

**João Lucas M. Barbosa**  
**GEOMETRIA DIFERENCIAL**  
**E CÁLCULO DAS VARIAÇÕES**



## PREFÁCIO

As presentes notas foram escritas com o objetivo de servirem como uma introdução ao estudo de problemas geométricos que são também problemas variacionais de uma forma natural.

Os quatro primeiros capítulos constituem uma introdução ao Cálculo das Variações. É tratado com detalhe o problema variacional mais simples, sendo destacados apenas aqueles aspectos que posteriormente serão utilizados no estudo dos problemas geométricos. Assim, por exemplo, nenhuma menção é feita a questões relacionadas com mínimos fortes, o problema de minimizar um funcional é sempre o problema local, no estudo da segunda variação do funcional mais simples, são consideradas apenas as condições necessárias de Legendre e Jacobi para existência de um mínimo, bastante ênfase é dado ao estudo de pontos conjugados. No final do capítulo quatro são estabelecidas condições suficientes, para existência de um mínimo fraco do problema variacional mais simples.

No capítulo 5, como uma aplicação das técnicas desenvolvidas nos primeiros capítulos, é apresentado o teste de Jacobi para determinação de pontos conjugados e demonstrada uma forma fraca de um teorema devido a Lindelöf sobre bordos conjugados no Catenóide.

No sexto capítulo indicamos como os resultados obtidos nos primeiros quatro capítulos podem ser generalizados ainda para o problema variacional em uma variável.

O capítulo sétimo é essencialmente uma introdução à Geometria Riemanniana. Partimos do problema de determinar a curva de menor comprimento ligando dois pontos numa superfície do  $\mathbb{R}^3$ . Obtemos a partir daí a equação clássica das geodésicas, a definição dos  $\Gamma_{jk}^i$  a função exponencial, o conceito de curvatura e terminamos por estabelecer condições necessárias e suficientes para que uma geodésica seja minimal.

O capítulo oitavo trata essencialmente do problema variacional do tipo

$$\text{minimizar } \iint_D F(z_x, z_y) dx dy$$

$$z \Big|_{\partial D} = f \Big|_{\partial D}$$

que inclui em particular o problema de Dirichlet e o Problema de Plateau na forma não paramétrica. Vários resultados clássicos são demonstrados, incluindo a regularidade das soluções dos problemas mencionados. No caso do Problema de Plateau prova-se que as superfícies  $z = f(x,y)$ ,  $(x,y) \in D$ , são mínimas se e só se são soluções do problema variacional acima, quando

$$F = (1 + z_x^2 + z_y^2)^{1/2}.$$

Infelizmente o tempo não me permitiu incluir um capítulo nono, no qual seriam tratadas as questões de existência de soluções dos problemas de Plateau e Dirichlet, usando métodos diretos do Cálculo das Variações.

Estas notas não teriam sido escritas sem o incentivo do Professor Manoel Perdigão do Carmo a quem deixo meus maiores agradecimentos. Uma palavra de agradecimento também deve ser dada aos colegas do Departamento de Matemática da U.F.C. que ouviram pacientemente e exposição do material contido nestas notas e sugeriram algumas modificações. Agradeço também a Luquésio Petrola que ajudou com a revisão e aos prestimoso serviços dos datilógrafos Clélia Lustosa da Costa e Vanderlei Leite Pinheiro do Departamento de Matemática da U.F.C. que transfor-

.iv.

maram um manuscrito quase ilegível nestas notas em tempo record, e Adalberto do Outeiro do IMPA que datilografou a versão final.

João Lucas Barbosa

ÍNDICE

	pg.
1. Introdução .....	1
2. Máximos e Mínimos de Funcionais .....	13
3. O Problema Variacional mais simples .....	23
4. Pontos Conjugados .....	33
5. O Teste de Jacobi .....	53
6. O Problema Variacional mais simples no $\mathbb{R}^n$ .	59
7. Geodésicas .....	67
8. O Problema Variacional Envolvendo Integrais Múltiplas .....	91
Bibliografia .....	115





## 1. INTRODUÇÃO

O Cálculo das Variações nasceu das tentativas desenvolvidas ao longo dos anos por Matemáticos interessados em generalizar a teoria de Máximos e Mínimos do Cálculo Diferencial para funções cujo domínio fosse constituído por certos conjuntos de curvas ou funções. O nome "Cálculo das Variações" não se derivou do tipo de problema tratado nesta teoria, mas sim de uma técnica específica, a técnica da variação, a qual será apresentada ao longo destas notas, que é, empregada na obtenção de certas condições necessárias para existência de valores extremos (máximos e mínimos) das funções a que nos referimos. Para que o leitor tenha alguma indicação dos problemas que podem ser tratados por esta técnica, nós apresentamos no que se segue três exemplos de natureza geométrica que serão discutidos com bastantes detalhes ao longo destas notas.

### (1.1) A menor distância entre dois pontos.

Sem a menor dúvida, o problema mais simples do Cálculo das Variações é aquele de determinar a curva de

menor comprimento ligando dois pontos do plano, digamos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ . Suponhamos  $x_0 \neq x_1$ , e vamos nos restringir as curvas cuja equação é da forma  $y = y(x)$ , onde  $y$  é uma função continuamente diferenciável, definida no intervalo  $[a, b]$ . Neste caso, do Cálculo Diferencial, sabemos que o comprimento desta curva será dado por

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} (1 + y')^{1/2} dx$$

Seja  $C^1(x_0, x_1)$  o espaço das funções reais continuamente diferenciáveis, definidas no intervalo  $[x_0, x_1]$ . Então  $I$  é uma função de  $C^1(x_0, x_1)$  na reta e o problema que propomos é o de determinar uma função  $\bar{y}(x)$  tal que  $\bar{y}(x_0) = y_0$ ,  $\bar{y}(x_1) = y_1$  e  $I(y) \geq I(\bar{y})$  para todo  $y \in C^1(x_0, x_1)$  e satisfazendo as condições de contorno  $y(x_0) = y_0$  e  $y(x_1) = y_1$ .

O presente problema nos sugere uma questão mais geral, a de determinar a curva de menor comprimento ligando dois pontos em uma superfície do  $\mathbb{R}^3$ . Isto é, se  $M$  é uma superfície do  $\mathbb{R}^3$ , e  $P$  e  $Q$  são pontos de  $M$ , determinar, entre todas as curvas contidas em  $M$  e ligando  $P$  a  $Q$ , aquela que tem menor comprimento. As curvas que tem esta propriedade de minimizar distância são chamadas geodésicas e é possível mostrar que esta definição coinci

de com a definição clássica apresentada nos livros de Geometria Diferencial.

(1.2) A Superfície Mínima de Revolução.

Um segundo problema que pode facilmente ser trazido em termos analíticos é o de determinar a superfície de área mínima que tem como bordo dois círculos paralelos. Se nós mergulharmos numa solução de água e sabão um círculo de arame, quando o retirarmos, formou-se uma película na forma de um disco cujo bordo é o círculo. Se nós tocarmos neste disco com um outro círculo de arame de raio menor e o afastamos, os dois discos estarão ligados por uma superfície a qual, pelas propriedades elásticas da película, terá a menor área possível. Tal superfície, quando os dois círculos estão em planos paralelos e têm seus centros sobre um eixo perpendicular a ambos os planos, é uma superfície de revolução. O problema que se propõe é o de determinar a curva geratriz desta superfície de revolução. Em termos analíticos, se o eixo dos  $x$ , e  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  são pontos onde os círculos interceptam o plano  $xy$ , o que se propõe é determinar a função  $y = y(x)$ ,  $x_0 \leq x \leq x_1$ , que minimize a integral

$$I(y) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(1 + y'^2)^{1/2} dx$$

Este é um caso particular de um problema mais geral conhecido como Problema de Plateau, o qual, posto em termos bastante simples, se propõe a determinar, entre todas as superfícies tendo um determinado bordo, aquela que tem a menor área.

Como no caso do exemplo (1.1),  $I: C^1(x_0, x_1) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função bem definida e o problema proposto é o de determinar  $\bar{y} \in C^1(x_0, x_1)$  tal que  $\bar{y}(x_0) = y_0$ ,  $\bar{y}(x_1) = y_1$  e  $I(y) \geq I(\bar{y})$  para todo  $y \in C^1(x_0, x_1)$  e satisfazendo as condições de contorno  $y(x_0) = y_0$ ,  $y(x_1) = y_1$ .

### (1.3) O Problema Isoperimétrico.

A formulação original deste problema é a seguinte: determinar a curva fechada plana de um dado comprimento que limita a maior área possível. A solução é o círculo, mas a demonstração deste fato não é fácil de ser feita. Analiticamente nós podemos formular o problema do seguinte modo:

Seja

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

a representação paramétrica de uma curva plana a qual nós suporemos ser fechada e sem auto-intersecções. O comprimento desta curva será então dado por

$$I(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} (x'^2 + y'^2)^{1/2} dt$$

enquanto que o valor da área limitada pela mesma será

$$J(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}(xy' - x'y)dt$$

O problema é então o de determinar a curva  $\alpha$  nas condições acima que minimiza o valor da integral  $J$  entre todas as que tem o comprimento  $I(\alpha)$  igual a uma certa constante  $l$ .

De maneira geral, os problemas do Cálculo das Variações em que se propõe maximizar uma determinada integral enquanto uma ou várias outras são mantidas fixas, são chamados problemas isoperimétricos.

#### (1.4) O Problema típico do Cálculo das Variações.

Em cada um dos problemas apresentados anteriormente é considerada uma certa classe de curvas ou funções, que devem satisfazer a certas restrições de diferenciabilidade e a certas condições de contorno. Além disso, em

cada caso, foi dada uma certa integral que explicitamente estabelecia uma regra de como associar a cada elemento desta classe de curvas ou funções um certo número real. De um modo geral nós fixamos a seguinte notação:

DEFINIÇÃO - Por um funcional nós iremos indicar uma função cujo domínio é por sua vez um espaço de funções.

O problema típico do Cálculo das Variações é então o de determinar os pontos de máximo, mínimo ou em geral, os pontos estacionários de um dado funcional.

O leitor pode facilmente observar que, nos exemplos apresentados anteriormente, lidamos com funcionais que podem ser incluídos como casos particulares de funcionais da forma

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

onde  $F$  é uma função contínua de classe de diferenciabilidade adequada ao problema, e  $y$  varia num certo conjunto de funções do intervalo  $[x_0, x_1]$  na reta, admissíveis dentro das restrições do problema. E o que se propunha era exatamente minimizar tal funcional.

No estudo de funções de um número finito de va-

riáveis independentes é suficiente considerar estas funções definidas num aberto ou num domínio do  $\mathbb{R}^n$ . No caso de funcionais, não existe tal espaço "universal". Na verdade a natureza do problema que estamos considerando, determina a escolha do espaço de funções apropriado. Por exemplo, se nós estivermos considerando o funcional apresentado acima, é natural tomarmos como domínio de definição o conjunto de todas as funções que possuem primeira derivada contínua, enquanto que no caso de um funcional da forma

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'') dx$$

é mais natural considerarmos como domínio de definição o conjunto das funções que possuem as duas primeiras derivadas contínuas. No que se segue, nós iremos sempre considerar nossos funcionais definidos em certos subconjuntos de algum espaço vetorial normado.

(1.5) Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial munido de uma norma. E uma norma é uma função que associa, a cada elemento  $x$  do espaço vetorial, um número real não negativo  $\|x\|$ , chamado a norma de  $x$ , e a qual satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\|x\| = 0$  se e só se  $x = 0$  ;

2.  $\|ax\| = |a| \|x\|$  qualquer que seja o número real  $a$

3.  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

O exemplo mais simples de um espaço vetorial normado é o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , no qual é definida a norma de um vetor  $x = (x_1, \dots, x_n)$  pela expressão

$$\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

Os seguintes são exemplos que serão considerados frequentemente no nosso estudo.

(1.6) Seja  $C(a,b)$  o espaço vetorial constituído por todas as funções contínuas com valores reais definidas no intervalo  $[a,b]$ . A função definida em  $C(a,b)$  pela expressão

$$\|f\|_0 = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

é uma norma. A verificação desta fato é imediata.

(1.7) Seja  $C^1(a,b)$  o subspaço de  $C(a,b)$  constituído pelas funções com a primeira derivada contínua. Existem duas alternativas interessantes de transformar  $C^1(a,b)$  num espaço vetorial normado. Primeiramente, como  $C^1(a,b) \subset C(a,b)$  então ele é naturalmente um subspaço ve



torial normado com a norma  $\| \cdot \|_0$ .

Por outro lado, nós podemos definir em  $C^1(a,b)$  a norma.

$$\|f\|_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

A prova de que  $\| \cdot \|_1$  é uma norma segue-se imediatamente da observação de que

$$\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$$

(1.8) Seja  $C^1(a,b)$  o subspaço vetorial de  $C(a,b)$  constituído pelas funções que são  $C^1$  por partes, isto é, aquelas funções contínuas para as quais é possível dividir o intervalo  $[a,b]$  em um número finito de sub-intervalos e em cada um deles a função é continuamente diferenciável.

Aqui temos as mesmas duas alternativas do exemplo anterior e os detalhes são deixados a cargo do leitor.

Em um espaço vetorial normado nós podemos introduzir uma noção de distância entre dois pontos  $x$  e  $y$  definindo tal distância pela quantidade  $\|x - y\|$ . Com isto, faz sentido em espaços vetoriais normados falar de todos os conceitos da Topologia dos Espaços Métricos, tais

como, bolas abertas e fechadas, vizinhanças, funções contínuas, etc.

Com isto, nós podemos formular de maneira satisfatória as definições de pontos de máximo ou mínimo local de um funcional.

(1.9) DEFINIÇÃO - Seja  $\mathfrak{F}$  um espaço vetorial normado e

$$I: S \subset \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

um funcional. Nós diremos que  $\bar{y} \in S$  é um ponto de mínimo (máximo) local para  $I$ , se existe  $\epsilon > 0$ , tal que

$$I(\bar{y}) \geq I(y) \quad , \quad I(y) \leq I(\bar{y})$$

para todo  $y \in S$  satisfazendo a  $\|y - \bar{y}\| < \epsilon$ .

Por exemplo, considere o problema (1.1) de determinar o arco de menor comprimento ligando dois pontos  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  do plano. Vamos supor que  $\mathfrak{F} = C^1(x_0, x_1)$  com a norma  $\| \cdot \|_1$  definida acima, e que  $S$  é o subconjunto constituído pelas funções de  $\mathfrak{F}$  que satisfazem as condições de contorno

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad y(x_1) = y_1 .$$

O funcional  $I: S \subset \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} (1 + y'^2)^{1/2} dx$$

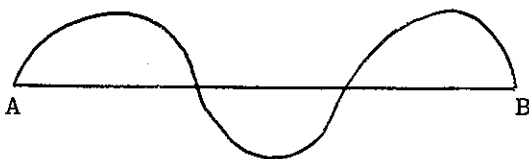
Determinar um mínimo local para  $I$  seria então determinar  $\bar{y} \in S$  para o qual existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$I(y) \geq I(\bar{y})$$

para todo  $y \in S$  satisfazendo a  $\|y - \bar{y}\|_1 < \epsilon$ .

(1.10) A existência de um extremo de funções definidas em domínios do espaço euclidiano a  $n$ -dimensões é geralmente garantida pelo seguinte teorema de Topologia: "num compacto uma função contínua possui um máximo e um mínimo".

No Cálculo das Variações, é muito comum que um problema possa deixar de ter soluções por não ser possível ou conveniente restringir o funcional a um domínio de funções, que seja compacto. Por exemplo, considere a questão de determinar a menor curva ligando  $A$  e  $B$  satisfazendo a condição de ser perpendicular ao segmento  $AB$  nos pontos  $A$  e  $B$ . O problema não tem solução pois qualquer curva satisfazendo as condições do problema deverá ter comprimento maior do que o comprimento do segmento  $AB$  podendo ser tão próximo deste valor quanto se queira.



Mas AB não pertence a classe das curvas admissíveis.

Na verdade esta é a principal dificuldade do Cálculo das Variações e uma prova de existência da solução do problema ou classe de problemas deve ser especificamente dada em cada caso. Nós voltaremos a este ponto mais adiante nestas notas. No que se segue, iremos tentar estabelecer condições necessárias que devem ser satisfeitas em pontos máximo ou mínimo de um funcional, sem nos preocuparmos com a questão de se este máximo ou mínimo realmente existe.

## 2. MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNCIONAIS

Seja  $I: U \subset \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional definido num aberto  $U$  de um espaço vetorial normado  $\mathfrak{F}$ . Seja  $\bar{y} \in U$  um ponto de mínimo local de  $I$ . Então, por definição existe um  $\epsilon > 0$  tal que

$$I(y) \geq I(\bar{y})$$

para todo  $y \in U$  satisfazendo a  $\|y - \bar{y}\| < \epsilon$ .

