se $|z-a| < R$.

Demonstração: Seja $r = \sup\{0 < \rho \leq R \mid \exists f \text{ analítica em } |z-a| < \rho \text{ tal que } f(a) = b \text{ e } P(z, f(z)) = 0\}$. Pela unicidade na Proposição II.1 e o princípio do prolongamento analítico, vê-se que existe uma função f analítica no disco $|z-a| < r$ tal que $f(a) = b$ e $P(z, f(z)) = 0$. Mostremos que $r = R$.

Suponhamos, por reductio ad absurdum, que $r < R$. Neste caso, se ξ é tal que $|\xi-a| = r$ então ξ é um ponto não crítico de $P(z, w) = 0$. Pelo Teorema II.2, existem funções analíticas $f_{i, \xi}(z)$ ($i = 1, \dots, n$, $n = \text{grau}_Y P$)

num disco $K_{\xi} = \{z: |z-\xi| < \delta_{\xi}\}$ satisfazendo $P(z,w) = 0$ identicamente neste disco. Seja $z_0 \in K_{\xi} \cap D_r$ onde $D_r = \{z: |z-a| < r\}$. Pelo Teorema II.2 (iii), $f(z_0) = f_{i,\xi}(z_0)$ para algum i , uma vez que $P(z_0, f(z_0)) = 0$.



Pela unicidade do mesmo teorema e pelo princípio do prolongamento analítico, tem-se então $f(z) = f_{i,\xi}(z)$ para todo $z \in D_r \cap K_{\xi}$. Repetindo este argumento para outro ponto do círculo $|z-a| = r$, obtemos que se $K_{\xi_1} \cap K_{\xi_2} \neq \emptyset$, então $f_{i,\xi_1}(z) = f_{j,\xi_2}(z)$ para todo $z \in K_{\xi_1} \cap K_{\xi_2}$ (para certos i, j). A consequência é que f admite um prolongamento analítico F à região $D_r \cup (\bigcup_{\xi} K_{\xi}) = \Omega$. Como D_r é compacto, um número finito dos K_{ξ} é suficiente. É possível então selecionar um r' tal que $r < r' \leq R$ tal que $D_{r'} \subset \Omega$. Ora, $F(a) = 0$ e $P(z, F(z)) = 0$ em $D_{r'}$, contradizendo a definição de r .

C.Q.D.

II.2. Comportamento na vizinhança de um ponto crítico.

No parágrafo anterior vimos que, na vizinhança de um ponto não crítico, uma função algébrica definida implicitamente por $P(z,w) = 0$ explicita-se como n funções (univalentes) analíticas ($n = \text{grau}_y P$). Se a é o ponto não crítico em questão, qualquer dessas funções analíticas admite então uma representação da forma

$$\begin{cases} z-a = t \\ w = \sum_{N \geq 0} c_N t^N \end{cases}$$

onde a série $\sum_{N \geq 0} c_N t^N$ é convergente num disco $|t| < \rho$.

Põe-se naturalmente a questão se uma representação semelhante é válida na vizinhança de um ponto crítico. A resposta, enunciada precisamente no Corolário II.13 abaixo, é que uma representação ("parametrização") existe para pontos críticos genuínos permitindo-se $z-a = t^r$, com r inteiro positivo eventualmente maior do que 1.

Antes, convém desenvolver melhor o que se entende por "parametrização" na vizinhança de um ponto. Para fixar idéias tratar-se-á apenas o caso de um ponto $a \in \mathbb{C}$ tal que existe ao menos um $p_i(X)$, $i \neq n$, satisfazendo $p_i(a) \neq 0$ (do ponto de vista "projetivo", isto é, intro-

duzindo pontos "no infinito", tal caso não se distingue em absoluto dos demais). Nestas condições, vê-se que existe pelo menos um $b \in \mathbb{C}$ tal que $P(a,b) = 0$ e fala-se, indiferentemente, de uma "parametrização de P centrada em (a,b) " ou de uma "parametrização num entorno de a da função algébrica definida por P ".

É possível introduzir tal noção de maneira puramente formal, sem recorrer ao conceito de convergência ou analiticidade. Esta maneira, apesar de não ser originalmente dos clássicos, é mais natural. O problema da convergência pode se colocar a posteriori.

Por parametrização formal, entende-se o seguinte. Considera-se o anel $\mathbb{C}[[t]]$ das séries formais a uma variável t : os elementos de $\mathbb{C}[[t]]$ são expressões formais $\sum_{N \geq 0} c_N t^N$ (N inteiro) ("séries de potências") que se somam termo a termo e se multiplicam a Cauchy. A ordem de uma série $\sum_{N \geq 0} c_N t^N$ é o menor $N \geq 0$ tal que $c_N \neq 0$. Dadas $\sigma = \sum_{N \geq 0} c_N t^N$ e $\tau = \sum_{N \geq 0} d_N t^N$, com $d_0 = 0$, então é possível "substituir t por τ em σ ", isto é, temos uma nova série $\sigma(\tau) = c_0 + c_1 d_1 t + (c_1 d_2 + c_2 d_1^2) t^2 + \dots (= \sum c_N (\tau^N))$ de maneira bem definida. A aplicação assim obtida, $\sigma \mapsto \sigma(\tau)$ é, na verdade, um homomorfismo do anel $\mathbb{C}[[t]]$ em si mesmo cuja restrição a \mathbb{C} é a identidade. Tal homomorfismo chama-se

substituição por τ (só está definido se $\text{ordem}(\tau) \geq 1$).

Definição II.6 - Uma parametrização (formal) é um par $(x(t), y(t))$ de elementos de $\mathbb{C}[[t]]$ não simultaneamente em \mathbb{C} . O centro da parametrização $(x(t), y(t))$ é o ponto $(x(0), y(0)) \in \mathbb{C}^2$.

Dados $x(t), y(t) \in \mathbb{C}[[t]]$, existe um e um só \mathbb{C} -homomorfismo φ do anel de polinômios $\mathbb{C}[X, Y]$ em $\mathbb{C}[[t]]$ tal que $\varphi(X) = x(t)$ e $\varphi(Y) = y(t)$. Como de costume, escreve-se $P(x(t), y(t)) = \varphi(P(X, Y))$. Dado $P \in \mathbb{C}[X, Y]$, diz-se que uma parametrização $(x(t), y(t))$ é uma parametrização de P se $P(x(t), y(t)) = 0$ (isto é, se $P \in \ker(\varphi)$). Neste caso, diz-se que $(x(t), y(t))$ está centrada em $(x(0), y(0))$.

É fácil verificar que o centro de uma parametrização de um polinômio $P = P(X, Y)$ é um zero deste polinômio.

Assim, uma parametrização é, essencialmente, um \mathbb{C} -homomorfismo $\varphi: \mathbb{C}[X, Y] \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ cuja imagem não se reduz a \mathbb{C} . É natural que não se queira distinguir entre φ e $\iota \circ \varphi$, onde ι é um \mathbb{C} -automorfismo de $\mathbb{C}[[t]]$. Do ponto de vista das parametrizações correspondentes, está-se identificando duas parametrizações tais que se pode passar de uma a outra por uma "mudança de parâmetro".

Diz-se de duas tais parametrizações que elas são equivalentes (trata-se, evidentemente, de uma relação de equivalência genuína). É conveniente saber quais as mudanças de parâmetro permissíveis numa mesma classe de equivalência, o que é fornecido pela

Proposição II.7 - Seja $\iota: \mathbb{C}[[t]] \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ em \mathbb{C} -homomorfismo. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) ι é um automorfismo
- (ii) ι é uma substituição por uma série de ordem 1.

Demonstração: (i) \Rightarrow (ii). É fácil ver que a ordem de

$\tau = \iota(t)$ é 1 de vez que ι é um automorfismo. Mostremos que ι é a substituição por τ . Temos $\iota\left(\sum_{i=0}^m c_i t^i\right) = \sum_{i=0}^m c_i (\iota(t))^i = \sum_{i=0}^m c_i \tau^i$ para qualquer inteiro $m \geq 0$. Queremos "passar ao limite" e obter que $\iota\left(\sum_{N \geq 0} c_N t^N\right) = \sum_{N \geq 0} c_N \tau^N$. Para tal escrevemos

$$\sum_{N \geq 0} c_N t^N = \sum_{i=0}^m c_i t^i + \rho_m,$$

com $\rho_m \in \mathbb{C}[[t]]$ de ordem $> m$. Aplicando ι , vem

$$\begin{aligned} \iota\left(\sum_{N \geq 0} c_N t^N\right) &= \sum_{i=0}^m c_i \tau^i + \iota(\rho_m) \\ &= \left(\sum_{N \geq 0} c_N \tau^N - \sum_{M \geq m+1} c_M \tau^M\right) + \iota(\rho_m) \end{aligned}$$

$$= \sum_{N \geq 0} c_N \tau^N + (t(\rho_m) - \sum_{M \geq m+1} c_M \tau^M).$$

Ora, $t(\rho_m)$ tem ordem $> m$; o mesmo se dá com

$\sum_{M \geq m+1} c_M \tau^M = t_\tau \left(\sum_{M \geq m+1} c_M t^M \right)$ onde t_τ é o homomorfismo de substituição por τ . Logo $\text{ord}(t(\rho_m) - \sum_{M \geq m+1} c_M \tau^M) \geq \min\{\text{ord}(t(\rho_m)), \text{ord}(\sum_{M \geq m+1} c_M t^M)\} > m$. Resulta que a série $t(\sum_{N \geq 0} c_N t^N) - \sum_{N \geq 0} c_N \tau^N$ tem ordem $> m$, com $m \geq 0$ arbitrário. A única saída para tal série é a de ser a

série identicamente nula. Em outras palavras,

$$t\left(\sum_{N \geq 0} c_N t^N\right) = \sum_{N \geq 0} c_N \tau^N = t_\tau\left(\sum_{N \geq 0} c_N t^N\right), \text{ isto é, } t = t_\tau.$$

(ii) \Rightarrow (i). É fácil verificar que toda substituição t_τ

é injetora. Se, além disso, $\text{ord}(\tau) = 1$,

então determina-se diretamente - por exemplo, pelo método

de comparação de coeficientes - uma série $\sigma(\tau)$ tal que

$t_\tau(\sigma(t)) = t$. Resulta daí que t_τ é sobrejetora, logo,

um automorfismo. C.Q.D.

Em seguida, uma breve discussão do tipo de parametrização mais importante na teoria. Para ilustrar, considere-se a parametrização $x(t) = t^2$, $y(t) = t^2 + t^4 + t^6 + \dots + t^{2N} + \dots$. Podemos escrever $x(t) = x_1(\tau) = \tau = t_\tau(t)$, $y(t) = y_1(\tau) = \tau + \tau^2 + \dots + \tau^N + \dots = t_\tau(t + t^2 + \dots + t^N + \dots)$, onde $\tau = t^2$. Em outras pa

lavras, $x(t), y(t)$ já são resultantes de uma substituição por uma série τ de ordem >1 . As séries t e $t + t^2 + \dots$, por sua vez, não são mais resultado de substituição (simultânea) por uma série de ordem >1 .

Em geral, uma parametrização $(x(t), y(t))$ é chamada primitiva se não é imagem de outra parametrização por meio de uma substituição por uma série de ordem >1 . O processo acima ilustrado, consistindo em passar de uma representação arbitrária a uma primitiva, pode ser sempre levado a cabo. Mais precisamente:

Lema II.8 - Seja $(x(t), y(t))$ uma parametrização. Então existe, e é único, um inteiro $\nu \geq 1$ tal que:

- (i) $(x(t), y(t))$ é imagem de uma parametrização por meio de uma substituição t_τ tal que $\text{ord}(\tau) = \nu$;
- (ii) $(x(t), y(t))$ não é imagem de nenhuma parametrização por substituições t_σ tais que $\text{ord}(\sigma) > \nu$.

Demonstração: Se $(x(t), y(t))$ é primitiva, tomamos $\nu = 1$.

Caso contrário, existe uma parametrização $(x_1(t), y_1(t))$ tal que $x(t) = t_\sigma(x_1(t)), y(t) = t_\sigma(y_1(t))$, para alguma série σ de ordem $\mu > 1$. Tem-se $x(t) - x(0) = t_\sigma(x_1(t)) - t_\sigma(x_1(0)) = t_\sigma(x_1(t) - x_1(0))$, por

um lado. Por outro lado, $\text{ord}(x_1(t) - x_1(0)) < \text{ord}(x(t) - x(0))$ em virtude de ser $\text{ord}(\sigma) > 1$. Por indução sobre a ordem de $x(t) - x(0)$, existe por hipótese um inteiro ν_1 satisfazendo (i), (ii) relativamente à parametrização $(x_1(t) - x_1(0), y_1(t) - y_1(0))$. Ponhamos $z(t) = x(t) - x(0)$, $w(t) = y(t) - y(0)$ e $z_1(t) = x_1(t) - x_1(0)$, $w_1(t) = y_1(t) - y_1(0)$. Seja τ_1 uma série de ordem ν_1 satisfazendo (i), (ii) relativamente a $(z_1(t), w_1(t))$ e seja $(\xi(t), \eta(t))$ tal que $z_1(t) = \iota_{\tau_1}(\xi(t))$, $w_1(t) = \iota_{\tau_1}(\eta(t))$. Consideremos a série $\tau = \iota_{\sigma}(\tau_1(t))$. Tem-se $z(t) = \iota_{\tau}(\xi(t))$, $w(t) = \iota_{\tau}(\eta(t))$, como se verifica facilmente. Afirmamos que $\nu = \text{ord}(\sigma) \text{ord}(\tau_1) = \mu\nu_1$ é o inteiro procurado relativamente à parametrização $(z(t), w(t))$.

Com efeito, suponhamos que exista uma série ρ de ordem $> \nu$ e uma parametrização $(\xi_1(t), \eta_1(t))$ tais que $z(t) = \iota_{\rho}(\xi_1(t))$, $w(t) = \iota_{\rho}(\eta_1(t))$. Neste caso, mediante alguns cálculos, determinamos uma série ρ_1 de ordem $> \nu_1$ e uma parametrização $(\xi_2(t), \eta_2(t))$ tal que $z_1(t) = \iota_{\rho_1}(\xi_2(t))$ e $w_1(t) = \iota_{\rho_1}(\eta_2(t))$. Isto contradiz a hipótese indutiva.

Finalmente, a unicidade do inteiro $\nu \geq 1$, satisfazendo (i), (ii), é imediata.

C.Q.D.

O inteiro $\nu \geq 1$, acima determinado, é o índice de redundância da parametrização $(x(t), y(t))$. Por definição, $(x(t), y(t))$ é a imagem de uma parametrização $(\xi(t), \eta(t))$ por meio de uma substituição i_τ tal que $\text{ord}(\tau) = \nu$. A fortiori, $(\xi(t), \eta(t))$ é uma parametrização primitiva. A classe de equivalência de $(\xi(t), \eta(t))$ goza da propriedade que de qualquer representante desta classe é possível obter $(x(t), y(t))$ por uma substituição i_τ conveniente tal que $\text{ord}(\tau) = \nu$. Isto sugere introduzir o seguinte conceito, aliás central neste trabalho:

Definição II.8 (bis) - Um ramo é uma classe de equivalência de parametrizações primitivas.

A observação anterior permite-nos associar a toda e qualquer parametrização, um ramo perfeitamente definido. Tal ramo é dito o ramo associado à parametrização em questão.

Dado $F \in \mathbb{C}[X, Y]$, dizemos que um ramo pertence a F se alguma (logo, cada uma) das parametrizações que o representam pertence a F . Neste caso, se $(\xi(t), \eta(t))$ é uma parametrização, dizemos que o ramo está centrado no ponto $(\xi(0), \eta(0))$. É fácil ver que tal ponto independe da parametrização e é um zero do polinômio F . Diremos, alternativamente, que o ramo em questão é um ramo da fun-

ção algébrica definida por F , centrado em $(\xi(0), \eta(0))$.

Convém considerar parametrizações mais gerais, a saber, pares $(\xi(t), \eta(t))$ onde $\xi(t)$ e $\eta(t)$ são séries de Laurent isto é, elementos do corpo $\mathbb{C}((t))$ de frações de $\mathbb{C}[[t]]$. Neste caso, identificaremos duas parametrizações $(\xi(t), \eta(t))$ e $(\xi_1(t), \eta_1(t))$ tais que $\xi(t)/\xi_1(t) = \eta(t)/\eta_1(t) \neq 0$. Doravante, trabalharemos com esta extensão do conceito de parametrização.

Eis o resultado fundamental sobre ramos de uma função algébrica.

Teorema II.9 - Em um zero $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ de um polinômio $F \in \mathbb{C}[X,Y]$ está centrado pelo menos um e no máximo um número finito de ramos de F .

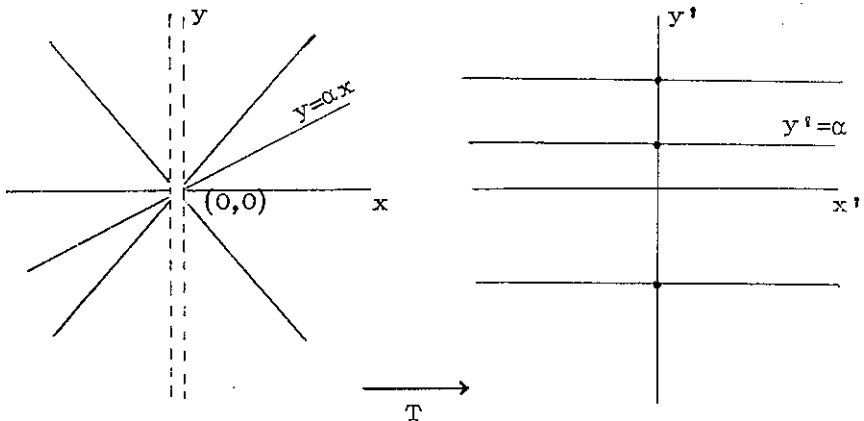
O teorema que temos a nossa frente é não trivial. Existem três demonstrações essencialmente distintas. Uma, clássica, devida a Picard, usando prolongamento analítico. A segunda utiliza o método do polígono de Newton e as séries de expoentes fracionários. Finalmente, a terceira tem um sabor acentuadamente algébrico, usando as chamadas transformações quadráticas.

Neste curso optamos pela terceira demonstração por enquadrar-se melhor no espírito das idéias que se se-

guem, bem como por fornecer uma noção de como se "resol-
vem" singularidades de uma curva algébrica. Reconhecemos
que, na prática, o polígono de Newton fornece, rápida e
explicitamente, todos os ramos da curva; por tal, inclui-
mos exemplos que ilustra a utilização de tal método.

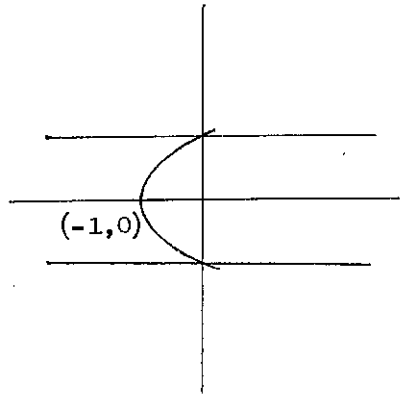
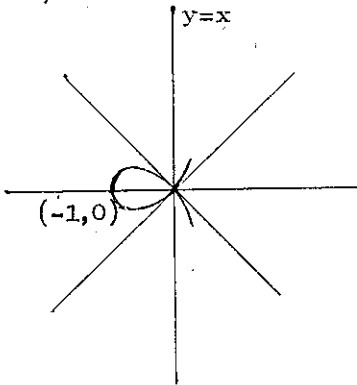
Introduzamos, agora, as transformações menciona-
das.

As expressões $x' = x$, $y' = \frac{y}{x}$ determinam uma
aplicação T de $\mathbb{C}^2 \setminus \{x=0\}$ em \mathbb{C}^2 . Precisamente,
 $T(a,b) = (\alpha, \frac{b}{a})$ se $a \neq 0$; T é chamada transformação
(localmente) quadrática (centrada em $(0,0)$).



A propriedade fundamental da transformação quadrá-
tica centrada em $(0,0)$ é a de estabelecer uma bijeção
entre as "direções" $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{C}$, em torno de $(0,0)$
e os pontos da reta complexa $x' = 0$. A figura acima i-

lustra este fato. É de se esperar, a partir daí, que uma curva $P(x,y) = 0$ passando em $(0,0)$ e admitindo a curva $y = \alpha x$ como tangente em $(0,0)$, seja transformada numa curva $P'(x',y') = 0$ passando pelo ponto $(0,\alpha)$. O seguinte exemplo é, particularmente, instrutivo: $P(X,Y) = Y^2 - X^2(X+1)$. A curva $y^2 - x^2(x+1) = 0$ admite as retas $y = x$ e $y = -x$ como tangentes em $(0,0)$ (figura a abaixo).



Aplicando T , vem $Y'^2 X'^2 - X'^2(X'+1) = X'^2(Y'^2 - (X'+1))$. Logo, a transformada da curva $y^2 - x^2(x+1)$ por T é a curva $x'^2(y'^2 - (x'+1))$, constituída do eixo $x' = 0$ (tomado com "multiplicidade" 2) e da parábola $y'^2 = x'+1$, que passa pelos pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$, correspondentes às direções $y = x$ e $y = -x$.

Observações: (1) As figuras acima são apenas os gráficos reais das curvas em questão, isto é, os pontos das curvas cujas coordenadas são números reais.

Contudo, no presente exemplo, o gráfico real dá uma idéia razoável do que está se passando.

(2) A transformação T pode ser considerada como uma transformação do plano \mathbb{C}^2 , menos o eixo $x = 0$, em si mesmo. Isto evita sobrecarga de notação (no caso, a introdução de novas variáveis X', Y' , etc.). Algebricamente, a transformação T traduz-se por um \mathbb{C} -automorfismo do corpo $\mathbb{C}(X, Y)$ das frações racionais sobre si mesmo. Os leitores munidos dos rudimentos da Geometria Algébrica reconhecerão em T uma transformação "biracional" do plano \mathbb{C}^2 cuja inversa é "regular" em todos os pontos de \mathbb{C}^2 . A inversa T^{-1} de T é também chamada a "dilatação" ("blowing-up", "éclatement") local de \mathbb{C}^2 no ponto $(0, 0)$.

Retomemos o polinômio $F = Y^2 - X^2(X+1)$. Trata-se de um polinômio irredutível o que se vê, por exemplo, pelo critério de Eisenstein aplicado ao anel $\mathbb{C}[X][Y] = \mathbb{C}[X, Y]$. A transformada de $F = 0$ consiste do eixo $x = 0$ e da parábola $y^2 = x+1$. É claro que $y^2 = x+1$ é a parte essencial da transformada: o eixo $x = 0$ está invariavelmente de permeio nas transformadas de curvas passando por $(0, 0)$. Precisamente, tem-se em geral:

Lema II.10 - Seja $F = F(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ e seja

$$F = F_r(X, Y) + F_{r+2}(X, Y) + \dots + F_n(X, Y), \text{ onde}$$

F_i é homogêneo de grau i e $F_r \neq 0$. Então:

(i) O polinômio $F(X,XY)$ é exatamente divisível por X^r .

(ii) Se F é irreduzível e não divisível por X (isto é, $F \neq \alpha X^t$, quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ e t inteiro positivo), então $F(X,XY)/X^r$ é um polinômio irreduzível.

Demonstração: (i) Tem-se $F(X,XY) = F_r(X,XY) + \dots + F_n(X,XY)$
 $= X^r(F_r(1,Y) + XF_{r+1}(1,Y) + \dots +$
 $+ X^{n-r} F_n(1,Y))$, logo $F(X,XY)$ é divisível por X^r .

Por outro lado, se X^s dividisse F , com $s > r$, teríamos $X^{s-r} G(X,Y) = F_r(1,Y) + X(F_{r+1}(1,Y) + \dots + X^{n-r-1} F_n(1,Y))$ para algum $G(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$, logo X dividiria $F_r(1,Y)$, o que é impossível. Assim, F é exatamente divisível por X^r .

(ii) Primeiramente $F' = F(X,XY)/X^r$ não é divisível por nenhum polinômio $h(X)$. Caso contrário, substituindo Y por Y/X em F' e multiplicando por uma potência conveniente de X , teríamos $X^t F(X,Y)$ divisível por $h(X) \neq \text{const.}$ Como $F(X,Y)$ é irreduzível por hipótese, resultaria $h(X) = \alpha X^t$, para algum $\alpha \in \mathbb{C}$, logo $F' = F(X,XY)/X^r$ seria divisível por X^t . Pela alínea (i), teríamos $t = 0$, isto é, $h(X) = \text{const.}$

Assim, se F' é redutível é porque admite dois fatores de grau positivo em Y . Novamente substituindo Y por Y/X e multiplicando por uma potência conveniente de X , encontraríamos que $X^s F'$ (para algum s) tem dois fatores de grau positivo em Y . Isto é impossível pois F' é irredutível por hipótese.

C.Q.D.

Dado um polinômio $F = F(X, Y) = F_r(X, Y) + F_{r+1}(X, Y) + \dots$, com $F_r \neq 0$ (F_i homogêneo de grau i), acabamos de ver que $F(X, XY)/X^r \in \mathbb{C}[X, Y]$. Dizemos que $F(X, XY)/X^r$ é o transformado próprio de $F(X, Y)$ ou que a curva $F(x, xy)/x^r = 0$ é a transformada própria da curva $F(x, y) = 0$. Notação: F' ou T^*F . Por exemplo, se $F = Y^2 - X^2(X+1)$, $T^*F = Y^2 - (X+1)$.

Exercício: Calcule $T^*(T^*F)$ das curvas $F = Y^2 - X^4 - X^5$ e $F = Y^2 - X^3$. Em cada caso, trace os gráficos reais (aproximados) de F , T^*F e $T^*(T^*F)$.

Exercício: Mostre que a transformação quadrática T induz em \mathbb{C} -homomorfismo do anel $\mathbb{C}[X, Y]$ no corpo $\mathbb{C}(X, Y)$ das frações racionais. Deduza que, se $F = \prod_i F_i^{e_i}$, com F_i irredutível, então a transformada própria de F é a curva $\prod_i (T^*F_i)^{e_i} = 0$.

Dado um ramo centrado em $(0,0)$, admitindo (ξ, η) por representante tal que $\xi \neq 0$, podemos considerar o ramo cujo representante é $(\xi, \eta/\xi)$. Se (ξ_1, η_1) é outro representante do ramo inicial, tem-se $\xi_1 = \iota(\xi)$ e $\eta_1 = \iota(\eta)$, onde $\iota: \mathbb{C}[[t]] \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ é uma substituição de ordem 1. Ora, ι estende-se a um \mathbb{C} -automorfismo do corpo $\mathbb{C}((t))$ das séries de Laurent. Tem-se então $\eta_1(t)/\xi_1(t) = \iota(\eta(t))/\iota(\xi(t)) = \iota(\eta(t)/\xi(t))$, pondo em relevo que $(\xi_1, \eta_1/\xi_1)$ e $(\xi, \eta/\xi)$ são parametrizações equivalentes. Desta maneira, a transformação quadrática T associa a um ramo centrado em $(0,0)$, um ramo bem definido. Tal ramo é designado o transformado do ramo original por T .

Lema II.11 - A associação $(\xi, \eta) \mapsto (\xi, \eta/\xi)$ estabelece uma bijeção entre os ramos centrados em $(0,0)$ tais que $\text{ord}(\xi) \leq \text{ord}(\eta)$ e os ramos centrados nos pontos do eixo $x = 0$. Se $F = 0$ é uma curva, a restrição da bijeção acima aos ramos de $F = 0$ centrados em $(0,0)$ é uma bijeção sobre os ramos da transformada própria $F' = 0$ centrados nos pontos da interseção $\{x=0\} \cap \{F'=0\}$.

Demonstração: Observemos, primeiramente, que se $\text{ord}(\xi) \leq \text{ord}(\eta)$ então $\text{ord}(\xi_1) \leq \text{ord}(\eta_1)$ para toda parametrização (ξ_1, η_1) equivalente a (ξ, η) . Logo,

esta é uma propriedade do ramo.

Seja, então, $\xi = c_\lambda t^\lambda + \dots$, $\eta = d_\mu t^\mu + \dots$, com $c_\lambda \neq 0$, $d_\mu \neq 0$, e $\lambda \geq 1$. Tem-se, $\text{ord}(\xi) = \lambda$, $\text{ord}(\eta) = \mu$ e $\mu \geq \lambda \geq 1$. Por um cálculo direto (comparação de coeficientes), obtemos $\eta/\xi = \frac{d_\mu}{c_\lambda} t^{\mu-\lambda} + \dots$, logo $\eta/\xi \in \mathbb{C}[[t]]$ e $(\eta/\xi)(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mu > \lambda \\ d_\mu/c_\lambda, & \text{se } \mu = \lambda \end{cases}$.

O centro do ramo $(\xi, \eta/\xi)$ é, portanto, $(0,0)$ ou $(0, d_\mu/c_\lambda)$, isto é, $(\xi, \eta/\xi)$ está centrado em um ponto do eixo $x = 0$.

Inversamente, se (α, β) é um ramo centrado em $(0, \beta(0))$, a ele associamos o ramo $(\alpha, \alpha\beta)$ centrado em $(0,0)$. Ora, $\text{ord}(\alpha\beta) = \text{ord}(\alpha) + \text{ord}(\beta) \geq \text{ord}(\alpha)$ já que $\beta \in \mathbb{C}[[t]]$. Por outro lado, o ramo associado a $(\alpha, \alpha\beta)$ por meio de T é $(\alpha, \alpha\beta/\alpha) = (\alpha, \beta)$, recuperando-se, assim, o ramo inicial. Isto mostra que a associação é sobrejetora. Mostra-se, analogamente, que é injetora.

Seja, agora, $F = 0$ a curva dada. Se $F(\xi, \eta) = 0$, então $(\xi, \eta/\xi)$ satisfaz $F(X, XY)$ e $F' = F(X, XY)/X^T$, logo é um ramo da transformada própria F' . Evidentemente, o centro de $(\xi, \eta/\xi)$ é um ponto da interseção $\{x=0\} \cap \{F'=0\}$.

Inversamente, se (α, β) é um ramo de F' centrado num ponto de $\{x=0\}$, $(\alpha, \alpha\beta)$ satisfaz F . C.Q.D.

Observação: Se a curva $F = 0$ não admite $x = 0$ como tangente em $(0,0)$, então todo ramo (ξ, η) de F centrado em $(0,0)$ é tal que $\text{ord}(\xi) \leq \text{ord}(\eta)$. Deixamos ao leitor os detalhes da verificação.

Precisamos ainda do seguinte lema, que é um caso particular do Teorema II.9.

Lema II.12 - Seja $F = 0$ uma curva e (a,b) um ponto desta curva tal que $\frac{\partial F}{\partial X}(a,b)$ e $\frac{\partial F}{\partial Y}(a,b)$ não são ambos nulos. Então F admite um único ramo centrado em (a,b) . (*)

Demonstração: Efetuando uma translação, podemos supor que

$(a,b) = (0,0)$. Temos, então:

$F = \frac{\partial F}{\partial X}(0,0)X + \frac{\partial F}{\partial Y}(0,0)Y + \dots$, onde $\frac{\partial F}{\partial X}(0,0)X + \frac{\partial F}{\partial Y}(0,0)Y$ é a (única) tangente a $F = 0$ em $(0,0)$. Efetuando uma mudança de coordenadas conveniente, podemos supor que $\frac{\partial F}{\partial X}(0,0)X + \frac{\partial F}{\partial Y}(0,0)Y \neq \alpha X$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Enfim, multiplicando F por uma constante $\neq 0$ se necessário, podemos supor que $F = Y + a_{10}X + \dots$, $a_{10} \in \mathbb{C}$, e $\frac{\partial F}{\partial X} = 1 + G(X,Y)$, com $G(0,0) = 0$.

Mostremos que, nestas condições, F admite uma parametrização (necessariamente primitiva) da forma

(*)

Este resultado é a versão formal da Proposição II.1.

$(t, c_1 t + c_2 t^2 + \dots)$ em $(0,0)$. A série $c_1 t + \dots + c_i t^i + \dots$ será construída por recorrência em i exigindo-se, a cada etapa, que a ordem de $F(t, c_1 t + \dots + c_i t^i)$ seja $> i$. Para $i = 1$, tomamos $c_1 = -a_{10}$. Então $F(t, -a_{10} t) = -a_{10} t + a_{10} t + (\text{termos de grau } \geq 2)$ tem ordem > 1 .

Suponhamos $c_1 t + \dots + c_{i-1} t^{i-1}$ construído de tal maneira que $\text{ord } F(t, c_1 t + \dots + c_{i-1} t^{i-1}) > i-1$. Determinemos c_i : $F(t, c_1 t + \dots + c_{i-1} t^{i-1} + c_i t^i) = F(t, c_1 t + \dots + c_{i-1} t^{i-1}) + (1 + G(t, c_1 t + \dots + c_{i-1} t^{i-1})) c_i t^i + (\text{termos de grau } > i) = (dt^i + \dots) + c_i t^i + (\text{termos de grau } > i)$.

Tomamos $c_i = -d$. É claro, então, que $\text{ord } F(t, c_1 t + \dots + c_i t^i) > i$. Daqui resulta que $\text{ord } F(t, c_1 t + \dots + c_i t^i + \dots) > i$ para todo i e isto só é possível se

$$F(t, c_1 t + \dots + c_i t^i + \dots) = 0.$$

Resta mostrar a unicidade do ramo.

Seja $\xi(t), \eta(t)$ uma parametrização primitiva de F centrada em $(0,0)$. Ora, $F(t, \sum_i c_i t^i) = 0$ significa que $F(X,Y)$ pertence ao núcleo do \mathbb{C} -homomorfismo

$\mathbb{C}[[X]][Y] \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ tal que $X \mapsto t, Y \mapsto \sum_i c_i t^i$. Logo,

$F(X,Y) = (Y - \sum_i c_i X^i) H(X,Y)$, para algum $H(X,Y) \in$

$\mathbb{C}[[X]][Y]$ tal que $H(0,0) \neq 0$ (já que F contém algum termo linear). Aplicando o \mathbb{C} -homomorfismo

$\mathbb{C}[[X]][Y] \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$ tal que $X \mapsto \xi(t), Y \mapsto \eta(t)$, obte-

mos $0 = F(\xi(t), \eta(t)) = (\eta - \sum_i c_i \xi(t)^i) H(\xi(t), \eta(t))$.

Como $H(\xi(t), \eta(t))(0) = H(0,0) \neq 0$, a série

$H(\xi(t), \eta(t))$ admite inversa em $\mathbb{C}[[t]]$, logo

$\eta = \sum_i c_i \xi(t)^i$. Segue-se que $\text{ord}(\xi(t)) = 1$ já que

$(\xi(t), \eta(t))$ é primitiva. Consideremos então a substi-

tuição $\sigma: t \mapsto \xi(t)$, que é de ordem 1, logo um \mathbb{C} -auto-

morfismo de $\mathbb{C}[[t]]$ (Prop. II.7). O automorfismo inver-

so σ^{-1} leva a parametrização $(\xi(t), \eta(t))$ na parame-

trização $(t, \sum_i c_i t^i)$, logo tais parametrizações são e-

quivalentes (Prop. II.7), fornecendo o mesmo ramo.

C.Q.D.

Voltemo-nos, finalmente, para a

Demonstração do Teorema II.9: Podemos supor, sem perda de

generalidade, que F é irreduzível, que

$(a,b) = (0,0)$ e que $x = 0$ não é tangente a $F = 0$ em

$(0,0)$. Seja, então, $F = \prod_{i=1}^r (Y - a_i X) + F_{r+1}(X, Y) + \dots$,

com $a_i \in \mathbb{C}$ e procedamos por indução em r .

Se $r = 1$, o teorema reduz-se ao Lema II.12.

Suponhamos o teorema válido para todos os polinômios cujo termo homogêneo $\neq 0$ de menor grau tem grau $< r$.

Temos dois casos:

1º caso: existem índices i, j tais que $a_i \neq a_j$.

Aplicamos a transformação quadrática T a F .

Obtemos $F' = \prod_{i=1}^r (Y-a_i) + X(\dots)$. Os pontos de interseção de $F' = 0$ com $x = 0$ são $(0, a_1), \dots, (0, a_r)$ (incluindo eventuais repetições). Para cada i , escrevamos F' como polinômio em X e $Y-a_i$, digamos:

$$F' = F_{s_i}(X, Y-a_i) + F_{s_i+1}(X, Y-a_i), \quad i=1, \dots, r.$$

Ora, s_i é precisamente o grau do polinômio $F_{s_i}(u)$, obtido ao substituir-se X e $Y-a_i$ pelas equações paramétricas de uma reta genérica (isto é, não tangente a F) por $(0, a_i)$. Logo, $s_i \leq$ número de interseções de F' com $x = 0$ em $(0, a_i)$. Segue-se que $s_i \leq r$ para todo i . Se, além disso, $a_i \neq a_j$ para certos i, j , tem-se então $s_i < r$ para todo i . Neste caso, a hipótese de indução aplica-se a F' relativamente a cada $(0, a_i)$, permitindo concluir que F' admite pelo menos um e no máximo um número finito de ramos centrados em cada um dos pontos $(0, a_i)$. Pelo Lema II.11, resulta que F admite um e no máximo um número finito de ramos centrados em $(0, 0)$.

2º caso: $a_1 = \dots = a_r = c_1$.

Temos $F = (Y-a_1 X)^r + \dots$, $r > 1$. Aplicando T , como antes, vem $F' = (Y-a_1)^r + X(\dots)$. Efetuando a translação $X \mapsto X$, $Y \mapsto Y+c_1$, obtemos $F' = Y^r + X(\dots)$.

Aplicamos o mesmo processo a F' . Se recairmos no 1º caso acima, a demonstração termina aí. Caso contrário,

$F' = (Y - c_2 X)^F + \dots$ (note que a tangente a F' em $(0,0)$ não pode ser $x = 0$ em virtude da presença de Y^F).

Aplicamos T , efetuamos a translação $X \mapsto X$, $Y \mapsto Y + c_2$, etc.

