

**Jacob Palis Jr.
Wellington de Melo
INTRODUÇÃO
AOS SISTEMAS DINÂMICOS**

INTRODUÇÃO

"...cette étude qualitative
[des équations différentielles] aura par elle-même
un intérêt du premier
ordre..."

Henri Poincaré, 1881.

Apresentamos neste livro uma visão atual da Teoria Qualitativa dos Sistemas Dinâmicos, que desejamos seja ao mesmo tempo introdutória e bastante ampla em sua perspectiva.

A partir de Poincaré, Liapunov e Birkhoff esta teoria tem ocupado a atenção de inúmeros matemáticos. Mas, foi em anos recentes que ela teve suas metas gerais estabelecidas, tomou forma e experimentou um desenvolvimento marcante.

Mais de duas décadas se passaram entre dois polos importantes: o trabalho de Andronov e Pontryagin (1937) introduzindo o conceito básico de estabilidade estrutural e os trabalhos de Peixoto (1958-1962) provando a densidade dos campos de vetores estáveis em superfícies. Foi en

tão que Smale enriqueceu substancialmente a teoria, definindo como objetivo central a busca de propriedades genéricas e estáveis, obtendo resultados e propondo problemas da maior relevância. Nesta mesma época, Hartman e Grobman mostraram que a estabilidade local é uma propriedade genérica. Logo a seguir, Kupka e Smale atacaram com sucesso o problema para órbitas periódicas.

Pretendemos aqui indicar ao leitor o que é a Teoria dos Sistemas Dinâmicos, através de muitos exemplos e, principalmente, da prova sistemática dos Teoremas de Hartman-Grobman (Capítulo II), Kupka-Smale (Capítulo III) e Peixoto (Capítulo IV). Várias das demonstrações que apresentamos são mais simples do que as originais e se prestam a generalizações importantes.

Para a leitura deste texto consideramos necessários apenas um curso básico sobre Equações Diferenciais e outro sobre Variedades Diferenciáveis, cujos resultados mais relevantes estão relacionados no Capítulo I. No Capítulo II pouco mais se exige que tópicos de Álgebra Linear e os Teoremas da Função Implícita e da Contração em espaços de Banach. O Capítulo III é o menos elementar, mas não necessariamente o mais difícil. Nele fazemos uso sistemático do Teorema de Transversalidade de Thom. For-

malmente o Capítulo IV depende do Capítulo III; no entanto, o que se utiliza deste capítulo é a versão, mais elementar, do Teorema de Kupka-Smale para superfícies bidimensionais.

Muitos resultados importantes e diversas linhas de pesquisa surgiram após os resultados aqui discutidos. Esperamos que este livro dê ao leitor uma perspectiva inicial da teoria e facilite o acesso à sua literatura.

Rio de Janeiro, Junho de 1975

Jacob Palis Jr.

Wellington de Melo

Estas notas foram motivadas por cursos dados pelos autores no Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais e no Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Além das inúmeras sugestões de nossos colegas e alunos, ressaltamos a colaboração de Alcides Lins Neto que redigiu uma primeira versão. Agradecemos também a Wilson Góes pelo excelente trabalho de datilografia.

ÍNDICE

	pag.
CAPÍTULO I - VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS E	
CAMPOS DE VETORES	1
§0 - Cálculo no R^n e Variedades Diferenciáveis....	2
§1 - Campos de Vetores em Variedades.....	19
§2 - Topologia no Espaço de Aplicações C^r	36
§3 - Transversalidade	44
§4 - Estabilidade Estrutural	50
CAPÍTULO II - ESTABILIDADE LOCAL	67
§1 - Teorema do Fluxo Tubular	67
§2 - Campos de Vetores Lineares	71
§3 - Singularidades e Pontos Fixos Hiperbólicos...	96
§4 - Estabilidade local	107
§5 - Classificação Local	123
§6 - Variedades Invariantes	133
§7 - O λ -Lema	142
CAPÍTULO III - O TEOREMA DE KUPKA-SMALE	159
§1 - Transformação de Poincaré	160
§2 - Genericidade dos Campos de Vetores cujas órbitas fechadas são hiperbólicas	178
§3 - Transversalidade das Variedades Invariantes..	195

	pag.
CAPÍTULO IV - GENERICIDADE E ESTABILIDADE	
DOS CAMPOS DE MORSE-SMALE	211
§1 - Campos de Morse-Smale	212
§2 - Densidade dos Campos de Morse-Smale	239
§3 - Generalizações	265
REFERÊNCIAS	283

CAPÍTULO I

VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS E CAMPOS DE VETORES

Este capítulo destina-se a estabelecer a linguagem e os fatos básicos necessários à compreensão dos capítulos subsequentes.

De início enunciamos resultados clássicos de Cálculo no \mathbb{R}^n , Equações Diferenciais Ordinárias e Superfícies do \mathbb{R}^n . Em seguida definimos campos de vetores em superfícies e traduzimos para este contexto os resultados locais da Teoria de Equações Diferenciais em \mathbb{R}^n . Introduzimos o estudo qualitativo de campos de vetores com os conceitos de α e ω -limites e demonstramos o importante teorema de Poincaré-Bendixon.

Na Seção 2 definimos a topologia de classe C^r no conjunto das aplicações diferenciáveis entre variedades. Mostramos que o conjunto das aplicações de classe C^r com a topologia C^r é um espaço de Baire separável e nele as aplicações de classe C^∞ são densas. Deduzimos daí uma topologia para os espaços de campos de vetores e difeomorfismos com as mesmas propriedades.

Toda a Seção 3 é dedicada ao Teorema de Transversalidade que utilizaremos com frequência.

Terminamos o capítulo estabelecendo as metas gerais da Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Em particular discutimos os conceitos de equivalência topológica e estabilidade estrutural para equações diferenciais definidas em superfícies do \mathbb{R}^n .

§0. Cálculo no \mathbb{R}^n e Variedades Diferenciáveis.

Nesta seção recordaremos alguns conceitos e resultados básicos de Cálculo no \mathbb{R}^n , Equações Diferenciais e Variedades Diferenciáveis. As demonstrações dos fatos aqui enunciados podem ser encontradas em [10],[11],[12],[8].

Seja $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação definida no aberto U de \mathbb{R}^m . Dizemos que f é diferenciável em um ponto p de U se existe uma transformação linear $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que, para v pequeno, $f(p+v) = f(p) + Tv + R(v)$ com $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{R(v)}{\|v\|} = 0$. Dizemos que a aplicação linear T é a derivada de f em p e a indicamos por $df(p)$ ou $Df(p)$. A existência da derivada de f em p implica, em particular, que f é contínua em p . Se f for derivável em cada ponto de U , temos uma aplicação $df: U \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ que a cada $p \in U$ associa a derivada de f em p . Aqui $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ indica o espaço vetorial das aplicações lineares de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^k munido da norma

$\|T\| = \sup\{\|Tv\|; \|v\| = 1\}$. Se df for contínua dizemos que f é de classe C^1 em U . É fácil ver que f é C^1 se e somente se as derivadas parciais das funções coordenadas de f , $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}: U \rightarrow \mathbb{R}$, existirem e forem contínuas.

A matriz de $df(p)$ nas bases canônicas de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^k é $(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(p))$. De maneira análoga definimos $d^2f(p)$ como a derivada de df em p . Assim $d^2f(p)$ é um elemento do

espaço $L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k))$ o qual é isomorfo ao espaço das aplicações bilineares $L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ em \mathbb{R}^k . A norma induzida em $L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ por este isomorfismo é

$\|B\| = \sup\{\|B(u,v)\|; \|u\| = \|v\| = 1\}$. Dizemos que f é de classe C^2 em U se $d^2f: U \rightarrow L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ for contínua.

Por indução definimos $d^r f(p)$ como a derivada em p de $d^{r-1}f$. Temos que $d^r f(p) \in L^r(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$, onde $L^r(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$

é o espaço das aplicações r -lineares munido da norma

$\|C\| = \sup\{\|C(v_1, \dots, v_r)\|; \|v_1\| = \dots = \|v_r\| = 1\}$. Também dizemos que f é de classe C^r em U se

$d^r f: U \rightarrow L^r(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ for contínua. Finalmente, f é de classe C^∞ em U se for de classe C^r para todo $r \geq 0$.

Observamos que f é de classe C^r se e somente se todas as derivadas parciais até ordem r das funções coordenadas de f existirem e forem contínuas. Sejam U, V abertos de \mathbb{R}^m e $f: U \rightarrow V$ uma aplicação sobre de classe C^r .

Dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^r se

existir uma aplicação $g: V \rightarrow U$ de classe C^r tal que $f \circ g$ é a identidade em U .

0.0 PROPOSIÇÃO - Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f_n: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma seqüência de aplicações de classe C^1 . Suponhamos que $f_n \rightarrow f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ pontualmente e que a seqüência $df_n \rightarrow g: U \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ uniformemente. Então f é de classe C^1 e $df = g$.

0.1 PROPOSIÇÃO (Regra da Cadeia) - Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos. Se $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $p \in U$, $f(U) \subset V$ e $g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ é diferenciável em $q = f(p)$, então $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ é diferenciável em p e $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$.

COROLÁRIO 1 - Se f e g são ambas de classe C^r então $g \circ f$ é de classe C^r .

COROLÁRIO 2 - Se $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $p \in U$ e $\alpha: (-1, 1) \rightarrow U$ é uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\frac{d}{dt} \alpha(0) = v$ então $f \circ \alpha$ é uma curva diferenciável em 0 e $\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0) = df(p) \cdot df(p)v$.

0.2 TEOREMA (Função Inversa) - Seja $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^r , $r \geq 1$. Se $df(p): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é

um isomorfismo então f é um difeomorfismo local de classe C^r em $p \in U$. Isto é, existem vizinhanças $V \subset U$ de p , $W \subset \mathbb{R}^m$ de $f(p)$ e uma aplicação C^r $g: W \rightarrow V$ tal que $g \circ f = I_V$ e $f \circ g = I_W$, onde I denota a identidade.

0.3 TEOREMA (Função Implícita) - Sejam $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^r , $r \geq 1$. Seja $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ e $c = f(z_0)$. Suponha que a derivada parcial em relação à segunda variável $\partial_2 f(z_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um isomorfismo. Então existem abertos $V \subset \mathbb{R}^m$ contendo x_0 , $W \subset U$ contendo z_0 tais que para cada $x \in V$ existe um único $\xi(x) \in \mathbb{R}^n$ com $(x, \xi(x)) \in W$ e $f(x, \xi(x)) = c$. A aplicação $\xi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ assim definida é de classe C^r e sua derivada é dada por $d\xi(x) = [\partial_2 f(x, \xi(x))]^{-1} \circ \partial_1 f(x, \xi(x))$.

OBSERVAÇÃO: Os teoremas enunciados acima são válidos também em espaços de Banach.

0.4 TEOREMA (Forma Local das Imersões) - Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ de classe C^r , $r \geq 1$. Suponha que para algum $x_0 \in U$ a derivada $df(x_0): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ seja biunívoca. Então existem vizinhanças $V \subset U$ de x_0 , $W \subset \mathbb{R}^m$ da origem, $Z \subset \mathbb{R}^{m+n}$ de $f(x_0)$ e um difeomorfismo de classe C^r $h: Z \rightarrow V \times W$ tal que $h \circ f(x) = (x, 0)$ para todo $x \in V$.

0.5 TEOREMA (Forma Local das Submersões) - Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r , $r \geq 1$.

Suponha que para algum $z_0 \in U$ a derivada $df(z_0)$ seja sobrejetiva. Então existem vizinhanças $Z \subset U$ de z_0 , $W \subset \mathbb{R}^n$ de $c = f(z_0)$, $V \subset \mathbb{R}^m$ da origem e um difeomorfismo C^r $h: V \times W \rightarrow Z$ tal que $f \circ h(x, w) = w$, $x \in V$ e $w \in W$.

Seja $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^r , $r \geq 1$. Um ponto $x \in U$ é regular se $df(x)$ for sobrejetiva. Caso contrário x é um ponto crítico. Um ponto $c \in \mathbb{R}^n$ é um valor regular se todo $x \in f^{-1}(c)$ for um ponto regular. Caso contrário c é um valor crítico. Um subconjunto de \mathbb{R}^n é residual se contém uma interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos. Pelo Teorema de Baire, todo subconjunto residual de \mathbb{R}^n é denso.

0.6 TEOREMA (Sard, [14]) - Se $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^∞ então o conjunto de valores regulares de f é residual em \mathbb{R}^n .

Cabe aqui observar que se $f^{-1}(c) = \emptyset$ então c é um valor regular. Para que exista um ponto regular $x \in U$ é necessário que $m \geq n$. Se $m < n$, todos os pontos de U são críticos e portanto $f(U)$ é "magro" em \mathbb{R}^n , isto é $\mathbb{R}^n - f(U)$ é residual.

Vamos agora recordar alguns resultados básicos sobre equações diferenciais. Um campo de vetores em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é uma aplicação $X: U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Consideramos apenas campos de classe C^r , $r \geq 1$. Uma curva integral de X por um ponto $p \in U$ é uma aplicação diferenciável $\alpha: I \rightarrow U$, I um intervalo aberto contendo 0, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ para todo $t \in I$. Isto é, α é uma solução da equação diferencial $\frac{dx}{dt} = X(x)$ com condição inicial $x(0) = p$.

0.7 TEOREMA (Existência e Unicidade) - Sejam X um campo de classe C^r , $r \geq 1$, em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $p \in U$. Existe uma curva integral de X $\alpha: I \rightarrow U$ com $\alpha(0) = p$. Se $\beta: J \rightarrow U$ é outra curva integral de X com $\beta(0) = p$ então $\alpha(t) = \beta(t)$ para todo $t \in I \cap J$.

Um fluxo local de X em $p \in U$ é uma aplicação $\varphi: (-\epsilon, \epsilon) \times V_p \rightarrow U$, V_p uma vizinhança de p em U , tal que para cada $q \in V_p$ a aplicação $\varphi_q: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ definida por $\varphi_q(t) = \varphi(t, q)$ é uma curva integral passando por q . Isto é, $\varphi(0, q) = q$ e $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, q) = X(\varphi(t, q))$ para todo $(t, q) \in (-\epsilon, \epsilon) \times V_p$.

0.8 TEOREMA - Seja X um campo de classe C^r em U , $r \geq 1$. Para todo $p \in U$ existe um fluxo

local $\varphi: (-\epsilon, \epsilon) \times V_p \rightarrow U$ que é de classe C^r . Indicando por D_1 e D_2 as derivadas parciais em relação à primeira e segunda variáveis, temos:

$$D_1 D_2 \varphi(t, q) = DX(\varphi(t, q)) \cdot D_2 \varphi(t, q)$$

$$D_2 \varphi(0, q) = \text{identidade de } \mathbb{R}^m.$$

Podemos também considerar campos que dependem de um parâmetro e a dependência das soluções em relação ao parâmetro. Seja E um espaço de Banach e $F: E \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^r , $r \geq 1$. Para cada $e \in E$, $F_e: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $F_e(p) = F(e, p)$ é um campo de classe C^r em U .

0.9 TEOREMA - Para todo $e \in E$ e $p \in U$ existem vizinhanças W de e em E , V de p em U e uma aplicação de classe C^r $\varphi: (-\epsilon, \epsilon) \times V \times W \rightarrow U$ tais que

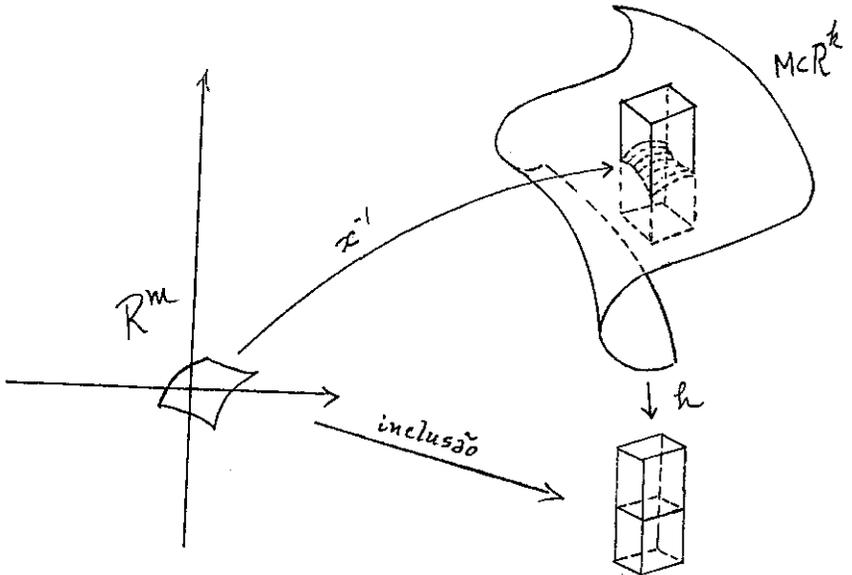
$$\varphi(0, q, \lambda) = q$$

$$D_1 \varphi(t, q, \lambda) = F(\lambda, \varphi(t, q, \lambda))$$

para todo $(t, q, \lambda) \in (-\epsilon, \epsilon) \times V \times W$.

A seguir introduzimos o conceito de variedade diferenciável. Para simplificar a exposição, definimos variedades como subconjuntos de \mathbb{R}^k . No final desta seção discutiremos a definição abstrata.

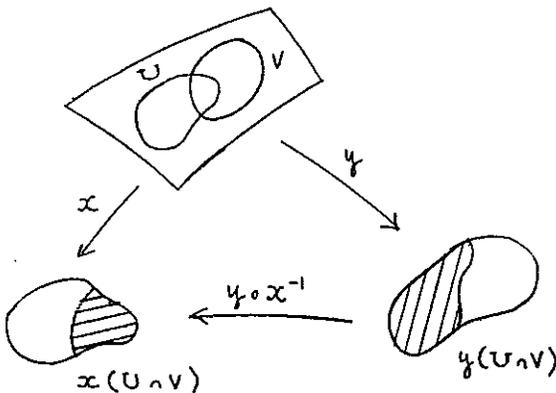
Seja M um subconjunto do espaço euclidiano \mathbb{R}^k . Consideremos em M a topologia induzida, isto é, $A \subset M$ é aberto se existir um aberto $A' \subset \mathbb{R}^k$ tal que $A = A' \cap M$. Dizemos que $M \subset \mathbb{R}^k$ é uma variedade diferenciável de dimensão m se para cada ponto $p \in M$ existirem uma vizinhança $U \subset M$ de p e um homeomorfismo $x: U \rightarrow U_0$, U_0 um aberto de \mathbb{R}^m , tais que o homeomorfismo inverso $x^{-1}: U_0 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$ é uma imersão de classe C^∞ . Isto é, para cada $u \in U_0$ a derivada $dx^{-1}(u): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ é biunívoca. Dizemos neste caso que (x, U) é uma carta local em torno de p e U é uma vizinhança coordenada de p . Se os homeomorfismos x^{-1} acima forem de classe C^r dizemos que M é uma variedade de classe C^r . O que denominamos de variedade diferenciável corresponde à classe C^∞ . Segue-se da Forma Local das Imersões que se (x, U) for uma carta local em torno de $p \in M$, então existem vizinhanças A de p em \mathbb{R}^k , V de $x(p)$, W da origem 0 em \mathbb{R}^{k-m} e um difeomorfismo C^∞ $h: A \rightarrow V \times W$ tal que para todo $q \in A \cap M$ temos $h(q) = (x(q), 0)$. Em particular, uma carta local é a restrição de uma aplicação C^∞ de um aberto de \mathbb{R}^k em \mathbb{R}^m .



I.1

Da observação acima concluímos a seguinte

0.10 PROPOSIÇÃO - Sejam $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ cartas locais em M . Se $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $y \circ x^{-1}: x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ é um difeomorfismo de classe C^∞ .



I.2

Vamos definir agora aplicações diferenciáveis entre variedades. Sejam M^m e N^n variedades e $f: M^n \rightarrow N^n$. Dizemos que f é de classe C^r se para cada ponto $p \in M$ existirem cartas locais $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em torno de p ,

$y: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $f(U) \subset V$ tais que $y \circ f \circ x^{-1}: x(U) \rightarrow y(V)$ é de classe C^r . Como as mudanças de coordenadas são de classe C^∞ , esta definição independe da escolha de cartas.

Consideremos uma curva diferenciável $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^k$ com $\alpha(0) = p$. É fácil ver que α é diferenciável segundo a definição acima se e somente se α é diferenciável como uma curva em \mathbb{R}^k . Portanto existe o vetor tangente $\frac{d\alpha}{dt}(0) = \alpha'(0)$. O conjunto dos vetores tangentes a todas as curvas α como acima é chamado de espaço tangente a M em p e denotado por TM_p . Consideremos uma carta local $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x(p) = 0$. É fácil ver que a imagem da derivada $dx^{-1}(0)$ coincide com TM_p . Logo TM_p é um espaço vetorial de dimensão m .

Sejam $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $v \in TM_p$, $p \in M$. Consideremos uma curva diferenciável $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Temos que $f \circ \alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$ é uma curva diferenciável. Definimos então $df(p)v = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0)$. Esta definição independe da curva α utilizada, a aplicação $df(p): TM_p \rightarrow TN_{f(p)}$ é

linear e é denominada de derivada de f em p .

Como uma variedade diferenciável é localmente um aberto de um espaço euclidiano, todos os teoremas de Cálculo que enunciamos anteriormente estendem-se para variedades.

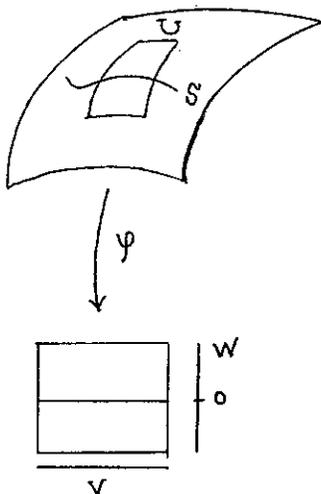
0.11 PROPOSIÇÃO (Regra da Cadeia) - Sejam $f: M \rightarrow N$ e $g: N \rightarrow P$ aplicações de classe C^r entre variedades diferenciáveis. Então $g \circ f: M \rightarrow P$ é de classe C^r e $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$.

Uma aplicação $f: M \rightarrow N$ é um difeomorfismo de classe C^r se for de classe C^r e tiver uma inversa f^{-1} de mesma classe. Neste caso, para cada $p \in M$ $df(p): T\mathbb{M}_p \rightarrow T\mathbb{N}_{f(p)}$ é um isomorfismo cujo inverso é $df^{-1}(f(p))$. Em particular M e N têm a mesma dimensão. Dizemos que $f: M \rightarrow N$ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existirem vizinhanças $U(p) \subset M$ e $V(f(p)) \subset N$ tais que a restrição de f a U seja um difeomorfismo sobre V .

0.12 PROPOSIÇÃO (Função Inversa) - Se $f: M \rightarrow N$ é de classe C^r , $r \geq 1$, e $df(p)$ é um isomorfismo para $p \in M$ então f é um difeomorfismo local de classe C^r em p .

Consideremos um subconjunto S de uma variedade M . S é uma subvariedade de classe C^r de M de dimensão s

se para cada $p \in S$ existem abertos $U \subset M$ contendo p , $V \subset \mathbb{R}^s$ contendo 0 , $W \subset \mathbb{R}^{m-s}$ contendo 0 e um difeomorfismo de classe C^r $\varphi: U \rightarrow V \times W$ tal que $\varphi(S \cap U) = V \times \{0\}$.



I.3

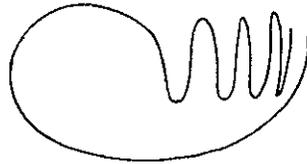
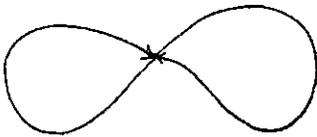
Observamos que \mathbb{R}^k é uma variedade diferenciável e que se $M \subset \mathbb{R}^k$ é uma variedade como definimos acima então M é uma subvariedade de \mathbb{R}^k . As subvariedades de $M \subset \mathbb{R}^k$ são as subvariedades de \mathbb{R}^k contidas em M .

0.13 PROPOSIÇÃO (Forma Local das Imersões) - Sejam

$$f: M^m \rightarrow N^{m+n} \text{ de classe } C^r, r \geq 1, \text{ e}$$

$p \in M$ tal que $df(p)$ é biunívoca. Existem vizinhanças $U(p)$, $V(f(p))$, $U_0(0)$ em \mathbb{R}^m , $V_0(0)$ em \mathbb{R}^n e difeomorfismos de classe C^r $\varphi: U \rightarrow U_0$, $\psi: V \rightarrow U_0 \times V_0$ tais que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x, 0)$.

Uma aplicação de classe C^r $f: M \rightarrow N$ é uma imersão se $df(p)$ é biunívoca para todo $p \in M$. Uma imersão biunívoca $f: M \rightarrow N$ é um mergulho se $f: M \rightarrow f(M) \subset N$ for um homeomorfismo, $f(M)$ munido da topologia induzida de N . Neste caso $f(M)$ é uma subvariedade de N . Caso $f: M \rightarrow N$ seja apenas uma imersão biunívoca dizemos que $f(M)$ é uma subvariedade imersa. Os exemplos abaixo indicam subvariedades imersas que não são mergulhos.



I.4

0.14 PROPOSIÇÃO (Forma Local das Submersões) - Sejam

$$f: M^{m+n} \rightarrow N^n \text{ de classe } C^r, r \geq 1, \text{ e}$$

$p \in M$ tal que $df(p)$ é sobrejetiva. Existem vizinhanças $U(p)$, $V(f(p))$, $U_0(0)$ em R^m , $V_0(0)$ em R^n e difeomorfismos $\varphi: U \rightarrow U_0 \times V_0$ e $\psi: V \rightarrow V_0$ tais que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x,y) = y.$$

Um ponto $q \in N$ é um valor regular de $f: M^m \rightarrow N^n$, de classe C^r com $r \geq 1$, se para todo $p \in M$ com $f(p) = q$ tivermos $df(p)$ sobrejetiva. Segue-se da proposição anterior que $f^{-1}(q)$ é uma subvariedade C^r de M de dimensão $m-n$.

0.15 PROPOSIÇÃO (Sard) .- Seja $f: M \rightarrow N$ de classe C^∞ .

O conjunto de valores regulares de f é residual, em particular denso em N .

A demonstração da Proposição 0.15 segue-se do Teorema de Sard (tomando cartas locais) e do fato de que toda cobertura por abertos de uma variedade admite uma subcobertura enumerável.

Observemos que se M for compacta o conjunto de valores regulares de $f: M \rightarrow N$ é aberto e denso em N .

Consideremos uma cobertura enumerável por abertos $\{U_n\}$ de uma variedade M . Uma partição da unidade subordinada a esta cobertura é uma coleção enumerável $\{\varphi_n\}$ de funções reais, não negativas e de classe C^∞ tais que

a) para cada índice n , o suporte de φ_n está contido em U_n . Lembramos que o suporte de φ_n é o fecho do conjunto de pontos onde φ_n é positiva.

b) $\sum_n \varphi_n(p) = 1$ para todo $p \in M$.

0.16 PROPOSIÇÃO - Dada uma cobertura enumerável de M

por abertos existe uma partição da unidade subordinada a esta cobertura.

COROLÁRIO 1 - Seja $K \subset M$ fechado. Existe uma aplicação

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $f^{-1}(0) = K$.

COROLÁRIO 2 - Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}^s$ uma aplicação de classe C^r , onde $M \subset \mathbb{R}^k$ é uma variedade. Então existe uma aplicação C^r $\tilde{f}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^s$ tal que $\tilde{f}/M = f$.

A partir desta proposição segue-se que dados abertos U e V de M tais que $\bar{U} \subset V$ existe uma função real $\varphi \geq 0$ de classe C^∞ com $\varphi = 1$ em U e $\varphi = 0$ em $M-V$. Tal função é chamada de função auxiliar.

Vamos agora definir o fibrado tangente TM de uma variedade $M^m \subset \mathbb{R}^k$. Colocamos $TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k; p \in M \text{ e } v \in T_p M\}$. Considerando TM com a topologia induzida de \mathbb{R}^k , temos que a projeção natural $\pi: TM \rightarrow M$, $\pi(p, v) = p$, é contínua. Mostremos que TM é uma variedade diferenciável e que π é na verdade de classe C^∞ . Seja $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma carta local de M . Definimos a aplicação $Tx: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ por $Tx(p, v) = (x(p), dx(p)v)$. É fácil ver que $(Tx, \pi^{-1}(U))$ é uma carta local de TM e portanto $TM \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ é uma variedade. Observe que a expressão de π em relação às cartas locais $(Tx, \pi^{-1}(U))$ é simplesmente a projeção natural de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ no primeiro fator; logo π é C^∞ . É fácil ver que se $f: M \rightarrow N$ for de classe C^{r+1} então $df: TM \rightarrow TN$, $df(p, v) = (f(p), df_p \cdot v)$, é de classe C^r .

Como já observamos, existe um conceito abstrato

de variedades que a priori seria mais geral do que aquele que apresentamos anteriormente. Assim, seja M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável. Uma carta local em M é um par (x, U) onde $U \subset M$ é um aberto e $x: U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo sobre um aberto U_0 de \mathbb{R}^m . Dizemos que U é uma vizinhança parametrizada em M . Se (x, U) e (y, V) são cartas locais em M com $U \cap V \neq \emptyset$, a mudança de coordenadas $y \circ x^{-1}: x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ é um homeomorfismo. Uma variedade diferenciável de classe C^r , $r \geq 1$, é um espaço topológico munido de uma coleção de cartas locais tais que: a) as vizinhanças parametrizadas cobrem M ; b) as mudanças de coordenadas são difeomorfismos de classe C^r . Uma tal coleção de cartas locais é chamada um atlas C^r de M .

Utilizando cartas locais podemos definir diferenciabilidade de aplicações entre variedades de forma análoga ao que fizemos anteriormente. Em particular uma curva $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é diferenciável se $x \circ \alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ for diferenciável, onde (x, U) é uma carta local com $U \supset \alpha(-\epsilon, \epsilon)$. O vetor tangente a α em $p = \alpha(0)$ é definido como o conjunto das curvas diferenciáveis $\beta: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tais que $\beta(0) = p$ e $d(x \circ \beta)(0) = d(x \circ \alpha)(0)$. Esta definição não depende da escolha da carta local (x, U) . O espaço tangente a M em p , TM_p , é o conjunto dos vetores

tangentes a curvas diferenciáveis passando por p . Segue-se que TM_p tem uma estrutura natural de espaço vetorial de dimensão m . Se $f: M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável entre variedades com $f(p) = q$, definimos $df(p): TM_p \rightarrow TN_q$ como a aplicação que ao vetor tangente em p à curva $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ associa o vetor tangente em q à curva $f \circ \alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$. É fácil ver que esta definição não depende da escolha da curva α e que df_p é uma aplicação linear. Dizemos que $f: M \rightarrow N$ é uma imersão se df_p for biunívoca para todo $p \in M$. Um mergulho é uma imersão biunívoca própria. Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ é um mergulho de classe C^∞ então $f(M) \subset \mathbb{R}^k$ é uma subvariedade de \mathbb{R}^k como definida anteriormente.

O teorema abaixo relaciona o conceito de variedade abstrata com o de subvariedade de um espaço euclidiano.

0.17 TEOREMA (Whitney) - Se M é uma variedade diferenciável de dimensão m , existe um mergulho $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$.

Sejam M uma variedade diferenciável e $S \subset M$ uma subvariedade. Uma vizinhança tubular de S é um par (V, π) onde V é uma vizinhança de S em M e $\pi: V \rightarrow S$ é uma submersão de classe C^∞ tal que $\pi(p) = p$ para $p \in S$.

0.18 TEOREMA - Toda subvariedade $S \subset M$ possui uma vizinhança tubular.

Finalmente, toda variedade de classe C^r , $r \geq 1$, pode ser considerada de maneira natural como uma variedade de classe C^∞ .

0.19 TEOREMA (Whitney) - Seja M uma variedade de classe C^r , $r \geq 1$. Então existe um mergulho de classe C^r , $r \geq 1$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ tal que $f(M)$ é uma subvariedade de classe C^∞ de \mathbb{R}^{2m+1} .

Usando o Teorema 0.17, o resultado acima é equivalente ao seguinte. Se \mathcal{U} é um atlas C^r em M existe um atlas C^∞ $\tilde{\mathcal{U}}$ em M tal que se $(x, U) \in \mathcal{U}$ e $(\tilde{x}, \tilde{U}) \in \tilde{\mathcal{U}}$ com $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ então $\tilde{x} \circ x^{-1}$ e $x^{-1} \circ \tilde{x}$ são de classe C^r .

§1. Campos de Vetores em Variedades.

Iniciamos aqui o estudo qualitativo das equações diferenciáveis. Tal estudo envolve tanto aspectos locais como globais. Neste sentido o ambiente natural a ser considerado é uma variedade diferenciável. Um primeiro resultado básico de caráter global é o Teorema de Poincaré-

Bendixon, com o qual finalizaremos esta seção.

Seja $M^m \subset \mathbb{R}^k$ uma variedade diferenciável. Um campo de vetores de classe C^r em M é uma aplicação de classe C^r $X: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in TM_p$. Isto corresponde a uma aplicação C^r $X: M \rightarrow TM$ tal que πX é a identidade em M , onde π é a projeção natural de TM em M . Denotamos por $\mathfrak{X}^r(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^r em M .

Uma curva integral de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ passando por um ponto $p \in M$ é uma aplicação diferenciável $\alpha: I \rightarrow M$, onde I é um intervalo contendo 0 , tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ para todo $t \in I$. A imagem de uma curva integral é chamada de órbita ou trajetória.

Se $f: M \rightarrow N$ for um difeomorfismo de classe C^{r+1} e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ então $Y = f_*X$, definido por $Y(q) = df_p \cdot X(p)$ com $q = f(p)$, é um campo de classe C^r em N pois $f_*X = df \circ X \circ f^{-1}$. Se $\alpha: I \rightarrow M$ for uma curva integral de X então $f \circ \alpha: I \rightarrow N$ é uma curva integral de Y . Em particular f leva trajetórias de X em trajetórias de Y . Assim se $x: U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$ for uma carta local, $Y = x_*X$ é um campo de classe C^r em U_0 ; dizemos que Y é a expressão de X na carta local (x, U) . Com estas considerações, os teoremas locais sobre existên

cia, unicidade e diferenciabilidade de soluções estendem-se a campos em variedades. Isto se traduz na seguinte proposição:

1.1 PROPOSIÇÃO - Sejam E um espaço de Banach e

$F: EXM \rightarrow TM$ uma aplicação C^r , $r \geq 1$,

tal que $\pi F(\lambda, p) = p$ onde $\pi: TM \rightarrow M$ é a projeção natural. Para todo $\lambda_0 \in E$ e $p_0 \in M$ existem vizinhanças

W de λ_0 em E , V de p_0 em M , um número real $\epsilon > 0$

e uma função de classe C^r $\varphi: (\epsilon, \epsilon) \times V \times W \rightarrow M$ tais que

$\varphi(0, p, \lambda) = p$ e $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, p, \lambda) = F(\lambda, \varphi(t, p, \lambda))$ para todo

$t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $p \in V$, $\lambda \in W$. Além disto, se $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$

é uma curva integral do campo $F_\lambda = F(\lambda, \cdot)$ com $\alpha(0) = p$

então $\alpha = \varphi_{p, \lambda} = \varphi(\cdot, p, \lambda)$.

1.2 PROPOSIÇÃO - Sejam I, J intervalos abertos e

$\alpha: I \rightarrow M$, $\beta: J \rightarrow M$ curvas integrais

de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Se $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ para algum

$t_0 \in I \cap J$ então $\alpha(t) = \beta(t)$ em $I \cap J$. Consequentemente existe uma curva integral $\gamma: I \cup J \rightarrow M$ que coincide com α em I e com β em J .

Demonstração: Pela unicidade local, se $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$

existe $\epsilon > 0$ tal que $\alpha(t) = \beta(t)$ para

$|t - t_1| < \epsilon$. Portanto o conjunto $\tilde{I} \subset I \cap J$ onde α coincide com β é aberto. Como o complementar de \tilde{I} é

também aberto e $I \cap J$ é conexo, temos que $\tilde{I} = I \cap J$.

1.3 PROPOSIÇÃO - Seja M uma variedade compacta e

$X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Existe um fluxo global de

classe C^r para X em M . Isto é, uma aplicação

$\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\varphi(0, p) = p$ e $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, p) = X(\varphi(t, p))$.

Demonstração: Consideremos um ponto p qualquer em M .

Vamos mostrar que existe uma curva integral definida em \mathbb{R} passando por p . Seja $(a, b) \subset \mathbb{R}$ um intervalo de definição de uma curva integral $\alpha: (a, b) \rightarrow M$ com $0 \in (a, b)$ e $\alpha(0) = p$. Dizemos que (a, b) é maximal se para todo intervalo J com a mesma propriedade tivermos $J \subset (a, b)$. Afirmamos que se (a, b) for maximal então $b = +\infty$. Caso contrário, consideremos uma seqüência $t_n \rightarrow b$, $t_n \in (a, b)$. Como M é compacta podemos supor, passando a uma subsequência, que $\alpha(t_n)$ converge para $q \in M$. Seja $\varphi: (-\epsilon, \epsilon) \times V_q \rightarrow M$ um fluxo local de X em q . Tomemos n_0 tal que $b - t_{n_0} < \frac{\epsilon}{2}$ e $\alpha(t_{n_0}) \in V_q$. Seja $\gamma: (a, t_{n_0} + \epsilon) \rightarrow M$ com $\gamma(t) = \alpha(t)$ se $t \leq t_{n_0}$ e $\gamma(t) = \varphi(t - t_{n_0}, \alpha(t_{n_0}))$ se $t \geq t_{n_0}$. Pelo teorema da unicidade local segue-se que γ é uma curva integral de X , o que é uma contradição pois $(a, t_{n_0} + \epsilon) \supset (a, b)$. Da mesma forma mostramos que $a = -\infty$ e portanto existe uma curva integral $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$, $\alpha(0) = p$. Pela Proposição 1.2,

esta curva integral é única. Definimos $\varphi(t,p) = \alpha(t)$. É claro que $\varphi(0,p) = p$ e $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t,p) = X(\varphi(t,p))$. Vamos mostrar que $\varphi(t+s,p) = \varphi(t, \varphi(s,p))$ para $t,s \in \mathbb{R}$ e $p \in M$. De fato, sejam $\alpha(t) = \varphi(t+s,p)$ e $\beta(t) = \varphi(t, \varphi(s,p))$. Temos que α e β são curvas integrais de X e $\alpha(0) = \beta(0) = \varphi(s,p)$, o que prova a afirmativa. Finalmente mostremos que φ é de classe C^r . Sejam $p \in M$ e $\psi: (-\epsilon_p, \epsilon_p) \times V_p \rightarrow M$ um fluxo local de X , o qual é de classe C^r pela Proposição 1.1. Também, pela unicidade das soluções, ψ é a restrição de φ a $(-\epsilon_p, \epsilon_p) \times V_p$. Em particular, $\varphi_t = \varphi(t, \cdot)$ é de classe C^r em V_p para $|t| < \epsilon_p$. Pela compacidade de M , existe $\epsilon > 0$ tal que φ_t é de classe C^r em M para $|t| < \epsilon$. Por outro lado para qualquer $t \in \mathbb{R}$, tomando $|\frac{t}{n}| < \epsilon$ para algum inteiro n , temos que $\varphi_t = \varphi_{\frac{t}{n}} \circ \dots \circ \varphi_{\frac{t}{n}}$ é de classe C^r . Para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$ e $p_0 \in M$, φ é de classe C^r em uma vizinhança de (t_0, p_0) . De fato, para $|t-t_0| < \epsilon_{p_0}$ e $p \in V_{p_0}$ temos que $\varphi(t,p) = \varphi_{t-t_0} \circ \varphi(t_0, p)$ é de classe C^r uma vez que φ_{t-t_0} e $\varphi/(-\epsilon_{p_0}, \epsilon_{p_0}) \times V_{p_0}$ são de classe C^r . Isto termina a demonstração.

COROLÁRIO - Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ o fluxo de X .

Para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $X_t: M \rightarrow M$, $X_t(p) = \varphi(t,p)$, é um difeomorfismo de classe C^r . Além

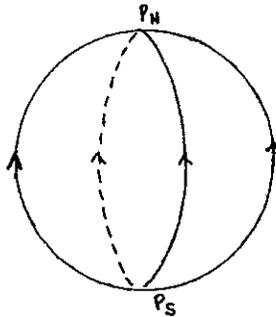
disto $X_0 =$ identidade, $X_{t+s} = X_t \circ X_s$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e X_t , $t \in \mathbb{R}$, o fluxo de X . A órbita de X por $p \in M$ é o conjunto $\mathcal{O}(p) = \{X_t(p); t \in \mathbb{R}\}$. Se $X(p) = 0$ a órbita de p se reduz a p . Neste caso dizemos que p é uma singularidade de X . Caso contrário a aplicação $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$, $\alpha(t) = X_t(p)$, é uma imersão. Se α não for biunívoca, existe $\omega > 0$ tal que $\alpha(\omega) = \alpha(0) = p$ e $\alpha(t) \neq p$ para $0 < t < \omega$. Neste caso a órbita de p é difeomorfa ao círculo S^1 e dizemos que a órbita é fechada de período ω . Caso a órbita não seja singular ou fechada, ela é dita regular. Assim, uma órbita regular é a imagem de uma imersão biunívoca da reta.

Seja $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. O ω -limite de um ponto $p \in M$, $\omega(p)$ é o conjunto dos pontos $q \in M$ tais que existe uma seqüência $t_n \rightarrow \infty$ com $X_{t_n}(p) \rightarrow q$. Analogamente, definiremos o α -limite de p , $\alpha(p) = \{q \in M; \text{existe } t_n \rightarrow -\infty \text{ com } X_{t_n}(p) \rightarrow q\}$. Observamos que o α -limite de p é o ω -limite de p para o campo $-X$. Também $\omega(p) = \omega(\tilde{p})$ se \tilde{p} pertence à órbita de p . De fato, $\tilde{p} = X_{t_0}(p)$ e portanto se $X_{t_n}(p) \rightarrow q$ com $t_n \rightarrow \infty$ então $X_{t_n - t_0}(\tilde{p}) \rightarrow q$ e $t_n - t_0 \rightarrow \infty$. Definimos então o ω -limite da órbita de p como $\omega(p)$. Intuitivamente, $\alpha(p)$ é onde a órbita de p "nasce" e $\omega(p)$ onde ela "morre".

EXEMPLO 1 - Consideremos a esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Chamamos $p_N = (0,0,1)$ de polo norte e $p_S = (0,0,-1)$ de polo sul de S^2 . Definimos o campo X em S^2 por $X(x,y,z) = (-xz, -yz, x^2+y^2)$. É claro que X é de classe C^∞ e é fácil verificar que as singularidades de X são p_N, p_S . Como X é tangente aos meridianos de S^2 apontando para cima, $\omega(p) = p_N$ e $\alpha(p) = p_S$ se $p \in S^2 - \{p_N, p_S\}$.

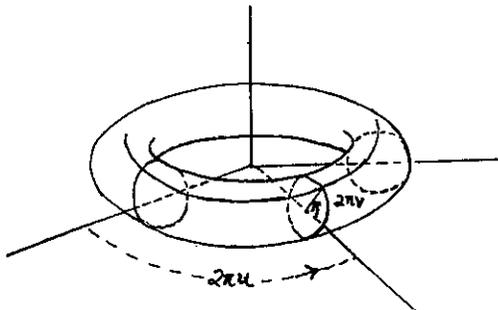


I.5

EXEMPLO 2 - Fluxos Racionais e Irracionais no Toro.

Seja $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$\varphi(u,v) = ((2+\cos 2\pi v)\cos 2\pi u, (2+\cos 2\pi v)\sin 2\pi u, \sin 2\pi v)$$



I.6

Temos que φ é um difeomorfismo local, leva retas horizontais de \mathbb{R}^2 em paralelos de T^2 , as retas verticais em meridianos e o quadrado $[0,1] \times [0,1]$ sobre T^2 . Além disto, $f(u,v) = f(\tilde{u}, \tilde{v})$ se e somente se $u - \tilde{u} = m$ e $v - \tilde{v} = n$ onde m e n são inteiros. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos em \mathbb{R}^2 o campo de vetores $X^\alpha(u,v) = (1, \alpha)$. É fácil ver que $Y^\alpha = \varphi_* X^\alpha$ está bem definido e é um campo C^∞ em T^2 . As órbitas de Y^α são as imagens por φ das órbitas de X^α , sendo estas as retas de inclinação α em \mathbb{R}^2 . Vamos mostrar que para α racional toda órbita de Y^α é fechada e para α irracional toda órbita de Y^α é densa em T^2 . Para cada $c \in \mathbb{R}$, denotemos por Δ_c a reta de \mathbb{R}^2 que passa por $(0,c)$ e tem inclinação α ; $\Delta_c = \{(u, c + \alpha u); u \in \mathbb{R}\}$. Como já observamos $\varphi(\Delta_c)$ é uma órbita de Y^α . Se α é racional esta órbita é fechada, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$. De fato, se $\alpha = \frac{n}{m}$ então $(m, c + \frac{n}{m} m) \in \Delta_c$ e $\varphi(m, c + n) = \varphi(0, c)$. Suponhamos agora α irracional e fixemos $\bar{c} \in \mathbb{R}$. Afirmamos que $C = \{c \in \mathbb{R}; \varphi(\Delta_c) = \varphi(\Delta_{\bar{c}})\}$ é denso em \mathbb{R} . Segue-se que $\bigcup_{c \in C} \Delta_c$ é denso em \mathbb{R}^2 e portanto $\varphi(\Delta_{\bar{c}}) = \varphi(\bigcup_{c \in C} \Delta_c)$ é denso em T^2 . Para mostrar que C é denso em \mathbb{R} basta provar que $G = \{m\alpha + n; m, n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em \mathbb{R} , pois $c \in C$ se e somente se $c - \bar{c} \in G$. Como G é um subgrupo de $\mathbb{R}, +$ temos que G ou é denso ou é discreto. Resta

assim mostrar que G não é discreto. De fato, para cada $m \in \mathbb{Z}$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $u_m = m\alpha + n$ pertence ao intervalo $[0,1]$. A seqüência u_m tem um ponto de acumulação e como α é irracional seus elementos são distintos. Logo G é denso.

O campo Y^α como acima é chamado de campo racional ou irracional em T^2 conforme α seja racional ou não. Se α for racional, o ω -limite de qualquer órbita é ela própria. Se α for irracional, o ω -limite de qualquer órbita é todo o toro T^2 .

EXEMPLO 3 - Campos Gradientes.

Consideremos uma variedade $M^m \subset \mathbb{R}^k$. Em cada ponto $p \in M$ tomemos em TM_p o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ induzido de \mathbb{R}^k . Se X e Y são campos de vetores C^∞ em M então a função $g: M \rightarrow \mathbb{R}$, $g(p) = \langle X(p), Y(p) \rangle_p$ é de classe C^∞ . Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r+1} . Para cada $p \in M$ existe um único vetor $X(p) \in TM_p$ tal que $df_p v = \langle X(p), v \rangle_p$ para todo $v \in TM_p$. O campo de vetores X assim definido é de classe C^r e é chamado de gradiente de f . Denotaremos $X = \text{grad } f$. Indicaremos agora algumas propriedades básicas de campos gradientes. Temos que $\text{grad } f(p) = 0$ se e somente se $df_p = 0$. Ao longo de órbitas não singulares de $X = \text{grad } f$, f é es-

tritamente crescente pois $df_p X(p) = \|X(p)\|^2$. Em particular $\text{grad } f$ não possui órbitas fechadas. Além disto, o ω -limite de qualquer órbita é constituído de singularidades. De fato, suponhamos que $X(q) \neq 0$ e $q \in \omega(p)$ para algum $p \in M$. Seja S a interseção de $f^{-1}(f(q))$ com uma pequena vizinhança de q . Temos que S é uma subvariedade de dimensão $m-1$ ortogonal a $X = \text{grad } f$ e, pela continuidade do fluxo, a órbita por qualquer ponto próximo a q intersesta S . Como $q \in \omega(p)$ existe uma seqüência p_n na órbita de p convergindo a q . Logo a órbita de p intersesta S em mais de um ponto (na verdade uma infinidade), o que é absurdo pois f é crescente ao longo das órbitas.

O campo em S^2 do Exemplo 1 é o gradiente da função altura em relação ao plano tangente à esfera S^2 pelo ponto p_S .

Outros exemplos simples podem ser obtidos considerando a função distância de uma superfície em \mathbb{R}^3 a um plano. Alguns destes exemplos serão considerados mais adiante.

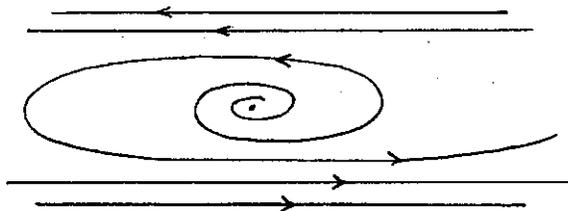
A seguir discutiremos algumas propriedades gerais dos conjuntos ω -limites.

1.4 PROPOSIÇÃO - Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, M uma variedade compacta, e $p \in M$. Temos:

- a) $\omega(p) \neq \emptyset$.
- b) $\omega(p)$ é fechado.
- c) $\omega(p)$ é invariante pelo fluxo de X , isto é
 $\omega(p)$ é uma união de órbitas de X .
- d) $\omega(p)$ é conexo.

Demonstração: Sejam $t_n \rightarrow \infty$ e $p_n = X_{t_n}(p)$. Como M é compacta, p_n possui uma subsequência convergente cujo limite pertence a $\omega(p)$. Suponhamos agora que $q \notin \omega(p)$. Então existe uma vizinhança $V(q)$ disjunta da órbita de p . Isto implica que os pontos de $V(q)$ não pertencem a $\omega(p)$ e portanto $\omega(p)$ é fechado. Seja agora $q \in \omega(p)$ e $\tilde{q} = X_s(q)$. Tomemos $t_n \rightarrow \infty$ com $X_{t_n}(p) \rightarrow q$. Então $X_{t_n+s}(p) = X_s X_{t_n}(p)$ converge a $X_s(q) = \tilde{q}$ e portanto $\tilde{q} \in \omega(p)$. Isto mostra que $\omega(p)$ é invariante pelo fluxo. Suponhamos que $\omega(p)$ não seja conexo. Podemos então escolher abertos V_1 e V_2 tais que $\omega(p) \subset V_1 \cup V_2$, $\omega(p) \cap V_1 \neq \emptyset$, $\omega(p) \cap V_2 \neq \emptyset$ e $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 = \emptyset$. Como a órbita de p se acumula em pontos de V_1 e V_2 , dado $T > 0$ existe $t > T$ tal que $X_t(p) \in M - (V_1 \cup V_2) = K$. Logo existe uma seqüência $t_n \rightarrow \infty$ com $X_{t_n}(p) \in K$. Passando a uma subsequência se necessário, temos que $X_{t_n}(p) \rightarrow q$ para algum $q \in K$. Isto implica que $q \in \omega(p) \subset V_1 \cup V_2$, o que é absurdo.

OBSERVAÇÃO: As propriedades acima são obviamente válidas para o conjunto α -limite. Por outro lado, se a variedade não for compacta devemos nos restringir a uma órbita que positivamente (ou negativamente) permaneça em um compacto. O exemplo abaixo exhibe uma órbita de um campo de \mathbb{R}^2 cujo ω -limite é desconexo.



I.7

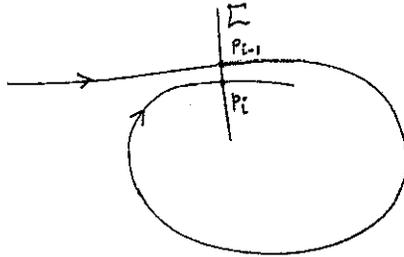
Como já vimos, o ω -limite de uma órbita de um fluxo irracional no toro T^2 é todo o toro. Existem exemplos mais complexos de campos em T^2 com um conjunto ω -limite de estrutura bastante complicada [3], [2]. Entretanto, para a esfera S^2 a situação é bem mais simples. Isto se deve ao seguinte fato topológico: toda curva contínua e fechada separa S^2 em duas regiões homeomorfas a discos (Teorema de Jordan). A estrutura de um conjunto ω -limite de campos em S^2 é descrita pelo Teorema de Poincaré-Bendixon que mostraremos a seguir.

Seja $X \in \mathfrak{X}^r(S^2)$, $r \geq 1$.

1.5 LEMA - Consideremos um segmento $\Sigma \subset S^2$ transversal

a X . A órbita positiva por um ponto $p \in S^2$, $\sigma_+(p)$, intersecta Σ em uma seqüência monótona; isto é, se p_i é a i -ésima interseção de $\sigma_+(p)$ com Σ então $p_i \in [p_{i-1}, p_{i+1}] \subset \Sigma$.

Demonstração: Considere o arco de trajetória p_{i-1}, p_i e o segmento $[p_{i-1}, p_i] \subset \Sigma$. Esta curva limita um disco D e como Σ é transversal ao campo, o qual



I.8

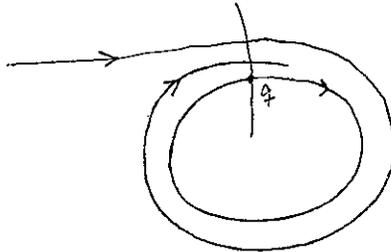
aponta para o interior de D , a órbita positiva de p_i está contida em D . Assim $p_i \in [p_{i-1}, p_{i+1}]$.

COROLÁRIO - O ω -limite de uma trajetória γ intersecta Σ no máximo em um ponto.

Demonstração: Suponhamos que $\omega(\gamma)$ contenha dois pontos q_1 e q_2 em Σ . Seja p_n a seqüência de interseções de γ com Σ . Então existem subseqüências de p_n convergindo a q_1 e a q_2 , o que contraria a monotonicidade de p_n .

1.6 LEMA - Se o ω -limite de uma trajetória γ não contém singularidades então $\omega(\gamma)$ é uma órbita fechada. Se $p \in \gamma$, as órbitas por pontos próximos a p têm esta mesma órbita fechada como ω -limite.

Demonstração: Seja $q \in \omega(\gamma)$. Mostremos que a órbita de q é fechada. Tomemos $x \in \omega(q)$ e portanto x não é uma singularidade. Consideremos um segmento (seção) transversal Σ contendo x . Pelo lema anterior a órbita positiva de q intersesta Σ segundo uma seqüência monótona $q_n \rightarrow x$. Como $q_n \in \omega(\gamma)$, segue-se do corolário acima que $q_n = x$ para todo n . Logo a órbita de q é fechada. Tomando agora um segmento transversal contendo q concluimos, como no Lema 1.5, que $\omega(\gamma)$ se reduz à órbita de q . A segunda parte da afirmativa é imediata.

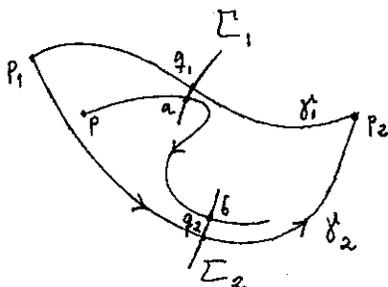


I.9

1.7 LEMA - Sejam p_1 e p_2 singularidades distintas do campo contidas no ω -limite de um ponto $p \in S^2$. Existe no máximo uma órbita $\gamma \subset \omega(p)$ tal que $\alpha(\gamma) = p_1$

e $w(\gamma) = p_2$.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que existam duas órbitas $\gamma_1, \gamma_2 \subset w(p)$ tais que $\alpha(\gamma_i) = p_1$ e $w(\gamma_i) = p_2$, $i = 1, 2$.



I.10

A curva C_1 formada pelas órbitas γ_1, γ_2 e pelos pontos p_1, p_2 separa S^2 em dois discos um deles contendo p , como mostra a figura. Sejam Σ_1 e Σ_2 segmentos transversais a X pelos pontos $q_1 \in \gamma_1$ e $q_2 \in \gamma_2$ respectivamente. Como $\gamma_1, \gamma_2 \subset w(p)$, a órbita positiva de p intersecta Σ_1 em um ponto a e em seguida intersecta Σ_2 em um ponto b . Consideremos a curva C_2 determinada pelos arcos $\widehat{ab} \subset \sigma(p)$, $\widehat{bq_2} \subset \Sigma_2$, $\widehat{q_2p_2} \subset \gamma_2$, $\widehat{q_1p_1} \subset \gamma_1$, $\widehat{q_1a} \subset \Sigma_1$ e pelo ponto p_2 . Temos que C_2 separa S^2 em dois discos A e B . A órbita positiva do ponto b fica inteiramente contida no disco A , o que é uma contradição pois $\gamma_1, \gamma_2 \subset w(p)$.