Se  $h = y - \bar{y}$ , nós podemos reescrever a afirmação acima do seguinte modo

$$(2.1) \quad I(\bar{y} + h) - I(\bar{y}) \geq 0 \quad \text{sempre que} \quad \|h\| < \epsilon.$$

Considere a função  $I(t) = I(\bar{y} + th)$ ,  $|t| < 1$ . Esta função passa por um valor mínimo quando  $t = 0$ . Se  $I(t)$  é duas vezes continuamente diferenciável para todo  $h$ , então

$$(2.2) \quad I'(0) = 0 \quad \text{e} \quad I''(0) \geq 0$$

são condições necessárias para que  $\bar{y}$  seja um ponto de mínimo de  $I$ .

(2.3) DEFINIÇÃO - Nós chamaremos, respectivamente de primeira e segunda variação do funcional  $I$  no ponto  $y$ , às funções

$$\delta I_y(h) = \left. \frac{d}{dt} I(y + th) \right|_{t=0} \quad \text{e} \quad \delta^2 I_y(h) = \left. \frac{d^2}{dt^2} I(y + th) \right|_{t=0}$$

sempre que as mesmas sejam definidas para todo  $h \in \mathfrak{X}$ .

É possível desenvolver uma teoria de máximos e mínimos para funcionais a partir apenas das definições dadas acima. Nós iremos no entanto simplificar nossos argumentos supondo que o funcional  $I$  seja duas vezes diferenciável. Neste caso,  $\delta I_y$  é exatamente a diferencial de  $I$  e  $\delta^2 I_y$  é a forma quadrática associada a sua segunda derivada. Para  $h$  suficientemente pequeno temos que:

$$(2.4) \quad I(y+h) - I(y) = \delta I_y(h) + \frac{1}{2} \delta^2 I_y(h) + r(h) \|h\|^2$$

onde  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$ . E o que foi dito no início pode ser colocado na seguinte forma.

(2.5) TEOREMA - Seja  $I: U \subset \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional duas vezes diferenciável. São condições necessárias para que o funcional  $I$  tenha um mínimo em  $y \in U$  que

$$\delta I_y(h) = 0 \quad \text{e} \quad \delta^2 I_y(h) \geq 0$$

para todo  $h \in \mathfrak{X}$ .

As condições  $\delta I_y(h) = 0$  e  $\delta^2 I_y(h) \geq 0$  são necessárias, mas é claro, de modo nenhum suficientes para que o funcional  $I$  tenha um mínimo no ponto  $y \in U$ . No caso em que  $\mathfrak{X}$  é um  $\mathbb{R}^n$ , sabemos que as condições  $\delta I_y \equiv 0$  e  $\delta^2 I_y$  positiva definida, são suficientes para garantirem que o ponto  $y$  é um mínimo. No nosso caso, isto não é sempre verdade, e para obter uma condição suficiente, nós introduzimos o seguinte conceito:

(2.6) DEFINIÇÃO - Um funcional quadrático  $\psi$  definido em um espaço vetorial  $\mathfrak{X}$  é fortemente positivo se existe uma constante  $k > 0$  tal que

$$\psi(h) \geq k \|h\|^2$$

para todo  $h \in \mathfrak{X}$ .

(2.7) TEOREMA - Seja  $I: U \subset \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional duas vezes diferenciável. São condições suficientes para que o funcional  $I$  tenha um mínimo em  $Y$  que  $\delta I_y \equiv 0$  e  $\delta^2 I_y$  seja fortemente positivo.

Prova: Como  $\delta I_y \equiv 0$ , por (2.4) temos que

$$I(y+h) - I(y) = \delta^2 I(h) + r(h) \|h\|^2$$

onde  $r(h) \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ . Além disso,  $\delta^2 I(h) \geq k \|h\|^2$  onde  $k$  é uma constante maior que zero.

Portanto

$$I(y+h) - I(y) \geq (k + r(h)) \|h\|^2 .$$

Tome  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$|r(h)| < \frac{k}{2} \quad \text{se} \quad \|h\| < \epsilon .$$

Então segue-se que, para  $\|h\| < \epsilon$ ,

$$I(y+h) - I(y) > \frac{1}{2} k \|h\|^2$$

e portanto  $y$  é um ponto de mínimo de  $I$ .

(2.8) Na maioria dos casos interessantes, embora o funcional  $I$  seja definido num aberto  $U$  de um espaço vetorial normado  $\tilde{X}$ , a questão proposta é a de determinar um mínimo (máximo) local para  $I$  restrito a um certo subconjunto  $S \subset \tilde{X}$ .

Por exemplo, considere a questão de determinar a menor distância entre dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  do plano. O funcional em questão



$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} (1 + y'^2)^{1/2} dx$$

está bem definido em todo o espaço  $\mathcal{F} = C^1(x_0, x_1)$  no entanto se deseja o mínimo de  $I$  restrito ao subconjunto  $S$ , constituído pela funções de  $\mathcal{F}$  que satisfazem às condições de contorno

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad y(x_1) = y_1 \quad ,$$

o qual certamente não é um aberto de  $\mathcal{F}$ . Neste caso, se  $y \in S$ , podemos escrever um ponto genérico de  $S$  na forma  $\bar{y} + h$  onde  $h \in \mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \{h \in \mathcal{F} ; h(x_0) = h(x_1) = 0\}.$$

Observe que  $\mathcal{H}$  é um subspaço vetorial de  $\mathcal{F}$ . Defina um novo funcional  $J: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$J(h) = I(\bar{y} + h) - I(\bar{y}).$$

Então  $J(0) = I(\bar{y})$  e é claro que estudar se  $\bar{y}$  é um ponto de mínimo (ou máximo) para  $I$  restrito a  $S$  é equivalente a estudar se o funcional  $J$  tem um ponto de mínimo (ou máximo) no ponto zero.

Admitidas hipóteses de diferenciabilidade convenientes, temos que

$$\delta J_0 = \delta I_{\bar{y}} \Big|_{\mathbb{H}} \quad \text{e} \quad \delta^2 J_0 = \delta^2 I_{\bar{y}} \Big|_{\mathbb{H}}$$

Portanto,  $\bar{y}$  será um ponto de mínimo para  $I$  se

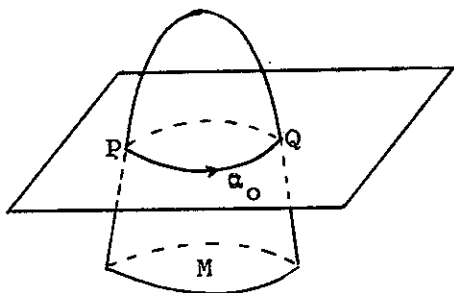
$$\delta I_{\bar{y}}(h) = 0 \quad \text{e} \quad \delta^2 I_{\bar{y}}(h) \geq 0$$

para todo  $h \in \mathbb{H}$ .

É claro que as observações feitas acima valem em geral para problemas variacionais em que o conjunto  $S$ , chamado conjunto das variações admissíveis, é um subspaço linear de  $\mathcal{F}$ , isto é,  $S$  pode ser escrito na forma  $S = y + \mathbb{H}$  onde  $\mathbb{H}$  é um subspaço vetorial de  $\mathcal{F}$ .

Nem sempre o espaço  $S$  das variações admissíveis a um dado problema é um subspaço linear de um espaço vetorial normado. Por exemplo, considere o problema de determinar a curva de menor comprimento ligando dois pontos em uma dada superfície, isto é, a questão de determinar a geodésica minimal ligando dois pontos.

Seja  $M$  uma superfície do  $\mathbb{R}^3$  e  $P, Q$  dois pontos de  $M$  e vamos supor que exista um plano contendo  $P$  e  $Q$  cuja intersecção com  $M$  é uma curva fechada (vide figura). Os pontos  $P$  e  $Q$  dividem esta curva em dois arcos  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  que, consideraremos como curvas parame-



trizadas definidas no mesmo domínio digamos

$$\alpha_0, \alpha_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Se  $h = \alpha_1 - \alpha_0$ , então é claro que  $\alpha_0 + th$  será uma curva da superfície  $M$  somente se  $t=0$  ou  $t=1$ . Portanto o espaço  $S$  das variações admissíveis ao problema não é um subespaço linear do espaço vetorial  $\mathfrak{F}$  constituído pelas curvas parametrizadas  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Mas nós podemos ainda utilizar as idéias desenvolvidas anteriormente, substituindo  $\alpha_0 + th$  por uma família a um parâmetro  $\alpha_t$  de arcos satisfazendo as condições do problema e tal que:

- a)  $\alpha_0$  é a curva a ser testada.
- b) A função  $t \rightarrow \alpha_t$  é continuamente diferenciável em  $t$  até a segunda ordem.

Nós chamaremos a esta família  $\alpha_t$  de uma variação da curva  $\alpha_0$ .



Suponha que  $\alpha_0$  é um ponto de mínimo para o funcional  $I$ . Então, se  $\alpha_t$  é uma variação admissível de  $\alpha_0$ , teremos que

$$I(\alpha_t) \geq I(\alpha_0)$$

para  $|t| < \epsilon$ ,  $\epsilon$  suficientemente pequeno.

Se a função  $t \rightarrow I(\alpha_t)$  é duas vezes diferenciável no ponto  $t = 0$ , então

$$\left. \frac{d}{dt} I(\alpha_t) \right|_{t=0} = 0$$

e

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} I(\alpha_t) \right|_{t=0} \geq 0$$

Nós generalizamos as definições dadas anteriormente chamando as derivadas acima respectivamente de primeira e segunda variação do funcional  $I$  no ponto  $\alpha_0$ .

Nos capítulos que se seguem nós iremos desenvolver com mais detalhes estas idéias para problemas específicos.



### 3. O PROBLEMA VARIACIONAL MAIS SIMPLES

Considere o funcional

$$(3.1) \quad I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

onde  $F$  é uma função de classe  $C^2$  que por simplicidade nós suporemos definida em todo o  $\mathbb{R}^3$ . O que se propõe é determinar um mínimo local  $y_0$  de  $I$  entre as funções de classe  $C^1$  em  $[a, b]$  satisfazendo as condições de contorno

$$(3.2) \quad y(a) = A \quad , \quad y(b) = B$$

As hipóteses a respeito de  $F$  garantem que  $I$  possui primeira e segunda variação em qualquer ponto  $y$  de  $C^1(a, b)$ . Nós iremos calcular fórmulas explícitas para  $\delta I$  e  $\delta^2 I$  no que se segue.

Seja  $y \in C^1(a, b)$  satisfazendo as condições de contorno (3.2) e seja  $h \in C^1(a, b)$ . Para que  $y + th$  seja uma variação admissível de  $y$ , nós deveremos ter:

$$(3.3) \quad h(a) = h(b) = 0$$

Então,

$$I(y + th) = \int_a^b F(x, y + th, y' + th') dx$$

Permutando os sinais de derivação e integração e aplicando a regra da cadeia, obtemos:

$$(3.4) \quad I'(0) = \int_a^b \{F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'\} dx$$

onde  $F_y$  e  $F_{y'}$  indicam as derivadas parciais de  $F$  com relação as segunda e terceira variável de  $F$  respectivamente. Portanto, a primeira variação de  $I$  é dada por

$$(3.5) \quad \delta I_y(h) = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h') dx$$

De maneira análoga obtemos

$$(3.6) \quad \delta^2 I_y(h) = \int_a^b (F_{yy} h^2 + 2F_{yy'} h h' + F_{y'y'} h'^2) dx$$

Se  $y$  é um ponto de mínimo local do funcional  $I$ , teremos  $\delta I_y(h) = 0$  e  $\delta^2 I_y(h) \geq 0$  para todo  $h \in C^1(a, b)$  satisfazendo a  $h(a) = h(b) = 0$ . O que faremos no que se segue é tentar obter informações a respeito de  $y$  a partir destas duas relações. O seguinte Lema será útil na nossa



análise.

(3.7) LEMA - Se  $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua tal que

$$\int_a^b g(x) h(x) dx = 0$$

para toda função  $h \in C^1(a,b)$  satisfazendo a  $h(a) = h(b) = 0$  então  $g(x) \equiv 0$ .

Prova: Se  $g$  fosse diferente de zero, digamos positiva, num ponto de  $[a,b]$  então, por continuidade, seria positiva num certo intervalo  $[x_1, x_2]$  contido em  $[a,b]$ . Mas então, se

$$h(x) = \begin{cases} (x - x_1)^2 (x_2 - x)^2, & x \in [x_1, x_2] \\ 0 & , x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

teremos que

$$\int_a^b g(x) h(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} g(x) h(x) > 0$$

o que contradiz a hipótese, logo  $g$  deve ser identicamente zero.

Considere agora a equação  $\delta I_y(h) = 0$ . Observe que uma integração por partes nos permite escrever

$$(3.8) \quad \delta I_y(h) = \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) h \, dx$$

Usando o lema acima podemos concluir que uma condição necessária para que  $y \in C^1(a,b)$ , seja um mínimo do problema variacional proposto é que  $y$  satisfaça a equação diferencial

$$(3.9) \quad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

As soluções da equação de Euler são chamadas extremos do problema variacional, conceito que corresponde ao de ponto crítico no estudo de funções de um número finito de variáveis. A equação de Euler é uma equação diferencial de segunda ordem e sua solução dependerá em geral de duas constantes arbitrárias a serem determinadas a partir das condições de contorno  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ .

Deve-se observar que, no estudo de equações diferenciais ordinárias considera-se usualmente a questão da determinação de uma solução que satisfaz a certas condições em um ponto, chamadas condições iniciais. No entanto, quando se pretende resolver a equação de Euler no nosso contexto, o que se tem em vista é a determinação de soluções que são, de partida, definidas num dado intervalo, e que satisfazem certas condições nas extremidades deste intervalo, chamadas condições de contorno. Portanto a

questão de resolver o problema variacional proposto não se reduz aos teoremas usuais de existência de equações diferenciais. Em geral, não é verdade que seja sempre possível resolver o problema de contorno a que reduzimos o problema variacional proposto. Exemplos de situações como esta serão exibidas em capítulos subsequentes.

Vamos propor agora o mesmo problema variacional do início, mas supondo  $I$  definido em  $C^1(a,b)$  ao invés de  $C^1(a,b)$ . Neste caso, não é claro que a fórmula (3.8) seja válida, desde que aparentemente  $F_{y'}(x,y(x),y'(x))$  é descontínua em um número finito de pontos. Nós procedemos integrando por partes o termo em  $h$  para obter

$$(3.10) \quad \delta I(h) = \int_a^b (F_{y'} - \int_a^x F_{yy} dx) h' dx .$$

O seguinte lema será então essencial para nosso argumento.

(3.11) LEMA - Se  $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua por partes limitada, tal que

$$\int_a^b g(x) h'(x) dx = 0$$

para toda  $h \in C^1(a,b)$  tal que  $h(a) = h(b) = 0$ , então  $g$  é constante.

Prova: Seja

$$h(x) = \int_a^x (g(t) - c) dt$$

onde  $c$  é escolhido de formas que  $h(b) = 0$ . Então nós obtemos que

$$\int_a^b (g(x) - c) h' dx = \int_a^b (g(x) - c)^2 dx$$

Por outro lado, desde que  $\int_a^b ch' dx = 0$  para todo  $h$  de  $C^1(a,b)$  satisfazendo  $h(a) = h(b) = 0$ , segue-se, pela hipótese do Lema, que a primeira integral da igualdade acima é zero. Logo  $g(x) \equiv c$ .

Deste Lema segue-se que, se  $y$  é um ponto extremo de  $I$ , então  $y$  deve satisfazer a equação integral

$$F_{y'} - \int_a^x F_y dx = 0.$$

Esta equação tem como consequência que, se  $y$  é um extremo, então

$$F_{y'}(x, y(x), y'(x))$$

é contínua e diferenciável por partes. Em cada intervalo onde  $y$  é diferenciável,  $y$  é solução da equação de Euler

$$(3.12) \quad \frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0$$

que já encontramos anteriormente. O fato de que  $F_y$  é contínuo, quando  $y$  é um extremo é importante, e é usualmente representado na forma

$$(3.13) \quad F_{y'}(x, y(x), y'(x_+)) = F_{y'}(x, y(x), y'(x_-))$$

onde  $y'(x_+)$  e  $y'(x_-)$  representam os valores dos limites à direita e à esquerda destas funções. Esta relação é conhecida como condição de Weierstrass-Erdmann. Ocorre em muitos casos que esta condição implica na não existência de quinas na solução do problema variacional.