Mostremos que, ao cabo de um número finito de etapas, recaímos no 1º caso analisado acima. Caso contrário, obtemos uma seqüência infinita $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{C}$ correspondente à seqüência das transformadas próprias $F', F^{(2)}, F^{(3)}, \dots$ (após efetuar as devidas translações). Nosso plano para obter uma contradição consiste em duas fases:

- (1) Mostraremos que $(t, c_1 t + c_2 t^2 + \dots)$ é uma parametrização de F centrada em $(0,0)$.
- (2) Deduziremos de (1) a existência de uma seqüência descendente infinita de inteiros positivos.

Para a primeira fase, procedemos da seguinte maneira. A idéia é mostrar a existência de uma função $h_i: (i, F) \mapsto h_i(F)$, dependendo de $i \in \mathbb{N}$ e F , a valores em \mathbb{N} , tal que $h_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$. A construção de tal h_i implicará em que $F(t, c_1 t + c_2 t^2 + \dots) = 0$. Ora, existe uma e uma só maneira de escrever F na seguinte forma (para cada $i \in \mathbb{N}$):

$$F(X,Y) = \sum_{\ell > 0} d_{k\ell} X^{k_i} (Y - c_1 X - c_2 X^2 - \dots - c_i X^i)^\ell + X^{h_i} P_i(X)$$

para certos $d_{k\ell} \in \mathbb{C}$, $P_i \in \mathbb{C}[X]$, $P_i(0) \neq 0$ (ao leitor, o cuidado de verificar esta afirmação). O expoente h_i fornecerá a função procurada.

A propriedade interessante desta representação é que $k_i + \ell \geq r$ para todo $\ell > 0$ e $h_i \geq r$. Com efeito, substituindo $Y - c_1 X$ por Y_1 , aparece em $F(X, Y_1 + m_1 X)$ o termo incancelável $X^{k_i} Y_1^\ell$. Mas, $F(X, Y) = F(X, Y_1 + m_1 X)$ admite r tangentes (com eventuais repetições) em $(0, 0)$, logo $k_i + \ell = \text{gr}(X^{k_i} Y_1^\ell) \geq r$. Analogamente para h_i .

Tomemos a transformada própria de ambos os membros da representação acima:

$$\begin{aligned} F' &= \frac{F(X, XY)}{X^r} = \\ &= \frac{1}{X^r} \left(\sum_{\ell > 0} d_{k\ell} X^{k_i} (X(Y - c_1 - c_2 X - \dots - c_i X^{i-1}))^\ell + X^{h_i} P_i(x) \right) \\ &= \sum_{\ell > 0} d_{k\ell} X^{k_i + \ell - r} (Y - c_1 - c_2 X - \dots - c_i X^{i-1}) + X^{h_i - r} P_i(X), \end{aligned}$$

com $k_i + \ell - r \geq 0$ e $h_i - r \geq 0$. Ora, no 2º membro vemos a representação acima para a transformada própria F' . Logo, temos $h_i(F) = h_{i-1}(F') + r$. Repetindo este processo, obtemos $h_i(F) = h_{i-2}(F'') + 2r = h_{i-3}(F''') + 3r = \dots$; logo $h_i(F) \geq ir$. Como i é arbitrário, segue-se que

$$h_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty.$$

Finalmente, aplicando o \mathbb{C} -homomorfismo $X \mapsto t$,

$Y \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} c_i t^i$ à representação acima, obtemos

$\text{ord } F(t, \sum_{i=1}^{\infty} c_i t^i) \geq \min\{i+1, h_i\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como

$h_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$, resulta que $F(t, \sum_{i=1}^{\infty} c_i t^i) = 0$, como queríamos.

Em seguida, construiremos uma seqüência infinita estritamente decrescente de inteiros não negativos. Para tal retomemos o ramo $(\xi(t), \eta(t))$ de F em $(0,0)$

obtido acima e verifiquemos que não é ramo de $\frac{\partial F}{\partial Y}$ em $(0,0)$.

Com efeito, consideremos o \mathbb{C} -homomorfismo

$\varphi: \mathbb{C}[X,Y] \rightarrow \mathbb{C}((t))$ tal que $\varphi(X) = \xi(t)$ e $\varphi(Y) = \eta(t)$.

Evidentemente, $\ker(\varphi)$ é um ideal primo de $\mathbb{C}[X,Y]$ e co

mo $F \in \ker(\varphi)$, tem-se $\ker(\varphi) \neq (0)$. Resulta que $\ker(\varphi)$

é ideal maximal ou gerado por um polinômio irredutível.

Mas, se $\ker(\varphi)$ fosse maximal, teríamos $\mathbb{C}[X,Y]/\ker(\varphi) \cong$

$\cong \mathbb{C} \subset \mathbb{C}((t))$, o que é impossível já que $\mathbb{C}[X,Y]/\ker(\varphi) \cong$

$\cong \mathbb{C}[t, \eta(t)]$. Necessariamente, $\ker(\varphi) = (G)$ para algum

$G \in \mathbb{C}[X,Y]$. Como $F \in \ker(\varphi)$ e F é irredutível, segue-

se que $\ker(\varphi) = (F)$. Ora, se (ξ, η) fosse ramo de $\frac{\partial F}{\partial Y}$,

teríamos $\frac{\partial F}{\partial Y} \in \ker(\varphi)$, logo $\frac{\partial F}{\partial Y} = F \cdot H$, para algum

$H \in \mathbb{C}[X,Y]$. Como $\text{gr}_Y(\frac{\partial F}{\partial Y}) < \text{gr}_Y F$, isto é impossível

(a menos que $\frac{\partial F}{\partial Y} \equiv 0$, em cujo caso F admitiria $x = 0$

como componente, contra a hipótese de que F não admite $x = 0$ como tangente em $(0,0)$).

Seja, agora, $N = \text{ord} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}(\xi(t), \eta(t)) \right)$. Como (ξ, η) não é ramo de $\frac{\partial F}{\partial Y}$, resulta $\frac{\partial F}{\partial Y}(\xi(t), \eta(t)) \neq 0$, logo N é um inteiro ≥ 0 .

Repetindo o argumento para F' e $\frac{\partial F'}{\partial Y'}$ (onde $Y' = \frac{Y}{X}$), vemos que o transformado $(\xi, \eta/\xi)$ não é ramo de $\frac{\partial F'}{\partial Y'}$. Definimos, então, $N_1 = \text{ord} \left(\frac{\partial F'}{\partial Y'}(\xi(t), \eta(t)) \right)$ e deduzimos que $N_1 \geq 0$.

Ora,

$$\frac{\frac{\partial F(X,Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=XY'}}{X^{r-1}} = \frac{\frac{\partial F(X,XY')}{\partial Y'} \cdot \frac{\partial Y'}{\partial Y}}{X^{r-1}} = \frac{\partial}{\partial Y'} \left(\frac{1}{X^r} F(X,XY') \right).$$

Logo, $N = N_1 + r - 1$. Se $r > 1$, tem-se $N > N_1 > 0$.

Procedendo desta maneira para as curvas $F^{(2)}, F^{(3)}, \dots$ e suas respectivas derivadas, obtemos a seqüência procurada.

C.Q.D. para o Teorema II.9

Corolário II.13 - Seja $F = p_0(X)Y^n + \dots + p_n(X) \in C[X, Y]$ irreduzível, onde $p_0(X) \neq 0$. Seja (a, b) um ponto de $F(x, y) = 0$ tal que $p_0(a) \neq 0$. Então F admite um número finito de parametrizações primitivas não equivalentes centradas em (a, b) , da forma

$$\begin{cases} x = a + t^{r_i} \\ y = \sum_{\alpha} c_{i,\alpha} t^{\alpha}, \quad i = 1, \dots, h. \end{cases}$$

Além disso, o número $\sum_{i=1}^h r_i$ é a multiplicidade de b como raiz de $F(a, Y) = p_0(a)Y^n + \dots + p_n(a) \in \mathbb{C}[Y]$.

Demonstração: Efetuando a translação $(0,0) \mapsto (a,b)$, obtemos a curva $F_1(x,y) = 0$ (imagem inversa de $F(x,y) = 0$ por tal translação), onde $F_1(X,Y) = F(X+a, Y+b)$. Evidentemente, $F_1(0,0) = 0$. Se mostrarmos que, em cada ramo de F_1 em $(0,0)$, é possível escolher um representante da forma $x = t^r$, $y = \sum_{\alpha} c_{\alpha} t^{\alpha}$, teremos o resultado para F em (a,b) . Podemos, assim, supor que $(a,b) = (0,0)$.

Pelo Teorema II.9, sabemos que F admite um número finito h de ramos centrados em $(0,0)$. Seja $(\xi(t), \eta(t))$ um representante de um qualquer destes ramos. Argumento análogo ao anterior permite-nos supor que $\xi(t) = t^r(b_0 + b_1 t + \dots)$, com $r > 0$ e $b_0 \neq 0$. Seja $\tau(t) = d_1 t + d_2 t^2 + \dots$, $d_1 \neq 0$, com os d_i 's a serem escolhidos convenientemente. Ponhamos $\xi_1(t) = \xi(\tau(t))$, $\eta_1(t) = \eta(\tau(t))$. Então, tem-se

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= t^r(d_1 + d_2 t + \dots)^r(b_0 + b_1(d_1 t + d_2 t + \dots) + \dots) \\ &= t^r(d_1^r b_0 + (r d_1^{r-1} d_2 b_0 + d_1^{r+1} b_1) t + \dots \end{aligned}$$

$$+ (rd_1^{r-1} d_i b_0 + P_i(b_1, \dots, b_i, d_1, \dots, d_{i-1})t^i + \dots),$$

onde os P_i 's são polinômios. Definindo

$$d_1^r = b_0^{-1}$$

$$d_2 = -(rd_1^{r-1} b_0)^{-1} d_1^{r+1} b_1$$

$$d_i = -(rd_1^{r-1} b_0)^{-1} P_i, \quad i = 3, 4, \dots,$$

teremos $\text{ord}(\tau(t)) = 1$ (porque $b_0 \neq 0$) e $\xi_1(t) = \xi(\tau(t)) = t^r$, como queríamos.

Observação: Para qualquer escolha de uma r -ésima raiz de

$$b_0^{-1}, \text{ teremos sempre } \xi_1(t) = t^r. \text{ Contudo,}$$

$\eta_1(t) = \eta(\tau(t))$ variará dependendo desta escolha.

Isto mostra que F admite parametrizações da forma anunciada. Falta mostrar que se h é o número de ramos, então $\sum_{i=1}^h r_i$ é a multiplicidade de b na equação $F(a, y) = 0$. Para tal, escolhamos $\delta > 0$ tão pequeno de tal modo que $F(a, w) \neq 0$ para todo $w \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |w-b| \leq \delta$. Agora, a pode ser um ponto crítico de $F(z, w) = 0$. Neste caso, escolhemos $\epsilon > 0$ tão pequeno de tal modo que $F(z, w) = 0$ não tenha pontos críticos em $0 < |z-a| \leq \epsilon$. Neste caso (Prop. II.5), a função algébrica definida por $F(z, w) = 0$ pode ser explicitada como $n = \text{gr}_Y F(X, Y)$ funções $w_j = w_j(z)$ analíticas em

$0 < |z-a| \leq \epsilon$. Dado z (tal $0 < |z-a| \leq \epsilon$), sejam $u_1^{(i)}, \dots, u_r^{(i)}$ as raízes r_i -ésimas de z . Suponhamos demonstrado que $\eta^{(i)}(t)$ é convergente num entorno suficientemente pequeno de a . Neste caso, $\eta^{(i)}(u_1^{(i)}), \dots, \eta^{(i)}(u_{r_i}^{(i)})$ são números complexos bem definidos. Reordenemos o conjunto de índices de w_1, \dots, w_n de maneira que $w_1(z) = \eta^{(1)}(u_1^{(1)}), \dots, w_{r_1}(z) = \eta^{(1)}(u_{r_1}^{(1)}), \dots, w_{r_1+\dots+r_{h-1}+1}(z) = \eta^{(h)}(u_1^{(h)}), \dots, w_{r_1+\dots+r_h}(z) = \eta^{(h)}(u_{r_h}^{(h)})$ (a Proposição II.5 garante esta possibilidade). Restrinjamos e ainda mais de tal modo que $|w_k(z)-b| \leq \delta$, $k = 1, \dots, r_1+\dots+r_h$ (o que é possível pela continuidade das w_k 's) e de modo que $|w_{k'}(z)-b| > \delta$ para $k' = \sum_{i=1}^h r_i+1, \dots, n$ para todo $0 < |z-a| \leq \epsilon$.

Neste caso, é claro que, para todo $0 < |z-a| \leq \epsilon$, o número de raízes de $F(z, y) \in \mathbb{C}[y]$ contidas no disco $|w-b| \leq \delta$ é igual a $\sum_{i=1}^h r_i$. Pelo princípio do argumento, temos então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-b|=\delta} \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(z, w) dw}{F(z, w)} = \sum_{i=1}^h r_i,$$

qualquer que seja $0 < |z-a| \leq \epsilon$.

Passando ao limite quando $z \rightarrow a$ (o que é per-

missível), obtém-se

$$\int_{|w-b|=\delta} \frac{\frac{\partial F}{\partial Y}(a,w)dw}{F(a,w)} = \sum_{i=1}^h r_i.$$

Por outro lado, novamente pelo princípio do argumento, a última integral é a multiplicidade de b como raiz do polinômio $F(a,y) \in \mathbb{C}[y]$. Isto termina a demonstração, a menos do fato que a série formal $\eta^{(i)}(t)$ (numa parametrização $x = a + t^{r_i}$, $y = \eta^{(i)}(t)$ de F em (a,b)) converge num entorno de a . C.Q.D.

Observação: Em cada ramo obtido acima, o número r_i é invariante deste ramo; diz-se que r_i é o número de folhas do ramo em questão.

II.3. Descrição do método do polígono de Newton.

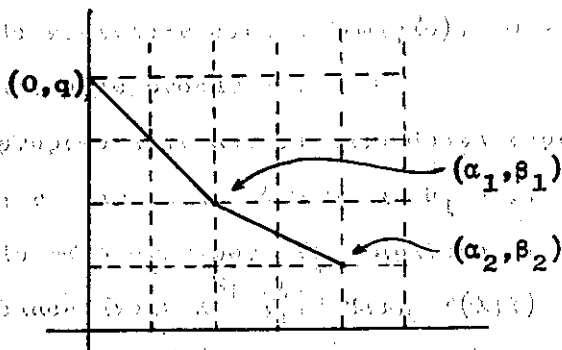
Forneceremos agora um método prático para determinar explicitamente todas as parametrizações não equivalentes da forma $x = a + t^r$, $y = \sum_{\alpha} c_{\alpha} t^{\alpha}$ centradas num ponto (a,b) de $F(x,y) = 0$.

Seja $F = \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} (X-a)^{\alpha} (Y-b)^{\beta}$ o desenvolvimento

de Taylor em potências de $X-a$ e $Y-b$. Seja q a multiplicidade de b como raiz do polinômio $F(a,Y) = \sum_{\beta} A_{0\beta} (Y-b)^{\beta} = A_{01}(Y-b) + A_{02}(Y-b)^2 + \dots$. É claro que q é o menor valor de β tal que $A_{0\beta} \neq 0$. Com efeito, se $F(a,Y) = A_{0q'}(Y-b)^{q'} + A_{0q'+1}(Y-b)^{q'+1} + \dots = (Y-b)^{q'}(A_{0q'} + A_{0q'+1}(Y-b) + \dots)$, onde $A_{0q'} \neq 0$, é claro que $q' =$ multiplicidade de b .

Seja $\varepsilon f(F) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid A_{\alpha, \beta} \neq 0\}$, onde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Munimos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ da ordem lexicográfica: $(\alpha, \beta) \leq (\alpha', \beta')$ se $\alpha < \alpha'$ ou se $\alpha = \alpha'$ e $\beta \leq \beta'$. Munimos $\varepsilon f(F)$ da ordem induzida. É claro que $\varepsilon f(F)$ admite primeiro (i.e., menor) elemento, a saber, $(0, q)$. Se F é irredutível (o que estamos supondo sistematicamente) e se $\rho > 1$, necessariamente $\varepsilon f(F) \setminus (0 \times \mathbb{N}) \neq \emptyset$. Como $\varepsilon f(F)$ é bem ordenado (por ser finito, por exemplo), tal conjunto admite primeiro elemento, digamos, (α_1, β_1) . Consideremos a reta no plano real $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que passa pelos pontos $(0, q)$ e (α_1, β_1) . A equação desta reta é $(q - \beta_1)x + \alpha_1 y = q \alpha_1$ (observemos que $\alpha_1 \neq 0$ por construção). Consideramos os pontos de $\varepsilon f(F)$ que estão sobre esta reta e tomamos o maior deles, isto é, o que admite maior α -coordenada. Mudando notação, suponhamos que tal ponto é (α_1, β_1) . Consideramos o conjunto

$\mathcal{E}f(F) \setminus \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \alpha_1} (\alpha \times \mathbb{N})$. Se tal conjunto é vazio, tem-se $\beta_1 = 0$, caso contrário, $Y-b$ seria fator de F . Neste caso, o método termina: a linha poligonal obtida consis-



te de um só lado, o segmento $(0, q)(\alpha_1, \beta_1)$. Se

$\mathcal{E}f(F) \setminus \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \alpha_1} (\alpha \times \mathbb{N}) \neq \emptyset$, tomamos o primeiro elemento e repetimos o processo. Como $\mathcal{E}f(F)$ é finito, esgotamos o processo ao cabo de um número finito de etapas, obtendo uma poligonal finita com extremidades $(0, q)$ e $(\alpha_n, 0)$ para algum $\alpha_n \in \mathbb{N}$: (tal é chamado o polígono de Newton) de F relativamente ao ponto (a, b) .

Para determinar um ramo típico de F em (a, b) , consideramos um lado típico $(\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2)$ do polígono de Newton, onde $\beta_1 > \beta_2$. Escrevamos

$$F(X, Y) = A_{\alpha_1 \beta_1} (X-a)^{\alpha_1} (Y-b)^{\beta_1} + \sum A_{\alpha \beta} (X-a)^\alpha (Y-b)^\beta + A_{\alpha_2 \beta_2} (X-a)^{\alpha_2} (Y-b)^{\beta_2} + \sum A_{\alpha' \beta'} (X-a)^{\alpha'} (Y-b)^{\beta'}$$

onde (α, β) é um ponto de $\mathcal{E}f(F)$ interior ao segmento $\overline{(\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2)}$ e (α', β') , um ponto de $\mathcal{E}f(F)$ exterior ao mesmo segmento.

Observemos que a equação da reta por (α_1, β_1) e (α_2, β_2) é da forma $r\alpha + s\beta = p$, com r, s, p inteiros e $m.d.c. (r, s) = 1$.

Efetuamos a substituição $x = a + t^r, y = b + t^s u$ (t, u novas indeterminadas) em $F(x, y) = 0$. Obtemos:

$$\begin{aligned} 0 = F(x, y) &= A_{\alpha_1 \beta_1} t^p u^{\beta_1} + t^p (\sum A_{\alpha \beta} u^\beta) + A_{\alpha_2 \beta_2} t^p u^{\beta_2} + \\ &+ \sum A_{\alpha' \beta'} t^{\alpha' r + \beta' s} u^{\beta'} = t^p (u^{\beta_2} (A_{\alpha_1 \beta_1} u^{\beta_1 - \beta_2} + \sum A_{\alpha \beta} u^{\beta - \beta_2} + A_{\alpha_2 \beta_2}) \\ &+ t^{p+1} \sum A_{\alpha' \beta'} t^{\alpha' r + \beta' s - (p+1)} u^{\beta'}) = t^p (u^{\beta_2} \varphi(u) + t P(t, u)), \end{aligned}$$

onde $\varphi(u) = A_{\alpha_1 \beta_1} u^{\beta_1 - \beta_2} + \sum A_{\alpha \beta} u^{\beta - \beta_2} + A_{\alpha_2 \beta_2}$ e $P(t, u)$ é um certo polinômio em t, u .

Ponhamos $G(t, u) = u^{\beta_2} \varphi(u) + t P(t, u)$. Se c é uma raiz de $\varphi(u)$, tem-se que $(0, c)$ satisfaz $G(t, u)$. Além disso, se c é raiz simples de $\varphi(u)$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial u} \Big|_{(0, c)} &= \beta_2 u^{\beta_2 - 1} \varphi(u) \Big|_{u=c} + u^{\beta_2} \frac{d\varphi}{du} \Big|_{u=c} + t \frac{\partial P}{\partial u} \Big|_{t=0} = \\ &= c^{\beta_2} \frac{d\varphi}{du}(c) \neq 0 \end{aligned}$$

uma vez que $\frac{d\varphi}{du}(c) \neq 0$ e $c \neq 0$ ($c=0 \Rightarrow A_{\alpha_2 \beta_2} = 0$; contradição face a $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{E}f(F)$).

Assim, se c é raiz simples de $\Phi(u)$, podemos aplicar a Proposição II.1 (ou, alternativamente, o Lema II.12), encontrando assim uma série $u = u(t) = c+dt + \dots$ tal que $G(t, u(t)) = 0$. Neste caso, as séries $x = a+t^r$, $y = b + t^s u(t) = b + ct^s + dt^{s+1} + \dots$ constituem uma parametrização de F . Como r e s são primos entre si, resulta que tal parametrização é primitiva (vide Exercícios). Obtemos, desta maneira, vários ramos de F em (a, b) à medida que tomamos as várias raízes simples de $\Phi(u)$.

Suponhamos que c é uma raiz múltipla de $\Phi(u)$. Neste caso, $\frac{\partial G}{\partial u} \Big|_{(0, c)} = 0$, isto é, c é de multiplicidade >1 em $G(0, u)$. Construímos então o polígono de Newton de $G(t, w)$ relativamente ao ponto $(0, c)$ e repetimos o processo.

O principal teorema neste contexto afirma que:

- (1) Ao cabo de um número finito de etapas, isto é, ao cabo de aplicar um número finito de transformações do tipo $x = a+t^r$, $y = b+t^s u$, obtém-se um polinômio $\Phi(u)$ cujas raízes são todas simples.
- (2) Aplicando o processo finito em (1) para todos os lados do polígono de Newton de (a, b) , obtém-se todos os ramos de F em (a, b) .

(3) Lados distintos do polígono dão origem a ramos distintos.

Não demonstraremos este teorema, mas daremos alguns exemplos para ilustrar o método. O resultado do teorema é, em essência, devido a Puiseux (J. Mathematiques pures et appliquées, t. XV, 1850), originando o capítulo das séries de Puiseux, de importância fundamental na classificação das curvas. Uma demonstração pode ser encontrada em Appel & Goursat (vide Bibliografia).

Observação: Se, para todos os lados do polígono

$(0, q) (\alpha_1, \beta_1) \dots (\alpha_n, 0)$ de Newton, os polinômios $\Phi_i(u)$ não admitem raízes múltiplas ao cabo da primeira substituição $x = a + t^r$, $y = b + t^s u$, então obtemos no máximo q ramos distintos em (a, b) . Com efeito, neste caso, para cada segmento $(\alpha_i, \beta_i) (\alpha_{i+1}, \beta_{i+1})$, o $\Phi_i(u)$ correspondente admite $\beta_i - \beta_{i+1}$ raízes distintas, dando origem a $\beta_i - \beta_{i+1}$ ramos distintos no máximo de F em (a, b) . No total, teremos $(q - \beta_1) + (\beta_1 - \beta_2) + \dots + (\beta_i - \beta_{i+1}) + \dots + (\beta_{n-1} - 0) = q$ ramos distintos em (a, b) , quando muito.

Contudo, nem sempre raízes distintas de $\Phi(u)$ dão origem a ramos distintos, como veremos abaixo.

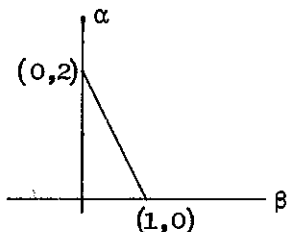
Exemplos: Seja $F = A_{10}(X-a) + A_{01}(Y-b) + A_{20}(X-a)^2 +$

$$+ A_{11}(X-a)(Y-b) + A_{02}(Y-b)^2 + \dots .$$

(1) Ponto com tangente vertical simples.

Trata-se do caso em que $A_{10} \neq 0$, $A_{01} = 0$, $A_{02} \neq 0$. Como $A_{01} = \frac{\partial F}{\partial Y}(a,b)$, tal ponto é crítico. Contudo, $\frac{\partial F}{\partial X}(a,b) = A_{10} \neq 0$; logo, (a,b) é um ponto não singular, com tangente única $x = a$. Finalmente, $\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(a,b) = 2A_{0,2} \neq 0$, o que significa que a tangente é simples (isto é, tem multiplicidade 1) ou, alternativamente, que b tem multiplicidade 2 em $F(a,Y)$.

É imediato que tal ponto admite o seguinte polígono de Newton:



A equação do único lado é $2\alpha + \beta = 2$, logo a transformação a ser aplicada é $x = a+t^2$, $y = b+tu$. Substituindo em $F(x,y) = 0$, resulta

$$t^2(A_{10} + A_{02}u^2 + t P(t,u)) = 0,$$

onde $\Phi(u) = A_{02}u^2 + A_{10}$ admite 2 raízes (distintas).

Obtemos, assim, duas parametrizações primitivas de F em (a,b) :

$$\begin{aligned} & x = a+t^2, \quad y = b + c_1 t + c_2 t^2 + \dots \\ \text{e} \quad & x = a+t^2, \quad y = b - c_1 t + d_2 t^2 + \dots \end{aligned} \quad (c_1 \neq 0).$$

Contudo tais parametrizações são, na verdade, equivalentes: a segunda é obtida da primeira pela substituição $\tau(t) = -t$.

Conclusão: num ponto com tangente vertical simples está centrado um único ramo a duas folhas.

A título de ilustração, o caso mais simples é o da parábola $F = X-Y^2$ no ponto $(0,0)$.

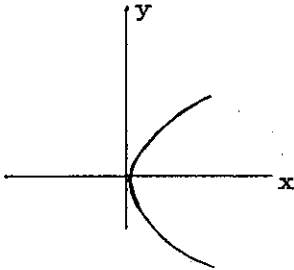
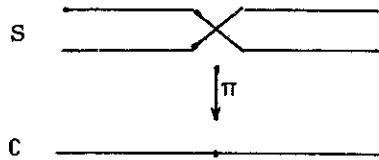


Gráfico real



Seção do modelo S idealizada por Riemann

Por substituição de $x = t^2$, $y = tu$, obtemos $t^2(1-u^2)=0$ logo $u(t) = \pm 1$ (constante). Resulta a parametrização $x = t^2$, $y = t$ (equivalente a $x = t^2$, $y = -t$).

Observação: $(0,0)$ é o único ponto de ramificação (a duas folhas) em $x-y^2 = 0$; em todos os demais pontos de $x-y^2 = 0$ está centrado um único ramo a uma folha.

Para tal, se $(a,b) \neq (0,0)$ fazemos a substituição $x = a+t$, $y = b+tu$. Por exemplo, seja $(a,b) = (1,1)$. Substituindo $x = 1+t$, $y = 1+tu$ na forma de Taylor de $X-Y^2$ em $(1,1)$, $(X-1) - 2(Y-1) - (Y-1)^2$, obtemos $t(1-2u-tu^2)$. Seja $u(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots$. Substituindo em $1-2u-tu^2 = 0$ e comparando coeficientes, obtemos $u(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} t + \frac{1}{16} t^2 - \frac{5}{128} t^3 + \dots$. Logo, o ramo em $(1,1)$ é representado por

$$x = 1+t$$

$$y = 1 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} t^2 + \frac{1}{16} t^3 - \frac{5}{128} t^4 + \dots$$

Convém não confundir as representações paramétricas (locais) que vimos considerando com "parametrizações polinomiais" (globais). Por exemplo, $x = t^2$, $y = t$ é uma parametrização polinomial de $x-y^2 = 0$ (fornece todos os pontos de $x-y^2 = 0$ à medida que t percorre \mathbb{C}). Como representação paramétrica de um ramo, $x = t^2$, $y = t$ só funciona em $(0,0)$. A parametrização polinomial $x = y^2$, $y = t$ mostra que $x-y^2 = 0$ é uma curva "racional" ("unicursal", na terminologia clássica). Entre pontos a tangentes verticais simples mais gerais, tal acontecimento é accidental. Por exemplo, $x+y^2-x^3 = 0$ admite $(0,0)$ como ponto a tangente vertical simples sem admitir parametrização polinomial. Na verdade, tal é um exemplo de cur

va "elítica"; tais curvas têm "gênero" 1, não sendo portanto racionais.

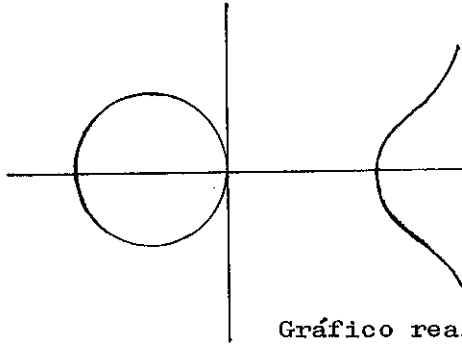


Gráfico real de $x^2 + y^2 - x^3 = 0$

(2) Ponto múltiplo ordinário.

Um ponto k -uplo ($k \geq 1$) ordinário de F é um ponto (a,b) tal que

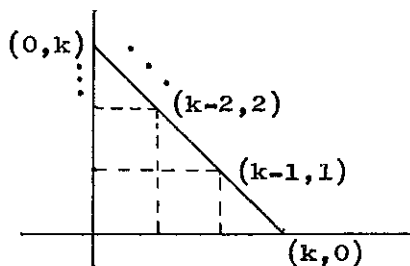
$$F = F_k + F_{k+1} + \dots = \sum_{\alpha+\beta=k} A_{\alpha\beta} (X-a)^\alpha (Y-b)^\beta + \dots \text{ e tal}$$

que o polinômio $\sum_{\alpha+\beta=k} A_{\alpha\beta} u^\beta$ tenha k raízes distintas μ_1, \dots, μ_k .

Neste caso, por (a,b) passam k tangentes distintas (isto é, com coeficientes angulares distintos) a F , a saber, $(Y-b) - \mu_i(X-a) = 0$ ($i = 1, \dots, k$). Segue-se também que a multiplicidade de b , como raiz de $F(a,Y)$, é k . Temos dois casos:

(a) $A_{k0} \neq 0$ (isto é, $\mu_i \neq 0$ para $i = 1, \dots, k$).

Aqui, o polígono de Newton tem apenas um lado:

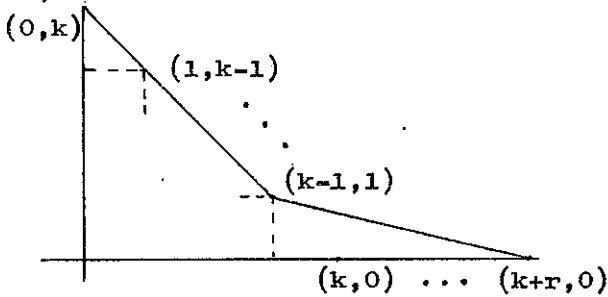


A equação do lado em questão é $\alpha + \beta = k$, de modo que a transformação a ser efetuada é dada por $x = a+t$, $y = b+tu$. Substituindo, vem $t^k (\sum_{\alpha+\beta=k} A_{\alpha\beta} u^\beta + t P(t,u)) = 0$. Como as k raízes de $\sum A_{\alpha\beta} u^\beta$ são distintas, encontramos k séries $u = u(t)$ distintas tais que $\sum A_{\alpha\beta} u(t)^\beta + t P(t, u(t)) = 0$. Logo, encontramos k parametrizações (evidentemente primitivas): $x = a+t$, $y = b + \mu_1 t + c_{12} t^2 + \dots$ ($i = 1, \dots, k$). Pela teoria geral, sabemos que tais parametrizações fornecem k ramos distintos.

(b) $A_{k0} = 0$ (isto é, $\mu_1 = 0$ digamos).

Como, em particular, $\mu_1 = 0$ é uma raiz simples, devemos ter $A_{k-1,1} \neq 0$. Então, no polígono de Newton, devemos ligar $(0, k)$ a $(k-1, 1)$ já que os termos $A_{\alpha\beta} (X-a)^\alpha (Y-b)^\beta$ com $\alpha < k-1$ e $\beta < \alpha$ apresentam sempre $A_{\alpha\beta} = 0$. Em seguida, devemos ligar $(k-1, 1)$ a $(k+r, 0)$, onde r é tal que $A_{k+r,0} (X-a)^{k+r}$ é o termo de menor grau em X com coeficiente $\neq 0$ (tal sempre e-

xiste, a menos que $Y-b$ seja fator de F). O polígono de Newton é, então:

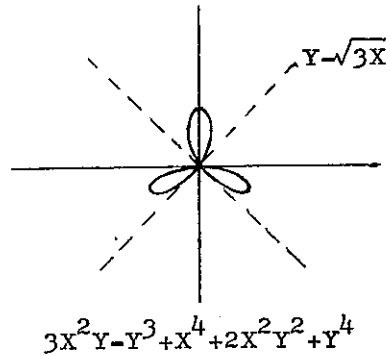
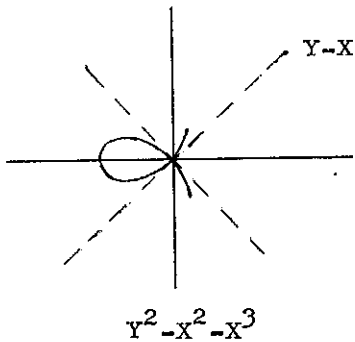


Neste caso, $\tilde{\Phi}(u)$ relativamente ao lado $\overline{(0,k)(k-1,1)}$ é $A_{k-1,1} + A_{k-2,2} u + \dots + A_{0,k} u^{k-1}$, que admite $k-1$ raízes (distintas). Obtemos $k-1$ ramos distintos em (a,b) da forma que obtivemos no caso (a).

O lado $\overline{(k-1,1)(k+r,0)}$ tem equação $\alpha + (r+1)\beta = k+r$, logo a transformação conveniente é $x = a+t$, $y = b+t^{r+1} u$. Neste caso, temos $t^{k+r}(A_{k-1,1} u + A_{k+r,0} + t P(t,u)) = 0$, isto é, $\tilde{\Phi}(u) = A_{k-1,1} u + A_{k+r,0}$. Logo, obtemos um único ramo $x = a+t$, $y = b - \frac{A_{k+r,0}}{A_{k-1,1}} t^{r+1} + \dots$ (distinto dos anteriores pela teoria geral).

Conclusão: em qualquer caso, F admite k ramos distintos a uma folha em (a,b) .

Eis exemplos concretos de cada um dos casos acima:



$(0,0)$ é um ponto duplo ordinário de $Y^2 - X^2 - X^3$ e um ponto triplo ordinário de $3X^2Y - Y^3 + (X^2 + Y^2)^2$. No primeiro caso, $(0,0)$ é também chamado ponto "nodal". Efetuando a transformação $x = t$, $y = tu$ neste caso, obtemos $t^2(u^2 - 1 - t) = 0$. Seja $u(t) = \pm 1 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots$. Substituindo em $u^2 - 1 - t$ e comparando coeficientes, obtemos $u(t) = \pm 1 \pm \frac{1}{2} t \mp \frac{1}{8} t^2 \pm \dots$. Logo, os ramos de $Y^2 - X^2 - X^3$ centrados em $(0,0)$ são dados por:

$$\begin{array}{l} x = t \\ y = t + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{8} t^3 + \dots \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} x = t \\ y = -t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{8} t^3 - \dots \end{array}$$

É um bom treinamento para o leitor calcular explicitamente os ramos centrados no ponto triplo de $3X^2Y - Y^3 + (X^2 + Y^2)^2$.

(3) Ponto cuspidal (de "reviravolta").

Trata-se de um ponto (a, b) tal que a forma de Taylor de F é:

$$F = A_{20}(X-a)^2 + A_{11}(X-a)(Y-b) + A_{02}(Y-b)^2 + \dots,$$

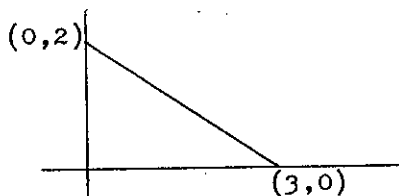
com $A_{02} \neq 0$ e $A_{20} + A_{11}u + A_{02}u^2$ admitindo uma raiz dupla μ (isto é, $A_{11}^2 = 4A_{02}A_{20}$). Evidentemente,

$$\mu = A_{11}/2A_{02}. \quad \text{Temos dois casos:}$$

(a) $A_{11} = 0$ (isto é, $\mu = 0$).

Neste caso, $A_{20} = 0$. Temos duas possibilidades: $A_{30} \neq 0$ (em outras palavras, $\mu = 0$ não é raiz de $A_{30} + A_{21}u + A_{12}u^2 + A_{03}u^3$) ou $A_{30} = 0$. No primeiro caso, dizemos que (a, b) é um ponto de reviravolta ordinário; no segundo, que é um ponto de reviravolta superior.

Um ponto de reviravolta ordinário apresenta como polígono de Newton:



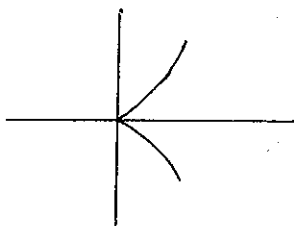
Um único lado, portanto, de equação $2\alpha + 3\beta = 6$.

Efetuada a transformação $x = a + t^2$, $y = b + t^3u$, resulta $t^6(A_{02}u^2 + A_{30} + tP(t,u)) = 0$ onde $A_{0,2}u^2 + A_{30}$ ad-

mite duas raízes distintas por ser $A_{30} \neq 0$. Pela teoria geral, obtemos duas parametrizações:

$$\begin{aligned} x &= a + t^2 & x &= a + t^2 \\ y &= b + \sqrt{-\frac{A_{30}}{A_{02}}} t^3 + \dots, & y &= b - \sqrt{-\frac{A_{30}}{A_{02}}} t^3 + \dots \end{aligned}$$

Tais parametrizações são, contudo, equivalentes. Assim, um ponto cuspidal ordinário admite um único ramo a duas folhas. O exemplo mais simples é $y^2 - x^3$:



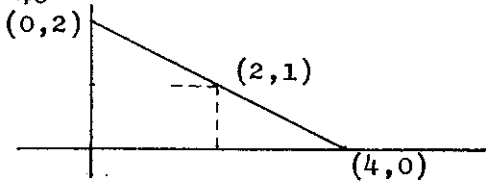
Neste caso, $A_{30} = -1$, $A_{02} = 1$. Obtemos $t^6(u^2 - 1) = 0$ por substituição direta em $y^2 - x^3 = 0$. Logo $u(t) = \pm 1$, fornecendo o ramo

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

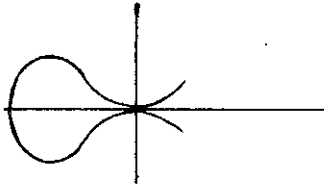
Aqui, como no caso de $y^2 - x = 0$, a parametrização acima é também uma parametrização racional da curva $y^2 - x^3 = 0$.