1.8 TEOREMA (Poincaré-Bendixon) - Seja $X \in \mathbb{R}^r(S^2)$ um

campo com um número finito de singularidades. Sejam $p \in S^2$ e $\omega(p)$ o conjunto ω -limite de p . Então ocorre uma das seguintes alternativas

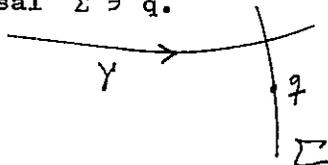
- 1) $\omega(p)$ é uma singularidade.
- 2) $\omega(p)$ é uma órbita fechada.
- 3) $\omega(p)$ é constituído por singularidades p_1, \dots, p_n e órbitas regulares tais que se $\gamma \subset \omega(p)$ então

$$\alpha(\gamma) = p_i \text{ e } \omega(\gamma) = p_j.$$

Demonstração: Se $\omega(p)$ não contém singularidade então pelo Lema 1.6 $\omega(p)$ é uma órbita fechada.

Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares então $\omega(p)$ é uma única singularidade, pois X tem um número finito de singularidades e $\omega(p)$ é conexo.

Suponhamos então que $\omega(p)$ contém pontos regulares e singularidades. Seja γ uma trajetória regular contida em $\omega(p)$. Se $\omega(\gamma)$ possui algum ponto regular q tomemos um segmento transversal $\Sigma \ni q$.

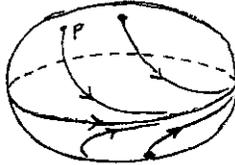


I.11

Como $\gamma \subset \omega(p)$ temos pelo Corolário do Lema 1.5 que γ intersesta Σ em apenas um ponto. Pelo Lema 1.6 γ é uma trajetória fechada e $\omega(p) = \gamma$. Isto é um absurdo pois $\omega(p)$ possui singularidades. Logo $\omega(p)$ é uma sin

gularidade. Analogamente, $\alpha(\gamma)$ é uma singularidade.

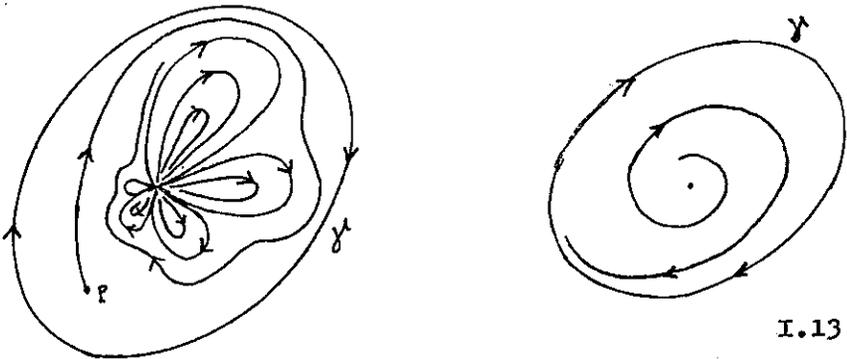
EXEMPLO - Seja X um campo em S^2 como na figura abaixo



I.12

Seja $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ que se anula exatamente no equador da esfera. Consideremos o campo $Y = \varphi \cdot X$. Todo ponto do equador é uma singularidade de Y e o conjunto ω -limite de um ponto p que não esteja nos polos nem no equador é todo o equador. Este exemplo mostra que o Teorema de Poincaré-Bendixon não é válido sem a hipótese de um número finito de singularidades.

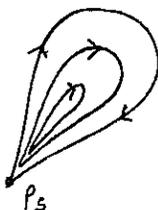
EXEMPLO - Seja X o campo em S^2 como na figura.



I.13

O campo X possui duas singularidades p_S e p_N , e uma órbita fechada γ . As órbitas do hemisfério norte da es-

fera tem como α -limite p_N e como ω -limite γ . No hemisfério sul temos a singularidade p_S que é o centro de uma rosa com uma infinidade de pétalas limitadas por órbitas que nascem em p_S e morrem em p_S . No interior de cada pétala a situação é como a da figura abaixo



I.14

As demais órbitas do hemisfério sul tem como α -limite γ e como ω -limite o bordo da rosa. Portanto o ω -limite de uma órbita pode conter uma infinidade de órbitas regulares o que mostra que o Lema 1.7 não é válido quando $p_1 = p_2$.

§2. Topologia no Espaço de Aplicações C^r .

Introduzimos aqui uma topologia natural no espaço $\mathcal{X}^r(M)$ de campos de vetores de classe C^r em uma variedade compacta M . Nesta topologia, dois campos $X, Y \in \mathcal{X}^r(M)$ estarão próximos se os campos e suas derivadas até ordem r estiverem próximos em todos os pontos de M .

Consideremos inicialmente o espaço $C^r(M, \mathbb{R}^S)$ de aplicações de classe C^r , $0 \leq r < \infty$, definidas em uma variedade compacta M . Temos em $C^r(M, \mathbb{R}^S)$ uma estrutura natural de espaço vetorial: $(f+g)(p) = f(p)+g(p)$, $(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$ para $f, g \in C^r(M, \mathbb{R}^S)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Tomemos em M uma cobertura finita por abertos V_1, \dots, V_k tal que cada V_i esteja contido no domínio de uma carta local (x_i, U_i) com $x_i(U_i) = B(2)$ e $x_i(V_i) = B(1)$, onde $B(1)$ e $B(2)$ são as bolas de raios 1 e 2 e centro na origem de \mathbb{R}^m . Para $f \in C^r(M, \mathbb{R}^S)$ denotamos por $f^i = f \circ x_i^{-1}: B(2) \rightarrow \mathbb{R}^S$.

Definimos

$$\|f\|_r = \max_i \sup_{u \in B(1)} \{ \|f^i(u)\|, \|df^i(u)\|, \dots, \|d^r f^i(u)\| \}.$$

2.1 PROPOSIÇÃO - $\| \cdot \|_r$ é uma norma completa em $C^r(M, \mathbb{R}^S)$.

Demonstração: É imediato que $\| \cdot \|_r$ é uma norma em

$C^r(M, \mathbb{R}^S)$. Resta mostrar que toda seqüência de Cauchy é convergente. Seja $f_n: M \rightarrow \mathbb{R}^S$ uma seqüência de Cauchy na norma $\| \cdot \|_r$. Se $p \in M$ então $f_n(p)$ é uma seqüência de Cauchy em \mathbb{R}^S e portanto é convergente. Colocamos $f(p) = \lim f_n(p)$. Em particular $f_n^i(u) \rightarrow f^i(u)$ para $u \in B(1)$ e $i = 1, \dots, k$. Por outro lado para cada $u \in B(1)$, $df_n^i(u)$ é uma seqüência de Cauchy em $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^S)$ e portanto converge a uma transformação linear $T^i(u)$.

Afirmamos que a convergência $df_n^i \rightarrow T^i$ é uniforme. De fato,

$$\|df_n^i(u) - T^i(u)\| \leq \|df_n^i(u) - df_{n'}^i(u)\| + \|df_{n'}^i(u) - T^i(u)\|$$

Dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que se $n, n' \geq n_0$ então $\|df_n^i(u) - df_{n'}^i(u)\| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $u \in B(1)$. Por outro lado para cada $u \in B(1)$ existe $n' \geq n_0$, o qual depende de u , tal que $\|df_{n'}^i(u) - T^i(u)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Assim para $n \geq n_0$ temos $\|df_n^i(u) - T^i(u)\| < \epsilon$ para todo $u \in B(1)$. Pela Proposição 0.0, f^i é de classe C^1 e $df^i = T^i$. Segue-se que $f_n \rightarrow f$ na norma $\| \cdot \|_1$. Com o mesmo argumento, mostramos por indução que f é de classe C^r e $f_n \rightarrow f$ na norma $\| \cdot \|_r$.

É fácil ver que a topologia induzida pela norma $\| \cdot \|_r$ em $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ não depende da cobertura V_1, \dots, V_k de M utilizada.

Vejamos a seguir algumas propriedades importantes de $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ com a topologia C^r .

Um subconjunto de um espaço topológico é residual se contém uma interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos. Um espaço topológico é de Baire se todo subconjunto residual é denso. Como $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ é um espaço métrico completo, temos imediatamente a seguinte

2.2 PROPOSIÇÃO - $C^r(M, \mathbb{R}^S)$ é um espaço de Baire.

Mostremos que $C^r(M, \mathbb{R}^S)$ contém subconjunto enumerável denso. Sejam $f \in C^r(M, \mathbb{R}^S)$ e $f^i = f \circ x^{-1}$: $B(2) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^S$. Observemos que a aplicação $J^r f^i: B(2) \rightarrow B(2) \times \mathbb{R}^S \times L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^S) \times \dots \times L^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^S) = E$ definida por $J^r f^i(u) = (u, f^i(u), df^i(u), \dots, d^r f^i(u))$ é contínua. Assim $J^r(f^i) = J^r f^i(\overline{B(1)})$ é um subconjunto compacto de E . É fácil ver que se W é uma vizinhança de f em $C^r(M, \mathbb{R}^S)$ existe uma vizinhança W de $J^r(f) = J^r(f^1) \times \dots \times J^r(f^k)$ em $E \times E \times \dots \times E$ tal que se $g \in C^r(M, \mathbb{R}^S)$ e $J^r g = J^r g^1 \times \dots \times J^r g^k \subset W$ então $g \in W$.

2.3 PROPOSIÇÃO - $C^r(M, \mathbb{R}^S)$ é separável; isto é, possui uma base enumerável de abertos.

Demonstração: Como $E^k = E \times \dots \times E$ é um aberto de um espaço euclidiano, existe uma base enumerável de abertos E_1, \dots, E_i, \dots para a topologia de E . Sejam $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_j, \dots$ a coleção de abertos de E constituída das uniões finitas dos E_i . Para cada j seja $\mathcal{E}_j = \{g \in C^r(M, \mathbb{R}^S); J^r(g) \subset \tilde{E}_j\}$. É claro que \mathcal{E}_j é um aberto em $C^r(M, \mathbb{R}^S)$. Sejam W uma vizinhança de f em $C^r(M, \mathbb{R}^S)$ e W uma vizinhança de $J^r(f)$ tal que se $J^r(g) \subset W$ então $g \in W$. Como $J^r(f)$ é compacto existe uma cobertura finita de $J^r(f)$ por abertos E_i contidos

em W . Seja \tilde{E}_j a união destes E_i ; é claro que $J(f) \subset \tilde{E}_j \subset W$. Portanto ε_j contém f e está contido em W . Isto mostra que $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j, \dots\}$ é uma base enumerável da topologia de $C^r(M, \mathbb{R}^s)$.

A seguir mostramos que toda aplicação de classe C^r pode ser aproximada por uma de classe C^∞ na topologia C^r .

2.4 LEMA - Seja $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ uma aplicação de classe C^r , U aberto. Seja $K \subset U$ compacto. Dado $\varepsilon > 0$ existe uma aplicação C^∞ $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ tal que $\|f-g\|_r < \varepsilon$ em K .

Demonstração: Consideremos uma função auxiliar $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ que vale 1 em K e 0 fora de uma vizinhança de K contida em U . Tomando $h = \varphi f$ temos que $h = f$ em K e $h = 0$ fora de U . Como h é de classe C^r e K é compacto existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup\{\|d^j h(u+v) - d^j h(u)\|; u \in K, \|v\| < \delta\} < \varepsilon$$

para $1, \dots, r$. Seja $\varphi_\delta: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função auxiliar tal $\varphi_\delta(v) = 0$ se $\|v\| > \delta$ e $\int \varphi_\delta(v) dv = 1$. Definimos $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ por $g(u) = \int \varphi_\delta(v) h(u+v) dv = \int \varphi_\delta(z-u) h(z) dz$.
Segue-se que

$$d^j g(u) = \int \varphi_\delta(v) d^j h(u+v) dv$$

e

$$d^j g(u) = (-1)^j \int d^j \varphi_\delta(z-u) h(z) dz.$$

Da segunda expressão segue-se que g é C^∞ . Por outro lado temos da primeira expressão que

$$\begin{aligned} \|d^j g(u) - d^j h(u)\| &= \left\| \int \varphi_\delta(v) d^j h(u+v) dv - \int \varphi_\delta(v) d^j h(u) dv \right\| \\ &= \left\| \int \varphi_\delta(v) (d^j h(u+v) - d^j h(u)) dv \right\| < \epsilon \text{ para } u \in K. \end{aligned}$$

Como $h = f$ em uma vizinhança de K , g satisfaz a condição desejada.

2.5 PROPOSIÇÃO - O subconjunto das aplicações de classe C^∞ é denso em $C^r(M, \mathbb{R}^S)$.

Demonstração: Sejam (x_i, U_i) , $i = 1, \dots, k$, cartas locais

com $x_i(U_i) = (B(2))$ e $M = \cup V_i$ onde

$V_i = x_i^{-1}(B(1))$. Tomemos $\{\varphi_i: M \rightarrow \mathbb{R}\}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{V_i\}$. Sejam $f \in C^r(M, \mathbb{R}^S)$

e $\epsilon > 0$. Pelo lema anterior, dado $\delta > 0$ existe

$\tilde{g}^i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^S$ de classe C^∞ tal que $\|f^i - \tilde{g}^i\|_r < \delta$ em

$\overline{B(1)}$, onde $f^i = f \circ x_i^{-1}$. Tomando δ suficientemente pequeno,

temos que $\|\varphi_i f - \varphi_i \tilde{g}^i \circ x_i\|_r < \frac{\epsilon}{k}$. Logo

$g = \sum \varphi_i \tilde{g}^i \circ x_i$ é de classe C^∞ e $\|f - g\|_r =$

$$= \|\sum \varphi_i f - \sum \varphi_i \tilde{g}^i \circ x_i\| < \frac{\epsilon}{k} + \dots + \frac{\epsilon}{k} = \epsilon.$$

Consideremos agora uma variedade $N \subset \mathbb{R}^S$. Como N

é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^s , $C^r(M, N)$ é fechado em $C^r(M, \mathbb{R}^s)$. Portanto $C^r(M, N)$ com a topologia induzida de $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ é um espaço de Baire separável.

Sejam $N_1 \subset \mathbb{R}^{s_1}$, $N_2 \subset \mathbb{R}^{s_2}$ variedades e $\Phi: N_1 \rightarrow N_2$ uma aplicação C^l , $r \leq l \leq \infty$. Tomemos $\Phi_*: C^r(M, N_1) \rightarrow C^r(M, N_2)$ definida por $\Phi_* f = \Phi \circ f$.

2.6 PROPOSIÇÃO - A aplicação Φ_* é contínua.

Demonstração: Pelo Corolário 2 da Proposição 0.16 existe uma aplicação de classe C^l , $\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^{s_1} \rightarrow \mathbb{R}^{s_2}$, tal que $\tilde{\Phi} = \Phi$ em N_1 . Sejam (x_i, U_i) , $i = 1, \dots, k$, cartas locais em M como anteriormente. É fácil ver que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|f \circ x_i^{-1} - g \circ x_i^{-1}\|_r < \delta$ em $\overline{B(1)}$ então $\|(\tilde{\Phi} \circ f - \tilde{\Phi} \circ g) \circ x_i^{-1}\|_r < \epsilon$ em $\overline{B(1)}$. Portanto se $\|f - g\|_r < \delta$ temos que $\|\Phi \circ f - \Phi \circ g\|_r = \|\tilde{\Phi} \circ f - \tilde{\Phi} \circ g\|_r < \epsilon$, o que mostra a continuidade de Φ_* .

Sejam agora M e N variedades abstratas, M compacta. Podemos definir uma topologia de classe C^r em $C^r(M, N)$. Para tanto basta mergulharmos N em um espaço euclidiano \mathbb{R}^s (Teorema 0.17). A proposição acima mostra que a topologia assim definida independe do mergulho.

2.7 PROPOSIÇÃO - O subconjunto de aplicações de classe C^∞ é denso em $C^r(M, N)$.

Demonstração: Suponhamos $N \subset \mathbb{R}^S$. Sejam $V \subset \mathbb{R}^S$ uma vizinhança tubular de V e $\pi: V \rightarrow N$ a projeção associada. Seja $f \in C^r(M, N)$; pela Proposição 2.5 podemos aproximar f por uma aplicação C^∞ $g: M \rightarrow \mathbb{R}^S$. Logo $\pi \circ g: M \rightarrow N$ é de classe C^∞ e como π_* é contínua segue-se que $\pi \circ g$ aproxima f .

2.8 PROPOSIÇÃO - O conjunto $\text{Dif}^r(M)$ dos difeomorfismos de classe C^r em M é aberto em $C^r(M, M)$.

Demonstração: Seja $f \in \text{Dif}^r(M)$. Podemos supor que $M \subset \mathbb{R}^S$. Se $p \in M$, existe pelo Teorema da Função Inversa vizinhanças V_p de p em M e U_p de f em $C^r(M, M)$ tal que se $g \in U_p$ então $g|_{V_p}$ é um difeomorfismo. Seja V_{p_1}, \dots, V_{p_j} uma subcobertura finita de M e $U = \bigcap_{i=1}^j U_{p_i}$. Se δ é o número de Lebesgue desta cobertura segue-se $d(p, q) < \delta$ então $g(p) \neq g(q)$ para todo $g \in U$. Por outro lado $\rho = \inf\{d(f(p), f(q)); p, q \in M \text{ e } d(p, q) > \delta\}$ é positivo. Diminuindo U podemos portanto supor que se $g \in U$ então g é biunívoca. Como g é um difeomorfismo local temos que g é um difeomorfismo.

Segue-se da proposição anterior que $\text{Dif}^r(M)$ é um espaço de Baire separável e que o subconjunto dos di-

feomorfismos de classe C^∞ é denso.

Finalmente consideremos o espaço $\mathcal{X}^r(M)$ dos campos de vetores de classe C^r em uma variedade compacta M . Supondo que $M \subset \mathbb{R}^s$ é fácil ver que $\mathcal{X}^r(M)$ é um subespaço fechado de $C^r(M, \mathbb{R}^s)$. Logo $\mathcal{X}^r(M)$ é um espaço de Baire separável. Mostremos que todo campo de vetores $X \in \mathcal{X}^r(M)$ pode ser aproximado por um campo C^∞ . De fato, X pode ser aproximado por uma aplicação C^∞ $Y: M \rightarrow TM$. Seja $\pi: TM \rightarrow M$ a projeção natural. Como π_* é contínua, $\pi \circ Y$ está C^r próximo de $\pi \circ X = \text{id}_M$. Pela Proposição 2.8, $\varphi = \pi \circ Y$ é um difeomorfismo. Seja $Z = Y \circ \varphi^{-1}$. Como φ é de classe C^∞ , Z é um campo de vetores C^∞ pois $\pi \circ Z = \text{id}_M$. Além disto Z aproxima X .

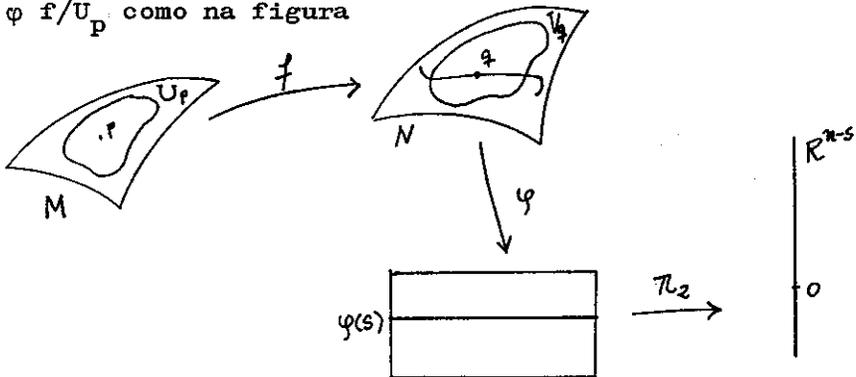
§3. Transversalidade.

Sejam $S \subset N$ uma subvariedade de classe C^r e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação C^k onde $k, r \geq 1$. Dizemos que f é transversal a S em um ponto $p \in M$ se $f(p) \notin S$ ou $df_p(TM_p) + TS_{f(p)} = TN_{f(p)}$; isto é, se a imagem de TM_p por df_p contém um subespaço complementar a $TS_{f(p)}$ em $TN_{f(p)}$. Dizemos que f é transversal a S , $f \pitchfork S$,

se o for em cada ponto $p \in M$. Observemos que se a dimensão de M é menor do que a codimensão de S então f é transversal a S se e somente se $f(M) \cap S = \emptyset$.

Um caso particular interessante é quando $f: M \rightarrow N$ é uma submersão: f é então transversal a toda subvariedade $S \subset N$. Analogamente definimos transversalidade entre duas subvariedades $S_1, S_2 \subset N$: S_1 é transversal a S_2 se a inclusão $i: S_1 \rightarrow N$ for transversal a S_2 .

Recordamos que toda subvariedade é localmente a imagem inversa de um valor regular. Mais precisamente, se $q \in S \subset N^n$ existem uma vizinhança V_q de q em N e um difeomorfismo $\varphi: V_q \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ de classe C^r tal que $\varphi(S \cap V_q) = \mathbb{R}^s \times \{0\}$; assim $S \cap V_q = (\pi_2 \circ \varphi)^{-1}(0)$ onde $\pi_2: \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$ é a projeção natural. Sejam agora $f: M \rightarrow N$ e $U_p \subset M$ uma vizinhança de p com $f(U_p) \subset V_q$, sendo $q = f(p)$. Consideremos a aplicação $\pi_2 \circ \varphi \circ f|_{U_p}$ como na figura



A proposição abaixo é imediata.

3.1 PROPOSIÇÃO - A aplicação $f: M \rightarrow N$ é transversal a S em $p \in M$ se e somente se 0 for valor regular de $\pi_2 \circ \varphi \circ f/U_p$ para alguma vizinhança U_p como acima.

COROLÁRIO - Sejam $f \in C^k(M, N^n)$ e S^s uma subvariedade de classe C^r de N com $k, r \geq 1$. Se f for transversal a S então $f^{-1}(S)$ ou é vazio ou é uma subvariedade de classe C^l e codimensão $n-s$, onde $l = \min(k, r)$.

3.2 PROPOSIÇÃO - Se M for compacta e $S \subset N$ for fechada então o subconjunto de aplicações em $C^k(M, N)$ transversais a S é aberto.

Demonstração: Seja $f \in C^k(M, N)$ transversal a S . Para cada $q \in S$ tomamos uma vizinhança V_q e um difeomorfismo $\varphi_q: V_q \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ tal que $\varphi_q(S \cap V_q) = \mathbb{R}^s \times \{0\}$. Para cada $p \in f^{-1}(q)$ consideremos uma vizinhança U_p tal que $f(\bar{U}_p) \subset V_q$ e que a derivada de $\pi_2 \circ \varphi_q \circ f$ seja sobrejetiva em todos os pontos de \bar{U}_p . Existe uma vizinhança $\mathcal{V}_p(f) \subset C^k(M, N)$ tal que o mesmo ocorre para $\pi_2 \circ \varphi_q \circ g$ em \bar{U}_p para todo $g \in \mathcal{V}_p$. Sejam U_{p_1}, \dots, U_{p_l} uma subcobertura finita do compacto $f^{-1}(S)$,

$U = U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_\ell}$ e $\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}_{p_1} \cap \dots \cap \mathcal{V}_{p_\ell}$. É claro que se $g \in \mathcal{V}$ então g é transversal a S em pontos de U . Como $M-U$ é compacto e $f(M-U) \cap S = \emptyset$ temos que, diminuindo \mathcal{V} se necessário, $g(M-U) \cap S = \emptyset$ para todo $g \in \mathcal{V}$. Logo todo $g \in \mathcal{V}$ é transversal a S o que demonstra a proposição.

Observamos que se $S \subset N$ não for fechada, a proposição permanece válida em partes fechadas de S . Isto é, se $\tilde{S} \subset S$ é um subconjunto fechado em N então o conjunto das aplicações $f: M \rightarrow N$ transversais a S em $f^{-1}(\tilde{S})$ é aberto em $C^k(M, N)$.

Sejam Λ, M, N variedades e $F: \Lambda \times M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^∞ . Para $\lambda \in \Lambda$, indicamos por $F_\lambda: M \rightarrow N$ a aplicação definida por $F_\lambda(p) = F(\lambda, p)$. Sejam $S \subset N$ uma subvariedade e $T_S \subset \Lambda$ o conjunto dos pontos λ tais que F_λ seja transversal a S .

3.3 PROPOSIÇÃO - Se $F: \Lambda \times M \rightarrow N$ for transversal a $S \subset N$ então T_S é residual em Λ .

Demonstração: Seja $\pi: \Lambda \times M \rightarrow \Lambda$ a projeção natural. Como F é transversal a S , $\tilde{S} = F^{-1}(S)$ é uma subvariedade de $\Lambda \times M$ e $\pi_S = \pi|_{\tilde{S}}: \tilde{S} \rightarrow \Lambda$ é de classe C^∞ . É fácil ver que F_λ é transversal a S se e somente se λ for valor regular de π_S . A proposição segue-se então

do Teorema de Sard.

COROLÁRIO 1 - Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ e $S \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade. O conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^n$ tais que $f+v$ é transversal a S é residual.

Demonstração: A aplicação $f: \mathbb{R}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $F(v,p) = f(p) + v$ é uma submersão e portanto transversal a S . O corolário é agora imediato a partir da proposição.

COROLÁRIO 2 - Se M é uma variedade compacta então o conjunto $T_S \subset C^k(M, \mathbb{R}^n)$ das aplicações transversais a uma subvariedade $S \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e denso.

Demonstração: A abertura de T_S segue-se da Proposição 3.2 enquanto que a densidade segue-se do Corolário 1 e da densidade das aplicações de classe C^∞ em $C^k(M, \mathbb{R}^n)$.

Ressaltamos que as variedades Λ , M e N consideradas na Proposição 3.3 não são necessariamente compactas. Observamos ainda que na Proposição 3.3 e no Corolário 1 exigimos que as aplicações fossem de classe C^∞ . Isto porque para demonstrá-los utilizamos o Teorema de Sard.

3.4 TEOREMA - Suponhamos M compacta e $S \subset N$ uma subvariedade fechada. O conjunto das aplica-

ções $f \in C^k(M, N)$ transversais a S é aberto e denso.

Demonstração: Como já mostramos a abertura, resta provar

a densidade das aplicações transversais a S .

Seja $f \in C^k(M, N)$. Basta mostrar que para cada $p \in M$ existem vizinhanças U_p de p em M e \mathcal{V}_p de f em $C^k(M, N)$ tais que o conjunto de $g \in \mathcal{V}_p$ transversais a S em \bar{U}_p é aberto e denso em \mathcal{V}_p . De fato, se $U_{p_1}, \dots, U_{p_\ell}$ é uma subcobertura finita de M e $\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}_{p_1} \cap \dots \cap \mathcal{V}_{p_\ell}$ então o conjunto de $g \in \mathcal{V}$ transversais a S em todos os pontos de M é aberto e denso. Em particular podemos aproximar f por uma aplicação transversal a S . Resta portanto construir as vizinhanças U_p e \mathcal{V}_p como acima. Seja $y: V \rightarrow R^n$ uma carta local em torno de $\hat{f}(p)$. Tomamos uma vizinhança de p , U_p , tal que $d(\bar{U}_p) \subset V$ e \mathcal{V}_p uma vizinhança de f tal que $f(\bar{U}_p) \subset V$ para todo $g \in \mathcal{V}_p$. Segue-se do mesmo argumento usado na prova da Proposição 3.2 que o conjunto dos $g \in \mathcal{V}_p$ transversais a S em \bar{U}_p é aberto. Quanto à densidade, podemos partir de uma aplicação $g \in \mathcal{V}_p$ de classe C^∞ uma vez que as aplicações de classe C^∞ constituem um subconjunto denso de $C^k(M, N)$. É fácil ver que se $v \in R^n$ tem norma pequena existe $g_v \in \mathcal{V}_p$ tal que $y \circ g_v = y \circ g + v$ em \bar{U}_p , g_v está próximo de g e $g_v = g$ fora de uma vizinhança de \bar{U}_p . Pelo Corolário 1 da Proposição 3.3, existe $v \in R^n$

de norma pequena com $y \circ g + v$ transversal a $y(S) \subset \mathbb{R}^n$. Logo g_v é transversal a S em \bar{U}_p o que conclui a demonstração.

§4. Estabilidade Estrutural.

O estudo qualitativo de uma equação diferencial consiste na descrição geométrica de seu espaço de órbitas. É então natural perguntar-se quando é que dois espaços de órbitas têm a mesma descrição; isto corresponde a estabelecer uma relação de equivalência entre equações diferenciais. Uma relação de equivalência que exprime a estrutura geométrica das órbitas é a equivalência topológica.

Seja $\mathcal{X}^r(M)$ o espaço dos campos de classe C^r , $r \geq 1$ e M uma variedade compacta, munido da topologia C^r . Dois campos $X, Y \in \mathcal{X}^r(M)$ são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo $h: M \rightarrow M$ que leve órbitas de X em órbitas de Y preservando a orientação das trajetórias (isto é, se $p \in M$ e $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que para $0 < t < \delta$ $h X_t(p) = Y_{\bar{t}}(h(p))$ para algum $0 < \bar{t} < \epsilon$). Dizemos que h é uma equivalência topológica entre X e Y . Temos assim definida uma relação de equivalência em $\mathcal{X}^r(M)$. Uma relação mais forte é a conju

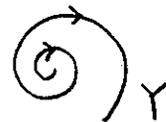
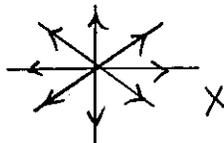
gação entre os fluxos dos campos de vetores. Dois campos X e Y são conjugados se existir uma equivalência topológica h que preserva o parâmetro t ; isto é, $h X_t(p) = Y_t h(p)$ para todo $p \in M$ e $t \in \mathbb{R}$.

A proposição seguinte, cuja demonstração é imediata, exprime em parte a "igualdade" dos espaços de órbitas de dois campos de vetores equivalentes.

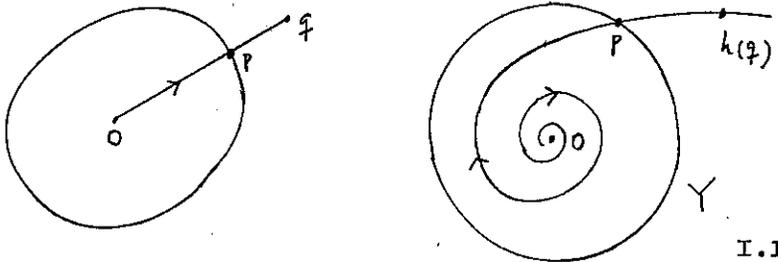
4.1 PROPOSIÇÃO - Seja h uma equivalência topológica entre $X, Y \in \mathcal{X}^1(M)$. Então:

- a) $p \in M$ é uma singularidade de X se e somente se $h(p)$ é uma singularidade de Y ;
- b) a órbita de p pelo campo X , $\sigma_X(p)$, é fechada se e somente se $\sigma_Y(h(p))$ é fechada;
- c) a imagem do ω -limite de $\sigma_X(p)$ por h é o ω -limite de $\sigma_Y(h(p))$; analogamente para o α -limite.

EXEMPLO 1 - Consideremos os campos lineares X e Y em \mathbb{R}^2 definidos por $X(x,y) = (x,y)$ e $Y(x,y) = (x+y, -x+y)$. Os fluxos correspondentes são $X_t(x,y) = e^t(x,y)$ e $Y_t(x,y) = e^t(x \cos t + y \sin t, -x \sin t + y \cos t)$



Vamos construir um homeomorfismo h de \mathbb{R}^2 conjugando X_t e Y_t . Como 0 é a única singularidade de X e Y , devemos ter $h(0) = 0$. É fácil ver que o círculo unitário S^1 é transversal a X e Y . Além disto todas as trajetórias de X e Y distintas de 0 intersectam S^1 . Definimos $h(p) = p$ para $p \in S^1$. Se $q \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ existe um único $t \in \mathbb{R}$ tal que $X_t(q) = p \in S^1$. Colocamos $h(q) = Y_{-t}(p) = Y_{-t} X_t(q)$.



É imediato que h é contínua e tem inversa contínua em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. A continuidade de h e de sua inversa em 0 pode ser verificada utilizando-se os fluxos de X e Y .

EXEMPLO 2 - Sejam X e Y os campos lineares de \mathbb{R}^2 cujas matrizes na base canônica são

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Estes campos não são equivalentes, uma vez que todas as órbitas de Y são fechadas e isto não ocorre com as órbitas de X .

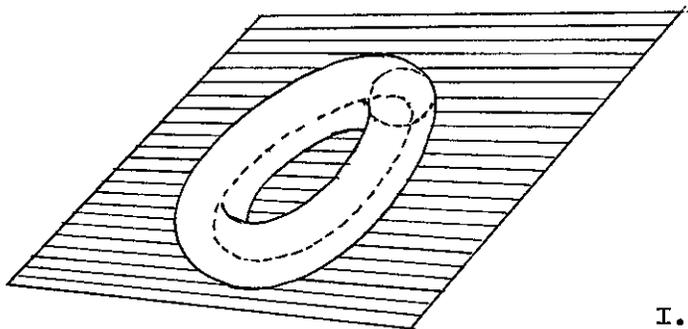
Um campo de vetores é estruturalmente estável se o comportamento topológico de suas órbitas não se altera mediante pequenas perturbações do campo. Formalmente, digamos que $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é estruturalmente estável se existe uma vizinhança \mathcal{U} de X em $\mathfrak{X}^r(M)$ tal que todo $Y \in \mathcal{U}$ é topologicamente equivalente a X .

O campo nulo em qualquer variedade é obviamente instável. Por outro lado o campo linear $X(p) = p$, considerado no Exemplo 1, é estruturalmente estável no espaço de campos lineares de R^2 . Afim de motivar condições necessárias para a estabilidade estrutural, a serem abordadas nos capítulos subsequentes, apresentamos a seguir alguns exemplos de campos instáveis.

EXEMPLO 3 - Consideremos um campo racional no toro T^2 , como no Exemplo 2 da Seção 1. Este campo é instável em $\mathfrak{X}^r(T^2)$. De fato, todas as suas órbitas são fechadas. Por outro lado, ele pode ser aproximado por um campo irracional, o qual não possui órbitas fechadas. Na verdade, em variedades (compactas) de dimensão dois todo campo com uma infinidade de órbitas fechadas é

instável. Isto porque podemos aproximá-lo por um campo com apenas um número finito de órbitas fechadas, como veremos no Capítulo IV.

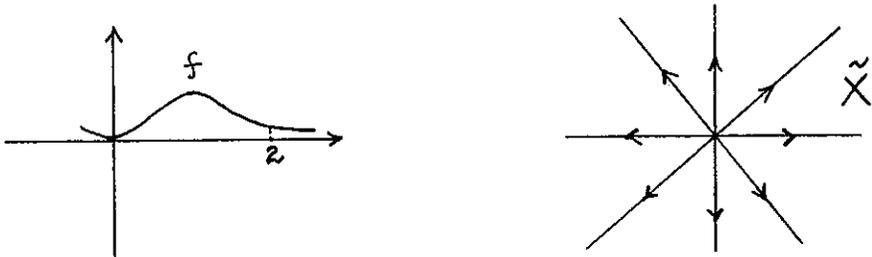
EXEMPLO 4 - Seja π um plano tangente ao toro de revolução $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ contendo um paralelo como na figura.



I.19

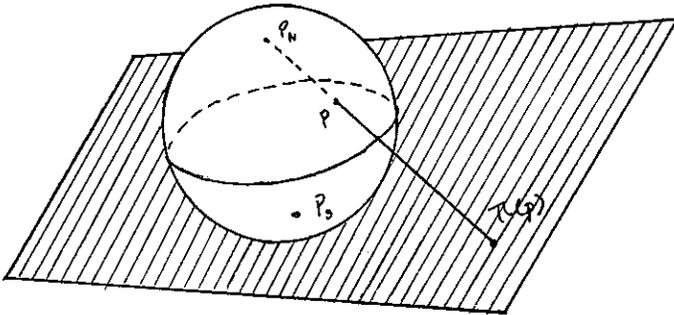
Seja $f: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função que a cada ponto de T^2 associa sua distância a π . Tomemos $X = \text{grad } f$. O paralelo de T^2 contido em π é formado de singularidades de X . Seja agora $X' = \text{grad } f'$, onde f' é a função distância ao plano π' obtido de π por uma pequena rotação. Como existem quatro planos paralelos a π' , tangentes a T^2 e cada um intersesta T^2 em apenas um ponto, segue-se que X' possui apenas quatro singularidades. Logo X não é equivalente a X' e portanto X é instável. Mostraremos no Capítulo II que todo campo com uma infinidade de singularidades é instável, pois pode ser aproximado por outro com um número finito de singularidades.

EXEMPLO 5 - Vamos agora exibir um campo em S^2 que é inestável, embora seja topologicamente equivalente ao campo polo norte-polo sul do Exemplo 1 da Seção 1, o qual é estável. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ satisfazendo as seguintes condições: $f(t) > 0$ para $t \neq 0$; $f(t) = \frac{1}{t}$ para $t > 1$; $f(0) = \frac{df}{dt}(0) = \dots = \frac{d^r f}{dt^r}(0) = \dots = 0$. Consideremos o campo \vec{X} em \mathbb{R}^2 definido por $\vec{X}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (rf(r)\cos \theta, rf(r)\sin \theta)$. O campo \vec{X} é radial, a origem é a única singularidade, $d\vec{X}(0) = 0$ e $\|\vec{X}(p)\| = 1$ se $\|p\| \geq 1$.



I.20

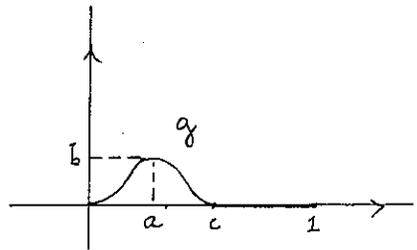
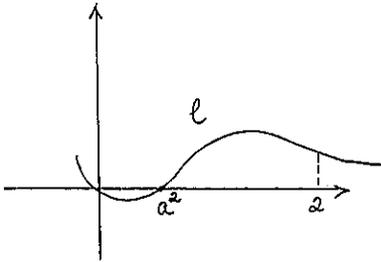
Seja $\pi: S^2 - \{p_N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica.



I.21

Definimos o campo X em S^2 por $X(p) = (d\pi^{-1}_{\pi(p)})\vec{X}(\pi(p))$

se $p \neq p_N$ e $X(p_N) = 0$. Temos que X é um campo C^∞ e possui duas singularidades p_N e p_S . Observe que a identidade é uma equivalência topológica entre X e o campo polo norte-polo sul do Exemplo 1 da Seção 1. Mostremos que existe um campo C^1 próximo de X exibindo uma órbita fechada. Seja \tilde{Y} o campo em \mathbb{R}^2 definido por $\tilde{Y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \ell(r) \cos \theta + r g(r) \sin \theta, -r g(r) \cos \theta + r \ell(r) \sin \theta)$ onde $\ell, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^∞ cujos gráficos são os seguintes



I.22

$$\ell(0) = \ell(a^2) = 0$$

$$\ell(t) = \frac{1}{t} \text{ se } t \geq 2$$

$$\ell(t) < 0 \text{ se } 0 < t < a^2$$

$$\ell(t) > 0 \text{ se } t > a^2$$

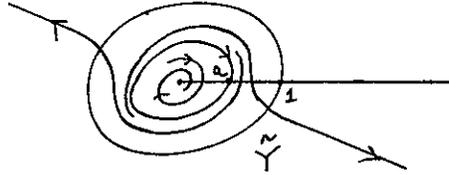
$$g(0) = g(t) = 0 \text{ se } t \geq c$$

$$g(t) > 0 \text{ se } 0 < t < c$$

$$g'(a) = 0$$

$$g(a) = b$$

O círculo S_a de centro na origem e raio a é uma órbita fechada de \tilde{Y} , pois \tilde{Y} é tangente a S_a em todos os seus pontos. Fora do disco de raio 1 $\tilde{Y} = \tilde{X}$.



I.23

Assim \tilde{Y} projeta-se em um campo Y de S^2 que tem o polo sul como singularidade ("atratora"), o polo norte como singularidade ("atratora") e uma órbita fechada γ ("repulsora"), sendo $\gamma = \pi^{-1}(S_a)$. Escolhendo $l \subset C^r$ próximo de f e $g \subset C^r$ próximo da função nula Y estará C^r próximo de X . Como X não é topologicamente equivalente a Y , X não é estruturalmente estável em $\mathcal{K}^r(S^2)$.

Salientamos que dos exemplos anteriores, apenas o campo do Exemplo 5 é equivalente a um campo estável. A razão básica de sua instabilidade é a degenerescência da derivada do campo na singularidade p_S .

É em geral um problema delicado demonstrar a estabilidade de um campo de vetores. Muitos exemplos serão exibidos no Capítulo IV. Analisaremos a seguir a estabilidade de campos de vetores em S^1 . Trata-se de um caso muito simples, mas que permite ter-se uma visão das metas gerais da Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Seja X^0 um dos dois campos unitários em S^1 . Qualquer $X \in \mathcal{K}^r(S^1)$ escreve-se de maneira única como

$X(p) = f(p)X^0(p)$, $p \in S^1$ e $f \in C^r(S^1, \mathbb{R})$. É claro que $X(p) = 0$ se e somente se $f(p) = 0$. Como já observamos, dado qualquer compacto $K \subset S^1$ existe $f \in C^r(S^1, \mathbb{R})$ tal que $f^{-1}(0) = K$. Portanto $X = f X^0$ tem como singularidades exatamente os pontos de K . Como a equivalência topológica preserva singularidades, temos pelo menos tantas classes de equivalência para os campos quanto classes de subconjuntos compactos de S^1 módulo homeomorfismos. Isso mostra ser impossível descrever e classificar as estruturas de órbitas de todos os campos de S^1 . É natural portanto restringir-se a um subconjunto residual de $\mathcal{X}^r(S^1)$, de preferência aberto e denso.

Uma singularidade p de $X \in \mathcal{X}^r(S^1)$ é não degenerada (hiperbólica) se $dX(p) \neq 0$, isto é, $df(p) \neq 0$ onde $X = f X^0$. Se $df(p) < 0$ p é um poço (singularidade atratora) e se $df(p) > 0$ p é uma fonte (singularidade repulsora). Seja $G \subset \mathcal{X}^r(S^1)$ o subconjunto dos campos cujas singularidades são todas hiperbólicas; como estas singularidades são isoladas, segue-se que o número delas é finito (pode ser zero!). Afirmamos que G é aberto e denso. De fato, sejam $X = f X^0$ e $\tilde{f}: S^1 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ definida por $\tilde{f}(p) = (p, f(p))$. É claro que $X \in G$ se e somente se \tilde{f} é transversal a $S^1 \times \{0\}$. Ora o conjunto de $f \in C^r(S^1, \mathbb{R})$ tais que \tilde{f} é transversal a $S^1 \times \{0\}$ é

aberto. Este conjunto é também denso, pois para qualquer f o conjunto de $v \in \mathbb{R}$ tais que $\bar{f}+v$ é transversal a $S^1 \times \{0\}$ é residual. Logo podemos tomar v pequeno de modo que $(f+v)X^0 \in G$.

Se $X \in G$ e $X = f X^0$, observando o gráfico de $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ vemos que os poços e fontes de X devem se alternar em S^1 . Em particular o número de singularidades é par. Dai decorre que se $X, Y \in G$ têm o mesmo número de singularidades então X e Y são topologicamente conjugados. De fato, sejam $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_s, b_s$ os poços e fontes de X ordenados em S^1 . Analogamente sejam $a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, \dots, a'_s, b'_s$ os poços e fontes de Y ordenados em S^1 . Definimos $h(a_i) = a'_i$ e $h(b_i) = b'_i$. Escolhemos pontos $p_i \in (a_i, b_i)$, $q_i \in (b_i, a_{i+1})$ e $p'_i \in (a'_i, b'_i)$, $q'_i \in (b'_i, a'_{i+1})$. Definimos $h(p_i) = p'_i$ e $h(q_i) = q'_i$. Se $p \in (a_i, b_i)$ existe um único $t \in \mathbb{R}$ tal que $X_t(p) = p_i$; definimos $h(p) = Y_{-t}(p'_i) = Y_{-t} \circ h \circ X_t(p)$. Analogamente para pontos de (b_i, a_{i+1}) . É evidente que h é um homeomorfismo que conjuga os fluxos de X e Y .

Caso X não possua singularidades, a única órbita de X é o próprio S^1 . Se $X = f X^0$ então ou $f > 0$ ou $f < 0$ em todo S^1 . Se $f > 0$, a identidade define uma equivalência topológica entre X e X^0 . Se $f < 0$ tomamos a aplicação antípoda como a equivalência topológica. Final

mente, afirmamos que se $X \in \mathfrak{X}^r(S^1)$ for estável então $X \in G$. Inicialmente observamos que o número de singularidades de X é finito. Isto porque G é denso e portanto X deve ser equivalente a um campo $Y \in G$ próximo de X . Deixamos a cargo do leitor mostrar que estas singularidades são hiperbólicas; caso contrário podemos perturbar X de modo a criar um número maior de singularidades, contrariando a hipótese de X ser estável.

Temos então que $X \in \mathfrak{X}^r(S^1)$ é estável se e somente se $X \in G$. Assim os campos estruturalmente estáveis em $\mathfrak{X}^r(S^1)$ formam um conjunto aberto e denso e, como já vimos, é possível classificá-los.

Com o desenvolvimento da teoria geométrica das equações diferenciais deparou-se naturalmente com a necessidade de um estudo paralelo dos difeomorfismos. Apresentamos a seguir alguns conceitos básicos para o estudo da estrutura de órbitas de um difeomorfismo.*

Seja $f \in \text{Dif}^r(M)$. A órbita de um ponto $p \in M$ é o conjunto $\sigma(p) = \{f^n(p); n \in \mathbb{Z}\}$. Quando $\sigma(p)$ é finito dizemos que p é periódico e o menor inteiro $n > 0$ tal que $f^n(p) = p$ é chamado de período de p . Se $f(p) = p$ dizemos que p é um ponto fixo. Um ponto $q \in M$ pertence ao w -limite de p , $w(p)$, quando existe uma se-

quência de inteiros $n_i \rightarrow \infty$ tal que $f^{n_i}(p) \rightarrow q$. Se $x \in \mathcal{O}(p)$ então $\omega(x) = \omega(p)$. Além disto, $\omega(p)$ é não vazio, fechado e invariante. Por invariante entendemos que $\omega(p)$ é formado de órbitas de f . Para p periódico $\omega(p) = \mathcal{O}(p)$, logo $\omega(p)$ não é conexo se o período de p for maior que um. Analogamente definimos o conjunto α -limite de p , $\alpha(p)$, como sendo o ω -limite de p para f^{-1} . As propriedades de $\omega(p)$ mencionadas acima são válidas para $\alpha(p)$.

A equivalência entre as estruturas de órbitas de dois difeomorfismos é expressa pela conjugação. Uma conjugação entre $f, g \in \text{Dif}^r(M)$ é um homeomorfismo $h: M \rightarrow M$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Segue-se que $h \circ f^n = g^n \circ h$ para qualquer inteiro n e portanto $h(\mathcal{O}_f(p)) = \mathcal{O}_g(q)$ se $q = h(p)$. Isto é, h leva órbitas de f em órbitas de g e, em particular, pontos periódicos em pontos periódicos de mesmo período. Também $h(\omega_f(p)) = \omega_g(q)$ e $h(\alpha_f(p)) = \alpha_g(q)$.

EXEMPLO 6 - Consideremos duas contrações lineares em \mathbb{R} ,

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{3}x. \quad \text{Vamos mostrar que}$$

f e g são conjugadas. Tomemos os pontos de coordenadas $a > 0$, $b < 0$ e os intervalos $[f(a), a]$, $[b, f(b)]$ e $[g(a), a]$, $[b, g(b)]$. Definimos um homeomorfismo

$h: [f(a), a] \cup [b, f(b)] \rightarrow [g(a), a] \cup [b, g(b)]$ tal que
 $h(a) = a$, $h(b) = b$, $h(f(a)) = g(a)$ e $h(f(b)) = g(b)$.
Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existe um inteiro n de modo
que $f^n(x) \in [f(a), a] \cup [b, f(b)]$. Colocamos $h(x) =$
 $= g^{-n} \circ h \circ f^n(x)$ e $h(0) = 0$. É fácil ver que h está bem
definida e é uma conjugação entre f e g .

Por outro lado, as contrações $f(x) = \frac{1}{2}x$ e $g(x) = -\frac{1}{3}x$
não são conjugadas.

Usando o argumento acima temos que duas contrações de \mathbb{R}
são conjugadas se e somente se ambas preservam ou inver-
tem a orientação de \mathbb{R} .

EXEMPLO 7 - As transformações lineares em \mathbb{R}^2 , $f(x, y) =$
 $= (\frac{1}{2}x, 2y)$ e $g(x, y) = (\frac{1}{3}x, 4y)$ são con-
jugadas. Construímos como no Exemplo 6 uma conjugação h_1
entre $f/\mathbb{R} \times \{0\}$ e $g/\mathbb{R} \times \{0\}$ e uma conjugação h_2 en-
tre $f/\{0\} \times \mathbb{R}$ e $g/\{0\} \times \mathbb{R}$. A conjugação entre f e
 g é dada por $h(x, y) = (h_1(x), h_2(y))$.

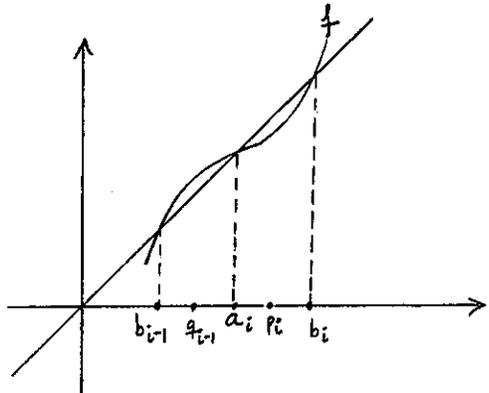
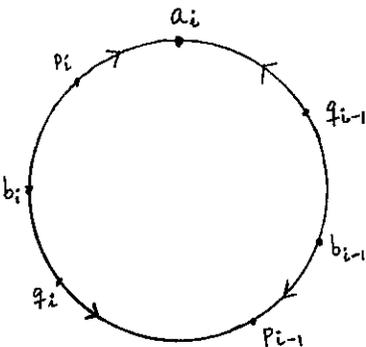
EXEMPLO 8 - As transformações lineares X_1, Y_1 induzidas
no tempo $t = 1$ pelos campos X, Y do Exem-
plo 2 não são conjugadas. Basta ver que Y_1 deixa inva-
riantes círculos concêntricos e isto não ocorre com X_1 .

A partir da conjugação temos naturalmente o con-
ceito de estabilidade estrutural para difeomorfismos.

Assim $f \in \text{Dif}^r(M)$ é estruturalmente estável se existir uma vizinhança \mathcal{V} de f em $\text{Dif}^r(M)$ tal que qualquer $g \in \mathcal{V}$ é conjugado a f .

A identidade é obviamente instável. Também os difeomorfismos induzidos no tempo $t = 1$ pelos campos X dos Exemplos 3, 4 e 5 desta seção são instáveis.

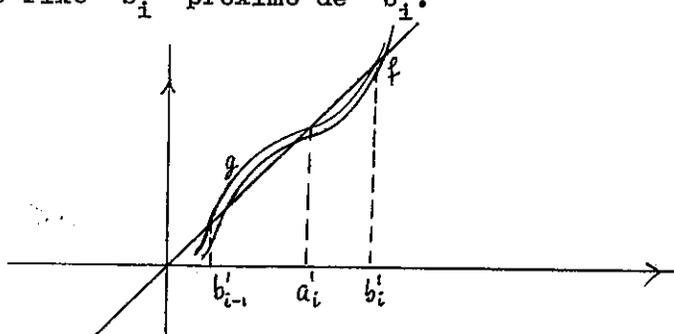
Exemplo 9 - Tomemos um campo $X \in \mathcal{X}^r(S^1)$ que seja estável e exiba singularidades. Como já vimos X possui um número par de singularidades ordenadas em poços e fontes $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_s, b_s$. Escolhemos pontos $p_i \in (a_i, b_i)$ e $q_i \in (b_i, a_{i+1})$. Consideremos agora $f = X_1$ o difeomorfismo induzido por X no tempo $t = 1$. Temos que f é uma contração em $[q_{i-1}, p_i]$ com ponto fixo a_i e f é uma expansão em $[p_i, q_i]$ com ponto fixo b_i .



I.24

Se g está C^r próximo de f então g é uma contração

em $[q_{i-1}, p_i]$ com um único ponto fixo $a_i^!$ próximo de a_i . Também g é uma expansão em $[p_i, q_i]$ com um único ponto fixo b_i próximo de $b_i^!$.



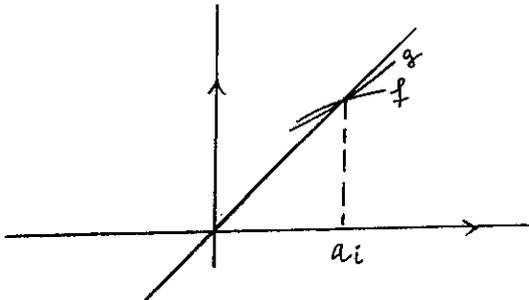
I.25

Colocamos $h(a_i) = a_i^!$, $h(b_i) = b_i^!$, $h(p_i) = p_i$, $h(q_i) = q_i$, $h(f(p_i)) = g(p_i)$ e $h(f(q_i)) = g(q_i)$. Definimos h como um homeomorfismo qualquer dos intervalos $[p_i, f(p_i)]$ em $[p_i, g(p_i)]$ e $[q_i, f(q_i)]$ em $[q_i, g(q_i)]$ e estendemos h a $[a_i, b_i]$ e $[b_{i-1}, a_i]$ como no Exemplo 6.

Ressaltamos que os difeomorfismos estáveis em $\text{Dif}^r(S^1)$ formam um subconjunto aberto e denso. Este resultado, que é bastante delicado, será demonstrado na Seção 4 do Capítulo IV. Observamos também que no exemplo acima partimos de um campo estável em $\mathbb{R}^r(S^1)$ e mostramos que o difeomorfismo induzido por este campo no tempo $t=1$ é estável em $\text{Dif}^r(S^1)$. O exemplo abaixo mostra que a recíproca nem sempre é verdadeira.

EXEMPLO 10 - Considere em S^1 o campo unitário X^0 . Temos que S^1 é uma órbita fechada de X^0 de período 2π . O difeomorfismo $f = X_1$ induzido no tempo $t = 1$ é uma rotação irracional. A órbita $\sigma_f(p)$ de todo ponto $p \in S^1$ é densa. Para ver que f é instável, aproximamos f por $g = X_t^0$, t próximo de um e $\frac{t}{2\pi}$ racional. Toda órbita $\sigma_g(p)$ é periódica e portanto f não é conjugado a g .

Vejamos agora porque definimos conjugação como homeomorfismo em vez de difeomorfismo. Consideremos novamente o difeomorfismo f do Exemplo 9. Como vimos f é estruturalmente estável: se g está C^r próximo de f então existe um homeomorfismo h de S^1 tal que $h \circ f = g \circ h$. Para construir h observamos inicialmente que a cada poço a_i de f temos um poço $a_i^!$ de g próximo de a_i . Idem para as fontes. De maneira natural, colocamos $h(a_i) = a_i^!$. É fácil ver que podemos escolher g próximo de f tal que $a_i^! = a_i$ e $g'(a_i) \neq f'(a_i)$.



Vamos agora supor que h fosse um difeomorfismo. Teríamos $h(a_i) = a_i$ e $h'(a_i) \cdot f'(a_i) = g'(a_i) \cdot h'(a_i)$, o que implica $f'(a_i) = g'(a_i)$ contrariando nossa hipótese.

Assim se exigíssemos que a conjugação fosse um difeomorfismo f não seria estável em $\text{Dif}^r(S^1)$. De maneira análoga podemos concluir que nenhum $f \in \text{Dif}^r(M)$ com ponto fixo ou periódico seria estável. Isto mostra que não devemos impor a condição de diferenciabilidade para a conjugação.

A mesma motivação se aplica à equivalência topológica entre campos de vetores. Embora a demonstração seja mais delicada, também é verdade que nenhum campo com singularidade ou órbita fechada seria estável se exigíssemos diferenciabilidade para a equivalência.

