

4 - 4 - BØLGER

Bølgelikningen er en matematisk beskrivelse av en vibrerende streng, eller en stående luftbølge i en orgelpipe eller membranen i et trommeskinn eller en vibrerende spretball eller elektromagnetiske bølger i tomt rom eller bølger på havet eller lydbølger i luft eller spenningen i to parallelle strømkabler som ligger inntil hverandre.



Bølgelikningen er

$$\ddot{u}(x, t) = c^2 u''(x, t)$$



der $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ er bølgefarten dersom vi snakker om en vibrerende streng. Vi må også ha informasjon om hvordan bevegelsen blir satt igang, og hvor strengen er spent opp. Derfor tar vi med

randkrav: $u(0, t) = u(L, t) = 0$

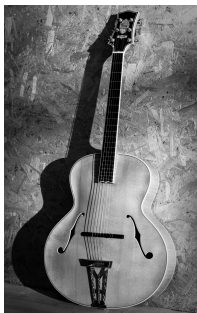
initialkrav: $u(x, 0) = f(x) \quad \dot{u}(x, 0) = g(x)$

slik at det går an å utlede at løsningen er

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(c \frac{n\pi}{L} t\right) + b_n \sin\left(c \frac{n\pi}{L} t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

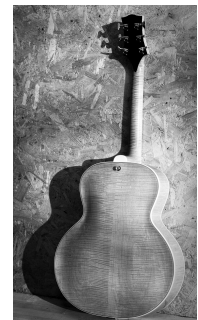
der

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad \text{og} \quad b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx.$$



- 1** Når du drar i en gitarstreng og slipper, så løser du i bunn og grunn følgende problem: Finn løsningen til bølgelikningen med $c = 1$, $L = 2$, $g(x) = 0$ og

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



- 2** Lag en animasjon av denne. Hm. Vi var vel enige om at vi lette etter deriverbare løsninger. Kommentar?

En stående trykkløse bølge inne i fløyte modelleres av den samme bølgelikningen men med randkrav

$$u'(0, t) = u'(L, t) = 0$$

istedet. Dette kalles von-Neumann-randkrav. ¹ Fløyten har lengde L , og konstanten c avhenger nå av trykket og lydhastigheten i mediet der lydbølgene produseres.

3 Kopier løsningsmetoden fra forrige problem, og vis at løsningen er

$$u(x, t) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}b_0t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(c\frac{n\pi}{L}t\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

der A er en vilkårlig konstant,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad \text{og} \quad b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Hvis man ikke ønsker å bruke bølgelikningen til å beskrive en oppspent streng, men heller bølgene fra et steinkast på et endimensjonalt og uendelig langt hav, må vi lete etter en funksjon $u : \mathbb{R} \times [0, \infty)$ som tilfredsstiller bare bølgelikningen med de vanlige initialkravene, men med ingen randkrav. I varmelikningen gjorde dette alt mye vanskeligere, men nå blir det faktisk enklere. La oss begynne med å "løse" bølgelikningen uten noen former for rand- eller initialkrav.

4 Sjekk at

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

passer i likningen

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t).$$

uansett hva ϕ og ψ er, så lenge de er to ganger kontinuerlig deriverbare.

Hva er en bølge egentlig? Oppgaven over forteller i bunn og grunn mye om det. Man kan tenke på det som en eller annen **profil** som flytter seg bortover. Oppgaven over forteller oss at bølgelikningen ikke bryr seg så mye om formen på profilen, den er fornøyd så lenge profilen sigrer bortetter med farten c , altså at løsningen kun er avhengig av $x + ct$ eller $x - ct$. Dersom du har en bestemt profil gitt av initialkrav, kan vi komme et steg videre.

5 Bruk

$$u(x, 0) = f(x)$$

og

$$u_t(x, 0) = g(x),$$

til å sette opp et 2×2 -likningssystem for ϕ og ψ . Gausseliminer og integrer og vis at

bølgelikningen på hele x -aksen, med initialkrav

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

løses av

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(t) dt.$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann

Det kalles jo vanligvis "elektromagnetiske bølger". Det er fordi bølgelikningen følger av Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

La oss se litt på det.

6 Det første som trengs er følgende identitet:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$$

Husk definisjonen av rotasjon (bruk studass Kallands regel, ellers blir det umulig), brett opp ermene, skriv ut venstresiden og nignan på den et par minutter. (Ikke regn feil, da blir det også umulig.) Det er ikke så ille som det ser ut. Det tok meg ganske nøyaktig en togtur fra Nationaltheateret til Gardermoen, og jeg regner mye feil.