Isto é verdade, por exemplo, para o caso do problema de menor distância entre dois pontos, e em geral para todos os problemas do tipo que estamos tratando, em que o integrando é da forma

$$(3.14) \quad F(x, y, y') = \psi(x, y)(1 + y'^2)^{1/2}$$

onde  $\psi \neq 0$ . Isto pode ser demonstrado do seguinte modo:

$$F_{y'}(x, y, y') = \frac{\psi(x, y)y'}{(1 + y'^2)^{1/2}}$$

e, como  $\psi \neq 0$ , o fato de que  $x \rightarrow F_{y'}(x, y(x), y'(x))$  é contínua acarreta que a função  $x \rightarrow y'(x)(1 + y'(x)^2)^{-1/2}$

também é contínua. A biunivocidade da função

$$y' \rightarrow y'(1 + y'^2)^{-1/2}$$

garante agora que nos pontos de possível descontinuidade de  $y'(x)$ , os limites à direita e à esquerda,  $y'(x_+)$  e  $y'(x_-)$ , devem coincidir. Portanto a solução  $y(x)$  do problema variacional em  $C^1(a,b)$  será de classe  $C^1$  no intervalo  $[a,b]$ . A título de aplicação da teoria da primeira variação, vamos considerar o problema da determinação da superfície de revolução de área mínima proposto no início destas notas. Como vimos em (1.2), o operador a ser considerado é

$$(3.15) \quad I(y) = \int_a^b f(y, y') \, dx$$

onde  $f(y, y') = y(1 + y'^2)^{1/2}$ . As curvas a serem estudadas, neste caso, devem ser  $C^1$  por partes e estarem contidas no semi-plano superior  $y > 0$ . O problema é o de determinar entre todas as funções admissíveis ligando os pontos  $(a, A)$ ,  $(b, B)$  aquela que minimiza o funcional (3.15).

Desde que  $f(y, y')$  é do tipo (3.14), a condição de Weierstrass-Erdmann, como vimos acima, implica em que uma solução deste problema variacional (se existir) será continuamente diferenciável. Portanto, será necessa-

riamente uma solução da equação de Euler (3.9) que neste caso, pode ser escrita como

$$(3.16) \quad f_y - f_{y',y} y' - f_{y',y'} y'' = 0$$

Multiplicando esta equação por  $y'$  ela se reduz a

$$\frac{d}{dx} (f - y' f_{y'}) = 0$$

Portanto, neste caso, a equação de Euler tem a primeira integral

$$(3.17) \quad f - y' f_{y'} = c$$

onde  $c$  é uma constante. Substituindo agora os valores de  $f$  e  $f_{y'}$ , e simplificando, obtemos

$$y = \alpha \sqrt{1 + y'^2}$$

ou, resolvendo para  $y'$ ,

$$y' = \sqrt{\frac{y^2 - c^2}{c^2}} .$$

Esta equação tem como solução geral

$$(3.18) \quad Y = \alpha \cosh \left( \frac{x + \beta}{\alpha} \right)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são duas constantes arbitrárias a serem determinadas a partir das condições de contorno  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ .





#### 4. PONTOS CONJUGADOS

Neste capítulo nós iremos estudar com detalhe a fórmula da segunda variação e derivar condições necessárias e suficientes para que uma solução da equação de Euler do problema variacional mais simples seja um mínimo.

Antes de iniciarmos este estudo, vamos considerar a questão proposta no início, de determinar a curva que realiza a menor distância entre dois pontos no plano Euclidiano. O funcional a ser considerado neste caso é

$$(4.1) \quad I(y) = \int_a^b f(y') dx$$

onde  $f(y') = (1 + y'^2)^{1/2}$ . As curvas a serem estudadas são contínuas e constituídas por arcos de classe  $C^1$ . O problema é o de determinar entre todas as funções admissíveis ligando os pontos  $(a,A)$  e  $(b,B)$ , aquela que minimiza o funcional (4.1). Neste caso a equação de Euler (3.12) se reduz simplesmente a

$$f_{y'}(y') = \text{constante}$$

e por conseguinte

$$f(y') = c_1 y' + c_2$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são duas constantes. Resolvendo esta equação algébrica em  $y'$  obtemos

$$y' = \text{constante}$$

e então

$$(4.2) \quad y(x) = cx + d$$

onde  $c$  e  $d$  devem ser determinadas a partir das condições de contorno. A segunda variação é, neste caso

$$(4.3) \quad \delta^2 I(h) = \int_a^b f_{y'y'} h'^2 dx$$

onde  $f_{y'y'} = (1 + y'^2)^{-3/2}$ . Observe que  $\delta^2 I$  é uma forma quadrática definida positiva. Apesar disto não podemos concluir imediatamente que  $y$  é mínimo. (Porque?). Para obter este resultado procedemos como se segue. Fazendo uso do Teorema de Taylor com resto (de Lagrange) para  $f$ , obtemos

$$I(y+h) - I(y) = \int_a^b \{f(y'+h') - f(y')\} dx =$$

$$= \int_a^b f_{y'}(y')h' dx + \frac{1}{2} \int_a^b f_{y'y'}(y' + \theta h')h'^2 dx$$

onde  $0 \leq \theta \leq 1$ . Se  $y$  é a solução da equação de Euler ligando os pontos  $(a,A)$ ,  $(b,B)$  e  $h(a) = h(b) = 0$ , então o primeiro termo do segundo membro da igualdade é zero e portanto

$$(4.4) \quad I(y+h) - I(y) = \frac{1}{2} \int_a^b f_{y'y'}(y' + \theta h')h'^2 dx$$

Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$f_{y'y'}(y' + \theta h') > f_{y'y'}(y') - \epsilon = c > 0$$

se  $\|h\|_1 < \delta$ , e portanto,

$$(4.5) \quad I(y+h) - I(y) \geq \frac{c}{2} \int_a^b h'^2 dx$$

Segue-se que, se  $\|h\|_1 < \delta$ , então

$$I(y+h) - I(h) > 0$$

para toda função  $C^1$  por partes  $h \neq 0$  satisfazendo a  $h(a) = h(b) = 0$ . Vamos agora considerar a situação mais geral em que

$$(4.6) \quad I(y) = \int_a^b F(x,y,Y') dx$$

onde  $F$  é uma função de classe  $C^3$  que por simplicidade nós suporemos definida em todo  $\mathbb{R}^3$ . Como anteriormente, nós estaremos interessados em determinar um mínimo para o funcional  $I$  restrito aquelas funções de  $C^1(a,b)$  que satisfazem as condições de contorno

$$y(a) = A \quad , \quad y(b) = B.$$

No que se segue  $y$  será sempre uma solução da equação de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

e  $h$  será um elemento genérico de  $C^1(a,b)$  satisfazendo a  $h(a) = h(b) = 0$ . A fórmula da segunda variação já deduzida anteriormente é, neste caso:

$$(4.7) \quad \delta^2 I(h) = \int_a^b (F_{yy} h^2 + 2F_{yy'} h h' + F_{y'y'} h'^2) dx$$

Nós vamos iniciar o nosso estudo, transformando esta expressão em outra mais conveniente. Observe que,

$$\int_a^b 2F_{y'y'} h h' dx = \int_a^b \left(-\frac{d}{dx} F_{yy'}\right) h^2 dx$$

e portanto (4.7) pode ser reescrita como:

$$(4.8) \quad \delta^2 I(h) = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx$$

onde

$$P = P(x) = F_{y'y'} \quad \text{e} \quad Q = Q(x) = F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}$$

(4.9) LEMA - Uma condição necessária para que o funcional quadrático

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx,$$

definido para todas as funções  $h \in C^1(a,b)$  tais que  $h(a) = h(b) = 0$ , seja não negativo, é que

$$P(x) \geq 0 \quad \text{em} \quad [a,b].$$

Prova: Suponha que  $P(x)$  não satisfaz a desigualdade de

$P(x) \geq 0$ . Então existe um ponto  $x_0 \in ]a,b[$  tal que  $P(x_0) = -2\beta$  ( $\beta > 0$ ). Desde que  $P$  é contínua, existe um intervalo  $[x_1 - \alpha, x_1 + \alpha]$  contido em  $]a,b[$  onde  $P(x) < -\beta$ .

Defina

$$h(x) = \begin{cases} \text{sen}^2 \left[ \frac{\pi(x-x_1)}{\alpha} \right] & , \text{ se } [x - x_1] \leq \alpha \\ 0 & , \text{ se } [x - x_1] > \alpha \end{cases}$$

para este  $h$  temos que:

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx = \int_{x_1-\alpha}^{x_1+\alpha} P \frac{\pi^2}{\alpha^2} \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{2\pi(x-x_1)}{\alpha} \right] dx + \\ + \int_{x_1-\alpha}^{x_1+\alpha} Q \operatorname{sen}^4 \left[ \frac{\pi(x-x_1)}{\alpha} \right] dx$$

Portanto  $\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx \leq -\frac{2\beta\pi^2}{\alpha} + 2M\alpha$  onde

$M = \max |Q(x)|$  em  $[a, b]$ . Então é claro que para  $\alpha$  suficientemente pequeno o valor do funcional quadrático é negativo.

Deste lema segue-se imediatamente que a desigualdade

$$(4.10) \quad F_{y'y'} \geq 0$$

satisfeita ao longo de  $y(x)$  é uma condição necessária para que  $y$  seja um mínimo do problema variacional que estamos estudando. Esta condição é conhecida como condição de Legendre. Legendre tentou (sem sucesso) provar que uma condição suficiente para que  $I$  tivesse um mínimo local em  $y$  era que

$$(4.11) \quad F_{y'y'} > 0$$

fosse satisfeita ao longo de  $y$ . Sua idéia foi a seguinte. Primeiramente escrevamos a segunda variação na forma

$$(4.12) \quad \delta^2 I(h) = \int_a^b (Ph'^2 + 2whh' + (Q + w')h^2)dx$$

onde  $w$  é uma função definida em todo o intervalo  $[a, b]$ , suficientemente diferenciável. A igualdade (4.12) é verdadeira pois:

$$\int_a^b (w'h^2 + 2whh')dx = \int_a^b \frac{d}{dx} (wh^2)dx = 0$$

Em seguida nós observamos que, supondo-se  $P > 0$ , seria evidente que  $\delta^2 I(h) \geq 0$  se fosse possível escolher  $w$  de tal modo que o integrando de (4.12) fosse um quadrado perfeito. Isto ocorreria se  $w$  satisfizesse a equação diferencial

$$(4.13) \quad P(Q + w') - w^2 = 0$$

No entanto, embora seja sempre possível resolver esta equação diferencial localmente, não há nenhuma garantia de que possamos resolvê-la globalmente no intervalo  $[a, b]$ . Por exemplo, se  $P = -1$ ,  $Q = 1$ , teremos a equação

$$w' + w^2 + 1 = 0$$

cuja solução é  $w(x) = \operatorname{tg}(a - x)$ . Se  $b - a > \pi$  não há so-

lução  $\omega$  definida em todo  $[a, b]$ . Na verdade, a condição  $F_{y'y'} > 0$  em cada ponto da curva  $y(x)$  não pode ser uma condição suficiente para que  $y$  sejam um mínimo do funcional  $I$ , pelo simples fato de que esta condição é pontual.

No entanto, a idéia de completar quadrados no integrando da fórmula da 2ª variação é interessante e vale a pena examina-la mais detidamente.

Suponhamos  $P > 0$  no que se segue. Vamos admitir por instante que (4.13) tenha uma solução  $\omega$  em  $[a, b]$ . Então a fórmula da 2ª variação pode ser escrita como

$$(4.14) \quad \delta^2 I(h) = \int_a^b P(h' + \frac{\omega}{P} h)^2 dx$$

Neste caso  $\delta^2 I(h) \geq 0$  e, se  $\delta^2 I(h) = 0$  para alguma função  $h$ , é claro que

$$h'(x) + \frac{\omega}{P} h(x) \equiv 0$$

Mas então, como  $h(a) = 0$ , pelo teorema da unicidade de soluções diferenciais da primeira ordem, temos que  $h(x) \equiv 0$ . Portanto, o funcional  $\delta^2 I$  é positivo definido.

A equação (4.13) é conhecida como equação de Riccati, e pode ser reduzida a uma equação diferencial li



near de segunda ordem pela mudança de variável

$$(4.15) \quad w = -\frac{u'}{u} P, \quad u \neq 0$$

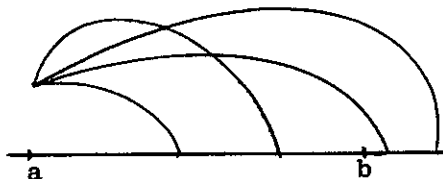
A equação resultante é:

$$(4.16) \quad -\frac{d}{dx} (Pu') + Qu = 0$$

a qual é conhecida como Equação de Jacobi. O leitor deve observar que, para obtermos uma solução da equação de Riccati (4.13) globalmente definida, a partir de uma solução  $u$  da equação de Jacobi, é essencial que  $u$  seja diferente de zero em todos os pontos de  $[a, b]$ . Agora, do estudo de equações diferenciais lineares, nós sabemos que, em geral, sempre existem soluções da equação de Jacobi satisfazendo as condições iniciais

$$u(a) = \lambda \quad u'(a) = m$$

onde  $\lambda$  e  $m$  são dois números reais dados. Estas soluções podem ser extendidas para o domínio comum das funções



$P$ ,  $Q$  e  $P'$  e podem ser zero eventualmente.

É possível obter bastantes informações sobre a natureza das soluções da equação de Jacobi sem resolve-la. As seguintes proposições são exemplos disto. No que se segue nós suporemos  $P$  e  $Q$  definidos num intervalo aberto contendo  $[a, b]$ .

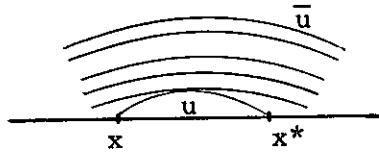
(4.17) PROPOSIÇÃO - Se  $u$  e  $\bar{u}$  são soluções não triviais da equação de Jacobi e  $u(x_0) = \bar{u}(x_0) = 0$  para algum  $x \in [a, b]$ , então  $u$  e  $\bar{u}$  são linearmente dependentes e portanto possuem o mesmo conjunto de zeros.

Prova: Seja  $\lambda$  um número tal que  $\lambda u'(x_0) = \bar{u}'(x_0)$ . Tal escolha é possível desde que  $u'(x_0) \neq 0$  (do contrário  $u = 0$ ). Então a função  $\tilde{u} = \lambda u - \bar{u}$  é solução da equação de Jacobi e  $\tilde{u}(x_0) = \tilde{u}'(x_0) = 0$ . Logo  $\tilde{u} = 0$  e portanto  $\bar{u} = \lambda u$ .

(4.18) COROLÁRIO - O espaço das soluções da equação de Jacobi, que se anulam em um ponto fixo  $x_0$ , tem dimensão 1.

(4.19) PROPOSIÇÃO - Se uma solução  $u$  da equação de Jacobi tem dois zeros consecutivos  $x$  e  $x^*$  então qualquer outra solução  $\bar{u}$  linearmente independente com  $u$  terá um zero em um ponto  $x_1 \in (x, x^*)$ .

Prova: Suponha que exista  $\bar{u}$ , uma solução da equação de Jacobi, que não se anula em nenhum ponto de  $(x, x^*)$ . Suporemos, sem perda de generalidade, que  $u \geq 0$ . É fácil ver que existe um certo  $\lambda$  tal que  $\tilde{u} = \lambda \bar{u} - u \geq 0$  e  $\tilde{u}$  é zero para alguns pontos do intervalo  $(x, x^*)$ . Como  $\tilde{u}$



é diferenciável, em tais pontos  $\tilde{u}' = 0$ . Mas isto implica que  $\tilde{u} = 0$  e portanto  $u$  e  $\bar{u}$  são linearmente dependentes, o que contraria a hipótese.

(4.20) DEFINIÇÃO - Seja  $c$  um ponto do intervalo  $(a, b]$  tal que existe uma solução da equação de Jacobi que é zero em  $a$  e  $c$ . Então, nós diremos que  $c$  é um ponto conjugado ao ponto  $a$ , ou simplesmente que  $a$  e  $c$  são pontos conjugados. Se  $a$  e  $c$  são zeros consecutivos da equação de Jacobi, então  $c$  é chamado de 1º ponto conjugado ao ponto  $a$  e nós o denotaremos por  $a^*$ .

(4.21) PROPOSIÇÃO - A função que associa a cada ponto  $x$ , o seu 1º ponto conjugado é uma função diferenciável e monótona crescente na vizinhança de qual-

quer ponto onde  $x^*$  for definida.

Prova: Sejam  $u_1$  e  $u_2$  duas soluções linearmente independentes da equação de Jacobi. Uma solução geral é então representada por

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

Para encontrar uma solução que se anula em  $x = x_1$ , temos de resolver a equação

$$\lambda_1 u_1(x_1) + \lambda_2 u_2(x_1) = 0$$

para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Desde que  $u_1$  e  $u_2$  são linearmente independentes elas não possuem zeros comuns. Podemos, portanto, supor sem perda de generalidade que  $u_1(x_1) \neq 0$  e escrever

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = - \frac{u_2(x_1)}{u_1(x_1)}$$

Então  $\lambda_1 = \lambda u_2(x_1)$  e  $\lambda_2 = -\lambda u_1(x_1)$ , para algum  $\lambda \neq 0$ .