CAPÍTULO II

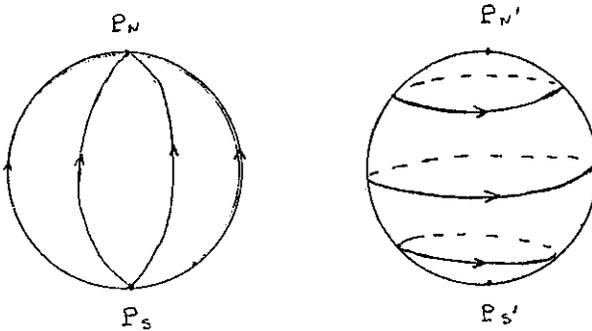
ESTABILIDADE LOCAL

Neste capítulo vamos analisar o comportamento topológico local das órbitas de campos de vetores. Mostraremos que para campos pertencentes a um subconjunto aberto e denso do espaço $\mathfrak{X}^r(M)$ podemos descrever o comportamento das trajetórias na vizinhança de cada ponto da variedade. Além disto, a estrutura local das órbitas não se altera por pequenas perturbações do campo.

§1. Teorema do Fluxo Tubular.

DEFINIÇÃO - Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p, q \in M$. Dizemos que X e Y são topologicamente equivalentes em p e q respectivamente, se existem vizinhanças V_p e W_q e um homeomorfismo $h: V_p \rightarrow W_q$ que leva órbitas de X em órbitas de Y , preservando a orientação das órbitas.

EXEMPLO - Consideremos os seguintes campos X e Y em S^2 :



II.1

X e Y não são equivalentes em P_N, P_N' pois qualquer vizinhança de P_N' contém órbitas fechadas de Y o que não ocorre em vizinhanças de P_N .

DEFINIÇÃO - Sejam $X \in \mathbb{X}^r(M)$ e $p \in M$. Dizemos que X é localmente estável em p se existe uma vizinhança h_X de X em $\mathbb{X}^r(M)$ tal que cada $Y \in h_X$ é topologicamente equivalente a X em p .

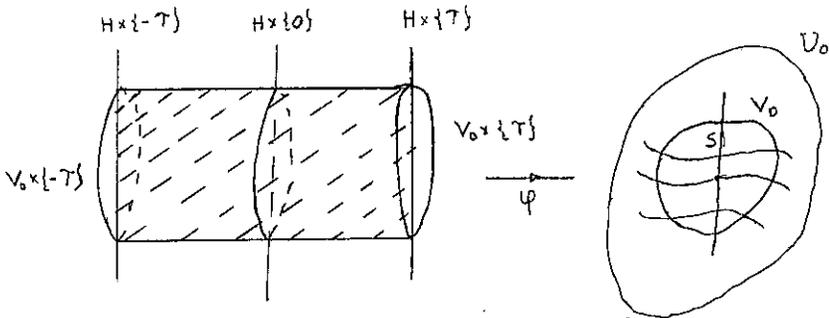
O teorema abaixo descreve o comportamento local das órbitas na vizinhança de um ponto regular.

1.1 TEOREMA (Fluxo Tubular) - Seja $X \in \mathbb{X}^r(M)$ e $p \in M$ um ponto regular de X . Sejam

$C = \{(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m; |x^i| < 1\}$ e X_C um campo em C definido por $X_C(x) = (1, 0, \dots, 0)$. Então existe um difeomorfismo de classe C^r , $h: V_p \rightarrow C$, onde V_p é uma vi-

zinhança de p em M , levando trajetórias de X em trajetórias de X_C .

Demonstração: Seja $x: U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$ uma carta local em torno de p com $x(p) = 0$. Seja x_*X o campo C^r em U_0 induzido por X . Como $X(p) \neq 0$ segue-se $x_*X(0) \neq 0$. Seja $\varphi: [-\tau, \tau] \times V_0 \rightarrow U_0$ o fluxo local de x_*X e seja $H = \{w \in \mathbb{R}^m; \langle w, x_*X(0) \rangle = 0\}$ que é um subespaço isomorfo a \mathbb{R}^{m-1} . Seja $\psi: [-\tau, \tau] \times S \rightarrow U_0$ a restrição de φ a $[-\tau, \tau] \times S$ onde $S = H \cap V_0$.



II.2

Tomemos uma base $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de $\mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^m$, onde $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ e $e_2, \dots, e_m \subset \{0\} \times H$. Segue-se que

$$D\psi(0,0)e_1 = x_*X(0) \quad (\text{definição de fluxo local})$$

$$D\psi(0,0)e_j = e_j, \quad j = 2, \dots, m,$$

uma vez que $\psi(0,y) = y$ para todo $y \in S$.

Logo $D\psi(0,0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da Função Inversa, ψ é um difeomorfismo de uma vizinhança de $(0,0)$ em $[-\tau, \tau] \times S$ sobre uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^m . Portanto, se $\epsilon > 0$ for suficientemente pequeno, $C_\epsilon = \{(t,x) \in \mathbb{R}^n; |t| < \epsilon \text{ e } \|x\| < \epsilon\}$ e $\tilde{\psi}: C_\epsilon \rightarrow U_0$ for a restrição de ψ a C_ϵ , então $\tilde{\psi}$ é um difeomorfismo C^r sobre sua imagem que é um aberto de U_0 . Além disto $\tilde{\psi}$ leva órbitas do campo paralelo X_{C_ϵ} em C_ϵ em órbitas de x_*X . Consideremos o difeomorfismo C^∞ $f: C \rightarrow C_\epsilon$, $f(y) = \epsilon y$ e definimos $h^{-1} = x^{-1} \tilde{\psi} f: C \rightarrow M$. Então $h: x^{-1} \tilde{\psi}(C_\epsilon) \rightarrow C$ é um difeomorfismo C^r que satisfaz as condições do teorema. \square

Observação: O difeomorfismo $\tilde{h}^{-1}: C_\epsilon \rightarrow M$ definido por $\tilde{h}^{-1} = x^{-1} \tilde{\psi}$ leva órbitas do campo unitário paralelo X_{C_ϵ} em órbitas do campo X preservando o parâmetro t .

COROLÁRIO 1 - Se $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p, q \in M$ são pontos regulares de X e Y respectivamente, então X é equivalente a Y em p e q .

COROLÁRIO 2 - Se $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p \in M$ é um ponto regular de X então, X é localmente estável em p .

§2. Campos de Vetores Lineares.

Seja $\mathcal{L}(R^n)$ o espaço vetorial das aplicações lineares de R^n em R^n munido da norma usual:

$$\|L\| = \sup \{ \|Lv\|; \|v\| = 1 \}.$$

Vamos inicialmente recordar alguns resultados básicos de álgebra linear.

Se $L \in \mathcal{L}(R^n)$ e k é um inteiro positivo denotamos por L^k a aplicação linear $L \dots L$. É fácil mostrar, por indução, que $\|L^k\| \leq \|L\|^k$.

Consideremos a seqüência de aplicações lineares

$$E_m = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} L^k \quad \text{onde } L^0 \text{ denota a aplicação identidade.}$$

2.1 LEMA - A seqüência $\{E_m\}$ é convergente.

Demonstração: A seqüência de números reais $S_m = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \|L\|^k$ é de Cauchy convergindo a $e^{\|L\|}$. Por outro lado, $\|E_{m+m'} - E_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{m+m'} \frac{1}{k!} L^k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{m+m'} \frac{1}{k!} \|L\|^k = \|S_{m+m'} - S_m\|$. Isto mostra que $\{E_m\}$ é uma seqüência de Cauchy. Como $\mathcal{L}(R^n)$ é um espaço métrico completo segue-se que a seqüência $\{E_m\}$ é convergente. \square

DEFINIÇÃO - A aplicação $\text{Exp}: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\text{Exp}(L) = e^L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} L^k$$

é chamada aplicação exponencial.

2.2 LEMA - Seja $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ definido por $\alpha(t) = e^{tL}$.
Então α é diferenciável e $\alpha'(t) = Le^{tL}$.

Demonstração: Seja $\alpha_m(t) = I + tL + \frac{t^2}{2!} L^2 + \dots + \frac{t^m}{m!} L^m$.
É claro que α_m é diferencial e $\alpha'_m(t) = L + tL^2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} L^m = L\alpha_{m-1}(t)$. Como $\alpha_{m-1}(t)$ converge uniformemente para e^{tL} segue-se que $\alpha'_m(t) \rightarrow Le^{tL}$, uniformemente. Portanto α é diferenciável e $\alpha'(t) = Le^{tL}$. \square

2.3 PROPOSIÇÃO - Seja L um campo linear de \mathbb{R}^n . Então a aplicação $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi(t, x) = e^{tL}x$ é o fluxo do campo L .

Demonstração: Como a aplicação $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (L, x) \rightarrow Lx$ é bilinear e a aplicação $t \rightarrow e^{tL}$ é diferenciável segue-se da regra da cadeia que φ é diferenciável. Além disto $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = L\varphi(t, x)$ pelo Lema 2.2. Como $\varphi(0, x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ a proposição está demonstrada. \square

Seja \mathbb{C}^n o conjunto das n-uplas de números complexos com a estrutura de espaço vetorial usual. Um ele

mento de \mathbb{C}^n pode ser escrito na forma $u + iv$ com $u, v \in \mathbb{R}^n$. Se $a + ib \in \mathbb{C}$ então $(a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(av + bu)$. Denotemos por $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ o espaço vetorial complexo das aplicações lineares de \mathbb{C}^n em \mathbb{C}^n com a norma usual: $\|L\| = \sup\{\|Lv\|; v \in \mathbb{C}^n \text{ e } \|v\| = 1\}$. Se $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ podemos definir uma aplicação $\tilde{L}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ por $\tilde{L}(u + iv) = L(u) + iL(v)$. É fácil ver que \tilde{L} é \mathbb{C} -linear, isto é, $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$. Seja $\text{Exp}: \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ a aplicação exponencial que é definida do mesmo modo que no caso real. Seja $\mathcal{C}: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ a aplicação que associa a cada operador L o seu complexificado \tilde{L} definido acima. A proposição abaixo segue diretamente das definições.

2.4 PROPOSIÇÃO - A aplicação $\mathcal{C}: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ satisfaz as propriedades seguintes:

- 1) $\mathcal{C}(L+T) = \mathcal{C}(L) + \mathcal{C}(T)$, $\mathcal{C}(\alpha L) = \alpha \mathcal{C}(L)$.
- 2) $\mathcal{C}(L T) = \mathcal{C}(L) \mathcal{C}(T)$
- 3) $\mathcal{C}(\text{Exp } L) = \text{Exp } \mathcal{C}(L)$
- 4) $\|\mathcal{C}(L)\| = \|L\|$

para quaisquer $L, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO - Sejam $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ e $\{e_1, e_2\}$ uma base de \mathbb{R}^2 na qual a matriz de L é da forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

A matriz de $\tilde{L} = C(L)$ na base $\{e_1 + ie_2, e_1 - ie_2\}$ de C^2 é $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ onde $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Logo a matriz de $e^{\tilde{L}}$ nesta base é $\begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda}} \end{pmatrix}$. Por outro lado $C(e^L)(e_1 + ie_2) = e^L e_1 + ie^L e_2 = e^{\tilde{L}}(e_1 + ie_2) = e^{\lambda}(e_1 + ie_2)$. Como $e^{\lambda} = e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta)$ segue-se que $e^L e_1 = e^{\alpha}(\cos \beta e_1 - \sin \beta e_2)$ e $e^L e_2 = e^{\alpha}(\sin \beta e_1 + \cos \beta e_2)$. Portanto a matriz de e^L na base e_1, e_2 é $e^{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$.

2.5 TEOREMA (forma Canônica de Jordan Real) - Se

$L \in \mathcal{L}(R^n)$, existe uma base de R^n na qual

a matriz de L é da forma

$$\left(\begin{array}{ccccccc} A_1 & & & & & & \circ \\ & \dots & & & & & \\ & & A_r & & & & \\ & & & B_1 & & & \\ & \circ & & & \dots & & \\ & & & & & B_s & \\ & & & & & & \circ \end{array} \right)$$

onde

$$A_i = \left(\begin{array}{ccccccc} \lambda_i & & & & & & \circ \\ & 1 & & & & & \\ & & \lambda_i & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \lambda_i & & \\ & & & & & \dots & \\ & \circ & & & & \dots & \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & 1 & \dots & \lambda_i \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, r \\ \lambda_i \in R \end{array}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ & \epsilon & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \epsilon & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad e \quad B_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j & & & & & & & & & \\ & -\beta_j & \alpha_j & & & & & & & & \\ & & \epsilon & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & \\ & & & & \epsilon & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \epsilon & & & & \\ & & & & & & & \epsilon & & & \\ & & & & & & & & \alpha_j & & \beta_j \\ & & & & & & & & & \epsilon & \\ & & & & & & & & & & 0 & \epsilon & -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

2.6 LEMA - Se $A, B \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ são tais que $AB = BA$ então

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Demonstração: Seja $S_m(t) = I + tA + \dots + \frac{t^m}{m!} A^m$. Como
 $AB = BA$ segue-se que $A^k B = BA^k$ e portan-
 to $S_m(t)B = BS_m(t)$. Como $S_m(t) \rightarrow e^{tA}$ temos que
 $e^{tA} B = B e^{tA}$. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e consideremos as curvas
 $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = e^{t(A+B)} x$, $\beta(t) = e^{tA} e^{tB} x$. Pelo
 Lema 2.2 temos que $\alpha'(t) = (A+B)e^{t(A+B)} x = (A+B)\alpha(t)$ e
 $\beta'(t) = A e^{tA} e^{tB} x + e^{tA} B e^{tB} x = A e^{tA} e^{tB} x + B e^{tA} e^{tB} x =$
 $= (A+B)\beta(t)$ uma vez que $e^{tA} B = B e^{tA}$. Portanto α e β
 são curvas integrais do campo linear $A+B$ satisfazendo
 a mesma condição nicial $\alpha(0) = \beta(0) = x$. Pelo teorema
 de unicidade temos que $\alpha(t) = \beta(t)$ para todo t . Em
 particular $e^{(A+B)} x = e^A e^B x$. Como esta igualdade se ve-
 rifica para todo $x \in \mathbb{R}^n$ resulta que $e^{A+B} = e^A e^B$. \square

Se $L \in \mathcal{L}(R^n)$ então o espectro de \tilde{L} , isto é, o conjunto de autovalores de \tilde{L} , é denominado o espectro complexo de L e coincide com o conjunto das raízes do polinômio característico de L . A forma canônica de Jordan do operador complexificado \tilde{L} é representada por

$$\left(\begin{array}{ccc} A_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & A_r \end{array} \right) \quad \text{onde } A_i = \left(\begin{array}{ccc} \lambda_i & & \bigcirc \\ 1 & \ddots & \\ \bigcirc & & 1 & \lambda_i \end{array} \right)$$

e os λ_i são os autovalores de \tilde{L} .

Observemos que uma matriz complexa triangular tem para valores próprios os elementos da diagonal com multiplicidade igual ao número de vezes que aparecem.

2.7 PROPOSIÇÃO - Se $L \in \mathcal{L}(R^n)$ e λ é um autovalor de \tilde{L} então e^λ é um autovalor de e^L de mesma multiplicidade.

Demonstração: Consideremos uma matriz $m \times m$,

$$A = \left(\begin{array}{ccc} \lambda & & \bigcirc \\ 1 & \lambda & \\ \bigcirc & & 1 & \lambda \end{array} \right)$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$. Temos $A = D+N$ onde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \quad e \quad N = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 1 & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

É fácil ver que $N^m = 0$ e que $ND = DN$. Pelo Lema 2.6 temos que $e^A = e^D e^N$. Ora, $e^N = I + N + \frac{N^2}{2!} + \dots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!}$ pois $N^k = 0$ se $k \geq m$. Logo

$$e^N = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & 1/2 & & & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & & \ddots & \\ 1/(n-1)! & \dots & 1/2 & & & 1 & & & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad e^D = \begin{pmatrix} e^\lambda & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & e^\lambda \end{pmatrix}$$

Logo

$$e^A = e^D e^N = e^\lambda e^N = \begin{pmatrix} e^\lambda & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & e^\lambda \end{pmatrix}$$

Portanto e^A é uma matriz triangular com todos os elementos da diagonal iguais a e^λ . Logo e^λ é um autovalor de e^A de multiplicidade m .

Seja agora $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema da Forma Canônica de Jordan a matriz de \tilde{L} em uma base β de \mathbb{C}^n é da forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_r \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

É fácil ver que

$$A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & & \circ \\ & \ddots & \\ \circ & & A_r^k \end{pmatrix}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e portanto

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & & \circ \\ & \ddots & \\ \circ & & e^{A_r} \end{pmatrix}$$

Isto mostra que os autovalores de e^A são exatamente

$e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_r}$ onde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são os autovalores de A .

Ora, $e^{\tilde{L}} = (\tilde{e^L})$ se expressa na base β de \mathbb{C}^n como e^A o que mostra que $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_r}$ são os autovalores do operador complexificado de e^L . \square

DEFINIÇÃO - Um campo linear $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é hiperbólico se o espectro de L é disjunto do eixo imaginário. O número de autovalores de L com parte real negativa é denominado o índice de L .

Observe que um campo linear hiperbólico só possui uma singularidade que é a origem.

2.8 PROPOSIÇÃO - Se $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é um campo hiperbólico então existe uma única decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, onde E^s e E^u são subespaços invariantes por L e pelo fluxo associado a L tais

que os autovalores de $L^S = L/E^S$ tem parte real negativa e os autovalores de $L^u = L/E^u$ tem parte real positiva.

Demonstração: Seja e_1, \dots, e_n uma base de R^n na qual a matriz de L está na forma canônica de Jordan. Ordenando convenientemente os elementos desta base, a matriz de L é da forma:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} A_1 & & & & & & \\ & \dots & & & & & \\ & & A_{s'} & & & & \\ & & & B_1 & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & B_{s''} & \\ & & & & & & C_1 & \\ & & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & & C_{u'} & \\ & & & & & & & & & D_1 & \\ & & & & & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & & & & & D_{u''} \end{array} \right)$$

onde $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ com $\lambda_i < 0$

$B_j = \begin{pmatrix} M_j & & & \\ & I & & \\ & & \dots & \\ & & & M_j & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & I & \\ & & & & & & M_j \end{pmatrix}$ com $M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$ e $\alpha_j < 0$
 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$C_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & \circ \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & \circ & & 1 & & \lambda_k \end{pmatrix} \text{ com } \lambda_k > 0$$

$$D_l = \begin{pmatrix} M_l & & & \circ \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & \circ & & 1 & & M_l \end{pmatrix} \text{ com } \begin{matrix} M_l = \begin{pmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{pmatrix} \alpha_l > 0 \\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Seja E^S o subespaço gerado por e_1, \dots, e_s onde e_1, \dots, e_s correspondem aos subespaços invariantes associados a $A_1, \dots, A_{s'}, B_1, \dots, B_{s''}$. Seja E^u o subespaço gerado por e_{s+1}, \dots, e_n . É claro que E^S e E^u são invariantes por L e que a matriz de L^S na base $\{e_1, \dots, e_s\}$ é

$$\begin{pmatrix} A_1 \dots A_{s'} & & \circ \\ & & \\ & \circ & B_1 \dots B_{s''} \end{pmatrix}$$

enquanto que a matriz de L^u na base $\{e_{s+1}, \dots, e_m\}$

$$\begin{pmatrix} C_1 \dots C_u & & \circ \\ & & \\ & \circ & D_1 \dots D_{u''} \end{pmatrix}$$

o que conclui a demonstração. \square

Seja $L \in \mathcal{L}(R^n)$ um campo hiperbólico. Se L_t denota o fluxo de L então $L_1 = e^L$ e como L não possui autovalor no eixo imaginário segue-se da Proposição 2.7 que L_1 não possui autovalor no círculo unitário S^1 . Isto motiva a seguinte definição

DEFINIÇÃO - Um isomorfismo linear $A \in GL(R^n)$ é hiperbólico se o espectro de A é disjunto do círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}$. Em particular o difeomorfismo induzido no tempo 1 pelo fluxo de um campo linear hiperbólico é um isomorfismo hiperbólico.

2.9 PROPOSIÇÃO - Se $A \in GL(R^n)$ é um isomorfismo hiperbólico então existe uma decomposição $R^n = E^s \oplus E^u$ tal que E^s e E^u são invariantes por A e os autovalores de $A^s = A|_{E^s}$ e $A^u = A|_{E^u}$ são os autovalores de A de módulo menor que 1 e maior que 1 respectivamente.

Demonstração: Análoga a da Proposição 2.8.

2.10 PROPOSIÇÃO - Se $A \in GL(R^n)$ é um isomorfismo hiperbólico então existe uma norma $\|\cdot\|_1$ em R^n tal que $\|A^s\|_1 < 1$ e $\|(A^u)^{-1}\|_1 < 1$, isto é, A^s é uma contração e A^u é uma expansão.

Demonstração: Consideremos a forma canônica de $A^s = A|_{E^s}$.

É fácil ver que $\|A_0\| = \max\{|\lambda_i|, \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}\}$. Logo $\|A_0\| < 1$. Como a aplicação $t \rightarrow A(t) \rightarrow \|A(t)\|$ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < t < \delta$ então $\|A(t)\| < 1$ o que demonstra o lema.

Seja agora $\delta > 0$ obtido no lema acima. Pelo Corolário do Teorema 2.5 existe uma base e_1, \dots, e_s de E^S na qual a matriz de A^S é $M(\epsilon)$. Definimos em E^S um novo produto interno tal que $\langle e_i, e_j \rangle_1 = \delta_{ij}$ onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 se $i \neq j$. Seja $\|\cdot\|_1$ a norma associada a $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Como a base e_1, \dots, e_s é ortonormal na nova métrica temos pelo lema que $\|A^S\|_1 < 1$. Analogamente mudamos a norma de E^u de modo que $\|(A^u)^{-1}\|_1 < 1$. Definimos agora uma norma $\|\cdot\|_1$ em R^n por $\|v\|_1 = \max\{\|v^S\|_1, \|v^u\|_1\}$ onde v^S e v^u são as componentes de v em E^S e E^u respectivamente. É claro que esta norma satisfaz as condições da proposição. \square

COROLÁRIO - Se L é um campo linear hiperbólico e

$R^n = E^S \oplus E^u$ é a decomposição da Proposição 2.8 então se $x \in E^S$, $L_t(x)$ converge para a origem quando $t \rightarrow +\infty$ e se $x \in E^u$, $L_t(x)$ converge para a origem quando $t \rightarrow -\infty$.

Demonstração: Seja $x \in E^S$. Basta mostrar que $L_n(x) \rightarrow 0$

quando $n \in \mathbb{N}$ e $n \rightarrow \infty$. Com efeito se $t \in [0,1]$ temos que, pela continuidade de L_t , dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_t > 0$ tal que se $\|y\| < \delta_t$ então $\|L_t(y)\| < \epsilon$. Como $[0,1]$ é compacto, existe $\delta > 0$ tal que se $\|y\| < \delta$ então $\|L_t(y)\| < \epsilon$ para todo $t \in [0,1]$. Se $L_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|L_n(x)\| < \delta$ se $n \geq n_0$. Se $t > n_0$ então $t = n+s$ com $n \geq n_0$ e $s \in [0,1]$. Logo $\|L_t x\| = \|L_s L_n(x)\| < \epsilon$. Portanto basta mostrar que $L_n(x) = L_1^n x$ converge a 0. Pela proposição acima, existe uma métrica de E^S segundo a qual L_1 é uma contração, isto é, $\|L_1\| < 1$. Portanto $\|L_1^n x\| \leq \|L_1^n\| \|x\| \leq \|L_1\|^n \|x\|$. Como $\|L_1\|^n \rightarrow 0$ segue-se que $\|L_1^n x\| \rightarrow 0$ como queríamos mostrar. \square

2.11 PROPOSIÇÃO - O conjunto $H(\mathbb{R}^n)$ dos isomorfismos hiperbólicos de \mathbb{R}^n é aberto e denso em $GL(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: a) Abertura. Seja $A \in H(\mathbb{R}^n)$. Mostremos que existe $\delta > 0$ tal que se $\|A-B\| < \delta$ então $B \in H(\mathbb{R}^n)$. Seja $\lambda \in S^1$. Como λ não é autovalor de \tilde{A} , $\det(\tilde{A}-\lambda I) \neq 0$ onde I é a identidade de \mathbb{C}^n . Como $\det: \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação contínua, existem $\delta_\lambda > 0$ e uma vizinhança V_λ de λ em \mathbb{C} tal que se $\|B-A\| < \delta_\lambda$ e $\mu \in V_\lambda$ então $\det(\tilde{B}-\mu I) \neq 0$. Considere-

mos a cobertura $\{V_\lambda, \lambda \in S^1\}$ de S^1 e seja $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_n}$ uma subcobertura finita. Seja $\delta = \min\{\delta_{\lambda_1}, \dots, \delta_{\lambda_n}\}$. Se $\|B-A\| < \delta$ e $\mu \in S^1$ então $\mu \in V_{\lambda_j}$ para algum j e portanto $\det(\bar{B}-\mu I) \neq 0$. Logo $B \in H(\mathbb{R}^n)$ como queríamos demonstrar.

b) Densidade. Sejam $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os seus autovalores. É fácil ver que se $\mu \in \mathbb{R}$, os autovalores de $A + \mu I$ são $\lambda_1 + \mu, \dots, \lambda_n + \mu$.

Sejam $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}$ os autovalores de A que não pertencem a S^1 . Consideremos os seguintes números

$$\delta_1 = \min\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$$

$$\delta_2 = \min\{|1 - |\lambda_{i_1}||, \dots, |1 - |\lambda_{i_r}||\}$$

$$\delta_3 = \min\{|\alpha|; \alpha + \beta i \text{ é autovalor de } A \text{ com } \alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ e } \alpha \neq 0\}.$$

É claro que $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ e $\delta_3 > 0$. Se $\mu < \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ e λ é autovalor de A então $\lambda + \mu \notin S^1$ e portanto $B = A + \mu I$ é hiperbólico. Dado $\epsilon > 0$ tomemos $\mu < \epsilon$ e $\mu < \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ então B é hiperbólico e $\|B-A\| = \|\mu I\| < \epsilon$. Isto mostra que $H(\mathbb{R}^n)$ é denso em $GL(\mathbb{R}^n)$. \square

2.12 PROPOSIÇÃO - O conjunto $\mathfrak{H}(\mathbb{R}^n)$ dos campos lineares hiperbólicos de \mathbb{R}^n é aberto e denso

fismo $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $hL_t = T_t h$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ normas em \mathbb{R}^n tais que as esferas $S_1^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n, \|v\|_1 = 1\}$ e $S_2^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n, \|v\|_2 = 1\}$ sejam transversais aos campos L e T respectivamente. Se $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ então a órbita de x intersecta S_1^{n-1} em um único ponto. De fato, pelo corolário da Proposição 2.10 temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} L_t(x) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|L_{-t}(x)\| = \infty$. Portanto a órbita de x intersecta S_1^{n-1} . Como L é transversal a S_1^{n-1} segue-se que $\Theta(x) \cap S_1^{n-1}$ é um único ponto.

Seja $h: S_1^{n-1} \rightarrow S_2^{n-1}$ um homeomorfismo qualquer (por exemplo podemos definir $h(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$). Vamos estender h a \mathbb{R}^n . Para isto definimos $h(0) = 0$. Se $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ temos que existe um único $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $L_{-t_0}(x) \in S_1^{n-1}$. Definimos então $h(x) = T_{t_0} h(L_{-t_0}(x))$. É fácil ver que $hL_t = T_t h$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e que h tem uma inversa. Resta mostrar que h é contínua.

Seja $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e (x_m) uma seqüência convergindo a x . Sejam $t_m \in \mathbb{R}$ tal que $L_{-t_m}(x_m) \in S_1^{n-1}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $L_{-t_0}(x) \in S_1^{n-1}$. Como o fluxo é contínuo segue-se que $t_m \rightarrow t_0$ e $L_{-t_m}(x_m) \rightarrow L_{-t_0}(x)$. Logo $h(x_m) = T_{t_m} hL_{-t_m}(x_m)$ converge para $T_{t_0} hL_{-t_0}(x) = h(x)$ o que mostra a continuidade de h em x . Vamos mostrar

que h é contínua na origem. Pela Proposição 2.10 e pela compacidade de S_2^{n-1} segue-se que dado $\epsilon > 0$ existe $t_\epsilon > 0$ tal que $\|T_t(y)\| < \epsilon$ para todo $t > t_\epsilon$. Por outro lado como $L(0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\| < \delta$ e $L_{-t}(x) \in S_1^{n-1}$ então $t > t_\epsilon$. Portanto, se $\|x\| < \delta$ então $\|h(x)\| < \epsilon$ o que mostra a continuidade de h . Analogamente mostramos que h^{-1} é contínua. \square

2.15 PROPOSIÇÃO - Sejam L e T campos lineares hiperbólicos. Então L e T são topologicamente equivalentes se e somente se tem o mesmo índice.

Demonstração: Suponhamos que L e T tenham o mesmo índice. Sejam $E^S, E^{S'}$ os subespaços estáveis de L e T respectivamente. Então $\dim E^S = \dim E^{S'}$. Pela Proposição 2.14 existe um homeomorfismo $h_s: E^S \rightarrow E^{S'}$ conjugando L^S e T^S , isto é, $h_s L_t^S = T_t^S h_s$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Analogamente existe um homeomorfismo $h_u: E^U \rightarrow E^{U'}$ conjugando L^U e T^U . Definimos $h: E^S \oplus E^U \rightarrow E^{S'} \oplus E^{U'}$ por $h(x^S + x^U) = h_s(x^S) + h_u(x^U)$. É fácil ver que h é um homeomorfismo e conjugua L_t e T_t . Reciprocamente seja h uma equivalência topológica entre L e T . Como 0 é a única singularidade de L e T devemos ter $h(0) = 0$. Se $x \in E^S$ temos que $\omega(x) = 0$. Como uma equivalência topológica preserva o ω -limite de órbitas temos que

$\omega(h(x)) = h(\omega(x)) = 0$. Portanto $h(x) \in E^{S'}$. Logo $h(E^S) \subset E^{S'}$. Analogamente $h^{-1}(E^{S'}) \subset E^S$. Consequentemente h/E^S é um homeomorfismo entre E^S e $E^{S'}$. Por um teorema de topologia (Teorema da Invariância do Domínio) segue-se que $\dim E^S = \dim E^{S'}$ o que prova a proposição. \square

Vamos mostrar que os autovalores de um operador dependem continuamente do operador. Se $L \in \mathcal{L}(R^n)$ denotaremos por $\text{Esp}(L)$ o conjunto de seus autovalores. O lema abaixo mostra que $\text{Esp}(L)$ não explode por uma pequena perturbação de L .

2.16 LEMA - Seja $L \in \mathcal{L}(R^n)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $T \in \mathcal{L}(R^n)$ e $\|T-L\| < \delta$ então para cada $\bar{\lambda} \in \text{Esp}(T)$ existe $\lambda \in \text{Esp}(L)$ com $|\lambda - \bar{\lambda}| < \epsilon$.

Demonstração: Se $\lambda \in \text{Esp}(L)$ então λ é um autovalor do operador complexificado \tilde{L} . Portanto

$|\lambda| \leq \|\tilde{L}\| = \|L\|$. Logo, se $\|T-L\| < 1$, o espectro de T está contido no interior do disco D de centro na origem de \mathbb{C} e raio $1 + \|L\|$. Seja V_ϵ a união das bolas de raio ϵ e centro nos elementos de $\text{Esp}(L)$. Seja $\mu \in D - V_\epsilon$ então $\det(\tilde{L} - \mu I) \neq 0$. Por continuidade do determinante existe uma vizinhança U_μ de μ em \mathbb{C} e $\delta_\mu > 0$ tal que se $\|T-L\| < \delta_\mu$ e $\bar{\mu} \in U_\mu$ então $\det(\tilde{T} - \bar{\mu} I) \neq 0$.

Portanto $\bar{\mu} \notin \text{Esp}(\tilde{T})$. Pela compacidade de $D-V_\epsilon$ concluímos que existe $\delta > 0$ tal que se $\|T-L\| < \delta$ e $\mu \in D-V_\epsilon$ então $\det(T - \mu I) \neq 0$. Como $\text{Esp}(T) \subset D$ segue-se que $\text{Esp}(T) \subset V_\epsilon$ o que demonstra o lema. \square

Se os autovalores de L são todos distintos segue-se do Lema 2.16 que eles variam continuamente com o operador. Seja λ um autovalor de L de multiplicidade m e $E(L, \lambda) \subset \mathbb{C}^n$ o núcleo de $(\tilde{L} - \lambda I)^m$. Então $E(L, \lambda)$ é um subespaço de dimensão m . Além disto se $k \geq m$ então Núcleo $(\tilde{L} - \lambda I)^k = E(L, \lambda)$.

2.17 LEMA - Se λ é um autovalor de $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de multiplicidade m então existe $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que se $\|T-L\| < \delta$, a soma das multiplicidades dos autovalores de T contidos na bola de raio ϵ e centro λ é no máximo igual a m .

Demonstração: Suponhamos por absurdo que para todo $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ exista $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ com $\|T-L\| < \delta$ tal que o número de autovalores de T , contados com a respectiva multiplicidade, contidos na bola de raio ϵ em torno de λ é maior que m . Existe portanto $m' > m$ e uma seqüência de operadores $L_k \rightarrow L$ tal que $\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_{m'}}$ são autovalores de L_k que convergem para

λ . Seja E_k o núcleo de $(\tilde{L}_k - \lambda_{k_1} I) \dots (\tilde{L}_k - \lambda_{k_m} I)$. Podemos supor que a dimensão de E_k seja igual a m' . Seja $e_1^k, \dots, e_{m'}^k$ uma base ortonormal de E_k . Como $\|e_j^k\| = 1$ e a esfera unitária em C^n é compacta podemos, tomando uma subsequência se necessário, supor que $e_j^k \rightarrow e_j$. É claro que os vetores $e_1, \dots, e_{m'}$ são ortonormais e portanto geram um subespaço \tilde{E} de dimensão m' . Como o operador $(\tilde{L}_k - \lambda_{k_1} I) \dots (\tilde{L}_k - \lambda_{k_m} I)$ converge para $(\tilde{L} - \lambda I)^{m'}$ temos, por continuidade, que $\text{Núcleo}(\tilde{L} - \lambda I)^{m'} \supset \tilde{E}$ o que é absurdo pois $\text{Núcleo}(\tilde{L} - \lambda I)^{m'}$ tem dimensão $m < m'$.

2.18 PROPOSIÇÃO - Os autovalores de um operador $L \in \mathcal{L}(R^n)$ dependem continuamente de L .

Demonstração: Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os autovalores distintos de L com multiplicidade n_1, \dots, n_k . Pelo Lema 2.16, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|T - L\| < \delta$ então os autovalores de T estão contidos nas bolas de raio ϵ e centro nos λ_j . Resta mostrar que a soma das multiplicidades dos autovalores de T contidos na bola de centro λ_j é exatamente n_j . Pelo Lema 2.17 esta soma é menor ou igual a n_j . Se para algum j esta soma for estritamente menor que n_j então a soma das multiplicidade de todos os autovalores de T será estritamente menor que $\sum_{j=1}^k n_j = n$, o que é absurdo. \square

COROLÁRIO - Se $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é um campo hiperbólico então existe uma vizinhança $V \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de L tal que todo $T \in V$ tem o mesmo índice que L .

2.19 PROPOSIÇÃO - Um campo linear hiperbólico é estruturalmente estável no espaço dos campos lineares.

Demonstração: Segue imediatamente do corolário acima e da Proposição 2.15. \square

2.20 PROPOSIÇÃO - Seja L um campo linear estruturalmente estável. Então L é hiperbólico.

Demonstração: Seja L um campo linear não hiperbólico e $\delta = \min\{|\alpha|; \alpha + i\beta \text{ é autovalor de } L \text{ e } \alpha \neq 0\}$. Se $0 < t < \delta$ então $L + tI$ e $L - tI$ são campos hiperbólicos de índices diferentes e portanto não podem ser topologicamente equivalentes. Isto mostra que em qualquer vizinhança de L existem dois campos que não são topologicamente equivalentes. Logo L não é estruturalmente estável.

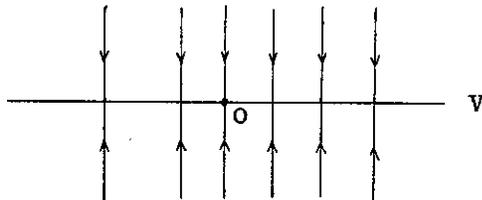
Resumindo os resultados acima temos que um campo linear é estruturalmente estável no espaço de campos lineares se e somente se é hiperbólico. Além disto os campos lineares estruturalmente estáveis constituem um subconjunto aberto e denso de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

§3. Singularidades e Pontos Fixos Hiperbólicos.

Nesta seção vamos definir um subconjunto $\zeta \subset \mathbb{R}^X(M)$ tal que todo $X \in \zeta$ tenha uma estrutura local de órbitas estável e suficientemente simples para que possamos classificá-la.

O exemplo abaixo mostra que um campo de vetores pode exibir, na vizinhança de uma singularidade, uma estrutura de órbitas extremamente complicada.

EXEMPLO - Se L é um campo linear em \mathbb{R}^2 com um autovalor nulo, existe um subespaço de dimensão 1, $V \subset \mathbb{R}^2$, constituindo uma singularidade de L . Seja L o campo cuja matriz na base canônica é $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Neste



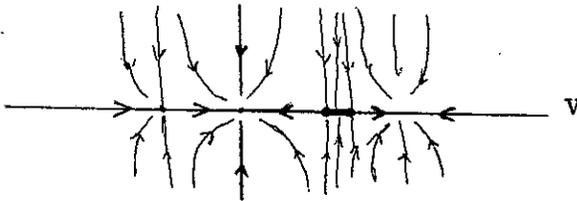
II.3

caso $V = \{(t,0); t \in \mathbb{R}\}$.

Vamos mostrar que arbitrariamente próximo de L existe um conjunto não enumerável \mathfrak{M} de campos de vetores tal que se $X, Z \in \mathfrak{M}$ então X não é localmente equi

valente a Z na origem.

Seja Y o campo constante $Y = (1,0)$. Seja $K \subset \mathbb{R}$ um subconjunto compacto. Sabe-se que existe uma função C^∞ limitada, $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que se anula exatamente em K . Podemos também supor que as r primeiras derivadas de ρ são limitadas. Dado $\epsilon > 0$ escolhamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|\frac{1}{n} \rho\|_r < \epsilon$. Seja $Z = L + \frac{1}{n} \rho Y$. Temos então $\|Z-L\|_r < \epsilon$ e o conjunto das singularidades de Z é K . Assim, se K e K' são dois compactos não homeomorfos



II.4

concluimos que os campos Z e Z' construídos como acima não são topologicamente equivalentes. Teremos então pelo menos tantas classes de equivalência de campos de vetores quanto as classes de subconjuntos compactos de \mathbb{R} módulo homeomorfismo.

Este exemplo motiva a seguinte definição.

DEFINIÇÃO - Dizemos que $p \in M$ é uma singularidade simples de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ se $DX_p: TM_p \rightarrow TM_p$

não possui autovalor nulo.

3.1 PROPOSIÇÃO - Seja $X \in \mathbb{R}^r(M)$ e $p \in M$ uma singularidade simples de X . Então existem vizinhanças $h(X) \subset \mathbb{R}^r(M)$, $U_p \subset M$ de X e p respectivamente, e uma função contínua $\rho: h(X) \rightarrow U_p$ que a cada campo $Y \in h(X)$ associa a única singularidade de Y em U_p . Em particular uma singularidade simples é isolada.

Demonstração: Utilizaremos o Teorema das Funções Implícitas em espaços de Banach. Como o problema é local podemos, utilizando uma carta local, supor que $M = \mathbb{R}^m$, $p = 0$ e portanto que X é um campo em $\mathbb{R}^r(D^m)$ onde $D^m = \{x \in \mathbb{R}^m, \|x\| \leq 1\}$. Temos então que $\mathbb{R}^r = \mathbb{R}^r(D^m)$ é um espaço de Banach e que a aplicação $\varphi: D^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow D^m$ $\varphi(x, Y) = Y(x)$ é de classe C^r . Temos que $\varphi(0, X) = 0$ e, por hipótese, $D_1\varphi(0, X) = DX(0): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. Pelo Teorema das Funções Implícitas, existem vizinhanças U de 0 , h de X e uma única função $\rho: h \rightarrow U$ de classe C^r tal que $\varphi(\rho(Y), Y) = 0$. Portanto se $x \in U$ então $Y(x) = 0$ se e somente se $x = \rho(Y)$. Além disto, como $DX(0)$ é um isomorfismo e o conjunto dos isomorfismos é aberto, podemos, diminuindo h e U se necessário, supor que $DY_{\rho(Y)}$ é um isomorfismo e portanto que $\rho(Y)$ é singularidade simples de Y .

Vamos agora caracterizar uma singularidade simples de um campo de vetores X em M , em termos de transversalidade. Para isto consideremos o fibrado tangente $TM = \{(p,v); p \in M, v \in TM_p\}$ e seja $M_0 = \{(p,0), p \in M\}$ a seção nula. M_0 é uma subvariedade de TM difeomorfa a M e um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ pode ser visto como uma aplicação C^r de M em TM que denotaremos pela mesma letra X . Portanto p é singularidade de X se e somente se $X(p) \in M_0$.

3.2 PROPOSIÇÃO - Seja X um campo de vetores C^r ($r \geq 1$) em uma variedade M e $p_0 \in M$ uma singularidade de X . Então p_0 é singularidade simples de X se e somente se a aplicação $p \rightarrow (p, X(p))$ de M em TM , é transversal à seção nula M_0 em p_0 .

Demonstração: Seja $x: U \rightarrow R^m$ uma carta local com

$$x(p_0) = 0. \text{ Seja } TU = \{(p,v) \in TM, p \in U\}.$$

A aplicação $Tx: TU \rightarrow R^m \times R^m$ definida por $Tx(p,v) = (x(p), D_x p(v))$ é uma carta local de TM .

Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & TU \\ & \nearrow X & \downarrow Tx \\ U & & R^m \times R^m \xrightarrow{\pi_2} R^m \end{array}$$

onde π_2 é a projeção $\pi_2(x,y) = y$.

Consideremos a aplicação $h = \pi_2 \circ \tau_X$. Então X é transversal a M_0 em p_0 se e somente se p_0 é ponto regular de h , isto é, se $Dh_{p_0}: TM_{p_0} \rightarrow R^m$ é isomorfismo. Por outro lado, $Dh_{p_0} = D\tau_{p_0} \circ DX_{p_0}$. Portanto, Dh_{p_0} é isomorfismo se e somente se DX_{p_0} for um isomorfismo o que demonstra a proposição. \square

Seja $\mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{X}^r(M)$ o conjunto dos campos de vetores cujas singularidades são todas simples, isto é, $\mathcal{Q}_0 = \{X \in \mathcal{X}^r(M); X: M \rightarrow TM \text{ é transversal a } M_0\}$. Como uma singularidade simples é isolada e M é compacta segue-se que se $X \in \mathcal{Q}_0$ então X tem um número finito de singularidades.

3.3 PROPOSIÇÃO - \mathcal{Q}_0 é aberto e denso em $\mathcal{X}^r(M)$.

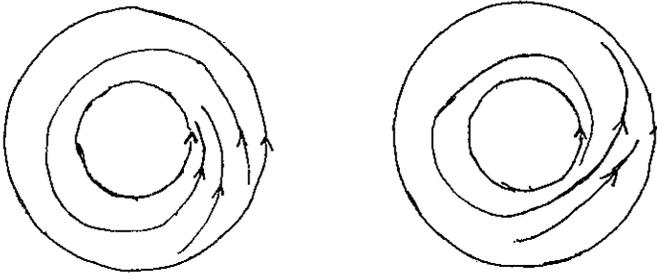
Demonstração: a) Abertura. Como o conjunto das aplicações C^r de M em TM transversais a M_0 é aberto concluímos que \mathcal{Q}_0 é aberto.

b) Densidade. Seja $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Pelo Teorema de Transversalidade de Thom, existem aplicações $Y: M \rightarrow TM$ transversais a M_0 arbitrariamente próximos de X . Pode ocorrer entretanto que Y não seja um campo de vetores, pois, se denotamos por $\pi: TM \rightarrow M$ a aplica-

ção $(p,v) \rightarrow p$, pode ocorrer que $\pi(Y(p)) \neq p$ para algum $p \in M$. Ora, $\pi X = \text{id}_M$ e se Y estiver suficientemente próximo de X então $\varphi = \pi Y$ estará próximo de id_M e portanto será um difeomorfismo uma vez que o conjunto de difeomorfismos de M é aberto em $C^r(M,M)$. Seja então $Z = Y \varphi^{-1}$. Temos $\pi Z = \pi Y \varphi^{-1} = \varphi \varphi^{-1} = \text{id}_M$ e portanto Z é um campo de vetores em M . Como Y é transversal a M_0 e φ^{-1} é um difeomorfismo segue-se que Z é transversal a M_0 . Tomando Y próximo a X , Z estará próximo a X .

EXEMPLO - Neste exemplo vamos considerar um campo linear em R^2 com uma singularidade simples e mostrar que uma perturbação não linear pode conduzir a um campo com estrutura de órbitas extremamente complicada. Consideremos o campo $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Seja $\rho: R \rightarrow R$ uma função C^∞ tal que $\rho(0) = 0$ e $\rho^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in N$. Seja X o campo em R^2 definido por $X(x,y) = (y + \rho(r^2)x, -x + \rho(r^2)y)$ onde $r^2 = x^2 + y^2$. É fácil ver que X é C^∞ e que $DX(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Logo $(0,0)$ é uma singularidade simples de X . Seja K um compacto de R^+ contendo 0 . Podemos escolher ρ de tal forma que $\rho(K) = 0$ e $\rho/I-K \neq 0$ onde $I = (-\delta, \delta)$ é um intervalo contendo K . Dado $\epsilon > 0$ e $r > 0$ podemos es-

colher ρ de tal forma que $\|X-L\|_r < \epsilon$. Se $r_0 \in \mathbb{R}^+$ é tal que $\rho(r_0^2) = 0$ temos que o campo X é tangente ao círculo r_0 e portanto este círculo é uma órbita fechada de X . Por outro lado, se $(a,b) \subset \mathbb{R}^+$ é um intervalo tal que $\rho(t^2) > 0$ para $t \in (a,b)$ e $\rho(a^2) = \rho(b^2) = 0$, então as órbitas de X por pontos do anel $D_b - \bar{D}_a$ ($D_b = \{z \in \mathbb{R}^2; \|z\| < b\}$) não são fechadas e de fato são espirais cujo α -limite é o círculo de raio a e cujo ω -limite é o círculo de raio b . Para verificar este fato basta observar que $\langle (x,y), X(x,y) \rangle = r^2 \rho(r^2)$. Logo a componente radial de X é $r \rho(r^2)$ que é positiva pois $r^2 \in (a,b)$.



II.5

Analogamente, num intervalo (a,b) tal que $\rho(a^2) = \rho(b^2) = 0$ e $\rho(t^2) < 0$ para $t \in (a,b)$, as órbitas no anel $D_b - \bar{D}_a$ terão como α -limite o círculo de raio b e como ω -limite o círculo de raio a . Vide figuras acima.

Esta construção conduz a um campo X arbitrariamente próximo de L cujas órbitas fechadas intersectam o eixo dos x precisamente em pontos do compacto $\{r \in \mathbb{R}^+; r^2 \in K\}$ que é homeomorfo a K . Se K e K' são dois compactos não homeomorfos e X e X' são os campos associados aos mesmos pela construção acima, segue-se que X e X' não são topologicamente equivalentes.

DEFINIÇÃO - Seja $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p \in M$ uma singularidade de X . Dizemos que p é uma singularidade hiperbólica se $DX_p: TM_p \rightarrow TM_p$ for um campo linear hiperbólico, isto é, DX_p não tem autovalor no eixo imaginário.

Seja $\mathcal{Q}_1 \subset \mathfrak{X}^r(M)$ o conjunto de campos de vetores cujas singularidades são todas hiperbólicas. É claro que $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}_0$.

3.4 TEOREMA - \mathcal{Q}_1 é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M)$.

Demonstração: Como \mathcal{Q}_0 é aberto e denso em $\mathfrak{X}^r(M)$ e $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}_0$, basta mostrar que \mathcal{Q}_1 é aberto e denso em \mathcal{Q}_0 . Seja $X \in \mathcal{Q}_0$ e $p_0, \dots, p_k \in M$ as singularidades de X . Pela Proposição 3.1 existem vizinhanças $h(X)$ de X e U_1, \dots, U_k de p_1, \dots, p_k respectivamente

e funções contínuas $\rho_j: \mathfrak{h} \rightarrow U_j$, $j = 1, \dots, k$, tais que $\rho_j(Y)$ é a única singularidade de Y em U_j . Podemos supor que estas vizinhanças são disjuntas duas a duas. Se $p \in M - \bigcup_{j=1}^k U_j$ então $X(p) \neq 0$ e pela compacidade de $M - \bigcup_{j=1}^k U_j$ existe $\delta > 0$ tal que $\|X(p)\| > \delta$ para todo $p \in M - \bigcup_{j=1}^k U_j$. Portanto, diminuindo \mathfrak{h} se necessário, podemos supor que se $Y \in \mathfrak{h}$ então Y não tem singularidade em $M - \bigcup_{j=1}^k U_j$. Suponhamos que $X \in \mathcal{Q}_1$. Como DX_{p_j} é um campo linear hiperbólico e o conjunto de campos lineares hiperbólicos é aberto, temos que, pela continuidade das funções ρ_j , diminuindo \mathfrak{h} se necessário, $DY_{\rho_j(Y)}$ será um campo linear hiperbólico para todo $Y \in \mathfrak{h}$. Logo $\mathfrak{h} \subset \mathcal{Q}_1$ o que prova a abertura de \mathcal{Q}_1 .

Suponhamos agora que $X \in \mathcal{Q}_0$. Vamos mostrar que existe $Y \in \mathcal{Q}_1 \cap \mathfrak{h}$ arbitrariamente próximo de X . Observemos que se $u > 0$ é suficientemente pequeno então $DX_{p_j} + uI$ é um campo linear hiperbólico de TM_{p_j} para todo $j = 1, \dots, k$. Basta portanto que dada uma vizinhança $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$ de X exista $Y \in \mathfrak{h}_1$ tal que $Y(p_j) = 0$ e $DY_{p_j} = DX_{p_j} + uI$. Seja $V_j \subset U_j$ uma vizinhança de p_j e $x^j: V_j \rightarrow B(3) \subset \mathbb{R}^m$ uma carta local com $x^j(p_j) = 0$, onde $B(3)$ é a bola de raio 3 e centro na origem. Seja $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva C^∞ tal que $\varphi(B(1)) = 1$

e $\varphi(M-B(3)) = 0$. Denotemos por $x_*^j X$ a expressão do campo X na carta local x^j , isto é, $x_*^j X(q) = Dx^j((x^j)^{-1}(q)) X((x^j)^{-1}(q))$. Definimos então $Y(p) = X(p)$ se $p \in M - \bigcup_j V_j$ e $Y(p) = (Dx^j)^{-1}(x^j(p))(x_*^j X(x^j(p)) + u\varphi(x^j(p))I)$ se $p \in V_j$. É fácil ver que Y é um campo C^∞ , que $Y(p_j) = 0$ e que $DY_{p_j} = DX_{p_j} + uI$. Além disto, tomando u suficientemente pequeno temos que $Y \in \mathfrak{h}_1$ o que finda a demonstração.

A seguir estenderemos os resultados acima para difeomorfismos de uma variedade compacta M . Omitiremos as demonstrações das proposições e do teorema que são análogas às anteriores.

DEFINIÇÃO - Seja $p \in M$ um ponto fixo do difeomorfismo $f \in \text{Dif}^r(M)$. Dizemos que p é um ponto fixo elementar se 1 não é autovalor de $Df_p: TM_p \rightarrow TM_p$.

3.5 PROPOSIÇÃO - Seja $f \in \text{Dif}^r(M)$ e $p \in M$ um ponto fixo elementar de f . Existem vizinhanças $\mathfrak{h}(f) \subset \text{Dif}^r(M)$ e U de p e uma função contínua $\rho: \mathfrak{h} \rightarrow U$ que a cada $g \in \mathfrak{h}$ associa o único ponto fixo de g em U e este ponto fixo é elementar. Em particular um ponto fixo elementar é isolado.

Consideremos a diagonal $\Delta = \{(p,p) \in \text{MxM}, p \in M\}$.

Δ é uma subvariedade de MxM de dimensão m . Se $f \in \text{Dif}^r(M)$ consideremos a aplicação $\tilde{f}: M \rightarrow \text{MxM}$ $\tilde{f}(p) = (p, f(p))$ cuja imagem é o gráfico de f .

3.6 PROPOSIÇÃO - Seja $f \in \text{Dif}^r(M)$ e $p \in M$ um ponto fixo de f . Então p é um ponto fixo elementar se e somente se \tilde{f} é transversal a Δ em p .

Seja $G_0 \subset \text{Dif}^r(M)$ o conjunto dos difeomorfismos cujos pontos fixos são todos elementares. Portanto, $f \in G_0$ se e somente se \tilde{f} é transversal a Δ . Usando o Teorema de Transversalidade de Thom obtemos a seguinte proposição.

3.7 PROPOSIÇÃO - G_0 é aberto e denso em $\text{Dif}^r(M)$.

DEFINIÇÃO - Seja $p \in M$ um ponto fixo de $f \in \text{Dif}^r(M)$.

Dizemos que p é um ponto fixo hiperbólico se $Df_p: TM_p \rightarrow TM_p$ for um isomorfismo hiperbólico, isto é, se Df_p não tem autovalor de norma 1.

Seja $G_1 \subset \text{Dif}^r(M)$ o conjunto dos difeomorfismos cujos pontos fixos são todos hiperbólicos.

3.8 TEOREMA - G_1 é aberto e denso em $\text{Dif}^r(M)$.

Na próxima seção mostraremos que um difeomorfismo $f \in G_1$ é localmente estável.

§4. Estabilidade local.

Nesta seção demonstraremos um teorema devido a Hartman e Grobman segundo o qual um difeomorfismo f é localmente conjugado à sua parte linear em um ponto fixo hiperbólico. Analogamente, um campo X é localmente equivalente à sua parte linear em uma singularidade hiperbólica. Como consequência teremos a estabilidade local em um ponto fixo hiperbólico e em uma singularidade hiperbólica. A demonstração que apresentaremos é válida também em espaços de Banach [4], [6], [15], [21].

4.1 TEOREMA - Sejam $f \in \text{Dif}^r(M)$ e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f . Seja

$A = Df_p : TM_p \rightarrow TM_p$. Então existem vizinhanças $V(p) \subset M$ e $U(0) \subset TM_p$ e um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tal que

$$hA = fh.$$

Demonstração: Como se trata de um problema local podemos, utilizando uma carta local, supor que $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo tendo 0 como ponto fixo hiperbólico.

LEMA 1 - Sejam E um espaço de Banach, $L \in \mathcal{L}(E,E)$ satisfazendo $\|L\| \leq a < 1$ e $G \in \mathcal{L}(E,E)$ um iso-

morfismo com $\|G^{-1}\| \leq a < 1$. Então:

a) $I + L$ é isomorfismo e $\|(I+L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}$

b) $I + G$ é isomorfismo e $\|(I+G)^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}$

Demonstração do Lema 1:

a) Dado $y \in E$ seja $u: E \rightarrow E$, $u(x) = y - L(x)$. Temos $u(x_1) - u(x_2) = L(x_2 - x_1)$. Logo $\|u(x_1) - u(x_2)\| \leq a\|x_1 - x_2\|$ e portanto u é uma contração. Consequentemente, u tem um único ponto fixo $x \in E$, isto é, $x = u(x) = y - Lx$. Portanto existe um único $x \in E$ tal que $(L+I)(x) = y$, isto é, $I+L$ é bijetiva.

Seja $y \in E$ com $\|y\| = 1$ e seja $x \in E$ tal que $(I+L)^{-1} y = x$. Como $x + Lx = y$ temos, $\|x\| - a\|x\| \leq 1$ e portanto $\|x\| \leq \frac{1}{1-a}$. Logo $\|(I+L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}$.

b) $I+G = G(I+G^{-1})$. Como $\|G^{-1}\| \leq a < 1$ temos, pela primeira parte do lema, que $I+G^{-1}$ é inversível. Logo $(I+G)^{-1} = (I+G^{-1})^{-1} G^{-1}$ e portanto

$$\|(I+G)^{-1}\| \leq \|(I+G^{-1})^{-1}\| \|G^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a} \cdot a = \frac{a}{1-a},$$

o que demonstra o lema.