O segundo caso, $A_{30} = 0$, admite várias possibilidades, conforme $A_{40} = 0$ ou $A_{40} \neq 0$, etc. Por exem-

plo, se $A_{40} \neq 0$, o polígono de Newton tem um só lado:



O exemplo mais simples é $Y^2 - X^4 - X^5$:



A equação do lado é $\alpha + 2\beta = 4$, logo a substituição é $x = t$, $y = t^2 u$. Obtemos $t^4 u^2 - t^4 - t^5 = t^4(u^2 - 1 - t)$.

Recaimos no caso do ponto duplo ordinário, obtendo

$u(t) = \pm 1 \pm \frac{1}{2} t \mp \frac{1}{8} t^2 \pm \dots$. Conseqüentemente, temos dois ramos distintos $x = t$, $y = \pm t^2 \pm \frac{1}{2} t^3 \mp \frac{1}{8} t^4 \pm \dots$, a uma folha cada um deles, exatamente como no caso de $Y^2 - X^2 - X^3$.

Observação: O fenômeno acima não é acidental. Na verdade,

podemos passar de $Y^2 - X^4 - X^5$ a $Y^2 - X^2 - X^3$

por meio de uma transformação "biracional", a saber, a nossa velha conhecida transformação quadrática $X' = X$,

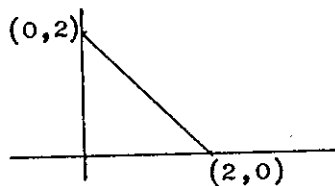
$Y' = XY$. Poderíamos, assim, ter obtido os ramos de

$Y^2 - X^4 - X^5$ em $(0,0)$ aplicando a transformação quadrática aos ramos de $Y^2 - X^2 - X^3$ centrados em $(0,0)$. Tal proce-

dimento é, no fundo, uma ilustração do método de demonstração do Teorema II.9 !...

(b) $A_{11} \neq 0$ (isto é, $\mu \neq 0$).

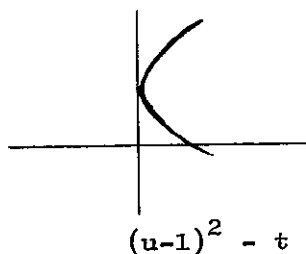
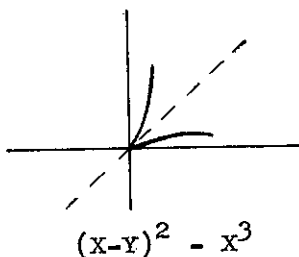
Neste caso, também $A_{20} \neq 0$. Como em (a), temos duas possibilidades, conforme μ não seja raiz de $A_{30} + A_{21}u + A_{12}u^2 + A_{03}u^3$ (cuspidal ordinário) ou seja raiz de tal polinômio (cuspidal superior). Em qualquer das duas possibilidades, o polígono de Newton tem um único lado:



A transformação é $x = a+t$, $y = b+tu$ e $\tilde{\phi}(u) = A_{02}u^2 + A_{11}u + A_{20} = A_{02}(u-\mu)^2 = A_{02}\left(u - \frac{A_{11}}{2A_{02}}\right)^2$. Como $\tilde{\phi}(u)$ admite raiz dupla, somos levados a repetir o processo para $G(t,u) = \tilde{\phi}(u) + tP(t,u)$ no ponto $(0,\mu)$. Ilustremos o processo com $X^2 - 2XY + Y^2 - X^3 = (X-Y)^2 - X^3$ em $(0,0)$. Efetuando a transformação $x = t$, $y = tu$, obtemos $t^2((u-1)^2 - t)$, logo $G(t,u) = (u-1)^2 - t$. Mas, então, $G(t,u) = 0$ admite $(0,1)$ como ponto a tangente vertical simples (Exemplo 1), tendo aí um único ramo a duas folhas dado por $t = t'^2$, $u = 1+t'$. Logo, $(X-Y)^2 - X^3$ admite

um único ramo centrado em $(0,0)$, a saber, $x = t^2$,
 $y = t^2 + t^3$.

Aqui cabe a mesma observação anterior de que
 $(u-1)^2 - t$ é a transformada própria de $(X-Y)^2 - X^3$ pe-
 la transformação quadrática $X = t$, $Y = tu$.

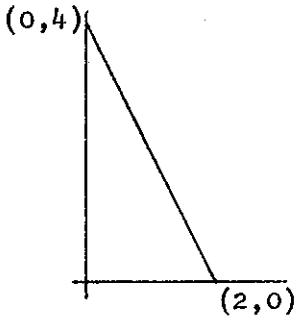


Em geral, um ponto de reviravolta ordinário admi-
 te um único ramo a duas folhas: $x = a+t^2$, $y = b + \mu t^2 +$
 $+ \sqrt{\frac{v}{A_{02}}} t^3 + \dots$, onde μ é a raiz dupla de $A_{02} u^2 +$
 $+ A_{11} u + A_{20}$ e v é o valor do polinômio $A_{30} + A_{21} u +$
 $+ A_{12} u^2 + A_{03} u^3$ em μ .

(4) Cuspidal superior com tangente vertical.

$F = X^2 - Y^4 - Y^5$ em $(0,0)$. Como lugar de pontos
 (isto é, como curva) é a cuspidal $Y^2 - X^4 - X^5$ após a mu-
 dança de coordenadas $X' = Y$ e $Y' = X$. Do ponto de vis-
 ta da ramificação, o comportamento é bem diferente. Ve-

mos que 0 é de multiplicidade 4 em $F(0,y) = 0$.



Polígono de Newton

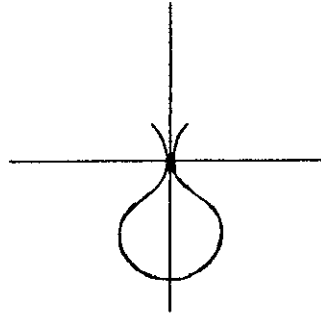


Gráfico real

A equação do único lado do polígono é $2\alpha + \beta = 4$, logo a substituição é da forma $x = t^2$, $y = tu$. Substituindo, vem $t^4 - t^4 u^4 - t^5 u^5 = t^4(1 - u^4 - tu^5)$, logo $\Phi(u) = u^4 - 1$ tem quatro raízes distintas, $\pm 1, \pm i$. As parametrizações

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = -t \end{cases}$$

são equivalentes, bem como

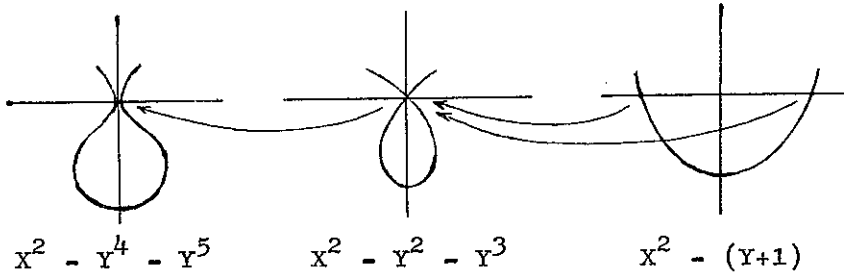
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = it \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = -it \end{cases}$$

Logo, há exatamente dois ramos centrados em $(0,0)$, a duas folhas cada um deles.

Observação: Na literatura clássica, o ponto $(0,0)$ é olhado como dois "pontos analíticos" distin-

tos sobre o ponto de ramificação $0 \in \mathbb{C}$. Este expediente, aparentemente artificioso, visava conformidade com a teoria dos prolongamentos analíticos das funções univalentes, pela qual uma função tem um único ramo na vizinhança de um ponto de \mathbb{C} . Na realidade, tal expediente é bastante natural. Do ponto de vista da resolução de singularidades de curvas, significa apenas que os ramos em $(0,0)$ foram "separados" ou que a singularidade $(0,0)$ de $x^2 - y^4 - y^5 = 0$ foi "resolvida". Na prática, conseguimos isto mediante a aplicação sucessiva de duas transformações quadráticas, obtendo enfim a parábola $x^2 = y+1$, cujos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$ correspondem aos mencionados pontos analíticos (vide figura abaixo).

Finalmente, tal exemplo permite ver que as transformações quadráticas não preservam, em geral, o número de folhas em cada ramo, mas tão somente o número total de ramos. É por isto que as transformações quadráticas, úteis para provar a existência e a finitude dos ramos, são totalmente inúteis para calcular o número de folhas em cada ramo. Esta lacuna é preenchida pelas transformações mais gerais do tipo $x = t^r$, $y = t^s u$ que vimos considerando.



No caso de funções univalentes $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, o problema não se põe já que então y é dada explicitamente como função de x , de maneira que $y-f(x) = 0$, que é (quer f seja polinomial ou não) a equação de uma curva sem singularidades em \mathbb{C} , devido a que $\frac{\partial (Y-f(X))}{\partial Y} = 1 \neq 0$.

III. SUPERFÍCIES DE RIEMANN ALGÉBRICAS

III.1. Funções algébricas à luz dos revestimentos ramificados de \mathbb{C} .

Neste capítulo, queremos tratar do aspecto geométrico das funções algébricas. Por tal, entendemos a construção da superfície de Riemann S associada a um polinômio irreduzível $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ e o estudo das propriedades da projeção canônica $\pi: S \rightarrow \mathbb{C}$ (que é, como veremos, uma aplicação de "revestimento ramificado" no sentido topológico).

Divergimos um pouco da maioria dos textos usuais, no que obteremos S como lugar de pontos de F em $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ como primeira etapa. Isto é só metade do caminho. Em seguida, temos de "resolver as singularidades" de S a fim de obter um modelo da superfície de Riemann que é então idêntico, em todos os aspectos, ao modelo de variedade analítica de dimensão (complexa) 1, construído mediante consideração dos "germes de funções" (que é, no fundo, a idéia original de Riemann em linguagem sofisticada). Isto, levamos a cabo no §III.2.

Definição III.1 - Uma curva algébrica irreduzível (plana) é o conjunto dos pontos a coordenadas complexas que são zeros de um polinômio irreduzível $F \in \mathbb{C}[X, Y]$.

Usaremos a notação $C(F)$ para a curva determinada por $F \in \mathbb{C}[X, Y]$.

Não é difícil verificar que $C(F)$ é um subconjunto fechado na topologia de \mathbb{C}^2 dada por uma das métricas usuais. Identificando \mathbb{C}^2 com \mathbb{R}^4 , tem-se que $C(F)$ é um subconjunto de \mathbb{R}^4 de dimensão real 2 (num sentido que se pode precisar). Resulta que $C(F)$ é uma superfície diferenciável usual em todos os pontos, com exceção de um número finito de pontos - os pontos singulares de F . (Contudo, $C(F)$ está contido em \mathbb{R}^4 e não em \mathbb{R}^3 , daí o apelarmos para o gráfico real de $C(F)$, ou de qualquer de suas seções por um plano real em \mathbb{R}^4 , para alguma visualização).

Neste sentido é que chamamos $C(F)$ de superfície de Riemann (com singularidades) associada a F .

Consideremos a projeção de \mathbb{C}^2 sobre a primeira coordenada, $(x, y) \mapsto x$. A restrição desta projeção a $C(F)$ será designada por π . Assim, $\pi: C(F) \rightarrow \mathbb{C}$. É claro que π é contínua relativamente à topologia induzida de \mathbb{C}^2 . π é dita a projeção estrutural de $C(F)$.

Por outro lado, podemos escrever $F = p_0(X)Y^n + p_1(X)Y^{n-1} + \dots + p_n(X)$, onde $p_0(X) \neq 0$. Como C é algebricamente fechado (teorema fundamental da Álgebra), resulta que para todo $\alpha \in C$ tal que α não é, simultaneamente, raiz dos polinômios $p_0(X), \dots, p_{n-1}(X)$, $F(\alpha, y) = 0$ tem alguma raiz em C . Assim, se $n \geq 1$ com exceção de um conjunto finito de pontos, todo ponto de C é imagem de algum ponto de $C(F)$ (em particular, a imagem $\pi(C(F))$ de $C(F)$ é um conjunto aberto e denso em C na topologia usual). Resumindo a discussão:

Proposição III.2 - Seja $F = p_0(X)Y^n + \dots + p_n(X) \in C[X, Y]$ um polinômio irredutível, seja $C(F)$ a superfície de Riemann associada e seja $\pi: C(F) \rightarrow C$ a projeção estrutural. Então:

- (a) π é constante se e só se $n = 0$.
- (b) Se π não é constante, a imagem de $C(F)$ é o complementar de um conjunto finito de pontos de C .
- (c) Se π não é constante, a imagem inversa por π de qualquer ponto de $\pi(C(F))$ é um conjunto finito de pontos de $C(F)$. Com exceção de um conjunto finito de pontos, a imagem inversa de todo ponto de $\pi(C(F))$ admite n pontos (incluindo multiplicidades).

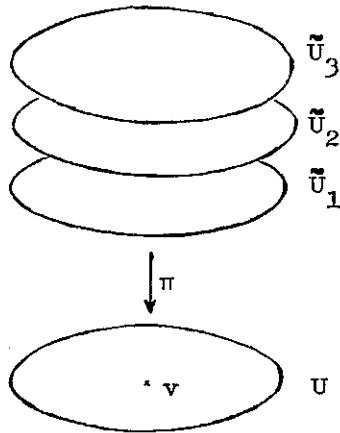
N.B.: A multiplicidade de um ponto $(a, b) \in C(F)$ é, por

definição, a multiplicidade de b como raiz de $F(a,y)=0$.

Definição III.3 - Na notação acima, o inteiro n é chamado o grau da projeção $\pi: \mathbb{C}(F) \rightarrow \mathbb{C}$.

Do ponto de vista topológico, o grau acima é apenas "genérico". Com efeito, como vimos no Capítulo II, Prop. II.4, existe apenas um número finito de pontos críticos da função algébrica implícita $y = y(x)$ definida por F . Consequentemente, com exceção de um conjunto finito de pontos, a imagem inversa de todo ponto de \mathbb{C} admite n pontos distintos.

Recordemos que uma variedade topológica de dimensão m é um espaço topológico de Hausdorff V , conexo por arcos, tal que todo ponto de V admite uma vizinhança homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^m . Se $m = 2$, a variedade é dita uma superfície topológica. Uma aplicação contínua $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$, entre variedades topológicas de dimensão m , é uma aplicação de revestimento (ou recobrimento) se todo $v \in V$ admite uma vizinhança $U \subset V$ tal que $\pi^{-2}(U)$ é a união disjunta de abertos $\tilde{U}_i \subset \tilde{V}$ tais que $\pi|_{\tilde{U}_i}: \tilde{U}_i \rightarrow U$ é um homeomorfismo.



Uma vizinhança U nas condições acima será chamada admissível.

Observemos que uma aplicação de revestimento $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$ é, em particular, um homeomorfismo local: dado $\tilde{v} \in \tilde{V}$, existe $U \subset V$ (vizinhança admissível de $\pi(\tilde{v})$ em V) tal a restrição de π à componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ contendo \tilde{v} é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Uma aplicação de revestimento $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$ é chamada finita se, para todo $v \in V$, $\pi^{-1}(v)$ é um conjunto finito de pontos. Neste caso, o número de pontos nas fibras $\pi^{-1}(v)$ fornece, à medida que v percorre V , uma aplicação $V \rightarrow \mathbb{Z}$ que é localmente constante, mais precisamente, constante em cada componente conexa de V . Se V for conexo, o inteiro n , imagem desta aplicação, é o grau

de revestimento. Neste caso, dizemos que $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$ é um revestimento a n folhas.

Dado um revestimento $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$, um caminho (contínuo) $\gamma: [0,1] \rightarrow V$ e um ponto $\tilde{v} \in \tilde{V}$, um levantamento de γ com ponto inicial \tilde{v} é um caminho (contínuo) $\tilde{\gamma}: [0,1] \rightarrow \tilde{V}$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{v}$ e tal que $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Usaremos o seguinte resultado.

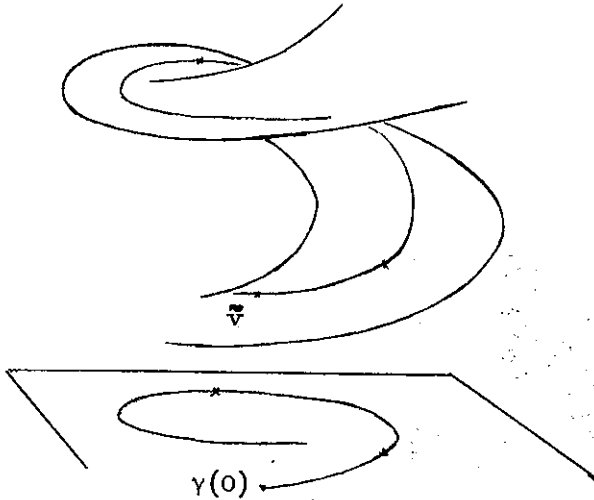
Lema III.4 - Seja $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$ um revestimento. Para todo caminho γ em V e para todo ponto $\tilde{v} \in \tilde{V}$ tal que $\pi(\tilde{v}) = \gamma(0)$, existe um levantamento de γ com ponto inicial \tilde{v} .

Demonstração: Como $[0,1]$ é compacto, existe n suficientemente grande tal que $\gamma[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \subset U_i$ para alguma vizinhança admissível U_i , para todo

$i \in \{1,2,\dots,n\}$. Chamemos \tilde{U}_1 a componente conexa de $\pi^{-1}(U_1)$ contendo o ponto dado \tilde{v} ; seja $\sigma_1: U_1 \rightarrow \tilde{U}_1$ o homeomorfismo inverso de $\pi|_{\tilde{U}_1}: \tilde{U}_1 \rightarrow U_1$. Então,

$\tilde{\gamma}_1 = \sigma_1 \circ \gamma|_{[0,1/n]}$ é um caminho começando em \tilde{v} tal que $\pi \circ \tilde{\gamma}_1 = \gamma|_{[0,1/n]}$. Em outras palavras, $\tilde{\gamma}_1$ é um levantamento do trecho $\gamma|_{[0,1/n]}$ de γ , com ponto inicial \tilde{v} . Repetimos este processo para o trecho $\gamma: [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \rightarrow U_2$,

obtendo o levantamento $\tilde{\gamma}_2: \sigma_2 \circ \gamma \Big|_{[1/n, 2/n]}$ com ponto inicial $\tilde{\gamma}_1(1/n) = \sigma_1(\gamma(1/n)) = \sigma_2(\gamma(1/n))$. Prosseguindo desta maneira, obtemos finalmente um levantamento de γ com ponto inicial $\tilde{\gamma}$ (vide figura abaixo).



Seja, agora, $C(F)$ a superfície de Riemann associada a um polinômio irreduzível $F \in C[X, Y]$ e seja $\pi: C(F) \rightarrow C$ a projeção estrutural.

Proposição III.5 - Se c_1, \dots, c_k são os pontos críticos de F , a restrição

$$\pi \Big|_{C(F) \setminus \bigcup_{i=1}^k \pi^{-1}(c_i)} : C(F) \setminus \bigcup_{i=1}^k \pi^{-1}(c_i) \rightarrow C \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$$

é um revestimento a $n = \text{gr}_Y F$ folhas.

Demonstração: Resulta do Teorema II.2 e da Proposição III.2,

a menos da verificação de que domínio e contradomínio são ambos superfícies no sentido empregado anteriormente. Verifiquemos, pois, esta última parte. Primeiramente, ambas são certamente localmente conexas por arcos por serem localmente homeomorfas a \mathbb{R}^2 . Por outro lado, $C \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$ é evidentemente conexo por ser um aberto denso de um conexo (a saber, C). Segue-se que $C \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$ é conexo por arcos em virtude de um teorema conhecido. O mesmo argumento vale para $C(F) \setminus \bigcup_{i=1}^k \pi^{-1}(c_i)$, uma vez que mostremos sua conexidade global. Este último resultado é não trivial, merecendo que o isolemos como

Teorema III.6 - Se $F \in C[X, Y]$ é um polinômio irreduzível, $C(F)$ é conexa.

Para a demonstração deste teorema, usaremos o

Lema III.7 - Seja $F = p_0(X)Y^n + \dots + p_n(X) \in C[X, Y]$ um polinômio irreduzível, com $p_0(X) \neq 0$ e $n \geq 1$. Seja $a \in C$ um ponto não crítico de F e sejam $f_1(z), \dots, f_\ell(z)$ funções definidas e holomorfas num entorno U de a (U sem pontos críticos) tais que:

- (i) $\ell \leq n$
- (ii) $F(z, f_1(z)) = \dots = F(z, f_\ell(z)) = 0$ para todo $z \in U$.

(iii) O prolongamento analítico de uma qualquer dentre as funções f_1, \dots, f_ℓ , ao longo de um caminho fechado começando em a e evitando os pontos críticos de F , conduz a uma delas novamente.

Então, $\ell = n$.

Demonstração: Consideremos as funções simétricas nas

$$f_1, \dots, f_\ell:$$

$$s_1(z) = -(f_1(z) + \dots + f_\ell(z))$$

$$s_2(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) + \dots + f_{\ell-1}(z) \cdot f_\ell(z)$$

.....

$$s_\ell(z) = (-1)^\ell f_1(z) \cdot \dots \cdot f_\ell(z), \quad z \in U.$$

Pela hipótese (iii), prolongamento analítico ao longo de qualquer caminho fechado começando em a e evitando os pontos críticos de F não altera as s_1, \dots, s_ℓ . Logo, o prolongamento das s_1, \dots, s_ℓ a qualquer ponto não crítico de F é único. Resulta que s_1, \dots, s_ℓ são analíticas no complementar dos pontos críticos de F . Mostremos que, de fato, elas admitem prolongamentos que são funções meromorfas no plano estendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Para tal, mostraremos que existe um inteiro $N > 0$ e um número real $M > 0$ tais que, para todo $j \in \{1, \dots, \ell\}$, ten-se:

$$|(z-c)^N s_j(z)| \leq M, \quad 0 < |z-c| < \epsilon$$

e

$$|s_j(z)/z^N| \leq M, \quad |z| > \frac{1}{\epsilon},$$

onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno e $c \in \mathbb{C}$ ($c \neq \infty$) é um ponto crítico de F .

Pela maneira como s_1, \dots, s_ℓ são obtidas a partir de f_1, \dots, f_ℓ , basta evidentemente demonstrar as desigualdades acima para uma f_j no lugar de s_j .

Suponhamos, primeiramente, que $c \neq \infty$ é ponto crítico genuíno e seja $\epsilon > 0$ tão pequeno de modo a que $p_0(z) \neq 0$ se $|z-c| \leq \epsilon$, onde $F(X, Y) = p_0(X)Y^n + \dots + p_n(X)$. Seja (z, w) um zero de F tal que $|z-c| < \epsilon$ e ponhamos $d = \max_i |p_i(z)/p_0(z)|^{1/i}$. Então $|p_i(z)/p_0(z)| \leq d^i$ para todo i , de modo que, pondo $u = w/d$ resulta, da equação $u^n + (p_1(z)/dp_0(z))u^{n-1} + \dots + (p_n(z)/d^n p_0(z)) = 0$, que $|u|^n \leq 1 + |u| + \dots + |u|^{n-1}$. Consequentemente,

$$|u|^n \leq \frac{|u|^{n-1}}{|u| - 1}. \quad \text{Ora, se } |u| \geq 2, \text{ tem-se então}$$

$|u|^n \leq \frac{|u|^{n-1}}{|u| - 1} \leq |u|^n - 1$, o que é absurdo. Logo, deve-se ter $|u| < 2$, isto é, $|w| < 2d$ (N.B. O argumento supõe que $d \neq 0$ para ter sentido, mas a conclusão $|w| < 2d$ é válida ainda se $d = 0$). Como as funções $p_i(z)/p_0(z)$ são contínuas no compacto $|z-c| \leq \epsilon$, temos a limitação

procurada para as f_j 's.

Se $c \neq \infty$ é tal que $p_0(c) = 0$, o argumento é análogo exceto que, desta feita, necessitamos introduzir um fator $(z-c)^N$.

Finalmente, se $c = \infty$, olhamos para o polinômio $X^m F(\frac{1}{X}, Y)$, onde $m = \max_i \{gr p_i(X)\}$ e procedemos analogamente para o ponto 0.

Desta forma, mostramos que s_1, \dots, s_ℓ são morfismos em $C \cup \{\infty\}$.

Pelo teorema de Liouville, podemos escrever

$s_j = \frac{q_j}{q_0}$, $j = 1, \dots, \ell$, com $q_j, q_0 \in C[X]$ sem fatores comuns. Ora, por construção, cada $(z, f_j(z))$, $z \in U$, é solução do polinômio $Y^\ell + s_1(X)Y^{\ell-1} + \dots + s_\ell(X) \in C(X)[Y]$ e, portanto, do polinômio $H = q_0(X)Y^\ell + q_1(X)Y^{\ell-1} + \dots + q_\ell(X) \in C[X, Y]$. Se $\ell < n$, F e H não têm fatores comuns, já que F é irredutível e $gr_Y H = \ell$, $n = gr_Y F$. Segue-se (vide demonstração da Prop. III.4) que existe apenas um conjunto finito de $z \in C$ tais que $F(z, Y)$ e $H(z, Y)$ admitem uma solução comum em Y . Por outro lado, tínhamos que $f_j(z)$ é solução de ambas para todo $z \in U$; contradição. Necessariamente, $\ell = n$.

C.Q.D. para o lema.

Passemos, entretanto, à demonstração do teorema. Basta provar que $C(F)_{\text{reg}} = C(F) \setminus \bigcup_{i=1}^k \pi^{-1}(c_i)$ é conexo, uma vez que é denso em $C(F)$. Sejam, então, (a, b) e (a', b') pontos de $C(F)_{\text{reg}}$. Sejam $f(z)$ e $f'(z)$ (f' não é a derivada de f !...) funções holomorfas em vizinhanças convenientes de a e a' , respectivamente, tais que $F(z, f(z)) = 0$ e $F(z, f'(z)) = 0$ em tais vizinhanças, respectivamente. Pela Prop. II.5, $f(z)$ e $f'(z)$ são, em verdade, holomorfas num círculo máximo evitando os pontos críticos de F . Resulta que $f(z)$ (respectivamente, $f'(z)$) admite prolongamento analítico ao longo de qualquer caminho começando em a (respectivamente, a') e contido inteiramente em $C(F)_{\text{reg}}$.

Queremos mostrar que (a, b) e (a', b') podem ser ligados por um arco contido em $C(F)_{\text{reg}}$. A idéia é ligar a e a' por um caminho conveniente em $C \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$ e, em seguida, levantar este caminho até $C(F)_{\text{reg}}$. Procedamos por etapas: primeiramente, seja $\gamma: [0, 1] \rightarrow C \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$ um caminho tal que $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = a'$ (tal γ existe pela conexidade por arcos de $C \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$).

Ora, pelo Teorema II.2, existem n funções g_1^i, \dots, g_n^i analíticas num entorno de a^i tais que $F(z, g_1^i(z)) = \dots = F(z, g_n^i(z)) = 0$ para z neste entorno. Logo, $f^i(z) = g_1^i(z)$ num entorno de a^i . Por outro lado, qualquer das funções g_1^i, \dots, g_n^i pode, pelo Lema III.7, ser obtida de g_1^i (digamos) por prolongamento analítico ao longo de algum caminho fechado começando em a^i e contido em $C \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$.

Seja, agora, $\tilde{\gamma}: [0,1] \rightarrow C(F)_{\text{reg}}$ um levantamento de γ até $C(F)_{\text{reg}}$ com ponto inicial (a,b) (vide Lema III.4). Em particular, $\pi(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = a^i$, logo $\tilde{\gamma}(1) = g_r^i(a^i)$ para algum r , $1 \leq r \leq n$. Pela observação acima, existe um caminho fechado começando em a^i , ao longo do qual g_1^i pode ser prolongada a g_n^i .

Levantando tal caminho até $C(F)_{\text{reg}}$ e compondo com $\tilde{\gamma}$, obtemos enfim o caminho procurado ligando (a,b) a (a^i, b^i) .

C.Q.D. para o teorema.

Definição III.8 - Sejam \tilde{V} e V superfícies topológicas exceto, possivelmente, em um conjunto discreto de pontos. Seja $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$ uma aplicação contínua. Suponhamos que existe um subconjunto $D \subset V$ discreto tal que a restrição $\pi|_{\tilde{V} \setminus \pi^{-1}(D)}: \tilde{V} \setminus \pi^{-1}(D) \rightarrow V \setminus D$ seja

um recobrimento de grau n . Neste caso, dizemos que

$\pi: \tilde{V} \rightarrow V$ é um recobrimento ramificado de grau n .

Como consequência da Prop. III.5, a projeção estrutural $\pi: \mathbb{C}(F) \rightarrow \mathbb{C}$ associada a um polinômio irreduzível $F = p_0(X)Y^n + \dots + p_n(X)$ (com $p_0(X) \neq 0$ e $n \geq 1$) é um recobrimento ramificado de grau n .

O que acontece com $\pi^{-1}(c)$, onde c é um ponto crítico de F ? Sabemos que $\#\pi^{-1}(c) \leq n$ ($= n$, incluindo as multiplicidades das raízes de $F(c, Y)$). Seja $(c, b) \in \pi^{-1}(c)$. Suponhamos, primeiramente, que (c, b) não é ponto singular de F , isto é, que $\frac{\partial F}{\partial X}(c, b) \neq 0$ (em outras palavras, o desenvolvimento de Taylor de F em (c, b) admite parte linear $\neq 0$). Neste caso, existe um único ramo de F centrado em (c, b) , seja $x = c + t^r$, $y = \sum_{\alpha} d_{\alpha} t^{\alpha}$.

Definição III.9 - A ordem de ramificação de π no ponto (c, b) (ou de (c, b) , a projeção π estando subentendida) é o inteiro não negativo $r-1$, onde r é o número de folhas do (único) ramo de F centrado em (c, b) . Notação: $\mathcal{G}_{\pi}(c, b)$.

Dizemos que (c, b) é um ponto de ramificação de π (ou de $\mathbb{C}(F)$, π estando subentendida como sempre) se sua ordem de ramificação for ≥ 1 (isto é, se o ramo cen-

trado em (c, b) apresenta pelo menos duas folhas).

O inteiro $\sum_{\substack{q \in \mathbb{C}(F) \\ q \text{ não singular}}} \mathcal{O}_{\pi}(q)$ é chamado a ordem de ramificação não singular de π .

Observação: O que aparece, na literatura sobre o assunto, como "índice de ramificação" é o número de folhas do ramo. Notação: $e_{\pi}(q)$. Assim, tem-se $\mathcal{O}_{\pi}(q) = e_{\pi}(q) - 1$, de maneira que a ordem de ramificação não singular de π também aparece como $\sum_{\substack{q \in \mathbb{C}(F) \\ q \text{ não singular}}} (e_{\pi}(q) - 1)$.

Seja $G \in \mathbb{C}[X, Y]$ um polinômio não admitindo F por fator. Se $(a, b) \in \mathbb{C}(F)$ é não singular e se $x = a+t^r$, $y = \eta(t) = \sum_{\alpha} d_{\alpha} t^{\alpha}$ é um representante do ramo de F centrado em (a, b) , tem-se $G(a+t^r, \eta(t)) \neq 0$. Consequentemente, $\text{ord } G(a+t^r, \eta(t)) < \infty$. Por outro lado, G fornece uma função polinomial definida em $\mathbb{C}(F)$ que ainda designaremos por G . Dizemos que a função G tem um zero de ordem $\text{ord } G(a+t^r, \eta(t))$. Notação: $\text{ord}_{(a,b)} G$.

Em particular, a projeção estrutural $\pi: \mathbb{C}(F) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função polinomial pois é a restrição da função coordenada x em \mathbb{C}^2 . Ora, $X(a+t^r, \eta(t)) = a+t^r$, logo $(X-a)(a+t^r, \eta(t)) = t^r$. Como $\text{ord}(t^r) = r$, acabamos de demonstrar o

Corolário III.10 - Se $(a,b) \in \mathbb{C}(\mathbb{F})$ é ponto não singular, tem-se $\mathcal{O}_\pi((a,b)) = \text{ord}_{(a,b)}(X-a)$.

Exercício: Seja $F \in \mathbb{C}[X,Y]$ um polinômio irreduzível, seja $\mathbb{C}[x,y] = \mathbb{C}[X,Y]/(F)$ o anel quociente de $\mathbb{C}[X,Y]$ pelo ideal principal gerado por F (x e y designam, respectivamente, as imagens de X e Y mediante o homomorfismo quociente $\mathbb{C}[X,Y] \rightarrow \mathbb{C}[X,Y]/(F)$).

- (i) Mostre que $\mathbb{C}[x,y]$ é um domínio de integridade (isto é, satisfaz a propriedade de que se $g(x,y) \cdot h(x,y) = 0$, então $g(x,y) = 0$ ou $h(x,y) = 0$).
- (ii) Mostre que todo \mathbb{C} -homomorfismo $\mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[x,y]$ induz uma função polinomial $\mathbb{C}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{C}$ e vice-versa. Estas associações são inversas uma da outra.
- (iii) Seja $\pi: \mathbb{C}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{C}$ a projeção estrutural. Mostre que o \mathbb{C} -homomorfismo $\pi^*: \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[x,y]$ associado (vide (ii)) é injetor se e só se π não é constante.
- (iv) Seja $\mathbb{C}(x,y)$ o corpo de frações de $\mathbb{C}[x,y]$ (um elemento de $\mathbb{C}(x,y)$ é, por definição, uma classe de equivalência de pares ordenados $(f,g) \in \mathbb{C}[x,y] \times (\mathbb{C}[x,y] \setminus \{0\})$ pela relação $(f,g) \sim (f_1, z_1)$ se e só se $f \cdot z_1 = f_1 \cdot g$ em $\mathbb{C}[x,y]$. Uma tal classe é designada por $\frac{f}{g}$, como de costume. Somamos e multiplicamos "frações"

da maneira habitual). Se π não é constante, mostre que $\pi^*: \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[x,y]$ induz uma extensão $\mathbb{C}(x,y)|\mathbb{C}(X)$ de corpos, onde $\mathbb{C}(X)$ é o corpo das funções racionais (= corpo de frações de $\mathbb{C}[X]$). Mostre que o grau $[\mathbb{C}[x,y]: \mathbb{C}(X)]$ desta extensão é igual ao grau do recobrimento ramificado $\pi: \mathbb{C}(F) \rightarrow \mathbb{C}$.

A fim de considerar a ordem de ramificação de $\pi: \mathbb{C}(F) \rightarrow \mathbb{C}$ num ponto singular de $\mathbb{C}(F)$, precisamos entender o processo de "desingularização" de uma curva algébrica, o que será feito no próximo parágrafo.

III.2. Resolução das singularidades de uma curva algébrica; recobrimentos ramificados da esfera de Riemann.

A rigor, para a definição de ordem de ramificação num ponto $(a,b) \in \mathbb{C}(F)$ (singular ou não), não é essencial resolver explicitamente as singularidades de $\mathbb{C}(F)$. Basta saber o número de folhas r_i em cada um dos ramos $x = a + t^{r_i}$, $y = \eta_i(t)$ de F em (a,b) , definindo então $\sigma_\pi((a,b)) = \sum_i r_i$.

Veremos, contudo, que a resolução das singularidades de $\mathbb{C}(F)$ esclarece o conteúdo geométrico da projeção $\pi: \mathbb{C}(F) \rightarrow \mathbb{C}$, permitindo substituir π por uma outra "projeção" $\tilde{\pi}: \widetilde{\mathbb{C}(F)} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\widetilde{\mathbb{C}(F)}$ é uma superfície topológica genuína (isto é, sem pontos excepcionais). Afinal, um dos nossos objetivos é aproveitar a idéia original de Riemann, colocando-a em perspectiva: $\widetilde{\mathbb{C}(F)}$ é o modelo rigoroso que Riemann buscava!...

Conforme observamos (§I.2, Obs.(1)), o modelo de Riemann era ideal, não "cabendo" em \mathbb{R}^3 sem auto-interseções. Desta forma, não há esperança de que $\widetilde{\mathbb{C}(F)}$ esteja em \mathbb{R}^3 . Na melhor das hipóteses, $\widetilde{\mathbb{C}(F)} \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ (por exemplo, se F não tem pontos singulares). Em geral, precisamos de mais dimensões, \mathbb{C}^2 sendo também insuficiente.

Por outro lado, vimos sistematicamente desprezando o que se passa no ponto ∞ do plano estendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Contudo, sabemos que, sob certos aspectos, é indispensável incluir o estudo do comportamento numa vizinhança de ∞ . Por exemplo, o resultado de que o número de zeros e o número de polos (incluindo multiplicidades) de uma função racional em \mathbb{C} coincidem, só é válido mediante a inclusão do ponto ∞ . Também para o estudo da ramificação da

projeção estrutural $\pi: \mathbb{C}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{C}$, é importante considerar o ponto ∞ . Ora, se compactificamos \mathbb{C} mediante a introdução de ∞ , qual processo de compactificação de $\mathbb{C}(\mathbb{F})$ deveremos usar de modo que a compactificada $\overline{\mathbb{C}(\mathbb{F})}$ seja definida por equações algébricas?