Segue-se que

$$(4.22) \quad u(x) = \lambda \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(x_1) & u_2(x_1) \end{vmatrix} = \lambda D(x, x_1)$$

representa todas as soluções da equação de Jacobi que se anulam em  $x_1$ .

Para encontrar outros zeros de  $u(x)$ , se eles

existem, teremos de resolver a equação

$$D(x, x_1) = 0$$

para  $x$ . Suponha que exista  $x_1^*$  o primeiro ponto conjugado de  $x_1$ . Então nós temos

$$D(x_1^*, x_1) = 0$$

e

$$(4.23) \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} D(x, x_1) \right|_{x=x_1^*} \neq 0$$

A desigualdade acima segue-se de que, sendo  $u(x_1^*) = 0$ , se fosse  $u'(x_1^*) = 0$  teríamos que  $u \equiv 0$ . Desde que  $u_1$  e  $u_2$  são pelo menos de classe  $C^1$ , então  $D(x, x_1)$  é de classe  $C^1$  como função de duas variáveis. Então, pelo teorema da função implícita  $x^* = \psi(x)$  numa vizinhança de  $x_1$  onde  $\psi$  é uma função diferenciável. O fato de  $\psi$  ser monótona crescente segue-se agora imediatamente de (4.19).

(4.24) COROLÁRIO - Se  $(a, b]$  não contém um ponto conjugado ao ponto  $a$ , então existe um  $\epsilon > 0$  tal que  $(a - \epsilon, b]$  não contém pontos conjugados ao ponto  $a - \epsilon$ .

Uma consequência imediata deste Corolário é que, se não existem pontos conjugados ao ponto  $a$  no intervalo  $(a, b]$ , então existe uma solução da equação de Jacobi que não se anula em  $[a, b]$ . Para isto basta tomarmos uma

solução  $u$  da equação de Jacobi satisfazendo as condições iniciais  $u(a-\epsilon) = 0$ ,  $u'(a-\epsilon) = 1$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeno. Mas, como vimos anteriormente, a existência de tal solução acarreta na existência de uma solução  $w$ , globalmente definida, da equação de Riccati (4.13). Mas isto por sua vez implica em que o funcional quadrático (4.8) pode ser escrito na forma (4.14), e portanto é positivo definido. Assim, temos demonstrado o seguinte teorema.

(4.25) TEOREMA - Se  $P(x) > 0$  em  $[a, b]$  e o ponto  $a$  não possui pontos conjugados em  $(a, b]$ , então o funcional quadrático

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx$$

é positivo definido para todo  $h$  satisfazendo as condições de contorno  $h(a) = h(b) = 0$ .

Na verdade, a análise que desenvolvemos para obter a equação de Jacobi poderia ter sido levada a cabo de outra forma. Observe que por uma integração por partes podemos escrever

$$(4.26) \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx = \int_a^b \left( -\frac{d}{dx} (Ph') + Qh \right) h dx$$

Este funcional quadrático não é positivo definido , se existe uma solução não trivial da equação

$$- \frac{d}{dx} (Ph') + Qh = 0$$

satisfazendo as condições  $h(a) = h(b) = 0$ . Mas esta é exatamente a equação de Jacobi. E dizer que existe tal solução é dizer que  $a$  e  $b$  são conjugados.

Nós demonstramos em (4.25) que a não existência de pontos conjugados ao ponto  $a$  no intervalo  $[a,b]$  é uma condição suficiente para que o funcional quadrático que estamos estudando seja definido positivo. Vamos demonstrar agora que esta condição também é necessária.

(4.27) TEOREMA - Se o funcional quadrático

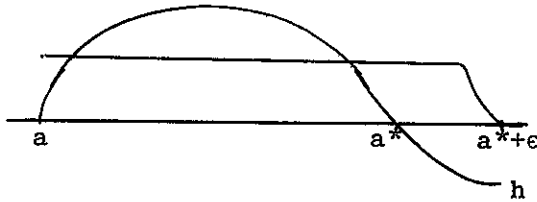
$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx,$$

onde  $P(x) > 0$ , é positivo definido para todo  $h \in C^1(a,b)$  tal que  $h(a) = h(b) = 0$ , então o intervalo  $(a,b]$  não contém pontos conjugados ao ponto  $a$ .

Prova: Suponha que  $a^*$ , o primeiro ponto conjugado ao ponto  $a$ , pertença a  $(a,b]$ , e seja  $h$  uma solução não trivial da equação de Jacobi que se anula em  $a$  e  $a^*$ .

Se  $a^* = b$ , então (4.26) implica que ela pertença ao núcleo do funcional quadrático o qual não será então, positivo definido.

Se  $a^* \in (a,b)$ , vamos mostrar que existe uma função  $h_1$ , que se anula em  $a$  e  $b$ , e para a qual o funcional quadrático é negativo. Como  $h'(a^*) \neq 0$  (do contrário  $h = 0$ ) então  $h$  intercepta o eixo dos  $x$  transversalmente e portanto existe  $\epsilon > 0$  tal que  $h(x) \neq 0$  em



$(a^*, a^*+\epsilon)$ . Seja  $\lambda: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  tal que

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq x \leq a^* \\ 0 & \text{se } a^*+\epsilon \leq x \leq b \\ \text{decrecente para } a^* < x < a^*+\epsilon \end{cases}$$

Defina

$$h_1 = \lambda h$$



Então

$$\frac{d}{dx} (Ph'_1) = \lambda \frac{d}{dx} (Ph') + \frac{d}{dx} (Ph\lambda') + Ph'\lambda'$$

e portanto

$$\int_a^b (Ph'_1)^2 + Qh_1^2 dx = \int_a^b \left\{ -\frac{d}{dx} (Ph'_1) + Qh_1 \right\} h_1 dx =$$

$$\int_a^b \left( \frac{d}{dx} (Ph') + Qh \right) \lambda^2 h dx + \int_{a^*}^{a^*+\epsilon} \lambda h \left( \frac{d}{dx} Ph\lambda' + Ph'\lambda' \right) dx$$

Como  $h$  é solução da equação de Jacobi, a primeira destas integrais é zero. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{a^*}^{a^*+\epsilon} \lambda h \left( \frac{d}{dx} Ph\lambda' + Ph'\lambda' \right) dx &= \int_{a^*}^{a^*+\epsilon} \left( \frac{d}{dx} (Ph^2 \lambda \lambda') - Ph^2 \lambda'^2 \right) dx = \\ &= - \int_{a^*}^{a^*+\epsilon} Ph^2 \lambda'^2 dx < 0 \end{aligned}$$

onde a última igualdade foi obtida usando-se que  $\lambda'(a^*) = \lambda'(a^* + \epsilon) = 0$ . Portanto

$$\int_a^b (Ph'_1)^2 + Qh_1^2 dx < 0 \quad \text{c.q.d.}$$

O seguinte é o teorema principal deste capítulo:

(4.28) TEOREMA - Seja  $y \in C^1(a,b)$  uma solução da equa-

ção de Euler do problema variacional mais simples proposto em (4.6). Se, ao longo da curva  $y(x)$ , nós temos simultaneamente que:

a)  $F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0$  ;

b) o intervalo  $[a, b]$  não contém pontos conjugados ao ponto  $a$ , então  $y$  é um ponto de mínimo local para o funcional (4.6).

Prova: Usando o Teorema de Taylor com resto aplicado à função  $F$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} I(y+h) - I(y) &= \int_a^b (F_y h + F_{y'} h') dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^b (F_{yy} h^2 + 2F_{yy'} h h' + F_{y'y'} h'^2) dx + \\ &+ \int_a^b (\epsilon_1 h^2 + \epsilon_2 h h' + \epsilon_3 h'^2) dx \end{aligned}$$

onde  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  e  $\epsilon_3 \rightarrow 0$  quando  $\|h\|_1 \rightarrow 0$ . Se  $y$  é uma solução da equação de Euler, então a primeira integral do segundo membro é zero. Usando integração por partes e a notação que já estabelecemos temos que

$$I(y+h) - I(y) = \frac{1}{2} \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx + \int_a^b (\xi h'^2 + \eta h^2) dx$$

onde ainda temos  $\xi, \eta \rightarrow 0$  quando  $\|h\|_1 \rightarrow 0$ . Por outro lado usando a desigualdade de Schwarz nós temos que:

$$h^2(x) = \left( \int_a^x h'(x) dx \right)^2 \leq (x-a) \int_a^x h'^2 dx \leq (x-a) \int_a^b h'^2 dx$$

e portanto

$$\int_a^b h^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b h'^2 dx$$

aplicando esta desigualdade à expressão do resto acima, obtemos

$$\left| \int_a^b (\xi h^2 + \eta h'^2) dx \right| \leq \epsilon \left( 1 + \frac{(b-a)^2}{2} \right) \int_a^b h'^2 dx$$

se  $\|\xi\|_0 \leq \epsilon$ ,  $\|\eta\|_0 \leq \epsilon$ . Portanto, nós podemos escrever que

$$I(y+h) - I(y) \geq \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx - \alpha^2 \int_a^b h'^2 dx$$

onde  $\alpha$  depende somente de  $\epsilon$  e  $\alpha \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Seja  $J(h)$  o funcional quadrático

$$\begin{aligned} J(h) &= \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2 - \alpha^2 h'^2) dx = \\ &= \int_a^b \left\{ -\frac{d}{dx} ([P - \alpha^2]h') + Qh \right\} h dx \end{aligned}$$

Provaremos que  $J$  é positivo definido.

Como  $P > 0$  em  $[a, b]$  então  $P - \alpha^2 > 0$  em  $[a, b]$  para  $\alpha$  suficientemente pequeno. Uma solução  $h(x, \alpha)$  da equação de Jacobi

$$-\frac{d}{dx} [(P - \alpha^2)h'] + Qh = 0$$

satisfazendo a  $h(a) = 0$  e  $h'(a) = 1$  depende continuamente de  $\alpha$ . Se, para  $\alpha = 0$ , ela não se anula em nenhum ponto de  $[a, b]$  então para  $\alpha$  suficientemente pequeno ela continua a não se anular em  $[a, b]$ , o que prova que existe  $\alpha$  tal que  $J$  é definido positivo. Mas isto significa precisamente que  $I(y+h) - I(y) \geq 0$  numa vizinhança de  $y$ .

## 5. O TESTE DE JACOBI

Neste capítulo nós iremos estabelecer o teste de Jacobi para determinação de pontos conjugados e aplicá-lo ao caso da superfície mínima de revolução.

Seja  $y(x, \alpha)$  uma família a um parâmetro de funções admissíveis ao funcional

$$(5.1) \quad I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

a qual nós suporemos duas vezes continuamente diferenciável em  $(x, \alpha)$ . Suponha que  $y(x, \alpha)$  é uma solução da equação de Euler

$$(5.2) \quad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

para cada  $\alpha$  fixo. Derivando ambos os membros desta equação com relação a  $\alpha$  obtemos:

$$(5.3) \quad (F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{y'y'}) \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{d}{dx} (F_{y'y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha}) = 0$$

ou, em termos da notação do capítulo anterior,

$$(5.4) \quad Q \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{d}{dx} \left( P \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) = 0$$

Portanto,  $h = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$  é uma solução da equação de Jacobi. Na verdade, nós podemos demonstrar o seguinte resultado:

(5.5) PROPOSIÇÃO - Dois pontos  $a$  e  $a^*$  são conjugados se e só se existe uma família a um parâmetro de soluções da equação de Euler,  $y(x, \alpha)$ , de classe  $C^2$ , tal que  $h = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$  é zero em  $a$  e  $a^*$ .

Prova: Pelos comentários já feitos, segue-se que a condição é suficiente para que  $a$  e  $a^*$  sejam conjugados. Suponha agora que  $a$  e  $a^*$  são conjugados. Então existe  $h$  uma solução da equação de Jacobi que se anula em  $a$  e  $a^*$ . Considere a família a um parâmetro  $y(x, \alpha)$  de soluções da equação de Euler satisfazendo a

$$y(a) = 0 \quad \text{e} \quad y'(a) = \alpha$$

supondo que  $F$  é suficientemente diferenciável,  $y(x, \alpha)$  é de classe  $C^2$  e temos então que  $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$  é uma solução da equação de Jacobi que se anula em  $a$ . Por (4.17),  $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$  e  $h$  são linearmente dependentes e portanto possuem os mesmos zeros. Logo  $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$  é zero em  $a^*$ .

Sejam  $h_1$  e  $h_2$  soluções linearmente independentes da equação de Jacobi. Então, por (4.22)

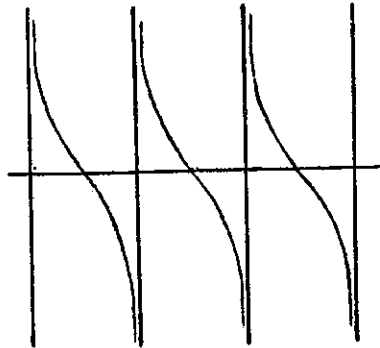
$$h(x) = \lambda \begin{vmatrix} h_1(x) & h_2(x) \\ h_1(x_1) & h_2(x_1) \end{vmatrix}$$

representa todas as soluções da equação de Jacobi que se anulam em  $x_1$ .

Considere a função

$$(5.6) \quad x \rightarrow \frac{h_1(x)}{h_2(x)}$$

Esta função será bem definida em  $[a, b]$  excetuando os pontos onde  $h_2$  é zero. Além disso ela é monótona e sua imagem é a reta toda. Os pontos que correspondem a mesma ordenada desta função são conjugados. Do mesmo modo o são ,



é claro, os pontos onde ela não é definida.

Seja  $y(x, \alpha, \beta)$  uma solução geral da equação de Euler (5.2), que é de classe  $C^2$  em todos seus argumentos. Então, se  $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$  e  $\frac{\partial y}{\partial \beta}$  são linearmente independentes, o quociente  $\frac{\partial y}{\partial \alpha} / \frac{\partial y}{\partial \beta}$  tem os mesmos valores em  $a$  e  $a^*$  se e só se  $a$  e  $a^*$  são pontos conjugados. Este é conhecido como Teste de Jacobi para pontos conjugados, e sua validade segue-se imediatamente de (5.5) e das observações feitas acima.

Vamos aplicar este teste ao problema da superfície de revolução de área mínima proposto no primeiro capítulo. Como já vimos no final do capítulo (3), a solução geral da equação de Euler para o problema foi

$$(5.7) \quad y = \alpha \cosh \frac{x + \beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0$$

Neste caso

$$(5.8) \quad h_1 = \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \cosh \frac{x + \beta}{\alpha} - \frac{x + \beta}{\alpha} \sinh \frac{x + \beta}{\alpha}$$
$$h_2 = \frac{\partial y}{\partial \beta} = \sinh \frac{x + \beta}{\alpha}$$

Estas funções são, pela teoria acima, soluções da equação de Jacobi associada ao problema. E, desde que,



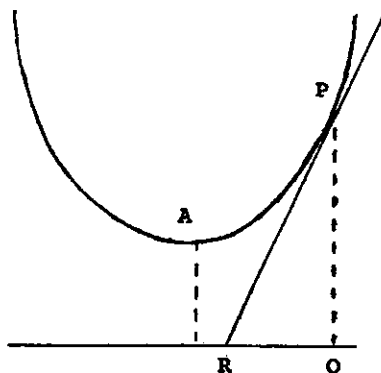
$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} \Big|_{x=-\beta} = 1 \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} \Big|_{x=-\beta} = 0$$

segue-se que elas são linearmente independentes. Considere o quociente

$$(5.9) \quad \frac{h_1}{h_2} = \operatorname{cotgh} \frac{x+\beta}{a} - \frac{x+\beta}{a}$$

Esta função é descontínua no ponto  $x = -\beta$  e é decrescente em todo seu domínio. Cada um de seus dois ramos representam funções cuja imagem é a reta toda. Logo pelo teste de Jacobi, cada  $x \neq -\beta$  possui exatamente um ponto conjugado  $x^*$ . Embora uma expressão analítica para  $x^*$  em termos de  $x$  seja extremamente complicada, uma caracterização geométrica de  $x^*$  é fácil de ser obtida.