Como $A = (Df)_0$ é um isomorfismo hiperbólico,

existe uma decomposição invariante $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ e uma norma $\|\cdot\|$ em \mathbb{R}^m segundo a qual

$$\begin{aligned} \|A^s\| &\leq a < 1 & A^s &= A/E^s: E^s \rightarrow E^s \\ & & \text{onde} & \\ \|(A^u)^{-1}\| &\leq a < 1 & A^u &= A/E^u: E^u \rightarrow E^u \end{aligned}$$

Seja $C_b^0(\mathbb{R}^m)$ o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^m com a norma uniforme: $\|u\| = \sup\{\|u(x)\|; x \in \mathbb{R}^m\}$. Como $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ temos uma decomposição $C_b^0(\mathbb{R}^m) = C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s) \oplus C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)$ onde $u = u^s + u^u$ com $u^s = \pi_s \circ u$ e $u^u = \pi_u \circ u$ ($\pi_s: E^s \oplus E^u \rightarrow E^s$ e $\pi_u: E^s \oplus E^u \rightarrow E^u$ são as projeções naturais).

LEMA 2 - Existe $\epsilon > 0$ tal que se $\phi_1, \phi_2 \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ tem constante de Lipschitz menor ou igual a ϵ então $A + \phi_1$ e $A + \phi_2$ são conjugados.

Demonstração: Devemos procurar um homeomorfismo $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisfaça a equação

$$h(A + \phi_1) = (A + \phi_2)h. \quad (1)$$

Procuremos solução da forma $h = I + u$ com $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$.

Devemos ter

$$(I + u)(A + \phi_1) = (A + \phi_2)(I + u) \quad (2)$$

ou

$$A + \phi_1 + u(A + \phi_1) = A + Au + \phi_2(I + u)$$

ou ainda

$$Au - u(A + \phi_1) = \phi_1 - \phi_2(I + u). \quad (3)$$

Vamos mostrar que existe um único $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ que satisfaz a equação (3). Para isto consideremos o operador linear

$$\begin{aligned} \mathcal{L}: C_b^0(\mathbb{R}^m) &\rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m) \\ \mathcal{L}(u) &= Au - u(A + \phi_1). \end{aligned}$$

Afirmamos que \mathcal{L} é inversível e $\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-a}$. De facto, $\mathcal{L} = \bar{A} \mathcal{L}^*$ onde $\mathcal{L}^*: C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{L}^*(u) = u - A^{-1}u(A + \phi_1)$ e $\bar{A}: C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$, $\bar{A}(u) = Au$. Portanto, como \bar{A} é inversível, basta mostrar que \mathcal{L}^* é inversível e teremos $\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}^{*-1} \bar{A}^{-1}$. Observemos que $C_b^0(\mathbb{R}^m, E^S)$ e $C_b^0(\mathbb{R}^m, E^U)$ são invariantes por \mathcal{L}^* pois E^S e E^U são invariantes por A^{-1} . Podemos então escrever $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^{*S} \oplus \mathcal{L}^{*U}$ onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{*S} &= \mathcal{L}^*/C_b^0(\mathbb{R}^m, E^S): C_b^0(\mathbb{R}^m, E^S) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m, E^S) \\ \mathcal{L}^{*U} &= \mathcal{L}^*/C_b^0(\mathbb{R}^m, E^U): C_b^0(\mathbb{R}^m, E^U) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m, E^U) \end{aligned}$$

É fácil ver que se ϵ for suficientemente pequeno então $A + \phi_1$ é um homeomorfismo e portanto o operador $u^S \rightarrow A^{-1}u^S(A + \phi_1)$ é inversível e sua inversa,

$u^S \rightarrow A^S u^S (A + \phi_1)^{-1}$ é uma contração com norma limitada por $a < 1$. Pela parte (b) do Lema 1 temos que \mathcal{L}^{*S} é inversível e $\|(\mathcal{L}^{*S})^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}$. Aplicando a parte (a) do Lema 1 concluímos também que \mathcal{L}^{*u} é inversível e $\|(\mathcal{L}^{*u})^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a} = \max \left\{ \frac{1}{1-a}, \frac{a}{1-a} \right\}$. Portanto \mathcal{L} é inversível e

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| = \|\mathcal{L}^{*-1} \bar{A}^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-a}$$

o que demonstra a afirmativa.

Consideremos agora a aplicação $\mu: C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$
 $\mu(u) = \mathcal{L}^{-1}[\phi_1 - \phi_2(I+u)]$. Temos

$$\begin{aligned} \|\mu(u_1) - \mu(u_2)\| &= \|\mathcal{L}^{-1}[\phi_2(I+u_2) - \phi_2(I+u_1)]\| \leq \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-a} \epsilon \|u_2 - u_1\|. \end{aligned}$$

Tomando ϵ suficientemente pequeno para que $\frac{\|A^{-1}\|}{1-a} \epsilon < 1$ teremos que μ é uma contração e portanto tem um único ponto fixo $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$. Como $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ é solução de (3) se e somente se u é ponto fixo de μ concluímos que (3) tem uma única solução em $C_b^0(\mathbb{R}^m)$. Resta mostrar que $I + u$ é um homeomorfismo. Para isto observemos que o mesmo método utilizado acima permite concluir que a equação

$$(A + \phi_1)(I + v) = (I + v)(A + \phi_2)$$

também tem uma única solução $v \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$. Afirmamos que

$$(I+u)(I+v) = (I+v)(I+u) = I.$$

De fato,

$$\begin{aligned}(I+u)(I+v)(A+\phi_2) &= (I+u)(A+\phi_1)(I+v) = \\ &= (A+\phi_2)(I+u)(I+v).\end{aligned}$$

Por outro lado, como $(I+u)(I+v) = I + v + u(I+v)$, $v + u(I+v) \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ e $I(A+\phi_2) = (A+\phi_2)I$, temos, pela unicidade da solução da equação $(I + w)(A + \phi_2) = (A + \phi_2)(I + w)$, que

$$(I+u)(I+v) = I.$$

Analogamente temos que $(I+v)(I+u) = I$. Isto mostra que $I + u$ é um homeomorfismo que conjuga $A + \phi_1$ e $A + \phi_2$ o que demonstra o lema.

LEMA 3 - Dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $U(0)$ e existe uma extensão de f/U da forma $A + \phi$ onde $\phi \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ é de Lipschitz com constante limitada por ϵ .

Demonstração do Lema 3: Seja $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ com as propriedades:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= 0 & \text{se } t &\geq 1 \\ \alpha(t) &= 1 & \text{se } t &\leq \frac{1}{2} \\ |\alpha'(t)| &< K & \forall t \in \mathbb{R}, & K > 2.\end{aligned}$$

Seja $f = A + \varphi$ com $\varphi(0) = 0$ e $D\varphi_0 = 0$. Seja B_e uma bola de centro na origem e raio e tal que

$$\|D\varphi\|_{B_e} < \frac{\epsilon}{2K}. \quad \text{Tomemos } \phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \phi(x) = \alpha\left(\frac{\|x\|}{e}\right)\varphi(x).$$

É claro que $\phi(x) = 0$ se $\|x\| \geq e$. Mostremos que ϕ satisfaz as condições do lema. De fato, como $\phi(x) = \varphi(x)$ se $\|x\| \leq \frac{e}{2}$ temos que $A + \phi$ é uma extensão de $f/B_{\frac{e}{2}}$. Por outro lado, se $x_1, x_2 \in B_e$ temos

$$\begin{aligned} \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| &= \left\| \alpha\left(\frac{\|x_1\|}{e}\right)\varphi(x_1) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{e}\right)\varphi(x_2) \right\| = \\ &= \left\| \left[\alpha\left(\frac{\|x_1\|}{e}\right) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{e}\right) \right] \varphi(x_1) + \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{e}\right) [\varphi(x_1) - \varphi(x_2)] \right\| \leq \\ &\leq K \frac{\|x_1 - x_2\|}{e} \frac{\epsilon}{2K} \|x_1\| + \frac{\epsilon}{2K} \|x_1 - x_2\| \leq \epsilon \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

se $x_1 \in B_e$ e $x_2 \notin B_e$ temos $\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} \|x_1 - x_2\| \leq \epsilon \|x_1 - x_2\| \quad \text{e se } x_1, x_2 \notin B_e \text{ temos}$$

$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| = 0 < \epsilon \|x_1 - x_2\|$. Logo ϕ tem constante de Lipschitz limitada por ϵ , o que demonstra o lema.

Demonstração do Teorema 4.1: Seja $\epsilon > 0$ como no Lema 2.

Seja $A + \phi$ uma extensão de $f/U(0)$ onde $U(0)$ é uma vizinhança de 0 e ϕ tem constante de Lipschitz limitada por ϵ . Pelo Lema 2 temos que existe um homeomorfismo $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $hA = (A + \phi)h$. Logo $hA = fh$ em uma vizinhança de zero como queríamos demonstrar.

Observações: 1) A conjugação entre $A + \phi_1$ e $A + \phi_2$ no Lema 2 é única à distância finita da identidade. Sem exigir esta última condição, podemos encontrar uma infinidade de conjugações. Por exemplo, considere uma contração $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$. Suponhamos que $\varphi(1) = a > 0$ e $\varphi(-1) = b < 0$. Consideremos um homeomorfismo qualquer $h: [-1, b] \cup [a, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ com $h(-1) = 1$, $h(b) = b$, $h(a) = a$, $h(1) = 1$. Estendemos h a toda a reta, colocando $h(0) = 0$ e $h(x) = \varphi^n h\varphi^{-n}(x)$ onde $n \in \mathbb{Z}$ é tal que $\varphi^{-n}(x) \in [-1, b] \cup [a, 1]$. Temos assim tantas soluções da equação $h\varphi = \varphi h$ quantos homeomorfismos existirem de $[-1, b] \cup [a, 1]$ em si mesmo.

2) Mesmo exigindo proximidade da identidade para a conjugação entre A e f , ela não é única pois depende da extensão $A + \phi$ de f a todo o espaço \mathbb{R}^m .

A seguir mostraremos, a partir do teorema anterior, que um isomorfismo linear hiperbólico é localmente estável em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Na verdade, como veremos na próxima seção, um isomorfismo hiperbólico é globalmente estável em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$.

4.2 PROPOSIÇÃO - Seja A um isomorfismo hiperbólico.

Existe $\delta > 0$ tal que se $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ e $\|B - A\| < \delta$ então B é localmente conjugado a A .

Demonstração: Vamos procurar um homeomorfismo $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ que conjugue A com uma extensão de B/U onde U é uma vizinhança da origem.

Seja $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ com as propriedades:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= 1 & \text{se } |t| &\leq 1 \\ \alpha(t) &= 0 & \text{se } |t| &\geq 2 \\ \alpha(\mathbb{R}) &\subset [0, 1]. \end{aligned}$$

Podemos escrever $B = A + (B-A)$. Seja $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ a função definida por $\phi(x) = \alpha(\|x\|) \cdot (B-A)(x)$. Temos que $\phi/B_1 = (B-A)/B_1$ onde B_1 é a bola de centro 0 e raio 1 e $\phi(x) = 0$ se $\|x\| \geq 2$. Para todo $x \in \mathbb{R}^m$, $\|D\phi_x\| \leq K\|B-A\| + \|B-A\|$ onde $K = \sup\{|\alpha'(t)|; t \in \mathbb{R}\}$ é maior que 1. Dado $\epsilon > 0$ e tomando $\delta < \frac{\epsilon}{2K}$ teremos $\|D\phi_x\| < \epsilon$. Portanto ϕ tem constante de Lipschitz menor que ϵ . Pelo Lema 2 existe um homeomorfismo $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$hA = (A + \phi)h.$$

Como $A + \phi$ é uma extensão de B temos que h é uma conjugação local entre A e B .

4.3 TEOREMA - Seja $f \in \text{Dif}^r(M)$, $r \geq 1$ e seja $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f . Então f é localmente estável em p .

Demonstração: Pela Proposição 3.5 existem vizinhanças

$\tilde{h}(f)$ e $W(p)$ e uma função contínua

$\rho: \tilde{h}(f) \rightarrow W_p$ que a cada $g \in \tilde{h}(f)$ associa o único ponto fixo de g em W_p , $\rho(g)$, e este ponto fixo é hiperbólico. Tomando uma vizinhança $h(f) \subset \tilde{h}(f)$ suficientemente pequeno teremos que Df_p está próximo de $Dg_{\rho(g)}$ e portanto, pela Proposição 4.2, estes isomorfismos lineares são localmente conjugados. Como f é localmente conjugado a Df_p e g é localmente conjugado a $Dg_{\rho(g)}$ temos, por transitividade, que f é localmente conjugado a g .

Vamos agora estender os resultados acima para campos de vetores. Seja V uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^m e seja $X: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo de vetores C^r , $r \geq 1$. Lembremos que 0 é uma singularidade hiperbólica de X se $L = (DX)_0$ é um campo linear hiperbólico. Mostraremos que se 0 é uma singularidade hiperbólica de X então as órbitas de X em uma vizinhança de 0 tem o mesmo comportamento topológico que as órbitas do campo linear L . Para isto necessitamos demonstrar alguns lemas.

LEMA 4 (Desigualdade de Gronwall) - Sejam $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e não negativas que para $\alpha \geq 0$ satisfazem $u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s) v(s) ds \quad \forall t \in [a, b]$. Então

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds}$$

Demonstração: Seja $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $w(t) = \alpha + \int_a^t u(s)v(s)ds$.

Suponhamos inicialmente que $\alpha > 0$. Temos $w(a) = \alpha$ e $w(t) \geq \alpha > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Como $w'(t) = v(t) u(t) \leq v(t) w(t)$, temos $\frac{w'(t)}{w(t)} \leq v(t)$. Integrando entre a e t obtemos

$$\frac{w(t)}{\alpha} \leq e^{\int_a^t v(s)ds}$$

Logo

$$u(t) \leq w(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}$$

Se $\alpha = 0$ o caso anterior implica que para todo $\alpha_1 > 0$,

$u(t) \leq \alpha_1 e^{\int_a^t v(s)ds}$. Logo $u(t) = 0$ e a desigualdade permanece válida.

LEMA 5 - Seja $Y: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo de vetores C^1 , $Y(0)=0$,

que satisfaz uma condição de Lipschitz com constante K . Então o fluxo de Y está definido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e $\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{K|t|} \|x-y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Demonstração: Seja $x \in \mathbb{R}^m$ e suponhamos, por absurdo que o intervalo maximal da curva integral de Y pelo ponto x seja (a, b) com $b < \infty$. Seja $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$

a curva integral pelo ponto x . Temos

$$\varphi(t) = x + \int_0^t Y(\varphi(s)) ds.$$

Portanto, se $t \geq 0$,

$$\|\varphi(t)\| \leq \|x\| + \int_0^t \|Y(\varphi(s))\| ds \leq \|x\| + \int_0^t K\|\varphi(s)\| ds.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|\varphi(t)\| \leq e^{K|t|} \|x\| \leq e^{Kb} \|x\| \quad \text{se } t \geq 0.$$

Seja $t_n \rightarrow b$. Consideremos a seqüência $\{\varphi(t_n)\}$ cujos elementos estão contidos na bola fechada de centro 0 e raio $e^{Kb} \|x\|$. Logo $\{\varphi(t_n)\}$ tem uma subseqüência convergente, $\varphi(t_{n_t}) \rightarrow y \in \mathbb{R}^m$. Considerando o fluxo local de Y em torno de y concluimos que a curva integral φ pode ser estendida à direita de b o que contraria a nossa hipótese inicial. Logo o fluxo de Y está definido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Como

$$Y_t(x) - Y_t(y) = x - y + \int_0^t [Y(Y_s(x)) - Y(Y_s(y))] ds$$

concluimos que para $t \geq 0$

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq \|x-y\| + \int_0^t K\|Y_s(x) - Y_s(y)\| ds.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall temos

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{K|t|} \|x-y\| \quad \text{se } t \geq 0.$$

Para $t \leq 0$ obtemos a mesma expressão usando o argumento anterior ao campo $-Y$.

LEMA 6 - Seja $X: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo C^r com $X(0) = 0$.

Seja $L = (DX)_0$. Dado $\epsilon > 0$ existe um campo C^r , $Y: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ com as propriedades:

1) O campo Y tem constante de Lipschitz limitado por K e portanto o fluxo induzido por Y está definido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

2) $Y = L$ fora de uma bola $B(0, \ell)$.

3) Existe um aberto $U \subset V$ contendo 0 tal que $Y = X$ em U .

4) Escrevendo $Y_t = L_t + \phi_t$, existe $M > 0$ tal que

$\|\phi_t\| \leq M$ para todo $t \in [-2, 2]$ e ϕ_1 tem constante de Lipschitz menor ou igual a ϵ .

Demonstração: Como $L = (DX)_0$ temos $X = L + \psi$ onde

$\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função C^r que satisfaz $\psi(0) = 0$ e $D\psi_0 = 0$. Seja $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ tal que $\alpha(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, $\alpha(t) = 1$ se $|t| \leq \frac{\ell}{2}$ e $\alpha(t) = 0$ se $t \geq \ell$.

Seja $\tilde{\phi}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\tilde{\phi}(x) = \alpha(\|x\|) \cdot \psi(x)$ se

$x \in V$ e $\tilde{\phi}(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R}^m - V$. Dado $\delta > 0$ podemos escolher $\ell > 0$ de tal forma que a função $\tilde{\phi}$ seja C^r e tenha constante de Lipschitz limitada por δ . É claro que $\tilde{\phi} = \psi$ em $B(0, \frac{\ell}{2})$ e $\tilde{\phi} = 0$ fora de $B(0, \ell)$. Seja $Y: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ o campo de vetores definido por $Y = L + \tilde{\phi}$. É claro que $Y = X$ em $B(0, \frac{\ell}{2})$, $Y = L$ fora de $B(0, \ell)$ e que Y satisfaz (1). Resta mostrar que a condição (4) é verificada. De fato,

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{2K} \|x - y\| \quad \text{para } t \in [-2, 2] \quad (\text{Lema 5}).$$

Seja $\phi_t = Y_t - L_t$. Temos então

$$\begin{aligned} \phi_t(x) - \phi_t(y) &= \int_0^t [\tilde{\phi}(Y_s(x)) - \tilde{\phi}(Y_s(y))] ds + \\ &+ \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(y)) ds. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gronwall concluímos

$$\|\phi_t(x) - \phi_t(y)\| \leq 2 e^{2K} \delta e^{4\|L\|} \|x - y\| \quad \forall t \in [-2, 2].$$

Tomando δ suficientemente pequeno teremos a condição (4) satisfeita.

4.4 TEOREMA - Sejam $X: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo C^r e O uma singularidade hiperbólica de X . Seja $L = DX_O$. Então X é localmente equivalente a L em O .

Demonstração: Seja $Y: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo C^r como no Le-

ma 6. Como $Y = X$ em U , vizinhança de zero, temos que a aplicação identidade em U leva órbitas de X em órbitas de Y (na realidade preserva o parâmetro tempo, isto é, é uma conjugação entre os fluxos). Portanto Y é localmente equivalente a X . Resta então provar que Y é localmente equivalente a L . De fato, mostraremos que existe um homeomorfismo de \mathbb{R}^m que conjuga os fluxos Y_t e L_t .

Pelo Lema 6, $Y_t = L_t + \phi_t$ e como $(DY)_0 = L$ concluímos que $(DY_1)_0 = e^L = L_1$. Logo o difeomorfismo Y_1 tem a origem como ponto fixo hiperbólico, $Y_1 = L_1 + \phi_1$ e ϕ_1 tem constante de Lipschitz limitada por ϵ . Pela Lema 2 existe um único homeomorfismo $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, à distância finita da identidade ($h = I+u$ com $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$) que satisfaz $hY_1 = L_1h$.

Definimos $H: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$H = \int_0^1 L_{-t} h Y_t dt.$$

É claro que H é uma função contínua e a condição (4) do Lema 6 garante que H está à distância finita da identidade. Mostremos agora que

$$L_s H = H Y_s \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Para isto basta considerar $s \in [0,1]$. Temos:

$$L_{-s} H Y_s = L_{-s} \left(\int_0^1 L_{-t} h Y_t dt \right) Y_s = \int_0^1 L_{-(s+t)} h Y_{t+s} dt.$$

Tomando $u = t + s - 1$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_{-(s+t)} h Y_{t+s} dt &= \int_{-1+s}^s L_{-u-1} h Y_{u+1} du = \\ &= \int_{-1+s}^0 L_{-u} L_{-1} h Y_1 Y_u du + \int_0^s L_{-(u+1)} h Y_{u+1} du. \end{aligned}$$

Fazendo $v = u + 1$ na primeira parcela, $v = u$ na segunda lembrando que $L_{-1} h Y_1 = h$ obtemos:

$$L_{-s} H Y_s = \int_0^s L_{-v} h Y_v dv + \int_s^1 L_{-v} h Y_v dv = H.$$

Temos então que H é uma função contínua, à distância finita da identidade e conjuga os fluxos L_t e Y_t .

Resta mostrar que H é um homeomorfismo. Com efeito como $L_1 H = H Y_1$ e $L_1 h = h Y_1$ temos pela unicidade da solução desta equação que $H = h$ o que prova o teorema.

4.5 TEOREMA - Seja $X \in \mathfrak{X}^T(M)$ e seja $p \in M$ uma singularidade hiperbólica de X . Então X é localmente estável em p .

Demonstração: Vimos que existem vizinhanças $h(X)$ em $\mathfrak{X}^T(M)$ e U de p em M tais que todo campo $Y \in h(X)$ tem uma única singularidade hiperbólica

p_Y em U . Além disto, tomando $h(X)$ suficientemente pequena temos que p_Y tem o mesmo índice do que p . Logo os campos lineares DX_p e DY_{p_Y} são topologicamente equivalentes. Como X é localmente equivalente a DX_p e Y é localmente equivalente a DY_{p_Y} o teorema está demonstrado.

§5. Classificação Local.

Vimos que o subconjunto $\mathcal{G}_1(M) \subset \mathcal{X}^r(M)$ dos campos cujas singularidades são todas hiperbólicas é aberto e denso em $\mathcal{X}^r(M)$. Além disto estes campos são localmente estáveis em cada ponto de M . Vamos agora descrever os tipos possíveis de comportamento topológico local para os campos de \mathcal{G}_1 .

Consideremos os campos lineares L_0, L_1, \dots, L_m de \mathbb{R}^m que na base canônica de \mathbb{R}^m são representados pelas matrizes:

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \bigcirc \\ & 1 & & \bigcirc \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} -1 & & & \bigcirc \\ & 1 & & \bigcirc \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & 1 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$L_m = \begin{pmatrix} -1 & & & \circ \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Se L é um campo linear hiperbólico de \mathbb{R}^m então L é conjugado a L_i onde i é o índice de L .

Consideremos ainda o campo constante $C: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $C(x) = (1, 0, \dots, 0)$.

Resumindo o que foi visto nas seções anteriores, temos

5.1 TEOREMA - Seja $X \in \mathfrak{G}_1(M)$ e seja $p \in M$.

- a) Se p é um ponto regular de X então X é localmente equivalente ao campo constante C nos pontos p e 0 , respectivamente.
- b) Se p é uma singularidade de X então X é localmente equivalente a L_i onde $i =$ índice de p .

Demonstração: a) Decorre do Teorema do Fluxo Tubular;
 b) Basta aplica o Teorema de Hartman e a Proposição 2.15.

Consideremos agora o espaço $\text{Dif}^X(M)$ dos difeomorfismos de classe C^X de M . Vimos que o conjunto $G_1(M) \subset \text{Dif}^X(M)$ dos difeomorfismos cujos pontos fixos

são todos hiperbólicos é aberto e denso em $\text{Dif}^r(M)$. Vamos agora descrever os tipos possíveis de comportamento topológico local das órbitas de difeomorfismos de G_1 na vizinhança dos pontos fixos. Pelo teorema de Hartman e Grobman basta classificar os isomorfismos lineares hiperbólicos.

5.2 PROPOSIÇÃO - Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ um isomorfismo linear hiperbólico. Existe $\epsilon > 0$ tal que se $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ satisfaz $\|A-B\| < \epsilon$ então B é conjugado a A .

Demonstração: Pela Proposição 4.2 temos que B é localmente conjugado a A , isto é, existe um homeomorfismo $h: V(0) \rightarrow U(0)$ tal que $hA = Bh$. Sejam E^s e E^u os subespaços estável e instável de A e sejam $E^{s'}$ e $E^{u'}$ os correspondentes subespaços para B . Sejam $V^s = V(0) \cap E^s$, $V^u = V(0) \cap E^u$, $U^{s'} = U(0) \cap E^{s'}$. Pela continuidade de h temos que $h(V^s) = U^{s'}$ e $h(V^u) = U^{u'}$. Vamos definir um homeomorfismo $h^s: E^{s'} \rightarrow E^s$ conjugado $A^s = A/E^s$ e $B^{s'} = B/E^{s'}$. Se $x \in V^s$, que é uma vizinhança da origem em E^s , tomamos $h^s(x) = h(x) \in E^{s'}$. Se $x \in E^s - V^s$, como $A^n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A^{n_0}(x) \in V^s$. Tomamos então $h^s(x) = B^{-n_0} h A^{n_0}(x)$. Como h conjugua A e B em V^s temos imediatamente que h^s está bem definido (não depende

da escolha de n_0). Também é fácil verificar que h^S é um homeomorfismo e conjugua A e B. Analogamente definimos um homeomorfismo $h^U: E^U \rightarrow E^{U'}$ conjugando A e B. Definimos então $\tilde{h}: E^S \oplus E^U \rightarrow E^{S'} \oplus E^{U'}$, $\tilde{h}(x^S + x^U) = h^S(x^S) + h^U(x^U)$. É claro que \tilde{h} é um homeomorfismo que conjugua A e B.

Deixamos a cargo do leitor a demonstração da proposição abaixo.

5.3 PROPOSIÇÃO - Sejam A e B isomorfismos hiperbólicos de \mathbb{R}^m . Sejam E^S, E^U os subespaços estáveis e instáveis de A e $E^{S'}, E^{U'}$ os correspondentes de B. Então A e B são conjugados se e somente se $A^S = A/E^S$ é conjugado a $B^{S'} = B/E^{S'}$ e $A^U = A/E^U$ é conjugado a $B^{U'} = B/E^{U'}$.

Queremos dar uma condição necessária e suficiente para que dois isomorfismos hiperbólicos sejam conjugados.

5.4 PROPOSIÇÃO - Sejam A_1 e A_2 os isomorfismos de \mathbb{R}^m que na base canônica de \mathbb{R}^m são representados pelas seguintes matrizes:

onde $-1 < \lambda_i < 0$, $0 < \mu_i < 1$, $B_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$. Com $\beta_i \neq 0$ e $\alpha_i^2 + \beta_i^2 < 1$.

Observemos que se dois isomorfismos hiperbólicos, B_0 e B_1 , estão na mesma componente conexa do conjunto de isomorfismos hiperbólicos (que é aberto em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$), então eles são conjugados. De fato, se $\alpha: [0,1] \rightarrow GL(\mathbb{R}^m)$ é uma curva contínua, tal que $\alpha(t)$ é hiperbólico para todo $t \in [0,1]$ e $\alpha(0) = B_0$, $\alpha(1) = B_1$, então pela estabilidade local, para todo $t \in [0,1]$, existe um aberto $V_t \subset GL(\mathbb{R}^m)$, tal que todo isomorfismo em V_t é conjugado a $\alpha(t)$. Como $\alpha([0,1])$ é compacto, existem $t_1 = 0 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1$, tais que $V_{t_1} \cup \dots \cup V_{t_k} \supset \alpha([0,1])$. Como $V_{t_i} \cap V_{t_{i+1}} \neq \emptyset$, concluímos que $\alpha(t_i)$ é conjugada a $\alpha(t_{i+1})$, logo B_0 é conjugado a B_1 .

Pela observação acima, basta encontrarmos um caminho contínuo $\alpha: [0,1] \rightarrow GL(\mathbb{R}^m)$, tal que a matriz de $\alpha(0)$ na base v_1, \dots, v_m seja \tilde{A} e a de $\alpha(1)$ seja \tilde{A}_1 ou \tilde{A}_2 . Isto porque os isomorfismos A_1 e A_2 são respectivamente similares (e portanto conjugados) aos isomorfismos que se representam por \tilde{A}_1 e \tilde{A}_2 na base $\{v_1, \dots, v_m\}$. Vamos inicialmente construir um caminho contínuo $\alpha_1: [0,1] \rightarrow GL(\mathbb{R}^m)$, tal que $\alpha_1(0)$ é A , $\alpha_1(t)$ é hi-

perbólico para todo $t \in [0,1]$ e

$$\alpha_1(1) = \left(\begin{array}{ccc} -1/2 & \nearrow s' & \\ & \bullet & \\ & & -1/2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \bigcirc \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \bigcirc \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1/2 & \nearrow s'' + s''' & \\ & \bullet & \\ & & 1/2 \end{array} \right)$$

Em seguida construiremos um caminho contínuo $\alpha_2: [0,1] \rightarrow GL(\mathbb{R}^m)$, tal que $\alpha_2(0) = \alpha_1(1)$ e $\alpha_2(1) = A_1$ ou A_2 .

Tomemos

$$\alpha_1(t) = \left(\begin{array}{ccccccc} \lambda_1(t) & \dots & & & & & \\ & \dots & \lambda_{s'}(t) & & & & \\ & & \dots & \mu_1(t) & \dots & & \\ & & & \dots & \mu_{s''}(t) & & \\ & & & & \dots & B_1(t) & \dots \\ & & & & & \dots & B_{s''}(t) \end{array} \right)$$

onde

$$\lambda_i(t) = (1-t)\lambda_i - 1/2 t$$

$$\mu_i(t) = (1-t)\mu_i + 1/2 t$$

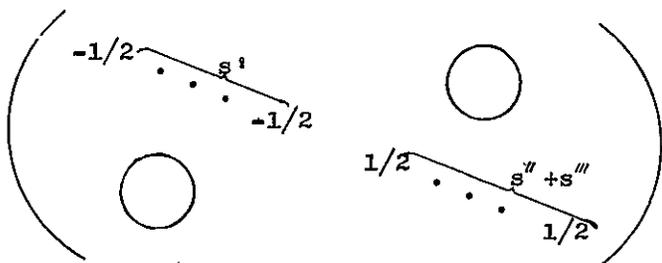
$$B_i(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_i t) & \text{sen}(\omega_i t) \\ -\text{sen}(\omega_i t) & \cos(\omega_i t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix} \text{ se } t \in [0, 1/2]$$

$$B_i(t) = \begin{pmatrix} 1/2(2t-1) + 2(1-t)\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} & \circ \\ \circ & 1/2(2t-1) + 2(1-t)\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \end{pmatrix}$$

se $t \in [1/2, 1]$, onde

$$\cos\left(\frac{w_i}{2}\right) = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} \quad \text{e} \quad \text{sen}\left(\frac{w_i}{2}\right) = \frac{-\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}.$$

É fácil ver que $-1 < \lambda_i(t) < 0$, $0 < \mu_i(t) < 1$, para todo $t \in [0, 1]$ e que os auto-valores de $B_i(t)$ têm módulo menor que 1, para todo $t \in [0, 1]$. Isto implica que $\alpha_1(t)$ é hiperbólico para todo $t \in [0, 1]$. Como α_1 é contínua, concluímos que $\alpha_1(0) = A$ é conjugado a $\alpha_1(1)$, cuja matriz é



Vamos construir agora a curva α_2 . Suponha que A inverta a orientação, isto é, $\det(A) < 0$. Como α_1 é contínua e $\alpha_1(t)$ é um isomorfismo para todo $t \in [0, 1]$, temos que $\det(\alpha_1(t)) < 0 \quad \forall t \in [0, 1]$ e em particular $\det(\alpha_1(1)) < 0$. Logo neste caso o número s' de elementos negativos da diagonal de $\alpha_1(1)$ é ímpar. Tomemos

conforme $\det(A) > 0$ ou $\det(A) < 0$, respectivamente.

A demonstração é inteiramente análoga à da Proposição 5.4.

Vamos agora classificar localmente os pontos fixos hiperbólicos dos difeomorfismos com a relação de equivalência dada pela conjugação local.

5.5 TEOREMA - Sejam $f \in \text{Dif}^r(M)$ e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f . Sejam A_i^j , $0 \leq i \leq m$, $i \leq j \leq 4$ os difeomorfismos hiperbólicos que na base canônica do \mathbb{R}^m , se escrevem da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 A_0^1 = A_0^2 &= \begin{pmatrix} 2 & & \bigcirc \\ & \ddots & \cdot \\ \bigcirc & & 2 \end{pmatrix} & A_0^3 = A_0^4 &= \begin{pmatrix} -2 & & \bigcirc \\ & 2 & \cdot \\ \bigcirc & & 2 \end{pmatrix} \\
 A_i^1 &= \begin{pmatrix} 1/2 & & & & \bigcirc \\ & \ddots & & & \cdot \\ & & i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1/2 \\ \bigcirc & & & & & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix} & A_i^2 &= \begin{pmatrix} -1/2 & & & & \bigcirc \\ & 1/2 & & & \cdot \\ & & i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1/2 \\ \bigcirc & & & & & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix} \\
 A_i^3 &= \begin{pmatrix} 1/2 & & & & \bigcirc \\ & \ddots & & & \cdot \\ & & i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1/2 \\ \bigcirc & & & & & -2 & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix} & A_i^4 &= \begin{pmatrix} -1/2 & & & & \bigcirc \\ & 1/2 & & & \cdot \\ & & i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1/2 \\ \bigcirc & & & & & -2 & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$A_m^1 = A_m^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & & & \circ \\ & \ddots & & \\ \circ & & & \\ & & & 1/2 \end{pmatrix} \quad A_m^3 = A_m^4 = \begin{pmatrix} -1/2 & & & \circ \\ & 1/2 & & \\ \circ & & & \\ & & & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Então para algum dos A_i^j acima, f e A_i^j são localmente conjugados em $p, 0$.

Demonstração: Segue-se imediatamente do Teorema de Hartman e Grobman, da Proposição 5.3 e da Proposição 5.4.

§6. Variedades Invariantes.

Sejam $f \in \text{Dif}^r(M)$ e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f . O conjunto $W^s(p)$ dos pontos de M que tem p como w -limite é chamado variedade estável do ponto p e o conjunto $W^u(p)$ dos pontos que tem p como α -limite é denominado variedade instável de p . É claro que $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são invariantes por f . Usando a hiperbolicidade de p descreveremos nesta seção a estrutura destes conjuntos e analisaremos as perturbações dos mesmos provenientes de perturbações do difeomorfismo f . Definições e resultados análogos são válidos para singularidades de campos de vetores.

EXEMPLO 1 - Se $A \in GL(\mathbb{R}^m)$ é um isomorfismo hiperbólico existe uma decomposição invariante $\mathbb{R}^m = E^s \oplus \oplus E^u$ tal que se $q \in E^s$ então $A^n(q) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ enquanto que se $q \in E^u$, $A^{-n}(q) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto $W^s(0) = E^s$ e $W^u(0) = E^u$.

Suponhamos $M \subset \mathbb{R}^k$ e seja d a métrica em M induzida de \mathbb{R}^k . Para $\beta > 0$ denotaremos por $B_\beta \subset M$ a bola de centro p e raio β .

DEFINIÇÃO - Os conjuntos

$$W_\beta^s(p) = \{q \in B_\beta; f^n(q) \in B_\beta, \forall n \geq 0\}$$

$$W_\beta^u(p) = \{q \in B_\beta; f^{-n}(q) \in B_\beta, \forall n \geq 0\}$$

são chamados variedades estável e instável locais, de tamanho β , do ponto p .

Recordemos que uma imersão topológica de \mathbb{R}^s em M é uma aplicação contínua $F: \mathbb{R}^s \rightarrow M$ tal que todo ponto $x \in \mathbb{R}^s$ tenha uma vizinhança V com a seguinte propriedade: a restrição de F a V , $F|_V$, é um homeomorfismo sobre sua imagem. Neste caso, dizemos que $F(\mathbb{R}^s) \subset M$ é uma subvariedade topológica imersa de dimensão s . Um mergulho topológico de \mathbb{R}^s em M é uma imersão topológica biunívoca $F: \mathbb{R}^s \rightarrow M$ que é um homeomorfismo sobre

sua imagem.

6.1 PROPOSIÇÃO - Se $\beta > 0$ é suficientemente pequeno temos:

- 1) $W_\beta^s(p) \subset W^s(p)$ e $W_\beta^u(p) \subset W^u(p)$, isto é, os pontos de uma vizinhança de p cuja órbita positiva (resp. negativa) permanece na vizinhança, tem p como ω -limite (resp. α -limite).
- 2) $W_\beta^s(p)$ (resp. $W_\beta^u(p)$) é um disco topológico mergulhado em M cuja dimensão é igual a do subespaço estável (resp. instável) de $A = Df_p$.
- 3) $W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\beta^s(p))$ e $W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\beta^u(p))$.

Consequentemente existe uma imersão topológica biunívoca $\varphi_s: E^s \rightarrow M$ ($\varphi_u: E^u \rightarrow M$) cuja imagem é $W^s(p)$ (resp. $W^u(p)$), onde E^s e E^u são os subespaços estável e instável de $A = Df_p$.

Demonstração: (1) e (2): Pelo teorema de Hartman existem vizinhanças U de 0 em TM_p e um homeomorfismo $h: B_\beta \rightarrow U$ que conjugua f e o isomorfismo A . Como A é um isomorfismo hiperbólico segue-se que se $x \in U$ é tal que $A^n(x) \in U$ para todo $n \geq 0$ então $x \in E^s$ e portanto $A^n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Seja

$q \in W_\beta^S(p)$. Como $f^n(q) \in B_\beta$ para $n \geq 0$ e $hf^n(q) = A^n h(q)$ temos que $A^n h(q) \in U$ para $n \geq 0$ e portanto $A^n h(q) \rightarrow 0$. Logo $h^n(q) = h^{-1} A^n h(q)$ converge para $p = h^{-1}(0)$ o que mostra que $W_\beta^S(p) \subset W^S(p)$. Além disto $h^{-1}(E^S \cap U) = W_\beta^S(p)$ o que demonstra o item (2). Analogamente $W_\beta^u(p) \subset W^u(p)$ e $W_\beta^u(p) = h^{-1}(U \cap E^u)$.

(3) Como $W^S(p)$ é invariante por f e $W_\beta^S(p) \subset W^S(p)$ temos que $f^{-n}(W_\beta^S(p)) \subset W^S(p)$ para todo n e portanto $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\beta^S(p)) \subset W^S(p)$. Por outro lado se $q \in W^S(p)$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(q) = p$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(q) \in B_\beta$ para todo $n \geq n_0$. Logo $f^{n_0}(q) \in W_\beta^S(p)$ e portanto $q \in f^{-n_0} W_\beta^S(p)$. Analogamente mostramos que $W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n W_\beta^u(p)$. Vamos agora definir uma aplicação $\varphi_S: E^S \rightarrow M$ cuja imagem é $W^S(p)$. Se $x \in E^S$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A^{n_0}(x) \in U$ onde U é a vizinhança de 0 considerada acima. Definimos então $\varphi_S(x) = f^{-n_0} h^{-1} A^{n_0}(x)$. Como h^{-1} conjuga A e f segue-se que φ_S está bem definida, isto é, não depende da escolha de n_0 . É fácil ver que φ_S é uma imersão topológica biunívoca e que $\varphi_S(E^S) = W^S(p)$. Analogamente construímos uma imersão topológica biunívoca $\varphi_u: E^u \rightarrow M$ cuja imagem é $W^u(p)$.

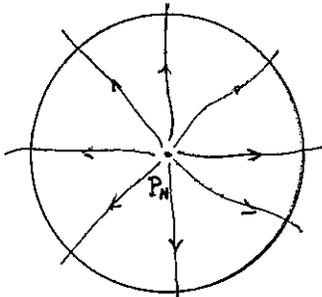
Observações: 1) Se $p \in M$ é um ponto fixo de f então a

variedade estável de p relativa a f coincide com a variedade instável de p relativa a f^{-1} . Esta dualidade permite traduzir toda propriedade de variedade instável em uma propriedade de variedade estável.

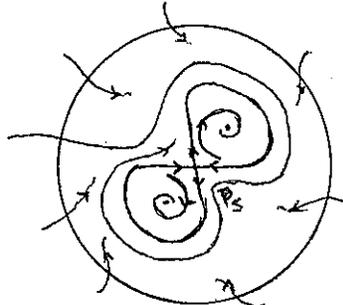
2) Embora a variedade estável local seja um disco topologicamente mergulhado em M , a variedade estável global pode não ser uma subvariedade mergulhada de M como mostra o exemplo abaixo.

3) É importante salientar que o teorema de Hartman fornece apenas uma estrutura de variedade topológica para $W^s(p)$. Entretanto o teorema que apresentaremos a seguir mostra que de fato $W^s(p)$ é uma variedade diferenciável imersa de mesma classe que o difeomorfismo. A demonstração deste fato, cujo esboço é indicado a seguir, é independente do Teorema de Hartman. A Proposição 6.1 foi apresentada como motivação para o resultado principal desta seção.

EXEMPLO 2 - Seja $f: S^2 \rightarrow S^2$ o difeomorfismo induzido no tempo 1 pelo fluxo do campo de vetores X cuja estrutura de órbitas é a seguinte: o polo norte p_N é única singularidade no hemisfério norte; o polo sul p_S é uma sela cujas variedades invariantes formam uma "figura oito" que envolve as duas outras singularidades.



hemisfério norte

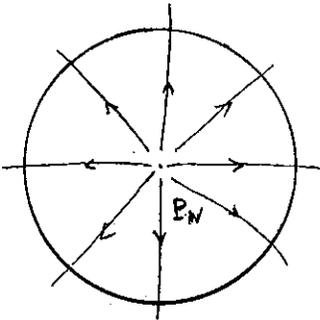


hemisfério sul

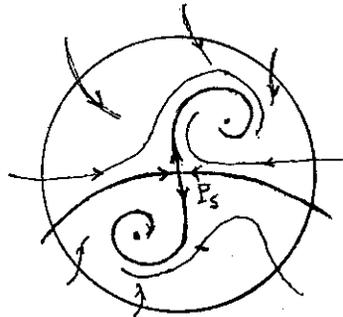
II.6

Neste exemplo a variedade estável de p_S não é uma subvariedade mergulhada de S^2 .

EXEMPLO 3 - Seja $f = Y_1$ onde Y é o campo em S^2 cuja estrutura de órbitas é descrita pela figura abaixo.



hemisfério norte



hemisfério sul

II.7

Neste exemplo $W^s(p_S)$ e $W^u(p_S)$ são subvariedades mergulhadas de S^2 .

DEFINIÇÃO - Sejam S e S' subvariedades C^r de M e $\epsilon > 0$. Dizemos que S e S' estão ϵ C^r -próximas se existe um difeomorfismo C^r , $h: S \rightarrow S' \subset M$, tal

que $i' \circ h$ está ϵ próximo de i na topologia C^r .

Aqui $i: S \rightarrow M$ e $i': S' \rightarrow M$ denotam as inclusões.

6.2 TEOREMA (da Variedade Estável) - Sejam $f \in \text{Dif}^r(M)$,

$p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f e E^s o subespaço estável de $A = \text{Df}_p$.

Então: 1) $W^s(p)$ é uma variedade de classe C^r imersa

biunivocamente em M e o espaço tangente a $W^s(p)$ no ponto p é E^s .

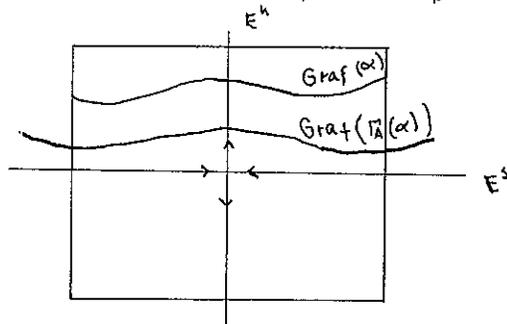
2) Seja $D \subset W^s(p)$ um disco mergulhado contendo o ponto p . Considere uma vizinhança $\mathcal{h} \subset \text{Dif}^r(M)$ tal que cada $g \in \mathcal{h}$ tenha um único ponto fixo hiperbólico p_g contido em uma vizinhança U de p . Então, dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $\tilde{\mathcal{h}} \subset \mathcal{h}$ tal que para todo $g \in \tilde{\mathcal{h}}$ existe um disco $D_g \subset W^s(p_g)$ ϵ - C^r -próximo de D .

Apresentaremos aqui apenas uma idéia geométrica da demonstração do teorema acima. Os detalhes podem ser encontrados em [7].

Como $W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n} W_\beta^s(p)$, basta mostrar que a variedade estável local do ponto p é de classe C^r e que varia continuamente com f na topologia C^r . Podemos então nos restringir ao caso em que f é um difeomorfismo de uma vizinhança V de 0 em \mathbb{R}^m que tem 0 como pon

to fixo hiperbólico.

Seja $A = Df(0)$. Consideremos a decomposição invariante $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ e normas $\|\cdot\|_s$ em E^s e $\|\cdot\|_u$ em E^u tais que $\|A^s\|_s < 1$ e $\|(A^u)^{-1}\|_u < 1$. Tomemos em \mathbb{R}^m a norma $\|x_s \oplus x_u\| = \max\{\|x_s\|, \|x_u\|_u\}$. Para $\beta > 0$ denotemos por B_β a bola fechada de centro 0 e raio β e por $B_\beta^s = B_\beta \cap E^s$ e $B_\beta^u = B_\beta \cap E^u$. Se $\alpha \in C^r(B_\beta^s, B_\beta^u)$ então o gráfico de α , $\text{Graf}(\alpha)$, é uma subvariedade C^r de \mathbb{R}^m . Como A contrai os vetores de E^s e expande os vetores de E^u segue-se que $A^{-1}(\text{Graf}(\alpha)) \cap B_\beta$ é o gráfico de uma aplicação C^r de B_β^s em B_β^u que denotaremos



II.8

por $\Gamma_A(\alpha)$. De fato, $\Gamma_A(\alpha)(x_s) = (A^u)^{-1} \alpha(A^s x_s)$.

$\Gamma_A: C^r(B_\beta^s, B_\beta^u) \rightarrow C^r(B_\beta^s, B_\beta^u)$ é chamada a transformação de gráficos associada a A . É fácil ver que se $\alpha \in C^r(B_\beta^s, B_\beta^u)$, a seqüência $\{\Gamma_A^n(\alpha)\}$ converge para a aplicação nula cujo gráfico é a variedade estável local de A .

Como A é a derivada de f no ponto 0 , é de se esperar que tomando β suficientemente pequeno, podemos definir a transformação de gráficos associada a f ,

$\Gamma_f: C^r(B_\beta^s, B_\beta^u) \rightarrow C^r(B_\beta^s, B_\beta^u)$. Se Γ_f possui um ponto fixo atrator $\alpha_f \in C^r(B_\beta^s, B_\beta^u)$, isto é, se $\Gamma_f(\alpha_f) = \alpha_f$ e $\Gamma^n(\alpha) \rightarrow \alpha_f$ para qualquer $\alpha \in C^r(B_\beta^s, B_\beta^u)$, então $f(\text{Graf}(\alpha_f)) = \text{Graf}(\alpha_f)$ e o $\text{Graf}(\alpha_f)$ é o conjunto de pontos de B_β que permanecem em B_β por iterações positivas de f . Logo $\text{Graf}(\alpha_f) = W_\beta^s(0)$. Em outras palavras, a demonstração do teorema pode ser feita com o seguinte roteiro:

- 1) Γ_f está bem definida e tem um ponto fixo atrator $\alpha_f \in C^r(B_\beta^s, B_\beta^u)$;
- 2) se g está próximo de f na topologia C^r , então Γ_g está bem definida, tem um ponto fixo atrator e este ponto fixo varia continuamente com g .

Consideremos agora um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e seja $p \in M$ uma singularidade hiperbólica de X . A variedade estável de p relativa ao campo X , $W^s(p; X)$, é o conjunto de pontos de M cujo ω -limite é p . Seja $f = X_{t=1}$ o difeomorfismo induzido no tempo $t = 1$. Como vimos, p é um ponto fixo hiperbólico de f . Se $W^s(p, f)$ denota a variedade estável de p relativa a f então $W^s(p, f) = W^s(p, X)$. De fato, é claro que se $x \in W^s(p, X)$,

i.e. $X_t(x) \rightarrow p$ com $t \rightarrow \infty$, então $X_n(x) = f^n(x) \rightarrow p$ com $n \rightarrow \infty$. Logo $W^s(p, X) \subset W^s(p, f)$. Por outro lado, seja U uma vizinhança qualquer de p . Como $X(p) = 0$, existe uma vizinhança V de p tal que $X_t(V) \subset U$ para $0 \leq t \leq 1$. Se $x \in W^s(p, f)$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in V$ para $n \geq n_0$. Logo $X_t(x) \in U$ para $t \geq n_0$. Isto mostra que $X_t(x) \rightarrow p$ com $t \rightarrow \infty$. Portanto $W^s(p, f) \subset W^s(p, X)$.

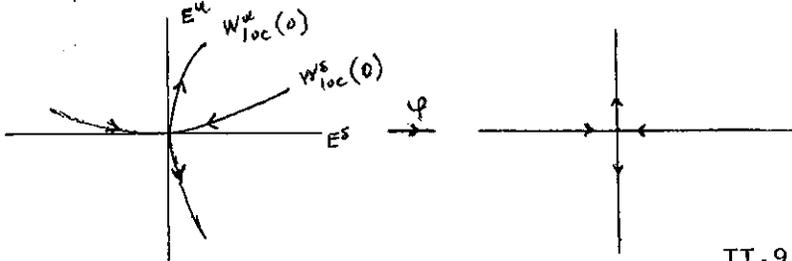
§7. O λ -Lema.

Nesta seção discutiremos um fato local que é relevante para vários resultados em Sistemas Dinâmicos.

Seja f um difeomorfismo C^r de uma vizinhança V de \mathbb{R}^m tendo 0 como ponto fixo hiperbólico. Consideremos o isomorfismo hiperbólico $A = Df(0)$ e a decomposição invariante $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$. Na Seção 6 vimos que a variedade estável local do ponto fixo 0 , $W_{loc}^s(0)$, é o gráfico de uma aplicação C^r , $\varphi_s: B_\beta^s \rightarrow E^u$ tal que $\varphi_s(0) = 0$ e $D\varphi_s(0) = 0$. Aqui $B_\beta^s(0) \subset E^s$ denota a bola de centro 0 e raio β . Da mesma forma, a variedade instável local $W_{loc}^u(0)$ é o gráfico de uma aplicação C^r , $\varphi_u: B_\beta^u \rightarrow E^s$ tal que

$\varphi_u(0) = 0$ e $D\varphi_u(0) = 0$. Consideremos a aplicação

$$\varphi: B_{\beta}^S \oplus B_{\beta}^U \rightarrow E^S \oplus E^U, \quad \varphi(x_S, x_U) = (x_S - \varphi_U(x_U), x_U - \varphi_S(x_S)).$$

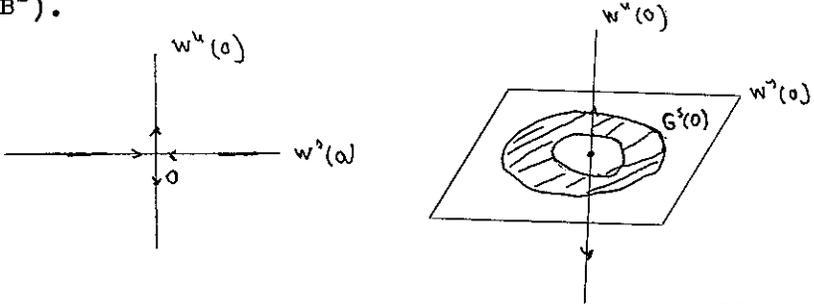


II.9

É claro que φ é de classe C^r e que $D\varphi(0)$ é a identidade. Logo φ é um difeomorfismo local de uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^m . Consideremos o difeomorfismo $\tilde{f} = \varphi_* f = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Então \tilde{f} é um difeomorfismo de uma vizinhança da origem com $\tilde{f}(0) = 0$ e $D\tilde{f}(0) = A$. Além disto a variedade estável local de \tilde{f} é uma vizinhança da origem em E^S enquanto que a variedade instável local é uma vizinhança da origem em E^U . Em outras palavras, podemos sempre supor que a variedade estável local (resp. instável local) de um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo f é uma vizinhança do ponto fixo no subespaço estável (resp. instável) da parte linear de f .

Seja $\|\cdot\|$ uma métrica em \mathbb{R}^m tal que $\|A^S\| \leq a < 1$ e $\|(A^U)^{-1}\| \leq a < 1$, onde A^S e A^U são as restrições de A a E^S e E^U respectivamente. Se $f^S: B_{\beta}^S \rightarrow E^S$ é

a restrição de f a $W_{\beta}^s(0) \subset B_{\beta}^s \subset E^s$ então $Df^s(0) = A^s$. Como A^s é uma contração temos que, se β for suficientemente pequeno, f^s também é uma contração. Portanto, se $B^s \subset B_{\beta}^s$ é uma bola aberta de centro na origem, $f(\partial B^s) \subset B^s$, onde $\partial B^s = \overline{B^s} - B^s$ é o bordo de B^s . O anel $G^s(0) = \overline{B^s - f(B^s)}$ é chamado um domínio fundamental da variedade estável de 0 . É claro que $\partial G^s(0) = \partial B^s \cup \cup f(\partial B^s)$.



II.10

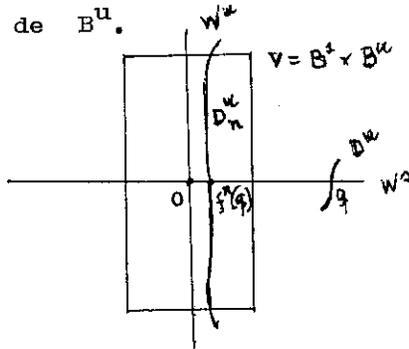
Se $x \in W^s(0) - \{0\}$ então a órbita de x tem pelo menos um e no máximo dois pontos no domínio fundamental $G^s(0)$, isto é, $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(G^s(0)) = W^s(0) - \{0\}$ e se $x \in \text{int } G^s(0)$ então $f^n(x) \notin G^s(0)$ para todo $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Qualquer vizinhança $N^s(0)$ de $G^s(0)$ disjunta de $W_{loc}^u(0)$ é denominada uma vizinhança fundamental para a variedade estável de 0 . Analogamente definimos domínio fundamental e vizinhança fundamental para a variedade instável de 0 : $G^u(0)$ e $N^u(0)$.

Sejam $B^s \subset E^s$ uma bola contida em $W_{loc}^s(0)$,

$B^u \subset E^u$ uma bola contida em $W_{loc}^u(0)$ e $V = B^s \times B^u$. Considere um ponto $q \in W_{loc}^s(0)$ e um disco D^u de dimensão $u = \dim E^u$, transversal a $W_{loc}^s(0)$ em q .

7.1 LEMA (λ -lema) - Sejam $V = B^s \times B^u$, $q \in W^s(0) - \{0\}$ e D^u como acima. Seja D_n^u a componente conexa que contém $f^n(q)$ de $f^n(D^u) \cap V$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então D_n^u está ϵ C^1 -próximo de B^u .



II.11

Demonstração: A expressão de f na vizinhança V é dada por

$$f(x_s, x_u) = (A^s x_s + \phi_s(x_s, x_u), A^u x_u + \phi_u(x_s, x_u))$$

onde

$$(Df)_p = (A^s, A^u), \quad x_s \in B^s, \quad x_u \in B^u$$

$$\|A^s\| \leq a < 1 \quad \|(A^u)^{-1}\| \leq a < 1$$

$$\left. \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u} \right|_{B^u} = \left. \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s} \right|_{B^s} = 0.$$

Como $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_u}(0,0) = 0$, $i, j = s, u$, por continuidade destas aplicações existe k com $a_1 = a + k < 1$, $0 < k < 1$,

$$b = \left(\frac{1}{a} - k\right) > 1, \quad k < \frac{(b-1)^2}{4}$$

e existe $V' \subset V$ tal que

$$k \geq \max_{V'} \left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right\|, \quad i, j = s, u.$$

Podemos supor $q \in V'$ e $B^u \subset V'$. Seja v_0 um vetor unitário qualquer em $(TD^u)_q$. Com relação à decomposição $V = B^s \times B^u$ podemos escrever $v_0 = (v_0^s, v_0^u)$.

Seja λ_0 a inclinação de v_0 , $\lambda_0 = \frac{\|v_0^s\|}{\|v_0^u\|}$, com $\|v_0^u\| \neq 0$ pois D^u é transversal a B^s em q .