A maneira de fazer isto consiste em usar o plano projetivo (complexo) \mathbb{P}^2 . Precisamente, os elementos de \mathbb{P}^2 são classes de equivalência de triplos $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ relativamente à relação seguinte:

$$(a,b,c) \sim (a_1,b_1,c_1) \text{ se e só existe } \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, \\ \text{tal que } a_1 = a\lambda, \quad b_1 = b\lambda, \quad c_1 = c\lambda.$$

Em outras palavras, os elementos de \mathbb{P}^2 podem ser identificados com as retas de \mathbb{C}^3 passando pela origem. Temos a aplicação quociente canônica

$q: \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{P}^2$; a imagem inversa de um ponto de \mathbb{P}^2 cujo representante é (a,b,c) é a reta $\{(\lambda a, \lambda b, \lambda c) | \lambda \in \mathbb{C}\}$ menos o ponto $(0,0,0)$. A topologia usual de \mathbb{P}^2 é a topologia quociente da topologia usual de $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Em outras palavras, um $U \subset \mathbb{P}^2$ é aberto se e só se $q^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ é aberto.

Não há confusão possível ao designar um ponto de \mathbb{P}^2 por (a,b,c) , contanto que se tenha em mente que (a,b,c) está definido a menos de um fator de proporção-

nalidade $\neq 0$. Uma notação clássica para um ponto de \mathbb{P}^2 de representante (a,b,c) é $(a:b:c)$ (o símbolo $:$ indica que as coordenadas a,b,c estão definidas a menos de um fator de proporcionalidade). Dizemos que (a,b,c) são coordenadas homogêneas do ponto $(a:b:c) \in \mathbb{P}^2$.

Seja, agora, $U_i = \{(a_0:a_1:a_2) \in \mathbb{P}^2 \mid a_i \neq 0\}$, $i = 0,1,2$. É fácil verificar que a definição de U_i independe dos sistemas de coordenadas homogêneas dos pontos. É evidente que U_i é um aberto de \mathbb{P}^2 e que $\mathbb{P}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$. Seja $(a_0:a_1:a_2) \in U_i$. Para fixar idéias, tomemos $i = 0$. Como $a_0 \neq 0$, temos $(a_0:a_1:a_2) = (1: a_1/a_0: a_2/a_0)$. Logo, todo ponto de U_0 admite um sistema de coordenadas homogêneas da forma $(1, \alpha_1, \alpha_2)$.

Daqui não é difícil concluir que a aplicação

$(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (1: \alpha_1: \alpha_2)$ de \mathbb{C}^2 em \mathbb{P}^2 é um homeomorfismo

sobre o aberto U_0 . Analogamente, obtemos homeomorfismos

de \mathbb{C}^2 sobre U_1 e sobre U_2 , o que mostra que \mathbb{P}^2 na

da mais é do que a reunião de três cópias do plano complexo \mathbb{C}^2 , passada ao quociente por certas identificações

(por exemplo, se (a_0^0, a_1^0) , (a_0^1, a_1^1) são pontos das duas primeiras cópias de \mathbb{C}^2 , devemos identificá-los se e só

se $a_0^1 \cdot a_0^0 = 1$ e $a_1^1 = a_1^0/a_0^0$).

Exercício: Defina \mathbb{P}^n para qualquer $n \geq 0$ e nele intro

duza a topologia "usual" de maneira análoga ao caso $n=2$. Mostre que \mathbb{P}^n é a reunião disjunta de \mathbb{C}^n e \mathbb{P}^{n-1} (ambos munidos da topologia usual). Mostre que \mathbb{P}^1 é homeomorfo à esfera usual $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Vemos, pelo exercício acima, que \mathbb{P}^2 nada mais é do que o plano \mathbb{C}^2 ao qual se acrescentou \mathbb{P}^1 ("pontos no infinito"). Na verdade, tem-se:

Lemma III.11 - \mathbb{P}^2 é uma compactificação de \mathbb{C}^2 .

Demonstração: Seja $S^5 = \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^6 \mid |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1\}$, onde $|\cdot|$ designa a norma usual de um número complexo. S^5 é uma "hiper-esfera" em \mathbb{R}^6 . Ora, a restrição da projeção $q: \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2$ a S^5 tem por imagem todo \mathbb{P}^2 . Com efeito, dado $(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2$, tomamos $\lambda = (|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2)^{-\frac{1}{2}}$; é claro que $\lambda \neq 0$. Por outro lado, $(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2) \in S^5$ e $q(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2) = (\lambda a_0 : \lambda a_1 : \lambda a_2) = (a_0 : a_1 : a_2)$.

Como S^5 é compacta na topologia usual de $\mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^6$, resulta que \mathbb{P}^2 é compacto na topologia usual.

Vimos acima que \mathbb{P}^2 contém um aberto homeomorfo a \mathbb{C}^2 , por exemplo, $U_2 = \{(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2 \mid a_2 \neq 0\}$. Para verificar que U_2 é denso em \mathbb{P}^2 , basta verificar que o aberto $q^{-1}(U_2)$ é denso em \mathbb{C}^3 . Ora, o complementar de $q^{-1}(U_2)$ é o hiperplano complexo $x_2 = 0$ em \mathbb{C}^3 ,

que é um conjunto raro em $\mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^6$.

Exercício: Mostre que, para todo $n \geq 0$, \mathbb{P}^n é uma compactificação de \mathbb{C}^n . Se $H \subset \mathbb{C}^n$ é um hiperplano complexo passando pela origem, descreva o fecho de H em \mathbb{P}^n . Mostre que os fechos de hiperplanos $H_1, H_2 \subset \mathbb{C}^n$ de mesma "direção" intersektam em um "hiperplano" de \mathbb{P}^{n-1} .

Exercício: Defina a noção de subespaço (linear) projetivo de \mathbb{P}^n .

Nosso próximo objetivo é introduzir a noção de curva algébrica em \mathbb{P}^2 . Como \mathbb{C}^2 identifica-se com um aberto denso de \mathbb{P}^2 , é natural requerer que o fecho (isto é, a compactificação) de uma curva algébrica de \mathbb{C}^2 seja uma curva algébrica de \mathbb{P}^2 . Além disso, o complementar de $\{(a_0:a_1:a_2) \mid a_2 \neq 0\}$ em \mathbb{P}^2 identifica-se com \mathbb{P}^1 ("reta no infinito") e é, portanto, de se esperar que também seja uma curva algébrica de \mathbb{P}^2 .

Ora, nada nos impede decretar que os compactos acima sejam exatamente as curvas algébricas de \mathbb{P}^2 . Contudo, para completar o panorama, falta-nos exibir equações algébricas que definam globalmente cada um dos compactos considerados.

Mãos à obra, pois! O veio é o anel de polinômios

$C[X,Y,Z]$. Se $P \in \mathbb{P}^2$, dizemos que um polinômio $F \in C[X,Y,Z]$ se anula em P (ou que P é um zero de F) se $F(a_0, a_1, a_2) = 0$ para todo $(a_0, a_1, a_2) \in q^{-1}(P)$. Neste caso, F satisfaz uma propriedade bastante especial, a saber, se $F = F_0 + \dots + F_r$, com $F_i \in C[X,Y,Z]$ de grau i ($i = 0, \dots, r$), então F_i se anula em P para todo i . Com efeito, seja $(a_0, a_1, a_2) \in q^{-1}(P)$ e $\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$. Tem-se $0 = F(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2) = F_0(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2) + F_1(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2) + \dots + F_r(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2) = F_0(a_0, a_1, a_2) + \lambda F_1(a_0, a_1, a_2) + \dots + \lambda^r F_r(a_0, a_1, a_2)$. Como λ é arbitrário, necessariamente $F_i(a_0, a_1, a_2) = 0$ para $i=0, \dots, r$.

A seguinte proposição fornece o resultado procurado.

Proposição III.12 - Seja C uma curva algébrica em \mathbb{P}^2 (isto é, um dos compactos acima). Então existe um polinômio homogêneo $F \in C[X,Y,Z]$, sem fatores múltiplos, tal que:

- (i) F se anula em todo ponto $P \in C$.
- (ii) Se $G \in C[X,Y,Z]$ é um polinômio que se anula em todo ponto de C , então F é fator de G .

Além disso, F é unicamente determinado (a menos de fatores constantes) pelas condições (i), (ii) e pela condição de não ter fatores múltiplos.

Demonstração: A unicidade é imediata. Passemos à existên

cia. Seja $C_{af} = C \cap U_2$, onde

$U_2 = \{(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2 \mid a_2 \neq 0\}$. Se $C_{af} = \emptyset$ então

$C = \{(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2 \mid a_2 = 0\}$. Neste caso, $F = Z$ satisfaz às condições do enunciado. Com efeito, Z não tem fatores múltiplos e se anula em todo ponto $(a_0 : a_1 : 0)$.

Para verificar (ii), seja $G = \sum_{i+j=r} \alpha_{ijo} X^i Y^j + \sum_{\substack{i+j+k=r \\ k \neq 0}} \alpha_{ijk} X^i Y^j Z^k$ homogêneo de grau r tal que G se anula em todo $(a_0 : a_1 : 0)$. Segue-se que $\sum_{i+j=r} \alpha_{ijo} X^i Y^j$ se anula em todo ponto $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}^2$, logo é identicamente nulo (porque?). Resulta que G é múltiplo de Z . Seja, agora, $G \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ qualquer anulando-se em todo ponto de C . Escrevendo G como soma de suas componentes homogêneas e usando a observação anterior à proposição, obtemos que G é um múltiplo de Z .

Suponhamos, então, que $C_{af} \neq \emptyset$. Neste caso, por definição, C_{af} (mais precisamente, a imagem de C_{af} em \mathbb{C}^2 pelo homeomorfismo $(a_0 : a_1 : 1) \mapsto (a_0, a_1)$) é uma curva algébrica em \mathbb{C}^2 . Seja $q_2: q^{-1}(U_2) \rightarrow U_2$ a restrição de q a $q^{-1}(U_2)$. Identificando U_2 com o hiperplano $H \subset \mathbb{C}^3$ de equação $z-1=0$, q_2 identifica-se com a restrição a $q^{-1}(U_2)$ da aplicação $\mathbb{C}^3 \rightarrow H$ tal que $(a_0, a_1, a_2) \mapsto \left(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}, 1\right)$. Logo, q_2 é dada por frações racionais.

Daqui resulta que $q_2^{-1}(C_{af}) \subset q^{-1}(U_2)$ está contida no conjunto dos zeros de um polinômio $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$. Precisamente, seja $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ um polinômio cujos zeros são os pontos de C_{af} . Tomemos f sem fatores múltiplos.

Se $f = \sum_{i,j} \alpha_{ij} X^i Y^j$ é de grau n , isto é, se n é o grau do termo de maior grau de f , o polinômio homogêneo

$F = \sum_{i,j} \alpha_{ij} X^i Y^j Z^{n-(i+j)}$ é o polinômio procurado. Com efeito, seja $(a_0, a_1, a_2) \in q_2^{-1}(C_{af})$. Então, $(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}, 1) \in C_{af}$, de maneira que $f(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}) = 0$. Resulta que

$F(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}, 1) = 0$. Mas, F é homogêneo, logo

$F(a_0, a_1, a_2) = 0$.

Mostremos que F satisfaz às condições do enunciado.

Primeiramente, F não tem fatores múltiplos.

Com efeito, suponhamos que $F = G^r \cdot (\dots)$, com $r \geq 0$.

Como Z não é fator de F (ver o processo de obtenção de F a partir de f), $G \neq \alpha Z$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Aplicando o \mathbb{C} -homomorfismo de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ em $\mathbb{C}[X, Y]$ tal que $X \mapsto X$, $Y \mapsto Y$ e $Z \mapsto 1$ a ambos os membros de $F = G^r \cdot (\dots)$, obtemos $f = g^r \cdot (\dots)$ para algum $g \in \mathbb{C}[X, Y]$. Como f não tem fatores múltiplos e $g \neq \text{const.}$ em virtude de $G \neq \alpha Z$, vem $r = 1$, como queríamos.

Em seguida, F se anula em todo ponto de C .

Equivalentemente, queremos mostrar que F se anula em todo ponto do fecho $\overline{q^{-1}(C_{af})}$ de $q^{-1}(C_{af})$ em $\mathbb{C}^3 \setminus (0)$. Ora, vimos que F se anula em todo ponto de $q^{-1}(C_{af})$. Por outro lado, F é uma função contínua na topologia usual de \mathbb{C}^3 . Logo, temos o resultado procurado.

Suponhamos que $G \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ se anula em todo ponto de C . Logo, G se anula para todo $(a_0, a_1, a_2) \in q^{-1}(C)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que f , logo F , é irredutível. O que necessitamos merece ser isolado como o

Lema III.13 - Se $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ é um polinômio irredutível e se $G \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ se anula em todo zero de F , então F é um fator de G .

Demonstração: Seja V o conjunto dos zeros de F em \mathbb{C}^3 e seja $I = \{G \in \mathbb{C}[X, Y, Z] \mid G(v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}$. Temos, evidentemente, $F \in I$. Queremos mostrar que I coincide com o ideal de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ cujos elementos são divisíveis por F .

Seja $v \in V$ tal que $\frac{\partial F}{\partial X}(v)$, $\frac{\partial F}{\partial Y}(v)$ e $\frac{\partial F}{\partial Z}(v)$ não sejam todos nulos. Pelo teorema da função implícita (ou inversa), uma vizinhança aberta de v em V é (analiticamente) homeomorfa a um aberto de \mathbb{C}^2 . Por outro lado, I é um ideal se $\mathbb{C}[X, Y, Z]$, como se vê facilmente. Como

F é irreduzível, basta mostrar que I pode ser gerado por um único polinômio (isto é, que existe $H \in I$ tal que todo $G \in I$ é divisível por H). Seja $\{F_1, \dots, F_m\}$, $m \geq 2$, um conjunto de geradores de I (ver Apêndice). Então V coincide com o conjunto dos zeros simultâneos de F_1, \dots, F_m . Seja $v \in V$ tal que a matriz jacobiana

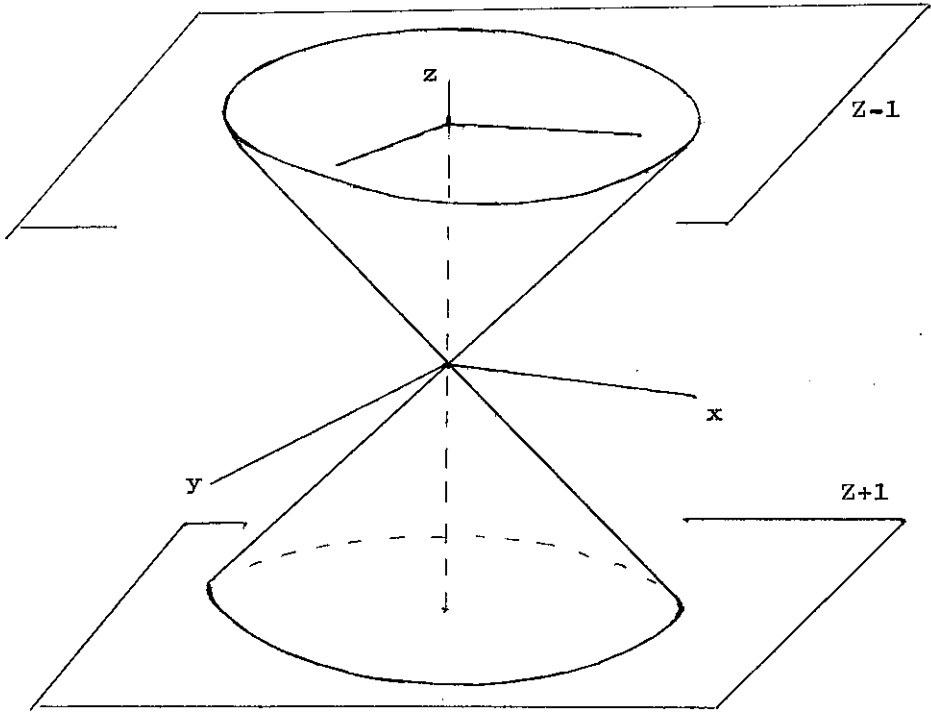
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X}(v) & \frac{\partial F_1}{\partial Y}(v) & \frac{\partial F_1}{\partial Z}(v) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial X}(v) & \frac{\partial F_m}{\partial Y}(v) & \frac{\partial F_m}{\partial Z}(v) \end{pmatrix}$$

tenha posto máximo (≥ 2). Pelo teorema das funções implícitas, V admite uma vizinhança aberta de v homeomorfa a $\mathbb{C}^{3-3} = \mathbb{C}^0$ ou a um aberto de $\mathbb{C}^{3-2} = \mathbb{C}^1$. Tomando $v \in V$ tal que, além disso, $\frac{\partial F}{\partial X}(v)$, $\frac{\partial F}{\partial Y}(v)$ e $\frac{\partial F}{\partial Z}(v)$ não sejam todos nulos, obtemos que v admite vizinhanças homeomorfas a abertos de dois espaços \mathbb{C}^n , $\mathbb{C}^{n'}$ (com $n \neq n'$). Isto é impossível por um resultado de invariância da dimensão topológica.

Observação: O lema acima é um caso particular do célebre teorema dos zeros de Hilbert. Outra demonstração pode ser dada usando-se o fato de que $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ é um anel de fatorização única e que, por conseguinte, todo

ideal primo minimal $\neq (0)$ pode ser gerado por um elemento.

O (único) polinômio homogêneo determinado na Proposição III.12 é chamado a equação (reduzida) da curva algébrica $C \subset \mathbb{P}^2$. O processo de projetivização de uma curva plana em \mathbb{C}^2 consiste em tomar a compactificação desta curva em \mathbb{P}^2 . Do ponto de vista algébrico, o processo traduz-se pela "homogeneização" de polinômios de $\mathbb{C}[X, Y]$ mediante a introdução de uma nova variável Z . Topologicamente, o que se está fazendo é acrescentar um número finito de pontos de \mathbb{P}^2 à curva original de \mathbb{C}^2 , os chamados pontos no infinito. Tais pontos são facilmente determinados fazendo-se $Z = 0$ na equação da curva projetivizada. De uma curva algébrica $C \subset \mathbb{P}^2$ dizemos que é uma curva projetiva plana. A imagem inversa $q^{-1}(C) \subset \mathbb{C}^3 \setminus (0)$ é o cone afim sobre C . A figura abaixo ilustra o caso em que a equação de C é $X^2 + Y^2 - Z^2$ (só os pontos de coordenadas reais são ilustrados, evidentemente).



Voltemos ao objetivo desta seção que é, afinal de contas, "resolver singularidades". Sabemos que um ponto singular de uma curva $C \subset \mathbb{C}^2$ de equação (reduzida) f é um ponto $(a,b) \in C$ tal que $\frac{\partial F}{\partial X}(a,b) = \frac{\partial F}{\partial Y}(a,b) = 0$. Isto sugere a

Definição III.14 - Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma curva projetiva plana de equação F e seja

$P = (a_0 : a_1 : a_2) \in C$. Digamos, $a_2 \neq 0$, isto é, $P \in U_2$. P é dito um ponto singular de C se $(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2})$ é um ponto singular de C_{af} . Equivalentemente, P é singular se

$$\frac{\partial f}{\partial X} \left(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2} \right) = \frac{\partial f}{\partial Y} \left(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2} \right) = 0, \quad \text{onde } f = F(X, Y, 1).$$

A definição acima requer uma pequena verificação, a saber, que independe do aberto U_2 . Em outras palavras: se $P \in U_i \cap U_j$, $i, j \in \{0, 1, 2\}$, então P é ponto singular de $C \cap U_i$ se e só se é ponto singular de $C \cap U_j$. Uma maneira de fazer isto é verificar que $P \in C$ é singular (no sentido de qualquer dos U_i 's) se e só se $\frac{\partial F}{\partial X}(P) = \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = \frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0$, para o que se poderá usar a identidade clássica de Euler:

$$nF = X \frac{\partial F}{\partial X} + Y \frac{\partial F}{\partial Y} + Z \frac{\partial F}{\partial Z},$$

onde n é o grau de F .

A multiplicidade de P é a multiplicidade de P como ponto de C_{af} , isto é, o grau do termo homogêneo $\neq 0$ de menor grau no desenvolvimento de Taylor de $f = F(X, Y, 1)$ no ponto P .

Grosseiramente, resolver as singularidades de uma curva $C \subset P^2$ consiste em aplicar certas transformações admissíveis de P^2 a C de modo a obter uma curva sem pontos singulares. Tais transformações devem, tanto quanto possível, preservar as propriedades da curva original C .

Definição III.15 - (1) Seja $T: C^3 \rightarrow C^3$ uma aplicação li

near inversível. É claro que T leva retas passando na origem em retas passando na origem, logo determina uma aplicação bijetora de \mathbb{P}^2 sobre si mesmo (ainda designada por T): dizemos que T é uma mudança projetiva de coordenadas.

(2) Mais geralmente, seja $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ uma aplicação polinomial, isto é, $T = (T_1, T_2, T_3)$ onde cada T_i é dada por um polinômio $F_i \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$. Suponhamos, além disso, que F_1, F_2, F_3 são homogêneos do mesmo grau.

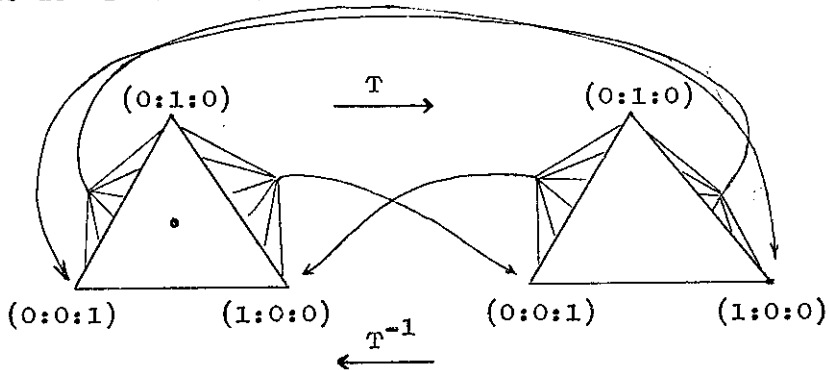
Neste caso, T determina uma aplicação

$T: \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{V}(F_1, F_2, F_3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ onde $\mathcal{V}(F_1, F_2, F_3)$ é o conjunto dos zeros comuns de F_1, F_2 e F_3 . No caso especial em que $F_1 = YZ, F_2 = XZ, F_3 = XY$, T é chamado a transformação quadrática standard de \mathbb{P}^2 (ou a transformação standard de Cremona de \mathbb{P}^2).

Observação: Se $G \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ é homogêneo, designaremos por $\mathcal{V}(G)$ a curva projetiva cujos pontos são os zeros de G .

Explicitamente, se T é a transformação quadrática standard, tem-se $T(a_0:a_1:a_2) = (a_1a_2:a_0a_2:a_0a_1)$ toda vez que $(a_0:a_1:a_2)$ é diferente dos pontos $(0:0:1), (0:1:0)$ e $(1:0:0)$. Estes são chamados os pontos fundamentais de T . Se $U = \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{V}(XYZ)$, é fácil verificar que

T restringe-se a uma bijeção de U sobre U . As retas de equações X, Y e Z são chamadas as retas excepcionais de T . A inversa T^{-1} de T , onde está definida é da mesma forma que T . Eis um desenho para ilustrar a ação de T e T^{-1} :



T lembra, evidentemente, a transformação quadrática local de \mathbb{C}^2 em \mathbb{C}^2 dada por $(a,b) \mapsto (a,ab)$. Contudo, sob a ação global de T , as coisas se esclarecem mais e é possível definir T em "mais pontos" (a inversa $(c,d) \mapsto (c, \frac{d}{c})$ de $(a,b) \mapsto (a,ab)$ não está, aparentemente, definida em nenhum ponto do eixo $x = 0$. Podemos "levantar esta indeterminação" em todo ponto $(0,d) \neq (0,0)$, decretando que $(0:d:1) \mapsto (d:0:0) = (1:0:0) ! \dots$.

Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma curva projetiva. Diremos que C é irredutível se a equação $F \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ de C for

irredutível (isto significa que C não é reunião de curvas projetivas planas propriamente contidas). T pode não estar definida em alguns pontos de C (no máximo, em três!), não obstante designaremos por $T^{-1}(C)$ o fecho em P^2 do conjunto $T^{-1}(C \setminus \{(0:0:1), (0:1:0), (1:0:0)\})$. Vê-se que $T^{-1}(C)$ é a curva projetiva da equação $F(YZ, XZ, XY)$ (Notação: T^*F).

Se C contém algum dentre os pontos fundamentais, $T^{-1}(C)$ admitirá alguma dentre as retas fundamentais como componentes. Mais precisamente, suponhamos que a multiplicidade do ponto $(0:0:1)$ em C seja r . Isto significa que pode-se escrever $F = F_r(X, Y)Z^{n-r} + \dots + F_{n-1}(X, Y)Z + F_n(X, Y)$, onde F_i é homogênea de grau i e onde n é o grau de F . Aplicando T , vem:

$$\begin{aligned} T^*F &= F_r(YZ, XZ)(XY)^{n-r} + \dots + F_{n-1}(YZ, XZ)(XY) + F_n(YZ, XZ) \\ &= Z^r F_r(Y, X)(XY)^{n-r} + \dots + Z^{n-1} F_{n-1}(Y, X)(XY) + Z^n F_n(Y, X) \\ &= Z^r (F_r(Y, X)(XY)^{n-r} + \dots + Z^{n-1-r} F_{n-1}(Y, X)(XY) + Z^{n-r} F_n(Y, X)). \end{aligned}$$

Logo, Z^r é a maior potência de Z que é fator de T^*F . Procedendo de maneira análoga relativamente aos pontos $(0:1:0)$ e $(1:0:0)$, obtemos $T^*F = Z^r Y^{r'} X^{r''} \cdot F'$, onde F' não é divisível por X, Y, Z . É claro que F' fica assim perfeitamente determinado: designamo-lo o transforma-

mado próprio de F . A curva $C' \subset \mathbb{P}^2$, cuja equação é F' , é chamada a transformada própria de C .

Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma curva projetiva irredutível.

O processo para resolver as singularidades de C consistirá em aplicar uma mudança de coordenadas conveniente T_1 a C , em seguida aplicar a transformação quadrática T a $T_1(C)$, obtendo a transformada própria $T_1(C)'$. Repetimos este procedimento, se necessário, obtendo $(T_2(T_1(C)'))'$, e assim sucessivamente, na esperança de chegar finalmente a uma curva sem pontos singulares. Tal não é, contudo, possível em geral. O que se pode é "separar" os ramos em todos os pontos, ao cabo de um número finito de etapas.

Lembremos que um ponto $P = (a:b:1) \in C$ é dito um ponto r-uplo ordinário se C admite r tangentes distintas em P , onde r é a multiplicidade de C em P (ver p.46, Exemplo (2)). Se $r \geq 2$, P é um ponto singular genuíno. Dizemos de uma tal situação que os ramos de C em P são separados.

Eis o resultado fundamental, para o qual vimos nos preparando nesta seção.

Teorema III.16 (M. Noether, L. Kronecker) - Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma curva projetiva irredutível. Então

existe um número finito de mudanças de coordenadas T_1, \dots, T_k tais que $(T_k(\dots(T_2(T_1(C)'))' \dots))' \subset \mathbb{P}^2$ é uma curva admitindo apenas pontos múltiplos ordinários.

Demonstraremos este teorema pela conjugação de esforços de vários lemas, cada um dos quais tem, por sua vez, interesse "per se".

Lema III.17 - Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma curva projetiva, seja $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ sua equação reduzida e seja $n = \text{gr}(F)$. Sejam r, r', r'' as multiplicidades de C nos pontos $(0:0:1), (0:1:0), (1:0:0)$ respectivamente.

- (i) O grau do transformado próprio F' é $2n - (r+r'+r'')$.
- (ii) Se F é irredutível, F' também o é.
- (iii) A multiplicidade do ponto $(0:0:1)$ (respectivamente, de $(0:1:0)$ e $(1:0:0)$) é $n - (r'+r'')$ (respectivamente, $n - (r+r'')$ e $n - (r+r')$) relativamente à transformada própria $C' \subset \mathbb{P}^2$.
- (iv) Se nenhuma das tangentes a C nos pontos fundamentais é uma reta excepcional (dizemos, neste caso, que C é transversa), tem-se uma bijeção entre as tangentes a C no ponto $(0:0:1)$ (resp. $(0:1:0), (1:0:0)$) e os pontos não fundamentais da interseção $C' \cap \nu(Z)$ (resp. $C' \cap \nu(Y), C' \cap \nu(X)$). Além disso, tal bijeção

preserva as multiplicidades em questão.

(v) Se C é transversa, C' é transversa.

Demonstração: (i) Pela própria definição de F' , temos

$$T^*F = X^{r''} Y^{r'} Z^{r'} F'. \text{ Como } \text{gr}(T^*F) = 2n,$$

segue-se que $\text{gr}(F') = 2n - r - r' - r''$.

(ii) Sejam s, s', s'' as multiplicidades em C' dos pontos

$(0:0:1)$, $(0:1:0)$, $(1:0:0)$ respectivamente. Então,

tem-se:

$$\begin{aligned} T^*(T^*F) &= T^*(X^{r''} Y^{r'} Z^{r'} F') = X^{r+r'} Y^{r+r''} Z^{r'+r''} F'(YZ, XZ, XY) \\ &= X^{r+r'+s''} Y^{r+r''+s'} Z^{r'+r''+s} F''(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Por outro lado, como F é homogêneo de grau n , tem-se:

$$\begin{aligned} T^*(T^*F) &= T^*(F(YZ, XZ, XY)) = F(X^2YZ, XY^2Z, XYZ^2) \\ &= F((XYZ)X, (XYZ)Y, (XYZ)Z) = (XYZ)^n F(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Segue-se

$$(XYZ)^n F(X, Y, Z) = X^{r+r'+s''} Y^{r+r''+s'} Z^{r'+r''+s} F''(X, Y, Z).$$

Ora, $F(X, Y, Z)$ e $F''(X, Y, Z)$ não admitem por fatores potências positivas de X , Y ou Z . Resulta que $F = F''$.

Se F' admitisse fatores próprios, o mesmo ocorreria a $F = F'' = (F')'$. Consequentemente, F' é irreduzível.

(iii) Segue-se das igualdades $n = r+r'+s'' = r+r''+s' =$

= $r'+r''+s$ obtidas na alínea (ii).

(iv) Concentremo-nos no ponto $(0:0:1)$, a discussão dos outros pontos fundamentais sendo inteiramente análoga. Temos:

$$F = F_r(X,Y)Z^{n-r} + \dots + F_{n-1}(X,Y)Z + F_n(X,Y),$$

onde F_i é homogênea de grau r , $F_r \neq 0$. As tangentes a C em $(0:0:1)$ são então os fatores (lineares) de $F_r(X,Y)$. Precisamente, se $F_r(X,1) = c(X-\alpha_1)^{m_1} \dots (X-\alpha_k)^{m_k}$, com $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$, então as tangentes distintas a C em $(0:0:1)$ são as retas $X - \alpha_i Y$ ($1 \leq i \leq k$), com respectivas multiplicidades m_i ($1 \leq i \leq k$). Por outro lado, vimos que $T^*F = Z^r(F_r(Y,X)X^{n-r}Y^{n-r} + Z F_{r+1}(Y,X)X^{n-r-1}Y^{n-r-1} + \dots + Z^{n-r} F_n(Y,X))$; logo, $X^{r''}Y^{r'}F' = F_r(Y,X)X^{n-r}Y^{n-r} + \dots + Z^{n-r} F_n(Y,X)$. Segue-se que os pontos da interseção $C' \cap v(Z)$ são dados pelas soluções de

$$\begin{cases} z = 0 \\ F_r(y,x)x^{n-r-r''}y^{n-r-r'} = 0. \end{cases}$$

As interseções não coincidentes com pontos fundamentais são, pois, as soluções de

$$\begin{cases} z = 0 \\ F_r(y,x) = 0. \end{cases}$$

Daqui, a bijeção procurada.

(v) Vimos, na alínea (iv), que se tem:

$$F' = X^{n-r-r''} Y^{n-r-r'} F_r(Y, X) + \dots + X^{-r''} Y^{-r'} Z^{n-r} F_n(Y, X).$$

A multiplicidade de $(0:0:1)$ em C' é $n-r'-r'' =$
 $= \text{gr}(X^{-r''} Y^{-r'} F_n(Y, X))$ e as tangentes a C' em $(0:0:1)$
são os fatores lineares de $X^{-r''} Y^{-r'} F_n(Y, X)$. Se um des-
ses fatores fosse uma reta excepcional, $F_n(Y, X)$ seria
divisível, digamos, por X^t , com $t > r''$. Neste caso,
usando a forma $F = F_r(X, Y) Z^{n-r} + \dots + F_{n-1}(X, Y) Z + F_n(X, Y)$,
vemos que C interseca a reta excepcional $v(Z)$ no pon-
to $(1:0:0)$ com multiplicidade $t > r''$. Como a multipli-
cidade de $(1:0:0)$ em C é r'' , segue-se forçosamente
que $v(Z)$ é tangente a C em $(1:0:0)$. Isto contraria
a hipótese de que C é transversa.

C.Q.D.

Lema III.18 - Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma curva projetiva. Se

$P \in C$, $P \notin v(XYZ)$, então a multiplicidade
de $T^{-1}(P)$ em C' é igual à multiplicidade de P em C
e, além disso, as tangentes correspondentes têm mesma mul-
tiplicidade.

Demonstração: Fazemos uma primeira redução, da seguinte
maneira: se $P = (a:b:c)$, seja $T_p: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$

a mudança de coordenadas definida por $T_P(x:y:z) = (x/a:y/b:z/c)$. Tem-se

$$\begin{array}{ccc}
 (1/a:1/b:1/c) & \xleftrightarrow{T} & (a:b:c) \\
 \uparrow T_P & & \uparrow T_P^{-1} \\
 (1,1,1) & \xrightarrow{T} & (1,1,1)
 \end{array}$$

uma vez que $(bc:ac:ab) = (1/a:1/b:1/c)$. Por outro lado, uma mudança de coordenadas não afeta as multiplicidades em questão. Segue-se que é suficiente fazer a demonstração no caso em que $P = (1,1,1)$. Além disso, tem-se que a multiplicidade de P' em C' coincide com a multiplicidade de P' em $T^{-1}(C)$ (porque?), logo podemos trabalhar com $T^{-1}(C)$ ao invés de C' .

Consideremos a aplicação S de $\mathbb{P}^2 \setminus \{(-1:1:1), (0:0:1), (0:1:0)\}$ em \mathbb{P}^2 , definida por $S(x:y:z) = ((y+x)(z+x):y(z+x):z(y+x))$. Temos $S(1:0:0) = (1:0:0)$. Por outro lado, sejam T_1 e T_2 as seguintes mudanças de coordenadas:

$$T_1: (x:y:z) \mapsto (x:y+x:z+x)$$

$$T_2: (x:y:z) \mapsto (x:x-y:x-z).$$

Temos $T_1(-1:1:1) = (1:0:0)$, $T_1(0:0:1) = (0:0:1)$, $T_1(0:1:0) = (0:1:0)$, de modo que $T \circ T_1$ está definida

no domínio de S . Vê-se, na verdade, que $S = T_2 \circ T \circ T_1$.
 Disso decorre que é suficiente mostrar que a multiplicidade do ponto $(1:0:0)$ na curva $T_1^{-1}(C)$ é igual à multiplicidade deste mesmo ponto na transformada

$$T_2(T(T_1^{-1}(C))) = S(T_1^{-1}(C)).$$

Seja, então, r a multiplicidade de $(1:0:0)$ em $T_1^{-1}(C)$ e seja $F_1(X,Y,Z)$ a equação de $T_1^{-1}(C)$. Tem-se: $F_1(X,Y,Z) = X^{n-r} F_{1,r}(Y,Z) + \dots + F_{1,n}(Y,Z)$, onde $n = \text{gr } F = \text{gr } F_1$. Logo, a equação da transformada $S(T_1^{-1}(C))$ é

$$(X+Y)^{n-r}(X+Z)^{n-r} F_{1,r}(Y(X+Z), Z(X+Y)) + \dots + F_{1,n}(Y(X+Z), Z(X+Y)) \\ = (X^{2n-2r} + \dots) F_{1,r}(Y(X+Z), Z(X+Y)) + \dots$$

Ponhamos $F_{1,r} = \sum_{0 \leq i \leq r} \alpha_i Y^i Z^{r-i}$. Então

$$F_{1,r}(Y(Z+X), Z(Y+X)) = \sum_i \alpha_i Y^i (Z+X)^i Z^{r-i} (Y+X)^{r-i} = \\ = \sum_i \alpha_i (X^i Y^i + \dots) (X^{r-i} Z^{r-i} + \dots) = \sum_i \alpha_i (X^r Y^i Z^{r-i} + \dots) = \\ = X^r F_{1,r}(Y,Z).$$

Resulta, finalmente, que a equação de $S(T_1^{-1}(C))$ toma a forma

$$X^{2n-r} F_{1,r}(Y,Z) + (\dots) + X^{2n-r-1} F_{1,r+1}(Y,Z) + (\dots) + \dots$$

onde (\dots) são termos envolvendo potências de X meno-

res do que a do termo precedente. Evidentemente, as tangentes a $S(T_1^{-1}(C))$ no ponto $(1:0:0)$ são dadas pelos fatores lineares de $F_{1,r}(Y,Z)$. Como as tangentes a $T_1^{-1}(C)$ em $(1:0:0)$ também são os fatores lineares de $F_{1,r}(Y,Z)$, concluímos a demonstração.

Lema III.19 - Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma curva projetiva irredutível e seja $P \in C$. Então existe uma mudança de coordenadas $T_1: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal que:

- (i) $T_1(0:0:1) = P$.
- (ii) $T_1^{-1}(C)$ é transversa (cf. Lema III.17 (iv)).
- (iii) $T_1^{-1}(C) \cap \nu(Z)$ tem n pontos distintos ($n = \text{gr } C$) e distintos dos pontos fundamentais $(0:1:0)$ e $(1:0:0)$.
- (iv) $T_1^{-1}(C) \cap \nu(Y)$ e $T_1^{-1}(C) \cap \nu(X)$ têm, cada uma delas, $n-r$ pontos distintos não fundamentais ($r = \text{multiplicidade de } (0:0:1) \text{ em } T_1^{-1}(C)$).

Demonstração: Seja F a equação (irredutível) de C .