7 Utled likningen

$$\ddot{\mathbf{E}} = c^2 \Delta \mathbf{E}$$

fra Maxwells lover og antagelsen om at vi er i tomt rom, altså at $\rho = 0$ og $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.
(Hint: du må derivere en av likningene med hensyn på t og sette den inn i en av de andre.)

Så vidt jeg vet var det omtrent slik Maxwell oppdaget at synlig lys er elektromagnetiske bølger. Han visste ikke i utgangspunktet at c var lyshastigheten i disse likningene, men eksperimentelle målinger gav verdier som lå påfallende nært til lyshastigheten, som første gang ble målt av Ole Rømer ved å studere rare avvik i tabellene for når Jupiters måner kommer ut av Jupiters skygge.

I populærvitenskapelige fremstillinger av elektromagnetiske bølger er \mathbf{E} - og \mathbf{B} - feltene tegnet som ortogonale på hverandre og på propagasjonsretningen. Dette gjelder ikke generelt, kun i spesialtilfellet tomt rom.

8 Anta tomt rom og vis at dersom bølgefunksjonene $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ct)}$ og $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ct)}$ skal tilfredsstille Maxwells likninger, må de konstante vektorene \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 og \mathbf{k} være innbyrdes ortogonale.

Dette bruker man når man regner på bølgeledere. Det er en hul kanal med en bestemt geometri slik at elektromagnetiske bølger reflekteres i kanalveggen på en stilig måte slik at du kan sende elektromagnetiske signaler uten særlig energitap.

9] Vis at laplaceoperatoren blir

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

i polarkoordinater.

Opgaven over er praktisk om man ønsker å analysere en sirkulær tromme. Bølgelikningen i polarkoordinater blir (vi dropper den kvadratiske trommen)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

10] Separer variable $u = x(t)y(r)z(\theta)$ og utled likningene

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \lambda x &= 0 \\ z'' + \gamma z &= 0 \\ y'' + \frac{1}{r} y' + \left(\lambda - \frac{\gamma}{r^2} \right) y &= 0 \end{aligned}$$

11] Det sier seg selv at vinkeldelen z må være 2π -periodisk. Bruk dette til å utlede at $\gamma = n^2$ der $n \in \mathbb{N}$, og at

$$z(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

Den siste likningen kan etter variabelskiftet $\rho = \sqrt{\lambda}r$ skrives

$$y'' + \frac{1}{\rho} y' + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) y = 0.$$

Å løse denne er for å sitere min svigerfar "en helvetes prosedyre", og løsningene kalles **besselfunksjonene**.²

12] Det finnes ikke noe lukket uttrykk for besselfunksjonene, men du kan anta at de har taylorutvikling, sette inn i likningen og herje i vei. Prøv.

Når man skal overføre elektrisk energi med høy frekvens er det upraktisk å bruke ledninger, for man søler den elektriske energien ut i rommet og så lager du returstrømmer og fandens oldemor. I ubåt må for eksempel alle elektriske ledninger tvinnes. Derfor er det vanlig å overføre elektrisk energi på høy frekvens gjennom **bølgeledere**:

https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_24.html

Dette er bare en hul kanal med stående elektriske bølger, og dersom kanalen er sirkulær, dukker besselfunksjonene i analysen. Du kan faktisk lage en kondensator av en hul sylindere, og da dukker også besselfunksjonene opp:

https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_23.html

²https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function

UKENS NØTTER

1 Vis at bølgelikningen for sprettball

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}$$

blir

$$u_{tt} = \frac{2}{r}u_r + u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \tan \theta}u_{\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}u_{\phi\phi}$$

i kulekoordinater.

FUN FACTS

Bessel var den første som greide å bestemme avstanden til en annen stjerne i solsystemet vårt. Helmholtz var egentlig kirurg, men har gjort seriøse bidrag i både matematikk og fysikk, samt innen forståelsen av hørselssansen og synsansen vår. Hans klassiker "Sensations of tone" er verdt å lese om du er interessert i musikk. Legendre skal vi møte på senere. Den ortogonale polynomenfamilien som dukker opp i løsningen for sprettball, brukes også til å lage avanserte metoder for numerisk integrasjon.