Consideremos

$$\begin{aligned} q_1 &= f(q), & v_1 &= (Df)_q(v_0) \\ q_2 &= f^2(q), & v_2 &= (Df)_{q_1}(v_1) \\ &\vdots \\ q_n &= f^n(q), & v_n &= (Df)_{q_{n-1}}(v_{n-1}). \end{aligned}$$

Para $q \in B^s$,

$$(Df)_q(v_0) = \begin{pmatrix} A^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q) & \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q) \\ 0 & A^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0^s \\ v_0^u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^s v_o^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q) v_o^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q) v_o^u \\ A^u v_o^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q) v_o^u \end{pmatrix} .$$

Logo

$$\lambda_1 = \frac{\|A^s v_o^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q) v_o^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q) v_o^u\|}{\|A^u v_o^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q) v_o^u\|}$$

O numerador é majorado por $\|A^s v_o^s\| + \|\frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q) v_o^s\| + \|\frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q) v_o^u\| \leq a\|v_o^s\| + k\|v_o^s\| + k\|v_o^u\|$.

O denominador é minorado por $\|A^u v_o^u\| - \|\frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q) v_o^u\| \geq \frac{1}{a}\|v_o^u\| - k\|v_o^u\|$.

$$\text{Daí } \lambda_1 \leq \frac{a \lambda_o + k \lambda_o + k}{1/a - k} \leq \frac{\lambda_o + k}{b} = \frac{\lambda_o}{b} + \frac{k}{b}$$

$$\lambda_2 \leq \frac{\lambda_1 + k}{b} \leq \frac{\lambda_o}{b^2} + k \sum_{i=1}^2 \frac{1}{b^i}$$

$$\lambda_n \leq \frac{\lambda_o}{b^n} + k \sum_{i=1}^n \frac{1}{b^i} \leq \frac{\lambda_o}{b^n} + \frac{k}{b-1} .$$

Como $\frac{\lambda_o}{b^n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e $\frac{k}{b-1} < \frac{b-1}{4}$, existe $n_o \in \mathbb{Z}^+$ tal que para qualquer $n > n_o$ tem-se:

$$\lambda_n \leq \frac{b-1}{4} .$$

Seja $0 < k_1 < \min(\epsilon, k)$. Como $\frac{\partial \phi}{\partial x_u} \Big|_{B^u} = 0$ e B^u é compacto, existe $\delta < \epsilon$ tal que para $V_1 = \delta B^s \times B^u \subset V$ tem-se

$$\max_{\bar{V}_1} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_u} \right\| \leq k_1.$$

Como v_0 poderia ter sido escolhido tal que λ_0 fosse o máximo entre as inclinações dos vetores unitários de $(TD^u)_q$, temos que existe n_0 tal que para $n \geq n_0$ todos os vetores não nulos de $(TD^u)_{q_n}$ tem inclinação $\lambda_n \leq \frac{b-1}{4}$ e $q_{n_0} \in V_1$. Então, pela continuidade do plano tangente a D^u , existe um disco \bar{D}^u mergulhado em D^u com centro q_{n_0} e tal que a inclinação λ de qualquer vetor unitário em $(\bar{TD}^u)_p$, $p \in \bar{D}^u$, satisfaz $\lambda \leq \frac{b-1}{2}$.

Seja $v \in (\bar{TD}^u)_p$ para $p \in \bar{D}^u$. Considerando a decomposição $v = (v^s, v^u)$, v tem inclinação $\lambda_{n_0} = \left\| \frac{v^s}{v^u} \right\|$. Vejamos quais as inclinações dos iterados de v .

$$(Df)_p(v) = \begin{pmatrix} A^s v^s + \frac{\partial \phi}{\partial x_s}(p)(v^s) + \frac{\partial \phi}{\partial x_u}(p)(v^u) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_s}(p)(v^s) + A^u v^u + \frac{\partial \phi}{\partial x_u}(p)(v^u) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{n_0+1} = \frac{\|A^s v^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(p)(v^s) + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(p)(v^u)\|}{\|\frac{\partial \phi_u}{\partial x_s}(p)(v^s) + A^u v^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(p)(v^u)\|}$$

cujo numerador é menor que $a\|v^s\| + k\|v^s\| + k_1\|v^u\|$ e cujo denominador é maior que $\|A^u v^u\| - \|\frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(v^u)\| - \|\frac{\partial \phi_u}{\partial x_s}(p)(v^s)\| \geq \frac{1}{a}\|v^u\| - k\|v^u\| - k\|v^s\|$.

Dai

$$\begin{aligned} \lambda_{n_0+1} &\leq \frac{a\lambda_{n_0} + k\lambda_{n_0} + k_1}{1/a - k - k\lambda_{n_0}} \leq \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{b - k\lambda_{n_0}} \leq \\ &\leq \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{b - k(\frac{b-1}{2})} \leq \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{b - \frac{b-1}{2}} = \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{\frac{b+1}{2}}. \end{aligned}$$

Seja $b_1 = \frac{b+1}{2}$, $b_1 > 1$. Então $\lambda_{n+n_0} \leq \frac{\lambda_{n_0}}{b_1^n} + \frac{k_1}{b_1^n - 1}$.

E existe \tilde{n} tal que para $n \geq \tilde{n}$

$$\lambda_{n+n_0} \leq \epsilon \left(1 + \frac{1}{b_1^n - 1}\right).$$

Como poderíamos ter considerado v tal que λ_{n_0} fosse a máxima inclinação dos vetores unitários tangentes a \tilde{D}^u , temos que para $n \geq \tilde{n}$, qualquer vetor não nulo tangente a $f^n(\tilde{D}^u) \cap V_1$ tem inclinação menor que $\epsilon \left(1 + \frac{1}{b_1^n - 1}\right)$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe \tilde{n} tal que para $n \geq \tilde{n}$, $f^n(\tilde{D}^u) \cap$

$\cap V_1$ tem todos os seus vetores tangentes não nulos com inclinação menor que ϵ .

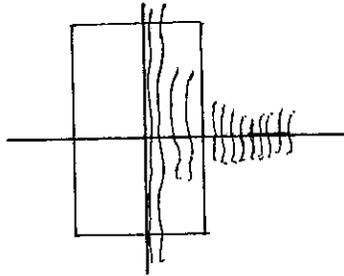
Comparemos as normas do vetor tangente a $f^n(\tilde{D}^u) \cap \cap V_1$ e de seu iterado por Df:

$$(v_n^s, v_n^u) \rightarrow Df(v_n^s, v_n^u) = (v_{n+1}^s, v_{n+1}^u)$$

$$\frac{\sqrt{(v_{n+1}^s)^2 + (v_{n+1}^u)^2}}{\sqrt{(v_n^s)^2 + (v_n^u)^2}} = \frac{v_{n+1}^u}{v_n^u} \sqrt{\frac{1+\lambda_{n+1}^2}{1+\lambda_n^2}}.$$

Das expressões de v_{n+1}^u e v_n^u concluímos que $\frac{v_{n+1}^u}{v_n^u} \geq (\frac{1}{a} - k) - k \lambda_n$.

Como as inclinações λ_{n+1} e λ_n são arbitrariamente pequenas, temos que as normas dos iterados dos vetores tangentes não nulas de $f^n(\tilde{D}^u) \cap V_1$ crescem numa razão arbitrariamente próxima a $b = \frac{1}{a} - k > 1$. Logo, os diâmetros de $f^n(\tilde{D}^u) \cap V_1$ aumentam o que, juntamente com a inclinação uniformemente pequena de seus planos tangentes, vai implicar que existe \bar{n} tal que para todo $n > \bar{n}$ $f^n(\tilde{D}^u) \cap V_1$ é C^1 próximo de B^u , via a projeção canônica em B^u . Com isto, fica demonstrado o λ -lema.



II.12

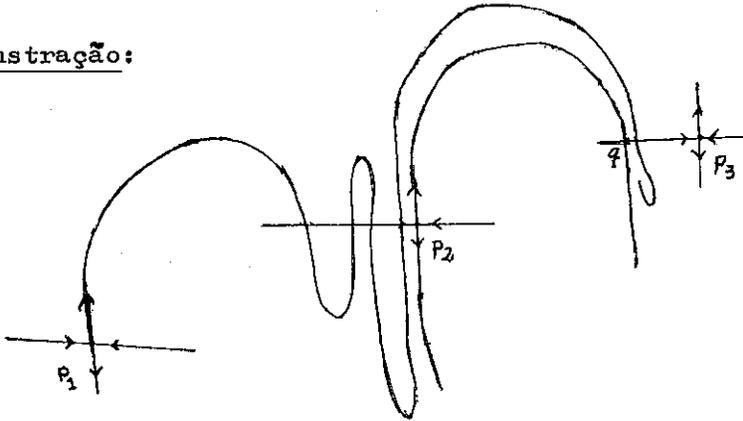
Observações: 1) O λ -lema pode ser enunciado para uma família de discos transversais a $W^s(0)$, desde que esta família seja contínua na topologia C^1 . Assim seja $F: G^s(0) \rightarrow C^1(B^u, M)$ uma aplicação contínua que a cada ponto q do domínio fundamental $G^s(0)$ associa um disco $D_q^u = F(q)B^u$. Seja $U = B^s \times B^u$ como acima. Então dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(D_q^u) \cap U$ é um disco ϵ C^1 -próximo a B^u para qualquer $q \in G^s(0)$ e $n \geq n_0$.

2) Embora isto não seja necessário para a maioria das aplicações, a proximidade dos discos acima pode ser obtida na topologia C^r , $r \geq 1$, se F for uma família contínua de discos de classe C^r . Isto é, se tivermos como anteriormente uma aplicação contínua $F: G^s(0) \rightarrow C^r(B^u, M)$.

COROLÁRIO 1 - Sejam $p_1, p_2, p_3 \in M$ pontos fixos hiperbólicos de $f \in \text{Dif}^r(M)$. Se $W^u(p_1)$ tem um

ponto de interseção transversal com $W^s(p_2)$ e $W^u(p_2)$ tem um ponto de interseção transversal com $W^s(p_3)$ então $W^u(p_1)$ tem um ponto de interseção transversal com $W^s(p_3)$.

Demonstração:



II.13

Seja q um ponto de interseção transversal de $W^u(p_2)$ e $W^s(p_3)$. Consideremos um disco fechado $D \subset W^u(p_2)$ contendo p_2 e q . Como D tem um ponto de interseção transversal com $W^s(p_3)$ segue-se que existe $\epsilon > 0$ tal que se \tilde{D} é um disco ϵ - C^1 próximo a D então \tilde{D} também tem um ponto de interseção transversal com $W^s(p_3)$. Seja agora q_2 um ponto de interseção transversal de $W^s(p_1)$ com $W^s(p_2)$ e $D^u \subset W^u(p_1)$ um disco contendo q_2 cuja dimensão é igual à de $W^u(p_2)$. Pelo λ -lema existe um inteiro n_0 tal que $f^{n_0}(D^u)$ contém um disco \tilde{D} ϵ - C^1 -próximo de D . Portanto existe um ponto $\tilde{q} \in \tilde{D} \cap W^s(p_3)$. Como $W^u(p_1)$ é invariante temos que $f^{n_0}(D^u) \subset W^u(p_1)$ e portanto \tilde{q}

é um ponto de interseção transversal de $W^u(p_1)$ com $W^s(p_2)$.

COROLÁRIO 2 - Sejam $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de $f \in \text{Dif}^r(M)$ e $N^s(p)$ uma vizinhança fundamental de $W^s(p)$. Então $\bigcup_{n \geq 0} f^n(N^s(p)) \supset U - W_{loc}^u(p)$ onde U é uma vizinhança de p .

Demonstração: Observe que iterando por f um domínio fundamental $G^s(p) \subset N^s(p)$ cobrimos $W^s(p) - \{p\}$, isto é, $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(G^s(p)) = W^s(p) - \{p\}$. Além disto, pelo λ -lema, todo ponto de uma vizinhança U de p que não esteja em $W_{loc}^u(p)$ está contido no iterado de uma seção transversal a $G^s(p)$ contida em $N^s(p)$.

Vamos agora demonstrar o λ -lema para campos de vetores. Seja $p \in M$ uma singularidade hiperbólica para $X \in \mathbb{R}^r(M)$. Sejam $W_{loc}^s(p)$ e $W_{loc}^u(p)$ as variedades estável e instável locais do ponto p . Seja B^s um disco mergulhado em $W_{loc}^s(p)$ tal que ∂B^s é transversal ao campo X em $W^s(p)$. A esfera $\mathcal{Q}^s(p) = \partial B^s$ é chamado um domínio fundamental de $W^s(p)$. É fácil ver que se $x \in W^s(p) - \{p\}$ então a órbita de x interceta $\mathcal{Q}^s(p)$ em um único ponto. Analogamente definimos domínio fundamental $\mathcal{Q}^u(p)$ para $W^u(p)$.

Seja D^u um disco transversal a $W_{loc}^s(p)$ contendo um

ponto $q \in W_{loc}^s(p)$ e tal que $\dim D^u = \dim W_{loc}^u(p)$. Consideremos o compacto $K = \{X_t(q); t \in [0,1]\}$ e, por cada ponto $X_t(q) \in K$ consideremos o disco $D^u(X_t(q)) = X_t(D^u)$ que contém o ponto $X_t(q)$ e é transversal a $W_{loc}^s(p)$ pois X_t é um difeomorfismo e $W_{loc}^s(p)$ é invariante por X_t . Seja $f = X_1$ o difeomorfismo induzido no tempo 1. Temos que p é um ponto fixo hiperbólico de f e que as variedades estável e instável de p relativamente ao difeomorfismo f coincidem com as variedades estável e instável de p relativamente ao campo X . Sejam B^s um disco mergulhado em $W_{loc}^s(p)$, contendo p , B^u um disco mergulhado em $W_{loc}^u(p)$ contendo p e $V = B^s \times B^u$ uma vizinhança de p . Pelo λ -lema para difeomorfismos, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, $D_n^u(x)$ está ϵ - C^1 -próximo de B^u , onde, $D_n^u(x)$ é a componente conexa que contém $f^n(x)$ de $f^n(D^u(x)) \cap V$, e $x \in K$. Temos, portanto, o seguinte:

7.2 LEMA - Dado $\epsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que se $t > t_0$ e D_t^u é a componente conexa, que contém $X_t(q)$, de $X_t(D^u) \cap V$, então D_t^u está ϵ - C^1 -próximo de B^u .

Vamos agora apresentar uma outra demonstração do Teorema de Hartman-Grobman de carácter mais geométrico que

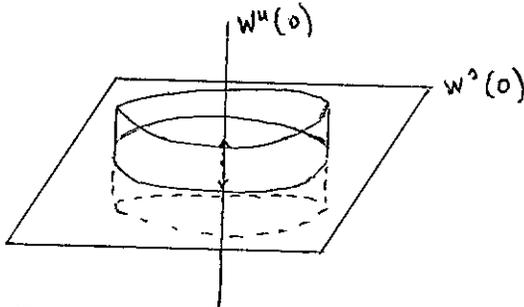
a anterior

7.3 LEMA - Seja $p \in M$ uma singularidade hiperbólica de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Existe uma vizinhança U de p e uma aplicação contínua $\pi_s: U \rightarrow B_s$, onde $B_s = U \cap W_{loc}^s(p)$ é um disco contendo p , com as seguintes propriedades:

- 1) $\pi_s^{-1}(p) = B_u = U \cap W_{loc}^u(p)$ é um disco contendo p ;
- 2) para cada $x \in B_s$, $\pi_s^{-1}(x)$ é uma subvariedade C^r de M transversal a $W_{loc}^s(p)$ no ponto x ;
- 3) π_s é de classe C^r exceto possivelmente nos pontos de B^u ;
- 4) a fibração definida por π_s é invariante pelo fluxo de X , isto é, se $t \geq 0$ então $X_t(\pi_s^{-1}(x)) \supset \supset \pi_s^{-1}(X_t(x))$.

Demonstração: Tomando uma carta local podemos supor que X é um campo em uma vizinhança V da origem em $R^m = E^s \oplus E^u$ tendo 0 como singularidade hiperbólica. Podemos supor também que $W_{loc}^s(0)$ é um aberto de E^s contendo 0 e que $W_{loc}^u(0)$ é um aberto de E^u contendo 0 . Seja $Q^s(0)$ um domínio fundamental de $W^s(0)$. $Q^s(0)$ é uma esfera contida em E^s transversal ao campo X em E^s . Seja $B^u \subset E^u$ um disco contendo 0 . Tomando B^u su

ficientemente pequeno, o cilindro $\mathcal{G}^S(0) \times B^u$ será transversal ao campo



II.14

Em $\mathcal{G}^S(0) \times B^u$ temos uma aplicação C^r , $\pi_s: \mathcal{G}^S(0) \times B^u \rightarrow W_{loc}^S(0)$ que é a projeção no primeiro fator. As fibras por $\pi_s^{-1}(x)$, $x \in \mathcal{G}^S(0)$, são discos transversais a $W_{loc}^S(0)$. Pelo λ -lema $\bigcup_{t \geq 0} X_t(\mathcal{G}^S \times B^u) \supset U - E^u$ onde U é uma vizinhança de p . Se $x \in U \cap E^u$ definimos $\pi_s(x) = p$. Se $x \in U - E^u$ existe $t > 0$ tal que $X_{-t}(x) \in \mathcal{G}^S \times B^u$. Definimos então $\pi_s(x) = X_t \pi_s X_{-t}(x)$. É claro que π_s é de classe C^r em $U - E^u$. A continuidade de π_s em pontos de E^u segue do λ -lema.

Usando as fibrações construídas acima podemos provar a estabilidade local de uma singularidade hiperbólica.

De fato, seja $p \in M$ uma singularidade hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Seja N uma vizinhança de X tal que todo $Y \in N$ tenha uma singularidade p_Y próxima a p e de mesmo índice.

Defina homeomorfismos $h^s: W_{loc}^S(p) \rightarrow W_{loc}^S(p_Y)$, $h^u: W_{loc}^u \rightarrow$

→ $W_{loc}^u(p_Y)$ conjugando o fluxo de X com o fluxo de Y . Como na Proposição 2.14, isto é feito definindo inicialmente homeomorfismos em domínios fundamentais e estendendo-os a $W_{loc}^s(p)$ e $W_{loc}^u(p)$ utilizando os fluxos de X e Y . Considere fibrações $\pi_s^X: U_p \rightarrow W_{loc}^s(p)$, $\pi_u^X: U_p \rightarrow W_{loc}^u(p)$, $\pi_s^Y: V_{p_Y} \rightarrow W_{loc}^s(p_Y)$, $\pi_u^Y: V_{p_Y} \rightarrow W_{loc}^u(p_Y)$ como no Lema 7.3.

Se $q \in U_p$, defina $h(q) = \tilde{q}$ onde \tilde{q} é tal que $\pi_s^Y(\tilde{q}) = h^s(\pi_s^X q)$ e $\pi_u^Y(\tilde{q}) = h^u(\pi_u^X q)$. É fácil ver que h é um homeomorfismo que conjugua os fluxos de X e Y . Observemos que as fibrações consideradas acima definem sistemas de coordenadas contínuas em relação aos quais os fluxos se expressam como produto e consequentemente o homeomorfismo h é o produto de h^s e h^u .

CAPÍTULO III

O TEOREMA DE KUPKA-SMALE

Sejam M uma variedade compacta de dimensão m e $\mathbb{X}^r(M)$ o espaço de campos de vetores C^r de M , $r \geq 1$, com uma norma C^r . No Capítulo II mostramos que o conjunto $Q_1 \subset \mathbb{X}^r(M)$, constituído de campos cujas singularidades são hiperbólicas, é aberto e denso em $\mathbb{X}^r(M)$. Este é um exemplo de propriedade genérica, isto é, propriedade que se verifica para quase todos os campos de vetores. Neste capítulo analizaremos outras propriedades genéricas em $\mathbb{X}^r(M)$. As demonstrações originais dos resultados aqui tratados podem ser encontradas em [9], [24] e [20].

Introduziremos inicialmente o conceito de hiperbolicidade para órbitas fechadas. Como no caso de singularidades, uma órbita fechada hiperbólica γ persiste com pequenas perturbações do campo inicial. Além disto, a estrutura das trajetórias do campo em uma vizinhança de γ é muito simples e estável por pequenas perturbações. Em particular, o conjunto de pontos que tem γ como ω -limite (α -limite) é uma variedade diferenciável chamada varie

dade estável (instável) de γ . De uma certa maneira, a ser precisada no texto, estas variedades modificam-se pou

Consideremos duas singularidades hiperbólicas σ_1 e σ_2 . Se a variedade estável de σ_1 intersesta a variedade instável de σ_2 , então σ_1 e σ_2 estão relacionadas pela existência de órbitas que nascem em σ_2 e morrem em σ_1 . Se esta interseção se dá transversalmente, então uma pequena perturbação do campo dá origem a singularidades hiperbólicas que se relacionam da mesma maneira. Conceitos e fatos análogos são válidos para órbitas fechadas como veremos a seguir.

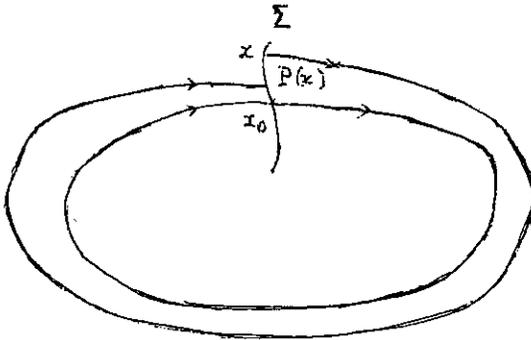
Mostraremos neste capítulo que todos estes fatos ocorrem para os campos de um subconjunto residual de $\mathbb{R}^r(M)$.

§1. Transformação de Poincaré.

No capítulo anterior descrevemos o comportamento topológico das órbitas de um campo de vetores na vizinhança de uma singularidade hiperbólica. Vamos agora analisar a configuração das órbita fechada. Assim como no caso de singularidades, devemos nos restringir a um subconjunto do espaço de campos de vetores afim de obter uma descrição simples da estrutura de órbitas em vizinhanças das

órbitas fechadas.

Seja γ uma órbita fechada de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Por um ponto $x_0 \in \gamma$ consideremos uma seção transversal Σ ao campo X .



III.1

A órbita por x_0 volta a interseccionar Σ no tempo τ , onde τ é o período de γ . Pela continuidade do fluxo de X , a órbita por um ponto $x \in \Sigma$ suficientemente próximo de x_0 também volta a interseccionar Σ em um tempo próximo a τ . Portanto se $V \subset \Sigma$ é uma vizinhança de x_0 suficientemente pequena, podemos definir uma aplicação $P: V \rightarrow \Sigma$ que a cada ponto $x \in V$ associa $P(x)$, sendo $P(x)$ o primeiro ponto onde a órbita de x volta a interseccionar Σ . Esta aplicação é denominada a transformação de Poincaré associada à órbita γ (e à seção Σ). O conhecimento desta aplicação nos permite dar uma descrição das órbitas em uma vizinhança de γ . Assim, se $x \in V$

é um ponto fixo de P , então a órbita de x é fechada e seu período é aproximadamente igual ao período de γ se x estiver próximo a x_0 . Da mesma forma se x for um ponto periódico de P de período k , isto é, se $P(x) \in V$, $P^2(x) \in V, \dots, P^k(x) = x$ então a órbita por x é periódica de período aproximadamente igual a $k\tau$.

Se para todo $k > 0$ $P^k(x)$ estiver definido a órbita positiva por x estará contida em uma vizinhança de γ e se além disto $P^k(x) \rightarrow x_0$ quando $k \rightarrow \infty$ temos que o ω -limite da órbita de x é γ . Podemos também detectar as órbitas que tem γ como α -limite usando a aplicação inversa de P que é a transformação de Poincaré associada ao campo $-X$.

Da continuidade dos fluxos de X e $-X$ segue-se que P é um homeomorfismo de uma vizinhança de x_0 . A seguir vamos mostrar, usando a diferenciabilidade do fluxo via o Teorema do Fluxo Tubular, que P é de fato um difeomorfismo local de mesma classe que o campo. Poderemos então utilizar a derivada de P em x_0 para descrever a estrutura das órbitas na vizinhança de γ . Para isto necessitamos de alguns resultados preliminares.

Um fluxo tubular de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é um par (F, f) , onde F é um aberto de M e f é um difeomorfismo C^r

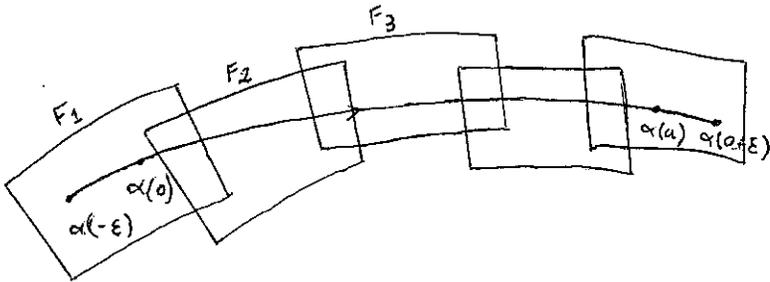
de F sobre o cubo $I^m = I \times I^{m-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}; |x| < 1$
e $|y^i| < 1, i = 1, \dots, m-1\}$, que leva as trajetórias de
 X em F nas retas $I \times \{y\} \subset I \times I^{m-1}$. Se f_*X denota o
campo em I^m induzido por f e X , isto é, $f_*X(x,y) =$
 $Df_{f^{-1}(x,y)} \cdot X(f^{-1}(x,y))$, então f_*X é paralelo ao campo
constante $(x,y) \rightarrow (1,0)$.

O aberto F é chamado uma caixa de fluxo para o
campo X . No capítulo anterior vimos que se $p \in M$ é um
ponto regular de X então existe uma caixa de fluxo con-
tendo p (Teorema do Fluxo Tubular).

1.1 PROPOSIÇÃO (Fluxo Tubular Longo) - Seja $\gamma \subset M$ um
arco de trajetória de X compacto e não
fechado. Então existe um fluxo tubular (F,f) de X
tal que $F \supset \gamma$.

Demonstração: Seja $\alpha: [-\epsilon, a+\epsilon] \rightarrow M$ uma curva integral
de X tal que $\alpha([0,a]) = \gamma$ e $\alpha(t) \neq \alpha(t')$
se $t \neq t'$. Consideremos o compacto $\tilde{\gamma} = \alpha([-\epsilon, a+\epsilon])$.
Como os pontos de $\tilde{\gamma}$ são regulares existe, pelo Teorema
do Fluxo Tubular, uma cobertura de $\tilde{\gamma}$ por caixas de flu-
xo. Seja δ o número de Lebesgue desta cobertura. Tome-
mos uma cobertura finita $\{F_1, \dots, F_k\}$ de $\tilde{\gamma}$ por caixas
de fluxo de diâmetro menor que $\delta/2$. Pela construção se-

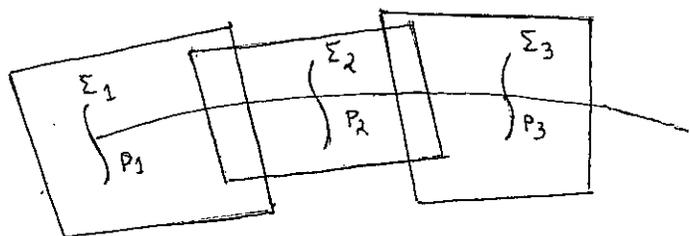
gue-se que se $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ então $F_i \cup F_j$ está contido em uma mesma caixa de fluxo de X . Usando esta propriedade podemos, diminuindo os F_i 's se necessário, reordená-los de modo que cada F_i intersekte apenas F_{i-1} e F_{i+1} .



III.2

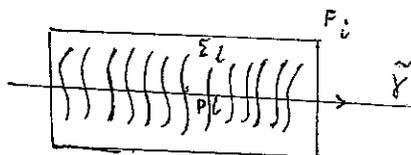
Sejam $-\epsilon = t_1 < t_2 < \dots < t_n = \alpha + \epsilon$ tais que $p_i = \alpha(t_i) \in F_i \cap \tilde{Y}$ e denotemos por I_d^{m-1} o conjunto $\{(0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}; |y_j| < d, j=1, \dots, m-1\}$. Sejam (F_i, f_i) os fluxos tubulares correspondentes às caixas acima. É claro que $\Sigma_1 = f_1^{-1}(I_d^{m-1})$ é uma seção transversal a X , pois f_1 é um difeomorfismo local e $p_1 \in \Sigma_1$. Se $\Sigma_i = X_{t_i - t_1}(\Sigma_1)$, segue-se que Σ_i é uma seção transversal a X que contém o ponto p_i . Tomado d suficiente-

mente pequeno segue-se que $\Sigma_i \subset F_i$.



III.3

Para cada $p \in \tilde{\gamma}$ tomemos $t \in [0, a+2\epsilon]$ tal que $p = X_t(p_1)$ e consideremos a seção $\Sigma_p = X_t(\Sigma_1)$. Usando o Teorema do Fluxo Tubular temos que, $\Sigma_p \cap \Sigma_q = \emptyset$ se $p \neq q$ e que $F = \bigcup_{p \in \tilde{\gamma}} \Sigma_p$ é uma vizinhança de $\tilde{\gamma}$.



III.4

Nesta vizinhança está definida uma fibração C^r cuja fibra sobre o ponto p é Σ_p . Isto é, a projeção $\pi_1: F \rightarrow \tilde{\gamma}$ que a cada $z \in F$ associa o ponto p tal que $z \in \Sigma_p$ é uma aplicação C^r . Temos também definida em F uma projeção C^r , $\pi_2: F \rightarrow \Sigma_1$, que a cada ponto $z \in F$ associa a interseção da órbita de z com Σ_1 . Mais precisamente, se $z \in \Sigma_p$ e $p = X_t(p_1)$ então $\pi_2(z) = X_{-t}(z)$.

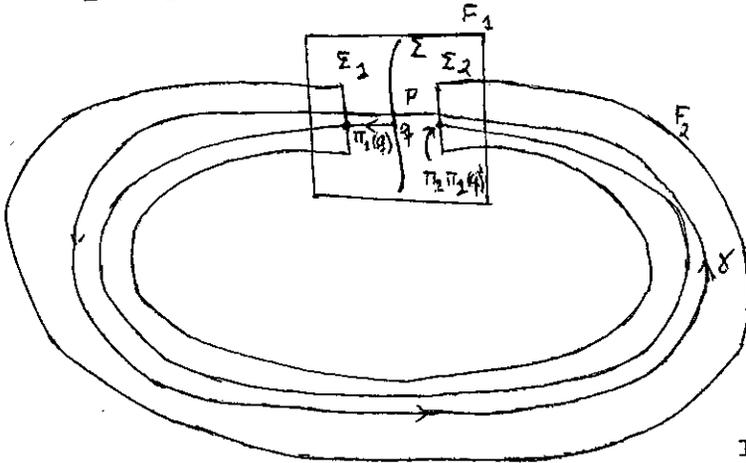
Consideremos dois difeomorfismos $g_1: \tilde{\gamma} \rightarrow [-1,1]$ e $g_2: \Sigma_1 \rightarrow I^{m-1}$. Definimos então $f: F \rightarrow IXI^{m-1}$ por $f(z) = (g_1 \pi_2(z), g_2 \pi_2(z))$. É claro que (F, f) é um fluxo tubular que contém γ .

Observação: O difeomorfismo f obtido acima leva órbitas de X em F em órbitas do campo constante $C: IXI^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $C(x,y) = (1,0)$. Em geral f não preserva o parâmetro t , isto é, f_*X não é igual ao campo C . Podemos, no entanto, encontrar uma vizinhança de γ , $\tilde{F} \subset F$, e um difeomorfismo $\tilde{f}: \tilde{F} \rightarrow (-b,b) \times I^{m-1}$, onde $b > 0$, tal que \tilde{f}_*X seja o campo constante. Com efeito, seja $p \in \gamma$ e $b > 0$ tal que $\gamma \subset \bigcup_{t \in (-b,b)} X_t(p) \subset F$. Seja $\Sigma_p \subset F$ uma seção transversal a X pelo ponto p suficientemente pequena para que $\tilde{F} = \bigcup_{t \in (-b,b)} X_t(\Sigma_p)$ esteja contido em F . Se $z \in \tilde{F}$ e $X_{-t}(z) \in \Sigma_p$, seja $\tilde{f}(z) = (t, hX_{-t}(z))$ onde $h: \Sigma_p \rightarrow I^{m-1}$ é um difeomorfismo. É fácil ver que \tilde{f} é um difeomorfismo C^r e que \tilde{f}_*X é o campo constante.

1.2 PROPOSIÇÃO - Sejam γ uma órbita fechada de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e Σ uma seção transversal a X por um ponto $p \in \gamma$. Se $P_\Sigma: U \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ é a transformação de Poincaré então P_Σ é um difeomorfismo C^r de uma vizinhança V de p em Σ sobre um aberto

de Σ .

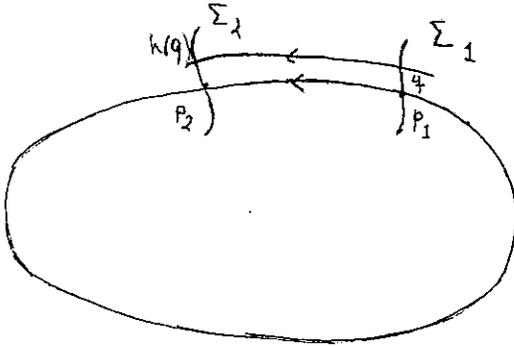
Demonstração: Sejam (F_1, f_1) um fluxo tubular contendo p e (F_2, f_2) um fluxo tubular longo tal que $\gamma \subset F_1 \cup F_2$ como na figura abaixo.



III.5

Sejam Σ_1 e Σ_2 as componentes do bordo de F_2 que são transversais a X , isto é, $\Sigma_1 = f_2^{-1}(\{-1\} \times I^{m-1})$ e $\Sigma_2 = f_2^{-1}(\{1\} \times I^{m-1})$. Denotemos por $\pi_1: V \subset \Sigma \rightarrow \Sigma_1$, $\pi_2: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ e $\pi_3: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma$ as projeções ao longo das trajetórias de X . Temos que $P_\Sigma = \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$. Usando o Teorema do Fluxo Tubular, é fácil ver que π_1 , π_2 e π_3 são aplicações de classe C^r . Logo P_Σ é C^r . Como P_Σ tem uma inversa de classe C^r que é a transformação de Poincaré correspondente ao campo $-X$, segue-se que P_Σ é um difeomorfismo C^r de V sobre um aberto de Σ . ■

Sejam Σ_1 e Σ_2 seções transversais a X pelos pontos p_1 e p_2 pertencentes a uma órbita fechada γ como na figura abaixo.



III.6

Seja $h: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ a aplicação que a cada $q \in \Sigma_1$ associa o primeiro ponto em que a órbita de q intersesta Σ_2 . Pelo Teorema do Fluxo Tubular temos que h é um difeomorfismo C^r . Se P_{Σ_1} e P_{Σ_2} são as transformações de Poincaré associadas às seções Σ_1 e Σ_2 respectivamente, temos que $P_{\Sigma_2} = h \circ P_{\Sigma_1} \circ h^{-1}$. Logo $DP_{\Sigma_2}(p_2) = Dh(p_1) \circ DP_{\Sigma_1}(p_1) \circ Dh^{-1}(p_2)$ e portanto $DP_{\Sigma_2}(p_2)$ tem os mesmos autovalores que $DP_{\Sigma_1}(p_1)$. Isto mostra que a definição abaixo depende apenas do campo e não da seção Σ escolhida.

DEFINIÇÃO - Seja $p \in \gamma$, onde γ é uma órbita fechada de X . Seja Σ uma seção transversal a X

pelo ponto p . Dizemos que γ é uma órbita fechada hiperbólica de X se p é um ponto fixo hiperbólico da transformação de Poincaré $P: V \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$.

Observação: Como o fluxo de um campo de vetores depende continuamente do campo temos que a transformação de Poincaré também depende continuamente do campo. Mais precisamente seja $P_X: V \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ a transformação de Poincaré de X . Seja \mathcal{U} uma vizinhança de X em $\mathfrak{X}^r(M)$ tal que para todo Y em \mathcal{U} , Σ ainda seja uma seção transversal a Y e toda órbita de Y por um ponto de V volte a interseccionar Σ . Então a aplicação $\mathcal{U} \rightarrow C^r(V, \Sigma)$ que a cada $Y \in \mathcal{U}$ associa sua transformação de Poincaré P_Y é contínua.

Da observação acima concluímos que se γ é uma órbita fechada hiperbólica do campo X , existe uma vizinhança \mathcal{U} de X em $\mathfrak{X}^r(M)$ tal que todo $Y \in \mathcal{U}$ possui uma órbita fechada hiperbólica γ_Y próxima à γ . Isto porque uma propriedade análoga é válida para pontos fixos hiperbólicos de difeomorfismos como vimos no capítulo anterior.

No que se segue vamos mostrar que se γ é uma órbita fechada hiperbólica de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ então X é localmente estável em γ . Isto é, para cada campo Y ,

pertencente a uma vizinhança \mathcal{U} de X , existe um homeomorfismo $h: V \rightarrow V'$, onde V é uma vizinhança de γ , levando órbitas de X em órbitas de Y . Como já observamos, não podemos exigir que o homeomorfismo h conjugue os fluxos X_t e Y_t , pois isto implicaria, entre outras coisas, que a órbita fechada $\gamma_Y \subset V'$ teria o mesmo período que γ . É claro que existe campo Y arbitrariamente próximos a X tal que γ_Y tem período diferente de γ : basta tomar $Y = (1 + \frac{1}{n})X$ com n suficientemente grande.

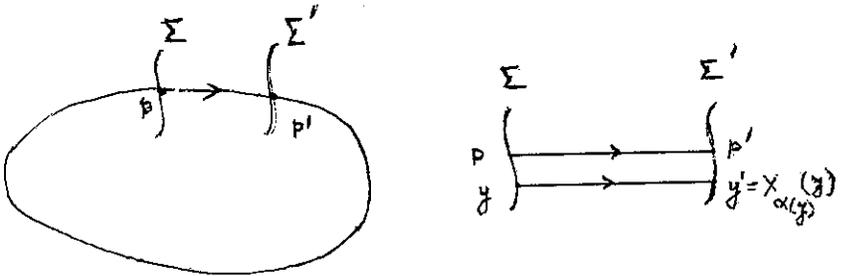
Seja Σ uma seção transversal ao campo X por um ponto $p \in \gamma$. Dizemos que Σ é uma seção invariante se existe um vizinhança $U \subset \Sigma$ de p tal que $X_\omega(U) \subset \Sigma$, onde ω é o período de γ .

O lema abaixo mostra que podemos reparametrizar o campo X , de modo a tornar invariante uma dada seção transversal. A demonstração é bastante técnica, embora o fato seja intuitivamente claro.

1.3 LEMA - Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, γ uma órbita fechada hiperbólica de X de período ω e Σ uma seção transversal a X por um ponto $p \in \gamma$. Então existe uma função contínua $\mu: \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{X}^r(M)$, onde \mathcal{U} é uma vizinhança de X , tal que:

- a) $\mu(Y) = \rho_Y \cdot Y$ onde $\rho_Y: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, positiva, que vale 1 fora de uma vizinhança de um ponto de γ ;
- b) existe uma vizinhança $U \subset \Sigma$ de p tal que $Y_w^*(U) \subset \Sigma$, onde $Y^* = \mu(Y)$. Isto é, Σ é uma seção invariante de $Y^* = \mu(U)$, para todo $Y \in \mathcal{V}$.

Demonstração: Seja $\Sigma' = X_{-(w-t_0)}(\Sigma)$ sendo $0 < t_0 < w$.



III.7

Temos $X_{t_0}(p) = p' \in \Sigma'$. Consideremos a função C^r , $\alpha: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada $y \in \Sigma$ associa o menor tempo $\alpha(y)$ tal que $X_{\alpha(y)}(y) \in \Sigma'$. Observemos que se $\alpha(y) = t_0$ para todo y em uma vizinhança de p em Σ , então Σ é invariante.

Sejam $U \subset \bar{U} \subset \Sigma$ vizinhanças de p tais que $\bar{U} \subset \bar{U}$. Usando uma "função auxiliar" que vale 1 em \bar{U} e 0 fora de \bar{U} definimos uma função C^r $\beta: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ que é

igual a α em U e é constante igual a t_0 fora de \tilde{U} . Usando a mesma "função auxiliar" definimos, para cada campo Y de uma vizinhança de X , uma função C^r $\beta_Y: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, que é igual a t_0 fora de \tilde{U} e que em U coincide com a função α_Y . Aqui $\alpha_Y: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é a função que a cada $y \in \Sigma$ associa o menor tempo $\alpha_Y(y)$ tal que $Y_{\alpha_Y(y)}(y) \in \Sigma'_Y$ onde $\Sigma'_Y = Y_{-(w-t_0)}(\Sigma)$.

Vamos construir a seguir a reparametrização desejada. Seja $G: \mathcal{V} \times \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^r satisfazendo a seguinte condição. Para cada $Y \in \mathcal{V}$ e $y \in \Sigma$, $G_{Y,y}(t) = G(Y,y,t)$ é um polinômio em t de grau $2r+3$ cujos coeficientes são determinados por:

$$G_{Y,y}(0) = 0, \quad G_{Y,y}(t_0) = \beta_Y(y)$$

$$\frac{dG_{Y,y}}{dt}(0) = 1, \quad \frac{dG_{Y,y}}{dt}(t_0) = 1$$

$$\frac{d^k G_{Y,y}}{dt^k}(0) = 0, \quad \frac{d^k G_{Y,y}}{dt^k}(t_0) = 0, \quad k = 2, \dots, r+1 \quad .$$

Temos que $G_{Y,y}(t) = t + a_1 t^{r+2} + \dots + a_{r+2} t^{2n+3}$ onde

$$a_j = \frac{\beta_Y(y) A_{1j} - t_0 A_{1j}}{\det A}, \quad j = 1, \dots, r+2$$

$$A = \begin{bmatrix} t_0^{r+2} & t_0^{r+3} & \dots & t_0^{2r+3} \\ (r+2)t_0^{r+1} & (r+3)t_0^{r+2} & \dots & (2r+3)t_0^{2r+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (r+2)!t_0 & \frac{(r+3)!}{2!} t_0^2 & \dots & \frac{(2r+3)!}{(r+2)!} t_0^{r+2} \end{bmatrix}$$

e A_{1j} é o cofator do elemento $a_{1j} = t_0^{r+j+1}$ de A .

Daí resulta que $H_Y(y, t) = \frac{dG_{Y,Y}(t)}{dt}$ satisfaz às condições seguintes:

- a) $H_Y(y, 0) = H_Y(y, t_0) = 1$ para $y \in \Sigma$
- b) $H_Y(y, t) = 1$ para $y \notin \tilde{U}$
- c) $D^k H_Y(y, 0) = D^k H_Y(y, t_0) = 0$ para todo $y \in \Sigma$
e $k = 1, \dots, r$.

Para verificar (c), observemos que

$$\frac{\partial H_Y}{\partial y}(y, t_0) = \frac{\partial \beta_Y(y)}{\det A} ((r+2)t_0^{r+1} A_{11} + \dots + (2r+3)t_0^{2r+2} A_{1, r+2})$$

$$\text{Logo } \frac{\partial H_Y}{\partial y}(y, t_0) = \frac{\partial \beta_Y(y)}{\det A} \sum_{j=1}^{r+2} a_{2j} A_{1j} = 0. \quad \text{Portanto}$$

$$\frac{\partial^k H_Y}{\partial y^k}(y, t_0) = 0 \quad \text{para } k = 1, \dots, r. \quad \text{Por outro lado,}$$

$$\frac{\partial^{1+i} H_Y}{\partial y \partial t^i}(y, t_0) = \frac{\partial \beta_Y(y)}{\det A} \sum_{j=1}^r a_{ij} A_{1j} = 0.$$

Assim $H/\Sigma \times [0, t_0]$ estende-se a uma aplicação C^r $H: \Sigma \times R \rightarrow R$, sendo $H = 1$ fora de $\Sigma \times [0, t_0]$.

Para v e \tilde{U} pequenos, a aplicação $G_{Y,y}: [0, t_0] \rightarrow [0, \beta_Y(y)]$ é um difeomorfismo, sendo que $G_{Y,y}$ é a identidade para $y \notin \tilde{U}$. Também a aplicação $\varphi_Y: \Sigma \times [0, t_0] \rightarrow M$, definida por $\varphi_Y(y, t) = Y_{t^*}(y)$ onde $t^* = G_{Y,y}(t)$, é um difeomorfismo C^r . Seja $W = \varphi_Y(\Sigma \times [0, t_0]) \subset M$ e definamos $\rho_Y: M \rightarrow R$ que é igual a 1 fora de W e em W é a composta das aplicações

$$q \xrightarrow{\varphi_Y^{-1}} (y, t) \rightarrow \frac{dG_{Y,y}}{dt}(t) = H_Y(y, t).$$

Pela construção acima, ρ_Y é de classe C^r . Consideremos o campo $Y^* = \rho_Y \cdot Y$. Afirmamos que $Y_{t_0}^*(y) \in \Sigma_Y^1$ para qualquer $y \in \Sigma$. De fato, sejam $y \in U$ e

$\psi: [0, \beta_Y(y)] \rightarrow M$ a curva integral de Y pelo ponto y .

Assim $\psi(t) = Y_t(y)$ e $\psi(\beta_Y(y)) \in \Sigma_Y^1$. Seja agora

$\psi^*: [0, t_0] \rightarrow M$ a aplicação $\psi^* = \psi \circ G_{Y,y}$. Verifiquemos

que ψ^* é a curva integral de Y^* passando por y .

Temos

$$\begin{aligned} \frac{d\psi^*}{dt}(t) &= \frac{d\psi}{dt}(G_{Y,y}(t)) \cdot \frac{dG_{Y,y}}{dt}(t) = \\ &= \frac{dG_{Y,y}}{dt}(t) \cdot Y(\psi \circ G_{Y,y}(t)) = \rho_Y(\psi^*(t)) \cdot Y(\psi^*(t)) = Y^*(\psi^*(t)). \end{aligned}$$

Assim $Y_{t_0}^*(y) = \psi^*(t_0) = \psi(\beta_Y(y)) \in \Sigma_Y^1$.

Completamos a demonstração definindo $\mu(Y) = Y^*$ ■

Observação: Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $p_0 \in M$ e Σ uma seção transversal a X contendo p_0 . Sejam $\Sigma^1 = X_{t_1}(\Sigma)$ e $p_1 = X_{t_1}(p_0)$. Da demonstração do lema, segue-se que podemos reparametrizar todos os campos próximos a X de modo que levem a seção Σ na seção Σ^1 no tempo t_1 . Tal reparametrização pode ser localizada em uma vizinhança de um ponto $p = X_t(p_0)$ para $0 < t < t_1$.

1.4 PROPOSIÇÃO - Se γ é uma órbita fechada hiperbólica de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ então X é localmente estável em γ .

Demonstração: Sejam ω o período de γ e Σ uma seção transversal a X por um ponto $p \in \gamma$. Temos que p é um ponto fixo hiperbólico da transformação de Poincaré P_X . Para Y próximo a X , a transformação de Poincaré P_Y está próxima de P_X . Então, pelo Teorema de Hartman, existem vizinhanças \mathcal{V} de X e $U \subset \Sigma$ de p com a seguinte propriedade: para cada $Y \in \mathcal{V}$ podemos encontrar um homeomorfismo h_Y de U em uma vizinhança de p em Σ conjugando P_X e P_Y , isto é, $h_Y P_X = P_Y h_Y$. Vamos estender h_Y a uma vizinhança de γ . Seja $\mu: \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{X}^r(M)$ a função obtida no Lema 1.3. Seja V uma vizinhança de γ tal que se $y \in V$ existe $0 \leq t \leq \omega$ com $X_t^*(y) \in U$ onde $X^* = \mu(X)$. Definimos então $h_Y(y) =$

$= Y_{-t}^* h_Y X_t^*(y)$. É fácil ver que se V for suficientemente pequena h_Y está bem definida, é um homeomorfismo e conjuga os fluxos X_t^* e Y_t^* . Como X^* e Y^* tem as mesmas órbitas que X e Y respectivamente, concluímos que h_Y leva órbitas de X em órbitas de Y . ■

Se γ é uma órbita fechada hiperbólica de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ definimos as variedades estável e instável de γ por

$$W^S(\gamma) = \{y \in M; \omega(y) = \gamma\}$$

$$W^U(\gamma) = \{y \in M; \alpha(y) = \gamma\}$$

Seja V uma vizinhança de γ . Se $X_t(q) \in V$ para $t \geq 0$ então $q \in W^S(\gamma)$. Tal fato segue-se de uma propriedade análoga da transformação (difeomorfismo) de Poincaré de γ .

Consideremos os conjuntos $W_V^S(\gamma) = \{y \in V; X_t(y) \in V \forall t \geq 0\}$ e $W_V^U(\gamma) = \{y \in V; X_t(y) \in V \forall t \leq 0\}$. Temos que $W^S(\gamma) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{-n} W_V^S(\gamma)$ e $W^U(\gamma) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n W_V^U(\gamma)$.

1.5 PROPOSIÇÃO - Seja γ uma órbita fechada hiperbólica de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Seja V uma pequena vizinhança aberta de γ . Então $W_V^S(\gamma)$ e $W_V^U(\gamma)$ são subvariedades C^r de M , $W_V^S(\gamma)$ é transversal a $W_V^U(\gamma)$ e $W_V^S(\gamma) \cap W_V^U(\gamma) = \gamma$.

Demonstração: Seja Σ uma seção transversal a X por um

ponto $p \in \gamma$. Se $U = V \cap \Sigma$ denotemos por $W_U^S(p)$ e $W_U^u(p)$ as variedades estável e instável respectivamente da transformação de Poincaré P_X . Como p é um ponto fixo hiperbólico de P_X temos que $W_U^S(p)$ e $W_U^u(p)$ são subvariedades C^r de Σ , $W_U^S(p)$ é transversal a $W_U^u(p)$ e $W_U^S(p) \cap W_U^u(p) = \{p\}$. Por outro lado é fácil ver que

$$W_V^S(\gamma) = V \cap \{X_{-t}(q); q \in W_U^S(p) \text{ e } t \in (0, 2\omega)\}$$

$$W_V^u(\gamma) = V \cap \{X_t(q); q \in W_U^u(p) \text{ e } t \in (0, 2\omega)\}$$

onde ω é o período de γ .

Usando o Teorema do Fluxo Tubular concluímos que $W_V^S(\gamma)$ e $W_V^u(\gamma)$ são subvariedades de M o que demonstra a proposição. ■

COROLARIO - $W^S(\gamma)$ e $W^u(\gamma)$ são subvariedades imersas de M de classe C^r .

Exercício - Seja γ uma órbita fechada hiperbólica de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Mostre que existe uma vizinhança \mathcal{U} de X e para cada $Y \in \mathcal{U}$ uma vizinhança $W_Y \subset W^S(\gamma_Y)$ de γ_Y tal que a aplicação $Y \mapsto W_Y$ seja contínua. Isto é, dado $\epsilon > 0$ e $Y_0 \in \mathcal{U}$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|Y - Y_0\| < \delta$ então W_Y está ϵ C^r -próxima de W_{Y_0} .

§2. Genericidade dos Campos de Vetores cujas órbitas fechadas são hiperbólicas.

No capítulo anterior mostramos que o conjunto $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{X}^r(M)$, constituído de campos cujas singularidades são hiperbólicas, é aberto e denso em $\mathcal{X}^r(M)$. Neste seção vamos provar que o conjunto $\mathcal{G}_{12} \subset \mathcal{G}_1$ dos campos de \mathcal{G}_1 cujas órbitas fechadas são hiperbólicas é residual. Para isto basta mostrar que se $T > 0$ é um inteiro qualquer então o conjunto $\mathcal{X}(T) \subset \mathcal{G}_1$ dos campos cujas órbitas fechadas de período $\leq T$ são hiperbólicas é aberto e denso. De fato, como $\mathcal{G}_{12} = \bigcap_{T \geq 1} \mathcal{X}(T)$ segue-se que \mathcal{G}_{12} é residual.

2.1 LEMA - Seja $p \in M$ uma singularidade hiperbólica de $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Dado $T > 0$ existem vizinhanças $U \subset M$ de p e $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}^r(M)$ de X e uma função contínua $\rho: \mathcal{U} \rightarrow U$ tal que:

- i) se $Y \in \mathcal{U}$, $\rho(Y)$ é a única singularidade de Y em U a qual é hiperbólica;
- ii) toda órbita fechada de um campo $Y \in \mathcal{U}$ que passa por U tem período $> T$.

Demonstração: O item (i) já foi demonstrado no capítulo

anterior

Pelo teorema de Hartman existe uma vizinhança V de p tal que não existe órbita fechada de $Y \in \mathcal{U}$ inteiramente contida em V . Como $X(p) = 0$ podemos encontrar uma vizinhança U de p contida em V tal que se $q \in U$ então $X_t(q) \in V$ para $t \leq 2T$. Diminuindo a vizinhança \mathcal{U} se necessário teremos que $Y_t(q) \in V \forall t \leq T$ se $q \in U$ e $Y \in \mathcal{U}$. Como Y não tem órbita fechada inteiramente contida em V , o lema está demonstrado. ■

2.2 LEMA - Sejam $T > 0$ e γ uma órbita fechada hiperbólica de um campo $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Então existem vizinhanças $U \subset M$ de γ e $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}^r(M)$ de X tais que:

- i) cada $Y \in \mathcal{U}$ possui uma órbita fechada hiperbólica $\gamma_Y \subset U$ e toda órbita fechada de Y distinta de γ_Y que passa por U tem período maior do que T ;
- ii) a órbita γ_Y varia continuamente com Y .

Demonstração: Tomemos uma seção transversal Σ por um ponto p de γ e seja $P_X: V \rightarrow \Sigma$ a transformação de Poincaré associada a X . Sejam τ o período de γ e n um inteiro positivo tal que $n\tau > 2T$. Tomando $V \subset \Sigma$ suficientemente pequena temos que P_X^n está definida em V . Como a transformação de Poincaré depende continuamente do campo, existe uma vizinhança \mathcal{U} de X

tal que se $Y \in \mathcal{U}$ P_Y^n está definida em V . Como p é um ponto fixo hiperbólico de P_X temos que, diminuindo \mathcal{U} e V se necessário, existe uma função contínua $\rho: \mathcal{U} \rightarrow V$ que associa a cada $Y \in \mathcal{U}$ o único ponto fixo $\rho(Y)$ de P_Y em V e este ponto fixo é hiperbólico. Se γ_Y é a órbita de Y por $\rho(Y)$ segue-se que γ_Y é uma órbita fechada hiperbólica e evidentemente γ_Y varia continuamente com Y . Pelo Teorema de Hartman para difeomorfismos, a continuidade da transformação de Poincaré com o campo, existe uma vizinhança $\tilde{V} \subset V$ de p e uma vizinhança \mathcal{U} de X tal que para todo $Y \in \mathcal{U}$ e para todo $q \in \tilde{V}$, $P_Y^k(q) \in V$ para $k = 1, \dots, n$. Portanto, diminuindo \mathcal{U} se necessário, toda órbita fechada de $Y \in \mathcal{U}$ distinta de γ_Y passando por um ponto $q \in \tilde{V}$ tem período $> T$ uma vez que q não é ponto periódico de P_Y . Basta tomar $U = \bigcup_{t \in [0, \tau + \epsilon]} X_t \tilde{V}$ onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. ■

COROLÁRIO - Seja $X \in \mathcal{G}_{1,2}$, isto é, todas as singularidades e órbitas fechadas de X são hiperbólicas.

Dado $T > 0$ existe apenas um número finito de órbitas fechadas de X de período $\leq T$. Em particular X possui no máximo uma quantidade enumerável de órbitas fechadas.

Demonstração: Suponha por absurdo que X possua uma infi

nidade de órbitas fechadas de período $\leq T$ e seja γ_n uma seqüência de tais órbitas com $\gamma_n \neq \gamma_{n'}$ se $n \neq n'$. Seja $p_n \in \gamma_n$. Como M é compacta, passando a uma subseqüência se necessário podemos supor que $p_n \rightarrow p$. Logo a órbita de p é acumulada por uma infinidade de órbitas fechadas de período $\leq T$. Pela Lema 2.1, p não pode ser uma singularidade e pelo Lema 2.2 a órbita de p não pode ser fechada. Logo a órbita de p é regular. Seja $p_1 = X_{-T}(p)$ e $p_2 = X_T(p)$. Seja F uma caixa de fluxo contendo o arco $p_1 p_2$ da órbita de p . Se p_n está suficientemente próximo de p , $X_t(p_n) \in F$ para $t \in [-T/2, T/2]$ e portanto a órbita de p_n tem período $> T$ o que é um absurdo. ■

2.3 LEMA - Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $K \subset M$ um compacto tal que X não possua singularidades em K e que as órbitas fechadas de X por pontos de K tenham período $> T$. Então existe uma vizinhança $U \subset \mathfrak{X}^r(M)$ de X tal que todo $Y \in U$ não possui singularidades em K e as órbitas fechadas de Y por pontos de K têm período $> T$.