Mostremos, primeiramente, que, com exceção de um conjunto finito de retas em \mathbb{P}^2 , toda reta passando por P interseca C em $n-r$ pontos distintos, além de P . Podemos supor que $P = (0:1:0)$. O que é uma reta em \mathbb{P}^2 passando por P ? Por definição, é a imagem em

\mathbb{P}^2 , pela aplicação quociente $\mathbb{C}^3 \setminus (0,0,0) \rightarrow \mathbb{P}^2$, de um plano em \mathbb{C}^3 (menos o ponto $(0,0,0)$) passando por $(0,0,0)$ e pelo ponto $(0,1,0)$. Logo, a equação homogênea de tal reta é da forma $aX + bZ$. A intersecção de tal reta com a reta $\nu(X)$ é $(0:1:0)$; consequentemente, suas equações paramétricas são $X = u$, $Y = v$, $Z = \text{const.} \neq 0$ desde que $b \neq 0$. Seja $G_u(v) = F(u,v,1) \in \mathbb{C}[u][v]$. Queremos então mostrar que, com exceção de um número finito de valores complexos de u , a equação $G_u(v) = 0$ tem $n-r$ soluções distintas em v . Escrevendo $F = Y^{n-r} F_r(X,Z) + \dots + F_n(X,Z)$, com $F_r \neq 0$, ponhamos de parte os valores de u tais que $F_r(u,1) = 0$ (só há um número finito de tais valores). Se $F_r(u,1) \neq 0$, o polinômio (em v) $G_u(v) = F_r(u,1)v^{n-r} + \dots + F_n(u,1)$ tem $n-r$ raízes distintas se e só se $G_u(v) = 0$, $\frac{dG_u(v)}{dv} = 0$ não tem raízes comuns. Por outro lado, $\nu(F) \cap \nu(\partial F/\partial Y)$ é um conjunto finito (vide Proposição II.4). Logo, existe apenas um conjunto finito de retas passando por $(0:1:0)$ e por algum ponto de $\nu(F) \cap \nu(\partial F/\partial Y)$ e, portanto, um conjunto finito de retas passando por $(0:1:0)$ e que não interseca C em $n-r$ pontos distintos além de $(0:1:0)$.

Como consequência, podemos determinar retas L' e L'' em \mathbb{P}^2 passando em P e tais que $C \cap L' =$

$= \{P_1^i, \dots, P_{n-r}^i\}$, $C \cap L'' = \{P_1'', \dots, P_{n-r}''\}$, onde P_i^i, P_j'' ($1 \leq i \leq n-r, 1 \leq j \leq n-r$) são todos distintos. Em seguida, seja $P_1 \in C$ um ponto não singular, isto é, tal que a multiplicidade de P_1 em C seja 1. Então, como acima, podemos determinar $n-1$ pontos distintos P_2, \dots, P_n em C , com $P_k \neq P_1$ ($k=2, \dots, n$), e uma reta L passando por P_1, P_2, \dots, P_n . Além disso, podemos escolher P_1, \dots, P_n distintos de P_i^i, P_j'' ($1 \leq i \leq n-r, 1 \leq j \leq n-r$). Como L' e L'' intersecam-se em P , as três retas L, L' e L'' são não concorrentes. Tomando as imagens inversas em $C^3 \setminus (0,0,0)$, obtemos dois planos distintos por uma mesma reta passando pela origem e um terceiro plano pela origem não contendo a dita reta. Daqui, a existência de uma mudança de coordenadas T_1 em \mathbb{P}^2 tal que $T_1^*(L) = Z$, $T_1^*(L') = X$, $T_1^*(L'') = Y$. É claro que T_1 preenche as condições do lema.

C.Q.D.

Doravante, usaremos a notação $m_P(F)$ ou $m_P(C)$ para designar a multiplicidade de um ponto P numa curva C de equação F .

Antes de enunciar o próximo lema, faremos algum comentário sobre sistemas lineares de curvas em \mathbb{P}^2 . Tal noção é um caso particular da idéia de parametrizar um conjunto de curvas em \mathbb{P}^2 por um espaço com propriedades

geométricas e tem-se mostrado bastante útil para a compreensão de propriedades globais ("at large").

A fim de por em relevo certos fenômenos de degenerescência de curvas, trabalharemos com equações mais gerais: admitiremos que $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ possa ter fatores múltiplos. Desta forma, ganhamos em que estamos, agora, considerando todos os polinômios homogêneos e não somente aqueles sem fatores múltiplos. Perdemos, é certo, no que evaporou-se a correspondência biunívoca entre curvas e polinômios homogêneos (por exemplo, F e F^n , para todo $n \geq 1$, determinam a mesma curva como conjunto de pontos em \mathbb{P}^2). Contudo, do ponto de vista da teoria das multiplicidades e dos sistemas lineares (vis à vis suas degenerescências), é importante - e até mesmo imprescindível - considerar polinômios com fatores múltiplos. Para recuperar a correspondência perdida, convencionaremos que F e F^n "são" curvas algébricas distintas, se bem que os conjuntos de zeros de F e F^n coincidam. Assim, uma curva é mais do que uma simples demarcação na superfície de \mathbb{P}^2 !...

Afinal, o que é um sistema linear de curvas?

Fixemos um inteiro $d \geq 1$. Procuremos todos os polinômios homogêneos em X, Y, Z , de grau d . Primeiramente, vemos que os monômios de grau d formam uma ba-

se para o espaço vetorial E (sobre \mathbb{C}) de todos os polinômios homogêneos de grau d . É um pequeno exercício combinatório verificar que existem $N = \frac{1}{2} (d+1)(d+2)$ tais monômios. Usando tal base, obtemos um isomorfismo de espaços vetoriais

$$E \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^N,$$

dados por

$$F = \sum_{i+j+k=d} \alpha_{ijk} X^i Y^j Z^k \mapsto (\alpha_{ijk})_{i+j+k=d}.$$

Ora, dois polinômios F e λF , com $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, "são" a mesma curva. Temos, então, uma aplicação biunívoca

$$E \setminus \{0\} / \mathbb{C} \setminus \{0\} \leftrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$$

entre as curvas de grau d em \mathbb{P}^2 e os pontos do espaço projetivo de dimensão $N-1 = \frac{1}{2} d(d+3)$. Dizemos que as curvas de grau d em \mathbb{P}^2 formam um sistema linear de dimensão $N-1$.

Seja, entretanto, L um subconjunto de E . Dizemos que L (ou $(L \setminus \{0\}) / (\mathbb{C} \setminus \{0\})$) é um sistema linear (de curvas de grau d) se L for um subespaço vetorial de E (equivalentemente, se a imagem de $(L \setminus \{0\}) / (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ em \mathbb{P}^{N-1} for um subespaço linear de \mathbb{P}^{N-1}). A dimensão do sistema linear L é, por definição, a dimensão veto-

rial de L menos 1 (equivalentemente, a dimensão projetiva da imagem de $(L \setminus \{0\}) / (C \setminus \{0\})$). A expressão seguinte é de uso comum: "as curvas de L são parametrizadas por (ou formam) um espaço projetivo".

Exemplos: (1) As retas em \mathbb{P}^2 formam um espaço projetivo de dimensão $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+3) = 2$. Assim, as retas em \mathbb{P}^2 são parametrizadas pelos pontos de \mathbb{P}^2 . Isto fornece a dualidade clássica entre retas e pontos em \mathbb{P}^2 !

(2) Em particular, examinemos o conjunto L das retas em \mathbb{P}^2 que passam por um mesmo ponto $(a:b:c) \in \mathbb{P}^2$ (arbitrário, mas fixo de uma vez por todas). Uma reta $\alpha_0 X + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z$ de \mathbb{P}^2 pertence a L se e só se $\alpha_0 a + \alpha_1 b + \alpha_2 c = 0$. Desta forma, um ponto $(\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3)$ do \mathbb{P}^2 que parametriza as retas é imagem de uma reta de L se e só se ele satisfaz o polinômio linear $aX + bY + cZ$. Em outras palavras, as curvas de L formam um sistema linear parametrizado pela reta $aX + bY + cZ$ e é, portanto, de dimensão 1 (o que está de acordo com nossa intuição de feixe de retas no plano).

(3) Mais geralmente, seja L o conjunto das curvas de grau d que passam por um ponto (fixo) $(a:b:c) \in \mathbb{P}^2$. Sejam M_0, \dots, M_{N-1} os monômios de grau d , numa ordenação escolhida. Uma curva $\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i M_i(X, Y, Z)$ passa por

$(a:b:c)$ se e só se $\sum \alpha_i M_i(a,b,c) = 0$, isto é, se e só se o ponto $(\alpha_i) \in \mathbb{P}^{N-1}$ correspondente, pertence ao hiperplano de \mathbb{P}^{N-1} de equação $\sum_{i=0}^{N-1} M_i(a,b,c) X_i$. Assim, L é um sistema linear de dimensão $N-2 = \frac{1}{2} d(d+3) - 1$.

(4) Fixemos um ponto $P \in \mathbb{P}^2$ e um inteiro $r \leq d+1$.

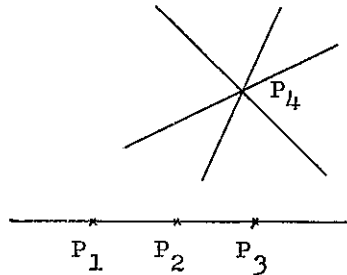
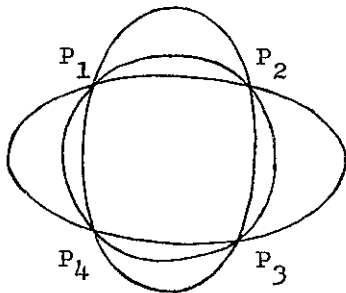
Seja L o conjunto das curvas F de grau d tais que $m_P(F) \geq r$. É fácil ver que uma mudança de coordenadas T em \mathbb{P}^2 induz, mediante a passagem $F \mapsto T^*(F)$, uma mudança de coordenadas em \mathbb{P}^{N-1} , $N = \frac{1}{2} d(d+3)$. Podemos, portanto, supor que $P = (0:0:1)$. Neste caso, escrevendo $F = \sum F_i(X,Y)Z^{d-i}$ (F_i homogêneo de grau i) vemos que $m_P(F) \geq r$ se e só se $F_0 = F_1 = \dots = F_{r-1} = 0$, isto é, se e só se os coeficientes dos monômios $X^i Y^j Z^k$ com $i+j < r$ são nulos. Um cálculo combinatório mostra que existem $1 + \dots + r = \frac{1}{2} r(r+1)$ tais monômios. Segue-se que L é um sistema linear de dimensão $\frac{1}{2} d(d+3) - \frac{1}{2} r(r+1)$.

O exemplo seguinte ao exemplo (4) deveria, naturalmente, levar em consideração mais de um ponto. O problema é que, em geral, a escolha de tais pontos pode não ser suficientemente "genérica". Por exemplo, o conjunto L das cônicas (= curvas de grau 2) passando por quatro pontos distintos P_1, P_2, P_3, P_4 é sempre um sistema li-

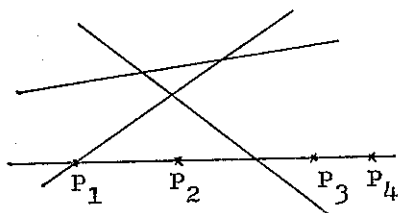
near, mas sua dimensão depende da posição relativa dos quatro pontos. Explicitamente, seja $P_j = (a_j : b_j : c_j)$ ($j \in \{1, 2, 3, 4\}$). Então, uma cônica $\sum_{i=0}^5 \alpha_i M_i(X, Y, Z)$ passa pelos pontos P_1, P_2, P_3, P_4 se e só se o ponto $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 : \alpha_5) \in \mathbb{P}^5$ satisfaz o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^5 M_i(a_1, b_1, c_1) X_i = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=0}^5 M_i(a_4, b_4, c_4) X_i = 0 \end{cases}$$

O sistema acima é de 4 equações a 6 incógnitas, logo admite pelo menos uma dupla infinidade de soluções (vetoriais) em \mathbb{C}^6 . Projetivamente, o espaço das soluções tem dimensão 1 pelo menos. A dimensão é 1 exatamente se e só se o posto da matriz $(M_i(a_j, b_j, c_j))_{i,j}$ é 4 e isto acontece se e só se os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 estão não alinhados (figura abaixo).



Na figura acima, o segundo caso deve ser visto como um caso degenerado, em que todas as cônicas são compostas de duas retas, uma delas fixa para todas as cônicas. Por outro lado, suponhamos que P_1, P_2, P_3, P_4 estão sobre uma mesma reta. Então, o sistema linear das cônicas passando por três quaisquer dos quatro pontos coincide com L , isto é, o quarto ponto é supérfluo: a condição linear por si determinada é linearmente dependente das três anteriores. Resulta, então, que a dimensão de L é $5-3 = 2$. A menos de uma componente fixa (a reta pelos quatro pontos), L é o sistema linear de todas as retas em \mathbb{P}^2 .



No caso das cônicas, exigir que as curvas passem por um ponto P com multiplicidade inferiormente limitada por um certo r , produz sistemas lineares fáceis de descrever. Por exemplo, se $r = 2$, o sistema é degenerado, cada cônica se reduzindo a duas retas concorrentes em P . Para curvas de grau superior, os sistemas lineares são desconcertantes e de difícil manejo. Em geral, um argumento semelhante ao anterior, prova o seguinte:

Sejam $P_1, \dots, P_t \in \mathbb{P}^2$, sejam r_1, \dots, r_t inteiros não negativos e seja $d \geq 1$ um inteiro. As curvas F de grau d tais que $m_{P_i}(F) \geq r_i$ ($1 \leq i \leq t$) formam um sistema linear de dimensão $\geq \frac{1}{2} d(d+3) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t r_i(r_i+1)$.

Este resultado é importante porque, em muitos casos, não interessa saber exatamente a dimensão do sistema linear, mas tão somente que tal sistema existe efetivamente, isto é, que $\frac{1}{2} d(d+3) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t r_i(r_i+1) \geq 0$. Uma situação deste tipo será ilustrada na demonstração do próximo lema.

Suporemos conhecida a seguinte consequência do célebre teorema de Bézout (vide Apêndice): se F e G são curvas projetivas sem fatores comuns, tem-se

$$\sum_{P \in F \cap G} m_P(F) \cdot m_P(G) \leq \text{gr } F \cdot \text{gr } G.$$

Lema III.20 - Se F é homogêneo irreduzível de grau d , tem-se $\frac{1}{2} \sum m_P(F)(m_P(F)-1) \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$.

Demonstração: Ao menos uma das derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial X}$, $\frac{\partial F}{\partial Y}$, $\frac{\partial F}{\partial Z}$ é não (identicamente) nula. Suponhamos que $\frac{\partial F}{\partial X} \neq 0$. Aplicando a F e $\frac{\partial F}{\partial X}$ a consequência do teorema de Bézout citada acima, obtemos uma primeira limitação: $\frac{1}{2} \sum m_P(F)(m_P(F)-1) \leq \frac{1}{2} d(d-1)$. Para melhorar esta desigualdade, observemos que

$$\frac{1}{2} (d-1)(d-1+3) - \frac{1}{2} \sum m_P(F)(m_P(F)-1) \geq$$

$$\frac{1}{2} d(d-1) - \frac{1}{2} \sum m_P(F)(m_P(F) - 1) \geq 0 .$$

Seja $t = \frac{1}{2} (d-1)(d-1+3) - \frac{1}{2} \sum m_P(F)(m_P(F)-1)$. Tomemos t pontos Q_1, \dots, Q_t não singulares em F . Então o sistema linear de curvas G de grau $d-1$ tais que $m_P(G) \geq m_P(F)-1$ e $m_{Q_j}(G) \geq 1$ ($1 \leq j \leq t$) tem dimensão ≥ 0 ; isto é, existe ao menos uma curva G_0 neste sistema.

Ora, sendo F irredutível, F e G_0 não têm componentes comuns. Aplicando, desta feita a F e G_0 , a consequência do teorema de Bézout citada anteriormente, resulta $\sum m_P(F)(m_P(F)-1) + t \leq d(d-1)$. Substituindo t por seu valor acima, surge a desigualdade procurada.

C.Q.D.

Estamos, finalmente, preparados para dar o golpe de misericórdia no teorema de Noether-Kronecker!

Demonstração do Teorema III.16: Sejam $P_1, \dots, P_t \in C$ os pontos singulares não ordinários de C . Ponhamos $\text{In}(C) = \sum_{i=1}^t (m_{P_i}(C)-1)$. Procederemos por indução sobre o inteiro $\text{In}(C)$.

Se $\text{In}(C) = 0$, C tem quando muito pontos singulares ordinários. Neste caso, nada a demonstrar. Suponhamos que $\text{In}(C) \geq 1$ e que é válido o teorema para cur-

vas D tais que $\text{In}(D) < \text{In}(C)$. Mostraremos que, por aplicações sucessivas de mudanças de coordenadas e transformações quadráticas (em número finito), obtemos uma curva D com $\text{In}(D) < \text{In}(C)$.

Como $\text{In}(C) \geq 1$, C admite um ponto P singular não ordinário. Seja $r = m_P(C)$. Seja $T_1: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal qual no Lema III.19. Apliquemos a transformação quadrática à curva $T_1^{-1}(C)$; a transformada própria $(T_1^{-1}(C))'$ tem, pelo Lema III.17 e pelo Lema III.18, os seguintes pontos singulares: (a) os pontos fundamentais, todos ordinários: $(0:0:1)$, com multiplicidade $n = \text{gr}(C)$, $(0:1:0)$ e $(1:0:0)$, ambos com multiplicidade $n-r$; (b) pontos singulares em $\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{V}(XYZ)$, transformados dos pontos singulares de $T_1^{-1}(C)$ em $\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{V}(XYZ)$. O tipo da singularidade é preservada nesta passagem; (c) pontos P_j^i na reta $Z = 0$, com multiplicidades r_j^i , $j = 1, \dots, s$.

Vemos que somente os pontos em (c) contribuem eventualmente para $\text{In}((T_1^{-1}(C))')$. Desta maneira, obtemos

$$\begin{aligned} \text{In}(T_1^{-1}(C)) - \text{In}((T_1^{-1}(C))') &\geq (r-1) - \sum_{j=1}^s (r_j^i - 1) = \\ &= (r-1) - \sum_{j=1}^s r_j^i + s \geq \\ &\geq (r-1) - r + s = s-1 \geq 0, \end{aligned}$$

já que $\sum_{j=1}^s r_j^i \leq r$ (pelo Lema III.17 (iv) e pelo fato de

que a multiplicidade de interseção de uma curva com uma reta, num dado ponto, é maior que ou igual à multiplicidade do ponto na curva).

Se $\text{In}(T_1^{-1}(C)) - \text{In}((T_1^{-1}(C))') > 0$, terminamos pela hipótese indutiva. Caso contrário, tem-se $s = 1$ e $r'_1 = r$. Neste caso, procedemos com P' como fizemos com P , e assim por diante. Resta mostrar que, ao cabo de um número finito de etapas, o invariante In sofre uma queda genuína. Ora, seja C_{p+1} a curva transformada após $p+1$ tais etapas, em cada etapa In mantendo-se constante. C_{p+1} contém, entre outros, os seguintes pontos singulares: (a) $2(p+1)$ pontos, repartidos em pares de pontos com multiplicidades $n-r, n_1-r, \dots, n_p-r$, onde $n_i = 2n_{i-1} - r = \text{gr}(C_i)$; (b) $p+1$ pontos com multiplicidades n, n_1, \dots, n_p .

Pelo Lema III.19, temos:

$$M_{p+1} = (n_{p+1}-1)(n_{p+1}-2) - 2 \sum_{i=0}^p (n_i-r)(n_i-r-1) - \sum_{i=0}^p n_i(n_i-1) \geq$$

$$(n_{p+1}-1)(n_{p+1}-2) - \sum_{P \in C_{p+1}} m_P(C_{p+1})(m_P(C_{p+1})-1) \geq 0.$$

Por outro lado, vemos que $M_{p+1} - M_p = -r(r-1) \leq -2$ (pois $r \geq 2$). Segue-se que p não pode ser arbitrariamente grande.

C.Q.D.

As características essenciais do método acima são:

(a) a curva final D , obtida a partir de C , tem os ramos separados em todos os pontos; (b) a passagem de C a D é feita mediante uma "aplicação" $\varphi: C \rightarrow D$ que é induzida de uma transformação de \mathbb{P}^2 em si mesmo; (c) a "aplicação" φ acima não está definida em todos os pontos de C , mas existem abertos $U \subset C$ e $V \subset D$, complementares de um conjunto finito de pontos, tais que $\varphi(U) = V$, a restrição de φ a U está definida em todos os pontos e é uma bijeção genuína com inversa definida em todos os pontos de V .

Nosso próximo objetivo (final, no que toca à simplificação de singularidades) é "desamarrar" as singularidades ordinárias da curva D acima. Globalmente, tal é impossível dentro de \mathbb{P}^2 . Isto leva-nos às seguintes considerações.

Um subconjunto $V \subset \mathbb{C}^n$ é uma variedade algébrica (afim) se V é o lugar dos zeros simultâneos de um conjunto finito de polinômios em $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. O subconjunto $\mathfrak{I}(V) = \{f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \mid f(v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}$, que é um ideal em $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, é chamado o ideal da variedade V . O anel quociente $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / \mathfrak{I}(V) = \mathbb{C}[V]$ é o anel de coordenadas ou anel das funções polinomiais de V ; os elementos de $\mathbb{C}[V]$ identificam-se com as funções de V em \mathbb{C} (definidas em todos os pontos!) que são restri-

ções de funções polinomiais em todo \mathbb{C}^n . Se, em particular, $\mathbb{C}[V]$ for um domínio de integridade (isto é, se $\mathfrak{P}(V)$ for um ideal primo), V é chamada irredutível. É um pequeno exercício constatar que V é irredutível se e somente se V não é reunião de duas ou mais variedades afins propriamente contidas em V .

Se V é irredutível, $\mathbb{C}[V]$ admite corpo de frações $\mathbb{C}(V)$, chamado corpo das funções racionais de V . Os elementos de $\mathbb{C}(V)$ identificam-se com funções (localmente) definidas em V que são restrições (locamente) de funções racionais em \mathbb{C}^n .

Recordemos que o grau de transcendência de $\mathbb{C}(V)$ sobre \mathbb{C} (notação: $\text{gr.tr.}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(V)$) é o (único) inteiro n tal que $\mathbb{C}(V)$ admite n funções algebricamente independentes sobre \mathbb{C} e não mais. Por definição, $\dim V = \text{gr.tr.}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(V)$. No caso em que $\text{gr.tr.}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(V) = 1$, a variedade V é uma curva (irredutível). Se V não é irredutível, mas é uma reunião finita de curvas irredutíveis, diremos ainda que V é uma curva.

Queremos definir o que se entende por variedade projetiva. Usaremos indução na dimensão de \mathbb{P}^n . Temos $\mathbb{P}^n = U_0 \cup \iota(X_0)$, onde $U_0 = \{(a_0 : a_1 : \dots : a_n) \mid a_0 \neq 0\}$ e $\iota(X_0)$ é o hiperplano no infinito. Sabemos que U_0 identifica-se com \mathbb{C}^n por meio do isomorfismo polinomial

$(1, \frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}) \longleftrightarrow (a_0 : a_1 : \dots : a_n)$ e que $\mathcal{U}(X_0)$ identifica-se com \mathbb{P}^{n-1} . Um subconjunto V de \mathbb{P}^n é uma variedade projetiva se $V \subset \mathcal{U}(X_0) = \mathbb{P}^{n-1}$ e é uma subvariedade projetiva de \mathbb{P}^{n-1} (bem definida, pela hipótese indutiva) ou se $V \not\subset \mathcal{U}(X_0)$ e V é o fecho em \mathbb{P}^n de uma variedade afim de $U_0 = \mathbb{C}^n$. V é, além disso, irredutível se é uma subvariedade irredutível de $\mathcal{U}(X_0) = \mathbb{P}^{n-1}$ ou se é o fecho de uma variedade afim irredutível em \mathbb{C}^n .

Em qualquer caso, é claro como definir a dimensão de uma variedade projetiva V : se V é o fecho em \mathbb{P}^n de uma variedade afim $V_0 \subset U_0 = \mathbb{C}^n$, definimos $\dim V = \dim V_0$. Se $\dim V = 1$, temos uma curva; se $\dim V = 2$, uma superfície, etc.

Uma variedade projetiva $V \subset \mathbb{P}^n$ admite equações polinomiais globais. Com efeito, seja $q^{-1}(V) \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus (0)$ o cone afim sobre V . Precisamente como no caso em que $n = 2$, vemos que $q^{-1}(V) \cup (0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ é uma variedade afim e que as equações que a definem são homogêneas e definem V igualmente (isto é, V é o lugar dos zeros homogêneos de tais equações).

Observação: No caso em que V é uma curva projetiva em \mathbb{P}^2 , V pode ser definida por uma só equação homogênea. Na verdade, se V é o fecho da curva afim

$V_0 \subset U_0$ de equação $f(X,Y) = f_r(X,Y) + \dots + f_n(X,Y)$, então $F(X_0, X_1, X_2) = f_r(X_0, X_1)X_2^{n-r} + f_{r+1}(X_0, X_1)X_2^{n-r-1} + \dots + f_n(X_0, X_1)$ é a equação de V . Em geral, porém, tal relação falha. Por exemplo, se $V_0 \subset \mathbb{C}^3$ é a curva afim definida pelas equações $Y-X^2$ e $Z-X^3$, as equações homogêneas $YW-X^2$ e ZW^2-X^3 não são suficientes para definir o fecho projetivo $V \subset \mathbb{P}^3$. Na verdade, V requer três equações (por exemplo, $XW-Y^2$, $YW-X^2$ e $ZW-XY$).

Se $V \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade projetiva irredutível, o anel $\mathbb{C}_h[V] = \mathbb{C}[q^{-1}(V) \cup (0)]$ de coordenadas do cone afim sobre V é chamado o anel das coordenadas homogêneas de V . Contudo, os elementos deste anel não são mais passíveis de interpretação como funções polinomiais em V , como se vê facilmente. Na verdade, um teorema tipo Liouville afirma que não existem funções polinomiais não constantes definidas ao longo de toda a variedade V . Mais precisamente, uma função racional em V é uma fração F/G , onde $F, G \in \mathbb{C}_h[V]$ são homogêneos e do mesmo grau. Se $v \in V$ é tal que $G(v) \neq 0$, F/G está definida em v e seu valor é $F(v)/G(v) \in \mathbb{C}$. É fácil ver que tal valor independe do sistema de coordenadas homogêneas de v . Tais funções constituem um subcorpo do corpo de frações de $\mathbb{C}_h[V]$, que é isomorfo canonicamente ao corpo de funções racionais de qualquer dos pedaços afins

$U_i \cap V = V_i$ cuja reunião é V . Assim, $V_0 \subset \mathbb{C}^n$ e seu fecho $V \subset \mathbb{P}^n$ admitem mesmas funções racionais. O teorema tipo Liouville afirma que uma função racional definida em todos os pontos de V é constante.

Exercício: Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva e seja $v \in V$. Por definição, uma função racional em V está definida em v se puder escrever-se na forma F/G ($F, G \in \mathbb{C}_h[V]$ homogêneos e do mesmo grau) com $G(v) \neq 0$.

(i) Se $V = \mathbb{P}^n$, mostre o teorema tipo Liouville acima mencionado para V .

(ii) O mesmo que em (i) com $V \subset \mathbb{P}^n$ tal que $\mathbb{C}_h[V]$ é um anel com a propriedade da fatorização única em irredutíveis.

(iii) Seja $V_0 \subset \mathbb{C}^2$ o "círculo" afim de equação $X^2 + Y^2 - 1$.

Determine os pontos de V_0 onde a função racional de representante $(y-1)/x$ está definida (x e y são as imagens de X e Y em $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ ou, equivalentemente, as restrições a V_0 das funções 1ª e 2ª coordenadas de \mathbb{C}^2).

Seja V uma variedade (afim ou projetiva). É óbvio como devemos definir uma aplicação (ou transformação) racional de V num \mathbb{C}^m : trata-se de uma m -upla

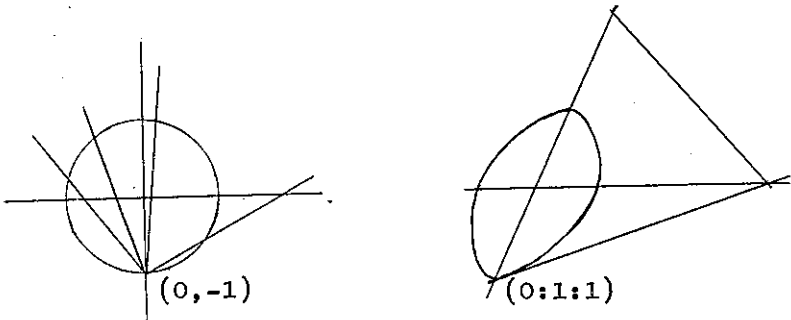
$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ de funções racionais em V . O domínio de definição de φ em V é, então, a interseção dos domínios de definição das componentes $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Se, além disso, a imagem de φ cair dentro de uma subvariedade $W \subset \mathbb{C}^m$, diremos que φ é uma aplicação racional de V em W (escrevendo $\varphi: V \rightarrow W$ frequentemente, se bem que φ não esteja definida em todos os pontos de V necessariamente). É menos óbvio o que se entende por uma aplicação racional φ de V em \mathbb{P}^m . Intuitivamente, queremos que φ seja uma aplicação racional de V em $\mathbb{C}^m \subset \mathbb{P}^m$, eventualmente definida em mais pontos de V às custas de prescrever imagens no hiperplano \mathbb{P}^{n-2} no infinito. Ora, uma aplicação racional de V em \mathbb{C}^m é um elemento do espaço afim $\mathbb{C}(V)^m = \mathbb{C}(V) \times \dots \times \mathbb{C}(V)$, cujos elementos são m -uplos de elementos não mais de \mathbb{C} , mas de $\mathbb{C}(V)$. É, então, inteiramente natural definir uma aplicação racional de V em \mathbb{P}^m como sendo um elemento do espaço projetivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}(V)}^m$, com coordenadas homogêneas tiradas de $\mathbb{C}(V)$. Assim, uma tal aplicação admite uma representação da forma $(\varphi_0: \varphi_1: \dots: \varphi_m)$; outra $(m+1)$ -upla $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_m)$ fornece a mesma aplicação racional se e só se $\varphi_i \psi_j = \varphi_j \psi_i$ para todos i, j . Por outro lado, $\varphi_i = H_i/G_i$ com $H_i, G_i \in \mathbb{C}_h[V]$ homogêneos e de mesmo grau; reduzindo a um mesmo denominador, obtemos $\varphi_i = F_i/F_0$, $i=0, \dots, m$,

onde F_0, \dots, F_m são homogêneos e todas do mesmo grau. É claro que $(\varphi_0 : \dots : \varphi_m) = (F_0 : \dots : F_m)$. Em conclusão, uma aplicação racional de V em \mathbb{P}^m pode ser representada por uma $(m+1)$ -upla de elementos homogêneos e do mesmo grau em $\mathcal{C}_h[V]$. Dizemos que a aplicação está definida em $v \in V$ se existe uma tal representação com algum $F_i(v) \neq 0$. Finalmente, se $W \subset \mathbb{P}^m$ é projetiva, uma aplicação racional de V em W é uma aplicação racional de V em \mathbb{P}^m tal que a imagem do domínio da aplicação está contida em W .

Exemplos: (1) Retomemos o exemplo do exercício anterior, alínea (iii). Verifiquemos que a função racional $t = (y-1)/x$ (que é uma aplicação racional de $V_0 = \mathcal{V}(X^2+Y^2-1) \subset \mathbb{C}^2$ em \mathbb{C} ...) estende-se a uma aplicação racional do fecho projetivo $V = \mathcal{V}(X_0^2+X_1^2-X_2^2) \subset \mathbb{P}^2$ no fecho projetivo \mathbb{P}^1 de \mathbb{C} e tal aplicação está definida em todos os pontos de V !...

Com efeito, sejam u_0, u_1 coordenadas homogêneas genéricas de \mathbb{P}^1 (isto é, elementos algebricamente independentes sobre \mathbb{C}). Identificamos \mathbb{C} com o aberto dos elementos $(a:b)$ de \mathbb{P}^1 tais que $b \neq 0$. Temos então $X = X_0/X_2, Y = X_1/X_2$ e $t = u_0/u_1$, logo $u_0/u_1 = (x_1/x_2 - 1)/(x_0/x_2) = (x_1 - x_2)/x_0$. Assim, a aplicação ori

ginal estende-se à aplicação racional de V em \mathbb{P}^1 dada por $(x_1-x_2:x_0)$. Tal aplicação está definida em todos os pontos exceto, possivelmente, no ponto $(0:1:1)$. Ora, $(x_1-x_2:x_0)$ e $(-x_0:x_1+x_2)$ definem a mesma aplicação (já que $(x_1-x_2)(x_1+x_2) = x_1^2-x_2^2 = -x_0^2$ em V). Como $-x_0/(x_1+x_2)$ tem valor bem determinado em $(0:1:1)$, a aplicação está definida em $(0:1:1)$ e tem por imagem o ponto $(1:0)$. Assim, concluímos que a aplicação de V em \mathbb{P}^1 está definida em todos os pontos de V . As figuras abaixo ilustram o que se passa com os pontos de coordenadas reais.



(2) A imersão de Segre. O produto cartesiano dos espaços afins \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^m identifica-se canonicamente com o espaço afim \mathbb{C}^{n+m} . Neste sentido, $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ tem uma estrutura natural de variedade afim (por transporte da estrutura de \mathbb{C}^{n+m}). Por várias razões, o produto cartesiano $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ de dois espaços projetivos não se identifica canonicamente a nenhum espaço projetivo \mathbb{P}^N (imitando o pro-

cedimento no caso afim, seríamos tentados a tomar $N = n+m+1$, o que é um contrasenso já que a dimensão topológica de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ é $n+m$). Contudo, existe uma aplicação notável que identifica $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ com uma subvariedade projetiva de $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$. Tal aplicação foi descoberta pelo matemático italiano Biniamino Segre. Passamos a descrevê-la.

Dado um ponto $((a_0 : \dots : a_n); (b_0 : \dots : b_m)) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, a ele associamos o ponto $(a_0 b_0, \dots, a_0 b_m, a_1 b_0, \dots, a_1 b_n, \dots, a_n b_0, \dots, a_n b_m) \in \mathbb{C}^{(n+1)(m+1)} \setminus \{0\}$. Se $(a_0 : \dots : a_n) = (a'_0 : \dots : a'_n)$ e $(b_0 : \dots : b_m) = (b'_0 : \dots : b'_m)$, temos $a_i a'_j = a_j a'_i$ com $0 \leq i, j \leq n$ e $b_k b'_\ell = b_\ell b'_k$ com $0 \leq k, \ell \leq m$. Segue-se que $(a_i b_k)(a'_j b'_\ell) = (a_i a'_j)(b_k b'_\ell) = (a_j a'_i)(b_\ell b'_k) = (a_j b_\ell)(a'_i b'_k)$, o que mostra que a associação acima induz uma aplicação bem definida

$\sigma_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^N$, com $N = (n+1)(m+1)-1$. Para determinar a imagem de $\sigma_{n,m}$, chamemos Z_{ik} ($0 \leq i \leq n$, $0 \leq k \leq m$) as coordenadas homogêneas genéricas de \mathbb{P}^N . Seja V a subvariedade projetiva definida pelas equações

$$Z_{ik} Z_{j\ell} - Z_{jk} Z_{i\ell} \quad (0 \leq i, j \leq n, 0 \leq k, \ell \leq m).$$

É imediato que $\sigma_{n,m}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subset V$. Inversamente, se

$(c_{ik}) \in V$ e se, digamos, $c_{00} \neq 0$, tomamos

$a = (c_{00} : \dots : c_{n0}) \in \mathbb{P}^n$ e $b = (c_{00} : \dots : c_{0m}) \in \mathbb{P}^m$. Tem-se

então $\sigma_{n,m}(a,b) = (c_{ik})$, o que mostra a inclusão $V \subset \sigma_{n,m}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$. Finalmente, é claro que (a,b) é unicamente determinado pelas equações $c_{ik}c_{jl} = c_{jk}c_{il}$ pondo $j = l = 0$. Assim, $\sigma_{n,m}$ é uma bijeção de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ sobre a variedade $V \subset \mathbb{P}^N$.

A variedade V acima é o modelo de Segre de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Quando dizemos que $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ é uma variedade projetiva, estamos pensando no seu modelo de Segre. Em particular, as subvariedades de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ são, por definição, as imagens inversas por $\sigma_{n,m}$ de subvariedades projetivas do modelo de Segre.

Exercício: (i) Mostre que $\sigma_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ é uma quádrlica não degenerada em \mathbb{P}^3 .

(ii) Seja $\Delta: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ a aplicação diagonal. Mostre que $\sigma_{1,1}(\Delta(\mathbb{P}^1))$ é uma curva projetiva em \mathbb{P}^3 e determine suas equações.

(iii) Mostre que $(a_0:a_1) \mapsto (a_0^2:a_0a_1:a_1^2)$ é uma aplicação racional de \mathbb{P}^1 em \mathbb{P}^2 definida em toda \mathbb{P}^1 . Determine a imagem. Trata-se de uma bijeção sobre a imagem? (Em caso afirmativo, decida se a inversa é uma aplicação racional).

(iv) Mostre que existe uma aplicação racional $p:\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ (projeção genérica) tal que p está definida em

todos os pontos da curva $\sigma_{1,1}(\Delta(\mathbb{P}^1))$ (alínea (ii)) e determine a imagem em \mathbb{P}^2 desta curva, de maneira explícita.

Exercício: (i) Mostre que um subconjunto de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ é uma subvariedade de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ se e só se é o lugar dos zeros de um conjunto de polinômios

$G_r(X_0, \dots, X_n; Y_0, \dots, Y_m)$ ($1 \leq r \leq p$) homogêneos separadamente nas variáveis X 's e Y 's. (SUGESTÃO: se $\alpha > \beta$ são os graus de homogeneidade nos X 's e Y 's respectivamente, considere os polinômios $Y_k^{\alpha-\beta} \cdot G_r$ ($0 \leq k \leq m$, $1 \leq r \leq p$)).