Na figura seguinte A é o vértice da catenária,



P é um ponto genérico da catenária diferente de A e R é o ponto da interseção com o eixo dos x, da reta tangente a catenária no ponto P. Os pontos B e Q são as projeções de A e P no eixo dos x. Então:

$$B = (-\beta, 0) \quad , \quad P = (x, \alpha \cosh \frac{x+\beta}{\alpha})$$

$$\overline{PQ} = \alpha \cosh \frac{x+\beta}{\alpha} \quad \overline{QR} = \alpha \operatorname{cotgh} \frac{x+\beta}{\alpha}$$

$$\operatorname{tg} \hat{PQR} = \operatorname{senh} \frac{x+\beta}{\alpha}$$

Segue-se que

$$(5.10) \quad -\alpha \frac{h_1}{h_2} = (x+\beta) - \alpha \operatorname{cotgh} \frac{x+\beta}{\alpha} = \overline{QB} - \overline{QR} = \overline{RB}$$

Embora a figura tenha sido feita com P à direita do ponto A, é fácil ver que o resultado será o mesmo se P estiver à esquerda de A. Na verdade, se tomarmos o ponto B como origem, a abcissa do ponto R terá exatamente o valor  $-\alpha h_1/h_2$ . Isto ocorre P estando em qualquer dos dois lados do ponto A. Portanto vale daí o seguinte resultado devido a Lindelöf.

(5.11) PROPOSIÇÃO - Dois pontos da catenária (5.7) são conjugados se e só se as retas tangentes a catenária nestes pontos se interceptam no eixo dos x.

## 6. O PROBLEMA VARIACIONAL MAIS SIMPLES NO $\mathbb{R}^n$

Seja  $F(x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$  uma função de classe  $C^3$  que por simplicidade nós suporemos de finida em todo o  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Considere o problema de encontrar condições necessárias para existência de um extremo do funcional

$$(6.1) \ I(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

o qual depende de  $n$  funções continuamente diferenciáveis por partes  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  satisfazendo as condições de contorno

$$(6.2) \ y_i(a) = A_i \quad y_i(b) = B_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Em outras palavras nós estamos procurando um extremo do funcional (6.1) definido no conjunto de curvas parametrizadas do  $\mathbb{R}^n$  ligando dois pontos dados:  $A = (A_1, \dots, A_n)$  e  $B = (B_1, \dots, B_n)$ . Seja  $y = (y_1, \dots, y_n)$  uma tal curva, então nós podemos reescrever (6.1) na forma

$$(6.3) \quad I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

Como a notação acima sugere, é possível generalizar de maneira quase imediata, todos os resultados obtidos no caso do problema variacional mais simples, para o problema proposto acima.

Seja  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$  por partes dada por  $h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x))$ , tal que

$$h(a) = 0 \quad \text{e} \quad h(b) = 0$$

Se  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma curva  $C^1$  por partes, ligando os pontos A e B, então  $t \rightarrow y + th$  é uma variação admissível de  $y$ . A primeira variação de  $I$  será então

$$(6.4) \quad \delta I_y(h) = \int_a^b \sum_{i=1}^n (F_{y_i} h_i + F_{y_i'} h_i') dx$$

Se adotarmos a notação

$$F_y = (F_{y_1}, \dots, F_{y_n}) \quad \text{e} \quad F_{y'} = (F_{y_1'}, \dots, F_{y_1'}, \dots, F_{y_n'})$$

então podemos escrever

$$(6.5) \quad \delta I(h) = \int_a^b (\langle F_y, h \rangle + \langle F_{y'}, h' \rangle) dx$$

Usando-se que  $h(a) = h(b) = 0$  procedemos uma integração

por partes obtendo

$$(6.6) \quad \delta I(h) = \int_a^b \langle F_{y'} - \int_a^x F_{yy'} u, y(u), y'(y) \rangle du, h' \rangle dx$$

Se  $y$  é um extremo de  $I$ , devemos ter  $\delta I(h) = 0$  para todo  $h$  satisfazendo as condições  $h(a) = h(b) = 0$ . Então é possível usar o Lema (3.11) para obter:

$$(6.7) \quad F_{y'} = \int_a^x F_{yy'}(u, y(u), y'(u)) du + c$$

Desta equação segue-se que a função

$$F_{y'}(x, y(x), y'(x))$$

é contínua em  $x$  o que generaliza a Condição de Weierstrass-Erdmann. Também de (6.7) segue-se que, em cada intervalo onde  $y$  é continuamente diferenciável,  $y$  deve satisfazer a equação de Euler

$$(6.8) \quad \frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0$$

Um cálculo da segunda variação em termos de coordenadas nos dá

$$(6.9) \quad \delta^2 I(h) = \int_a^b \sum_{i,j=1}^n (F_{y_i y_j} h_i h_j + 2F_{y_i y_j'} h_i h_j' + F_{y_i' y_j'} h_i' h_j') dx$$

Considere as matrizes:

$$F_{yy} = (F_{y_i y_j}) \quad F_{yy'} = (F_{y_i y'_j}) \quad F_{y'y'} = (F_{y'_i y'_j})$$

então (6.9) pode ser escrita na forma

$$(6.10) \quad \delta^2 I(h) = \int_a^b (\langle F_{yy} h, h \rangle + \langle F_{yy}, h, h' \rangle + \langle F_{y'y'}, h', h' \rangle) dx$$

Se  $F_{yy'}$  é uma matriz simétrica, então uma integração por partes do termo central do integrando nos permite escrever

$$(6.11) \quad \delta^2 I(h) = \int_a^b (\langle Ph', h' \rangle + \langle Qh, h \rangle) dx$$

onde  $P = F_{y'y'}$  e  $Q = F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}$ .

Como no caso  $n = 1$ , o termo em  $P$  é o mais importante e nós temos a seguinte versão da condição de Legendre.

(6.12) TEOREMA - Uma condição necessária para que a forma quadrática  $\delta^2 I$  seja positiva definida quando restrita às funções  $h$  satisfazendo as condições de contorno  $h(a) = h(b) = 0$ , é que a matriz  $F_{y'y'}$  seja positiva definida ao longo de  $y$ .

Uma segunda integração por partes do funcional  $\delta^2 I$ , nos dá

$$(6.13) \quad \delta^2 I(h) = \int_a^b \left\langle -\frac{d}{dx} (Ph') + Qh, h \right\rangle dx$$

A equação

$$(6.14) \quad -\frac{d}{dx} (Pu') + Qu = 0$$

é chamada equação de Jacobi. Uma solução da equação de Jacobi é chamado campo de Jacobi.

Seja  $y(x)$  um extremo do problema variacional que estamos estudando. Um campo de Jacobi é usualmente visto como um campo de vetores ao longo da curva  $y$ . Dois pontos  $A$  e  $B$  da curva  $y$  são chamados pontos conjugados se existe um campo de Jacobi que se anula em  $A$  e  $B$ .

Suponha que  $P > 0$  (definido positivo) então a equação (6.14) é uma equação diferencial linear, que tem  $n$  soluções linearmente independentes  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  satisfazendo a condição inicial,

$$\mu_i(a) = 0$$

Elas são determinadas a partir das condições iniciais nas derivadas

$$\mu_i'(a) = v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

onde  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são  $n$  vetores linearmente indepen

dentos do  $\mathbb{R}^n$ . Uma solução geral será então da forma

$$\mu = \sum \lambda_i \mu_i$$

Se  $A = y(a)$  e  $B = y(b)$  são pontos conjugados, então existe uma solução  $\mu$  de (6.14) tal que  $\mu(a) = \mu(b) = 0$ . Portanto em  $A$  e  $B$  os vetores  $\mu_1, \dots, \mu_n$  deixam de ser linearmente independentes. Seja

$\mu_i = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{in})$   $i = 1, \dots, n$ . Então o ponto  $B$  será conjugado ao ponto  $A$  se o determinante

$$(6.15) \quad D(\mu_1, \dots, \mu_n) = \begin{vmatrix} \mu_{11}(x) & \mu_{12}(x) & \dots & \mu_{1n}(x) \\ \mu_{21}(x) & \mu_{22}(x) & \dots & \mu_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n1}(x) & \mu_{n2}(x) & \dots & \mu_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

for zero em  $x = b$ .

Os seguintes dois teoremas podem então ser demonstrados usando o mesmo esquema de demonstração feito no caso do problema variacional mais simples.

(6.16) TEOREMA - Se  $P$  é uma matriz positiva definida em  $[a, b]$  e se  $y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , não contém, pontos conjugados ao ponto  $a = y(a)$ , então a segunda variação  $\delta^2 I_y$  é positiva definida quando restrita aos cam



pos de vetores  $h$  que se anulam em  $a$  e  $b$ .

(6.17) TEOREMA - Seja  $y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , uma solução da equação de Euler. Suponha que, ao longo de  $y$  a matriz  $F_{y',y'}$  é positiva definida e que não existam pontos conjugados ao ponto  $y(a)$ . Então  $y$  é um mínimo local do funcional  $I$  dado em (6.3).



## 7. GEODÉSICAS

Seja  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície e  $y: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  um sistema de coordenadas locais. Representaremos um ponto de  $U$  por  $(y_1, y_2)$  e por  $\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}$  os vetores tangentes as curvas coordenadas. Em cada ponto  $p$  de  $M$  estes dois vetores são linearmente independentes e geram  $T_p M$ , o espaço tangente a  $M$  no ponto  $p$ . A restrição do produto  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  do  $\mathbb{R}^3$  a estes subspaços induz uma métrica em  $M$  que em cada vizinhança coordenada tem por elemento de arco

$$(7.1) \quad ds^2 = \sum g_{ij} dy_i dy_j$$

onde

$$(7.2) \quad g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle$$

Uma curva  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$  é suave se, em todo sistema de coordenadas locais, sua representação  $(y_1(t), y_2(t))$  é dada por funções de classe  $C^\infty$ . Uma curva  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$  é suave por partes se  $\alpha$  é contínua e existe uma partição do intervalo  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ , tal que

$\alpha$  restrita a cada sub-intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  é uma curva suave. Observe-se que se uma curva  $\alpha$  é suave por partes, então seu vetor tangente  $\alpha'$  é bem definido em cada sub-intervalo  $(t_i, t_{i+1})$  e, em cada ponto  $t_i$  da partição, existem ambos os limites laterais de  $\alpha'(t)$ . O comprimento de uma curva suave por partes é definido por

$$(7.3) \quad L(\alpha) = \int_a^b (\sum g_{ij} y'_i y'_j)^{1/2} dt$$

Um ponto regular de uma curva suave por partes  $\alpha$  é um ponto onde  $\alpha'$  existe e não é zero. Uma curva suave por partes é dita regular se em todos os pontos do intervalo  $[a, b]$  onde  $\alpha'$  existe,  $\alpha'$  é diferente de zero. Sempre que uma curva é regular, a função

$$(7.4) \quad s(t) = \int_a^t (\sum g_{ij} y'_i(u) y'_j(u))^{1/2} du$$

é contínua,  $C^\infty$  por partes e crescente. Portanto, existe a função inversa  $t = t(s)$  a qual é por sua vez contínua,  $C^\infty$  por partes e crescente. Podemos então escrever  $\alpha(s) = \alpha(t(s))$  e temos

$$\alpha: [0, L(\alpha)] \rightarrow M$$

satisfazendo a condição adicional

$$|\alpha'(s)| = 1$$

em todos os pontos onde  $\alpha'(s)$  é definida.

No que se segue nós estaremos interessados em minimizar o funcional (7.3) entre todas as curvas suaves por parte, ligando dois pontos prefixados  $p$  e  $q$  de  $M$ . Devemos observar que o valor do funcional  $L$  definido em (7.3) em uma certa curva  $\alpha$  é independente da parametrização usada para definir  $\alpha$ . Mais precisamente, ele assume o mesmo valor em todas as curvas, parametrizadas, suaves por parte, que difiram apenas por uma mudança de parâmetro  $t = t(u)$  com  $\frac{dt}{du} > 0$ . Assim, não podemos esperar obter uma solução bem definida para o problema posto desta maneira, desde que, se uma determinada curva  $\alpha(t)$  realiza o mínimo de  $L$ , então todas as curvas  $\alpha(u) = \alpha(t(u))$ , obtidas através de uma mudança de parâmetro, também serão pontos de mínimo para  $L$ . Para evitar este problema é conveniente introduzir um novo funcional, que chamaremos de energia dado por

$$(7.5) \quad E(\alpha) = \int_a^b (\sum g_{ij} \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_j}{dt}) dt$$

A energia e o comprimento de arco estão relacionados da seguinte forma:

(7.6) PROPOSIÇÃO - Se  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$  é uma curva suave por partes, então

$$L(\alpha)^2 \leq (b - a) E(\alpha)$$

e a igualdade se verifica se e só se  $\alpha$  está parametrizada por um múltiplo do comprimento de arco.

Demonstração: O resultado se segue da desigualdade de Schwarz

$$\left( \int_a^b f \cdot g \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2 \right) \left( \int_a^b g^2 \right)$$

a aplicação às funções  $f = \sum g_{ij} y_i' y_j'$  e  $g \equiv 1$ .

Seja  $\sigma: [a, b] \rightarrow M$  uma curva suave por partes, regular. Suponhamos que  $\sigma$  realiza a distância mínima entre os pontos  $P = \sigma(a)$  e  $Q = \sigma(b)$ . Isto significa que, para qualquer outra curva  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ , nós devemos ter

$$(7.7) \quad L(\sigma) \leq L(\alpha)$$

Podemos supor sem perda de generalidade que a curva  $\sigma$  seja parametrizada por um múltiplo do comprimento de arco. Então, segue-se da proposição acima que

$$(b - a) E(\sigma) = L(\sigma)^2 \leq L(\alpha)^2 \leq (b - a) E(\alpha)$$

e, conseqüentemente,

$$(7.8) \quad E(\sigma) \leq E(\alpha)$$

Portanto  $\sigma$  é simultaneamente um mínimo para a energia e para o comprimento de arco. O leitor deve observar que a desigualdade (7.8) será estrita mesmo quando  $\alpha$  for uma reparametrização de  $\sigma$ . Portanto, se nós resolvermos o problema de minimizar a energia, isto dará como resultado uma solução do problema variacional de determinar a curva que realiza a menor distância entre dois pontos, já parametrizada por um múltiplo do comprimento de arco. Vamos iniciar nosso estudo considerando a questão de minimizar a energia quando os pontos  $p$  e  $q$  estão contidos numa mesma vizinhança coordenada e as curvas a serem testadas têm suas imagens contidas nesta vizinhança. Neste caso o problema se reduz a minimizar o funcional (7.5) entre todas as curvas contidas num aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  ligando dois pontos que nós continuaremos a designar por  $p$  e  $q$ . As curvas serão funções suaves por parte, definidas no intervalo  $[a, b]$  fixado. O nosso problema é então exatamente o problema tratado no capítulo anterior, quando o integrando do operador (6.1) é a função

$$(7.9) \quad F(y_1, y_2, y_1', y_2') = \sum g_{ij}(y_1, y_2) y_1' y_2'$$

A primeira variação será então dada por

$$(7.10) \quad \delta E(h) = \int_a^b (\langle F_y, h \rangle + \langle F_{y'}, h' \rangle) dx$$

onde

$$(7.11) \quad F_y = (F_{y_1}, F_{y_2}) \quad , \quad F_{y'} = (F_{y'_1}, F_{y'_2})$$

$$F_{y_k} = \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k} y'_i y'_j \quad F_{y'_k} = 2 \sum_i g_{ik} y'_i$$

A condição de Weierstrass-Erdmann estabelecida a partir de (6.7) nos diz que, se  $y = (y_1(t), y_2(t))$  é um extremo do problema variacional, então  $F_{y'}(y(t), y'(t))$  é uma função contínua de  $t$ . Se nós designarmos por  $G$  a matriz  $(g_{ij})$ , então

$$(7.12) \quad F_{y'} = 2Gy'$$

e, desde que  $G$  é invertível, podemos escrever

$$(7.13) \quad y' = \frac{1}{2} G^{-1} F_{y'}$$

Como  $G$  e  $F_{y'}$  são funções contínuas de  $t$ , segue-se que  $y'$  é contínua e, portanto,  $y$  é de classe  $C^1$ . Aplicação sucessiva das fórmulas (6.7) e (7.13) permite estabelecer que  $y$  é de classe  $C^\infty$ . Este resultado é bastante forte e leva às seguintes consequências. Primeiramente,



em se tratando de determinar a curva de menor energia ligando dois pontos, nós podemos nos restringir às soluções da equação de Euler

$$(7.14) \quad \frac{d}{dt} F_{y'} - F_y = 0$$

Segundo, se  $P$  e  $Q$  são dois pontos arbitrários de  $M$ , e  $\alpha: [a,b] \rightarrow M$  é uma curva minimal, suave por partes, ligando  $P$  a  $Q$ , então  $\alpha$  será de classe  $C^\infty$ , e cada sub-arco de  $\alpha$  (conexo) contido numa vizinhança coordenada será necessariamente uma solução de (7.14). Uma formulação clássica da equação (7.14) pode ser obtida como se segue. De (7.11) obtemos

$$\frac{d}{dt} F_{y'_k} = 2 \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ik}}{\partial y_j} y'_i y'_j + 2 \sum_i g_{ik} y''_i$$

portanto (7.12) pode ser reescrita como

$$(7.15) \quad 2 \sum_i g_{ik} y''_i + \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ik}}{\partial y_j} y'_i y'_j + \\ + \sum_{i,j} \frac{\partial g_{kj}}{\partial y_i} y'_i y'_j - \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k} y'_i y'_j = 0$$