Demonstração: Como K é compacto e $X \neq 0$ em K , existe vizinhança $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ de X tal que todo campo $Y \in \mathfrak{h}$ não possui singularidades em K . Seja

$p \in K$. Como a órbita de X por p ou é regular ou tem período maior do que T segue-se que existe $\epsilon > 0$ e uma vizinhança U_p de p tal que para $q \in U_p$, $X_t(q) \notin U_p$ para todo $t \in [\epsilon, T+\epsilon]$. Como o fluxo depende continuamente do campo existe uma vizinhança $U_p \subset \mathbb{R}^n$ de X tal que a mesma propriedade é verdadeira para todo $Y \in U_p$. Em particular toda órbita fechada de $Y \in U_p$ por um ponto de U_p tem período maior do que T . Seja U_{p_1}, \dots, U_{p_k} uma cobertura finita do compacto K e seja $U = \bigcap_{i=1}^k U_{p_i}$. É claro que toda órbita fechada de $Y \in U$ por um ponto de K tem período maior que T . ■

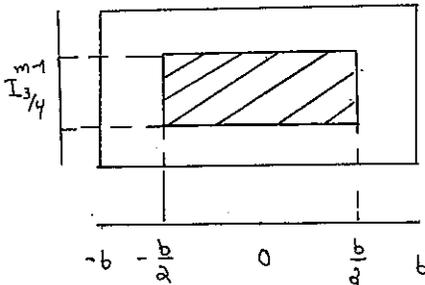
Sejam X um campo de vetores C^∞ em M , γ uma órbita fechada de X , Σ uma seção transversal por um ponto $p \in \gamma$. Seja $U \subset \mathbb{R}^n(M)$ uma vizinhança de X e seja $V \subset \Sigma$ uma vizinhança de p tais que para todo $Y \in U$ a transformação de Poincaré de Y esteja definida em V .

2.4 LEMA - Nas condições acima existe uma vizinhança

$U \subset M$ de γ com a seguinte propriedade:

dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar um campo de vetores C^∞ $Y \in U$ com $\|Y-X\|_r < \epsilon$ tal que P_Y tenha apenas um número finito de pontos fixos em $\Sigma \subset U$ todos eles elementares.

Demonstração: Seja (F, f) um fluxo tubular centrado em p tal que $f^{-1}(\{0\} \times I^{m-1}) = \Sigma \cap F$ e também que $f_x X$ seja o campo unitário em $[-b, b] \times I^{m-1}$. Seja \tilde{C} um campo de vetores C^∞ definido em $f(F) \subset \mathbb{R}^m$ tal que \tilde{C} seja transversal a $\{-b\} \times I^{m-1}$ e $\{b\} \times I^{m-1}$ e que toda órbita de \tilde{C} por um ponto de $\{-b\} \times I^{m-1}$ encontre $\{b\} \times I^{m-1}$. Podemos definir uma aplicação $L_{\tilde{C}}: \{-b\} \times I^{m-1} \rightarrow \{b\} \times I^{m-1}$ que a cada ponto de $\{-b\} \times I^{m-1}$ associa a interseção de sua órbita com $\{b\} \times I^{m-1}$. Pelo Teorema do Fluxo Tubular $L_{\tilde{C}}$ é um difeomorfismo. Seja $A = [-b, -\frac{b}{2}] \times I^{m-1} \cup [\frac{b}{2}, b] \times I^{m-1} \cup [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}] \times (I^{m-1} - I_{3/4})$.



III.8

Vamos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $\epsilon_1 > 0$ tal que para todo $v \in \mathbb{R}^m$ com $\|v\| < \epsilon_1$ podemos encontrar um campo de vetores \tilde{C} de classe C^∞ tal que $\|\tilde{C} - C\|_T < \epsilon$ em $[-b, b] \times I^{m-1}$, $\tilde{C} = C$ em A e $L_{\tilde{C}}(-b, y) = (b, y+v)$ se $y \in I_{1/4}^{m-1}$. De fato, seja $\psi: [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função

C^∞ tal que $\psi(t) = 0$ se $t \in [-b, -\frac{b}{2}] \cup [\frac{b}{2}, b]$ e $\psi(t) > 0$ se $t \in (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$. Seja $\varphi: I^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\varphi(y) = 0$ se $\|y\| > \frac{3}{4}$ e $\varphi(y) = 1$ se $\|y\| \leq \frac{1}{2}$. Definimos $\tilde{C}(x, y) = (1, \rho\varphi(y) \cdot \psi(x)v)$ e vamos determinar o número real ρ para que \tilde{C} satisfaça às condições do problema. A equação diferencial associada a \tilde{C} pode ser escrita como

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = \rho\varphi(y) \psi(t)v \end{cases}$$

A solução desta equação com condições iniciais $x(0) = -b$ e $y(0) = y_0 \in I_{1/4}$ pode ser escrita como $x(t) = t - b$, $y(t) = y_0 + \left(\int_0^t \rho\varphi(y(s)) \psi(s-b) ds \right) v$. Tomemos $\frac{1}{\rho} = \int_0^{2b} \psi(s-b) ds$.

É fácil ver que se $\|v\|$ for suficientemente pequeno teremos que $\|y(t)\| < \frac{1}{2}$ para todo $t \in [0, 2b]$. Assim

$\varphi(y(s)) = 1$ e portanto $y(t) = y_0 + \left(\rho \int_0^t \psi(s-b) ds \right) v$.

Logo $L_{\tilde{C}}(-b, y_0) = (b, y_0 + v)$ o que demonstra a afirmativa acima.

Seja Y o campo de vetores em M que é igual a X fora de $f^{-1}([-b, b] \times I^{m-1})$ e igual a $(f^{-1})_* \tilde{C}$ em $f^{-1}([-b, b] \times I^{m-1})$. É claro que Y é C^∞ e que $\|Y - X\|_r < \epsilon$.

Denotemos por Σ_1 a seção transversal definida por $f^{-1}(\{b\} \times I^{m-1})$ e seja $V \subset \Sigma_1$ uma pequena vizinhança de $p_1 = f^{-1}(b, 0)$ tal que as transformações de Poincaré P_X

e P_Y estejam definidas. A expressão de P_Y na carta local f/Σ_1 é dada por

$$P_Y(b,y) = P_X(b,y) \dagger v$$

se $v \subset f^{-1}(\{b\} \times I_{1/4})$ e $y \in I_{1/4}$.

Pela Proposição 3.3 do Capítulo I podemos escolher $v \in \mathbb{R}^{m-1}$, $\|v\| < \epsilon_1$, tal que a aplicação $y \mapsto (y, P_Y(y))$ seja transversal à diagonal de $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Com esta escolha os pontos fixos de P_Y em V serão todos elementares, o que prova o lema. ■

2.5 LEMA - Seja γ uma órbita fechada de um campo de vetores C^∞ X . Dado $\epsilon > 0$ existe um campo de vetores Y em M , de classe C^∞ , tal que $\|Y-X\|_r < \epsilon$ e que γ seja uma órbita fechada hiperbólica de Y .

Demonstração: Seja (F, f) um fluxo tubular, centrado em um ponto de γ , tal que f_*X seja o campo unitário em $[-b, b] \times I^{m-1}$. Vamos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $\epsilon_1 > 0$ tal que para todo $0 < \delta < \epsilon_1$ podemos encontrar um campo de vetores \tilde{C} de classe C^∞ tal que $\|\tilde{C}-C\|_r < \epsilon$ em $[-b, b] \times I^{m-1}$, $\tilde{C} = C$ em A e $L_C^{\tilde{C}}(-b, y) = (b, (1+\delta)y)$ se $y \in I_{1/4}^{m-1}$. Aqui estamos usando a mesma notação da prova do Lema 2.4.

De fato, seja $\psi: [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função C^∞ tal

que $\psi(t) = 0$ se $t \in [-b, \frac{b}{2}] \cup [\frac{b}{2}, b]$ e $\psi(t) > 0$ se $t \in (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$. Seja $\varphi: I^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $\varphi(y) = 0$ se $\|y\| \geq 3/4$, $\varphi(y) = 1$ se $\|y\| \leq 1/2$ e $\varphi(y) > 0$ se $1/2 < \|y\| < 3/4$. Definamos $\tilde{C}(t, y) = (1, \rho\varphi(y)\psi(t)y)$ e vamos determinar ρ para que \tilde{C} atenda às condições do problema. Da definição, é imediato que $\tilde{C} = C$ em A . A equação diferencial associada a \tilde{C} pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = \rho\varphi(y)\psi(x)y \end{cases}$$

Seja $y_0 \in I^{m-1}$, tal que $\|y_0\| \leq 1/4$. Temos $\varphi(y_0) = 1$ e $\varphi(y) = 1$ numa vizinhança de y_0 . A solução da equação acima com condições iniciais $x(0) = -b$, $y(0) = y_0$, pode ser escrita como $x(t) = t-b$, $y(t) = y_0 + \int_0^t \rho\varphi(y(s))\psi(s-b)y(s)ds$. Pela continuidade de $y(s)$, existe uma vizinhança $[0, -\frac{b}{2} + \ell]$ onde $\varphi(y(s)) = 1$. Em $[0, -\frac{b}{2} + \ell]$, teremos $y(t) = y_0 e^{\rho \int_0^t \psi(s)ds}$, o que pode ser visto diferenciando-se a função acima e notando que $\varphi(y(s)) = 1$ em $[0, -\frac{b}{2} + \ell]$. Seja $\mu(t) = e^{\rho \int_0^t \psi(s)ds}$. Temos $\mu(0) = 1$. Logo se $\rho > 0$ for suficientemente pequeno ($|\rho| < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \leq \frac{\ell_n(2)}{\int_0^{2b} \psi(s)ds}$) teremos $|\mu(2b)| \leq 2$ e $\|y(s)\| \leq \|y_0\| \cdot 2 \leq 1/2$ ($\mu(s)$ é crescente se $\rho > 0$).

Portanto $\varphi(y(s)) = 1$, para todo $s \in [0, 2b]$, o que implica que $y(s) = \mu(s)y_0$, para todo $s \in [0, 2b]$, ou seja $L_{\tilde{C}}(-b, y_0) = (b, \mu(2b)y_0)$. É fácil ver que podemos escolher ρ de modo que $\mu(2b) = 1 + \delta$ para $|\delta| < \epsilon_1$. Logo $L_{\tilde{C}}(-b, y_0) = (b, (1 + \delta)y_0)$. É fácil ver também que se $|\rho|$ for suficientemente pequeno temos $\|C - \tilde{C}\|_r < \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é arbitrário.

Seja Y o campo de vetores em M que é igual a X fora de $f^{-1}([-b, b] \times I^{m-1})$ e igual a $f_*^{-1} \tilde{C}$ em $f^{-1}([-b, b] \times I^{m-1})$. É claro que Y é C^∞ , $\|Y - X\|_r < \epsilon$ e γ é ainda uma órbita fechada de Y . Vamos mostrar que tomando δ suficientemente pequeno, γ será uma órbita hiperbólica de Y . De fato seja $\Sigma = f^{-1}(\{b\} \times I^{m-1})$. A expressão da transformação de Poincaré na carta local $f|\Sigma$ é dada por

$$P_Y(b, y) = (1 + \delta) P_X(b, y) \quad \text{se} \quad \|y\| < \frac{1}{4}.$$

Logo $(DP_Y)_{(b, 0)} = (1 + \delta)(DP_X)_{(b, 0)}$. Tomando $\delta > 0$ pequeno, os autovalores de $(DP_Y)_{(b, 0)}$ terão valor absoluto diferente de 1. ■

Observação: Nos Lemas 2.4 e 2.5 partimos de um campo de vetores X de classe C^∞ e o perturbamos na topologia C^r . As demonstrações destes lemas não podem ser feitas como acima se X for um campo de classe C^r .

Isto porque, neste caso, o fluxo tubular (F, f) seria de classe C^r e portanto o campo $f_*^{-1} \tilde{C}$ seria apenas de classe C^{r-1} .

2.6 TEOREMA - O conjunto $Q_{12} \subset X^r(M)$, dos campos cujos elementos críticos (singularidades e órbitas fechadas) são hiperbólicos é residual (e portanto denso em $X^r(M)$).

Demonstração: Seja $T > 0$ e consideremos o conjunto

$$X(T) = \{X \in Q_1 \mid \text{as órbitas fechadas de } X \text{ com período } \leq T \text{ são hiperbólicas}\}.$$

Vamos mostrar que $X(T)$ é aberto e denso em $X^r(M)$ e como $Q_{12} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X(n)$, teremos que Q_{12} é residual.

1ª parte - $X(T)$ é aberto em $X^r(M)$.

Seja $X \in X(T)$. Pelo corolário do Lema 2.2, X possui apenas um número finito de órbitas fechadas com período $\leq T$.

Seja $p \in M$. Temos três casos a considerar:

- a) p é singularidade de X .
- b) $\mathcal{O}(p)$ é regular ou é fechada com período $> T$.
- c) $\mathcal{O}(p)$ é fechada de período $\leq T$ (e portanto é hiperbólica).

No caso a), pelo Lema 2.1, existem vizinhanças U_p de p em M e h_p de X em $\mathbb{X}^r(M)$, tais que todo campo $Y \in h_p$ possui apenas uma singularidade $p(Y) \in U_p$, a qual é hiperbólica e toda órbita fechada de Y que intersesta U_p tem período $>T$.

No caso b), pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe uma vizinhança U_p de p em M , tal que toda órbita fechada de X que intersesta \bar{U}_p tem período $>T$ e X não possui singularidades em \bar{U}_p . Pelo Lema 2.3, existe vizinhança h_p de X em $\mathbb{X}^r(M)$, tal que todo campo $Y \in h_p$ não possui singularidades em \bar{U}_p e as órbitas fechadas de Y por pontos de \bar{U}_p , têm período $>T$.

No caso c), pelo Lema 2.2 existem vizinhanças U_p de $\mathcal{O}(p)$ em M e h_p de X em $\mathbb{X}^r(M)$, tais que todo campo $Y \in h_p$ possui apenas uma órbita fechada contida em U_p , $\forall Y$, a qual é hiperbólica e todas as outras órbitas fechadas de Y que intersestam U_p , têm período $>T$. Além disso Y não possui singularidades em U_p .

O conjunto $\{U_p \mid p \in M\}$ é uma cobertura aberta de M . Seja $\{U_1, \dots, U_\ell\} \subset \{U_p \mid p \in M\}$ uma subcobertura finita de M por abertos de $\{U_p \mid p \in M\}$. Sejam $h_1, \dots, h_\ell \subset \mathbb{X}^r(M)$ as vizinhanças respectivas de X , obtidas nos casos a), b) e c) e seja $u = h_1 \cap \dots \cap h_p$. É fácil ver que todo campo $Y \in u$, possui o mesmo número de

órbitas fechadas com período $\leq T$ que X (as quais são hiperbólicas) e que Y possui o mesmo número de singularidades que X (as quais são hiperbólicas), o que demonstra a primeira parte do teorema.

2ª parte - $\mathcal{X}(T)$ é denso em $\mathcal{X}^F(M)$.

Basta mostrarmos que $\mathcal{X}(T)$ é denso em \mathcal{Q}_1 .

Seja $X \in \mathcal{Q}_1$.

Afirmação 1 - Existe $\tau > 0$ tal que toda órbita fechada de X tem período $\geq \tau$.

Suponhamos por absurdo, que exista uma seqüência $\{\gamma_n\}$ de órbitas fechadas tais que $\gamma_n \neq \gamma_{n'}$, se $n \neq n'$, e a seqüência dos períodos de γ_n , $\{t_n\}$, seja decrescente e tenda a zero. Seja $p_n \in \gamma_n$ uma seqüência em M , a qual podemos supor que converge, passando a uma subseqüência se necessário, isto é, $p_n \rightarrow p$. O ponto p deve ser uma singularidade de X , pois caso contrário existiria uma caixa de fluxo contendo p e as órbitas fechadas que intersectam F não poderiam ter períodos arbitrariamente pequenos. Como $X \in \mathcal{Q}_1$, p é uma singularidade hiperbólica. Pelo Lema 2.1 existe uma vizinhança U de p em M tal que toda órbita fechada de X que intersecta U tem período maior de que 1, o que é um absurdo e demonstra a Afirmação 1.

Consideremos agora o conjunto $\Gamma = \Gamma(\tau, 3\tau/2) =$
 $= \{p \in M \mid \Theta(p) \text{ é fechada com período } t, \tau \leq t \leq 3\tau/2\}$.

Afirmção 2 - Γ é compacto.

Basta mostrar que Γ é fechado. Seja $p_n \rightarrow p$ uma seqüência em Γ . Como foi observado acima, p não pode ser uma singularidade de X . Se a órbita de p for regular ou fechada de período maior do que $3\tau/2$ então toda órbita fechada de X por um ponto próximo a p tem período maior do que $3\tau/2$, o que é um absurdo. Logo $\Theta(p)$ é fechada de período entre τ e $3\tau/2$, demonstrando a afirmação.

Seja $\epsilon > 0$. Queremos obter $Y \in \mathfrak{X}(T)$ com $\|X-Y\|_r < \epsilon$. Vamos dar uma idéia de como procederemos para concluir a demonstração. Tomemos $T = n\tau/2 + q$ onde $0 \leq q < \tau/2$. Inicialmente aproximamos X por um campo \tilde{X} de classe C^∞ com $\|X-\tilde{X}\|_r < \epsilon/2n$. Vamos a seguir aproximar \tilde{X} por um campo C^∞ $Y_1 \in \mathfrak{X}(3\tau/2)$ tal que $\|\tilde{X}-Y_1\|_r < \epsilon/2n$. O passo seguinte será aproximar Y_1 por um campo C^∞ $Y_2 \in \mathfrak{X}(2\tau)$ com $\|Y_1-Y_2\|_r < \epsilon/n$. Repetindo $n-1$ vezes o processo a ser usado na aproximação de Y_1 por Y_2 , obtemos campos C^∞ Y_1, Y_2, \dots, Y_n tais que $Y_j \in \mathfrak{X}(j\tau/2 + \tau)$ e $\|Y_{j+1} - Y_j\|_r < \epsilon/n$. Tomamos $Y = Y_n$. Temos que $Y \in \mathfrak{X}(T)$ e $\|Y-X\|_r < \epsilon$.

Aproximação de \tilde{X} por $Y_1 \in \mathfrak{X}(3\pi/2)$.

Sejam p_1, \dots, p_s as singularidades de \tilde{X} . Pelo Lema 2.1 existem vizinhanças U_1, \dots, U_s de p_1, \dots, p_s e vizinhança $h_1 \subset G_1$ de \tilde{X} em $\mathfrak{X}^r(M)$ tais que para todo $Y \in h_1$ as órbitas fechadas de Y que intersectam $U = U_1 \cup \dots \cup U_s$ tem período maior do que T . Além disto podemos supor que se $Y \in h_1$ então Y não tem singularidade em $M-U$. Vamos nos restringir aos campos de h_1 .

Seja $\gamma \subset \Gamma$ e Σ_γ uma seção transversal por $p \in \gamma$. Consideremos vizinhanças $V_\gamma \subset \Sigma_\gamma$ de p e h_γ de \tilde{X} tais que para todo $Y \in h_\gamma$, P_Y^2 esteja definido em V_γ . Além disto, a órbita positiva de Y por um ponto de V_γ intersecta Σ_γ pela primeira vez em um tempo $t > \frac{3\pi}{4}$. Consideremos também uma vizinhança W_γ de γ tal que a órbita positiva de Y por um ponto de W_γ intersecta Σ_γ pelo menos duas vezes.

O conjunto $\{W_\gamma \mid \gamma \subset \Gamma\}$ cobre Γ que é compacto. Seja $\{W_1, \dots, W_k\}$ uma subcobertura finita de Γ e $h_{\gamma_1}, \dots, h_{\gamma_k}$ as vizinhanças de \tilde{X} como acima. Sejam $h_2 = h_{\gamma_1} \cap \dots \cap h_{\gamma_k}$ e $W = W_1 \cup \dots \cup W_k$.

Consideremos agora $K = M - (U \cup W)$ que é compacto. Como \tilde{X} não possui singularidade em K e toda órbita fechada de \tilde{X} por pontos de K tem período maior

do que $3\pi/2$ existe, pelo Lema 2.3, uma vizinhança $\mathfrak{h}_3 \subset \mathfrak{h}_2$ de \tilde{X} tal que para todo $Y \in \mathfrak{h}_3$, as órbitas fechadas de Y por pontos de K tem período maior do que $3\pi/2$. Vamos nos restringir a campos de \mathfrak{h}_3 . Para cada $j = 1, \dots, k$ e para cada $Y \in \mathfrak{h}_3$ consideremos a transformação de Poincaré $P_{jY}: V_j \rightarrow \Sigma_j$. Pelo Lema 2.4 podemos aproximar \tilde{X} por um campo $C^\infty \tilde{Y}_1$ tal que $P_{1\tilde{Y}_1}$ só tenha pontos fixos elementares em $W_1 \cap \Sigma_1$. Como vimos no capítulo anterior, todo campo suficientemente próximo de \tilde{Y}_1 goza da mesma propriedade. Assim podemos aproximar \tilde{Y}_1 por um campo \tilde{Y}_2 tal que $P_{1\tilde{Y}_2}$ e $P_{2\tilde{Y}_2}$ só tenham pontos fixos elementares em $W_1 \cap \Sigma_1$ e $W_2 \cap \Sigma_2$. Repetindo o argumento obtemos um campo $C^\infty \tilde{Y}_k$ arbitrariamente próximo de \tilde{X} tal que as transformações de Poincaré $P_{j\tilde{Y}_k}$ só tenham pontos fixos elementares em $W_j \cap \Sigma_j$ para $j = 1, \dots, k$. Sejam μ_1, \dots, μ_ℓ as órbitas fechadas de \tilde{Y}_k correspondentes aos pontos fixos das transformações de Poincaré consideradas acima. As demais órbitas fechadas de \tilde{Y}_k tem período $> 3\pi/2$. Além disto existe uma vizinhança $\mathfrak{h}(\tilde{Y}_k)$ tal que todo campo $Y \in \mathfrak{h}(\tilde{Y}_k)$ tem apenas órbitas fechadas de período $\leq 3\pi/2$, estas órbitas são elementares e estão próximas das órbitas correspondentes de \tilde{Y}_k . Usando o Lema 2.5 repetidamente, aproximamos o campo \tilde{Y}_k por um campo $C^\infty Y_1$ cujas órbitas fechadas

de período menor ou igual a $3\tau/2$ sejam as mesmas que as de \tilde{Y}_k e que estas órbitas sejam hiperbólicas para Y_1 . Temos então que $Y_1 \in \mathfrak{X}(3\tau/2)$.

Como $\mathfrak{X}(3\tau/2)$ é aberto existe uma vizinhança h_4 de Y_1 contida em $\mathfrak{X}(3\tau/2)$. Consideremos vizinhanças U_{s+1}, \dots, U_{s+l} das órbitas fechadas de Y_1 de período menor ou igual a $3\tau/2$ como no Lema 2.2. Seja agora $U = \bigcup_{i=1}^{s+l} U_i$. Assim toda órbita fechada de um campo próximo a Y por um ponto de U é hiperbólica ou tem período maior ou igual que T .

Tomemos $\Gamma = \Gamma[3\tau/2, 2\tau]$. Usando a compacidade de Γ e os Lemas 2.4 e 2.5 como anteriormente, obtemos uma vizinhança W de Γ tal que Y_1 possa ser aproximado por um campo Y_2 cujas órbitas fechadas por pontos de W ou são hiperbólicas ou tem período maior que 2τ . Como no compacto $K = M - (U \cup W)$ as órbitas fechadas de Y_1 tem período maior que 2τ segue-se que podemos aproximar Y_1 por um campo C^∞ Y_2 pertencente a $\mathfrak{X}(2\tau)$. Para obter os campos Y_3, \dots, Y_n o processo é análogo. ■

§3. Transversalidade das Variedades Invariantes.

Nesta seção terminaremos a demonstração do teorema de Kupka-Smale.

Dizemos que um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é de Kupka-Smale se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- a) os elementos críticos de X (singularidades e órbitas fechadas) são hiperbólicos, isto é, $X \in \mathcal{Q}_{12}$;
- b) se σ_1 e σ_2 são elementos críticos de X então $W^s(\sigma_1)$ é transversal a $W^u(\sigma_2)$.

Denotamos por \mathcal{Q}_{123} ou K-S o conjunto dos campos de Kupka-Smale.

3.1 TEOREMA (Kupka-Smale) - K-S é residual em $\mathfrak{X}^r(M)$.

Já mostramos que \mathcal{Q}_{12} é residual em $\mathfrak{X}^r(M)$ e portanto resta apenas mostrar que K-S é residual em \mathcal{Q}_{12} . Dividiremos a demonstração deste fato em vários lemas.

Para uniformizar a notação convencionaremos que uma singularidade de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é um elemento crítico de período zero. Assim, se $T > 0$ e $X \in \mathfrak{X}(T)$ então X tem apenas um número finito de elementos críticos de período $\leq T$ e estes são hiperbólicos. Seja $\bar{\mathfrak{X}}(T)$ o con-

junto dos campos de vetores $X \in \mathfrak{X}(T)$ tais que se σ_1 e σ_2 são elementos críticos de X de período $\leq T$ então $W^s(\sigma_1)$ é transversal a $W^u(\sigma_2)$.

3.2 LEMA - Se $\mathfrak{X}(T)$ é residual em $\mathfrak{X}^r(M)$ para todo $T \geq 0$ então K-S é residual.

Demonstração: Como $K-S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{X}^r(n)$ e cada $\mathfrak{X}^r(n)$ é residual segue-se que K-S é residual. ■

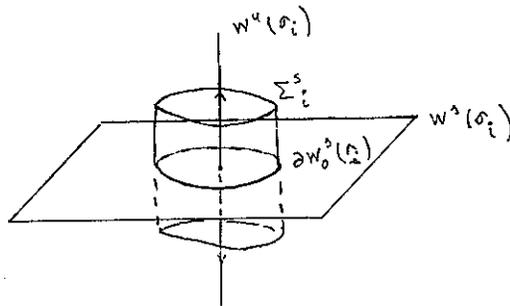
3.3 LEMA - Sejam E um espaço de Baire separável e $F \subset E$ um subconjunto denso. Um subconjunto $U \subset E$ é residual se e somente se para todo $x \in F$ existe uma vizinhança V_x tal que $U \cap V_x$ é residual em V_x .

Demonstração: Seja $V_{x_1}, \dots, V_{x_n}, \dots$ uma subcobertura enumerável de F tal que $U \cap V_{x_i}$ seja residual em V_{x_i} para todo i . Então $U \cap V_{x_i} \supset \bigcap_{j=1}^{\infty} U_{ij}$ onde $U_{ij} \subset V_{x_i}$ é aberto e denso. Seja $U_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{ij}$. É claro que U_j é aberto e denso em E e que $U \supset \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$. Isto prova que U é residual em E . A recíproca é trivial. ■

COROLÁRIO - Se para cada $T \geq 0$ e para todo $X \in \mathfrak{X}(T)$ existe uma vizinhança \mathfrak{h} de X tal que $\mathfrak{X}(T)$ é residual em \mathfrak{h} então K-S é residual.

Demonstração: Segue-se dos Lemas 3.2, 3.3 e da densidade de $\mathfrak{X}(T)$ em $\mathfrak{X}^T(M)$. ■

Sejam $X \in \mathfrak{X}(T)$ e $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ os elementos críticos de X de período $\leq T$. Para cada i tomemos vizinhanças compactas $W_o^s(\sigma_i)$ e $W_o^u(\sigma_i)$ de σ_i em $W^s(\sigma_i)$ e $W^u(\sigma_i)$ respectivamente tais que os bordos de $W_o^s(\sigma_i)$ e $W_o^u(\sigma_i)$ sejam domínios fundamentais para $W^s(\sigma_i)$ e $W^u(\sigma_i)$ respectivamente. Seja Σ_i^s uma cerca associada ao bordo $\partial W_o^s(\sigma_i)$, isto é, Σ_i^s é uma subvariedade de co dimensão 1 transversal ao campo X e à variedade estável local de σ_i e cuja interseção com esta variedade é o domínio fundamental $\partial W_o^s(\sigma_i)$.



III.9

Tomando uma vizinhança \mathfrak{n} de X suficientemente pequena temos que todo $Y \in \mathfrak{n}$ é transversal a cada Σ_i^s , os elementos críticos de Y de período menor ou igual a T são hiperbólicos e estão próximos dos correspondentes

elementos críticos de X . Assim se $\sigma_1(Y), \dots, \sigma_s(Y)$ são os elementos críticos de Y de período menor ou igual a T existe uma vizinhança compacta $W_0^S(\sigma_i, Y)$ de $\sigma_i(Y)$ em $W^S(\sigma_i, Y)$ tal que o bordo de $W_0^S(\sigma_i, Y)$ é a interseção de Σ_i^S com $W_0^S(\sigma_i, Y)$. Pelo Teorema da Variedade Estável a aplicação $Y \mapsto W_0^S(\sigma_i, Y)$ é contínua, isto é, se $Y_0 \in \mathfrak{h}$ e $\epsilon > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que se $\|Y - Y_0\|_R < \delta$ então $W_0^S(\sigma_i, Y)$ está ϵ -próxima de $W_0^S(\sigma_i, Y_0)$. Analogamente para cada $Y \in \mathfrak{h}$ e cada $i = 1, \dots, s$ construímos uma vizinhança compacta $W_0^U(\sigma_i, Y)$ de $\sigma_i(Y)$ em $W^U(\sigma_i, Y)$ de modo que a aplicação $Y \mapsto W_0^U(\sigma_i, Y)$ seja contínua.

Para cada inteiro positivo n definimos $W_n^S(\sigma_i, Y) = Y_{-n}(W_0^S(\sigma_i, Y))$ e $W_n^U(\sigma_i, Y) = Y_n(W_0^U(\sigma_i, Y))$. É claro que as aplicações $Y \mapsto W_n^S(\sigma_i, Y)$ e $Y \mapsto W_n^U(\sigma_i, Y)$ são contínuas uma vez que Y_n e Y_{-n} são difeomorfismos que dependem continuamente de Y . Além disto $W_n^S(\sigma_i, Y)$ e $W_n^U(\sigma_i, Y)$ são subvariedades compactas de M (com bordo), $W^S(\sigma_i, Y) = \bigcup_{n \geq 0} W_n^S(\sigma_i, Y)$ e $W^U(\sigma_i, Y) = \bigcup_{n \geq 0} W_n^U(\sigma_i, Y)$. Seja $\mathfrak{X}_n(T)$ o conjunto dos campos de vetores $Y \in \mathfrak{h}$ tais que $W_n^S(\sigma_i, Y)$ é transversal a $W_n^U(\sigma_j, Y)$ para todo i e j .

3.4 LEMA - Sejam $X \in \mathfrak{X}(T)$ e \mathfrak{h} uma vizinhança de X

como acima. Se para todo $n \in \mathbb{N}$, $\bar{X}_n(T)$ é aberto e denso em h então $X(T) \cap h$ é residual em h .

Demonstração: Basta observar que $X(T) \cap h = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{X}_n(T)$ o que é óbvio. ■

3.5 LEMA - Sejam $X \in X(T)$ e h uma vizinhança de X como acima. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, $\bar{X}_n(T)$ é aberto e denso em h .

Demonstração: Sejam $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ os elementos críticos de X de período menor ou igual a T . Denotemos por $\bar{X}_{n,i,j}(T)$ o conjunto dos campos de vetores $Y \in h$ tais que $W_n^s(\sigma_i, Y)$ é transversal a $W_n^u(\sigma_j, Y)$. É claro que $\bar{X}_n(T) = \bigcap_{i,j=1}^s \bar{X}_{n,i,j}(T)$. Logo é suficiente mostrar que cada $\bar{X}_{n,i,j}(T)$ é aberto e denso em h .

1 - Abertura de $\bar{X}_{n,i,j}(T)$.

Seja $\bar{X} \in \bar{X}_{n,i,j}(T)$. Como $W_n^s(\sigma_i, \bar{X})$ é transversal a $W_n^u(\sigma_j, \bar{X})$ e as aplicações $Y \mapsto W_n^s(\sigma_i, Y)$ e $Y \mapsto W_n^u(\sigma_j, Y)$ são contínuas segue-se que existe uma vizinhança h_{ij} de \bar{X} contida em h tal que para todo $Y \in h_{ij}$, $W_n^s(\sigma_i, Y)$ é transversal a $W_n^u(\sigma_j, Y)$. Portanto $h_{ij} \subset \bar{X}_{n,i,j}(T)$ o que demonstra a abertura deste conjunto.

2 - Densidade de $\bar{x}_{n,i,j}(T)$. Seja $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(T) \cap \mathfrak{h}$. Vamos mostrar que existe uma vizinhança \tilde{h} de \tilde{X} contida em \mathfrak{h} tal que $\bar{x}_{n,i,j}(T) \cap \tilde{h}$ é aberto e denso em \tilde{h} . Em particular \tilde{X} pode ser arbitrariamente aproximado por um elemento de $\bar{x}_{n,i,j}(T)$.

Consideremos o compacto $K = W_n^S(\sigma_i, \tilde{X}) \cap W_n^U(\sigma_j, \tilde{X})$. Se $x \in K$ existe um fluxo tubular $(F_x, f_{\tilde{X},x}^{\sim})$ contendo x e um número real positivo b_x tal que $f_{\tilde{X},x}^{\sim}(F_x) \supset [-b_x, b_x] \times I^{m-1}$ e o campo $(f_{\tilde{X},x}^{\sim})_* \tilde{X}$ coincide com o campo unitário em $[-b_x, b_x] \times I^{m-1}$. Seja $A_x \subset F_x$ uma vizinhança de x tal que o fecho de A_x está contido no interior de $(f_{\tilde{X},x}^{\sim})^{-1}([-b_x, b_x] \times I_{1/4}^{m-1})$. Diminuindo F_x se necessário podemos supor que $W_{2n}^S(\sigma_i, \tilde{X}) \cap F_x (W_{2n}^U(\sigma_j, \tilde{X}) \cap F_x)$ tem apenas uma componente conexa.

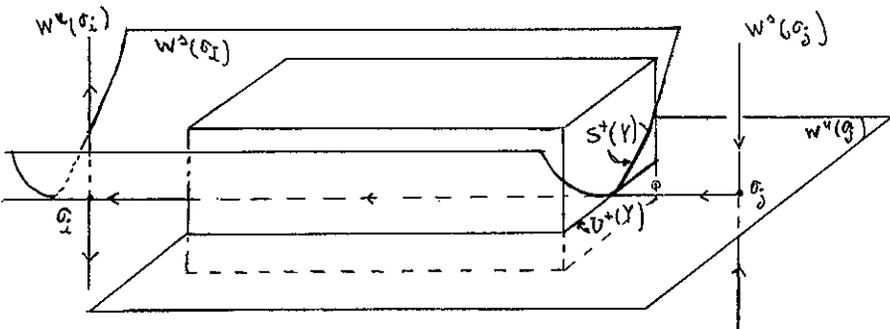
Seja A_1, \dots, A_ℓ uma cobertura finita de K por abertos como acima e denotemos por $(F_k, f_{\tilde{X},k}^{\sim})$ os fluxos tubulares correspondentes. Temos que $f_{\tilde{X},k}^{\sim-1}([-b_k, b_k] \times I_{1/4}^{m-1})$ contém A_k . Como as aplicações $Y \mapsto W_n^S(\sigma_i, Y)$, $Y \mapsto W_n^U(\sigma_j, Y)$ são contínuas, existe uma vizinhança \tilde{h} de \tilde{X} contida em \mathfrak{h} tal que $W_n^S(\sigma_i, Y) \cap W_n^U(\sigma_j, Y) \subset \bigcup_{k=1}^{\ell} A_k$ para todo $Y \in \tilde{h}$. Diminuindo \tilde{h} se necessário podemos ainda supor que para cada $Y \in \tilde{h}$ e $k = 1, \dots, \ell$ existe um fluxo tubular para Y , $(F_{Y,k}, f_{Y,k}^{\sim})$ com $F_{Y,k} \supset A_k$, $f_{Y,k}^{\sim}(F_{Y,k}) \supset [-b_k, b_k] \times I^{m-1}$ e tal que o interior de

$f_{Y,k}^{-1}([-b_k, b_k] \times I_{1/4}^{m-1})$ contenha o fecho de A_k . Isto é possível pois o fluxo depende continuamente do campo.

Seja agora \tilde{X}_k o conjunto dos campos de vetores de $Y \in \tilde{n}$ tais que $W_n^s(\sigma_i, Y)$ é transversal a $W_n^u(\sigma_j, Y)$ em pontos de \bar{A}_k . É claro que \tilde{X}_k é um subconjunto aberto de \tilde{n} e é suficiente para cumprir o nosso objetivo mostrar que \tilde{X}_k é denso em \tilde{n} pois $\bar{X}_{n,i,j}(\Gamma) \cap \tilde{n} = \bigcap_{k=1}^{\ell} \tilde{X}_k$.

Vamos mostrar que \tilde{X}_k é denso em \tilde{n} .

Tomemos um campo $C^\infty Y \in \tilde{n}$. Denotamos por $S_+(Y)$ a interseção de $f_{Y,k}(W_n^s(\sigma_i, Y) \cap F_{Y,k})$ com $\{b_k\} \times I^{m-1}$ e por $U_-(Y)$ a interseção de $f_{Y,k}(W_n^u(\sigma_j, Y) \cap F_{Y,k})$ com $\{-b_k\} \times I^{m-1}$.



III.10

É fácil ver que se $S_+(Y)$ é transversal a $U_-(Y)$ em pontos de $\{b_k\} \times I_{1/4}^{m-1}$ então $W_n^s(\sigma_i, Y)$ é transversal a $W_n^u(\sigma_j, Y)$ em pontos de A_k .

Usando o mesmo argumento da prova do Lema 2.4 te-

mos que dado $\varepsilon > 0$ e $v \in \mathbb{R}^{m-1}$ com $\|v\|$ suficientemen-
te pequeno, existe um campo $C^\infty \tilde{Y}$ em M com $\|Y - \tilde{Y}\|_r < \varepsilon$
tal que

a) $\tilde{Y} = Y$ fora de $f_{Y,k}^{-1}([-b_k, b_k] \times I^{m-1})$,

b) $L_Y^v(-b, y) = (b, y+v)$ para todo $y \in I_{1/4}^{m-1}$. Aqui L_Y^v
é a aplicação de $\{-b\} \times I^{m-1}$ em $\{b\} \times I^{m-1}$ que a cada
 $(-b, y)$ associa o ponto de interseção com $\{b\} \times I^{m-1}$ da
órbita de $(f_{Y,k})_* \tilde{Y}$ pelo ponto $(-b, y)$. Por outro la-
do pela Proposição 3.3 do Capítulo I podemos escolher v
pequeno de modo que $S_+(Y)$ seja transversal a $U_+(Y) + v$.
Temos que $f_{Y,k}^{-1}(S_+(Y))$ é a interseção de $W_{2n}^s(\sigma_i, \tilde{Y})$ com
a seção transversal $f_{Y,k}^{-1}(\{b_k\} \times I^{m-1})$ e $f_{Y,k}^{-1}(U_+(Y) + v) \cap$
 $\cap \{b\} \times I_{1/4}^{m-1}$ é a interseção de $W_{2n}^u(\sigma_j, \tilde{Y})$ com a seção
 $f_{Y,k}^{-1}(\{b\} \times I_{1/4}^{m-1})$. Concluimos então que estas duas sub-
variedades são transversais em pontos de $f^{-1}([-b_k, b_k] \times I_{1/4}^{m-1})$.
Consequentemente $W_u^s(\sigma_i, \tilde{Y})$ é transversal a $W_n^u(\sigma_j, \tilde{Y})$ em
pontos de \tilde{A}_k . Isto mostra que $\tilde{Y} \in \tilde{\mathcal{X}}_k$.

Logo todo campo C^∞ em $\tilde{\mathcal{H}}$ pode ser aproximado
por um campo de $\tilde{\mathcal{X}}_k$. Como todo campo em $\tilde{\mathcal{H}}$ pode ser a-
proximado por um campo C^∞ concluímos que $\tilde{\mathcal{X}}_k$ é denso
em $\tilde{\mathcal{H}}$ o que termina a demonstração do lema. ■

O Teorema 3.1 é consequência imediata dos Lemas
3.2, 3.3, 3.4 e 3.5.

Observação: É importante notar que K-S não é aberto em $\mathfrak{X}^r(M)$. De fato, seja X_t o fluxo irracional no toro T^2 . O campo $X \in K-S$ uma vez que não possui elementos críticos. No entanto, X pode ser aproximado por um campo Y tal que Y_t seja um fluxo racional. Todas as órbitas de Y são fechadas (não hiperbólicas). Logo $Y \notin K-S$.

Vamos agora enunciar o Teorema de Kupka-Smale para difeomorfismo. A demonstração é análoga a do caso de campos de vetores e será deixada como exercício para o leitor.

Um difeomorfismo $f \in \text{Dif}^r(M)$ é de Kupka-Smale se

- a) os pontos periódicos de f são hiperbólicos;
- b) se p e q são pontos periódicos de f então

$$W^s(p) \text{ é transversal a } W^u(q).$$

Denotamos por K-S o conjunto dos difeomorfismos de K-S.

3.6 TEOREMA - K-S é residual em $\text{Dif}^r(M)$.

Esboço da demonstração:

- 1) Se $f \in \text{Dif}^r(M)$ e $k \in \mathbb{N}$ denotamos por $\tilde{f}^k: M \rightarrow M \times M$ a aplicação $\tilde{f}^k(p) = (p, f^k(p))$. Se p é um ponto periódico de período k de f então $\tilde{f}^k(p) = (p, p)$ e

portanto pertence à diagonal $\Delta \subset M \times M$. Tal ponto p é elementar se e somente se \tilde{f} é transversal a Δ em p . Sejam $n \in \mathbb{N}$ e \mathcal{D}^n o conjunto dos difeomorfismos $f \in \text{Dif}^r(M)$ tais que \tilde{f}^k é transversal a Δ para $k = 1, \dots, n$. \mathcal{D}^n é aberto e denso.

2) Seja $f \in \mathcal{D}^n$ e p um ponto periódico de f de período menor ou igual a n . É fácil aproximar f por $g \in \mathcal{D}^n$ de forma que $g = f$ fora de uma vizinhança de p e p é um ponto periódico hiperbólico de g . Assim o conjunto $\tilde{\mathcal{D}}^n \subset \mathcal{D}^n$ dos difeomorfismos cujos pontos periódicos de período $k = 1, \dots, n$ são hiperbólicos é aberto e denso.

3) Seja \mathcal{Q}^n o conjunto dos difeomorfismos de $\tilde{\mathcal{D}}^n$ cujas variedades estáveis e instáveis dos pontos periódicos de período até n são duas a duas transversais. \mathcal{Q}^n é residual. Como $K-S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}^n$ temos que $K-S$ é residual.

Uma outra demonstração do Teorema de Kupka-Smale para difeomorfismos pode ser obtida a partir do correspondente teorema para campos de vetores. Para tanto necessitamos de uma construção que permite relacionar os difeomorfismos de uma variedade M com campos de vetores de uma variedade \tilde{M} de dimensão igual à dimensão de M mais

um. Este método é denominado de suspensão de difeomorfismos.

Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(\tilde{M})$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{M}$ uma subvariedade compacta de codimensão 1. Dizemos que $\tilde{\Sigma}$ é uma seção transversal global de X se:

- a) X é transversal a $\tilde{\Sigma}$;
- b) a órbita positiva de X por todo ponto de $\tilde{\Sigma}$ volta a intersestar $\tilde{\Sigma}$.

Se $\tilde{\Sigma}$ é uma seção transversal global de $X \in \mathfrak{X}^r(\tilde{M})$ então o fluxo de X induz um difeomorfismo $\tilde{f}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ que a cada ponto $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma}$ associa o ponto $\tilde{f}(\tilde{p})$ onde a órbita positiva de \tilde{p} intersesta $\tilde{\Sigma}$ pela primeira vez. O difeomorfismo \tilde{f} é denominado a transformação de Poincaré associada a $\tilde{\Sigma}$.

É fácil ver que se $X \in \mathfrak{X}^r(\tilde{M})$ admite uma seção transversal global $\tilde{\Sigma}$ então o saturado de $\tilde{\Sigma}$ pelo fluxo de X coincide com \tilde{M} , isto é, $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(\tilde{\Sigma}) = \tilde{M}$. Em particular X não possui singularidades.

Se $\tilde{\Sigma}_1$ e $\tilde{\Sigma}_2$ são duas seções transversais globais de X , a aplicação $h: \tilde{\Sigma}_1 \rightarrow \tilde{\Sigma}_2$ que a cada $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma}_1$ associa o primeiro ponto $h(\tilde{p})$ em que a órbita positiva de \tilde{p} intersesta $\tilde{\Sigma}_2$ é um difeomorfismo de classe C^r . Assim se $\tilde{f}_1: \tilde{\Sigma}_1 \rightarrow \tilde{\Sigma}_1$ e $\tilde{f}_2: \tilde{\Sigma}_2 \rightarrow \tilde{\Sigma}_2$ são as respectivas transfor-

mações de Poincaré, o difeomorfismo h é uma conjugação entre \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 , isto é, $\tilde{f}_1 = h^{-1} \circ \tilde{f}_2 \circ h$. Portanto \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 tem a mesma estrutura de órbitas.

Observemos finalmente que a estrutura de órbitas de X é descrita pela estrutura de órbitas da transformação de Poincaré \tilde{f} e vice-versa. Com efeito, os seguintes fatos são imediatos:

- i) $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma}$ é um ponto periódico de \tilde{f} se e somente se $\sigma_X(\tilde{p})$ é fechada;
- ii) $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma}$ é um ponto periódico hiperbólico de \tilde{f} se e somente se $\sigma_X(\tilde{p})$ é uma órbita fechada hiperbólica;
- iii) se \tilde{p}_1 e \tilde{p}_2 são pontos periódicos hiperbólicos de \tilde{f} então $W^s(\tilde{p}_1)$ é transversal a $W^u(\tilde{p}_2)$ se e somente se $W^s(\sigma_X(\tilde{p}_1))$ é transversal a $W^u(\sigma_X(\tilde{p}_2))$;
- iv) $\tilde{q} \in \omega(\tilde{p})$ se e somente se $\sigma_X(\tilde{q}) \subset \omega(\sigma_X(\tilde{p}))$.

A proposição abaixo mostra que todo difeomorfismo é a transformação de Poincaré associada à seção transversal global de um campo de vetores.

3.7 PROPOSIÇÃO - Seja $f \in \text{Dif}^r(M)$ onde M é uma variedade compacta. Então existem uma varie

dade \tilde{M} , um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^r(\tilde{M})$ admitindo uma seção transversal global $\tilde{\Sigma}$ e um difeomorfismo C^r $h: M \rightarrow \tilde{\Sigma}$ conjugando f e a transformação de Poincaré $\tilde{f}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$.

Demonstração: Em $M \times \mathbb{R}$ consideremos a seguinte relação de equivalência:

$$(p, s) \sim (q, t) \Leftrightarrow t = s - n \text{ e } q = f^n(p) \text{ para algum inteiro } n.$$

Sejam \tilde{M} o espaço quociente $M \times \mathbb{R} / \sim$ e $\pi: M \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$ a projeção natural. Denotamos por $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{M}$ a imagem de $M \times \{0\}$ por π . Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ temos que a restrição de π a $M \times (t_0, t_0 + 1)$ é uma correspondência biunívoca entre $M \times (t_0, t_0 + 1)$ e $\tilde{M} - \pi(M \times \{t_0\})$. Além disto $\pi(p, 1) = \pi(f(p), 0)$. Em \tilde{M} consideremos a topologia induzida por $\pi: A \subset \tilde{M}$ é aberto se e só se $\pi^{-1}(A)$ é aberto.

Vamos mostrar que \tilde{M} possui uma estrutura de variedade diferenciável natural e que π é um difeomorfismo local de classe C^r .

Sejam $x_i: U_i \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, s$, cartas locais em M tais que $\bigcup_{i=1}^s U_i = M$. Temos que $\tilde{U}_i = \pi(U_i \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ e $\tilde{V}_i = \pi(U_i \times (\frac{1}{4}, \frac{5}{4}))$ são abertos em \tilde{M} . Definimos $\tilde{x}_i: \tilde{U}_i \rightarrow U_0 \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $\tilde{y}_i: \tilde{V}_i \rightarrow U_0 \times (\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$ por $\tilde{x}_i(\pi(p, t)) = (x_i(p), t)$ e $\tilde{y}_i(\pi(p, t)) = (x_i(p), t)$. É claro que \tilde{x}_i e \tilde{y}_i são homeomorfismos. Afirmamos que

$\{(\tilde{x}_i, \tilde{U}_i), (\tilde{y}_i, \tilde{V}_i), i = 1, \dots, s\}$ é um atlas C^r em M .

De fato, $\tilde{x}_i \tilde{x}_j^{-1}(u, t) = (x_i \circ x_j^{-1}(u), t)$, $\tilde{y}_i \tilde{y}_j^{-1}(u, t) = (y_i \circ y_j^{-1}(u), t)$ e $\tilde{x}_i \tilde{y}_j^{-1}(u, t) = (x_i \circ f \circ y_j^{-1}(u), t-1)$

são difeomorfismos de classe C^r , o que prova a afirmativa.

Na verdade, podemos considerar \tilde{M} como uma variedade de classe C^∞ . De fato, pelo Teorema 0.19 do Capítulo I existe uma estrutura de variedade C^∞ em \tilde{M} tal que \tilde{x}_i e \tilde{y}_i são difeomorfismos de classe C^r .

Como $\tilde{x}_i \circ \pi \circ (x_i^{-1} \times id)$ é a identidade de $U_o \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $\tilde{y}_i \circ \pi \circ (x_i^{-1} \times id)$ é a identidade de $U_o \times (\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$ segue-se que π é um difeomorfismo local de classe C^r .

Seja $\frac{\partial}{\partial t}$ o campo de vetores unitário em $M \times \mathbb{R}$ cujas órbitas são as retas $\{p\} \times \mathbb{R}$, $p \in M$. Seja $X(\pi(p, t)) = d\pi(p, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(p, t)$. É fácil ver que $X(\pi(p, t)) = X(\pi(f(p), t-1))$. Logo X é um campo de vetores em \tilde{M} de classe C^r . O campo X é transversal a $\tilde{\Sigma}$ e a órbita de X por um ponto $\tilde{p} = \pi(p, t)$ é $\pi(\{p\} \times \mathbb{R})$. Logo a órbita positiva de X por um ponto $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma}$, $\tilde{p} = \pi(p, 0)$, volta a intersetar $\tilde{\Sigma}$ pela primeira vez no ponto $\tilde{q} = \pi(p, 1) = \pi(f(p), 0)$. A transformação de Poincaré associada a $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{f}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$, é então definida por $\tilde{f}(\pi(p, 0)) = \pi(f(p), 0)$.

Seja $h: M \rightarrow \tilde{\Sigma}$, $h(p) = \pi(p, 0)$. Segue-se que h é um difeomorfismo de classe C^r e $\tilde{f} \circ h = h \circ f$ o que conclui a demonstração.

Vamos mostrar agora a densidade dos difeomorfismos de Kupka-Smale utilizando o método da suspensão. Sejam $f \in \text{Dif}^r(M)$ e $X \in \mathfrak{X}^r(\tilde{M})$, $h: M \rightarrow \tilde{\Sigma}$ como na proposição anterior. Tomemos um campo de Kupka-Smale $Y \in \mathfrak{X}^r(\tilde{M})$ próximo a X e seja $\tilde{g}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ a transformação de Poincaré associada a Y . Seja $g = h^{-1} \circ \tilde{g} \circ h$. Temos que g é um difeomorfismo de Kupka-Smale que está próximo de f pois \tilde{g} está próximo de \tilde{f} .

CAPÍTULO IV

GENERICIDADE E ESTABILIDADE DOS CAMPOS DE MORSE-SMALE

Como já salientamos anteriormente, o objetivo central da Teoria dos Sistemas Dinâmicos é a descrição dos espaços de fase dos campos de vetores de uma variedade diferenciável. Existem, no entanto, campos com espaços de fase extremamente complicados como mostram os exemplos da Seção 3 do Capítulo II. Assim a estratégia que se impõe neste programa é a de restringir o estudo a um subconjunto do espaço de campos. É desejável que este subconjunto seja aberto e denso (ou o mais "amplo" possível) e que seus elementos sejam estruturalmente estáveis com espaços de fase bastante simples para que possamos classificá-los. No que diz respeito ao aspecto local, este problema está completamente resolvido como vimos no Capítulo II.

Neste capítulo mostramos que o programa acima, do ponto de vista global, é realizável em variedades compactas de dimensão dois. Este resultado, devido a M. Peixoto [18] e [19], pode ser considerado como marco inicial do recente

e amplo desenvolvimento desta teoria. Em dimensões maiores, no entanto, existem fenômenos mais ricos e complicados que persistem por pequenas perturbações do campo inicial. Por um lado, os campos estruturalmente estáveis não são densos. Por outro, existem campos estruturalmente estáveis com espaços de fase cuja descrição mais completa constitui ainda uma área ativa de pesquisa.

Neste contexto cabe ressaltar a importância do estudo de propriedades genéricas, isto é, propriedades que são satisfeitas por quase todos os campos de vetores (subconjunto de Baire). Este é o caso do Teorema de Kupka-Smale do capítulo anterior.

Finalmente, observamos que o programa acima pode ser colocado restringindo-se o universo de campos de vetores a certos subconjuntos de especial interesse. Um exemplo dos mais relevantes é o de campos gradientes de uma variedade compacta. Neste caso os campos estruturalmente estáveis formam um subconjunto aberto e denso, sendo suas estruturas de órbitas bastante simples [23], [17].

§1. Campos de Morse-Smale.

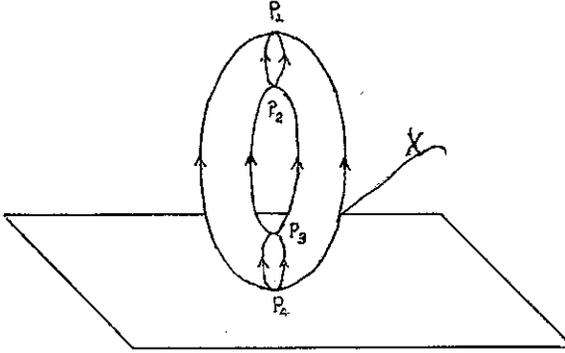
Definimos aqui uma classe de campos que desempenha um papel importante na Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Es

ta classe, denominada de Morse-Smale, constitui um subconjunto aberto e não vazio e seus elementos são estruturalmente estáveis. Embora estes resultados sejam válidos para variedades compactas de dimensão qualquer [16], [17], estudaremos neste capítulo apenas o caso de dimensão dois onde esta classe é também densa.

Iniciamos a seção definindo os campos de Morse-Smale. Provamos a seguir que um campo de Morse-Smale em M^2 é estruturalmente estável. A demonstração que apresentamos, introduzida em [16], é distinta da original [19] e pode ser generalizada para dimensões maiores.

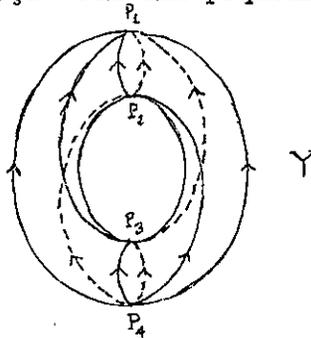
Antes de apresentar formalmente a definição dos campos de Morse-Smale, vamos motivá-la através de alguns exemplos. Como objetivamos estabelecer uma classe de campos estruturalmente estáveis, de início devemos impor que as singularidades e órbitas fechadas sejam hiperbólicas. Caso contrário os campos não seriam nem mesmo localmente estruturalmente estáveis. Ressaltamos também que as interseções das variedades estáveis e instáveis de elementos críticos (singularidades e órbitas fechadas) devem ser preservadas por equivalência topológica (vide Exercício 1). Portanto, é natural exigir que estas interseções sejam transversais afim de garantir a sua persistência com pequenas perturbações do campo.

EXEMPLO 1 - Considere o toro $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ e seja $X = \text{grad } h$ onde h é a função altura dos pontos de T^2 em relação ao plano horizontal da figura.



IV.1

Este campo possui quatro singularidades p_1, p_2, p_3, p_4 , sendo p_1 um poço, p_2 e p_3 selas e p_4 uma fonte. A variedade estável de p_2 intersesta a instável de p_3 não transversalmente. Como no Capítulo I, podemos destruir tal interseção com uma pequena perturbação do campo X .



IV.2

O campo Y resultante não será portanto equivalente a X .