(ii) Deduza que os subconjuntos da forma

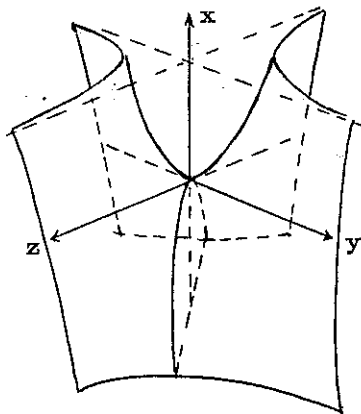
$\{(a_0:a_1; v_0:v_1) \mid (v_0:v_1) \in \mathbb{P}^1\}$ e $\{(u_0:u_1; b_0:b_1) \mid (u_0:u_1) \in \mathbb{P}^1\}$, com $(a_0:a_1)$ e $(b_0:b_1)$ fixos, são subvariedades de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Mostre que as subvariedades correspondentes no modelo de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ são retas de \mathbb{P}^3 (chamadas geratrizes da quádrlica $\sigma_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$).

(3) Dilatação em um ponto ("blowing-up", "éclatement").

Seja $P \in \mathbb{P}^2$. Por simplicidade, suporemos que $P = (0:0:1)$. O processo de "dilatar \mathbb{P}^2 no ponto P " consiste em determinar uma aplicação racional de uma certa superfície B em \mathbb{P}^2 de modo que a imagem inversa de

P seja uma reta. A superfície B deve preservar, ao máximo, as características de \mathbb{P}^2 , exceto numa vizinhança da citada reta.

Precisamente, consideramos o produto $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ e a subvariedade $B \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ definida pela equação $Y_0 X_1 - Y_1 X_0$, onde X_0, X_1, X_2 e Y_0, Y_1 são, respectivamente, coordenadas em \mathbb{P}^2 e \mathbb{P}^1 . A projeção $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$, $(R, Q) \mapsto R$, fornece, por restrição, uma aplicação racional $\beta: B \rightarrow \mathbb{P}^2$ que está, evidentemente, definida em todos os pontos de B . Localmente, isto é, no pedaço afim $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^1 \cong \mathbb{C}^3$ de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, B é um parabolóide hiperbólico de equação $ZY = X$ e a restrição de β é a projeção usual desta superfície sobre o plano \mathbb{C}^2 de coordenadas X, Y .



Em todos os pontos de $\mathbb{C}^2 \setminus (0,0)$, a imagem inversa de β reduz-se a um único ponto do parabolóide. No plano $X = 0$, B se esmaga a ponto de constituir os eixos $X = Z = 0$ e

$X = Y = 0$. O eixo $X = Y = 0$ projeta-se sobre a origem $(0,0)$ de \mathbb{C}^2 .

Globalmente, tem-se $\beta^{-1}((0:0:1)) = \{(0:0:1)\} \times \mathbb{P}^1$. A aplicação racional $(a_0:a_1:a_2) \mapsto (a_0:a_1)$ de \mathbb{P}^2 em \mathbb{P}^1 está definida em todos os pontos de \mathbb{P}^2 exceto $(0:0:1)$. Tal aplicação induz uma aplicação racional "produto" $(a_0:a_1:a_2) \mapsto ((a_0:a_1:a_2), (a_0:a_1))$, de \mathbb{P}^2 em $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, que está definida fora de $(0:0:1)$ e é inversa de β . Assim, $B \setminus \beta^{-1}((0:0:1))$ e $\mathbb{P}^2 \setminus (0:0:1)$ estão em bijeção por meio de aplicações racionais (isto é, B e \mathbb{P}^2 são biracionalmente isomorfos).

Exercício: Seja $\rho: (a_0:a_1:a_2) \mapsto (a_0:a_1)$ a aplicação racional de \mathbb{P}^2 em \mathbb{P}^1 acima considerada.

Mostre que B é o fecho (projetivo ou usual) do gráfico em $(\mathbb{P}^2 \setminus (0:0:1)) \times \mathbb{P}^1$ de ρ .

A aplicação de dilatação $\beta: B \rightarrow \mathbb{P}^2$ está intimamente ligada à transformação quadrática local de $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $(x,y) \mapsto (x,y/x)$ (vide Capítulo II). Com efeito, seja $\sigma: \mathbb{C}^2 \rightarrow B \cap (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^1)$ a restrição a \mathbb{C}^2 da aplicação racional inversa de β . Vimos que $\sigma(x,y) = (x,y,y/x)$, onde $X = X_0/X_2$, $Y = X_1/X_2$, $Z = Y_0/Y_1$. Consequentemente, a transformação quadrática local $(x,y) \rightarrow (x,y/x)$ não é senão a composta de σ e da res-

trição a $B \cap (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^1) = \mathcal{V}(X-ZY)$ da projeção $(x,y,z) \mapsto (x,z)$ de \mathbb{C}^3 no plano \mathbb{C}^2 de coordenadas X,Z .

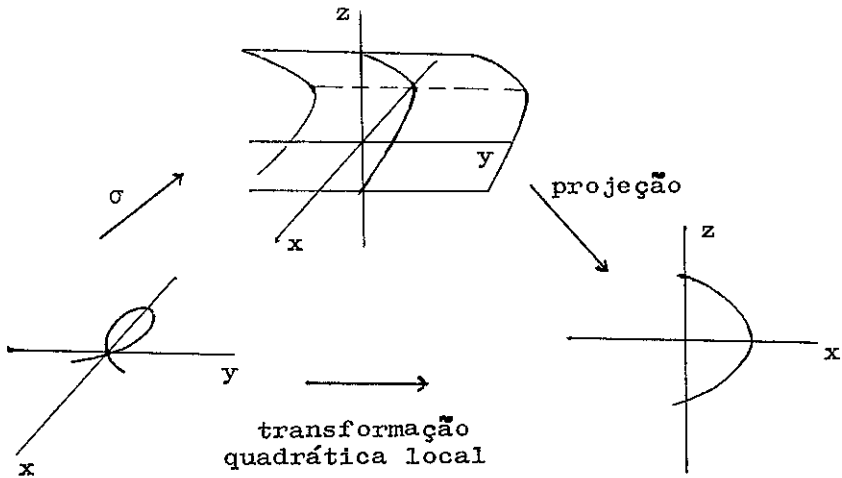
Qual o efeito de tudo isto sobre uma curva em \mathbb{P}^2 com uma singularidade ordinária no ponto $(0:0:1)$?

Consideremos a curva projetiva $C \subset \mathbb{P}^2$ de equação $X_1^2 X_2 - X_0^2 (X_0 + X_2)$. Localmente, num entorno de $(0:0:1)$, a equação de C é $Y^2 - X^2(X+1)$. No ponto $(0:0:1)$, C admite uma singularidade ordinária dupla. Em termos das coordenadas $x,y,z = y/x$, $y^2 - x^2(x+1) = 0$ é $(\frac{y}{x})^2 = x+1$; em outras palavras, $\sigma(C \setminus (0:1:0)) \subset \mathcal{V}(X-ZY)$ é a curva em \mathbb{C}^3 de equações $X-ZY$, $Z^2 - (X+1)$ (interseção de um parabolóide hiperbólico e de um parabolóide de duas folhas). Formemos a matriz jacobiana dessas equações. Obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -z & -y \\ -1 & 0 & 2z \end{pmatrix},$$

que possui o menor $\det \begin{pmatrix} 1 & -z \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -z \neq 0$ (já que a coordenada z não se anula em nenhum ponto da curva).

Assim, a curva é topologicamente (e até analiticamente) uma superfície sem pontos irregulares.



Tal curva é a "resolução" da curva C . Sua projeção sobre o plano de coordenadas X, Z tem como imagem a parábola de equação $Z^2 = (X+1)$ e tal projeção é uma aplicação biracional (definida em todos os pontos, bem como a inversa) da curva "resolução" em \mathbb{C}^3 na curva "resolução" em \mathbb{C}^2 . Assim, do ponto de vista local, podemos resolver uma singularidade ordinária no próprio plano \mathbb{C}^2 . Quando se trata, porém, de resolver todas as singularidades ordinárias (simultaneamente) de uma curva projetiva $C \subset \mathbb{P}^2$, o modelo resolvido está em geral contido em $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ e nenhuma projeção sobre um \mathbb{P}^2 fornecerá um modelo sem singularidades. Vemos, desta maneira, que a dilatação simultânea de vários pontos de \mathbb{P}^2 é extremamente cômoda, se-

não imprescindível.

Ainda não definimos o que se entende precisamente por uma curva C não singular (no caso em que C não é plana).

Definição III.21 - Seja $C_0 \subset \mathbb{C}^n$ uma curva afim, seja $\mathfrak{J}(C_0) \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ o ideal das funções polinomiais que se anulam em (todos os pontos de) C_0 . Sejam f_1, \dots, f_k geradores de $\mathfrak{J}(C_0)$ e seja $(\partial f_j / \partial X_i)$ a matriz jacobiana correspondente. Um ponto $c \in C_0$ é chamado não singular se a matriz numérica $((\partial f_j / \partial X_i)(c))$ tem posto máximo. C_0 é dita não singular se todos seus pontos são não singulares.

Se, entretanto, $C \subset \mathbb{P}^n$ é uma curva projetiva e $P \in C$, dizemos que P é não singular se o for como ponto de um pedaço afim C_i (verifica-se que isto independe do pedaço afim C_i escolhido).

Definição III.22 - Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma curva projetiva. Um modelo projetivo não singular (ou uma resolução) de C é uma curva projetiva $\tilde{C} \subset \mathbb{P}^n$ não singular, equipada com uma aplicação $\tilde{C} \rightarrow C$ biracional definida em todos os pontos de \tilde{C} .

A noção de ponto não singular de uma curva $C_0 \subset \mathbb{C}^n$ é puramente local, apesar de ter sido dada em termos das

equações que se anulam em todos os pontos de C_0 . Se $\varphi: C_0 \rightarrow D_0$ é uma aplicação biracional de curvas e se φ está definida em $c \in C_0$, com inversa definida em $\varphi(c) \in D_0$, podemos identificar uma vizinhança aberta de c em C_0 com uma vizinhança aberta de $\varphi(c)$ em D_0 . Em particular, c é não singular se e só se $\varphi(c)$ é não singular (recomendamos ao leitor verificar esta afirmação com cuidado). Com esta observação, podemos demonstrar o Teorema III.23 - Toda curva projetiva $C \subset \mathbb{P}^2$ admite um modelo projetivo não singular.

Demonstração: Pelo teorema de Noether-Kronecker, existe uma curva projetiva $D \subset \mathbb{P}^2$ admitindo apenas pontos ordinários e uma aplicação biracional $D \rightarrow C$. Sejam $P_i = (a_{oi}:a_{1i}:1)$, $i = 1, \dots, t$, os pontos singulares ordinários de D (N.B.: não perdemos em generalidade ao supor que todos eles pertencem ao aberto $x_2 \neq 0$). Dilatamos \mathbb{P}^2 simultaneamente em todos estes pontos. Para tal, procedemos como no exemplo (3), com as devidas modificações. A superfície dilatada B está contida em $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1$ (\mathbb{P}^1 t vezes) e é definida pelas equações

$$Y_{oi}(X_1 - a_{1i}X_2) - Y_{1i}(X_0 - a_{oi}X_2), \quad i = 1, \dots, t,$$

onde Y_{oi}, Y_{1i} são coordenadas do i -ésimo fator \mathbb{P}^1 em

$\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1$. As retas "excepcionais" $E_i = \beta^{-1}(P_i)$ iden-
ficam-se com \mathbb{P}^1 e tem-se que a projeção biracional
 $\beta: B \rightarrow \mathbb{P}^2$ é uma bijeção de $B \setminus \bigcup_{i=1}^t E_i$ sobre o aberto
 $U = \mathbb{P}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_t\}$. Seja C' o fecho, em B , de
 $\beta^{-1}(D \cap U)$. Como $D \cap U$ é um aberto denso da curva afim
 $D \cap \{x_2 \neq 0\}$, segue-se que o fecho C' acrescenta a
 $\beta^{-1}(D \cap U)$ um número finito de pontos todos distribuídos
ao longo das retas "excepcionais" E_1, \dots, E_t . Segue-se
que a restrição $\beta|_{C'}: C' \rightarrow D$ é biracional, definida em
toda C' e estabelece uma bijeção de $C' \setminus \bigcup_{i=1}^t E_i =$
 $= \beta^{-1}(D \cap U)$ sobre $D \cap U$. O que acontece com um ponto
 $Q \in C' \cap E_i$? Como no exemplo (3), vemos imediatamente
que um pedaço afim de C' contendo Q aplica-se biracio-
nalmente e bijetivamente sobre uma curva afim plana
 $C'_0 \subset \mathbb{C}^2$. Logo, se provarmos que C'_0 é não singular, Q
será ponto não singular de C' pela observação anterior
ao teorema. Ora, como no exemplo (3), $C'_0 \subset \mathbb{C}^2$ é o trans-
formado quadrático local próprio de um pedaço afim de D
que contém $\beta(Q)$. Se $f(X, Y) = \prod_{j=1}^r (Y - a_j X) + F_{r+1}(X, Y) + \dots$
é a equação deste pedaço afim, a equação de C'_0 é

$$f'(X, Z) = \prod_{j=1}^r (Z - a_j) + X F_{r+1}(Z, 1) + \dots,$$

uma vez que $f(X, XZ) = \prod_{j=1}^r (XZ - a_j X) + F_{r+1}(X, XZ) + \dots$

$= X^r \left(\prod_{j=1}^r (Z - a_j) + X F_{r+1}(Z, 1) + \dots \right)$ é o transformado total. Ora, $\frac{\partial f'}{\partial Z} = \sum_{j=1}^r \prod_{k \neq j} (Z - a_k) + X(\dots)$. Os possíveis pontos singulares de C'_0 seriam $(0, a_j)$, $1 \leq j \leq r$. Mas $\frac{\partial f'}{\partial Z}(0, a_j) = \prod_{k \neq j} (a_j - a_k) \neq 0$ pois, por hipótese, $Y - a_j X$ ($1 \leq j \leq r$) são as tangentes distintas em $\beta(Q)$. Logo, $(0, a_j)$ é não singular ($1 \leq j \leq r$).

Em conclusão, C' é não singular. A composta de $\beta|_{C'}$ com a aplicação biracional $D \rightarrow C$ do teorema de Noether-Kronecker, fornece uma aplicação biracional $C' \rightarrow C$. Identificando $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1$ com uma subvariedade projetiva de \mathbb{P}^N , para algum N , temos que C' identifica-se com uma curva projetiva $\tilde{C} \subset \mathbb{P}^N$. Temos ainda uma aplicação biracional $\tilde{p}: \tilde{C} \rightarrow C$ e \tilde{C} é, evidentemente, não singular.

Para concluir, resta mostrar que \tilde{p} está definida em todos os pontos de \tilde{C} (o que não é evidente, a priori, a partir de sua construção).

Seja, então, $P \in \tilde{C}$ e seja $\tilde{C}_0 \subset \tilde{C}$ um pedaço afim contendo P tal que $\mathcal{J}(\tilde{C}_0)$ admita geradores f_1, \dots, f_m . Por hipótese, a matriz jacobiana $((\partial f_i / \partial w_j)(P))_{1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq N}$ tem posto máximo. Logo, pelo teorema das funções analíticas implícitas (várias funções e várias variáveis), temos que uma vizinhança (usual) de

\tilde{C}_0 é analiticamente homeomorfa a um aberto de C . Segue-se que, numa vizinhança de P , \tilde{C} admite "parâmetro uniformizador" t , a saber, a imagem de um parâmetro em C . Em outras palavras, \tilde{C} admite numa vizinhança de P uma parametrização $(t, \eta(t), \dots)$, o que estende, para curvas não necessariamente planas, o resultado análogo de curvas planas. Dada uma função racional $\varphi \neq 0$ em \tilde{C} , ela então se desenvolve em série de Laurent numa vizinhança de P , o que permite falar do inteiro bem determinado $\text{ord}_P(\varphi)$. Além disso, temos $\text{ord}_P(\varphi) \geq 0$ se e só se φ está definido em P .

Ora, podemos supor que $C \neq v(X_0), v(X_1), v(X_2)$. A consequência óbvia disto é que X_k/X_l ($0 \leq k, l \leq 2$) não se anulam em todos os pontos de C , fornecendo, por restrição, funções racionais $x_k/x_l \neq 0$ em C . Como \tilde{p} é biracional, temos um C -isomorfismo ("pull-back") $\tilde{p}^*: C(C) \cong C(\tilde{C})$ entre os corpos de funções racionais. Segue-se que $\tilde{p}^*(x_k/x_l) \neq 0$, logo $\text{ord}_P \tilde{p}^*(x_k/x_l)$ está bem definida. Digamos, $\text{ord}_P(\tilde{p}^*(x_0/x_2)) = \max_{k,l} \{\text{ord}_P(\tilde{p}^*(x_k/x_l))\}$. Então, tem-se:

$$\text{ord}_P(\tilde{p}^*(x_k/x_2)) = \text{ord}_P(\tilde{p}^*(x_0/x_2)) - \text{ord}_P(\tilde{p}^*(x_0/x_k)) \geq 0 \quad (0 \leq k \leq 2).$$

Assim, $\tilde{p}^*(x_0/x_2)$ e $\tilde{p}^*(x_1/x_2)$ são funções bem definidas em P , o que fornece a extensão procurada de \tilde{p} ao

ponto $P \in \tilde{C}$.

C.Q.D.

Assim, dado um polinômio (irredutível) $f \in \mathbb{C}[X, Y]$, obtemos um modelo de Riemann associado tomando um modelo não singular projetivo \tilde{C} do fecho projetivo $C \subset \mathbb{P}^2$ de $C_0 \subset \mathbb{C}^2$, onde $C_0 = V(f)$. Enfatizemos as propriedades de \tilde{C} que a tornam propícia para o posto que doravante ocupará.

(1) \tilde{C} não tem pontos singulares. Em outras palavras, não só estão separados os "ramos" em cada ponto de \tilde{C} , como também só há um único "ramo" em cada ponto de \tilde{C} . Do ponto de vista analítico, \tilde{C} é uma variedade analítica lisa compacta de dimensão (complexa) 1.

(2) Excetuando o caso trivial em que $f = X - c$, $c \in \mathbb{C}$, temos uma projeção $C_0 \rightarrow \mathbb{C}$, restrição da projeção sobre a primeira coordenada. Tal aplicação estende-se a uma aplicação racional $C \rightarrow \mathbb{P}^1$, cuja imagem evita no máximo um número finito de pontos de \mathbb{P}^1 . Composto a aplicação biracional $\tilde{p}: \tilde{C} \rightarrow C$ com $C \rightarrow \mathbb{P}^1$, obtemos uma aplicação biracional $\pi: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$. Tal aplicação está definida em todos os pontos de \tilde{C} pois \tilde{C} é não singular (imita-se o argumento ao final da demonstração do Teorema III.23). Como $\tilde{C} \subset \mathbb{P}^N$ é fechada, \tilde{C} é compacta. Logo,

sua imagem em \mathbb{P}^1 é compacta. Por outro lado, tal imagem é densa em \mathbb{P}^1 . Segue-se que $\pi: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ é sobrejetora.

Assim, temos uma aplicação (racional) sobrejetora $\pi: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$, definida em todos os pontos de \tilde{C} , que é uma aplicação de revestimento ramificada.

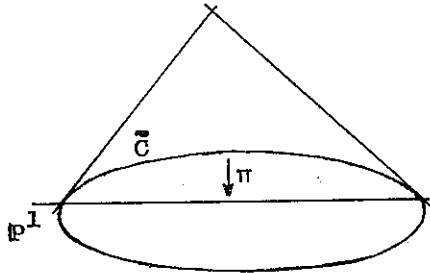
(3) A ordem de ramificação em um ponto $P \in \tilde{C}$ é o número de folhas do (único) ramo em P . A ordem total de ramificação (= ordem total de ramificação não singular) é

$\sum_{P \in \tilde{C}} \sigma_{\pi}(P)$. Se $a \in \mathbb{P}^1$ é um ponto não crítico de π (isto é, da função algébrica definida por $f(x,y) = 0$), o número de pontos em $\pi^{-1}(a)$ é exatamente igual ao grau da extensão de corpos $C(\tilde{C}) | \pi^*C(\mathbb{P}^1)$. Em qualquer caso, para determinar os pontos de $\pi^{-1}(a)$ explicitamente, procedemos da seguinte maneira: assim como toda aplicação racional de uma variedade projetiva em \mathbb{P}^1 , π é dada por $(\bar{F}_0: \bar{F}_1)$, onde $\bar{F}_0, \bar{F}_1 \in C_h[\tilde{C}]$ são homogêneos e do mesmo grau. Tomemos imagens inversas F_0, F_1 de \bar{F}_0, \bar{F}_1 em $C[W_0, \dots, W_N]$. Tais polinômios determinam, em \mathbb{P}^N , um sistema linear de hypersuperfícies, um elemento genérico do qual é da forma $a_1 F_0 + a_0 F_1$, com $(a_0: a_1) \in \mathbb{P}^1$. Podemos supor que F_0, F_1 não têm fatores comuns. Seja V a variedade interseção $\mathcal{V}(F_0) \cap \mathcal{V}(F_1)$ e seja $V \cap \tilde{C} =$

$= \{P_1, \dots, P_m\}$. Temos dois casos a considerar, conforme $\pi^{-1}(a_0:a_1)$ contenha ou não algum dentre os P_j 's; mas, genericamente, $\pi^{-1}(a_0:a_1) = \tilde{C} \cap \nu(a_1F_0 + a_0F_1)$. Em qualquer caso, levando em conta as multiplicidades dos pontos de interseção, pode-se ver que $\pi^{-1}(a_0:a_1)$ admite tantas soluções quanto é o grau da extensão $\mathbb{C}(\tilde{C}) \mid \pi^*\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$.

É neste sentido que as fibras de $\pi: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ têm todas o mesmo número de pontos.

Exemplos: (1) $f = Y^2 - X$. Neste caso, $\tilde{C} = \nu(Y^2 - XZ)$, pois $Y^2 - XZ$ não tem singularidades.

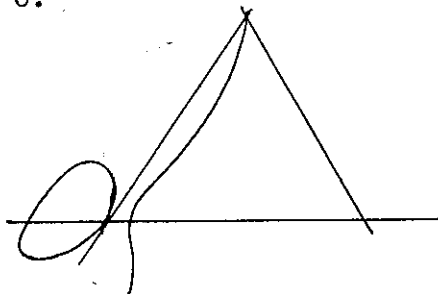


A aplicação π é $(x:z)$, onde $x = \bar{X}$ e $z = \bar{Z}$. Vemos que π é a restrição da aplicação racional $(X:Z)$ de \mathbb{P}^2 em \mathbb{P}^1 , a qual é uma projeção centrada no ponto $(0:1:0)$ da reta $z = 0$ no infinito. O grau de π é 2; dado um ponto $(\lambda:0:1) \in \mathbb{P}^1$, $\lambda \neq 0$, os pontos em $\pi^{-1}((\lambda:0:1))$ são as interseções da reta $X - \lambda Z$ com a cônica $Y^2 - XZ$. Explicitamente, $\pi^{-1}((\lambda:0:1)) =$

$= \{(\lambda:\lambda:1), (\lambda:-\lambda:1)\}$ se $\lambda \neq 0$, enquanto que $\pi^{-1}((0:0:1)) = \{(0:0:1)\}$ (multiplicidade 2) e, analogamente, $\pi^{-1}((1:0:0)) = \{(1:0:0)\}$ (multiplicidade 2). A ordem total de ramificação de π é $1+1 = 2$.

Exercício: Se $C \subset \mathbb{P}^2$ é uma cônica não degenerada (isto é, uma curva projetiva irredutível de grau 2), mostre que C é não singular. Quais são as possibilidades (efetivas) para o grau da projeção $\pi: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ centrada no ponto $(0:1:0)$? Que dizer da ordem de ramificação de π ?

(2) $f = Y^2 - X(X^2-1)$. É fácil verificar que o fecho projetivo $C = \nu(Y^2Z - X(X^2-Z^2)) \subset \mathbb{P}^2$ é não singular. Logo, $\tilde{C} = C$.



O gráfico real de C é constituído de dois pedaços, apesar de que C , como superfície de Riemann (dimensão real 2), é constituída de um só pedaço irredutível, o que se conclui da irredutibilidade do polinômio $Y^2 - X(X^2-1)$.

A projeção $\pi: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ é, novamente, a restrição a \tilde{C} da projeção $(X:Z)$ centrada em $(0:1:0)$. As soluções de

$$\begin{cases} x = \lambda z \\ y^2 z - x(x^2 - z^2) = 0 \end{cases}$$

são, além de $(0:1:0)$, os pontos $(\lambda: \sqrt{\lambda(\lambda^2-1)}:1)$ e $(\lambda: -\sqrt{\lambda(\lambda^2-1)}:1)$. Logo, o grau de π é 2. Se $\lambda = 0$, os dois pontos acima coincidem, mostrando que

$\pi^{-1}((0:0:1)) = \{(0:0:1)\}$ e que $(0:0:1)$ é um ponto de ramificação de ordem 1. Analogamente, se $\lambda = \pm 1$. Finalmente, $\pi^{-1}((1:0:0)) = \{(0:1:0)\}$, o que se vê calculando a interseção $v(Z) \cap C$. Assim, π admite 4 pontos de ramificação, com ordem de ramificação 1 cada um deles.

Exercício: Mostre que uma cúbica projetiva irreduzível tem no máximo um ponto singular. Que dizer de uma quártica? Dê exemplos.

Exercício: Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma curva projetiva não singular.

- (i) Defina a noção de zero e polo, com as multiplicidades correspondentes, de uma função racional $\varphi \in \mathbb{C}(C)$ em C , analogamente às noções de mesmo nome no caso em que C é o plano estendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{P}^1$ (SUGESTÃO: C é, localmente, analiticamente homeomorfa a \mathbb{C});
- (ii) Seja $\pi: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ a projeção $(x:z)$, restrição de

$(X:Z)$ a C . Mostre que o grau de π é igual ao número de zeros da função $x/z \in C(C)$ (contando multiplicidades); (iii) Uma função racional $\varphi \in C(C)$ determina uma aplicação racional $\pi: C \rightarrow P^1$ definida em todos os pontos de C (vide demonstração do Teorema III.23). Mostre que o número de zeros de φ é igual ao número de polos de φ (contando multiplicidades).

Concluiremos este capítulo com a seguinte observação. Vimos nos exemplos acima que a ordem total de ramificação do recobrimento $\pi: \tilde{C} \rightarrow P^1$ era um número par. Na verdade, isto vale em geral. Por consequência, $\frac{1}{2} (\sigma_{\text{tot}} - 2(n-1))$ é um número inteiro, onde n é o grau de π e σ_{tot} , a ordem de ramificação total de π . Mais do que isso, mostra-se que $\sigma_{\text{tot}} \geq 2(n-1)$. O inteiro não negativo $\frac{1}{2} (\sigma_{\text{tot}} - 2(n-1))$ é um invariante da curva \tilde{C} , isto é, é o mesmo para qualquer aplicação racional $\tilde{C} \rightarrow P^1$ não constante. Tal invariante é chamado o gênero da curva \tilde{C} (ou da superfície de Riemann subjacente). Um dos resultados mais interessantes nesta ordem de idéias é a fórmula de Riemann-Hurwitz que nos garante a igualdade entre o gênero $\frac{1}{2} (\sigma_{\text{tot}} - 2(n-1))$ e o número máximo de diferenciais de 1ª espécie lin. ind. sobre a superfície de Riemann (vide capítulo seguinte). Mais geralmente,

Hurwitz provou que se $\pi: S \rightarrow S'$ é uma aplicação racional não constante entre superfícies de Riemann (compactas, conexas, não singulares) e se g e g' são os respectivos gêneros (definidos, à maneira de Riemann, como o número máximo de diferenciais de 1ª espécie linearmente independentes), tem-se:

$$2g-2 = (2g'-2)n + e_{\text{tot}},$$

onde $n = \text{grau}(\pi)$ e e_{tot} , a ordem de ramificação total, convenientemente definida.

Do ponto de vista puramente topológico, g é igual a $\frac{1}{2}(2-\chi)$, onde χ é a característica de Euler da superfície de Riemann em questão, calculada por meio de triangulação. Sob este ângulo, a fórmula de Hurwitz é fácil de se deduzir. Enfim, g é também o número de "asas" da superfície, ou melhor, a metade do número de "cortes", a serem produzidos na superfície de modo a torná-la simplesmente conexa.

Se $\tilde{C} \subset \mathbb{P}^2$ é não singular, o gênero coincide com o inteiro $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$, onde d é o grau de \tilde{C} . Os exemplos (1) e (2) apresentam gênero 0 e 1, respectivamente. Se \tilde{C} admite r pontos singulares e tais pontos são pontos duplos ordinários ou cuspidais de 1ª espécie, o gênero de \tilde{C} é dado por $\frac{1}{2}(d-1)(d-2) - r$.

IV. INTEGRAIS ABELIANAS

IV.1. Integrais $\int R(t)dt$, $R(t)$ uma função racional sobre a esfera de Riemann.

Uma fração racional (ou função racional) sobre C , ou sobre a esfera de Riemann $C \cup \{\infty\}$, é um quociente $R(t) = P(t)/Q(t)$, onde $P(t), Q(t) \in C[t]$, com $Q(t) \neq 0$. É claro que $R(t)$ define uma função de $C \setminus \{\alpha \mid Q(\alpha) = 0\}$ em C , que é analítica. Se tomarmos $P(t)$ e $Q(t)$ sem fatores comuns - o que é sempre possível graças a que $C[t]$ é um anel fatorial - o domínio de definição de $R(t)$ é precisamente $C \setminus \{\alpha \mid Q(\alpha) = 0\}$. Neste caso, um $\alpha \in C$ tal que $Q(\alpha) = 0$ é denominado um polo de $R(t)$, ao passo que um $\alpha \in C$ tal que $P(\alpha) = 0$ é um zero de $R(t)$ (N.B. $P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$ é impossível em virtude de P e Q serem primos entre si).

Um caminho diferenciável C em $C = R^2$ é a imagem de uma aplicação diferenciável $\varphi: u \mapsto \varphi(u)$ de $[u_0, u_1] \subset R$ em C . Se C não contém nenhum dos pontos da função racional $R(t)$, definimos, como de costume:

$$\int_C R(t)dt = \int_{u_0}^{u_1} R(\varphi(u)) \frac{d\varphi}{du} du.$$

A integral acima está bem definida e independe da parametrização φ do caminho C . Mais do que isso, a integral acima independe do caminho C que liga os pontos $\varphi(u_0)$ e $\varphi(u_1)$, a menos de constantes. Em outras palavras, se C' é outro caminho diferenciável ligando $\varphi(u_0)$ e $\varphi(u_1)$, tem-se

$$\int_C R(t)dt = \int_{C'} R(t)dt + \text{const.}$$

(Supomos sempre que C e C' evitam os polos de $R(t)$). Com efeito, $R(t)$ é analítica no aberto conexo $D = \mathbb{C} \setminus \{\alpha \mid Q(\alpha) = 0\}$, logo admite primitiva local em todos os pontos do caminho C . Explicitamente, numa vizinhança circular de um ponto de D , $R(t)$ admite primitiva da forma $\log(p(t)) + S(t)$, onde $S(t)$ é uma função racional, $p(t)$ um polinômio da forma $(t-a)^k$, $k \geq 0$, e \log é uma determinação conveniente da função multivalente logaritmo. (Para verificar isto, pode-se usar a decomposição de $R(t)$ numa parte polinomial e em frações simples, partindo de que $\mathbb{C}[t]$ é fatorial).

Vemos assim que, como função de $\mathbb{C} \setminus \{\alpha \mid Q(\alpha) = 0\}$, em \mathbb{C} a integral $\int R(t)dt$ é geralmente multivalente.

Pode-se perguntar qual o comportamento de $\int R(t)dt$ nos polos de $R(t)$. Para responder a esta pergunta, somos levados a considerar o desenvolvimento de Laurent de $R(t)$ em um dado polo $a \in \mathbb{C}$ de ordem m . Seja

$$R(t) = \frac{\alpha_{-m}}{(t-a)^m} + \dots + \frac{\alpha_{-1}}{t-a} + \alpha_0 + \alpha_1(t-a) + \dots, \quad 0 < |t-a| < \rho.$$

Integrando ao longo de um caminho C não passando por a , com extremidade z , obtemos:

$$\int_C^z R(t)dt = \int_C^z \frac{\alpha_{-m}}{(t-a)^m} dt + \dots + \int_C^z \frac{\alpha_{-1}}{t-a} dt + \int_C^z \alpha_0 dt + \int_C^z \alpha_1(t-a) dt + \dots$$

(integrar termo a termo é lícito já que $R(t) = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_{-j}}{(t-a)^j}$ é analítica em a , logo $\alpha_0 + \alpha_1(t-a) + \dots$ converge uniformemente num disco centrado em a). Segue-se que, a menos de uma constante,

$$\int_C^z R(t)dt = -\frac{\alpha_{-m}}{(m-1)(z-a)^{m-1}} - \dots - \frac{\alpha_{-2}}{z-a} + \alpha_{-1} \log(z-a) + \alpha_0(z-a) + \dots$$

Dois casos se apresentam.

1º caso: o resíduo α_{-1} de $R(t)$ em a é nulo.

Neste caso, $\int_C^z R(t)dt$ é uma função univalente

em $0 < |z-a| < \rho$, admitindo a como polo de ordem $m-1$.

2º caso: o resíduo α_{-1} de $R(t)$ em a é $\neq 0$.

Neste caso, $\int^z R(t)dt$ é uma função multivalente em $0 < |z-a| < \rho$, admitindo tantas determinações quantas são as determinações do logaritmo na coroa $0 < |z-a| < \rho$. Dizemos então que o ponto a é uma singularidade logarítmica da integral.

Em todas estas considerações, podemos incluir o ponto ∞ . (*) Ora, sabemos que a soma dos resíduos de $R(t)$ em $C \cup \{\infty\}$ é 0. Logo, ou $\int R(t)dt$ não admite nenhuma singularidade logarítmica em $C \cup \{\infty\}$ (isto acontece precisamente quando todos os resíduos de $R(t)$ são nulos individualmente) ou $\int R(t)dt$ admite pelo menos duas singularidades logarítmicas em $C \cup \{\infty\}$. Casos especiais são, respectivamente:

(A) $\int R(t)dt$ está definida em todos os pontos de $C \cup \{\infty\}$ com exceção de um único ponto que é um polo de $\int R(t)dt$. Dizemos, neste caso, que $\int R(t)dt$ é uma integral de 2ª espécie.

(B) $\int R(t)dt$ está definida em todos, menos dois, pontos

(*) Lembremos que $R(t)$ admite um polo de ordem m em ∞ se $R(\frac{1}{t})$ admite um polo de ordem m em 0.

de $C \cup \{\infty\}$, e estes dois pontos são singularidades logarítmicas de $\int R(t)dt$. Tal integral denomina-se de 3ª espécie.

Por exemplo, $\int t^m dt$ é de 2ª espécie para m inteiro $\neq -1$, ao passo que $\int \frac{dt}{t}$ é de 3ª espécie. A decomposição em frações simples de uma função racional $R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ tal que $\text{gr } P < \text{gr } Q$, garante-nos que toda integral $\int R(t)dt$ é soma de integrais de 2ª e 3ª espécie.

Tal resultado, convenientemente generalizado, é típico da teoria das integrais abelianas sobre superfícies de Riemann quaisquer.

IV.2. Integrais abelianas: classificação.

As vultosas partes da Matemática que hoje conhecemos com os títulos de Funções Elípticas, Variedades Abelianas, Esquemas em Grupos ("group schemes", "schémas en groupes"), respectivamente, originaram-se nas tentativas de medir o comprimento de um arco de uma elipse. Tal começo é comumente atribuído a Euler mas, na verdade, a precedência é do matemático italiano Fagnano (1700-1766). Fagnano considerou uma elipse de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 =$

= 1 no plano (real) e propôs-se a calcular o comprimento de um arco. A fórmula, para isso, era

$$S = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^x \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} dx .$$

Introduzindo-se a excentricidade k da elipse ($k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$),

resulta:

$$S = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - k^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx = \int_0^x \frac{a^2 - k^2 x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2 x^2)}} dx$$

$$= a \int_0^{az} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} - ak^2 \int_0^{az} \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} ,$$

onde $z = x/a$.

Infelizmente (para Fagnano), nenhuma das integrais acima se exprimia por meio de funções transcendentess elementares. Foi precisamente o reconhecimento deste fato, bem como de suas importantes implicações para a teoria das integrais, que levou a Euler (em 1761) contribuir substancialmente para o que hoje chamamos de teoria das funções elítticas e das integrais elítticas.

Se bem que, nas aplicações clássicas à Mecânica (e à Física, em geral), a variável z seja real, é no caso em que z é uma variável complexa que se obtém resul-

tados profundos. Concentrar-nos-emos, pois, neste último caso.

$$\text{As integrais } \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

são chamadas integrais normais de Legendre de primeira e de segunda espécie, respectivamente.

A rigor, as integrais acima estão bem definidas (isto é, são funções univalentes de z) somente ao longo de caminhos diferenciáveis contidos num aberto simplesmente conexo $D \subset \mathbb{C}$ que não contenha os pontos críticos da função algébrica $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$, desde que, evidentemente, escolhamos uma das determinações (isto é, um dos ramos) desta função em D . Para evitar tais complicações, olhamos para a superfície de Riemann C em \mathbb{C}^2 (não compacta) associada à equação algébrica $Y^2 - (1-X^2)(1-k^2X^2)$. Sobre C , a função $w = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ é uma função genuinamente univalente e analítica em todos os pontos.

Com efeito, w é então a restrição da função coordenada Y a C . Então, as integrais acima são $\int \frac{dx}{y}$ e $\int \frac{x^2 dx}{y}$, respectivamente, onde supomos que o caminho de integração não passa pelos pontos de ramificação de C .