Vamos representar os elementos da matriz  $G^{-1}$  por  $g^{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ . Multiplicando a equação (7.15) por  $g^{lk}$  e

somando em  $k$  obtemos

$$(7.16) \quad y''_{\ell} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^{\ell} y'_i y'_j = 0$$

onde

$$(7.17) \quad \Gamma_{ij}^{\ell} = \frac{1}{2} \sum_k g^{\ell k} \left\{ \frac{\partial g_{ki}}{\partial y_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k} \right\}$$

As soluções do sistema de equações diferenciais (7.16) são chamadas geodésicas e as funções  $\Gamma_{ij}^k$  são chamadas símbolos de Chistofel. O sistema (7.16) é do tipo

$$y'' = f(y, y')$$

onde  $f$  é de classe  $C^{\infty}$  definida em  $U \times \mathbb{R}^2$ . Para tais sistemas sabemos que existe uma única solução satisfazendo as condições iniciais

$$(7.18) \quad \begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= v_0 \end{aligned}$$

Uma tal solução será representada por  $y(t, y_0, v_0)$  e a mesma é uma função de classe  $C^{\infty}$  nas variáveis  $t, y_0$  e  $v_0$ . Usando um argumento de unicidade é fácil mostrar que

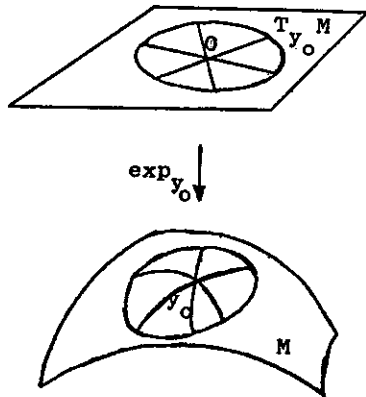
$$(7.19) \quad y(t, y_0, v_0) = y(1, y_0, tv_0)$$

Agora definamos a função  $\exp_{y_0} : T_p^M - M$  por

$$(7.20) \quad \exp_{y_0}(v) = y(1, y_0, v)$$

Tal função é de classe  $C^\infty$  e, além disso, de (7.19) segue-se que sua diferencial na origem é a identidade. Pelo teorema da função inversa então existe uma vizinhança  $V$  da origem em  $T_p M$  tal que, restrita a  $V$ , a função exponencial é difeomorfismo. Isto significa que podemos parametrizar uma vizinhança do ponto  $y_0$  em  $M$  por uma vizinhança da origem no  $\mathbb{R}^2$  de tal modo que a imagem das retas que passam pela origem são geodésicas de  $M$  passando pelo ponto  $y_0$ .

A vizinhança coordenada  $\exp_{y_0}(V)$  é chamada uma vizinhança normal do ponto  $y_0$ . A função exponencial e as vizinhanças normais são instrumentos extremamente úteis no estudo de Geometria diferencial.



Vamos agora calcular a primeira variação para a energia utilizando o fato de que  $M$  é uma superfície no  $\mathbb{R}^3$ . De acordo com (7.3) o comprimento de uma curva  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ , suave por partes, é:

$$(7.21) \quad I(\alpha) = \int_a^b \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle dt$$

Seja  $p = \alpha(a)$  e  $q = \alpha(b)$ . Nós definimos uma variação de  $\alpha$  como uma função

$$\sigma: (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$$

tal que:

- 1)  $\sigma(0, t) = \alpha(t)$  ,  $t \in [a, b]$
- 2)  $\sigma(\mu, 0) \equiv p$  e  $\sigma(\mu, 1) = q$  ,  $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$
- 3) Existe uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  de  $[a, b]$  tal que  $\sigma$  é  $C^\infty$  em cada faixa  $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$ .

Deve-se observar que, para cada  $u$  fixado,  $t \rightarrow \alpha_u(t) = \alpha(u, t)$  é uma curva suave por partes, ligando  $p$  e  $q$ . Na verdade a definição acima é a de uma variação mantendo os pontos extremos fixos. Mas desde que este será o único tipo de variação que utilizaremos, nós simplificamos a notação chamando-a apenas variação.

Designaremos por vetor variação o campo de vetores

$$(7.22) \quad h = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right|_{u=0}$$

o qual, pela definição de  $\sigma$  é  $C^1$  por partes, no intervalo  $[a, b]$ . Nós veremos a seguir que a primeira variação dependerá apenas da curva  $\alpha$  e do vetor  $h$ , e não da variação  $\sigma$  como um todo. Assim é interessante ter uma forma de construir variações com um dado vetor variação. Isso pode ser obtido usando a função exponencial, definindo

$$(7.23) \quad \sigma(u, t) = \exp_{\alpha}(t) (uh(t))$$

É imediato verificar que  $\sigma$  é uma função suave por partes em  $t$  e que satisfaz a equação (7.22).

Dados dois pontos  $p$  e  $q$  em  $M$ ,  $\alpha$  uma curva ligando  $p$  a  $q$  e  $\sigma$  uma variação de  $\sigma$  com vetor variação  $h$ , temos que:

$$(7.24) \quad \begin{aligned} \left. \frac{d}{du} I(\sigma) \right|_{u=0} &= \int_a^b \left. \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \sigma, \frac{\partial}{\partial t} \sigma \right\rangle dt \right|_{u=0} = \\ &= 2 \int_a^b \left. \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} \sigma, \frac{\partial}{\partial t} \sigma \right\rangle dt \right|_{u=0} \end{aligned}$$

Como  $\sigma$  é suave nas faixas  $(-\epsilon, \epsilon) \times (t_{i-1}, t_i)$  então, quase por toda parte,

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} \sigma = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} \sigma$$

Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle$$

Procedendo a uma integração por partes obtemos

(7.25)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{du} I(\sigma) \Big|_{u=0} = - \sum_{i=1}^{k-1} \langle h(t_i), \Delta_i \alpha' \rangle - \int_a^b \langle h, \frac{d}{dt} \frac{d\alpha}{dt} \rangle dt$$

onde  $\Delta_i \alpha' = \alpha'(t_{i+}) - \alpha'(t_{i-})$ . Se  $\alpha$  é um ponto crítico para a energia, já vimos anteriormente que  $\alpha$  será necessariamente regular. Assim podemos nos restringir ao caso  $\alpha$  regular, e a fórmula da primeira variação será a função linear em  $h$  dada por

$$(7.26) \quad \delta I_{\alpha}(h) = -2 \int_a^b \langle h, \frac{d}{dt} \frac{d\alpha}{dt} \rangle dt$$

Desde que  $h$  é um campo de vetores tangentes, nós podemos reescrever (7.26) na forma

$$(7.27) \quad \delta I_{\alpha}(h) = -2 \int_a^b \langle h, \frac{D}{dt} \frac{d\alpha}{dt} \rangle dt$$

onde  $\frac{D}{dt}$  é um símbolo para representar a componente tan-

gencial da derivada  $\frac{d}{dt}$  de campos de vetores ao longo de  $\alpha$ . Se  $\delta I_{\alpha}(h) = 0$  para todos os campos de vetores  $h$  associados por (7.22) a uma variação de  $\alpha$ , é fácil concluir que

$$(7.28) \quad \frac{D}{dt} \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

Esta é portanto uma condição necessária para que uma curva  $\alpha$  seja um extremo do problema variacional de minimizar a energia entre todas as curvas ligando dois pontos em  $M$ . Na verdade (7.28) em coordenadas locais, é exatamente a equação de Euler (7.16). De fato, se  $y_1, y_2$  são coordenadas locais temos:

$$(7.29) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \sum \frac{dy_i}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial y_i} ,$$

$$(7.30) \quad \frac{D}{dt} \frac{d\alpha}{dt} = \sum \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum \frac{dy_i}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

Usando a regra da cadeia obtemos:

$$(7.31) \quad \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_k \frac{dy_k}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

Se nós escrevemos

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum A_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y_k}$$

então a equação (7.28) se torna:

$$(7.32) \quad \frac{d^2 y_k}{dt^2} + \sum_{i,j} A_{ij}^k \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_j}{dt} = 0, \quad k = 1, 2.$$

De (7.32) e (7.16) segue-se que

$$A_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$$

e portanto nós temos o resultado desejado.

(7.33) COROLÁRIO - Geodésicas são curvas em  $M \subset \mathbb{R}^3$  cuja aceleração tangencial é zero.

Uma outra consequência importante é a fórmula:

$$(7.34) \quad \frac{D}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y_k}$$

Mas geralmente, se  $V = \sum v_i \frac{\partial}{\partial y_i}$  é qualquer campo de vetores ao longo de  $\alpha$ , então:

$$(7.35) \quad \frac{D}{dt} V = \sum_i \frac{dv_i}{dt} \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i,j,k} v_i \frac{dy_j}{dt} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y_k}$$

Usando a definição de  $\frac{D}{dt}$  é fácil concluir que, se  $V$  e  $W$  são campos de vetores tangentes a  $M$  ao longo de  $\alpha(t)$  e  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, então:

$$(7.36) \quad \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{D}{dt} V, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{D}{dt} W \right\rangle$$



$$(7.37) \quad \frac{D}{dt} (fV) = \frac{df}{dt} V + f \frac{DV}{dt}$$

Vamos agora calcular a segunda variação da energia. Será mais econômico para algumas demonstrações, no que se segue, ter a segunda variação como uma forma bilinear, ao invés de uma forma quadrática. Para obtê-la nesta forma vamos considerar uma variação dependendo de dois parâmetros, digamos  $u$  e  $v$ , cuja definição é análoga a definição de variação (a um parâmetro) que já consideramos.

Uma variação dependendo de dois parâmetros será uma função:

$$\sigma: (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$$

tal que:

- 1)  $\sigma(u, v, t)$  é contínua e suave nos retângulos  $(-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \times (t_i, t_{i+1})$  ;
- 2)  $\sigma(0, 0, t) = \alpha(t)$  ;
- 3)  $\alpha(u, v, a) = \alpha(a)$  e  $\sigma(u, v, b) = \alpha(b)$

Nós teremos, no caso, dois vetores variação:

$$(7.38) \quad \left. \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right|_{(0,0)} = h_1 \quad \left. \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right|_{(0,0)} = h_2$$

Procedendo como no estudo de máximos e mínimos de funções de duas variáveis, calcularemos o Hessiano de  $I(\sigma) = I(u, v)$  no ponto  $(0, 0)$ .

A partir de (7.25) temos que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} I(\sigma) = - \Sigma \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \Delta_i \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} I(\sigma) &= - \Sigma \left\langle \frac{D}{\partial v} \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \Delta_i \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle - \Sigma \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{D}{\partial v} \Delta_i \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle + \\ &\quad - \int_a^b \left\langle \frac{D}{\partial v} \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt \end{aligned}$$

Desde que  $\sigma(0, 0, t) = \alpha(t)$  é uma geodésica (e portanto suave), temos que,

$$\Delta_i \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} I(\sigma) \Big|_{(0,0)} &= - \Sigma \left\langle h_1, \Delta_i \frac{D}{\partial v} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Big|_{(0,0)} \right\rangle - \\ (7.39) \quad &\quad - \int_a^b \left\langle h_1, \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Big|_{(0,0)} \right\rangle dt \end{aligned}$$

O interessante seria obter a expressão para o Hessiano em que estivesse óbvia sua dependência somente em  $\alpha$ ,  $h_1$  e  $h_2$ . Desde que  $\sigma$  é suave nas faixas  $(-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \times (t_i, t_{i+1})$  temos:

$$(7.40) \quad \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u}$$

o que permite escrever:

$$(7.41) \quad \langle h_1, \Delta_i \frac{D}{\partial v} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Big|_{(0,0)} \rangle = \langle h_1, \Delta_i \frac{Dh_2}{\partial t} \rangle$$

Para ajustar o integrando de (7.39) deveríamos mudar a ordem no cálculo das derivadas  $\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial t}$ . Ocorre que esta mudança não é trivial como no caso de derivadas de funções de classe  $C^2$  no  $\mathbb{R}^n$ . Em geral, se  $V = \sum v_i \frac{\partial}{\partial y_i}$  é um campo de vetores tangentes a  $M$  definido num aberto contendo  $\sigma$ , teremos:

$$(7.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial t} V - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial v} V &= \sum_i v_i \left( \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) = \\ &= \sum_{i,k} v_i \left\{ \sum_j \left( \frac{\partial y_j}{\partial t} \frac{\partial y_n}{\partial v} - \frac{\partial y_j}{\partial v} \frac{\partial y_n}{\partial t} \right) (\Gamma_{ij,n}^k + \sum_m \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mn}^k) \right\} \frac{\partial}{\partial y_k} \end{aligned}$$

onde

$$\Gamma_{ij,n}^k = \frac{\partial}{\partial y_n} \Gamma_{ij}^k$$

Devemos observar que a expressão acima depende somente dos valores, em cada ponto, dos vetores  $V$ ,  $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$  e  $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$ . Assim nós podemos escrever:

$$(7.43) \quad \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial v} V - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial t} V = R\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}, \frac{\partial \sigma}{\partial t}, V\right)$$

onde  $R$ , em cada ponto  $p \in M$  é uma função trilinear, alternada nas duas primeiras variáveis, com valores em  $T_p M$ . O fato de que o lado esquerdo da igualdade (7.43) não depende do sistema de coordenadas, e o lado direito só depende dos valores dos vetores no ponto  $p$ , e depende linearmente, garante que  $R$  é uma aplicação trilinear globalmente definida em  $M$ . Nós chamamos  $R$  de curvatura de  $M$ .

A notação que usamos acima não é "standard".

O usual é denotar

$$(7.44) \quad R\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)V = R\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial v}, V\right)$$

a fim de destacar os vetores nos quais  $R$  é alternado. O tensor  $R$  tem, além disso, as seguintes propriedades

$$R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0$$

$$(7.45) \quad \langle R(x, y)z, w \rangle + \langle R(x, y)w, z \rangle = 0$$

$$\langle R(x, y)z, w \rangle = \langle R(z, w)x, y \rangle = 0$$

cuja demonstração é deixada a cargo do leitor. Vale a pena observar que, desde que  $R$  é uma aplicação linear em cada variável, é suficiente demonstrá-las para os vetores básicos  $\frac{\partial}{\partial y_i}$ .

Retornando à segunda variação da energia que estamos tratando, podemos reescrever (7.39) na forma

$$(7.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 I_\alpha(h_1, h_2) = & - \sum_i \langle h_1, \Delta_{t_i} \frac{D}{\delta t} h_2 \rangle - \\ & - \int_a^b \langle h_1, \frac{D^2}{dt^2} h_2 + R(\alpha', h_2)\alpha' \rangle dt \end{aligned}$$

Deve-se observar que  $\delta^2 I_\alpha$  é então bilinear e simétrica. A equação de Jacobi será então:

$$(7.47) \quad \frac{D^2}{dt^2} h + R(\alpha', h)\alpha' = 0$$

Se  $e_1$  e  $e_2$  são dois campos ortogonais ao longo de  $\alpha$ , tal que  $e_1 = \alpha'(s)$ , é fácil verificar que

$$(7.48) \quad \frac{De_1}{dt} = 0 \quad \frac{De_2}{dt} = 0$$

Qualquer campo de vetores ao longo de  $\alpha$  é da forma  $h = \sum h_i e_i$ . Se um tal campo é solução da equação de Jacobi, suas componentes satisfazem a

$$(7.49) \quad \frac{d^2 h_i}{dt^2} + \sum a_{ij}(t) h_j(t) = 0$$

onde  $a_{ij} = \langle R(e_1, e_j)e_1, e_i \rangle$  e suas soluções são campos de classe  $C^\infty$  completamente determinados pelos valores iniciais

$$h(t_0) \quad \text{e} \quad \frac{Dh}{dt}(t_0)$$

Na verdade, usando (7.45), podemos reduzir o sistema (7.49) simplesmente a

$$(7.50) \quad \begin{cases} h_1'' = 0 \\ h_1'' + a_{22} h_2 = 0 \end{cases}$$

Seja  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$  uma geodésica. O ponto  $p = \alpha(a)$  e  $q = \alpha(b)$  são conjugados ao longo de  $\alpha$  se existe um campo de Jacobi  $h(y)$  que se anula em  $a$  e  $b$ .

Para efeito do estudo de pontos conjugados é su

ficiente considerar somente campos de Jacobi normais a  $\alpha$ , desde que a solução mais geral para a componente tangencial  $h_1$  é da forma  $h_1(t) = ct + d$ , que se anula somente em um ponto.

(7.51) TEOREMA - Seja  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$  uma geodésica. Um campo de vetores  $h$  ao longo de  $\alpha$  pertence à nulidade da forma quadrática  $\delta^2 I_\alpha$  se e somente se  $h$  é um campo de Jacobi.