As considerações acima nos conduzem a definir os campos de Morse-Smale como um subconjunto dos campos de

Kupka-Smale. É fundamental a esta altura observar que a condição de um campo ser de Kupka-Smale nada diz a respeito dos α e ω -limites de suas órbitas. Como uma equivalência topológica de campos de vetores preserva os conjuntos α e ω -limites de órbitas correspondentes, devemos impor condições específicas sobre estes conjuntos.

EXEMPLO 2 - Considere um campo X que induza um fluxo irracional no toro T^2 . O α e ω -limite de uma órbita qualquer de X é todo o toro T^2 . Em particular X não tem singularidades nem órbitas fechadas. Consequentemente X é um campo de Kupka-Smale. No entanto X não é estruturalmente estável pois pode ser aproximado por um campo Y que induz em T^2 um fluxo racional (vide Seção 6 do Capítulo I). Todas as órbitas de Y são fechadas. Obtém-se assim uma mudança radical dos conjuntos α e ω -limite.

Antes de definirmos o conjunto de campos de Morse-Smale necessitamos ainda de alguns conceitos e notações.

Seja $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Consideremos os conjuntos $L_\alpha(X) = \{p \in M \mid p \in \alpha(q) \text{ para algum } q \in M\}$ e $L_\omega(X) = \{p \in M \mid p \in \omega(q) \text{ para algum } q \in M\}$. Estes conjuntos são invariantes pelo fluxo gerado por X e a órbita de qualquer ponto "nasce" em L_α e "morre" em L_ω .

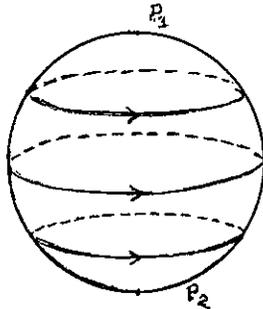
DEFINIÇÃO - Seja $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Dizemos que $p \in M$ é um ponto errante de X se existe uma vizinhança V de p e um número $t_0 > 0$ tais que se $|t| > t_0$ então $X_t(V) \cap V = \emptyset$. Caso contrário dizemos que p é não errante.

Denotamos por $\Omega(X)$ o conjunto de pontos não errantes de X . As seguintes propriedades decorrem imediatamente da definição anterior:

- a) $\Omega(X)$ é compacto e invariante pelo fluxo X_t .
- b) $\Omega(X) \supset L_\alpha(X) \cup L_\omega(X)$. Em particular $\Omega(X)$ contém os elementos críticos de X .
- c) Se $X, Y \in \mathcal{X}^r(M)$ e $h: M \rightarrow M$ é uma equivalência topológica entre X e Y então $h(\Omega(X)) = \Omega(Y)$.

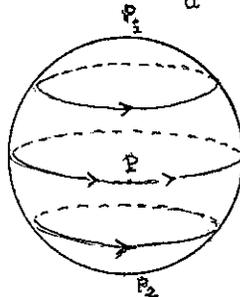
O exemplo seguinte mostra que em geral Ω contém estritamente $L_\alpha \cup L_\omega$.

EXEMPLO 3 - Consideremos em S^2 um campo X de classe C^∞ com duas singularidades p_1 e p_2 e todas as demais órbitas sendo fechadas. Multipliquemos agora o campo X por uma função não negativa $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ que se anula apenas em um ponto p distinto de p_1 e p_2 .



IV.3

Seja $Y = \varphi X$. O campo Y é C^∞ , possui três singularidades p_1, p_2 e p_3 e todas as outras órbitas são fechadas exceto uma órbita γ com $\alpha(\gamma) = \omega(\gamma) = p$. Nenhum ponto x de γ pertence a $L_\alpha \cup L_\omega$, mas $x \in \Omega$ pois é



IV.4

acumulado por órbitas fechadas de Y .

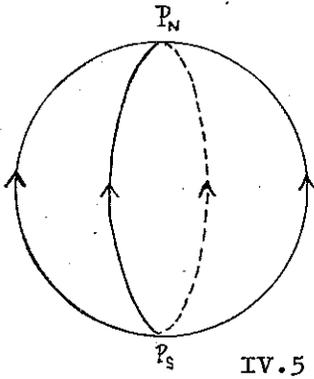
DEFINIÇÃO - Sejam M uma variedade compacta de dimensão n e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Dizemos que X é um campo de Morse-Smale se:

- 1) X tem um número finito de elementos críticos (singulares e órbitas fechadas) todos hiperbólicos.
- 2) Se σ_1 e σ_2 são elementos críticos de X então $W^s(\sigma_1)$ é transversal a $W^u(\sigma_2)$.
- 3) $\Omega(X)$ é igual ao conjunto dos elementos críticos

de X .

A seguir exibimos alguns exemplos de campos de Morse-Smale. Os de número 4, 5, 6 e 7 são de S^2 , 8 e 9 de T^2 .

EXEMPLO 4 - Todo campo em S^2 com as características abaixo é chamado polo norte-polo sul.



P_N, P_S singularidades hiperbólicas

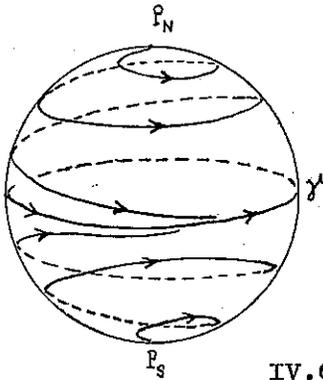
P_N atrator

P_S repulsor

se $x \in S^2 - \{P_N, P_S\}$ então

$\omega(x) = P_N$ e $\alpha(x) = P_S$.

EXEMPLO 5



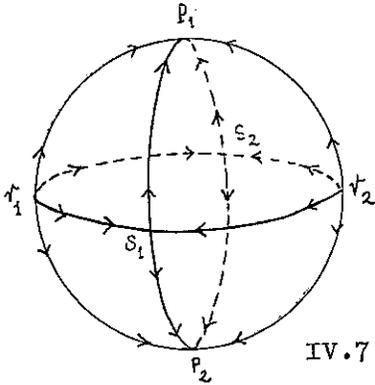
P_N, P_S singularidades hiperbólicas repulsoras

γ órbita fechada hiperbólica atratora

se $x \in S^2 - \{P_N, P_S\} \cup \gamma$ então

$\omega(x) = \gamma$ e $\alpha(x) = P_N$ ou P_S .

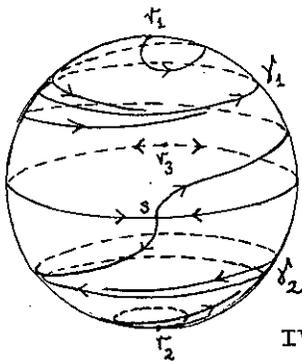
EXEMPLO 6



IV.7

p_1, p_2 atratores hiperbólicos
 r_1, r_2 repulsores hiperbólicos
 s_1 e s_2 selas hiperbólicas
 $\Omega(X) = \{p_1, p_2, r_1, r_2, s_1, s_2\}$

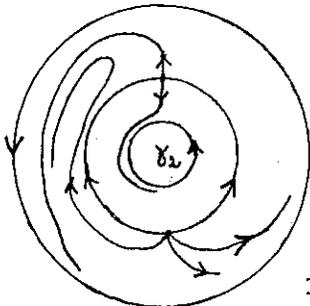
EXEMPLO 7



IV.8

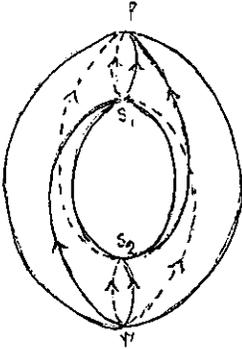
r_1, r_2, r_3 repulsores hiperbólicos
 s sela hiperbólica
 γ_1, γ_2 órbitas fechadas hiperbólicas atratoras
 $\Omega(X) = \{r_1, r_2, r_3, s\} \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$

As órbitas deste campo no cilindro limitado por γ_1 e γ_2 são como na figura abaixo.



IV.9

EXEMPLO 8



IV.10

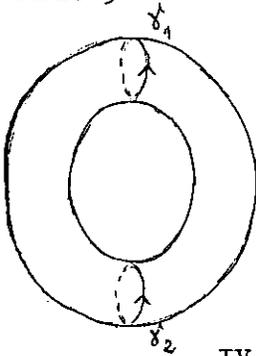
p atrator hiperbólico

r repulsor hiperbólico

s₁, s₂ selas hiperbólicas

$$\Omega(X) = \{p, r, s_1, s_2\}$$

EXEMPLO 9



IV.11

γ₁ órbita fechada hiperbólica atratora

γ₂ órbita fechada hiperbólica repulsora

$$\Omega(X) = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

Denotaremos por M-S o conjunto dos campos de Morse-Smale. A seguinte proposição dá uma caracterização mais simples dos campos de Morse-Smale em variedades bi-dimensionais. Uma ligação de sela corresponde a uma órbita cujos α e ω -limites são selas.

4.1 PROPOSIÇÃO - Seja M uma variedade compacta de dimensão dois. O campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é de Morse-Smale se e somente se:

- a) X tem um número finito de elementos críticos todos hiperbólicos.
- b) Não há ligação de selas.
- c) Qualquer órbita tem como α -limite um único elemento crítico e como ω -limite também um único elemento crítico.

Demonstração: É claro que se $X \in MS$ então X satisfaz às condições (a), (b) e (c) acima. Mostremos a recíproca. Seja $X \in \mathcal{X}^r(M)$ satisfazendo (a), (b) e (c).

Como a variedade estável de um poço e a variedade instável de uma fonte são bidimensionais, a condição de transversalidade só pode ser quebrada entre variedades estáveis e instáveis de selas. Tal não acontece pois não há ligação de selas. Assim, basta provar que $\Omega(X)$ é constituído de elementos críticos.

Inicialmente, mostremos que a variedade estável de um poço é constituída de pontos errantes, com exceção do próprio poço. Suponhamos que o poço seja uma singularidade p . Como já vimos existe um disco $D \subset W^s(p)$ contendo p cujo bordo é um círculo C transversal a X . Como $W^s(p) - p = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(C)$ e o conjunto dos pontos errantes é invariante, é suficiente mostrar que os pontos de C são errantes. Consideremos os discos $D_1 = X_{t=1}(D)$

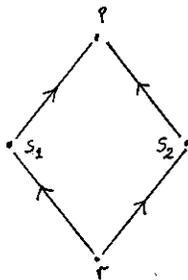
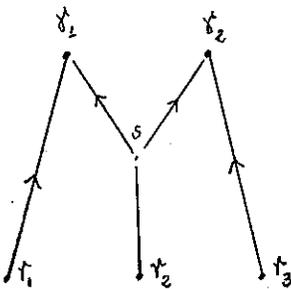
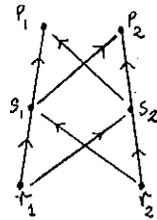
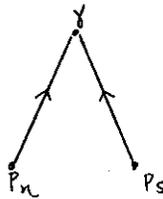
contido no interior de D e $D_{-1} = X_{t=-1}(D)$ cujo interior contém D . Tomemos um ponto x em C . Seja V uma vizinhança de x disjunta de D_1 e D_{-1} . Temos que $X_t(V) \cap V = \emptyset$ para todo t com $|t| > 2$. Isto prova que x é errante. Suponhamos agora que o poço seja uma órbita fechada γ . Neste caso existe também uma vizinhança U de γ cujo bordo S é transversal a X . Se γ é uma curva orientável, U é homeomorfo a um anel e S é a união de dois círculos disjuntos. Se γ não é orientável então U é homeomorfo a uma faixa de Moebius e S é um círculo. Além disto $W^S(\gamma) - \gamma = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(S)$. Com o mesmo argumento anterior temos que S , e portanto $W^S(\gamma) - \gamma$, é constituído de pontos errantes. De maneira inteiramente análoga podemos demonstrar que $W^u(\sigma) - \sigma$ é formado de pontos errantes quando σ é um elemento crítico repulsor. Finalmente se $x \in M$ não é uma singularidade e nem pertence a uma órbita fechada então ou $\omega(x)$ é um atrator ou $\alpha(x)$ é um repulsor. Isto decorre da não existência de ligação de selas. Logo x é errante, o que conclui a demonstração.

DEFINIÇÃO - Dado um campo X de Morse-Smale chamamos de diagrama de fase Γ de X ao conjunto de elementos críticos de X munido da seguinte ordem par-

cial: $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma$, $\sigma_1 \leq \sigma_2$ se $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2) \neq \emptyset$. Isto é, existe uma órbita que nasce em σ_1 e morre em σ_2 .

A relação \leq acima é uma ordem parcial em Γ pois não há ligação de selas. Observamos também que, como $\dim M = 2$, o diagrama de qualquer campo de Morse-Smale conterá no máximo três níveis.

EXEMPLOS - Os diagramas de fase dos Exemplos 4 a 9 desta seção são os seguintes:



IV.12

DEFINIÇÃO - Sejam $X, \tilde{X} \in M-S$ e $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ seus diagramas de fase. Dizemos que Γ e $\tilde{\Gamma}$ são isomorfos se existir uma correspondência biunívoca $h: \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$ tal que

- a) $x \in \Gamma$ é uma singularidade se e somente se $h(x) \in \tilde{\Gamma}$ é uma singularidade.
- b) $x_1, x_2 \in \Gamma$ então $x_1 \leq x_2$ se e somente se $h(x_1) \leq h(x_2)$.

Mostraremos a seguir que pequenas perturbações de um campo de Morse-Smale dá origem a campos de Morse-Smale com diagramas de fase isomorfos. Para este efeito usaremos o conceito de filtração associada a um campo de Morse-Smale.

DEFINIÇÃO - Seja $X \in M-S$. Uma filtração para X é uma seqüência $M_0 = \emptyset, M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_k = M$ de subvariedades compactas M_i com bordo para $0 < i < k$ tais que

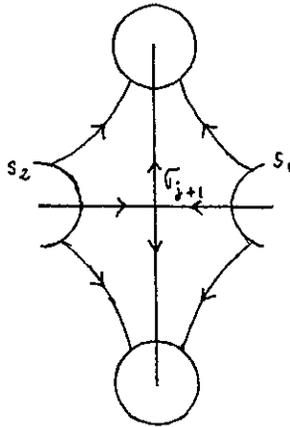
- a) X é transversal ao bordo de M_i e $X_t(M_i) \subset \text{Interior } M_i$ para $t > 0$.
- b) Em $M_{i+1} - M_i$ o conjunto maximal invariante do fluxo X_t consiste apenas de um elemento crítico σ_{i+1} . Isto é $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(M_{i+1} - \text{Int } M_i) = \sigma_{i+1}$.

4.2 LEMA - Seja $X \in \mathcal{X}^r(M^2)$ um campo de Morse-Smale.

Existe uma filtração para X .

Demonstração: Sejam $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j$ os atratores de X .

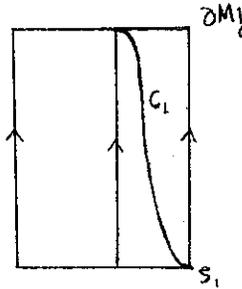
Tomemos vizinhanças disjuntas V_1, V_2, \dots, V_j com bordos transversais a X , como na demonstração da Proposição 4.1. Definimos $M_1 = V_1$, $M_2 = M_1 \cup V_2, \dots, M_j = M_{j-1} \cup V_j$. Sejam $\sigma_{j+1}, \dots, \sigma_s$ as selas de X . Consideremos σ_{j+1} e as componentes de $W^u(\sigma_{j+1}) - \sigma_{j+1}$ as quais interseçam ∂M_j transversalmente. Em uma vizinhança de σ_{j+1} , construímos duas seções S_1 e S_2 transversais a $W^s(\sigma_{j+1}) -$



IV.13

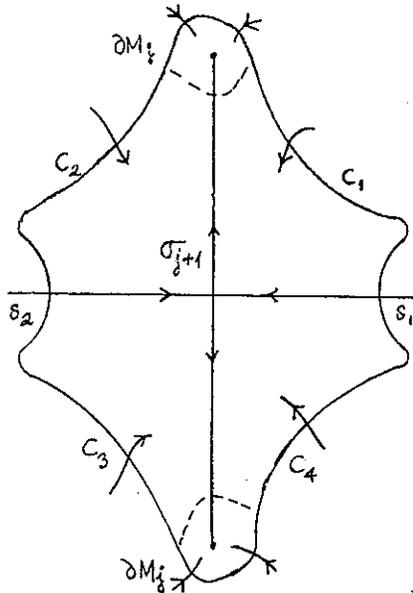
$-\sigma_{j+1}$. Se esta vizinhança for suficientemente pequena, as trajetórias de X pelas extremidades de S_1 e S_2 cortam transversalmente a ∂M_j . Próximas a estes arcos de trajetórias, construímos curvas c_1, c_2, c_3, c_4 transversais a X ligando as extremidades de S_1 e S_2 a ∂M_j . Podemos construir estas curvas de forma que sejam tangentes às subvariedades S_1, S_2 e ∂M_j . Isto pode ser feito tomando fluxos tubulares contendo estes arcos

de trajetórias, como indicado na figura.



IV.14

Seja V_{j+1} a região contendo σ_{j+1} e limitada por S_1, S_2, c_1, c_2, c_3 e c_4 e parte de ∂M_j . Tomemos



IV.15

$M_{j+1} = M_j \cup V_{j+1}$. É fácil verificar que $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(V_{j+1}) = \sigma_{j+1}$ e que M_{j+1} satisfaz às condições desejadas.

Repetimos a construção para cada sela obtendo assim a se-

seqüência de subvariedades $\phi = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{j+1} \subset \dots \subset M_s$. Sejam, finalmente, $\sigma_{s+1}, \sigma_{s+2}, \dots, \sigma_k$ as fontes de X . Consideramos vizinhanças $V_{s+1}, V_{s+2}, \dots, V_{s+k}$ destas fontes com bordos transversais a X , como no caso dos poços. Definimos então

$$M_{s+1} = M - (\text{Int } V_{s+2} \cup \dots \cup \text{Int } V_k)$$

$$M_{s+2} = M - (\text{Int } V_{s+3} \cup \dots \cup \text{Int } V_k)$$

e assim por diante, resultando $M_k = M$. É imediato verificar que a seqüência $\phi = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k$ é uma filtração para X .

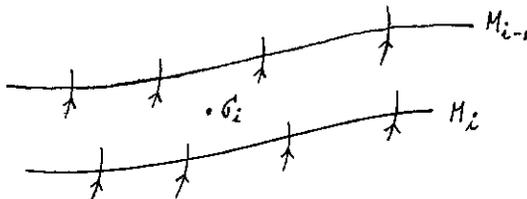
4.3 TEOREMA - Seja $X \in M-S$. Existe uma vizinhança u de X em $\mathbb{R}^r(M^2)$ tal que se $Y \in u$ então $Y \in M-S$ e seu diagrama de fase é isomorfo ao de X .

Demonstração: Como os elementos críticos de X são hiperbólicos, a cada $\sigma_i \in \Omega(X)$ existem vizinhanças $u_i(X) \subset \mathbb{R}^r(M^2)$ e $U_i(\sigma_i)$ tal que todo $Y \in u_i$ tem um único elemento críticos $\sigma_i(Y) \subset U_i$. Além disto, pelo teorema de Hartman, reduzindo se necessário as vizinhanças u_i, U_i , podemos supor que $\sigma_i(Y)$ é o único conjunto invariante pelo fluxo Y_t inteiramente contido em U_i . Tomamos $u = \bigcap u_i$. Consideremos agora uma filtração $\phi = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$ para X . Vamos mos-

trar que para u suficientemente pequeno então $\phi = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$ é também uma filtração para qualquer $Y \in u$. Isto implica que $\Omega(Y)$ consiste dos elementos críticos $\sigma_i(Y)$ definidos acima. De início observamos que, sendo X transversal a ∂M_i , que é compacto, Y próximo a X também o será. Reduzimos as vizinhanças $U_i(\sigma_i)$ de forma que $U_i(\sigma_i) \subset M_i - M_{i-1}$. Como $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(M_i - \text{Int } M_{i-1}) = \sigma_i$, existe $T > 0$ tal que $\bigcap_{t=-T}^T X_t(M_i - \text{Int } M_{i-1}) \subset U_i$. O mesmo fato é válido para $Y \in u$ se u for suficientemente pequena. Como

$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} Y_t(U_i) = \sigma_i(Y)$, segue-se que $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} Y_t(M_i - \text{Int } M_{i-1}) = \sigma_i(Y)$. Consequentemente, $\phi = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$ é uma filtração para todo $Y \in u$. Afirmamos que

$\Omega(Y) \cap (M_i - \text{Int } M_{i-1}) = \sigma_i(Y)$. De fato, qualquer órbita

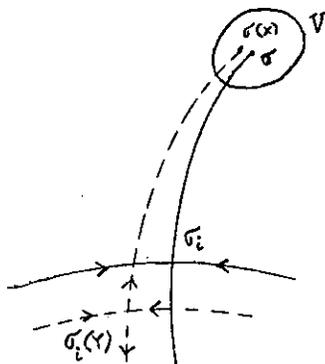


IV.16

γ distinta de $\sigma_i(Y)$ passando por um ponto de $M_i - \text{Int } M_{i-1}$ deve intersestar ∂M_i ou ∂M_{i-1} (ou ambos). Isto porque a única órbita inteiramente contida em $M_i - \text{Int } M_{i-1}$ é $\sigma_i(Y)$. Como $X_t(M_{i-1}) \subset M_{i-1}$ para

$t > 0$ e $X_t(M - M_i) \subset M - M_i$ para $t < 0$, γ é uma órbita errante. Assim $\sigma_i(Y)$ é a única órbita de $\Omega(Y)$ em $M_i - \text{Int } M_{i-1}$. Portanto $\Omega(Y) = \bigcup_i \sigma_i(Y)$ sendo $\sigma_i(Y)$ hiperbólico para todo índice i .

Para concluirmos que $Y \in \mathcal{U}$ é um campo de Morse-Smale basta mostrar que para \mathcal{U} pequena não há ligação de selas. Assim seja $\sigma_i = \sigma_i(X)$ uma sela e suponhamos que uma das componentes γ de $W^u(\sigma_i) - \sigma_i$ tenha como ω -limite o poço $\sigma = \sigma(X)$. Seja V uma vizinhança de σ



IV.17

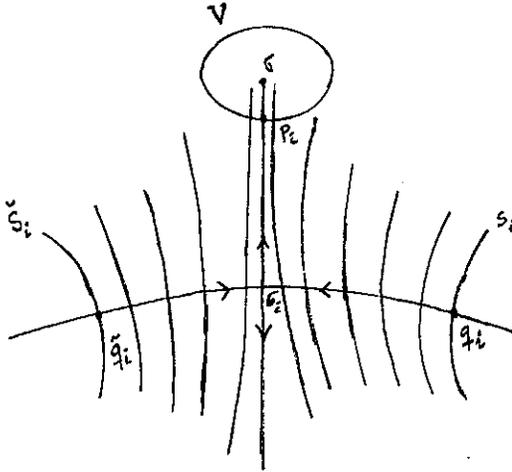
como na construção da filtração. Como $W^u(\sigma_i(Y))$ está próxima de $W^u(\sigma_i)$ em partes compactas, então uma das componentes de $W^u(\sigma_i(Y)) - \sigma_i(Y)$ também intersecta ∂V transversalmente. Logo seu ω -limite é $\sigma(Y)$. O mesmo raciocínio aplica-se a todas as componentes estáveis e ins-

táveis das selas. Assim para \mathcal{U} suficientemente pequena, se $Y \in \mathcal{U}$ então $Y \in M-S$ e a correspondência acima $\sigma_i(X) \rightarrow \sigma_i(Y)$ é um isomorfismo de diagramas. O teorema está demonstrado.

4.4 TEOREMA - Se $X \in \mathcal{X}^r(M^2)$ é um campo de Morse-Smale então X é estruturalmente estável.

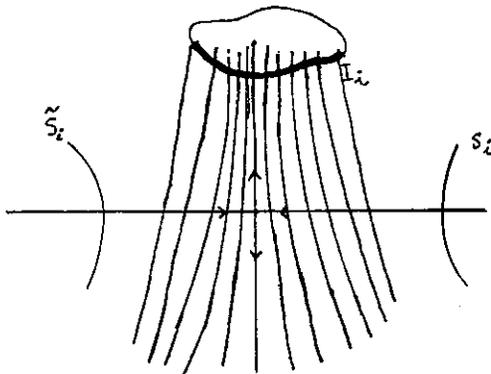
Demonstração: Pelo teorema anterior, sabemos que existe uma vizinhança $\mathcal{U}(X) \subset \mathcal{X}^r(M^2)$ tal que se $Y \in \mathcal{U}$ então $Y \in M-S$ e existe um isomorfismo $\sigma_i(X) \rightarrow \sigma_i(Y)$ de diagramas de fase.

1ª parte: Suponhamos inicialmente que X não possui órbitas fechadas. Consideremos um poço σ de X e o correspondente poço $\sigma(Y)$, $Y \in \mathcal{U}$. Seja $V \ni \sigma$ um disco em $W^s(\sigma)$ como anteriormente. Isto é, ∂V é transversal a X e a todo $Y \in \mathcal{U}$. Também $\sigma(Y) \in V \subset W^s(\sigma(Y))$. Sejam $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, as selas de X tais que $\sigma_i \leq \sigma$. Chamemos de p_1, p_2, \dots os pontos em que as separatrizes das selas σ_i (componentes de $W^u(\sigma_i) - \sigma_i$) intersectam ∂V . Sejam $p_1(Y), p_2(Y), \dots$ os correspondentes pontos para Y . Para cada σ_i , consideremos as seções S_i, \bar{S}_i transversais às separatrizes de σ_i pelos pontos q_i, \bar{q}_i como na figura a seguir.



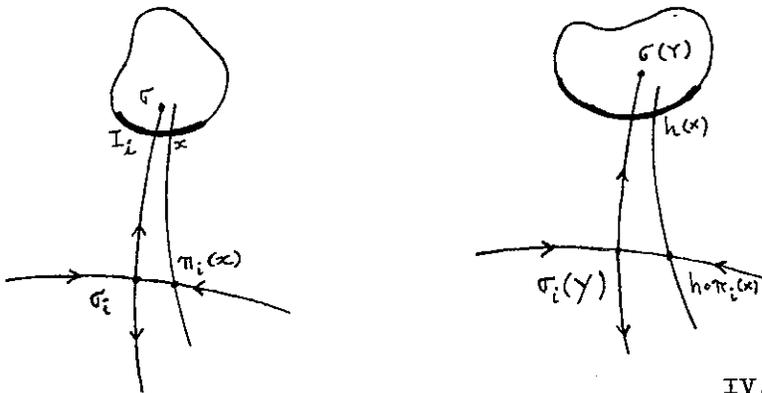
IV.18

Saturando S_i, \tilde{S}_i pelo fluxo X_t obtemos uma família tubular para $W^u(\sigma_i)$ como no Capítulo II, §7. As fibras desta família serão $X_t(S_i)$ e $X_t(\tilde{S}_i)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ e mais $W^u(\sigma_i)$. A projeção π_i que a cada fibra f associa $f \cap W^s(\sigma_i)$ é contínua. Além disto π_i é um homeomorfismo de uma vizinhança I_i de p em ∂V sobre



IV.19

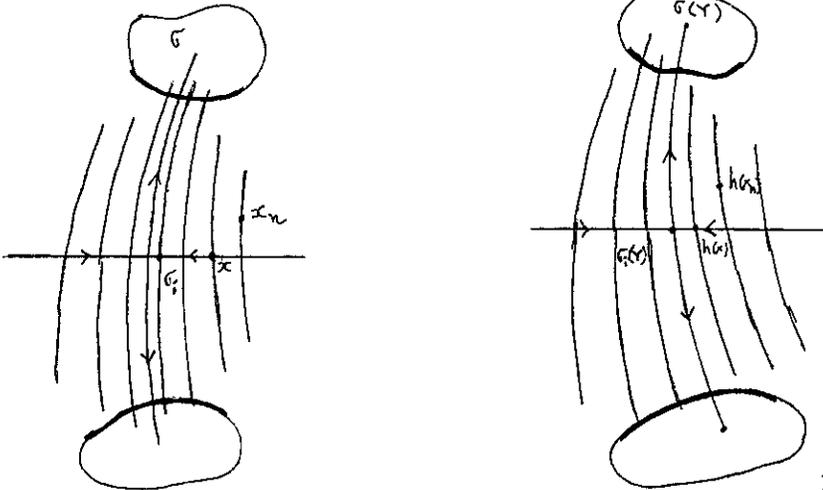
uma vizinhança de σ_i em $W^S(\sigma_i)$. Efetuamos a mesma construção para o campo Y . Começamos agora a definir a equivalência topológica h entre X e Y . Colocamos $h(\sigma) = \sigma(Y)$, $h(\sigma_i) = \sigma_i(Y)$, $h(p_i) = p_i(Y)$, $h(q_i) = q_i(Y)$ e $h(\tilde{q}_i) = \tilde{q}_i(Y)$. Extendemos h a $W^S(\sigma_i)$ pela equação $h X_t q_i = Y_t h q_i = Y_t q_i(Y)$, $h X_t \tilde{q}_i = Y_t \tilde{q}_i(Y)$. Agora definimos h em I_i da seguinte maneira: para $x \in I_i$, $hx = [\pi_i(Y)]^{-1} h \pi_i x$.



IV.20

Temos assim que h está definido em um número finito de intervalos disjuntos I_i de ∂V . Observe que se a vizinhança $U(X)$ é pequena então h/I_i é próximo à identidade. Podemos então estender h a todo o círculo ∂V . Repetimos a mesma construção para todos os poços. Finalmente, definimos h em todo M^2 pela equação $h X_t z = Y_t h z$. É fácil ver pela construção que h possui in-

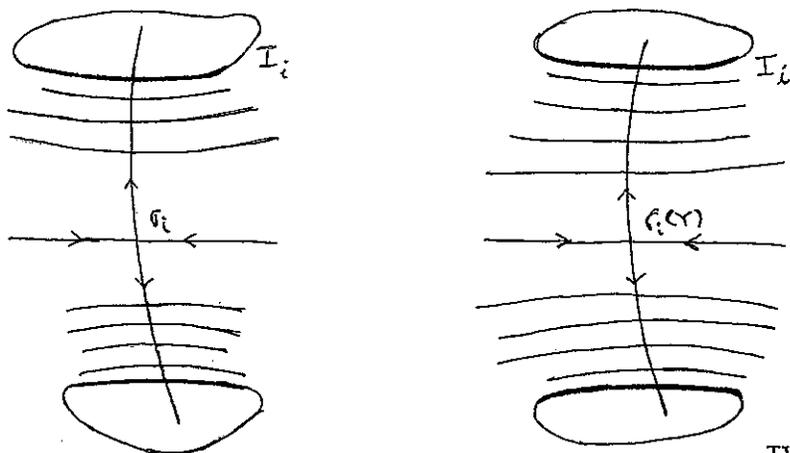
versa h^{-1} a qual pode ser definida exatamente como h trocando os papéis de X e Y . Assim resta provar a continuidade de h . Isto é óbvio para os poços, fontes e variedades estáveis dos poços. Vamos analisar o caso das variedades estáveis das selas. Seja $x \in W^S(\sigma_i)$ onde σ_i é uma sela. Observemos que h leva fibras da família tubular de σ_i em fibras da família tubular de $\sigma_i(Y)$, isto é, $\pi_i(Y)hz = h \pi_i(Y)z$. Consideremos uma seqüência qualquer $x_n \rightarrow x$. Queremos mostrar que $h x_n \rightarrow hx$. Pela observação acima temos que a fibra por $h x_n$ converge para a fibra por hx . Isto é $\pi_i(Y) h x_n \rightarrow hx$. Resta mostrar que $h x_n$ converge para $W^S(\sigma_i(Y))$. Para isto constr



IV.21

truímos famílias tubulares para $W^S(\sigma_i)$ e $W^S(\sigma_i(Y))$.

Isto é feito a partir dos segmentos I_i , $I_i(Y)$ contidos



IV.22

em ∂V saturando-os pelos fluxos X_t e Y_t . Como $h(I_i) = I_i(Y)$ temos que h leva fibras da família tubular de $W^S(\sigma_i)$ em fibras da família tubular de $W^S(\sigma_i(Y))$. Portanto se $\tilde{\pi}_i$ e $\tilde{\pi}_i(Y)$ são as respectivas projeções em $W^u(\sigma_i)$ e $W^u(\sigma_i(Y))$, então $h \tilde{\pi}_i z = \tilde{\pi}_i(Y) h z$. Como $\tilde{\pi}_i$ é contínua e $x_n \rightarrow x \in W^S(\sigma_i)$ vemos que $\tilde{\pi}_i x_n \rightarrow \tilde{\pi}_i x = \sigma_i$. Também como a restrição de h a $W^u(\sigma_i)$ é contínua, $h(\tilde{\pi}_i x_n) \rightarrow h(\sigma_i) = \sigma_i(Y)$. Por outro lado, $h(\tilde{\pi}_i(x_n)) = \tilde{\pi}_i(Y) h(x_n)$ e portanto $\tilde{\pi}_i(Y) h(x_n) \rightarrow \sigma_i(Y)$. Isto mostra que $h(x_n)$ converge para a variedade estável de $\sigma_i(Y)$ e conseqüentemente $h(x_n) \rightarrow h(x)$. Isto termina a demonstração no caso em que X não tem órbita fechada.

2ª parte: Suponhamos agora que X possua órbitas fechadas. Estas órbitas fechadas são necessariamente

te atratoras ou repulsoras pois elas são hiperbólicas e $\dim M = 2$. Como já observamos, existem campos Y arbitrariamente próximos a X tais que os fluxos X_t e Y_t não são conjugados. Para isto basta alterar com uma pequena perturbação o período de uma das órbitas fechadas de X . Contornaremos esta dificuldade definindo uma conjugação h entre fluxos \tilde{X}_t e \tilde{Y}_t reparametrizados de X_t e Y_t . Como as órbitas de X_t e \tilde{X}_t são as mesmas e também as órbitas de Y_t e \tilde{Y}_t resulta que h será uma equivalência entre os campos X e Y .

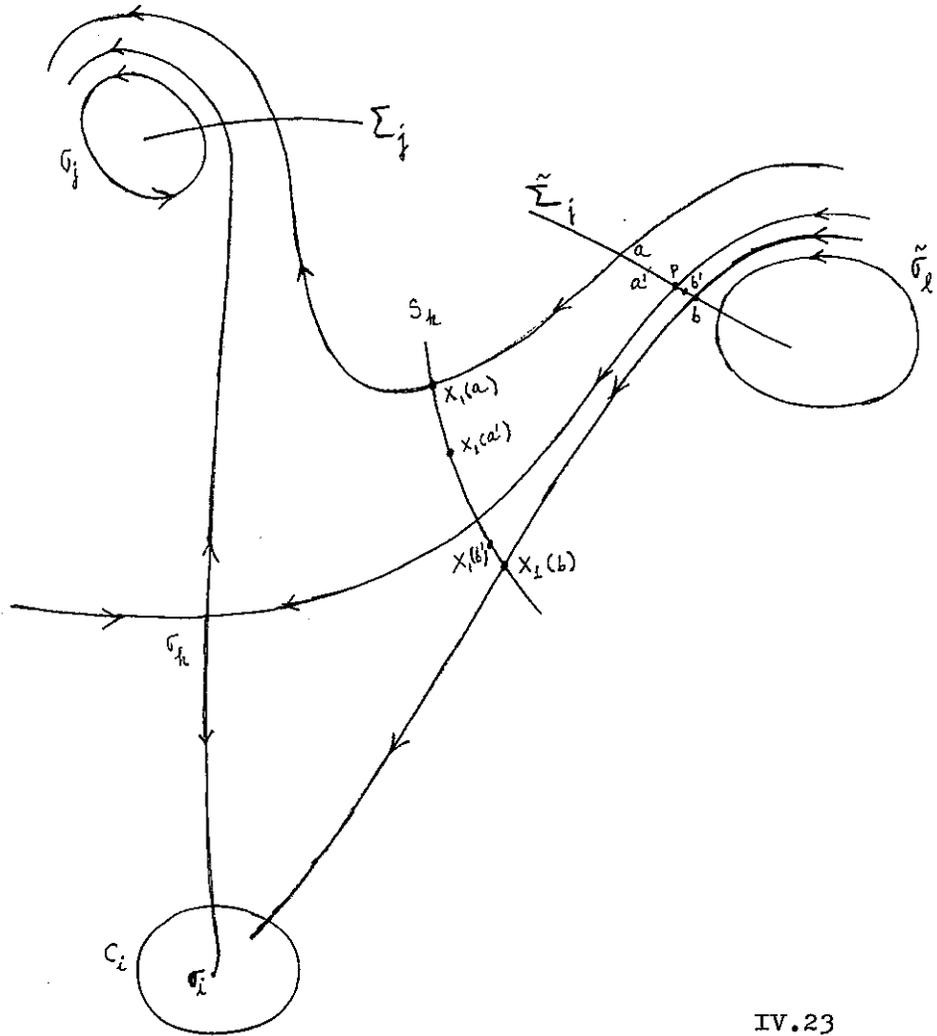
Usando o Lema 1.3 do Cap.III podemos já de início supor que as órbitas fechadas de X e Y tenham todas elas o mesmo período τ e admitam seções transversais invariantes. Afim de simplificar a exposição consideraremos dois subcasos.

(2.a) Consideremos inicialmente o caso em que todas as órbitas fechadas de X sejam atratoras. Vamos procurar imitar a construção da conjugação feita para o caso em que não há órbitas fechadas. Em volta de cada singularidade atratora $\sigma_i, \sigma_i(Y)$ consideramos um círculo C_i transversal a X e Y . Em cada órbita fechada $\sigma_j, \sigma_j(Y)$ tomamos uma seção transversal invariante Σ_j e em Σ_j domínios fundamentais $I_j, I_j(Y)$ para as transformações de Poincaré associadas. I_j será compos-

to de dois intervalos fechados. Como anteriormente, con
struimos famílias tubulares instáveis associadas às selas
 $\sigma_k, \sigma_k(Y)$ de X e Y : tomamos seções S_k e \tilde{S}_k trans
versais a $W^S(\sigma_k)$ e $W^S(\sigma_k(Y))$ e consideramos as famí-
lias $X_t(S_k), X_t(\tilde{S}_k)$ e $Y_t(S_k), Y_t(\tilde{S}_k)$. O homeomorfi-
mo que iremos construir deverá levar cada fibra da famí-
lia tubular de σ_k em uma fibra da família tubular de
 $\sigma_k(Y)$. Além disto preservará os círculos transversais
 C_i e as seções transversais Σ_j . Assim definindo uma
conjugação de $X/W^S(\sigma_k)$ e $Y/W^S(\sigma_k(Y))$ para cada sela
 σ_k , induziremos um homeomorfismo em um número finito de
subintervalos de C_i e de I_j . Tais subintervalos con-
têm as interseções das variedades instáveis das selas com
 C_i e I_j . Tal homeomorfismo h é próximo à identidade
se Y é próximo a X e portanto pode ser estendido a to
do C_i e I_j . Para cada singularidade σ_l definimos
 $h(\sigma_l) = \sigma_l(Y)$ e para cada órbita fechada σ_j definimos
 $h(\Sigma_j \cap \sigma_j) = \Sigma_j \cap \sigma_j(Y)$. Finalmente, estendemos h a to
do M usando a equação de conjugação $h = Y_t h X_{-t}$ como
na primeira parte da demonstração. Resulta, então, que
 h é um a um e sobre. A continuidade de h nas singula-
ridades e variedades estáveis das selas pode ser verifica-
da como na primeira parte. A continuidade de h nas ór-
bitas fechadas segue-se da invariância das seções Σ_j ,

como visto na estabilidade local de órbitas fechadas hiperbólicas (Seção 1 do Capítulo III).

(2.b) Suponhamos, finalmente, que exista órbita fechada atratora e órbita fechada repulsora para X . Este caso torna-se inteiramente análogo ao anterior após uma nova reparametrização dos campos X e Y . Esta reparametrização se faz necessária para que possamos estender às órbitas fechadas repulsoras o homeomorfismo construído em (2.a). Para tanto consideremos seções transversais invariantes $\tilde{\Sigma}_\ell$ associadas às órbitas fechadas repulsoras $\tilde{\sigma}_\ell$ e sejam \tilde{I}_ℓ os domínios fundamentais correspondentes. Cada \tilde{I}_ℓ fica decomposto em uma união de subintervalos fechados cujas extremidades interiores a \tilde{I}_ℓ são as interseções das variedades estáveis das seções com $\text{Int } \tilde{I}_\ell$. Observemos que todos os pontos de cada um destes subintervalos abertos têm para ω -limite o mesmo atrator, como na figura abaixo. Seja $p \in W^s(\sigma_k) \cap \tilde{I}_\ell$ uma das extremidades de um destes subintervalos. Consideremos um pequeno intervalo $[a,b] \subset \tilde{I}_\ell$ em torno de p tal que toda órbita por pontos de $[a,b]$ intersecta a seção transversal S_k . Utilizando o Lema 1.3 do Cap. III, fazemos uma reparametrização de X de modo que todos os pontos de



IV.23

$[a, b]$ atinjam S_k no tempo 1. Continuaremos chamando de X o campo resultante desta reparametrização. Seja $[a', b'] \subset (a, b)$ um intervalo contendo p . Com uma nova reparametrização podemos fazer com que todos os pontos de

$[X_1(a), X_1(a')] \subset S_k$ atinjam Σ_j no tempo 1. Analogamente para $[X_1(b), X_1(b')] \subset C_i$. Assim $X_2[a, a'] \subset \bar{\Sigma}_j$ e $X_2[b, b'] \subset C_i$. Repetimos esta construção para as diversas selas cujas variedades estáveis intersejam \bar{I}_ℓ . Finalmente, reparametrizamos X de modo que todos os pontos do complementar em \bar{I}_ℓ da união dos intervalos $[a, b]$ como acima atinjam os diversos C_i e Σ_j no mesmo tempo $t = 2$.

Efetuamos também as mesmas reparametrizações para os campos Y próximos a X . A construção da conjugação h entre X_t e Y_t faz-se agora exatamente como em (2.a), acrescentando-se $h(\bar{\Sigma}_\ell \cap \bar{\sigma}_\ell) = \bar{\Sigma}_\ell \cap \bar{\sigma}_\ell(Y)$.

§2. Densidade dos Campos de Morse-Smale.

Nesta seção mostramos que M-S é denso em $\mathcal{X}^r(M^2)$, M^2 orientável. Utilizamos o Teorema de Kupka-Smale, o que permite uma certa simplificação da prova original de Peixoto [18]. Observamos porém que este resultado não só é anterior como também serviu de motivação ao Teorema de Kupka-Smale. No final da seção analisamos o caso em que M^2 não é orientável e discutimos os resultados correspondentes para difeomorfismos.

Iniciamos a seção demonstrando o teorema para a esfera S^2 que é bem mais simples e ilustra o caso geral.

DEFINIÇÃO - Seja γ uma órbita de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Dizemos que γ é recorrente se $\omega(\gamma) \supset \gamma$ ou $\alpha(\gamma) \supset \gamma$.

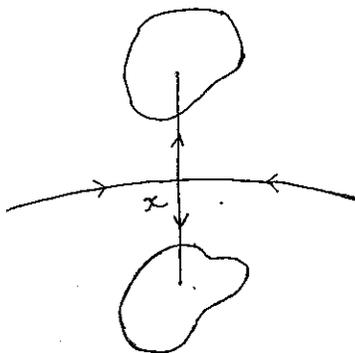
Um elemento crítico de X é sempre recorrente. Neste caso dizemos que a órbita recorrente é trivial. Qualquer órbita do fluxo irracional no toro é recorrente não trivial.

Pelo teorema de Poincaré-Bendixon, toda órbita recorrente de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(S^2)$ é trivial. Tal fato simplifica bastante a demonstração de que M-S é denso em $\mathfrak{X}^r(S^2)$.

2.1 TEOREMA - Se $X \in \mathfrak{X}^r(S^2)$ é um campo de Kupka-Smale então X é um campo de Morse-Smale.

Demonstração: Como X é Kupka-Smale então X tem um número finito de singularidades todas hiperbólicas. Pelo teorema de Poincaré-Bendixon o ω e α -limite de qualquer órbita é uma única singularidade ou uma órbita fechada. Isto proque se o ω -limite de uma órbita γ contém mais de uma singularidade então estas singularidades devem ser selas e $\omega(\gamma)$ contém também uma órbita regular ligando estas selas. Como X é Kupka-Smale não há

ligação de selas, o que comprova a afirmativa acima. Como as órbitas fechadas são hiperbólicas atratoras ou repulsoras resta mostrar que existe apenas um número finito delas. Suponhamos, por absurdo, que exista uma infinidade de órbitas fechadas. Seja $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ uma seqüência de pontos em órbitas fechadas distintas. Tomando uma subsequência podemos supor que $x_n \rightarrow x \in S^2$. É claro que $w(x)$ é uma sela, pois não pode existir órbita fechada na variedade estável de um atrator (singularidade ou órbita fechada). Analogamente $\alpha(x)$ é uma sela. Portanto x é uma sela pois caso contrário a órbita de x seria uma ligação de selas. Por outro lado o w -limite das



IV.24

separatrizes instáveis de x são poços pois não há ligação de selas. Isto conduz a um absurdo uma vez que todas as órbitas por pontos próximos de x e fora de suas separatrizes estáveis tem estes poços como w -limite. Portanto x não pode ser acumulado por órbitas fechadas. Isto

demonstra o teorema.

Como o conjunto de campos de Kupka-Smale é denso em $\mathfrak{X}^r(M)$, temos o seguinte

COROLÁRIO - $M-S$ é denso em $\mathfrak{X}^r(S^2)$.

Seguiremos o mesmo esquema para provar que $M-S$ é denso em $\mathfrak{X}^r(M^2)$. No entanto, a demonstração torna-se bem mais delicada pela presença de órbitas recorrentes não triviais.

DEFINIÇÃO - Seja $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Dizemos que $K \subset M$ é um conjunto minimal para X se K é fechado não vazio, invariante por X_t e não existe subconjunto próprio de K com estas propriedades. Se K é um elemento crítico de X , dizemos que K é um minimal trivial.

Observemos que se K é minimal e γ é uma órbita contida em K , então γ é recorrente. Isto porque $\omega(\gamma)$ é fechado não vazio, invariante por X_t e $\omega(\gamma) \subset K$. Logo $\omega(\gamma) = K \supset \gamma$. Analogamente $\alpha(\gamma) \supset \gamma$.

2.2 LEMA - Seja $F \subset M$ fechado não vazio e invariante por X_t , $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Então existe um conjunto minimal $K \subset F$.

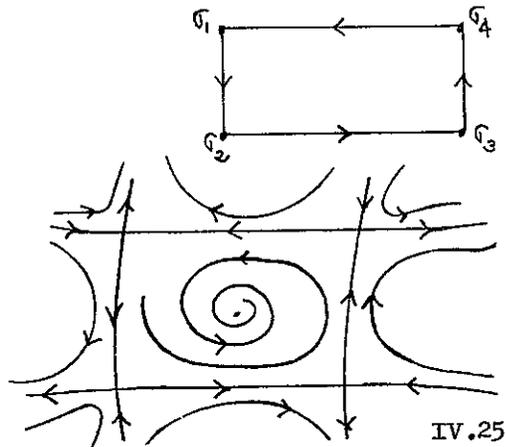
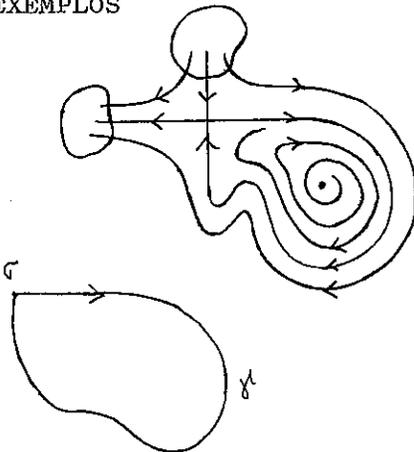
Demonstração: Seja \mathfrak{F} o conjunto de subconjuntos fechados

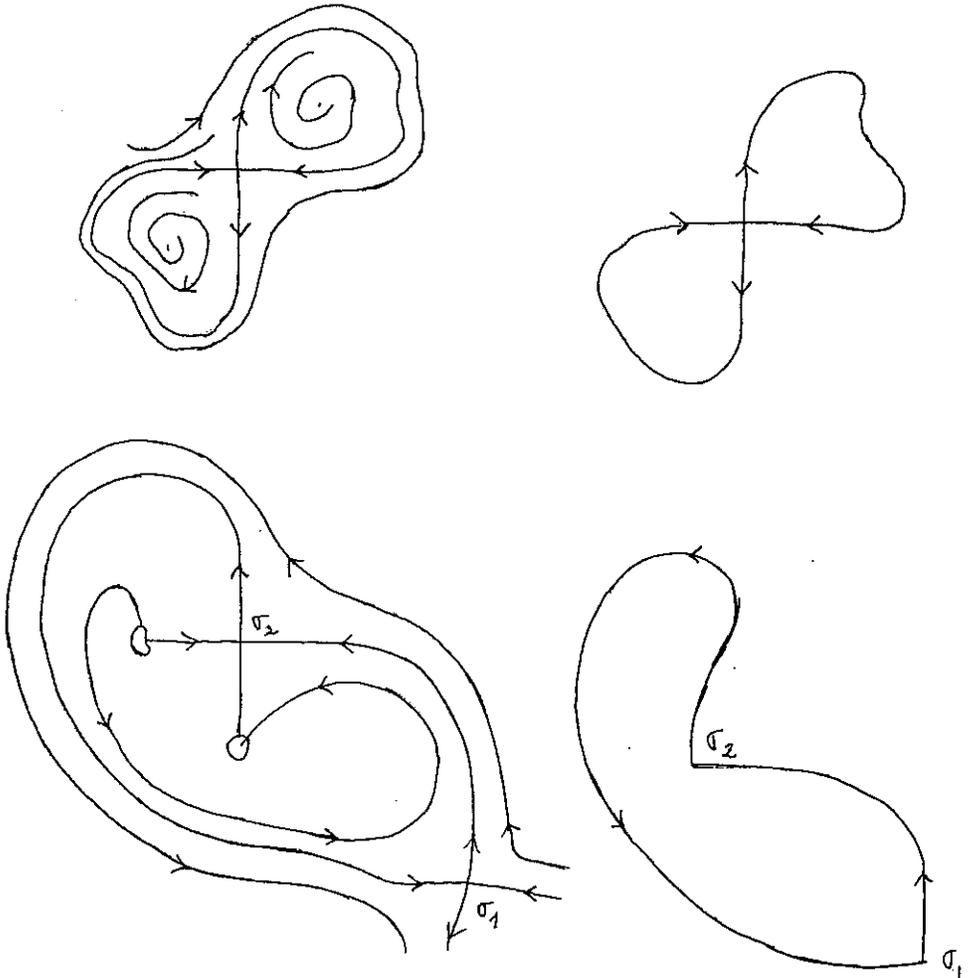
de F invariantes por X_t . Consideremos em \mathfrak{F} a seguinte ordem parcial: se $A, B \in \mathfrak{F}$ então $A \leq B$ se $A \subset B$. Seja agora $\{A_i\}$ uma família em \mathfrak{F} totalmente ordenada. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrasse $\bigcap_i A_i$ é não vazio. Como $\bigcap_i A_i$ é fechado e invariante por X_t , temos que $\bigcap_i A_i \in \mathfrak{F}$. Assim $\bigcap_i A_i$ é uma cota inferior para $\{A_i\}$. Pelo lema de Zorn [10], existe um elemento minimal em \mathfrak{F} . Isto demonstra o lema.

DEFINIÇÃO - Um gráfico para $X \in \mathbb{R}^r(M^2)$ é um subconjunto fechado e conexo de M constituído de selas e separatrizes tais que

- 1) o ω -limite e o α -limite de cada separatriz do gráfico são selas;
- 2) cada sela do gráfico tem pelo menos uma separatriz estável e uma instável pertencentes ao gráfico.

EXEMPLOS





IV.26

2.3 PROPOSIÇÃO - Seja $X \in \mathbb{R}^r(M^2)$ um campo cujas singularidades sejam todas hiperbólicas. Se X só possui órbitas recorrentes triviais então o ω -limite de qualquer órbita é um elemento crítico ou um gráfico. Analogamente para o α -limite.

Demonstração: Tomemos uma trajetória qualquer γ de X .

Suponhamos que $\omega(\gamma)$ não seja um elemento crítico. É claro que $\omega(\gamma)$ não pode conter uma singularidade atratora nem uma órbita fechada, pois neste caso $\omega(\gamma)$ se reduziria a um destes elementos. Por outro lado $\omega(\gamma)$ deve conter alguma sela. Isto porque um conjunto minimal de $\omega(\gamma)$ deve ser um elemento crítico e já afastamos a hipótese de singularidade atratora e órbita fechada. Logo $\omega(\gamma)$ contém selas e como $\omega(\gamma)$ não se reduz a uma única singularidade, $\omega(\gamma)$ contém separatrizes de selas. É claro que o número de separatrizes contidas em $\omega(\gamma)$ é finito.

Suponhamos inicialmente que toda separatriz contida em $\omega(\gamma)$ tenha uma única sela como ω -limite. Vamos mostrar que $\omega(\gamma)$ é um gráfico. Observemos que existe um gráfico contido em $\omega(\gamma)$. De fato sejam $\sigma_1 \in \omega(\gamma)$ uma sela e γ_1 uma separatriz instável de σ_1 contida em $\omega(\gamma)$. Seja $\sigma_2 = \omega(\gamma_1)$ e γ_2 uma separatriz instável de σ_2 contida em $\omega(\gamma)$ e assim por diante. Como temos um número finito de separatrizes obteremos, por este processo uma seqüência $\gamma_1, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_l = \gamma_i$ de separatrizes em $\omega(\gamma)$ tais que $\omega(\gamma_i) = \alpha(\gamma_{i+1})$ o que define um gráfico.

Seja G um gráfico maximal em $\omega(\gamma)$, isto é, não

existe nenhum gráfico em $w(\gamma)$ contendo G . Afirmamos que $w(\gamma) = G$. Caso contrário existe uma sela $\bar{\sigma}_1 \in G$ e uma separatriz instável $\bar{\gamma}_1$ de $\bar{\sigma}_1$ que não pertence a G . Consideremos a sela $\bar{\sigma}_2 = w(\bar{\gamma}_1)$ e $\bar{\gamma}_2 \subset w(\gamma)$ uma separatriz de $\bar{\sigma}_2$. Continuando o argumento obteremos uma seqüência $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_k$ tal que $\bar{\sigma}_k = \bar{\sigma}_j$ para algum $j < k$ ou $\bar{\sigma}_k \in G$. De qualquer forma obtemos um gráfico \bar{G} em $w(\gamma)$ que contém G , isto é, \bar{G} é a união de G com as selas $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_k$ e as separatrizes $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{k-1}$. Isto é um absurdo pois G é maximal. Logo $w(\gamma) = G$.

Suponhamos agora que exista uma separatriz $\bar{\gamma}_1 \subset w(\gamma)$ cujo w -limite não seja uma única sela. Ora $w(\bar{\gamma}_1) \subset w(\gamma)$ e $w(\bar{\gamma}_1)$ não contém $\bar{\gamma}_1$ pois toda recorrência é trivial. Se $w(\bar{\gamma}_1)$ só contém separatrizes que tenham uma única sela como w -limite, temos pelo argumento anterior, que $w(\bar{\gamma}_1)$ é um gráfico. Este gráfico também será o w -limite de γ o que é um absurdo pois $w(\gamma) \supset \bar{\gamma}_1$. Logo deve existir $\bar{\gamma}_2 \in w(\bar{\gamma}_1)$ cujo w -limite não é uma única singularidade. Além disto $w(\bar{\gamma}_2) \subset w(\bar{\gamma}_1) \subset w(\gamma)$. Continuando o argumento encontraremos necessariamente uma separatriz $\bar{\gamma} \subset w(\gamma)$ tal que $w(\bar{\gamma}) \supset \bar{\gamma}$ pois o número de separatrizes é finito. Isto é um absurdo uma vez que não há recorrências não triviais.

COROLÁRIO - Se $X \in \mathcal{X}^r(M^2)$ é um campo de Kupka-Smale com órbitas recorrentes todas triviais então X é um campo de Morse-Smale.

Demonstração: Pela proposição anterior o ω -limite e o α -limite de qualquer órbita é um elemento crítico, pois não havendo ligação de selas não há gráficos. Resta mostrar que existe apenas um número finito de órbitas fechadas. Isto pode ser provado usando o mesmo argumento do caso $M = S^2$ do Teorema 2.1.