Ora, $1/y$ e x^2/y são funções racionais sobre C . Vemos que, na verdade, estamos integrando "formas diferenciais" de tipo especial. Somos levados, naturalmente, ao

seguinte conceito. Uma forma diferencial racional em \mathbb{C}^2 é um elemento do espaço vetorial Ω sobre $\mathbb{C}(X,Y)$ gerado pelos símbolos dX, dY . Uma tal forma escreve-se como $\varphi dX + \psi dY$, com φ, ψ funções racionais em \mathbb{C}^2 . Identificaremos, como de costume, dX e dY com as formas $1.dX + 0.dY$ e $0.dX + 1.dY$, respectivamente. Dado $F \in \mathbb{C}[X,Y]$, definimos (formalmente) $d(F) = \frac{\partial F}{\partial X} dX + \frac{\partial F}{\partial Y} dY$, onde $\partial F/\partial X$ e $\partial F/\partial Y$ têm o significado usual. Estendemos tal definição a uma função $\varphi = F/G \in \mathbb{C}(X,Y)$ da maneira esperada: $d(\varphi) = \frac{Gd(F) - Fd(G)}{G^2} = \frac{1}{G} dF - \frac{1}{G} \varphi dG$. Obtemos uma aplicação ("derivação estrutural") $d: \mathbb{C}(X,Y) \rightarrow \Omega$ tal que $d(X) = dX$ e $d(Y) = dY$.

Desta maneira, Ω é isomorfo ao espaço quociente do espaço vetorial sobre $\mathbb{C}(X,Y)$ gerado pelos símbolos $[\varphi]$ (um para cada $\varphi \in \mathbb{C}(X,Y)$) pelo subespaço gerado pelos elementos da forma $[\varphi + \psi] - [\varphi] - [\psi]$, $[\lambda\varphi] - \lambda[\varphi]$, $[\varphi\psi] - \varphi[\psi] - \psi[\varphi]$, onde $\varphi, \psi \in \mathbb{C}(X,Y)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Seja, agora, $C \subset \mathbb{C}^2$ uma curva irredutível e seja $\mathbb{C}(x,y)$ seu corpo de funções racionais (recordemos que $\mathbb{C}(x,y)$ é o corpo de frações do anel $\mathbb{C}[x,y] = \mathbb{C}[X,Y]/(F)$, onde F é o polinômio irredutível definindo C). Seja E o $\mathbb{C}(x,y)$ -espaço vetorial de base $\{[\varphi] \mid \varphi \in \mathbb{C}(x,y)\}$ e seja Ω_C o espaço quociente pelo

subespaço gerado pelos elementos da forma acima descrita. Por analogia, os elementos de Ω_C são chamados formas diferenciais (racionais) em C .

Proposição IV.1 - Seja $C \subset \mathbb{C}^2$ uma curva irredutível não vertical (i.e., $C \neq \mathbb{V}(X-a)$ para todo $a \in \mathbb{C}$). Se $d\varphi \in \Omega_C$ designa a classe do elemento $[\varphi]$, então Ω_C é gerado pelo elemento dx .

Demonstração: É fácil verificar que, para $g(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, tem-se $dg(x,y) = \frac{\partial G}{\partial X}(x,y)dx + \frac{\partial G}{\partial Y}(x,y)dy$, onde $G \in \mathbb{C}[X,Y]$ é uma imagem inversa de $g(x,y)$. Segue-se, por um lado, que Ω_C é gerado por dx e dy sobre $\mathbb{C}(x,y)$ e, por outro lado, que $df(x,y) = \frac{\partial F}{\partial X}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)dy$, onde F é o polinômio irredutível que define C . Ora, $f(x,y) = 0$ em $\mathbb{C}[x,y]$. Consequentemente, $\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)dy = -\frac{\partial F}{\partial X}(x,y)dx$. Finalmente, por hipótese, $\frac{\partial F}{\partial Y}$ não é o polinômio nulo. Logo, sendo F irredutível, F não divide $\frac{\partial F}{\partial Y}$. Isto significa que $\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y) \neq 0$ em $\mathbb{C}[x,y]$. Por consequência, $dy = -\left(\frac{\partial F}{\partial X}(x,y) / \frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)\right)dx$.

C.Q.D.

Exercício: Prove que, na Proposição IV.1, tem-se $dx \neq 0$ (logo, Ω_C tem dimensão 1 sobre $\mathbb{C}(x,y)$).

Pela proposição acima, toda forma diferencial racional numa curva irredutível (não vertical) $C \subset \mathbb{C}^2$ ad-

mite a representação $\int_C \varphi(x,y)dx$, onde $\varphi(x,y)$ é uma função racional em C unicamente determinada.

A função $\varphi(x,y)$ é contínua, e até mesmo analítica, no complementar C_0 dos seus polos e dos pontos de ramificação de C . Dado um caminho (diferenciável) em C evitando os pontos mencionados, a integral $\int_{\gamma} \varphi(x,y)dx$ está bem definida. Como no §IV.1, fixemos um ponto $P_0 \in C_0$ de uma vez por todas. Dado um ponto $P \in C_0$, seja $\gamma \subset C_0$ um caminho ligando P_0 a P . A associação $P \mapsto \int_{\gamma} \varphi(x,y)dx$ parece fornecer uma função de C_0 em C mas, na verdade, depende do caminho γ . Se $\gamma_1 \subset C_0$ é outro caminho ligando P_0 a P , um análogo do teorema de Cauchy pode ser provado para C , no sentido de que a integral $\int \varphi(x,y)dx$ ao longo do caminho fechado $\gamma - \gamma_1$ é igual a $2\pi i \sum_k \text{Res}_{Q_k} g(x,y)^{(*)}$, onde Q_k percorre o conjunto dos polos de $g(x,y)$ no interior de $\gamma - \gamma_1$. Segue-se daí que $\int_{\gamma} \varphi(x,y)dx = \int_{\gamma_1} \varphi(x,y)dx + \text{const.}$

Convencionaremos que as integrais acima são calculadas ao longo de um mesmo caminho. Desta forma, dada uma função racional $\varphi(x,y)$ em C , está perfeitamente definida a integral $\int \varphi(x,y)dx$ como função de C_0 em C .

(*) A definição de resíduo de uma função num ponto é análoga à do caso em que $C = \mathbb{C}$, usando-se os ramos de C .

Tal integral chama-se integral abeliana, em homenagem a Abel, quem primeiro sistematizou o estudo de integrais sobre uma superfície de Riemann.

O problema que se põe é o de estudar o comportamento de uma integral abeliana num ponto de $C \setminus C_0$. Em qualquer caso, vemos que $\int \varphi(x,y)dx$ admite, quando muito, singularidades isoladas em C . Mais precisamente, tem-se a

Proposição IV.2 - Seja $C \subset C^2$ uma curva irredutível (não vertical) e seja $\varphi(x,y) \in C(x,y)$ uma função racional em C . Dado um ponto $P = (a,b) \in C$ não singular, uma e uma só das seguintes situações tem lugar:

- (i) $\int \varphi(x,y)dx$ está bem definida e é analítica em P ;
- (ii) $\int \varphi(x,y)dx$ admite um polo em P ;
- (iii) $\int \varphi(x,y)dx$ admite uma singularidade logarítmica em P , isto é, considerada como função de x , $\int \varphi(x,y)dx$ admite o desenvolvimento $\alpha \log(x-a) + \sum_{k=-m-r}^{\infty} \alpha_k (x-a)^{k/r}$ numa vizinhança de a , onde $\alpha \neq 0$ e r é o número de folhas de C em P .

Demonstração: Temos várias possibilidades a considerar:

1. O ramo de C em P admite uma só folha.

Em outras palavras, usando a notação do §III.1, $\sigma_{\pi}(P) = 0 = e_{\pi}(P) - 1$, onde $\pi: C \rightarrow C$ é a projeção estrutural. Temos dois subcasos, conforme $\varphi(x,y)$ esteja ou não definida em P . Se $\varphi(x,y)$ estiver bem definida em P (isto é, se P não é polo de $\varphi(x,y)$), então $P \in C_0$ e neste caso já sabemos que $\int \varphi(x,y) dx$ está bem definida e é analítica em P . Suponhamos que P é um polo de $\varphi(x,y)$. Seja $x-a = t$, $y = \eta(t)$ um representante do único ramo de C em P (por hipótese, P é não singular!). Isto define um homomorfismo injetor do anel \mathcal{O}_P das funções racionais definidas em P no anel $C\{t\}$ das séries convergentes em 0 e tal homomorfismo estende-se a uma inclusão $C(x,y) \subset C(\{t\})$ dos respectivos corpos de frações. Ora, os elementos de $C(\{t\})$ são séries de Laurent convergentes num disco perfurado em a . Logo, resulta

$$\varphi(x,y) = \frac{\alpha_{-m}}{t^m} + \dots + \frac{\alpha_{-1}}{t} + \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots, \quad \text{num tal disco.}$$

Integrando termo a termo (vide §IV.1), obtemos:

$$\begin{aligned} \int \varphi(x,y) dx &= \int \varphi(t, \eta(t)) dt = \text{const.} + \frac{\alpha_{-m}}{(1-m)} \frac{1}{t^{m-1}} + \\ &+ \dots + \alpha_{-1} \log t + \alpha_1 t + \dots = \text{const.} + \frac{\alpha_{-m}}{(1-m)} \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + \\ &+ \dots + \alpha_{-1} \log(x-a) + \alpha_1(x-a) + \dots \end{aligned}$$

Segue-se que P é um polo de ordem $m-1$ de $\int \varphi(x,y)dx$ se $\text{Res}_P \varphi(x,y) = \alpha_{-1} = 0$; se $\text{Res}_P \varphi(x,y) \neq 0$, P é uma singularidade logarítmica.

2. O ramo de C em P admite $r > 1$ folhas.

Isto é, $\nu_\pi(P) = r-1 > 0$. Aqui, novamente, temos alguns subcasos. Em qualquer hipótese, C admite uma parametrização em P da forma $x-a = t^r$, $y = \eta(t)$ (vide §II.2 e §II.3). Obtemos, ainda desta feita, um homomorfismo injetor de \mathcal{O}_P em $\mathbb{C}\{t\}$, que se estende a uma inclusão $\mathbb{C}(x,y) \subset \mathbb{C}(\{t\})$. Temos três casos, conforme $\varphi(x,y)$ esteja definida em P , P seja polo de $\varphi(x,y)$ de ordem $< r$ ou P seja polo de $\varphi(x,y)$ de ordem $\geq r$. Obtemos que $\varphi(x,y)dx$ é analítica em P nos dois primeiros casos; no terceiro caso, $\int \varphi(x,y)dx$ admite um polo em P se $\text{Res}_P \varphi(x,y)dx = 0$ e, uma singularidade logarítmica, caso contrário. A análise dos vários casos é completamente análoga à primeira parte, modificando-se apenas a forma do desenvolvimento de $\varphi(x,y)$ (em termos de $(x-a)^{1/r}$ agora, não mais $(x-a)$).

C.Q.D.

Observação: A proposição acima permanece válida ainda se P for um ponto singular de C . Para isto, passamos à resolução local de P e procedemos conforme

acima. Em particular, se os resíduos de $\varphi(x,y)$ são (individualmente) nulos, a demonstração acima põe em evidência que $\int \varphi(x,y)dx$ é uma aplicação racional $\tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ definida em todos os pontos de \tilde{C} , onde \tilde{C} é um modelo projetivo não singular de C .

Definição IV.3 - Uma integral abeliana $\int \varphi(x,y)dx$ sobre uma curva $C \subset \mathbb{C}^2$ é chamada de primeira espécie se for analítica em todos os pontos do modelo não singular de C . Se $\int \varphi(x,y)dx$ for analítica em todos os pontos exceto um único ponto, que admite por polo, será chamada integral de segunda espécie. Finalmente, $\int \varphi(x,y)dx$ é de terceira espécie se for analítica em todos os pontos exceto em dois pontos distintos, que admite por singularidades logarítmicas.

Consideradas como funções do modelo não singular \tilde{C} , a valores em \mathbb{C} , as integrais abelianas formam um espaço vetorial sobre \mathbb{C} . Para ter-se uma idéia da dimensão deste espaço, daremos a seguir um resultado de representação para integrais de primeira espécie, devido essencialmente à escola de Brill e Noether.

Proposição IV.4 ("dos adjuntos especiais") - Seja $C \subset \mathbb{C}^2$ uma curva irreduzível (não vertical, como sempre), seja $F \in \mathbb{C}[X,Y]$ o polinômio irreduzível cor-

respondente e seja m o grau de F (*). Então:

(i) Toda integral de primeira espécie sobre C é da forma $\int \frac{Q(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)} dx$, onde $Q \in \mathbb{C}[X,Y]$ é um polinômio de grau $\leq m-3$.

(ii) Reciprocamente, suponhamos que o fecho projetivo de C admite apenas pontos múltiplos ordinários ou pontos de reviravolta ordinários (vide §II.3). Seja $Q \in \mathbb{C}[X,Y]$ de grau $m-3$ tal que todo ponto singular de C de multiplicidade r seja ponto singular da curva $V(Q) \subset \mathbb{C}^2$ de multiplicidade $\geq r-1$. Então, $\int \frac{Q(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)} dx$ é uma integral de primeira espécie.

Demonstração: (i) Passando ao fecho projetivo de C e efetuando uma mudança de coordenadas homogêneas, podemos supor que

$$F(X,Y) = f_0 Y^m + f_1(X) Y^{m-1} + \dots + f_m(X),$$

com $f_i(X) \in \mathbb{C}[X]$ de grau $\leq i$. Seja $\int \varphi(x,y) dx$ de primeira espécie. Uma análise semelhante à da demonstração da Proposição IV.2 põe em relevo que $\varphi(x,y)$ satisfaz as seguintes condições:

(*) Pelo grau de um polinômio em X, Y entenderemos sempre o grau do monômio de maior grau que comparece efetivamente no polinômio.

(1) Numa vizinhança de ∞ (isto é, do ponto $(1:0) \in \mathbb{P}^1$) $\varphi(x,y)$ é, considerada como função de x , da ordem de $1/x^2$ ao menos.

(2) Seja $P \in \tilde{C}$ um polo de $\varphi(x,y)$. Então, como função de x , $\varphi(x,y)$ é de ordem fracionária < 1 relativamente a $1/(x-a)$, onde $\pi(P) = a$. Segue-se que P é um ponto de ramificação de \tilde{C} (isto é, $\sigma_\pi(P) > 1$).

Para todo inteiro positivo k , consideremos a função

$$P_{k-2}: a \mapsto u_1(a)^k \varphi(a, u_1(a)) + \dots + u_m(a)^k \varphi(a, u_m(a)),$$

onde $u_1(a), \dots, u_m(a)$ são as raízes do polinômio $F(a, Y)$.

Tal função está certamente definida fora dos polos de

$\varphi(x,y)$. Na verdade, P_{k-2} é uma função racional em C

uma vez que é simétrica nos u_i 's. Mais do que isso,

P_{k-2} está definida em todo ponto de C . Com efeito, pe-

la condição (2) acima, um termo $u_i(-)\varphi(-, u_i(-))$ admite

polo num ponto $P \in \tilde{C}$ somente se P é um ponto de rami-

ficação de \tilde{C} e, neste caso, seu desenvolvimento numa vi-

zinhanga perfurada em $\pi(P) = a$ tem como parte principal

$$\frac{\alpha_1}{(x-a)^{\frac{1}{n}}} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^{\frac{2}{n}}} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{(x-a)^{\frac{n-1}{n}}},$$

onde $\sigma_\pi(P) = n-1$. Segue-se que a soma P_{k-2} admite um

desenvolvimento em que não aparecem potências inteiras

de $1/(x-a)$. Como P_{k-2} é racional, P_{k-2} está necessariamente definida em a inclusive. Assim, P_{k-2} é um polinômio.

Por fim, numa vizinhança de ∞ , $u_1(-)\varphi(-, u_1(-))$ é (por (1)) da ordem de X^{k-2} quando muito. Consequentemente, $\text{gr}(P_{k-2}) \leq k-2$ se $k \geq 2$ e $P_{k-2} = 0$ se $k \leq 1$.

Por outro lado, temos $F(a, Y)/(Y-u_1(a)) = \varepsilon_0 Y^{m-1} + \varepsilon_1(a) Y^{m-2} + \dots + \varepsilon_{m-1}(a)$, onde $\varepsilon_0 = f_0$, $\varepsilon_1(a) = f_0 u_1(a) + f_1(a)$, $\varepsilon_2(a) = f_0 u_1(a)^2 + f_1(a) u_1(a) + f_2(a)$, etc. Seja $G_0 = \varepsilon_0$, $G_1 = G_1(X, Y) = f_0 Y + f_1(X)$, $G_2 = G_2(X, Y) = f_0 Y^2 + f_1(X) Y + f_2(X)$, etc. Evidentemente, G_k é de grau k em X, Y ($k = 0, 1, \dots, m-1$). Um pequeno cálculo fornece a relação

$$\varphi(a, u_1(a)) \cdot \left(\frac{F(a, Y)}{Y-u_1(a)} \right) (u_1(a)) = P_0(a) G_{m-3}(a, u_1(a)) + \dots + P_{m-3}(a) G_0$$

Mas, $\left(\frac{F(a, Y)}{Y-u_1(a)} \right) (u_1(a)) = \frac{\partial F}{\partial Y}(a, u_1(a))$. Logo, pondo por definição

$$Q(X, Y) = P_0(X) B_{m-3}(X, Y) + P_1(X) B_{m-2}(X, Y) + \dots + P_{m-3}(X) G_0,$$

obtemos

$$\varphi(a, u_1(a)) = \frac{Q(a, u_1(a))}{\frac{\partial F}{\partial Y}(a, u_1(a))},$$

o que dá uma determinação de $\varphi(x, y)$, como função de x , num entorno de a . Procedendo analogamente para com $u_2(a), \dots, u_m(a)$, obtemos finalmente

$$\varphi(x,y) = \frac{Q(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)}, \text{ que é a relação procurada.}$$

Evidentemente, $Q(X,Y)$ é de grau $\leq m-3$ em X,Y .

(ii) Seja $Q \in C[X,Y]$ satisfazendo as hipóteses do enunciado. Temos vários casos a considerar. Seja $(a,b) \in C$.

(1) (a,b) é um ponto simples de tangente vertical (vide §II.3).

Neste caso, $\frac{\partial F}{\partial X}(a,b) \neq 0$. Logo, $\frac{Q(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial X}(x,y)}$ está

definida em (a,b) , do que se segue que a integral

$\int \frac{Q(x,y)dy}{\frac{\partial F}{\partial X}(x,y)}$ está definida em (a,b) . Por outro lado, temos

$$\frac{\partial F}{\partial X}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)dy = 0.$$

Consequentemente,

$$\int \frac{Q(x,y)dx}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)} = - \int \frac{Q(x,y)dy}{\frac{\partial F}{\partial X}(x,y)}$$

está definida em (a,b) .

(2) (a,b) é ordinário com r tangentes distintas.

Podemos supor que $(a,b) = (0,0)$, de maneira que

$$F(X,Y) = X^r f_r(1, \frac{Y}{X}) + \dots + X^m f_m(1, \frac{Y}{X}),$$

onde $f_r(1,Z) \in C[Z]$ é de grau r com r raízes distin

tas. Segue-se que

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(X, Y) = X^{r-1} f_r'(1, \frac{Y}{X}) + \dots + X^{m-1} f_m'(1, \frac{Y}{X}).$$

Ora, C admite r ramos distintos em $(0,0)$ (vide §II.3), dados por

$$x = t$$

$$y_j(t) = c_j t + \dots, \quad j=1, \dots, r,$$

onde c_1, \dots, c_r são distintos. Substituindo uma tal parametrização acima, vemos que $\frac{\partial F}{\partial Y}(x, y)$ é da ordem de

x^{r-1} como função de x . Se a primeira forma homogênea não nula em $Q(X, Y)$ é de grau $\geq r-1$, resulta que $\frac{Q(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x, y)}$ está definida ao longo de um ramo arbitrário em $(0,0)$.

Passando ao modelo não singular \tilde{C} , vemos que $\frac{Q(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x, y)}$ está definida em cada um dos pontos de \tilde{C} que são imagens inversas de $(0,0)$. Logo, $\int \frac{Q(x, y) dx}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x, y)}$ está definida em cada um desses mesmos pontos.

Observação: A condição de que a primeira forma homogênea (não nula) de $Q(X, Y)$ tenha grau $\geq r-1$ é também necessária a fim de que $\int \frac{Q(x, y) dx}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x, y)}$ esteja definida em (a, b) . Com efeito, se $Q(x, y) = q_k(x, y) + \dots$ com q_k homogêneo de grau $k < r-1$, tem-se que $Q(x, y)$ é da ordem de x^k (ao substituirmos um dos ramos acima), a me

mos que $q_k(1, c_1) = \dots = q_k(1, c_r) = 0$, o que é também impossível com $k < r-1$.

Ora, dizer que $Q(X, Y) = q_{r-1}(X, Y) + \dots$ significa que $(0, 0)$ é ponto de multiplicidade $r-1$ de $v(Q)$ (ao menos).

(3) (a, b) é ponto de reviravolta ordinário.

Deixaremos este caso a título de exercício para o leitor.

C.Q.D.

Vemos que a condição acima sobre os polinômios $Q(X, Y)$ de grau $m-3$ é também necessária (vide observação em meio à demonstração anterior). Como conseqüência, contar o número de integrais de primeira espécie sobre uma curva $C \subset \mathbb{C}^2$ com singularidades ordinárias é equivalente a contar o número de tais polinômios. Precisamente:

Teorema IV.5 - Seja $C \subset \mathbb{C}^2$ uma curva irredutível de gênero g . Então a dimensão do \mathbb{C} -espaço vetorial das integrais de primeira espécie sobre C é $\geq g$.

Demonstração: Pelo teorema de Noether-Kronecker, C admite um modelo $D \subset \mathbb{P}^2$ com singularidades ordinárias. Os gêneros de C e D coincidem. Sabemos, por um lado, que o gênero de D é igual a $\frac{1}{2}(m-1)(m-2) -$

$-\frac{1}{2} \sum_{P \in D} r_P(r_P-1)$, onde r_P é a multiplicidade de $P \in D$ (vide final do Cap. III). Por outro lado, os polinômios $Q(X_0, X_1, X_2)$ homogêneos de grau $m-3$ formam um \mathbb{C} -espaço vetorial de dimensão $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, como se calcula diretamente. A condição de que um tal polinômio passe por um ponto $P \in D$ com multiplicidade $\geq r_P-1$ traduz-se por $\frac{1}{2} r_P(r_P-1)$ condições lineares (vide resolução de singularidades, Cap. III). Logo, pelo teorema anterior, a dimensão do \mathbb{C} -espaço das integrais de primeira espécie é $\geq \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2} \sum_{P \in D} r_P(r_P-1)$.

C.Q.D.

Observação: Pode-se mostrar que, na verdade, o gênero de C é exatamente a dimensão do \mathbb{C} -espaço das integrais abelianas de primeira espécie. Para mostrar que $g+1$ integrais de primeira espécie são sempre linearmente dependentes sobre \mathbb{C} , pode-se usar o método clássico de produzir $2g$ "cortes" convenientes na superfície de Riemann associada a C e considerar períodos convenientes das $g+1$ integrais no complementar dos cortes. Outro método, devido a Picard, consiste em fabricar sistemas lineares convenientes em \mathbb{P}^2 . Finalmente, a demonstração mais rápida é através do célebre teorema de Riemann-Roch, do qual se deduz que g é a dimensão do \mathbb{C} -espaço vetorial das diferenciais racionais de primeira

espécie (a definição destas últimas é análoga à das integrais de primeira espécie).

Finalmente, salientemos que os polinômios $Q(X,Y)$ de grau $m-3$ tais que $\left(\frac{Q(x,y)dx}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)} \right)$ é de primeira espécie são chamados adjuntos de C de grau $m-3$ (ou adjuntos especiais de C).

Exemplos: (1) Não existem integrais de primeira espécie sobre a esfera de Riemann.

Com efeito, sabemos que a esfera de Riemann é analiticamente isomorfa à reta projetiva \mathbb{P}^1 . Esta, por sua vez, é (algebricamente) isomorfa a uma reta em \mathbb{P}^2 , que é de grau 1. O resultado é, então, consequência do teorema dos adjuntos especiais.

Analogamente, uma cônica irredutível em \mathbb{P}^2 não admite integrais de primeira espécie. Mais geralmente, isto é válido para qualquer curva de gênero 0, como consequência da observação acima ou, mais diretamente, mostrando-se que uma tal curva é racional, isto é, bira-cionalmente isomorfa a \mathbb{P}^1 .

(2) Existe apenas uma (a menos de constantes) integral de primeira espécie sobre uma cúbica $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2$ sem singularidades.

Com efeito, os adjuntos especiais de C são os

polinômios constantes! Pode-se mostrar que toda curva de gênero 1 é biracionalmente isomorfa a uma cúbica não singular em \mathbb{P}^2 . Logo, uma tal curva admite apenas uma integral de primeira espécie.

Atenção, contudo! Uma cúbica $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2$ com um ponto singular P não admite integrais de primeira espécie. Com efeito, caso contrário um adjunto especial teria de passar no ponto P , o que é impossível pois os adjuntos especiais sobre uma cúbica são as constantes. Na verdade, uma cúbica irredutível admitindo um ponto singular tem gênero 0.

(3) Seja $k \in \mathbb{C}$ tal que $k \neq 0, \pm 1$. Então, a curva C de equação $Y^2 - (1-X^2)(1-k^2X^2)$ admite uma única integral de primeira espécie, (a menos de fatores constantes).

Com efeito, mostraremos que C admite um único ponto singular que é um ponto de reviravolta não ordinário ("higher cusp"). Para isso, consideremos o fecho projetivo $Y^2Z^2 - (Z^2-X^2)(Z^2-k^2X^2)$ de C . Um cálculo fácil mostra que o único ponto singular é o ponto $(0:1:0)$ na reta $z = 0$. Numa vizinhança de $(0:1:0)$, a equação afim de C é $Z^2 - (Z^2-X^2)(Z^2-k^2X^2)$, que não tem termo em X^3 . Logo, $(0:1:0)$ é um ponto de reviravolta não ordinário (vide §II.3). A resolução deste ponto consis-

te em duas etapas, na primeira das quais ele é substituído por um ponto duplo ordinário \bar{P} . O teorema dos adjuntos especiais pode ser adaptado a este caso, desde que convenientemente interpretado: um adjunto especial de C deve passar não só por P (com multiplicidade 1), mas também pelo ponto \bar{P} "na vizinhança de 1ª ordem de C ". Ora, tais adjuntos especiais são, em outras palavras, as retas que passam pelo ponto P e cujas transformadas próprias (na 1ª etapa) passam por \bar{P} . O espaço das formas homogêneas correspondentes tem dimensão $\frac{1}{2}(4-1)(4-2) - (1+1) = 1$ exatamente, logo C admite uma única integral de primeira espécie.

Não podemos aplicar diretamente o teorema dos adjuntos a C , para concluir que C admite uma integral de primeira espécie da forma $\int \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{y} dx$. Contudo, pode-se mostrar diretamente que $\int \frac{dx}{y}$ é de primeira espécie sobre C .

Exercício: Determine os pontos de ramificação da curva C de equação $Y^2 - (1-X^2)(1-k^2X^2)$, onde $k \neq 0, \pm 1$. Mostre que $\int \frac{dx}{y}$ é de primeira espécie sobre C .

Exercício: Mostre que a curva C de equação $Y^2 - (1-X^2)(1-k^2X^2)$, $k \neq 0, \pm 1$, é biracionalmente isomorfa a uma cúbica. Deduza que C tem gênero 1.

(Sugestão: use a aplicação racional $(1/(X-1), Y/(X-1)^2)$).

Exercício: Decida se a integral $\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ é ou não exprimível por meio das funções transcendente elementares.

Para terminar este parágrafo, mencionaremos o resultado fundamental sobre a estrutura das integrais abelianas.

Teorema IV.6 - Seja $C \subset \mathbb{C}^2$ uma curva irredutível. Toda integral abeliana sobre C é uma combinação \mathbb{C} -linear (finita) de integrais de primeira, de segunda e de terceira espécie.

Não demonstraremos este teorema, mas forneceremos uma receita para a demonstração. A saber:

(1) No modelo não singular \tilde{C} , seja $\mathcal{L} \subset \tilde{C}$ o conjunto das singularidades logarítmicas da integral

$\int \varphi(x,y)dx$ em questão. Seja $R_P = \text{Res}_P \varphi(x,y)$, $P \in \mathcal{L}$. Seja $P_0 \in \tilde{C} \setminus \mathcal{L}$. Mostra-se que existe uma integral de terceira espécie $I(P, P_0)$ sobre \tilde{C} com singularidades em P e P_0 , com expansões, respectivamente, da forma $\log x + \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots$ e $-\log x + \beta_0 + \beta_1 x + \dots$. Além disso, a integral de terceira espécie mais geral nestas condições é da forma $I(P, P_0) + \text{integral de 1ª espécie}$.

(2) A integral $\int \varphi(x,y)dx - \sum_{P \in \mathcal{L}} R_P \cdot I(P, P_0)$ não tem singularidades logarítmicas em $\mathcal{L} \cup \{P_0\}$ (de vez que $\sum_{P \in \mathcal{L}} R_P = 0$) e, portanto, quando muito polos em $\tilde{\mathcal{C}}$, com expansões da forma

$$\frac{c_{-r}}{x^r} + \dots + \frac{c_{-1}}{x} + c_0 + c_1 x + \dots .$$

Seja \mathcal{P} o conjunto de tais polos.

(3) Para cada $P \in \mathcal{P}$ e para todo $r \geq 0$, mostra-se que existe uma integral de segunda espécie com expansão da forma

$$J_r(P) = \frac{r!}{x^{r+1}} + d_0 + d_1 x + \dots ,$$

e a mais geral é da forma $J_r(P) +$ integral de primeira espécie.

(4) A integral

$$\int \varphi(x,y)dx - \sum_{P \in \mathcal{L}} R_P \cdot I(P, P_0) - \sum_{P \in \mathcal{P}} \left(\frac{c_{-r}}{(r-1)!} J_{r-1}(P) + \dots + c_{-1} J_0(P) \right)$$

é certamente de primeira espécie, o que termina a demonstração.

IV.3. Funções Elíticas e o problema da inversão em gênero 1.

Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função meromorfa. Nos casos mais simples, f é racional: evidentemente, uma tal função não admite períodos $\neq 0$. Em seguida, temos o caso em que f é simplesmente periódica, isto é, existe um complexo $w \neq 0$ tal que $f(z+w) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ onde f estiver definida. É o caso, por exemplo, das transcendentais elementares $\sin z$, $\cos z$, e^z , $\log z$.

Consideremos $\sin z$ mais de perto. Trata-se de uma função inteira (isto é, holomorfa em todo \mathbb{C}) admitindo por períodos exatamente os múltiplos inteiros de 2π . Se tentarmos inverter $w = \sin z$ (*) encontraremos uma função multivalente $z = z(w)$. Precisamente, acharemos $z = -i \log(iw \pm \sqrt{1-w^2})$ usando a expressão $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$. Ora, $-i \log(iw \pm \sqrt{1-w^2})$ é a integral (indefinida) de $\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$. Logo,

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}.$$

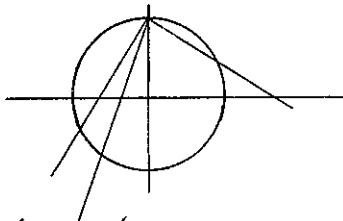
Podemos, revertendo o processo, a partir da integral mul-

(*)

Dentro de uma faixa de períodos, evidentemente.

tivalente $\int^w \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}$ (multivalente como função da variável complexa w), criar a função univalente e holomorfa $w = \text{sen } z$, que é simplesmente periódica (isto é, todos os períodos são múltiplos inteiros de um mesmo período). Se considerarmos o círculo de equação $X^2 + Y^2 = 1$, veremos que a integral acima expressa exatamente o comprimento de arco em função de x (ou w , na notação acima), daí o nome de função circular adquirido pela função $\text{sen } z$.

Com um pouco mais de entusiasmo, poderemos até calcular diretamente a integral acima. Para isto, usamos a parametrização racional do círculo dada por $x = \frac{2t}{1+t^2}$, $y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, que pode ser obtida facilmente considerando-se as interseções do círculo com o feixe de retas $Y-1 = tX$ passando pelo ponto $(0,1)$ (vide figura abaixo).



Ora, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \left(-\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \right) dt = -2 \int \frac{dt}{1+t^2} =$
 $= -2 \text{ arc tg } t$. Por outro lado, $t = \frac{y-1}{x}$. Substituindo, vem finalmente

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2 \text{ arc tg } \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x},$$

expressa em termos da inversa de uma função transcendente elementar. Recuperamos, assim a função arc sen.

Consideremos a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ou $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Vimos (§IV.1) que Fagnano tentou calcular o comprimento de arco da elipse, encontrando sérias dificuldades. Na verdade, apesar da elipse também admitir parametrização racional, a substituição de tal parametrização em $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ não conduz a uma função racional. O problema é que, ao contrário do círculo, aqui $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ não é mais função racional de x e $y = \sqrt{b^2\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}$ e sim de x e $\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2x^2)}$. Assim, na verdade, somos levados a uma curva de equação $Y^2 = g(x)$, onde $g(x)$ é de grau 4 com raízes distintas (a não ser quando a elipse degenera num círculo). Uma tal curva não admite parametrização racional, do que se segue que a integral de Fagnano-Euler $\int^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, é não elementar.

O que fazer, em seguida? Tem-se dois caminhos.

Um deles consiste em definir, diretamente, uma nova função (necessariamente multivalente) por meio da integral acima, digamos, $u = u(x)$, e tentar mostrar que ela admite uma inversa $x = x(u)$. Como a integral não é elementar, seria tolice esperar que $x = x(u)$ fosse uma função transcendente elementar. Segue-se disso que não pode

mos considerar funções simplesmente periódicas como sé-
rios candidatos ao posto de $x = x(u)$; com efeito, um re-
sultado clássico mostra que as funções $f(u)$ meromorfas
em \mathbb{C} , simplesmente periódicas de período fundamental ω ,
tais que ∞ é singularidade essencial e tais que a equa-
ção $f(u) = x_0$ tem sempre um número finito de soluções,
são elementos do corpo $\mathbb{C}(e^{\frac{2\pi i}{\omega}u})$ das funções racionais
na função $e^{\frac{2\pi i}{\omega}u}$.

Assim, devemos buscar candidatos para $x = x(u)$
entre as funções meromorfas "duplamente" periódicas em \mathbb{C} .
Precisamente:

Definição IV.7 - Uma função meromorfa f em \mathbb{C} é dita
duplamente periódica se admitir períodos
 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, ambos $\neq 0$, tais que ω_1/ω_2 é não real. Nes-
te caso, os períodos de f são precisamente os elementos
do grupo abeliano livre (dito discreto) $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$.
Uma função elítica é uma função meromorfa duplamente pe-
riódica em \mathbb{C} .

O problema de determinar a inversa $x = x(u)$, en-
tre as várias funções elíticas, é conhecido como o proble-
ma da inversão (de Jacobi). Observemos que, uma vez re-
solvido este problema, resulta fácil determinar y como
função de u ; com efeito, de $u = \int \frac{dx}{y}$ tiramos $\frac{du}{dx} = \frac{1}{y}$,

logo $y = \frac{dx}{du}$.

O outro caminho consiste em estudar, sistematicamente, certas funções elípticas, através das propriedades do subgrupo discreto de períodos. Nesta direção, existem dezenas de textos clássicos, contendo tabelas quase ininteligíveis para o leitor pouco iniciado.

Como nosso intento é uma introdução ao assunto, optaremos por um equilíbrio modesto entre os dois caminhos. Precisamente, apresentaremos resultados sobre a função \wp de Weierstrass, mostrando que elas servem para inverter, não mais a integral $\int \frac{dx}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$, mas outra integral "elíptica" igualmente importante. No final da seção, enunciaremos o problema da inversão em termos modernos.

Sejam, então, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ tais que $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ e seja $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. O conjunto E_Ω das funções elípticas com períodos em Ω formam, evidentemente, um subcorpo do corpo de todas as funções meromorfas em \mathbb{C} . O quociente \mathbb{C}/Ω tem uma estrutura canônica de variedade analítica compacta (topologicamente, um toro) tal que a aplicação quociente $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ é uma aplicação analítica. As funções elípticas são, então, as funções meromorfas sobre \mathbb{C}/Ω . Em particular, as únicas funções elípticas holomorfas em \mathbb{C} são as constantes (teorema de Liouville).

Começaremos pondo em relevo uma função fundamental.

Lema IV.8 - Seja $w_{m,n} = mw_1 + nw_2$. A série

$$\sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left(\frac{1}{(z-w_{m,n})^2} - \frac{1}{w_{m,n}^2} \right) \text{ é uniformemente}$$

convergente em todo compacto disjunto de Ω .

Demonstração: Mostremos, primeiramente, que a série numé-

rica
$$\sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{|w_{m,n}|^3} \text{ é convergente.}$$

Para isto, observemos que o número de pontos $w_{m,n}$ no interior de um disco $D(r)$ de centro 0 e raio $r \geq 0$ é $\leq c \cdot r^2$, onde $c \in \mathbb{R}$ depende somente de w_1 e w_2 . Seja $C(r)$ a coroa $r^2 \leq |z| \leq (1+r)^2$. Numa tal coroa, o número de pontos $w_{m,n}$ é $\leq c \cdot (r+1)^4$, logo

$$\left| \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{|w_{m,n}|^3} \right| \leq c \cdot (r+1)^4 / r^6 = (c/r^2) (1+(1/r))^4$$

(soma parcial), do que segue-se a convergência.

Passando à série original, temos:

$$\left| \frac{1}{(z-w_{m,n})^2} - \frac{1}{w_{m,n}^2} \right| = (|z||z-2w_{m,n}|) / |(z-w_{m,n})^2 w_{m,n}^2|.$$

Para um ponto $w_{m,n}$ tal que $|w_{m,n}| \geq 2r$, tem-se:

$$|z - 2w_{m,n}| \leq |z| + 2|w_{m,n}| \leq r + 2|w_{m,n}|$$

e

$$|z - w_{m,n}| \geq |w_{m,n}| - |z| \geq |w_{m,n}| - r \geq \frac{1}{2} |w_{m,n}|,$$

desde que $|z| \leq r$. Resulta, então,

$$\left| \frac{1}{(z-w_{m,n})^2} - \frac{1}{w_{m,n}^2} \right| \leq 6r/|w_{m,n}|^3, \quad |z| \leq r.$$

Logo, a série dada é uniformemente convergente em todo compacto disjunto de Ω .