Demonstração: Se  $h$  é um campo de Jacobi, então  $h$  é suave e satisfaz a equação (7.47). Portanto  $\delta^2 I_\alpha(h, h) = 0$ .

Suponha agora que  $h$  pertence à nulidade de  $\delta^2 I_\alpha$ . Seja  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  uma partição do intervalo  $[a, b]$  tal que  $h$  é suave em cada subintervalo  $(t_i, t_{i+1})$ . Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^\infty$  tal que  $f(t_i) = 0$  e  $f(t) > 0$  se  $t \neq t_i$ .

Defina:

$$h_1 = f(t) \left( \frac{D^2 h}{dt^2} + R(\alpha', h)\alpha' \right)$$

$$h_2 = h$$

Podemos então construir uma variação  $\alpha(u, v, t)$  usando

a função exponencial, que tenha  $h_1$  e  $h_2$  por vetores variação. Aplicando a fórmula (7.46) obtemos

$$\frac{1}{2} \delta^2 I_{\alpha}(h_1, h_2) = - \int_a^b f(t) \left| \frac{D^2 h}{dt^2} + R(\alpha', h)\alpha' \right|^2 dt$$

Como  $h^2 = h$ , e  $h$  pertence à nulidade de  $\delta^2 I_{\alpha}$ , então a integral deve ser zero. Como  $f(t) > 0$  a menos de um número finito de pontos segue-se que  $h$  satisfaz a equação de Jacobi em todos os intervalos onde  $h$  é suave. Para mostrar que  $h$  é suave por toda parte escolha agora  $\tilde{h}_1$ , um campo de vetores ao longo de  $\alpha$  tal que:

$$\tilde{h}_1(t_i) = \Delta_i \frac{Dh}{dt}$$

e defina:

$$\tilde{h}_2(t) = h$$

Segue-se então que

$$0 = \delta^2 I_{\alpha}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = \sum_{i=1}^{k-1} |\Delta_i \frac{Dh}{dt}|$$

Portanto,  $\frac{Dh}{dt}$  é contínua em  $t$  e  $h$  é pelo menos de classe  $C^1$ . Mas  $h$  é solução da equação diferencial (4.47) em  $[a, b]$ . Logo  $h$  é de classe  $C^{\infty}$  em  $[a, b]$ .



Seja  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$  uma geodésica. Nós diremos que  $\alpha$  é uma geodésica minimal se  $\alpha$  é um mínimo da função comprimento relativamente a qualquer variação mantendo  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  fixos.

(7.52) TEOREMA - Seja  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$  uma geodésica. Uma condição necessária e suficiente para que  $\alpha$  seja minimal é que não existam pontos conjugados a  $\alpha(a)$  ao longo de  $\alpha$ .

Prova: Se  $\alpha$  é minimal, então  $\delta^2 I_\alpha(h, h) > 0$  para todo vetor variação  $h$  que se anula em  $a$  e  $b$ . Portanto, pelo teorema anterior, nenhum campo de Jacobi diferente de zero que se anula em  $\alpha(a)$  volta a se anular em outro ponto de  $\alpha$ . Consequentemente  $\alpha(a)$  não possui pontos conjugados ao longo de  $\alpha$ .

Inversamente, se  $\alpha(a)$  não possui pontos conjugados ao longo de  $\alpha$ , então nenhum campo de Jacobi que se anula em  $\alpha(a)$  volta a se anular ao longo de  $\alpha$ . Segue-se que nenhum elemento não trivial da nulidade de  $\delta^2 I_\alpha$  que se anula em  $\alpha(a)$  volta a se anular em outro ponto de  $\alpha$ . Portanto, se  $h$  é qualquer vetor variação não nulo que se anula em  $a$  e  $b$ ,  $h$  não pertence à nulidade de  $\delta^2 I_\alpha$  e portanto  $\delta^2 I_\alpha(h, h) > 0$ . Então, se  $\sigma(u, t)$  é qualquer

variação de  $\alpha$  mantendo os pontos extremos fixos, com vetor variação não identicamente nulo, então

$$\frac{d^2}{du^2} I(\sigma) > 0$$

e portanto  $\alpha$  é minimal.

O seguinte lema descreve uma maneira de obter Campos de Jacobi.

(7.53) LEMA - Seja  $\sigma(u,t)$  uma família a 1-parâmetro de geodésicas tal que  $\sigma(0,t) = \alpha(t)$ . Então o campo de vetores  $h = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(0,t)$  é um campo de Jacobi ao longo de  $\alpha$ .

Prova: Desde que, para cada  $u$  fixo,  $t \rightarrow \sigma(u,t)$  é uma geodésica, então

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + R\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \\ &= \frac{D^2}{\partial t^2} \frac{\partial \sigma}{\partial u} + R\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} \end{aligned}$$

Quando  $u = 0$ , temos então

$$\frac{D^2}{\partial t^2} h + R(\alpha', h)\alpha' = 0$$

o que completa a demonstração.

## 8. O PROBLEMA VARIACIONAL ENVOLVENDO INTEGRAIS MÚLTIPLAS

Nós iremos apenas tratar problemas variacionais envolvendo duas variáveis independentes e uma variável dependente.

Seja  $F(x,y,z,p,q)$  uma função de classe  $C^2$  que por simplicidade, suporemos definida em todo o  $\mathbb{R}^5$ . Considere o funcional

$$(8.1) \quad I(z) = \iint_D F(x,y,z,z_x, z_y) dx dy$$

onde  $D$  é uma região fechada e limitada do  $\mathbb{R}^2$  cujo bordo  $\partial D$  é uma curva suave por partes. As funções  $z$  a serem consideradas serão inicialmente supostas serem de classe  $C^2$  em um aberto  $U$  contendo  $D$ . Nós iremos estudar o problema de minimizar o funcional (8.1) entre todas as funções  $z$  que tomam dados valores em  $\partial D$ . Posteriormente nós iremos propor o mesmo problema admitindo que as funções  $z$  sejam apenas suaves por partes em  $D$ . No caso em que as funções  $z$  são de classe  $C^2$ , o problema pode ser

tratado de forma análoga ao caso de uma variável.

Seja  $h$  uma função de classe  $C^2$  em  $U$  tal que  $h \equiv 0$  em  $\partial D$ . Então

$$z + th$$

é uma variação admissível de  $z$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . A primeira variação, calculada da forma usual, é

$$(8.2) \quad \delta I(h) = \iint_D (F_z h + F_p h_x + F_q h_y) dx dy$$

Uma variação simples mostra que:

$$(F_p h_x + F_q h_y) + h \left( \frac{\partial}{\partial x} F_p + \frac{\partial}{\partial y} F_q \right) = \frac{\partial}{\partial x} (h F_p) + \frac{\partial}{\partial y} (h F_q).$$

E pelo Teorema de Stokes temos

$$\iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h F_p) + \frac{\partial}{\partial y} (h F_q) \right] dx dy = \int_{\partial D} F_p h dy - F_q h dx = 0$$

onde na última igualdade foi usado que  $h \equiv 0$  em  $\partial D$ . Portanto, a primeira variação pode ser reescrita como:

$$(8.3) \quad \delta I(h) = \iint_D (F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q) h(x,y) dx dy$$

(8.4) LEMA - Seja  $M(x,y)$  uma função que é contínua em  $D$ .

Se a integral

$$\iint_D M(x,y) h(x,y) dx dy$$

se anula para todas as funções  $h$  de classe  $C^2$  em algum aberto  $U$  contendo  $D$ , tais que  $h = 0$  no bordo de  $D$ , então  $M = 0$  em  $D$ .

Prova: Se  $M$  é diferente de zero num ponto de  $D$ , então, por continuidade, será diferente de zero num disco

$$\Delta_\epsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \epsilon$$

contido em  $D$ . Mas, então nós sempre podemos escolher uma função  $h$  que seja zero fora deste disco, positiva dentro do disco e que seja de classe  $C^2$ . Para uma tal função teremos

$$\iint_D hM dx dy = \iint_{\Delta_\epsilon} hM dx dy > 0$$

Segue-se deste lema que, se  $z(x,y)$  é um extremo do problema variacional proposto, então  $z$  deverá ser solução da equação a derivadas parciais

$$(8.5) \quad F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q = 0$$

Esta é a equação de Euler do problema. Desenvolvendo as derivadas parciais obtemos:

(8.6)

$$(F_{pp} z_{xx} + 2F_{pq} z_{xy} + F_{qq} z_{yy}) + (F_{pz} z_x + F_{qz} z_y) + (F_{px} + F_{py} + F_{qx} + F_{qy}) = F_z$$

Esta equação é singular sempre que a forma quadrática associada a matriz

(8.7)

$$G = \begin{pmatrix} F_{pp} & F_{pq} \\ F_{qp} & F_{qq} \end{pmatrix}$$

é degenerada. Se esta forma quadrática é positiva definida a equação (8.6) é do tipo elíptico. Um caso particular importante ocorre quando  $F$  depende somente de  $p$  e  $q$ . Então a equação de Euler se reduz a

(8.8)

$$F_{pp} z_{xx} + 2F_{pq} z_{xy} + F_{qq} z_{yy} = 0$$

Este é o caso da integral de Dirichlet e do Problema de Plateau que trataremos no que se segue. No momento vamos calcular a segunda variação do funcional (8.1). Obtemos:

(8.9)

$$\delta^2 I(h) = \iint_D \{ (F_{pp} h_x h_x + 2F_{pq} h_x h_y + F_{qq} h_y h_y) + (F_{pz} h h_x + F_{qz} h h_y) + F_{zz} h^2 \} dx dy$$

Uma pequena modificação do argumento usado no caso de uma variável permite mostrar que uma condição necessária para que  $z$  seja um mínimo do problema variacional proposto, é que a forma quadrática associada a matriz (8.7) seja positiva definida. Esta é a condição de Legendre para este problema.

Se  $F$  depende somente de  $p$  e  $q$ , então  $\delta^2 I$  se reduz simplesmente a:

$$(8.10) \quad \delta^2 I(h) = \iint_D (F_{pp} h_x^2 + 2F_{pq} h_x h_y + F_{qq} h_y^2) dx dy$$

e nós temos seguinte teorema:

(8.11) TEOREMA - Suponha que  $F$  depende somente de  $p$  e  $q$  e que a matriz (8.7) é positiva definida. Se  $z$  é uma função de classe  $C^2$  que é solução da equação de Euler (8.8) e para a qual o funcional  $I(z)$  definido por (8.1) é finito, então  $z$  é um mínimo

local de  $I$  entre todas as funções de classe  $C^2$  definidas em  $D$  e com os mesmos valores no bordo.

Demonstração: Se  $z$  é uma solução da equação de Euler, então  $\delta I_z = 0$  e conseqüentemente

$$(8.12) \quad I(z+h) - I(z) = \delta^2 I_z(h) + \iint_D (r_{11} h_x^2 + 2r_{12} h_x h_y + r_{22} h_y^2) dx dy$$

onde as funções  $r_{ij}$  são contínuas em  $(x,y)$  e satisfazem a condição:

$$(8.13) \quad r_{ij} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \|h\|_1 \rightarrow 0$$

Desde que a matriz (8.7) é positiva definida, então, em cada ponto  $(x,y)$  existe um número positivo  $m(x,y)$  tal que:

$$(F_{pp} h_x^2 + 2F_{pq} h_x h_y + F_{qq} h_y^2) \geq m(x,y)(h_x^2 + h_y^2)$$

A função  $m(x,y)$  é determinada a partir de operações elementares com os coeficientes da forma quadrática e é contínua já que  $F_{pp}$ ,  $F_{pq}$  e  $F_{qq}$  o são. Desde que  $D$  é compacto,  $m(x,y)$  possui um mínimo  $m > 0$  e nós temos

$$(8.14) \quad (F_{pp} h_x^2 + 2F_{pq} h_x h_y + F_{qq} h_y^2) \geq m(h_x^2 + h_y^2)$$



Por outro lado, pela desigualdade de Schwarz, para quaisquer funções  $\lambda_1, \lambda_2$  definidas em  $D$ , temos:

(8.15)

$$\sum_{i,j} r_{ij} \lambda_i \lambda_j \leq \left( \sum_{i,j} r_{ij}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i,j} \lambda_i^2 \lambda_j^2 \right)^{1/2} \leq r(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$$

onde  $r = \sup_{(x,y)} \left( \sum_{i,j} r_{ij}^2 \right)^{1/2}$ .

Portanto nós podemos escrever

$$(8.16) \quad I(z+h) - I(z) \geq (m-r) \iint_D (h_x^2 + h_y^2) dx dy$$

É claro que existe  $\epsilon > 0$  tal que, se  $\|h\|_1 < \epsilon$  então  $r < m$ . Consequentemente  $z$  é um mínimo local do funcional  $I$  no espaço  $C^2(D)$ , das funções de classe  $C^2$  em algum aberto contendo  $D$ , com a norma  $\| \cdot \|_1$ .

A hipótese  $I(z)$  finito não é supérflua. Considere por exemplo o funcional

$$(8.17) \quad I(z) = \iint_D (z_x^2 + z_y^2) dx dy$$

isto é, a integral de Dirichlet da função  $z(x,y)$ . A equação de Euler associada será então a equação clássica de Laplace:

$$(8.18) \quad \Delta z = z_{xx} + z_{yy} = 0$$

O integrando é do tipo que estamos considerando e a matriz (8.7) é neste caso simplesmente

$$(8.19) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que é obviamente definida positiva. Seja  $D$  o disco unitário centrado na origem e  $g: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  uma dada função contínua. Vamos agora mostrar que existe uma solução do problema

$$(8.20) \quad \begin{aligned} \Delta z &= 0 \\ z|_{\partial D} &= g \end{aligned}$$

que não é uma solução do problema variacional:

$$(8.21) \quad \begin{aligned} &\text{minimizar } I(z) \\ z|_{\partial D} &= g \end{aligned}$$

Isto será feito exibindo uma solução  $z$  de (8.20) para a qual  $I(z) < \infty$ . Considere para isto a série de Fourier de  $g$  (a qual não é necessariamente convergente).

$$(8.22) \quad g \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

Para  $r < 1$ , a solução de (8.20) é dada pela série convergente,

$$(8.23) \quad z(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

a qual é equivalente à integral de Poisson

$$(8.24) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} dt$$

Seja  $D_r$  o disco de raio  $r$  em torno da origem. Então, por um cálculo fácil, nós temos que

$$\begin{aligned} I(z) &= \lim_{r \rightarrow 1} \iint_{D_r} (z_x^2 + z_y^2) dx dy = \lim_{r \rightarrow 1} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) r^{2n} = \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2). \end{aligned}$$

Portanto a integral de Dirichlet existe se e só se a série

$$(8.25) \quad \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2)$$

converge. No entanto, existem funções contínuas  $g$  para as quais esta série diverge ! Por exemplo, tome

$$(8.26) \quad g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)\theta}{n^2}$$

A função  $g$  é bem definida e contínua, desde que a convergência da série é uniforme. Como  $g$  já é dada por uma série de Fourier, temos que os únicos coeficientes não nulos são

$$b_{n!} = \frac{1}{n^2}$$

Portanto, para esta  $g$ , o problema (8.20) tem uma solução dada pela função harmônica  $z$  definida por (8.23), e, no entanto,

$$I(z) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^4}$$

diverge obviamente.

Considere agora o problema de determinar a superfície de área mínima  $z = f(x, y)$  no  $\mathbb{R}^3$  com um certo bordo prefixado. No nosso contexto ele se reduz a calcular o mínimo do funcional.

$$(8.27) \quad I(z) = \iint_D (1 + z_x^2 + z_y^2)^{1/2} dx dy$$

Neste caso  $F(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}$  e a matriz

(8.7) é:

$$(8.28) \quad G = \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+q^2 & -pq \\ -pq & 1+p^2 \end{pmatrix}$$

A equação de Euler é

$$(8.29) \quad (1+q^2)z_{xx} - 2pqz_{xy} + (1+p^2)z_{yy} = 0$$

Considerando o gráfico de  $z(x,y)$  como uma superfície e usando a notação clássica, temos:

$$(8.30) \quad \begin{aligned} E &= 1+p^2 & F &= pq & G &= 1+q^2 \\ e &= \frac{1}{W} z_{xx} & f &= \frac{1}{W} z_{xy} & g &= \frac{1}{W} z_{yy} \end{aligned}$$

onde  $W = (1+p^2+q^2)^{1/2}$ . Desde que a curvatura média de uma superfície é dada por.

$$(8.31) \quad H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}$$

então  $z$  será uma solução da equação de Euler se e só se

$$(8.32) \quad H \equiv 0$$

As superfícies que possuem esta propriedade são chamadas superfícies mínimas. O teorema (8.11) justifica de certo modo a adoção deste nome para as superfícies que satisfa-

zem (8.32).