Passaremos agora à demonstração de que qualquer $X \in \mathcal{X}^r(M^2)$, M^2 orientável, pode ser aproximado por um campo de Morse-Smale. Para isto exibiremos um campo Y próximo a X com a seguinte propriedade: existe uma vizinhança $U(Y) \subset \mathcal{X}^r(M^2)$ tal que todo $Z \in U$ só possui órbitas recorrentes triviais. A partir daí aproximamos Y por um campo $Z \in U$ de Kupka-Smale. Pelo corolário acima Z é Morse-Smale.

Utilizaremos os seguintes lemas cuja demonstração será apresentada no final desta seção.

2.4 LEMA - Se $X \in \mathcal{X}^r(M^2)$ é um campo sem singularidades então X pode ser aproximado por um campo Y que possui uma órbita fechada.

2.5 LEMA - Suponhamos M^2 orientável. Se $X \in \mathfrak{X}^r(M^2)$ possui singularidades, sendo todas elas hiperbólicas, e existe uma órbita recorrente não trivial, então X pode ser aproximado por um campo Y que exhibe uma ligação de selas a mais do que X .

2.6 TEOREMA - O conjunto dos campos de Morse-Smale é denso em $\mathfrak{X}^r(M^2)$, M^2 orientável.

Demonstração: Seja $X \in \mathfrak{X}^r(M^2)$. Pertubando X se necessário, podemos supor que ele só tenha singularidades hiperbólicas.

1º caso: X não tem singularidades. Como M^2 é orientável temos que M^2 é o toro T^2 . Pelo Lema 2.4 X pode ser aproximado por um campo X_1 que possui uma órbita fechada. Pelo Lema 2.5 do Capítulo III podemos aproximar X_1 por Y que exhibe uma órbita fechada hiperbólica γ . Como Y não tem singularidades, γ não limita um disco em T^2 e portanto $T^2 - \gamma$ é um cilindro. Logo Y só tem recorrências triviais. Todo o campo próximo a Y goza desta mesma propriedade pois possui também uma órbita fechada. Tomemos agora um campo de Kupka-Smale Z próximo a Y . Pelo Corolário da Proposição 2.3, Z é um campo de Morse-Smale.

2º caso: X possui singularidades, todas elas hiperbólicas.

Seja Y uma separatriz instável de sela. Dizemos que Y está estabilizada se $\omega(Y)$ é um atrator hiperbólico (singularidade ou órbita fechada). Analogamente para separatrizes instáveis.

- 1) Se X tem todas as separatrizes de sela estabilizadas então X pode ser aproximado por um Morse-Smale.

De fato, existe uma vizinhança $U(X)$ tal que todo $Y \in U$ tem também suas separatrizes todas estabilizadas. Logo pelo Lema 2.5 estes campos só tem recorrências triviais. Aproximamos então X por um campo $Y \in U$ de Kupka-Smale. Pelo Corolário da Proposição 2.3 Y é de Morse-Smale.

- 2) Se X possui alguma separatriz não estabilizada então X pode ser aproximado por Y que possui uma separatriz estabilizada a mais do que X .

Provando esta afirmativa o teorema está demonstrado pois temos um número finito de separatrizes e recaímos assim em (1).

Seja $U(X)$ uma vizinhança de X tal que todo $Y \in U$ tem pelo menos tantas separatrizes estabilizadas

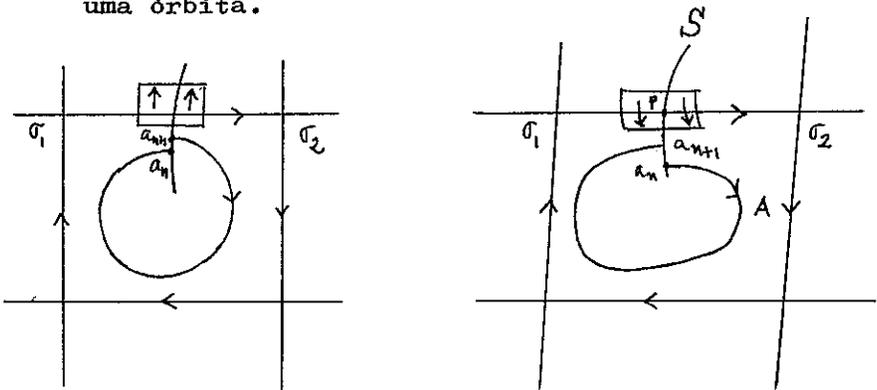
quanto X . Pelo Lema 2.5, podemos aproximar X por $Y \in \mathcal{U}$ que só tenha recorrências triviais, pois temos apenas um número finito de separatrizes de selas que podem ser ligadas.

Temos quatro possibilidades a considerar:

a) Y não possui ligação de selas.

Seja γ uma separatriz de sela não estabilizada de Y (se não existir tal separatriz, Y já satisfaz a condição (2)). Então $\omega(\gamma)$ (ou $\alpha(\gamma)$) é uma órbita fechada não hiperbólica. Aproximando Y por $Z \in \mathcal{U}(X)$ podemos tornar esta órbita hiperbólica e assim estabilizar a separatriz de Z correspondente a γ .

b) Y tem um gráfico que é ω -limite (ou α -limite) de uma órbita.

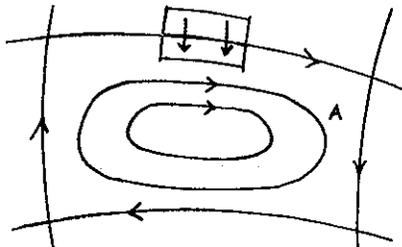


IV.27

Considere uma seção transversal S por um ponto regular

P do gráfico. Como existe uma trajetória γ cujo ω -limite (α -limite) contém p , então γ intersesta S numa seqüência $a_n \rightarrow p$. Tomando n suficientemente grande, o arco de trajetória de γ entre a_n e a_{n-1} , o segmento (a_n, a_{n+1}) de S e o gráfico limitam uma região aberta $A \subset M^2$ homeomorfa a um anel. Seja F uma pequena caixa de fluxo contendo p e ΔY um campo em F , C^r pequeno, transversal a Y em todos os pontos do interior de F e que se anula fora de F , como na figura. Se $Z = Y + \Delta Y$ temos que $Z_t(A) \subset A$ para $t \geq 0$ quando $\omega(\gamma) \ni p$. A separatriz de σ_1 (σ_2) que inicialmente pertence ao ciclo, penetra no anel A após a perturbação. Assim, o ω -limite (α -limite) desta separatriz passa a ser uma órbita fechada do campo Z que se forma no anel. Isto decorre do teorema de Poincaré-Bendixon uma vez que Z não possui singularidades em A . Agora, com uma nova perturbação do campo Z tornamos esta órbita fechada hiperbólica e assim estabilizamos mais uma separatriz.

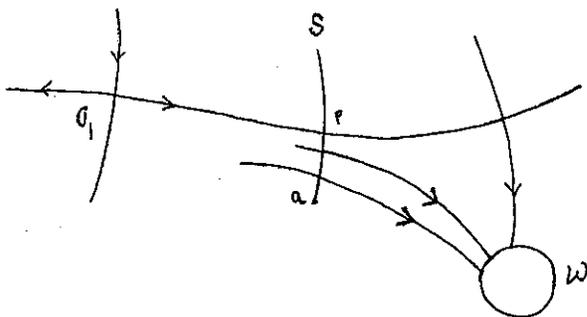
- c) Y tem um gráfico que é acumulado por órbitas fechadas.



Considerando o anel A limitado pelo gráfico e por uma órbita fechada suficientemente próxima, temos uma situação inteiramente análoga à de (b).

d) A última possibilidade a ser analisada é a seguinte.

Seja γ uma ligação de selas e S uma seção transversal por um ponto $p \in \gamma$.



IV.29

Consideremos um pequeno intervalo aberto $(a,p) \subset S$. Todos os pontos de (a,p) têm o mesmo ω -limite que é uma singularidade atratora ou uma órbita fechada. Observamos que se tal não ocorrer para (a,p) suficientemente pequeno, teremos necessariamente a situação descrita em (b) ou (c). De fato, se γ não se enquadra em (b), o ω -limite de todo ponto em (a,p) é uma singularidade ou órbita fechada. Além disto não existe separatriz estável de sela distinta de γ se acumulando em p , pois o α -limite desta separatriz conteria γ e portanto teríamos a situação descrita em (b). Assim o ω -limite de todo ponto de

(a,p) é uma singularidade atratora ou uma órbita fechada. Como p não é acumulado por órbitas fechadas, o que corresponde a (c), segue-se que todos os pontos de (a,p) tem o mesmo ω -limite que denotaremos por σ .

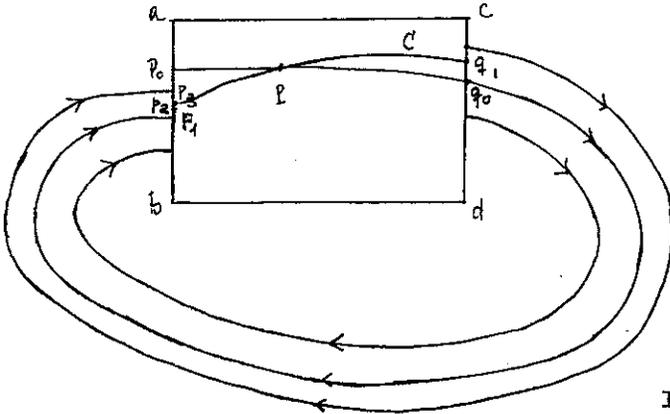
Procedendo como anteriormente, perturbamos o campo de modo que o ω -limite da separatriz instável de σ_1 seja σ . Se σ é uma singularidade atratora temos uma separatriz de sela estabilizada a mais. Se σ é uma órbita fechada tornamos a mesma hiperbólica, se necessário, obtendo também neste caso mais uma separatriz de sela estabilizada. Isto termina a demonstração do teorema.

Antes de demonstrar os Lemas 2.4 e 2.5, faremos algumas considerações sobre órbitas recorrentes não triviais.

Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M^2)$ e γ uma órbita ω -recorrente não trivial. Afirmamos que por qualquer ponto $p \in \gamma$ existe um círculo transversal a X .

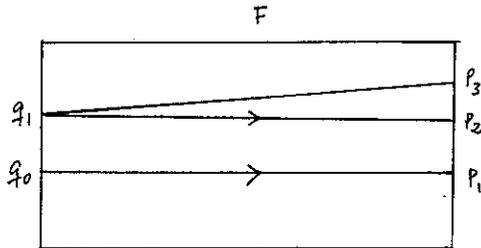
De fato, consideremos uma caixa de fluxo F_1 contendo p . Denotemos por ab e cd os lados de F_1 transversais a X . Como $p \in \omega(\gamma)$, γ intersesta ab infinitas vezes. Seja p_1 a primeira vez que γ volta a intersestar ab . Tomemos uma caixa de fluxo F_2 contendo o arco de trajetória pp_1 . Vamos upor que p_1 está abai

xo de p_0 em ab . Caso contrário a construção é análoga.



IV.30

Se M^2 for orientável temos que em F_2 um arco de trajetória de X partindo de um ponto q_1 de cd acima de q_0 intersesta ab em p_2 acima de p_1 . Em F_2 podemos tomar um arco $q_1 p_3$, p_3 acima de p_2 mas abaixo de p_0 , que é transversal a X e cuja inclinação nos extremos é positiva como na figura abaixo.



IV.31

Agora completamos o círculo desejado unindo em F_1 os pontos p_3 e q_1 por um arco transversal a X e contendo p . Tal arco deve ter em p_3 e q_1 as mesmas in-

clinações que o arco anterior.

Deixamos a cargo do leitor a construção de um círculo transversal como acima no caso em que M^2 não é orientável. Indicamos que neste caso interseções consecutivas de γ com ab devem ser consideradas.

Denotamos por C um círculo transversal a X por $p \in \gamma$. Seja $D \subset C$ o conjunto de pontos cujas trajetórias positivas voltam a intersestar C . Definimos a transformação de Poincaré $P: D \rightarrow C$ que a cada ponto x de D associa a primeira vez a trajetória positiva de x intersesta C . Pelo Teorema do Fluxo Tubular, D é aberto. Logo $D = C$ ou D é uma união de intervalos abertos. Suponhamos que $D \neq C$ e seja (a_1, a_2) um intervalo maximal em D . Mostremos que $\omega(a_1)$ é uma sela, o mesmo ocorrendo com $\omega(a_2)$. Se $\omega(a_1)$ for uma singularidade esta deve ser uma sela, pois um poço atrairia também órbitas vizinhas à de a_1 contrariando o fato de que toda órbita iniciando em (a_1, a_2) volta a intersestar C . Portanto basta mostrar que $\omega(a_1)$ não contém pontos regulares. Suponhamos o contrário, e sejam x um ponto em $\omega(a_1)$ e S uma seção transversal a X por x . Estando x em $\omega(a_1)$, a órbita positiva de a_1 intersesta S infinitas vezes. Por outro lado, se $q \in (a_1, a_2)$ o número de vezes N que o arco de trajetória $qp(q)$ intersesta

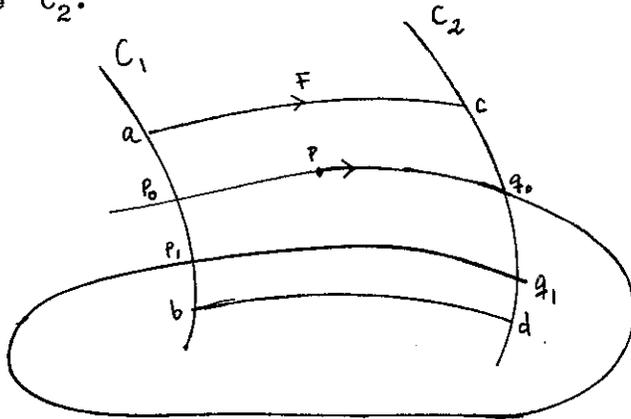
S é finito pois S é transversal a X e $qP(q)$ é compacto. Pelo Teorema do Fluxo Tubular, este número é constante em uma vizinhança de q e como (a_1, a_2) é conexo ele é constante em todo o intervalo (a_1, a_2) . Uma vez mais usando o Teorema do Fluxo Tubular em torno de um arco da órbita positiva de a_1 que corta S em um número de vezes $n > N$, teremos pontos em (a_1, a_2) cuja órbita positiva intersesta S pelo menos n vezes antes de retornar a C . Isto é uma contradição, o que prova que $\omega(a_1)$ é uma sela. Analogamente para $\omega(a_2)$.

Assim D é uma união finita de intervalos abertos em C cujas extremidades são pontos pertencentes a separatrizes estáveis de selas. Se considerarmos a inversa P^{-1} de P , o seu domínio será uma união finita de intervalos cujas extremidades são pontos pertencentes a separatrizes instáveis de selas.

Observemos que se a transformação de Poincaré está definida em todo o círculo C então M^2 é o toro T^2 ou a garrafa de Klein K^2 . De fato, é fácil ver que o saturado $X_t(C)$, $t \in \mathbb{R}$, é aberto e fechado logo coincide com M^2 . Portanto o campo X não tem singularidades o que prova a afirmativa e temos que $M^2 = T^2$ ou $M^2 = K^2$ conforme $P: C \rightarrow C$ preserve ou não a orientação de C . Se $P: C \rightarrow C$ inverte a orientação de C , então

P tem um ponto fixo (veja Exercício). Este ponto fixo corresponde a uma órbita fechada γ de X . Esta órbita fechada não limita um disco em K^2 e portanto $K^2 - \gamma$ é um cilindro. Isto prova que X só possui órbitas recorrentes triviais.

Demonstração do Lema 2.4: Se X tem uma órbita fechada nada há a demonstrar. Caso contrário, X possui uma órbita recorrente γ e $M^2 = T^2$. Seja $p \in \gamma$ e C um círculo transversal por p . Tomemos $C_1 = X_{-\delta}(C)$ e $C_2 = X_{\delta}(C)$, com $\delta > 0$ pequeno. É claro que C_1 e C_2 são transversais a X . Consideremos uma caixa de fluxo F contendo p e cujos lados transversais a X estão em C_1 e C_2 .



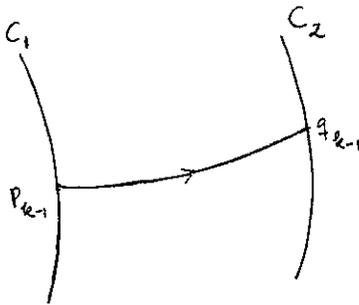
IV.32

Definimos $P: C_2 \rightarrow C_1$ associando a cada ponto x de C_2 o ponto de C_1 onde a trajetória positiva de x intersesta C_2 pela primeira vez. Como já vimos P está bem

definida e preserva orientação. Por isto entendemos que definida uma orientação em C_2 , P e $X_{-2\delta}: C_2 \rightarrow C_1$ induzem a mesma orientação em C_1 . Seja agora $p_i = P(q_i) = P^i(q_0)$ onde $q_0 = X_\delta(p)$. Existe uma seqüência de índices n_i tal que $p_{n_i} \rightarrow p_0$ e podemos supor que cada p_{n_i} está abaixo de p_0 em ab .

Consideremos a família de campos $Z(u) = X + \epsilon uY$ onde $\epsilon > 0$, $0 \leq u \leq 1$ e Y é um campo transversal a X no interior de F , aponta para cima e se anula fora de F . Tomando ϵ pequeno, $Z(u)$ está próximo de X para todo $0 \leq u \leq 1$.

Fixemos um intervalo fechado I em ab contendo p_0 em seu interior. Para cada u e cada ponto $x \in I$ consideremos a distância vertical entre $x \in I$ e o ponto onde a órbita positiva de $Z(1)$ por x intersecta C_2 . Como I é compacto esta distância tem um mínimo $\rho > 0$. Afirmamos que para algum $0 < u \leq 1$ a órbita de $Z(u)$ por q_0 é fechada. De fato, como $Z(u) = X$ fora de F para qualquer u , podemos definir $p_k(u) = P(q_{k-1}(u))$ para $k \geq 1$ onde $q_0(u) = q_0$ e $q_{k-1}(u)$ é o ponto onde a órbita positiva de $p_{k-1}(u) \in C_1$ encontra C_2 pela primeira vez.



IV.33

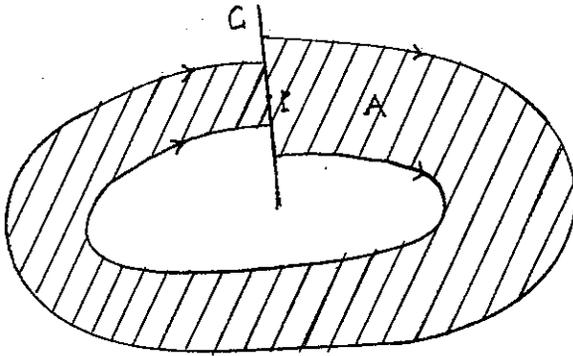
Fixemos um índice i tal que $p_i = P^i(q_0)$ está abaixo de p_0 e sua distância a p_0 é menor que ρ .

Observemos que $p_i(u)$ e $q_i(u)$ são contínuas em u . Para u pequeno, $p_i(u) \in I$, está abaixo de p_0 e é crescente com u . Do mesmo modo $q_i(u)$ está abaixo de q_0 e é crescente com u . Assim ou $p_i(u_0) = p_0$ para algum $u_0 \in (0,1]$ ou $p_i(u) \in I$ para todo $u \in (0,1]$. No primeiro caso $q_i(u_0)$ está acima de q_0 e portanto existe $u_1 < u_0$ tal que $q_i(u_1) = q_0$. No segundo caso, como a distância de $p_i(1)$ a p_0 é menor que ρ então $q_i(1)$ está acima de q_0 . Então existe $u_1 < 1$ tal que $q_i(u_1) = q_0$. Em qualquer dos casos, $Z(u_1)$ possui uma órbita fechada passando por q_0 .

Demonstração do Lema 2.5: Inicialmente vamos mostrar que

se γ é uma órbita ω -recorrente não trivial, existe uma separatriz estável que se acumula em γ . Isto é, existe uma separatriz estável γ_2 tal que

$\alpha(\gamma_2) \supset \gamma$. Consideremos um ponto $p \in \gamma$ e um círculo C transversal a X por p . Seja $P: D \subset C \rightarrow C$ a transformação de Poincaré definida em D . Temos que $D \neq C$ pois caso contrário X não exibiria singularidades. Suponhamos por absurdo que γ não seja acumulada por separatrizes estáveis, isto é, suponhamos que exista um intervalo em C contendo p e disjunto das separatrizes estáveis. Seja $I \subset C$ o intervalo maximal que satisfaz a propriedade acima. Como γ é ω -recorrente e $p \in \gamma$ então $P^k(p) \in I$ para algum inteiro $k > 0$. Então o intervalo $J = P^k(I)$ está contido em I . Isto porque como $P^k(p) \in I$, $I \cap J \neq \emptyset$. Por outro lado, se $J \not\subset I$ então J conteria um intervalo contendo em seu interior uma das extremidades de I . Como I é o intervalo maximal disjunto das separatrizes estáveis, segue-se que J contém pontos de separatrizes estáveis. Como estas separatrizes são invariantes pelo fluxo e portanto por P^k , segue-se que I também contém pontos de separatrizes estáveis de sela pois $J = P^k(I)$. Isto contraria a definição de I e prova que $P^k(I) \subset I$. Daí podemos construir uma região A contendo p , homeomorfa a um anel e invariante por X_t , $t > 0$.



IV.34

Chegamos a um absurdo, pois γ não poderia ser ω -recorrente não trivial em A . Logo γ é acumulada por alguma separatriz estável γ_2 .

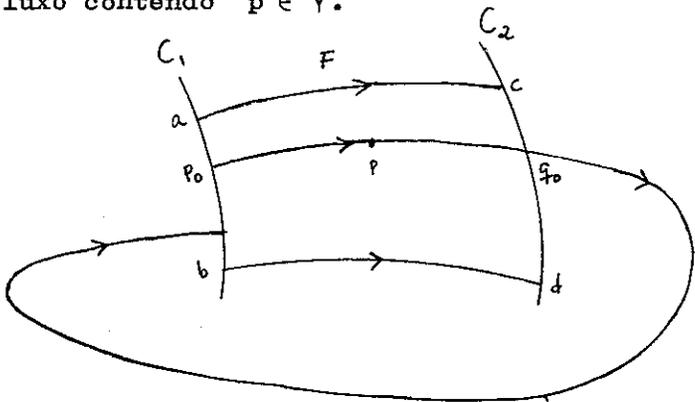
Afirmamos também que γ é acumulada por alguma separatriz instável ou γ é ela própria uma separatriz instável. De fato, suponhamos que tal afirmativa fosse falsa. Consideremos, como no caso anterior, um ponto $p \in \gamma$ e um arco aberto maximal I em C contendo p e disjunto de separatrizes instáveis. Como γ é ω -recorrente, existe um inteiro $k > 0$ tal que $P^k(I) \cap I \neq \emptyset$. Segue-se daí que para algum $q \in I$, $P^{-k}(q)$ está bem definida e $P^{-k}(q) \in I$. Temos duas possibilidades a serem consideradas. Se P^{-k} não está definida em todo o arco I , então existe um ponto $z \in I$ cuja semi-órbita negativa morre diretamente em uma sela. Em particular $z \in I \cap \bar{\gamma}$ para alguma separatriz instável, $\bar{\gamma}$, o que contraria a definição do arco I . A outra possibilidade é que

P^{-k} esteja bem definida em todo o arco I . Neste caso, como anteriormente, teremos que $P^{-k}(I) \subset I$. Deixamos a cargo do leitor concluir a demonstração a partir deste último fato.

Observemos que a propriedade que acabamos de provar é válida para variedades não orientáveis. A única diferença é que a região A considerada na demonstração acima pode ser uma faixa de Möbius onde também não pode haver recorrências não triviais.

Assim, seja γ_1 uma separatriz instável tal que ou $\gamma_1 = \gamma$ ou γ_1 acumula-se em γ . Seja também γ_2 uma separatriz estável que se acumula em γ .

Como no caso da demonstração do Lema 2.4, consideremos círculos $C_1 = X_{-\delta}(C)$ e $C_2 = X_{\delta}(C_1)$ transversais a X . Sejam $P: D \subset C_2 \rightarrow C_1$ a transformação de Poincaré e F a caixa de fluxo contendo $p \in \gamma$.

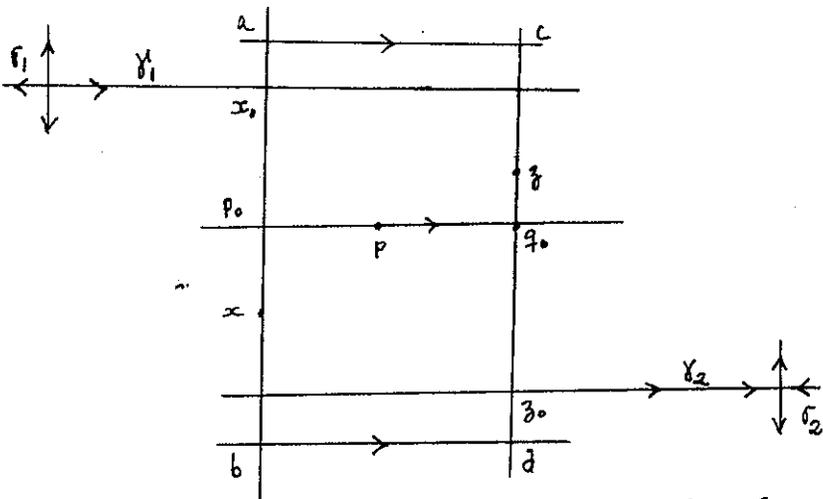


Como o número de selas é finito podemos tomar F disjuncto das possíveis ligações de selas que X possua.

Sejam σ_1 e σ_2 as selas às quais estão associadas as separatrizes γ_1 e γ_2 que se acumulam em γ .

Consideremos a família de campos $Z(u) = X + \epsilon uY$ onde $\epsilon > 0$, $0 \leq u \leq 1$, e Y é transversal a X no interior de F , aponta para cima e se anula fora de F . Tomando ϵ pequeno, $Z(u)$ está próximo a X para todo $u \in [0,1]$ queremos mostrar que para algum $0 < u \leq 1$, $Z(u)$ exhibe uma ligação de sela a mais do que X .

Fixemos um pequeno intervalo fechado I em $[a,b]$ contendo p_0 em seu interior. Como anteriormente, seja $\rho > 0$ o mínimo das distâncias verticais entre $x \in I$ e o ponto onde a órbita positiva de $Z(1)$ por x intersecta C_2 a primeira vez. Sejam x_0 e z_0 a primeira vez que γ_1 intersecta $[a,b]$ e γ_2 intersecta $[c,d]$ respectivamente. Observe que os arcos de separatrizes $\sigma_1 x_0$ e $\sigma_2 z_0$ não serão afetados pelas perturbações ϵuY acima.



IV.36

Tomemos agora um ponto $x \in \gamma_1 \cap I$ próximo a p_0 e $z \in \gamma_2 \cap C_2$ tal que a distância vertical entre x e y seja menor do que ρ . O ponto x corresponde à i -ésima interseção de γ_1 com C_1 para algum inteiro $i > 0$. Analogamente o ponto z corresponde à j -ésima interseção de γ_2 com C_2 para algum $j > 0$. Vamos supor que x esteja abaixo de z em F . Caso isto não seja possível basta tomar o campo Y acima apontando para baixo.

Consideremos as aplicações que a cada u associa a i -ésima interseção $x(u)$ da separatriz $\gamma_1(u)$ de $Z(u)$ com C_1 e $z(u)$ a j -ésima interseção da separatriz $\gamma_2(u)$ de $Z(u)$ com C_2 . É claro que para u pequeno $x(u)$ e $z(u)$ estão bem definidas. Como M^2 é orientável, $x(u)$ é monótona crescente em $[a, b]$ e $z(u)$ é monótona de-

crescente em $[c,d]$.

Temos duas hipóteses a considerar. Suponhamos inicialmente que $x(u)$ e $z(u)$ estejam bem definidas para todo $u \in [0,1]$. Existe então $u_0 \in (0,1)$ tal que a distância vertical de $x(u_0)$ e $z(u_0)$ é zero. Isto porque $x(u)$ e $z(u)$ são contínuas e a distância vertical de $x = x(0)$ e $z = z(0)$ é menor do que ρ . Temos portanto uma ligação entre as selas $\sigma_1(u_0)$ e $\sigma_2(u_0)$.

Suponhamos agora que uma das aplicações, por exemplo $x(u)$, não esteja definida para todo $u \in [0,1]$. Isto quer dizer que $\gamma(u_0)$ para algum $u_0 \in (0,1)$ atinge um dos pontos do bordo do domínio de definição de P . Isto é, atinge um ponto cuja órbita positiva vai diretamente para uma sela σ_3 . Neste caso estaríamos ligando as selas σ_1 e σ_3 . O raciocínio é análogo para o caso em que $z(u)$ não está definida para todo $u \in [0,1]$. Fica assim demonstrado o Lema 2.5 e portanto o Teorema 2.6.

Concluimos a seção observando que como consequência do Teorema 2.6 temos que se $X \in \mathfrak{X}^r(M^2)$ for estruturalmente estável então X é de Morse-Smale.

§3. Generalizações.

Fazemos a seguir alguns comentários sobre o teorema de densidade dos campos de Morse-Smale em variedades bi dimensionais orientáveis e sua extensão parcial para va-

riedades não orientáveis. Mencionamos também resultados sobre estabilidade e densidade de uma classe análoga de difeomorfismos denominada de Morse-Smale. Finalmente, mostramos que em geral os sistemas (campos ou difeomorfismos) de Morse-Smale não são densos em $\mathbb{R}^r(M^m)$ e $\text{Dif}^r(M^m)$. Para tanto exibimos um aberto de sistemas dinâmicos possuindo todos eles uma infinidade de órbitas periódicas.

Inicialmente observamos que na demonstração do Lema 2.5 não podemos garantir que após a perturbação haja uma ligação entre as selas inicialmente consideradas. Isto nos leva a formular o seguinte problema. Sejam γ_1 uma separatriz instável e γ_2 uma separatriz estável de selas de $X \in \mathbb{R}^r(M^2)$. Suponhamos que $\omega(\gamma_1) \cap \gamma_2 \neq \emptyset$ ou $\omega(\gamma_1) \cap \alpha(\gamma_2) \neq \emptyset$. Constitue uma questão difícil saber se é possível ligar estas duas separatrizes com uma perturbação de classe C^r de X . Este problema está em aberto para M^2 orientável ou não e qualquer $r \geq 1$.

A dificuldade em provar a densidade dos campos de Morse-Smale em $\mathbb{R}^r(M^2)$, M^2 não orientável, reside na demonstração do Lema 2.5. Todos os demais fatos são verdadeiros. A questão para o caso não orientável está em aberto e constitue-se em um problema interessante quer a resposta seja positiva quer seja negativa (o que seria uma surpresa!). Neste sentido alguns resultados parciais

já foram obtidos:

1) Os campos de Morse-Smale são densos em $\mathbb{R}^1(M^2)$, M^2 orientável ou não [22]. Pugh obteve este resultado utilizando o "Closing Lemma", como mostraremos mais adiante. A restrição à topologia C^1 decorre do fato de que o "Closing Lemma" só foi demonstrado, até agora, para este caso.

2) É fácil ver que o teorema é válido para $\mathbb{R}^r(P^2)$, qualquer $r \geq 1$, onde P^2 é o plano projetivo. Isto porque os campos de P^2 , analogamente ao que ocorre para a esfera S^2 , não possuem recorrências não triviais. O mesmo fato é válido para a garrafa de Klein K^2 , como demonstrou Markley em [13]. Gutierrez em [6] simplificou a demonstração em K^2 e mostrou que em variedades L^2 não orientáveis de genus um maior que K^2 , isto é um toro com um "cross cup", as recorrências não triviais são "orientáveis". Assim a demonstração que apresentamos para variedades orientáveis aplica-se também a este caso. Temos, portanto, a densidade dos campos de Morse-Smale em $\mathbb{R}^r(M^2)$ para M^2 orientável ou $M^2 = P^2, K^2, L^2$ e qualquer $r \geq 1$.

Vejamos agora a demonstração para $\mathbb{R}^1(M^2)$ utilizando o "Closing Lemma".

"Closing Lemma" [22] - Seja M^n uma variedade de dimensão n , compacta e sem bordo.

Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ e γ uma trajetória recorrente não trivial de X . Dados $p \in \gamma$ e $\epsilon > 0$ existe $Y \in \mathfrak{X}^1(M^2)$, $|Y-X|_{C^1} < \epsilon$, exibindo por p uma trajetória fechada.

A prova do "Closing Lemma" é bastante delicada mesmo no caso de variedades bidimensionais. Quanto à classe de diferenciabilidade, a questão está em aberto para qualquer $r \geq 2$ e $n \geq 2$.

No caso de variedades bidimensionais M^2 , a órbita fechada resultante de uma recorrência não trivial não pode limitar um disco em M^2 . Isto é uma consequência da existência de um círculo que é transversal ao campo e não limita um disco, como construído na Seção 2 deste capítulo.

3.1 TEOREMA - O subconjunto de campos de Morse-Smale é denso em $\mathfrak{X}^1(M^2)$, M^2 orientável ou não.

Demonstração: Mostraremos que qualquer campo $X \in \mathfrak{X}^1(M^2)$ pode ser aproximado por um campo de Kupka-Smale exibindo apenas recorrências triviais. A partir deste fato, o resultado decorre imediatamente do Corolário da Proposição 2.3.

Tomemos um campo X^* de Kupka-Smale próximo a X . Se

X^* exibir apenas recorrências triviais a demonstração está terminada. Caso contrário consideremos uma recorrência não trivial γ_1 de X^* e um ponto $p \in \gamma_1$. Pelo "Crossing Lemma", existe X_1 próximo a X^* exibindo por p uma órbita fechada σ_1 . Aproximamos X_1 por um campo X_1^* de Kupka-Smale que exibe uma órbita fechada hiperbólica σ_1^* próxima a σ_1 . Se X_1^* exibir apenas recorrências triviais, então X_1^* é um campo de Morse-Smale. Caso contrário repetimos o procedimento acima a partir de X_1^* , porém sem modificar o campo em uma vizinhança de σ_1^* . Afirmamos que o número de etapas deste processo é finito, sendo limitado por 2^g onde g é o gênero (número de asas) da variedade M . De fato, cada vez que efetuamos uma etapa do processo é como se passássemos a partir daí a considerar um campo de Kupka-Smale em uma variedade N^2 de gênero menor; ou equivalentemente de característica de Euler-Poincaré $K(N^2)$ maior, pois $K(N^2) = 2 - 2g(N^2)$ ou $K(N^2) = 2 - g(N^2)$ conforme N^2 seja orientável ou não [25]. Como $K(N^2) \leq 2$ qualquer que seja N^2 , obteremos após um número finito de etapas um campo de Kupka-Smale exibindo apenas recorrências triviais; este campo será então de Morse-Smale como desejamos.

Para ver isto efetuamos um corte de M ao longo da órbita fechada hiperbólica σ_1^* resultante de recorrência não

trivial. Há duas hipóteses a considerar: ou obtemos uma variedade M_{10} com bordo ou duas variedades M_{11} e M_{12} com bordo [25]. No primeiro caso o bordo de M_{10} é constituído de uma ou duas cópias de σ_1^* conforme σ_1^* seja orientável ou não. No segundo caso os bordos de M_{11} e M_{12} consistem cada um de uma cópia de σ_1^* . No primeiro caso acrescentamos a seguir um ou dois discos D_1 e D_2 de modo que $M_{10} \cup D_1$ ou $M_{10} \cup D_1 \cup D_2$ seja uma variedade sem bordo. Temos então $K(M_{10} \cup D_1) = K(M) + K(D)$ ou $K(M_{10} \cup D_1 \cup D_2) = K(M) + K(D_1) + K(D_2)$. Como $K(D_i) = 1$ para $i = 1, 2$, $K(M_{10} \cup D_1)$ ou $K(M_{10} \cup D_1 \cup D_2)$ é maior do que $K(M)$. Na segunda hipótese, $K(M) = K(M_{11}) + K(M_{12})$ e $K(M_{11}) < 1$, $K(M_{12}) < 1$ pois do contrário σ_1^* limitaria um disco. Assim

$$K(M_{11} \cup D_1) = K(M_{11}) + 1 > K(M) \quad \circ$$

$$K(M_{12} \cup D_2) = K(M_{12}) + 1 > K(M).$$

Embora não seja relevante para o nosso objetivo, podemos completar o campo X_1^* definido em M_{10} , M_{11} e M_{12} colocando em D_1, D_2 um poço ou uma fonte conforme σ_1^* seja repulsora ou atratora.

Prosseguimos o processo com as variedades $M_{i,j}$ ($j=0,1,2$) resultantes da colagem de discos, porém sem mais alterar o campo em vizinhanças destes discos. Como a característica de Euler-Poincaré é limitada por 2 e cresce com cada um dos cortes efetuados, segue-se que o número de cortes é finito e limitado por 2^6 como afirmamos. Isto prova o teorema.

Vejamos agora alguns dos fatos e resultados correspondentes a difeomorfismos.

Além de sua importância intrínseca, o estudo dos difeomorfismos tem sido da maior relevância para a compreensão dos espaços de fase dos campos de vetores. Tal fato já havia sido ressaltado por Poincaré e Birkhoff em seus trabalhos pioneiros sobre a teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos. Um exemplo é a descrição do espaço de órbitas de um campo de vetores em vizinhança de uma órbita fechada. Como vimos no Capítulo III, isto é feito através da transformação (difeomorfismo local) de Poincaré associada a uma seção transversal. Ao final do Capítulo III generalizamos esta idéia com o processo de suspensão de um difeomorfismo. Assim qualquer difeomorfismo f de uma variedade de dimensão n representa a transformação de Poincaré de um campo X_f de uma variedade de dimensão $n+1$. O campo X_f é denominado de suspensão de f

e suas órbitas estão em correspondência natural com as órbitas de f . Em particular, X_f é um campo de Kupka-Smale se e somente se f é um difeomorfismo de Kupka-Smale. Também, X_f é estruturalmente estável se e somente se f é estruturalmente estável.

Seja $f \in \text{Dif}^r(M)$. Um ponto $p \in M$ é não-errante para f se para qualquer vizinhança U de p e qualquer inteiro $n_0 > 0$ existir um inteiro n tal que $|n| > n_0$ e $f^n U \cap U \neq \emptyset$. O conjunto de pontos não errantes $\Omega(f)$ é fechado e invariante, isto é formado de órbitas de f . Os conjuntos limites $\omega(q)$ e $\alpha(q)$ para qualquer $q \in M$ estão contidos em $\Omega(f)$. Em particular todo ponto fixo ou periódico de f pertence a $\Omega(f)$.

Dizemos que $f \in \text{Dif}^r(M)$ é de Morse-Smale se

- a) $\Omega(f)$ consiste de um número finito de pontos fixos e periódicos todos hiperbólicos;
- b) as variedades estáveis e instáveis dos pontos fixos e periódicos são duas a duas transversais.

Relacionamos os seguintes fatos relevantes sobre difeomorfismos de Morse-Smale:

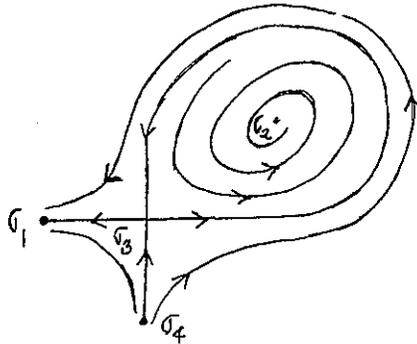
- 1) O conjunto de difeomorfismos de Morse-Smale é aberto (não vazio) em $\text{Dif}^r(M)$ para qualquer variedade M e qualquer $r \geq 1$ [16].

2) Se $f \in \text{Dif}^r(M)$ é de Morse-Smale então f é estruturalmente estável [17].

3) O conjunto de difeomorfismos de Morse-Smale é denso em $\text{Dif}^r(S^1)$, $r \geq 1$. Este fato, devido a Peixoto, pode ser demonstrado diretamente a partir do Teorema de Kupka-Smale para difeomorfismos e um argumento análogo ao da prova do Lema 2.4 deste capítulo. Uma prova bastante elegante é a seguinte. Seja $f \in \text{Dif}^r(S^1)$. Tomemos a suspensão X_f de f , que é um campo de classe C^r definido em T^2 ou K^2 conforme f preserve ou não uma orientação de S^1 . Podemos considerar S^1 como uma seção transversal global de X_f em T^2 ou K^2 sendo f a transformação de Poincaré associada. Se Y for um campo em T^2 ou K^2 C^r próximo de X_f então S^1 é também uma seção transversal para Y e a transformação de Poincaré associada g está C^r próxima de f . Pela densidade dos campos de Morse-Smale em $\mathcal{X}^r(T^2)$ ou $\mathcal{X}^r(K^2)$, é possível escolher Y de Morse-Smale C^r próximo de X_f . Isto implica que g é um difeomorfismo de Morse-Smale C^r próximo de f .

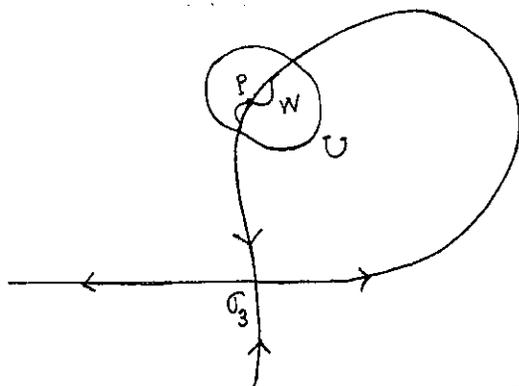
4) O conjunto de difeomorfismos de Morse-Smale não é denso em $\text{Dif}^r(M^n)$, $n \geq 2$. Exibimos a seguir um aberto não vazio $\mathcal{U} \subset \text{Dif}^r(S^2)$ tal que $\mathcal{U} \cap M-S = \emptyset$. Um exemplo análogo pode ser construído em qualquer variedade

de dimensão $n \geq 2$. Considere em S^2 um campo X de classe com uma auto-ligação de sela como na figura.



IV.37

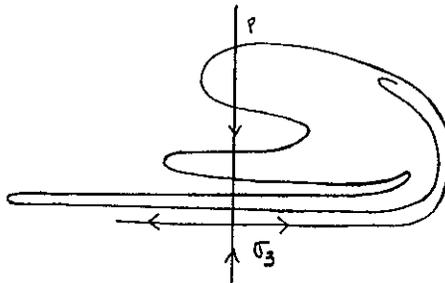
σ_1 e σ_2 são poços, σ_4 é uma fonte e σ_3 é uma sela, todos hiperbólicos. Seja X_t o fluxo induzido por X e $f = X_1$ o difeomorfismo induzido no tempo $t = 1$. Temos que σ_3 é um ponto fixo hiperbólico para f e uma das componentes de $W^s(\sigma_3) - \sigma_3$ coincide com uma das componentes de $W^u(\sigma_3) - \sigma_3$. Pertubamos f de modo a obter um difeomorfismo g que tenha σ_3 como ponto fixo hiperbólico e exiba órbitas de interseção transversal de $W^s(\sigma_3, g)$ com $W^u(\sigma_3, g)$ distintas de σ_3 . Para tanto tomamos $p \in W^s(\sigma_3) \cap W^u(\sigma_3)$, $p \neq \sigma_3$, e uma pequena vizinhança U de p com $U \cap fU = \emptyset$. Seja $i: S^2 \rightarrow S^2$ um difeomorfismo de classe C^x de forma que i tenha suporte em U (i é identidade em $K = M - U$), $i(p) = p$ e $W = i(W^u(\sigma_3))$ seja transversal a $W^s(\sigma_3)$ em p . Definimos $g = i \circ f$.



IV.38

Afirmamos que g e qualquer difeomorfismo bastante próximo de g não são Morse-Smale. Como $g = f$ fora de U , σ_3 é um ponto fixo hiperbólico de g e as variedades estável e instável locais de σ_3 para f e g coincidem. Mas agora $W \subset W^u(\sigma_3, g)$. De fato se $x \in W$ então $i^{-1}(x) \in W^u(\sigma_3)$ e portanto $(i \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} i^{-1}(x) \in W^u(\sigma_3) \cap K$. Como i é a identidade em K , $(i \circ f)^{-n}(x) = f^{-n} i^{-1}(x) \in W^u(\sigma_3) \cap K$ para $n \geq 1$. Logo $x \in W^u(\sigma_3, g)$ pois $g^{-n}(x) = (i \circ f)^{-n}(x)$ converge a σ_3 quando $n \rightarrow \infty$ e portanto $W \subset W^u(\sigma_3, g)$. Por outro lado $W^s(\sigma_3) \cap U \subset W^s(\sigma_3, g)$. De fato se $y \in W^s(\sigma_3) \cap U$ então $f(y) \in W^s(\sigma_3) \cap K$ e portanto $g^n(y) = (i \circ f)^n(y) = f^n(y) \in W^s(\sigma_3) \cap K$ para $n \geq 1$. Logo $y \in W^s(\sigma_3, g)$ pois $g^n(y)$ converge a σ_3 com $n \rightarrow \infty$ e isto mostra que $W^s(\sigma_3) \cap U \subset W^s(\sigma_3, g)$. Assim $W^s(\sigma_3, g)$ é transversal a $W^u(\sigma_3, g)$ em p . Embora não seja necessário, podemos el

borar um pouco mais o raciocínio acima de modo a colocar $W^s(\sigma_3, g)$ e $W^u(\sigma_3, g)$ transversais em todos os seus pontos (órbitas) de interseção. Isto corresponde a uma das afirmativas do Teorema de Kupka-Smale para difeomorfismos. Um ponto p como acima, de interseção transversal de $W^s(\sigma_3, g)$ e $W^u(\sigma_3, g)$, é chamado um ponto homoclínico transversal. O leitor é desafiado a desenhar uma figura, cujo esboço está abaixo, das interseções das variedades estável e instável ao longo de uma órbita homoclínica transversal.



IV.39

Birkhoff mostrou que p é acumulado por órbitas periódicas hiperbólicas de g ; Smale generalizou este resultado para dimensões maiores. Aqui necessitamos apenas do fato de que p é não-errante. Para ver isto, consideramos o arco ℓ de $W^u(\sigma_3, g)$ que vai de σ_3 a p . Para qualquer vizinhança U de p , escolhemos um pequeno arco ℓ_1 de $W^u(\sigma_3, g)$ em U passando por p . Sendo ℓ_1 transversal a $W^s(\sigma_3, g)$, pelo λ -lema $g^n(\ell_1)$ contém ar-

cos arbitrariamente próximos de l para todo n maior que algum $n_0 > 0$. Como $l_1 \subset U$ e $l \cap U \neq \emptyset$ temos que $g^n U \cap U \neq \emptyset$ para $n > n_0$. Logo $p \in \Omega(g)$ e como p não é periódico g não é Morse-Smale. O mesmo ocorre para todos os difeomorfismos bastante próximos de g , pois estes difeomorfismos exibem também pontos homoclínicos transversais. Isto segue-se do fato de que em partes compactas as variedades estável e instável de uma sela variam pouco na topologia C^r quando perturbamos pouco o dif eomorfismo. Garantimos assim que estas variedades exibem órbita de interseção transversal distinta da sela pertubada.

A partir da não-densidade dos difeomorfismos de Morse-Smale em M^2 , concluímos via suspensão que os campos de Morse-Smale não são densos em $\mathfrak{X}^r(M^n)$ para $n \geq 3$.

Vamos finalizar esta seção com um outro exemplo, devido a Thom, de um difeomorfismo que exibe uma infinidade de órbitas periódicas.

Este foi um dos exemplos que motivou a definição dada por Anosov de uma classe de sistemas dinâmicos estruturalmente estáveis exibindo uma infinidade de órbitas periódicas [1]. Em particular, existem sistemas estáveis que não são de Morse-Smale.

Consideremos um isomorfismo linear L de \mathbb{R}^2 que na base canônica de \mathbb{R}^2 é representado por uma matriz hiperbólica de coeficientes inteiros e determinante igual a 1. É fácil ver que os autovalores de L , λ e $\frac{1}{\lambda}$ com $|\lambda| < 1$, são irracionais e que os auto-espacos E^s e E^u têm inclinação irracional. Como $\det L = 1$ segue-se que L^{-1} goza das mesmas propriedades. Se $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ denota o conjunto dos pontos de coordenadas inteiras então $L(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$. Consideremos em $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ uma estrutura de variedade de modo que a projeção natural $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ seja um difeomorfismo local. Tal estrutura de variedade pode ser obtida identificando $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^2$ com um toro de revolução como no Exemplo 2, §1 do Capítulo I. Salientamos que $\pi(u, v) = \pi(u', v')$ se e somente se $u' - u \in \mathbb{Z}$ e $v' - v \in \mathbb{Z}$. Neste caso $\pi(L(u, v)) = \pi(L(u', v'))$, o que permite definir uma aplicação $f: T^2 \rightarrow T^2$ por $f(\pi(u, v)) = \pi L(u, v)$. Sendo π um difeomorfismo local de classe C^∞ segue-se que f é de classe C^∞ . Usando o mesmo raciocínio para L^{-1} concluímos que na verdade f é um difeomorfismo de classe C^∞ .

Para cada $p \in T^2$ e $x \in \mathbb{R}^2$ com $\pi(x) = p$, a curva $W^s(p) = \pi(x + E^s)$ é densa em T^2 . Temos assim definida uma folheação $\{W^s(p); p \in T^2\}$ de T^2 , denominada de folheação estável, em que cada folha é densa em T^2 .

Além disto esta folheação é invariante por f , isto é, $f W^s(p) = W^s(f(p))$. Analogamente definimos a folheação instável $\{W^u(p); p \in T^2\}$, sendo $W^u(p) = \pi(x+E^u)$. Denotando por E_p^s e E_p^u os espaços tangentes de $W^s(p)$ e $W^u(p)$ em p , temos $E_p^s = d \pi_x(E^s)$, $E_p^u = d \pi_x(E^u)$ e $E_{f(p)}^s = df_p(E_p^s)$, $E_{f(p)}^u = df_p(E_p^u)$.

Em T^2 consideremos a métrica induzida de \mathbb{R}^2 via π ; isto é, se $w_1, w_2 \in T(T^2)_{p=\pi(x)}$ definimos $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d \pi_x^{-1} w_1, d \pi_x^{-1} w_2 \rangle$. Utilizando esta métrica temos

$$\|df_p v\| = |\lambda| \|v\| \quad \text{se } v \in E_p^s$$
$$\|df_p w\| = |\lambda| \|w\| \quad \text{se } w \in E_p^u.$$

Daí decorre que se $q \in W^s(p)$ então $d(f^n(q), f^n(p)) \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$ e se $q \in W^u(p)$ então $d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$. Consequentemente, todo ponto periódico p de f é hiperbólico e as variedades estável e instável de p são $W^s(p)$ e $W^u(p)$ como definidas acima. Além disto para quaisquer $p, q \in T^2$ temos que $W^s(p)$ é transversal a $W^u(q)$ e $W^s(p) \cap W^u(q)$ é denso em T^2 . Em particular $p = \pi(0)$ é um ponto fixo hiperbólico de f e seus pontos homoclínicos transversais são densos em T^2 . Como no exemplo anterior, isto implica que f e qualquer difeomorfismo próximo de f não são Morse-Smale. Da densidade dos pontos homoclínicos transversais temos também

pelo resultado de Birkhoff, que os pontos periódicos de f são densos em T^2 . Vamos indicar a seguir uma demonstração direta deste último fato.

O ponto $p = \pi(x)$ é periódico se e somente se existe $n > 0$ tal que $L^n x - x \in Z^2$. Sejam $\mathcal{L}^n = \{x \in \mathbb{R}^n ; L^n x - x \in Z^2\}$ e $\mathcal{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n$. Temos então que p é periódico se e somente se $\pi^{-1}(p) \in \mathcal{L}$. É suficiente portanto mostrar que \mathcal{L} é denso em \mathbb{R}^2 . Como \mathcal{L} é um subgrupo aditivo de \mathbb{R}^2 , $\bar{\mathcal{L}}$ é discreto ou contém uma família discreta de retas paralelas ou $\bar{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^2$. Mostremos que $\bar{\mathcal{L}}$ não é discreto. Sejam e_s e e_u autovetores de L associados aos autovalores λ, λ^{-1} . É imediato que $(L^n - I)^{-1}$ é um isomorfismo com autovalores $(\lambda^n - 1)^{-1}, (\lambda^{-n} - 1)^{-1}$ e autovetores e_s, e_u . Como $(\lambda^n - 1)^{-1} \rightarrow -1$ e $(\lambda^{-n} - 1)^{-1} \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$, $\|(L^n - I)^{-1}\|$ é uniformemente limitado para $n \in \mathbb{Z}_+$. Seja $u = (1, 0) \in Z^2$ e tomemos a seqüência $v_n = (L^n - I)^{-1}u$. É claro que $v_n \in \mathcal{L}_n, v_{n_1} \neq v_{n_2}$ se $n_1 \neq n_2$ e $\{v_n\}$ é limitada. Isto mostra que \mathcal{L} e $\bar{\mathcal{L}}$ não são discretos. Suponhamos agora que $\bar{\mathcal{L}}$ consista de uma família discreta de retas paralelas. Como \mathcal{L} é invariante por L , a reta desta família passando pela origem deve ser invariante por L e portanto deve ser um autoespaço E de L com $E \cap \mathcal{L}$ denso em E . Isto é um absurdo, pois $\pi(E)$ é a variedade estável ou instável do

ponto fixo $\pi(0)$ de f e estas variedades não podem con
ter pontos de $\pi(\mathcal{L})$ distintos de $\pi(0)$, uma vez que
 $\pi(\mathcal{L})$ consiste de pontos periódicos de f . Temos então
que \mathcal{L} é denso em \mathbb{R}^2 , o que implica na densidade em
 T^2 dos pontos periódicos de f .

REFERÊNCIAS

- [1] D.V. Anosov, Geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature, Proc. Steklov Math. Inst. vol. 90 (1967).
- [2] T.M. Cherry, Analytic quasi-periodic curves of discontinuous type on a torus, Proc. London Math. Soc. v. 44 (1938), 175-215.
- [3] A. Denjoy, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. J. de Math. Pure et Appliquées v. 11 (ser. 9) (1932), 33-375.
- [4] D. Grobman, Homeomorphisms of systems of differential equations. Dokl. Akad. Nauk. vol. 128 (1965), 880-881.
- [5] C.T. Gutierrez, Structural Stability for flows on the torus with a cross-cap. A ser publicado.
- [6] P. Hartman, A Lemma in the structural stability of differential equations, Proc. AMS 11, 1961.

- [7] M.W. Hirsch - C.C. Pugh, Stable manifolds and hyperbolic sets, Global Analysis. Proc.Symp. in Pure Math. vol. XIV, AMS, 1970.
- [8] M.W. Hirsch - S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press (1974).
- [9] I. Kupka, Contribution à la théorie des champs génériques, Contributions to Differential Equations 2 (1963), 457-484.
- [10] S. Lang, Analysis I, Addison-Wesley, Reading 1968.
- [11] E. Lima, Análise no Espaço \mathbb{R}^n , Ed. Univ. Brasília, 1970.
- [12] -----, Variedades Diferenciáveis, Monografias de Matemática 15, IMPA (1973).
- [13] N.G. Markley, The Poincaré-Bendixon Theorem for the Klein Bottle, Trans. Amer. Math. Soc. 135 (1969) 159-165.
- [14] J. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint. The University Press of Virginia-Charlottesville (1965).

- [15] J. Palis, On the local structure of hyperbolic points in Banach spaces. Anais da Academia Brasileira de Ciências (1969).
- [16] -----, On Morse-Smale Dynamical Systems, Topology 8 (1969), 385-404.
- [17] J. Palis - S. Smale, Structural Stability Theorems, Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV, AMS (1970).
- [18] M.M. Peixoto, Structural Stability on two-dimensional manifolds, Topology vol. 1 (1962) 101-120.
- [19] M.C. Peixoto - M.M. Peixoto, Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions. An. Acad. Bras. Ci. 31 (1959) 135-160.
- [20] M.M. Peixoto, On an approximation theorem of Kupka and Smale, J. of Diff. Eq. (1966) 214-227.
- [21] C.C. Pugh, The Closing Lemma, Am. J. Math. vol. 85 (1967), 956-1009.
- [22] -----, On a theorem of P. Hartman, Am. J. Math., vol. 91 (1969).

- [23] S. Smale, On gradient dynamical systems, *Annals of Math.*, vol. 74 (1961) 199-206.
- [24] -----, Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms, *Ann. Scuola Sup. Pisa* (3), 17 (1963), 97-116.
- [25] C.E. Zeeman, Uma Introdução Informal à Topologia das Superfícies, *Monografias de Matemática* 20, IMPA (1975).
- [26] J. PALIS, Sistemas Dinâmicos, *Monografias de Matemática* nº 4, IMPA (1971).