Segue-se, de um teorema conhecido, que a série

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left(\frac{1}{(z-w_{m,n})^2} - \frac{1}{w_{m,n}^2} \right)$$

define uma função $\wp(z)$ holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \Omega$ e que a derivada $\wp'(z)$ é obtida "derivando termo a termo". Mais ainda:

Lema IV.9 - $\wp(z)$ e $\wp'(z)$ são funções elíticas com períodos em Ω . Os pontos de Ω são polos duplos de $\wp(z)$ e polos triplos de $\wp'(z)$.

Demonstração: Fixando um par $(m_0, n_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, vemos que

$$\wp(z) = \frac{1}{(z-w_{m_0, n_0})^2} + h(z),$$

onde $h(z)$ é holomorfa numa vizinhança de w_{m_0, n_0} . Isto mostra que w_{m_0, n_0} é um polo duplo de $\wp(z)$. Assim, $\wp(z)$ é meromorfa em \mathbb{C} . Por outro lado, pela observação acima,

$$\wp'(z) = -2 \sum_{m,n} \frac{1}{(z-w_{m,n})^3} = -2 \sum_{m,n} \frac{1}{(z-w_{m-1, n})^3} = \wp'(z+w_1).$$

Analogamente, $\wp'(z+\omega_2) = \wp'(z)$. É claro que cada $\omega_{m,n}$ é um polo triplo de $\wp'(z)$. Assim, $\wp'(z)$ é uma função elítica. Finalmente, $\wp(z)$ também tem períodos em Ω . Com efeito, como $\wp'(z)$ tem períodos em Ω , resulta $\wp(z+\omega_1) - \wp(z) = c \in \mathbb{C}$ (constante). Por outro lado, $\wp(z)$ é uma função par. Logo, $c = \wp(\omega_1/2) + \wp(-\omega_1/2) = 0$.

C. Q. D.

Observemos que $\wp(z)$ é uma função transcendente, isto é, não satisfaz nenhuma equação algébrica a coeficientes complexos (por que?). Assim, $\mathbb{C}(\wp)$ tem grau de transcendência 1 sobre \mathbb{C} . Como \wp é par, toda função pertencente a $\mathbb{C}(\wp) \subset E_\Omega$ é uma função elítica par. A recíproca deste fato é válida. Com efeito, seja $g \in E_\Omega$ uma função elítica par. Como função meromorfa em \mathbb{C}/Ω (compacto), g admite apenas um número finito de polos $\neq 0$; sejam estes a_1, \dots, a_n , com respectivas multiplicidades e_1, \dots, e_n . Consideremos a função elítica $g_1 \in E_\Omega$ definida por $g_1(z) = g(z) \prod_{i=1}^n (\wp(z) - \wp(a_i))^{e_i}$. Evidentemente, g_1 é par e 0 é o único polo de g_1 . Seja $2q$ a multiplicidade de 0 como polo de g_1 . Tem-se

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + h_0(z^2)$$

$$g_1(z) = c_q/z^{2q} + \dots + c_1/z^2 + g_0(z^2)$$

numa vizinhança de 0 , com h_0 e g_0 holomorfas em tal vizinhança (inclusive em 0). A função $g_1(z) - c_q(\wp(z))^q$ é elítica, par e admite 0 como único polo. A ordem deste polo é $\leq 2(q-1)$ certamente. Por indução sobre q , vemos que $g_1(z) - c_q(\wp(z))^q$ é uma função pertencente a $C[\wp]$. Logo, $g_1 \in C[\wp]$, do que se segue $g \in C(\wp)$.

Como consequência, temos o seguinte resultado fundamental.

Teorema IV.10 - O corpo das funções elíticas com períodos em Ω é gerado por \wp e \wp' sobre C , isto é, $E_\Omega = C(\wp, \wp')$. Além disso, a extensão $E_\Omega | C(\wp)$ é algébrica de grau 2.

Demonstração: Primeiramente, toda $g \in E_\Omega$ satisfaz um polinômio de grau 2 sobre $C(\wp)$. Com efeito, $g(z) + g(-z)$ e $g(z)g(-z)$ são elíticas e pares, e $g(z)$ é raiz do polinômio

$$Y^2 - (g(z) + g(-z))Y + g(z)g(-z) \in C(\wp)[Y].$$

Em particular, o grau da extensão $C(\wp)(\wp') | C(\wp)$ é 2 uma vez que \wp' , sendo ímpar (derivada de uma função par), não pertence a $C(\wp)$. Seja $h \in E_\Omega$. Então, o grau de $C(\wp)(\wp', h) | C(\wp)$ é ≤ 4 . Seja $g \in E_\Omega$ um elemento primitivo desta extensão. Então, $C(\wp)(\wp', h) = C(\wp)(g)$. Lo

go, o grau de $C(\mathbb{P}) (\mathbb{P}', h)$ sobre $C(\mathbb{P})$ é 2; em outras palavras, $h \in C(\mathbb{P}, \mathbb{P}')$.

C.Q.D.

Vemos, assim, que o corpo E_Ω das funções elípticas com períodos em Ω é isomorfo a um corpo de funções algébricas. Precisamente, seja $\mathbb{P}'(z)^2 = \frac{\sum \alpha_i \mathbb{P}(z)^i}{\sum \beta_j \mathbb{P}(z)^j} \in C(\mathbb{P}(z))$. Consideremos o polinômio $F = (\sum \beta_j X^j) Y^2 - \sum \alpha_i X^i \in C[X, Y]$ e o anel de coordenadas $C[x, y] = C[X, Y]/(F)$ associado. Então E_Ω é isomorfo a $C(x, y)$, como extensões de C , através do homomorfismo tal que $x \leftrightarrow \mathbb{P}(z)$, $y \leftrightarrow \mathbb{P}'(z)$. Poder-se-ia crer que os polinômios $\sum \beta_j X^j$ e $\sum \alpha_i X^i$ dependem de Ω . Isto é verdade até certo ponto; mostraremos, contudo, que pode-se tomar $\sum \beta_j X^j = 1$ e $\sum \alpha_i X^i$ de grau 3. Mais precisamente:

Teorema IV.11 - Para todo $z \notin \Omega$ tem-se $\mathbb{P}'(z)^2 = 4\mathbb{P}(z)^3 -$

$$= 3 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{w_{m,n}^4} - 20a_2 \mathbb{P}(z) - 28a_4, \quad \text{onde } a_2 = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{w_{m,n}^6} \quad a_4 = 5 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{w_{m,n}^6}.$$

Além disso, a aplicação $z \mapsto (\mathbb{P}(z), \mathbb{P}'(z))$ induz uma bijeção entre C/Ω e o fecho projetivo da curva algébrica de equação $Y^2 = 4X^3 + 20a_2X + 28a_4$.

Demonstração: Como $\mathbb{P}(z)$ é par e $\mathbb{P}'(z) = \frac{1}{z^2}$ é holomorfa e se anula na origem, resulta que o desen-

volvimento de Laurent de $\wp(z)$ em 0 é da forma

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^4 + a_4 z^4 + \dots$$

Logo, $(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + \dots$ (derivação termo a termo).

Como $(\wp(z))^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 + \dots$, resulta que

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 = 20\frac{a_2}{z^2} - 28a_4 + z^2(\dots).$$

Conseqüentemente, a função $g(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 20a_2\wp(z) + 28a_4$ é holomorfa e se anula em 0. Ora, evidentemente $g \in E_\Omega$. Segue-se que g é elítica e holomorfa em todo C . Logo, g é constante. Mas, $g(0) = 0$; portanto, g é a função nula. Isto é, $\wp'^2 - 4\wp^3 + 20a_2\wp + 28a_4 = 0$.

Para calcular os coeficientes a_2 e a_4 , derivamos a série $\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left(\frac{1}{(z-w_{m,n})^2} - \frac{1}{w_{m,n}^2} \right)$ termo a termo sucessivamente.

Estabeleçamos a última parte do teorema. Primeiramente, consideradas como funções meromorfas em C/Ω , \wp e \wp' admitem um único polo - a classe $\bar{0}$ de 0 (mod Ω) - de ordem 2 e 3, respectivamente. Então, (\wp, \wp') definem uma aplicação de $(C/\Omega) \setminus \{\bar{0}\}$ em C^2 cuja imagem está contida na curva de equação $F = Y^2 - 4X^3 + 20a_2X + 28a_4$ (pe

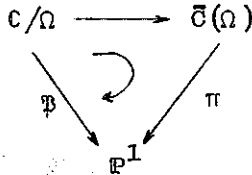
la primeira parte do teorema).

Inversamente, seja $(a, b) \in C^2$ tal que $F(a, b) = 0$. Evidentemente, $\wp(z) - a \in E_\Omega$. Logo, o número de zeros e o número de polos (incluindo multiplicidades) de $\wp(z) - a$ coincidem: isto segue-se facilmente do teorema dos resíduos, por consideração de um paralelogramo de períodos conveniente e da integral $\int \frac{\wp'(z) dz}{\wp(z) - a}$ ao longo do perímetro do paralelogramo (vide, por exemplo, L. Ahlfors, "complex Analysis", Ch. 7). Como $\wp(z) - a$ tem um polo duplo (a menos de períodos), segue-se que a equação $\wp(z) = a$ tem duas soluções \bar{z}_1, \bar{z}_2 em C/Ω (não necessariamente distintas). Como \wp é par, $\bar{z}_2 = -\bar{z}_1$. Temos, então, dois casos conforme $2z_1 \notin \Omega$ ou $2z_1 \in \Omega$. Se $2z_1 \notin \Omega$, então $\bar{z}_1 \neq -\bar{z}_1$. Ora, da equação $b^2 = 4a^3 - 20a_2a - 28a_4$ e desta mesma equação com \wp e \wp' , tiramos $b = \pm \wp'(z)$. Como \wp' é ímpar, vemos que existe um só $\bar{z} \in C/\Omega$ tal que $(a, b) = (\wp(z), \wp'(z))$.

Se $2z_1 \in \Omega$, tem-se $\bar{z}_1 = -\bar{z}_1$ logo $\wp'(z_1) = \wp'(-z_1) = -\wp'(z_1)$, isto é, $\wp'(z_1) = 0$. Segue-se que $b = 0$ e que, portanto, a é uma raiz do polinômio $4X^3 - 20a_2X - 28a_4$. Vemos que \bar{z}_1 é a classe de um dos três complexos $\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2$ e que essas classes são distintas. Em particular, $\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2$ são as raízes distintas de $4X^3 - 20a_2X - 28a_4$.

Assim, estabelecemos uma bijeção entre $(C/\Omega) \setminus \{\bar{0}\}$

e a curva afim de equação $Y^2 - 4X^3 + 20a_2X + 28a_4$. O fecho projetivo $\bar{C}(\Omega)$ tem equação $Y^2W - 4X^3 + 20a_2XW^2 + 28a_4W^3$, logo admite apenas o ponto $(0:1:0)$ no infinito. A única maneira de estender a bijeção acima a C/Ω , de maneira que o diagrama de aplicações

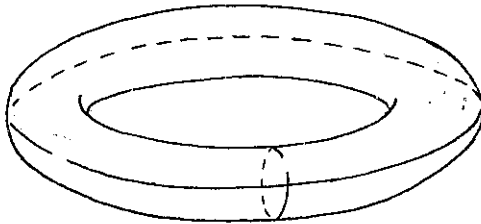


seja cíclico (onde π é a projeção estrutural e $\mathfrak{P}: C/\Omega \rightarrow \mathbb{P}^1$ estende $\mathfrak{P}: (C/\Omega) \setminus \{\bar{0}\} \rightarrow \mathbb{P}^1$ por meio de $\mathfrak{P}(\bar{0}) = (1:0)$) é decretar que a imagem de $\bar{0}$ seja $(0:1:0)$. Desta forma, obtemos a bijeção procurada entre C/Ω e $\bar{C}(\Omega)$.

C.Q.D.

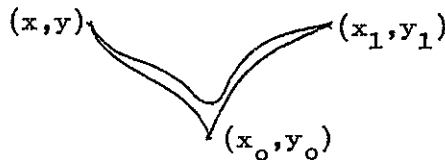
Observação: A função $\mathfrak{P}(z)$ é chamada a função elítica de Weierstrass (relativamente a Ω). Se munirmos C/Ω da estrutura de variedade analítica compacta pela aplicação quociente e se considerarmos $\bar{C}(\Omega)$ com a estrutura canônica de variedade analítica compacta (teorema da função implícita), teremos que a bijeção $C/\Omega \rightarrow \bar{C}(\Omega)$ acima construída é um isomorfismo analítico. Por abuso de expressão, dizemos que C/Ω tem estrutura de curva algébrica.

A curva $\bar{C}(\Omega)$ acima é chamada elítica (relativamente a Ω). É fácil ver que $\bar{C}(\Omega)$ não tem pontos singulares e, como é uma cúbica, tem gênero 1. Reciprocamente, dada uma curva $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2$ não singular de grau n e de gênero 1, vemos, pela fórmula $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) = 1$, que $n = 3$. Na verdade, por uma mudança de coordenadas (homogêneas), \bar{C} tem equação $Y^2W - 4X^3 + 20b_2XW^2 + 28b_4W^3$ para alguns $b_2, b_4 \in \mathbb{C}$. Como superfície topológica, \bar{C} é duplamente conexa, isto é, fazem-se necessários dois "cortes" (caminhos fechados) para torná-la simplesmente conexa (figura abaixo). Sejam C_1, C_2 tais caminhos.



Sejam $w_1 = \int_{C_1} \frac{dx}{y}$, $w_2 = \int_{C_2} \frac{dx}{y}$. Pode-se, então, mostrar que w_1 e w_2 são linearmente independentes sobre \mathbb{R} e geram, portanto, um subgrupo discreto maximal $\Omega \subset \mathbb{C}$. Por outro lado, se fixarmos um ponto $P_0 = (x_0, y_0) \in \bar{C}$ e tomarmos caminhos γ_1, γ_2 ligando P_0 a um ponto arbitrário $(x, y) \in \bar{C}$, poderemos mostrar que $\int_{\gamma_1} \frac{dx}{y} - \int_{\gamma_2} \frac{dx}{y} \in$

$\in \Omega$. Consequentemente, a integral $\int_{\gamma}^{(x,y)} \frac{dx}{y}$ não é uma função bem definida a valores em \mathbb{C} , mas bem define uma aplicação $\varphi: \bar{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ que é analítica. Na verdade, tal aplicação é localmente uma imersão. Para mostrar que é um isomorfismo analítico sobre uma subvariedade (fechada) de \mathbb{C}/Ω , basta salientar que \bar{C} é compacta e provar que a aplicação é injetora. Ora, suponhamos que $\varphi((x,y)) = \varphi((x_1,y_1))$. Por definição, segue-se que $\int_{\gamma} \frac{dx}{y} - \int_{\gamma_1} \frac{dx}{y} \in \Omega$, onde γ e γ_1 são caminhos diferenciáveis de (x_0,y_0) a (x,y) e a (x_1,y_1) , respectivamente. Podemos deformar $\gamma - \gamma_1$ num arco diferenciável δ ligando (x_1,y_1) a (x,y) , de modo que $\int_{\delta} \frac{dx}{y} = \int_{\gamma - \gamma_1} \frac{dx}{y} = \int_{\gamma} \frac{dx}{y} - \int_{\gamma_1} \frac{dx}{y}$ (figura abaixo).



Segue-se que $\int_{\delta} \frac{dx}{y} \in \Omega$. O ponto delicado, agora, é mostrar que a existência de um caminho diferenciável ligando dois pontos, tal que a integral de primeira espécie é nula ao longo deste caminho (a menos de soma de integrais $\int \frac{dx}{y}$ ao longo de múltiplos inteiros dos cortes fundamen-

tais C_1, C_2), implica na coincidência destes dois pontos. Este resultado é uma reformulação do teorema de Abel, cuja demonstração não cabe no presente contexto (vide, por exemplo, G. Bliss, "Algebraic Functions", Ch.VI).

Assim, φ é um isomorfismo analítico de \bar{C} sobre uma subvariedade de C/Ω . Por um argumento de dimensão, φ é um isomorfismo sobre C/Ω . Seja $\psi: C/\Omega \rightarrow \bar{C}(\Omega)$ o isomorfismo analítico obtido no Teorema IV.11. Compondo, obtemos um isomorfismo analítico $\psi \circ \varphi: \bar{C} \rightarrow \bar{C}(\Omega)$. A fortiori, $\psi \circ \varphi$ é um isomorfismo racional (este é um princípio geral que se aplica às curvas algébricas projetivas não singulares). Na verdade, podemos ver que $b_2 = a_2$ e $b_4 = a_4$ (onde a_2 e a_4 são os coeficientes da equação de $\bar{C}(\Omega)$) e que $\psi \circ \varphi$ é a aplicação identidade! Concluindo, temos o

Teorema IV.12 - Toda curva $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2$ não singular, de gênero 1, é uma curva elítica (para algum subgrupo discreto $\Omega \subset C$).

Observação: É um exercício interessante determinar a relação entre dois subgrupos discretos (maximais)

Ω_1 e Ω_2 a fim de que as curvas elíticas associadas $\bar{C}(\Omega_1)$ e $\bar{C}(\Omega_2)$ sejam isomorfas (vide, por exemplo,

R. Gunning, "Lectures on Riemann Surfaces" §1, Princeton

Math. Notes ou, alternativamente, L. Ahlfors, "Complex Analysis", Ch. 7).

Para concluir, queremos tornar cristalino que o Teorema IV.12 resolve, em particular, o problema da inversão de Jacobi no caso de gênero 1. Mais precisamente, a solução afirmativa deste problema, isto é, a invertibilidade da função $(x,y) \mapsto \int^{(x,y)} \frac{dx}{y}$, é equivalente ao facto de que a aplicação $\varphi: \bar{C} \rightarrow C/\Omega$ é um isomorfismo analítico. Com efeito, temos

$$\int^{(x,y)} \frac{dx}{y} = \int^z \frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$

onde $f(z) = 4z^3 - 20a_2z - 28a_4$ tem todas as raízes distintas. Inverter significa, então, exhibir z como função da integral. Isto é obtido pela função \wp de Weierstrass. Passando a C/Ω , isto significa que (\wp, \wp') é a inversa da aplicação φ .

Originalmente, o problema da inversão (gênero 1) foi resolvido por Jacobi em meados de 1820, mas numa forma um pouco diferente. Jacobi, bem como seus contemporâneos e sucessores (até Weierstrass), concentraram-se na integral elítica

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (\text{forma normal de Legendre})$$

ou em alguma de suas formas equivalentes. Por analogia com a inversão no caso do círculo, onde a função inversa é $\text{sen } z$, Jacobi designou por $\text{sn } z$ (*) a função que efetua a inversão no caso elítico. Assim como a função de Weierstrass, a função $\text{sn } z$ de Jacobi é uma função elítica relativamente a um subgrupo discreto $\Omega \subset \mathbb{C}$ conveniente. Como toda função meromorfa em \mathbb{C} , $\text{sn } z$ pode ser expressa como quociente de funções holomorfas. Um dos resultados clássicos (também obtido por Jacobi) é que numerador e denominador podem ser expressos como séries do tipo

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_k e^{k \frac{2\pi i}{a} z}.$$

Tais séries, ou séries análogas, são em essência as séries Θ (teta) e as funções holomorfas assim definidas, as funções Θ . A teoria dessas funções, numa forma mais sofisticada, é objeto de trabalhos recentes e segue sendo tópico efervescente em Geometria Algébrica. O leitor interessado em prosseguir nesta linha de estudos poderá consultar a bibliografia ao fim deste trabalho.

Uma palavra sobre o problema da inversão de Jacobi

(*) Na verdade, esta notação foi posteriormente introduzida por Gudermann. Jacobi usou a notação $\text{sin am } z$ (vide C.G.J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, "Demonstratio theorematum ad theoriam functionum ellipticarum spectantis, p. 37-48).

no caso de gênero $g \geq 2$. Aqui não existe uma única integral de primeira espécie, mas sim g tais integrais

$$\int \frac{Q_i(x,y)dx}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)} \quad (1 \leq i \leq g) \quad \text{linearmente independentes sobre } \mathbb{C},$$

onde F é a equação afim da curva em questão (vide Teorema IV.5 e a observação que se lhe segue).

A superfície de Riemann associada \tilde{C} tem g asas (topologicamente), logo são necessários $2g$ caminhos fechados para torná-la simplesmente conexa, C_1, \dots, C_{2g} . Seja

$$\omega_j = \int_{C_j} \frac{Q_i(x,y)dx}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)} \quad (1 \leq j \leq 2g) \quad (\text{os módulos de periodicidade da superfície } \tilde{C}).$$

Exatamente como no caso de $g = 1$, $\omega_1, \dots, \omega_{2g}$ geram um subgrupo discreto maximal Ω de $\mathbb{C}^g = \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$ (g vezes). O grupo quociente \mathbb{C}^g/Ω tem uma estrutura natural de variedade analítica compacta de dimensão g (chamada toro complexo de dimensão g).

Ainda como no caso de $g = 1$, aqui também o vetor cuja i -ésima componente é $\int \frac{Q_i(x,y)dx}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)}$ determina (uma vez fixado um mesmo ponto inicial para todos os caminhos de integração) uma aplicação $\varphi: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{C}^g/\Omega$ que é analítica.

Seria tolice esperar que φ fosse um isomorfismo analítico sobre \mathbb{C}^g/Ω uma vez que \tilde{C} tem dimensão 1 enquanto que \mathbb{C}^g/Ω tem dimensão $g \geq 2$.

A esta altura (se bem que numa linguagem menos sofisticada) entra Jacobi no cenário: a aplicação φ não tem sequer chance de ser sobrejetora para $g \geq 2$. Em outras palavras, \tilde{C} é "rara" demais a fim de que um vetor arbitrário de C^g seja um vetor de integrais, todas com o mesmo limite superior de integração. Porque não considerar mais de um limite superior simultaneamente? A pergunta era, então, como fazê-lo?

Jacobi começou a escrever equações tais como

$$\int^{(\xi_1, \eta_1)} \frac{Q_i(x, y) dx}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x, y)} + \dots + \int^{(\xi_g, \eta_g)} \frac{Q_i(x, y) dx}{\frac{\partial F}{\partial Y}(x, y)} = u_i \quad (1 \leq i \leq g)$$

as quais esperava resolver simultaneamente nos $(\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_g, \eta_g)$ como funções de u_1, \dots, u_g . Pode-se imaginar o atrevimento desta conjetura naquele tempo!...

Em terminologia moderna, a conjetura de Jacobi traduz-se da seguinte forma: a aplicação $\varphi: \tilde{C} \rightarrow C^g/\Omega$ acima (dita de Jacobi) estende-se imediatamente a uma aplicação $\varphi_{(g)}: \tilde{C}^g \rightarrow C^g/\Omega$, onde $\tilde{C}^g = \tilde{C} \times \dots \times \tilde{C}$ (g vezes), a saber, $\varphi_{(g)}(P_1, \dots, P_g) = \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_g)$, onde $+$ é a operação do grupo quociente C^g/Ω . Mais ainda! Seja $\tilde{C}^{(g)} = \tilde{C}^g/\Gamma_g$, onde Γ_g é o grupo simétrico em g letras e a ação de Γ_g sobre \tilde{C}^g é a usual:

$\sigma(P_1, \dots, P_g) = (P_{\sigma(1)}, \dots, P_{\sigma(g)})$. Como \mathbb{C}^g/Ω é abeliano, $\varphi(g)$ induz uma aplicação

$$\tilde{C}(g) \rightarrow \mathbb{C}^g/\Omega$$

e a conjectura de Jacobi (chamada, por abuso de linguagem, problema da inversão em gênero ≥ 2) é equivalente à conjectura de que tal aplicação é sobrejetora!...

A conjectura de Jacobi foi provada, pela primeira vez, por Riemann e Weierstrass independentemente. Contudo, trabalho nesta área continua incessante (vide bibliografia).



APÊNDICE

Enunciaremos, precisamente, os teoremas usados no texto que, por uma ou outra razão, não couberam lá. Não faremos as demonstrações, mas daremos referências acessíveis.

(A) Análise Complexa (de uma variável):

Teorema dos Resíduos - Seja D um aberto de \mathbb{C} ou de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e seja f uma função analítica em D exceto, possivelmente, em pontos isolados de D . Seja γ o bordo orientado de um compacto contido

em D tal que γ não contém nenhuma singularidade de f .

Então tem-se

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{a_k} f,$$

onde a_k percorre o conjunto das singularidades de f no compacto (necessariamente em número finito).

Princípio do Argumento - Sejam D e γ como acima e seja f meromorfa em D , sem polos nem zeros em γ . Então

$$\left(\begin{array}{c} \text{n}^{\circ} \text{ de zeros} \\ \text{no compacto} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{n}^{\circ} \text{ de polos} \\ \text{no compacto} \end{array} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z)},$$

onde as multiplicidades dos zeros e dos polos são incluídas.

Princípio do Argumento (generalizado) - Além disso, se g é uma função analítica em D e se a_j, b_k são os zeros e os polos de f , respectivamente, com multiplicidades m_j, n_k , respectivamente, tem-se

$$\sum_j m_j g(a_j) - \sum_k n_k g(b_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) g(z) dz}{f(z)}.$$

A generalização acima do princípio do argumento aplica-se, notadamente, quando $g(z) = z$ (cf. demonstra-

ção da Proposição II.1).

Princípio do Prolongamento Analítico. Sejam f e g funções analíticas num aberto conexo $D \subset \mathbb{C}$. As condições seguintes são equivalentes:

- (1) f e g coincidem numa vizinhança de um ponto $a \in D$.
- (2) f e g coincidem em todo D .

Convergência Uniforme de Séries de Funções (Weierstrass)

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e seja $\sum_k f_k$ uma série de funções meromorfas em D . Se $\sum_k f_k$ converge uniformemente (resp. em norma) em todo compacto contido em D , tem-se:

- (a) A soma f de $\sum_k f_k$ é uma função meromorfa em D .
- (b) A série $\sum_k f'_k$ das funções derivadas converge uniformemente (resp. em norma) em todo compacto contido em D .
- (c) A soma da série $\sum_k f'_k$ é a derivada f' de f .

Referências: [1] e [4] da bibliografia.

(B) Álgebra:

Sobre o anel $K[X]$ de polinômios a uma variável sobre um corpo K .

$K[X]$ é um anel euclideo, isto é, um algoritmo de Euclides é válido em $K[X]$. Precisamente, dados $f(X), g(X) \in K[X]$, com $g(X) \neq 0$, existem (e são únicos) $q(X), r(X) \in K[X]$ tais que $\text{gr } r(X) < \text{gr } g(X)$ e $f(X) = g(X)q(X) + r(X)$ (N.B. Por convenção, o grau do polinômio nulo é -1).

Como conseqüência, todo ideal de $K[X]$ pode ser gerado por um polinômio (necessariamente de menor grau entre os polinômios do ideal). Segue-se também que todo polinômio $f(X) \in K[X]$ fatora-se de maneira única na forma $\prod_i f_i(X)^{r_i}$, onde $f_i(X)$ são irredutíveis, $f_i(X) \neq f_j(X)$ se $i \neq j$, e r_i são inteiros não negativos; dizemos que $K[X]$ é um anel fatorial.

Finalmente, um máximo divisor comum de $f, g \in K[X]$ escreve-se na forma $f \cdot f_1 + g \cdot g_1$, para certos $f_1, g_1 \in K[X]$.

Sobre o anel de $K[X, Y]$ de polinômios a duas variáveis.

$K[X, Y]$ é um anel fatorial (no sentido acima), mas não euclideo. Vale a seguinte variante do Lema de

Gauss: se $f(X,Y) \in K[X,Y]$ então $f(X,Y)$ é irredutível em $K[X,Y]$ se e só se é irredutível considerado como polinômios em Y a coeficientes no corpo $K(X)$ das frações racionais em X .

Estas propriedades de $K[X,Y]$ generalizam-se facilmente para o anel $K[X_1, \dots, X_n]$ a n variáveis.

Sobre homomorfismos de anéis e ideais (os anéis serão sempre comutativos com identidade multiplicativa).

Um homomorfismo $\varphi: A \rightarrow A'$, onde A e A' são anéis comutativos com identidades multiplicativas 1_A e $1_{A'}$, respectivamente, é uma aplicação tal que $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, $\varphi(1_A) = 1_{A'}$.

Seja $A = K[X_1, \dots, X_n]$ e A' contendo K . Um K-homomorfismo $A \rightarrow A'$ é um homomorfismo de A em A' cuja restrição a K é a aplicação idêntica. Um (e um só) K-homomorfismo $A \rightarrow A'$ fica inteiramente definido desde que se prescrevam as imagens de X_1, \dots, X_n .

Se A é um corpo, todo homomorfismo $A \rightarrow A'$ é injetor. Porisso, todo homomorfismo $K \rightarrow K'$ entre corpos é uma extensão $K' | K$.

Se $I \subset A$ é um ideal, um homomorfismo $\varphi: A \rightarrow A'$ induz um homomorfismo $\bar{\varphi}: A/I \rightarrow A'$ tal que $\bar{\varphi}(\bar{a}) = \varphi(a)$

se e só se $\varphi(I) = \{0\}$. (N.B. \bar{a} designa a classe de equivalência de $a \in A$ módulo o ideal I).

Um anel A é um domínio de integridade se $1_A \neq 0$ e se $a \cdot b = 0$ implicar $a = 0$ ou $b = 0$. Um ideal $I \subset A$ é primo se A/I é um domínio de integridade.

Sobre extensões de corpos.

O teorema do elemento primitivo afirma que se $K'|K$ é uma extensão finita algébrica e se K tem característica 0 , então existe um elemento $a \in K'$ que gera K' sobre K (isto é, $K' = K(a)$).

Elementos $a_1, \dots, a_n \in K'$ são ditos algebricamente independentes sobre K se todo polinômio $f(X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n]$ tal que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ é o polinômio nulo.

O número máximo de elementos algebricamente independentes numa extensão $K'|K$ é o grau de transcendência de $K'|K$. Por exemplo, o grau de transcendência do corpo das frações racionais $K(X_1, \dots, X_n)$ sobre K é n .

Sobre o teorema da base (Hilbert).

Este teorema afirma que todo ideal I do anel $K[X_1, \dots, X_n]$ admite um conjunto finito de geradores. Em

outras palavras, existem $f_1, \dots, f_r \in I$ tais que todo $f \in I$ escreve-se na forma $f = f_1 \cdot g_1 + \dots + f_r \cdot g_r$, para certos $g_1, \dots, g_r \in K[X_1, \dots, X_n]$.

Referências: Excluindo a noção de grau de transcendência e o teorema da base, os resultados acima são todos elementares. O leitor poderá consultar qualquer Introdução à Álgebra Moderna do seu agrado. Quanto ao restante, recomendamos o livro: O. Zariski e P. Samuel, Commutative Algebra, vol. I, Ch. II, §12, Ch. IV, §1, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. Jersey, 1958.

(C) Geometria Algébrica:

Teorema de Bézout - Se C e D são curvas projetivas planas, sem componentes comuns, de grau m e n , respectivamente, então tem-se $mn = \sum_P m_P(C, D)$, onde $m_P(C, D)$ é a multiplicidade do ponto P sobre a interseção $C \cap D$.

Observação: A melhor maneira de definir $m_P(C, D)$ é olhar para o anel \mathcal{O}_P das funções racionais em X, Y que não tem polos em P , considerar equações não homogêneas $f, g \in \mathcal{O}[X, Y]$ de C e D , respectivamente, nu

ma vizinhança de P e tomar o anel quociente $\mathcal{O}_P/(f,g)$ pelo ideal (f,g) gerado por f e g . A definição é, então: $m_P(C,D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P/(f,g)$, onde a dimensão aqui é a dimensão vetorial sobre \mathbb{C} . Pode-se mostrar que tal definição generaliza a definição usual de multiplicidade de interseção de uma curva C com uma reta D (substituindo uma parametrização de D na equação de C e calculando as raízes com as respectivas multiplicidades).

Dadas curvas C e D , sem componentes comuns, pode-se mostrar que $m_P(C) \cdot m_P(D) \leq m_P(C,D)$. Segue-se a desigualdade $mn \geq \sum_P m_P(C) \cdot m_P(D)$ que, muitas vezes, é suficiente para substituir o teorema de Bézout (cf. Capítulo III).

Referências: [11] da Bibliografia.

(D) Variedades Analíticas:

Vide referência [4], Ch.VI, §§4,5, da Bibliografia.

BIBLIOGRAFIA

- [1]. L.V. Ahlfors, Complex Analysis, 2nd edition,
McGraw-Hill Book Co., 1966.

Excelente introdução à Análise Complexa de uma va
riável, numa rara combinação feliz de rigor e apelo geomé
trico. Capítulos 7 e 8 constituem um bom começo para a
teoria das funções algébricas e elíticas.

- [2]. P. Appel et Édouard Goursat, Théorie des Fonctions
Algébriques et de leurs intégrales,
Tome I: Étude des fonctions analytiques sur une surface
de Riemann, 2^{ème} edition, Gauthier-Villars et Cie., Paris,
1929.

Um clássico da literatura sobre o assunto. O pre
fácio da 1^a edição é de Hermite, o que por si constitui
um selo de garantia para anos de uso. A 2^a edição foi au
mentada por Fatou. A linguagem é "terrena", mas o amon-
toado de parágrafos e a repetição de tema sob enfoque di-
versos (instrutivo, mas atordoante!) podem causar dificul
dade ao leitor moderno acostumado ao estilo "Teorema - De
monstração - C.Q.D. - Corolário".

[3]. G.A. Bliss, Algebraic Functions, Dover Publ., Inc.,
New York, 1966.

Originalmente publicado na série Amer. Math. Soc.'s Colloquium Publications (Vol.XVI, 1933), este texto constitui uma introdução de caráter intermediário, aliás surpreendentemente auto suficiente na parte analítica (na parte topológica, pressupõe alguma experiência prévia). Contém um capítulo inteiro dedicado à construção de exemplos. A notação é um pouco halterofilística, especialmente no que tange aos divisores sobre uma superfície de Riemann.

[4]. H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions
analytiques d'une ou plusieurs variables
complexes, Hermann, Paris, 1961.

Este livro tem sido, alternadamente, acusado de formalista (o primeiro capítulo é sobre séries formais!) e de sofisticado. Quanto a mim, acho que os exercícios é que são demasiadamente sofisticados para o texto; este último é, aliás, de fácil leitura (o que é perigoso!). Em todo caso, M. Cartan é um especialista em Análise Complexa. O advérbio "plusierus" foi uma triste idéia...

[5]. C. Chevalley, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Amer. Math. Soc. Coll. Publications, New York, 1951.

Tratamento puramente algébrico, diríamos, biracional, da teoria das curvas algébricas. A linguagem das valorizações (ou lugares) ocupa posição importante. Pouco recomendável como introdução ao assunto.

[6]. P. Du Val, Elliptic functions and elliptic Curves, London Math. Soc. Lecture Notes, No. 9, Cambridge University Press 1973.

Trata-se de uma coletânea recente, a partir de cursos dados no University College de Londres. O ponto de vista do autor é clássico, abunda em subgrupos discretos Ω dos mais variados formatos (quadrados, retangulares, rômnicos). Apesar do título, o papel das curvas elípticas não tem qualquer destaque. Ao contrário, as funções elípticas de Jacobi e Weierstrass, bem como as funções teta, sigma, zeta, ki, constituem o principal polo demográfico no texto. Recomendo a bibliografia ao final do texto.

[7]. R.C. Gunning, Lectures on Riemann surfaces: Jacobi Varieties, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, N. Jersey, 1972.

Escrito num estilo nervoso e pessoal, trata do aspecto analítico das curvas algébricas. Pressupõe um texto anterior, pelo mesmo autor e da mesma série. A ênfase é na estrutura da variedade de Jacobi de uma superfície de Riemann. O autor chega a expor o teorema de Torelli, mas não menciona o problema dos "moduli". Pressupõe uma formação homológica e cohomológica do leitor.

[8]. H. Hancock, Theory of elliptic functions, Dover Publ., Inc., N.Y. 1958.

Publicado originalmente em 1909, constitui uma leitura amena mesmo para o sofisticado leitor moderno. Meu contacto pessoal com o livro resume-se aos nove primeiros capítulos; os capítulos restantes repetem o estribilho das milhares de formas para as funções Θ , ξ , χ , \wp , H (cf. Ref. [6]). O Capítulo V é delicioso.

[9]. C.G.J. Jacobi, Gesammelte Werke, erster Band, Chelsea Publ. Co., N.Y. 1969.

Existe um prefácio de Weierstrass e um discurso de gratidão de Dirichlet nesta obra, ambos em alemão. Os trabalhos de Jacobi, contudo estão em latim (como, aliás, era comum na época), com exceção de um artigo ao final do volume e da correspondência entre Jacobi e Legendre (em

francês). Sem comentários adicionais...

[10]. E. Picard, Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques, Gauthier-Villars et Cie., Paris 1931.

De interesse para o assunto são os Capítulos I e III. Pressupõe o *Traité d'Analyse*, Tome II, do mesmo autor. O estilo é ligeiro (superficial às vezes). É interessante pelas soluções inventivas e surpreendentes que M. Picard dá a certos problemas. A redação é de J. Dieudonné, quando o mesmo era "agregé" da Universidade de Paris.

[11]. R.J. Walker, Algebraic curves, Dover Publ., Inc., N.Y. 1962.

Ótima introdução à teoria das curvas algébricas e de suas singularidades, de leitura acessível (em nível mesmo de Graduação). O autor tem trabalhos sobre resolução de singularidades de superfícies algébricas e o livro acima tem servido como inspiração a textos subsequentes.

[11]. A. Weil, Théorèmes fondamentaux de la théorie de fonctions thêta, Séminaire Bourbaki, Exposé 16, 1948/1949.

Baseando-se em artigos de Frobenius e Poincaré, o autor demonstra com o rigor e elegância que lhe são característicos, o fato de que uma função meromorfa em \mathbb{C}^n , com períodos num subgrupo discreto maximal (isto é, de posto $2n$), é quociente de uma maneira essencialmente única de funções Θ . M. Weil é autor das célebres "conjecturas de Weil" (algumas das quais só recentemente foram resolvidas) e é renomado especialista em teoria dos números.