No capítulo 3 foi possível manipular o problema variacional no caso em que as funções admissíveis eram apenas  $C^1$  por partes, com a utilização do Lema (3.11). O seguinte Teorema devido a Haar, fará o papel do Lema (3.11) no nosso contexto.

(8.33) TEOREMA de HAAR - Uma superfície  $z = z(x,y)$ ,  $C^1$  por partes é um extremo do funcional (8.1) se  $z$  é solução da equação

$$\iint_B F_u \, dx \, dy = \int_{\partial B} (F_p \, dy - F_q \, dx)$$

onde  $B$  é qualquer subdomínio de  $D$  limitado por curvas suaves por parte, orientadas no sentido positivo.

Prova: Para provar este lema é suficiente demonstrar que a igualdade entre as integrais acima vale para retângulos

$$B = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \quad ; \quad c \leq y \leq d\},$$

contidos em  $D$ . Ela é então imediatamente válida para regiões que são uniões finitas de retângulos, isto é, polígonos. O caso geral é demonstrado por passagem ao limite

de uma seqüência de polígonos cujos bordos convergem uniformemente para  $\partial B$ . Se  $z(x,y)$  é um extremo do funcional (8.1) então

$$\iint_D (F_z h + F_p h_x + F_q h_y) dx dy = 0$$

para todas as funções  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$  que são  $C^1$  por partes e se anulam em  $\partial D$ . Em particular para aquelas que se anulam fora de  $B$  e que são diferentes de zero apenas dentro de  $B$ . Nós podemos restringir ainda mais a classe de funções  $h$  escolhendo apenas aquelas da forma  $h(x,y) = \phi(x) \psi(y)$ , onde

$$\phi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \psi: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$$

são funções de classe  $C^1$  que se anulam nas extremidades dos intervalos onde estão definidas. Portanto obtemos:

$$\int_c^d \int_a^b (F_z \phi \psi + F_p \phi' \psi + F_q \phi \psi') dx dy = 0$$

Definamos

$$A(x,y) = \int_c^y F_p dy \quad , \quad B(x,y) = \int_a^x F_q dx$$

$$C(x,y) = \int_a^x \int_c^y F_z dx dy$$

Procedendo a integração por partes, e usando as condições de contorno obtemos:

$$\int_c^d \int_a^b (-C_y \phi' \psi + A_y \phi' \psi - B \phi' \psi') dx dy = 0$$

ou seja:

$$\int_a^b dx \phi' \left\{ \int_c^d (-C_y \psi + A_y \psi - B \psi') dy \right\} = 0$$

Usando então o Lema (3.11) segue-se que

$$\int_c^d (-C_y \psi + A_y \psi - B \psi') dy = C_1$$

onde  $C_1$  é independente de  $x$ . Nova integração por partes transforma esta equação em

$$\int_c^d (C - A - B) \psi' dy = C_1$$

Seja  $T(x,y) = (C(x,y) - A(x,y) - B(x,y))$ . Desde que a integral acima não depende de  $x$ , podemos escrever:

$$\int_c^d (T(x,y) - T(a,y)) \psi' dy = 0$$

Aplicando novamente o Lema (3.11), obtemos



$$T(x,y) - T(a,y) = C_2$$

onde  $C_2$  é independente do valor de  $y$ . Portanto

$$T(x,y) - T(a,y) = T(x,c) - T(a,c)$$

Desde que  $T(a,c)$  é obviamente zero, então

$$T(x,y) = T(a,y) + T(x,c)$$

Tomando  $x = b$ ,  $y = d$  esta equação é exatamente

$$(8.34) \quad \int_c^d \int_a^b F_z \, dx \, dy = \int_{\partial B} F_p \, dy - F_q \, dx$$

o que completa nossa demonstração.

Analogamente, ao caso de uma variável este resultado será suficiente, em algumas situações, para garantir que a solução de um dado problema variacional é suave. Por exemplo, se  $F$  não depende de  $z$  explicitamente o lema de Haar nos diz que

$$\int_{\partial B} F_p \, dy - F_q \, dx = 0$$

para toda curva de Jordan suave por partes, ou seja,

$$F_p \, dy - F_q \, dx$$

é uma diferencial exata. Então existe uma função  $G(x,y)$  definida em  $D$  tal que

$$dG = F_p dy - F_q dx$$

Neste caso, portanto, a equação de Euler pode ser substituída pelo sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$(8.35) \quad G_x = -F_{z_y} \quad G_y = F_{z_x}$$

Por exemplo considere o problema de Dirichlet. Neste caso o sistema acima é simplesmente

$$(8.36) \quad G_x = -z_y \quad G_y = z_x$$

Portanto  $G + iz$  que é uma função  $C^1$  por partes, satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em todo ponto onde é diferenciável. Logo  $G + iz$  é analítica e  $z$  é analítica real.

Considere agora o problema de determinar um mínimo  $z = z(x,y)$  para a área

$$(8.37) \quad \iint_D (1 + p^2 + q^2)^{1/2} dx dy$$

entre todas as funções  $C^1$  por partes, em  $D$ , que tem o

mesmo valor em  $\partial D$ .

Suponha que  $D$  é uma região de Jordan. Seja  $z(x,y)$  um extremo deste problema variacional. A equação de Haar se reduz neste caso a

$$(8.38) \quad G_x = -\frac{q}{W}, \quad G_y = \frac{p}{W} \quad \text{onde} \quad W = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}$$

em outras palavras, a expressão

$$(8.39) \quad \frac{1}{W} (pdy - qdx)$$

é uma diferencial exata. Infelizmente nem (8.38) nem (8.39) nos dão um critério imediato para verificar a diferenciabilidade de  $z$ . No entanto, nós podemos com algum trabalho extra e mais o lema de Haar, provar o seguinte teorema.

(8.40) TEOREMA - Seja  $z(x,y)$  uma solução de classe  $C^1$  por partes em  $D$  do problema de minimizar a área entre todas as funções  $C^1$  por parte que têm o mesmo valor em  $\partial D$ . Então  $z$  é analítica real e seu gráfico é uma superfície mínima.

Prova: Nós iremos usar o método de variação das variáveis independentes. Vamos considerar o problema geral

$$(8.41) \quad \text{minimizar } \iint_D F(p,q) \, dx \, dy$$

Seja  $z(x,y)$  um extremo para este problema assumindo os valores prescritos em  $\partial D$ . Seja  $r(x,y)$  uma função de classe  $C^1$  em  $D$ , se anula em  $\partial D$  e com derivadas parciais limitadas em  $D$ . Defina uma mudança de parâmetro por

$$x = u + tr(u,v) \quad , \quad y = v$$

Para valores de  $t$  suficientemente pequenos, esta transformação é um difeomorfismo. A função

$$z_t(u,v) = z(u + tr(u,v), v)$$

descreve então uma variação admissível ao problema. O valor de  $I(t)$  pode ser escrito então como

$$I(t) = \iint_D F\left(\frac{p}{1 + tr_u}, q - \frac{tpr_u}{1 + tr_u}\right) (1 + tr_u) \, du \, dv$$

A condição  $I'(0) = 0$  é então

$$\iint_D \{ (F - pF_p)r_u - pF_q r_v \} \, du \, dv = 0$$

e pelo Lema de Haar segue-se que

$$(8.42) \quad pF_q \, du + (F - pF_p) \, dv$$

é uma diferencial exata. Usando variações semelhantes na coordenada  $y$ , obtemos da mesma forma que

$$(8.43) \quad (F - qF_q) \, du + qF_p \, dv$$

é uma diferencial exata. Por último de (8.35) segue-se que

$$(8.44) \quad F_q \, du - F_p \, dv$$

é também uma diferencial exata. Portanto, existem três funções  $f, g$  e  $h$ ,  $C^1$  por partes, definidas em  $D$ , tais que

$$(8.45) \quad \begin{aligned} f_x &= pF_q & f_y &= F - pF_p \\ g_x &= F - qF_q & g_y &= qF_p \\ h_x &= F_q & h_y &= -F_p \end{aligned}$$

no caso em que  $F = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}$  então (8.45) se transforma em

$$(8.46) \quad \begin{aligned} f_x &= -\frac{pq}{W} & f_y &= -\frac{1+q^2}{W} \\ g_x &= \frac{1+p^2}{W} & g_y &= \frac{pq}{W} \\ h_x &= \frac{q}{W} & h_y &= -\frac{p}{W} \end{aligned}$$

Defina novos parâmetros por:

$$(8.47) \quad \alpha = x \quad \beta = f(x, y)$$

Desde que  $\beta_y = -\frac{1+q^2}{W} < 0$ , segue-se que a transformação acima é realmente uma mudança de coordenadas e leva D em um certo domínio  $\tilde{D}$  no plano  $\alpha\beta$ . Por uma computação obtemos:

$$dx = d\alpha$$

$$(8.48) \quad dy = -\frac{pq}{1+q^2} d\alpha - \frac{W}{1+q^2} d\beta$$

$$dz = \frac{p}{1+q^2} d\alpha - \frac{qW}{1+q^2} d\beta$$

$$df = d\beta$$

$$(8.49) \quad dg = \frac{W}{1+q^2} d\alpha - \frac{pq}{1+q^2} d\beta$$

$$dh = \frac{qW}{1+q^2} d\alpha + \frac{p}{1+q^2} d\beta$$

Destas fórmulas segue-se que:

$$(8.50) \quad \begin{array}{ll} x_\alpha = f_\beta & x_\beta = -f_\alpha \\ y_\alpha = g_\beta & y_\beta = -g_\alpha \\ z_\alpha = h_\beta & z_\beta = -h_\alpha \end{array}$$

portanto,  $x + if$ ,  $y + ig$ ,  $z + ih$  são funções analíticas e as 6 funções envolvidas são analíticas reais de  $(\alpha, \beta)$ . Desde que

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)} = -\frac{1+q^2}{W} \neq 0$$

segue-se do teorema da função inversa que  $\alpha$  e  $\beta$  são funções analíticas de  $x$  e  $y$ . Mas então  $z(\alpha(x, y), \beta(x, y))$  é também uma função analítica de  $x, y$ . O que conclui a demonstração do Teorema.

Na prova do teorema feita acima, nós construímos um sistema de coordenadas locais  $(\alpha, \beta)$ , para  $M: z = f(x, y)$ , para o qual valem as seguintes relações:

$$x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 = x_\beta^2 + y_\beta^2 + z_\beta^2 = \frac{1+p^2+q^2}{1+q^2} \quad (8.51)$$

$$x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta = 0$$

Isto significa que os vetores  $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$  e  $(x_\beta, y_\beta, z_\beta)$ , tangentes às curvas coordenadas, são perpendiculares e têm o mesmo comprimento em cada ponto. Ou seja, relativamente ao tal sistema de coordenadas

$$E = G = \lambda^2 \quad e \quad F = 0$$

Portanto a expressão da métrica se reduz simplesmente a

$$(8.52) \quad ds^2 = \lambda^2(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

Nós diremos que  $\alpha$  e  $\beta$  são coordenadas ou parâmetros isotérmicos sempre que a métrica de  $M$ , relativamente a este sistema de coordenadas é dada na forma (8.52).

Da demonstração do Teorema anterior, segue-se que se  $z = f(x,y)$  é uma solução do problema variacional de minimizar a área relativamente a um certo bordo, então o gráfico de  $z$  admite uma representação na forma paramétrica dada por parâmetros isotérmicos.

Nós podemos resumir os resultados obtidos até agora a respeito de superfícies mínimas no seguinte teorema:

(8.53) TEOREMA - Seja  $z = f(x,y)$ ,  $(x,y) \in D$ , uma superfície mínima. Então  $z$  é um mínimo local para área no sentido de que é uma solução do problema variacional

$$\text{minimizar } \iint_B (1 + p^2 + q^2)^{1/2} dx dy$$

entre todas as funções  $C^1$  por parte que tem o mesmo valor de  $\partial B$ . O domínio  $B$  é qualquer subdomínio de Jordan



de  $D$ . A função  $z$  é necessariamente analítica e seu gráfico admite uma representação paramétrica dada por coordenadas isotérmicas numa vizinhança de cada um de seus pontos.



BIBLIOGRAFIA

- [1] BLISS, GILBERT A. - Lectures on the Calculus of Variations, The University of Chicago Press, Chicago, 1946.
- [2] BLISS, GILBERT A. - Calculus of Variations; The Carus Mathematical Monographs, published for the M.A.A.; by the open Court Publishing Company, La Salh, Illinois, 1944.
- [3] BOLZA, OSCAR - Lectures on the Calculus of Variations New York, G.E. Stechert & Co., 1946 (Há outra edição da Dover).
- [4] CARATHÉODORY, C. - Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the first order; Holden-Day, inc., S. Francisco, 1967.
- [5] DO CARMO, MANFREDO - Elementos de Geometria Diferencial; IMPA, Coleção Elementos de Matemática, 1971.

- [6] COURANT, R. - Dirichlet's Principle; conformal mapping and minimal surfaces; Interscience Publishers, inc., N.Y., 1950.
- [7] COURANT, R. and HILBERT, D. - Methods of Mathematical Physics, vol.I, Interscience Publishers, inc., N.Y., 1953.
- [8] FORSYTH, A.R. - Calculus of Variations; Cambridge University Press, 1927.
- [9] GELFAND, I.M. and FOMIN, S.Y. - Calculus of Variations Prentice-Hall, inc. 1965.
- [10] LAWSON, H. BLAINE JR. - Lectures on Minimal Submanifolds, Monografias de Matemática nº 14, IMPA,
- [11] LIMA, ELON L. - Análise no  $\mathbb{R}^n$ ; Editora Universidade de Brasília, 1970.
- [12] MORREY, CHARLES B. Jr. - Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer-Verlag, 1966.
- [13] MORSE, MARSTON - The calculus of Variations in the Large; A.M.S. Colloquium Publications, Vol. XVIII, 1934.

- [14] OSSERMAN, ROBERT - A Survey of Minimal Surfaces; Van Nostrand Reinhold Company, N.Y., 1969.
- [15] PARS, L.A. - An Introduction to the Calculus the Variations; Heinemann, London, 1965.
- [16] RADÓ, TIBOR - On the Problem of Plateau/Subharmonic Functions, Springer-Verlag N.Y., Heidelberg, Bulin, 1971 (Reprint).
- [17] SAGAN, HANS - Introduction to the Calculus of Variations; McGraw-Hill Book Company, 1969.
- [18] STERNBERG, SHLOMO - Lectures on Differential Geometry; Prentice-Hall, inc. Englewood Cliffs, N.J., 1964.



## ERRATA

### GEOMETRIA DIFERENCIAL E CÁLCULO DAS VARIAÇÕES

João Lucas Barbosa

Substitua a Prova do Teorema 4.27 pela que se segue.

Prova: Suponha que  $a^*$ , o primeiro ponto conjugado ao ponto  $a$ , pertença a  $(a, b]$ , e seja  $h$  uma solução não trivial da equação de Jacobi que se anula em  $a$  e  $a^*$ .

Se  $a^* = b$ , então (4.26) implica que ela pertence ao núcleo do funcional quadrático o qual não será então, positivo definido.

Se  $a^* \in (a, b)$ , vamos mostrar que existe uma função  $h_1$ , que se anula em  $a$  e  $b$ , e para a qual o funcional quadrático é negativo. Para isto nós estudaremos o problema de minimizar este funcional quadrático que será de agora em diante designado por  $J(h)$ . A observação importante é que a equação de Euler de  $J(h)$  é exatamente a equação de Jacobi (4.16). Assim, um extremo do problema variacional associado a  $J(h)$  é também um campo de Jacobi do problema variacional associado a  $I(y)$  que se anula em  $a$  e  $b$ . Considere então a função:

.2.

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} h(x) & , \text{ se } a \leq x \leq a^* \\ 0 & , \text{ se } a^* \leq x \leq b \end{cases}$$

É claro que  $\bar{h}$  é uma solução da equação de Euler (3.12) associada a  $J(h)$ . No entanto, para que  $\bar{h}$  seja um extremo de  $J$ , é necessário que  $\bar{h}$  satisfaça a condição de Weierstrass-Erdmann no ponto  $x = a^*$ . Neste caso, tal condição é que a função  $x \rightarrow 2Ph'$  seja uma função contínua de  $a$  no ponto  $a^*$ .

Desde que  $P > 0$ , isto ocorre se e só se  $h'$  é uma função contínua no ponto  $a^*$ , o que só é verdade se  $h'(a^*) = 0$ . Mas isto acarreta que  $h \equiv 0$ , contrário a hipótese de que  $h$  é não trivial. Portanto,  $\bar{h}$  não pode ser um ponto de mínimo do funcional  $J(h)$ . Segue-se que uma vizinhança de  $\bar{h}$  em  $C^1(a,b)$ , com a norma  $\| \cdot \|_1$ , existem funções  $h$  tais que  $J(h) < J(\bar{h}) = 0$ . Além disso tais funções podem ser escolhidas de modo que  $h(a) = h(b) = 0$  e  $h \in C^1(a,b)$ .