Mõnda afiinsest geomeetriast

Selles peatükis vaatleme punktiruume ja nendega seotud teisendusi. Kogu käsitlus toimub aksiomaatiliselt.

Lähtepunktina peab olema ette antud mingi vektorruum $\mathbf{V}$.

Afiinse ruumi mõiste

Definitsioon 1. Mittetühja hulka $\mathcal{A}$ üle vektorruumi $\mathbf{V}$ nimetatakse *afiinseks ruumiks*, kui on antud kujutus

$$+\colon \mathcal{A} \times \mathbf{V} \to \mathcal{A}, \qquad (X, \vec{x}) \mapsto +(X, \vec{x}) =: X + \vec{x},$$

mis rahuldab kahte järgmist aksioomi.

1° $\forall X \in \mathcal{A}\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V} \quad X + (\vec{x} + \vec{y}) = (X + \vec{x}) + \vec{y}$.

2° $\forall X, Y \in \mathcal{A}\ \exists! \vec{x} \in \mathbf{V} \ : \ X + \vec{x} = Y$.
Võrrandi $X + \vec{x} = Y$ ainsat lahendit tähistame $\vec{x} =: \overrightarrow{XY}$.

Afiinse ruumi $\mathcal{A}$ elemente $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$ nimetatakse *punktideks*. Vektorruumi $\mathbf{V}$ nimetatakse afiinse ruumi $\mathcal{A}$ *sihiruumiks*.

Järgnevas teeme mõned lihtsad tähelepanekud afiinse ruumi definitsioonist. Need tähelepanekud tugevdavad veendumust, et afiinse ruumi üheks prototüübiks on kooligeomeetrias (ilma rangete definitsioonideta) kasutatav „punktide ruum“.

Kõigepealt paneme tähele, et afiinne ruum (erinevalt vektorruumist) on homogeenne: ükski punkt pole teistest „erilisem“ (näiteks ei ole mingit „nullpunkti“).

Lause 1. *Iga punkti $X \in \mathcal{A}$ korral võrrandil $X + \vec{x} = X$ on täpselt üks lahend $\vec{x} = \vec{0}$.*

Tõestus. Olgu fikseeritud $X \in \mathcal{A}$. Aksioomi 2° põhjal leidub täpselt üks vektor $\overrightarrow{XX}$, et $X + \overrightarrow{XX} = X$. Näitame, et $\overrightarrow{XX} = \vec{0}$.

Saame, et

$$X = X + \overrightarrow{XX} = X + (\overrightarrow{XX} + \vec{0}) = (X + \overrightarrow{XX}) + \vec{0} = X + \vec{0}.$$

Kuna vektor $\overrightarrow{XX}$ on üheselt määratud, siis $\overrightarrow{XX} = \vec{0}$. □

Lause 2. *Mistahes $X, Y \in \mathcal{A}$ korral $\overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}$.*

Tõestus. Teame, et leiduvad üheselt määratud vektorid $\overrightarrow{XY}$ ja $\overrightarrow{YX}$ omadustega $X + \overrightarrow{XY} = Y$ ning $Y + \overrightarrow{YX} = X$. Seega

$$Y + (\overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XY}) = (Y + \overrightarrow{YX}) + \overrightarrow{XY} = X + \overrightarrow{XY} = X.$$

Lahendivektori ühesuse tõttu $\overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XY} = \vec{0}$, millest $\overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}$. □

Lause 3. *Mistahes $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ korral $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.*

Tõestus. Väide järeldub võrdustest $X + (\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}) = Z$ ning $X + \overrightarrow{XZ} = Z$ ning aksioomist 2°. □

Lause 4. *Olgu $O \in \mathcal{A}$. Mistahes punktide $X, Y \in \mathcal{A}$ ning $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral kehtib samaväärsus*

$$X + \vec{x} = Y \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OX} + \vec{x} = \overrightarrow{OY}.$$

Tõestus. Kui $X + \vec{x} = Y$, siis $\vec{x} = \overrightarrow{XY}$ ning väide järeldub lausest 3.

Kehtigu $\overrightarrow{OX} + \vec{x} = \overrightarrow{OY}$, siis $\vec{x} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$, millest lause 2 tõttu $\vec{x} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{XO} = \overrightarrow{XY}$. Seega $X + \vec{x} = Y$. □

Lause 5. *Hulkade $\mathcal{A}$ ja $\mathbf{V}$ vahel on üksühene vastavus.*

Tõestus. Peame konstrueerima bijektsiooni $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbf{V}$. Fikseerime suvaliselt punkti $O \in \mathcal{A}$. Tähistame $\varphi(X) = \overrightarrow{OX}$. Veendume, et φ on injektiivne ja sürjektiivne.

Kehtigu $\varphi(X) = \varphi(Y)$, siis $\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = \vec{0}$, millest lause 2 tõttu $\overrightarrow{XY} = \vec{0}$. Seega $X = X + \vec{0} = X + \overrightarrow{XY} = Y$. Niisiis φ on injektiivne.

Mistahes vektori $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral $\varphi(O + \vec{x}) = \vec{x}$. Niisiis φ on sürjektiivne. □

Lause 5 näitab, et $\mathcal{A} = \{O + \vec{x} \colon \vec{x} \in V\}$.

Definitsioon 2. Afiinse ruumi *mõõtmeks* nimetatakse tema sihiruumi mõõdet: $\dim \mathcal{A} = \dim \mathbf{V}$.

Kui tahame rõhutada, et $\dim \mathcal{A} = n$, siis tähistame $\mathcal{A}^n := \mathcal{A}$.

Definitsioon 3. Afiinse ruumi $\mathcal{A}^n$ *reeperiks* nimetame hulka $\{O; \vec{e}_i\}$, mis koosneb punktist $O \in \mathcal{A}$ ning $\mathcal{A}^n$ sihiruumi mingist baasist $\{\vec{e}_i\}$.

Definitsioon 4. Punkti $X \in \mathcal{A}^n$ *kohavektoriks* reeperi $\{O; \vec{e_i}\}$ korral nimetatakse vektorit $\overrightarrow{OX}$. Punkti $X \in \mathcal{A}^n$ *koordinaatideks* reeperi $\{O; \vec{e_i}\}$ korral nimetatakse tema kohavektori koordinaate baasil $\{\vec{e_i}\}$.

Olukorras $\overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}$ kirjutame $X(x_1, \dots, x_n)$ või lühemalt $X(x_i)$. Punkti koordinaadid määratakse üheselt, sest kohavektor ja vektori koordinaadid baasil määratakse üheselt.

Paneme tähele, et afiinses ruumis endas pole mingit (algebralist) struktuuri. (Ainus tehe on punktile vektori liitmine). Koolis ei lubata punkti koordinaate kirjutada kujul $X = (x_1, x_2)$, kasutatakse ainult varianti $X(x_1, x_2)$. Seda motiveerib soov hoida „punktide ruum“ (ehk afiinne ruum) lahus „vektorite ruumist“ (afiinse ruumi sihiruumist). Samuti võib kirjutisest $X = (x_1, x_2)$ jääda mulje, et punktid ning vektorid on kuidagi samastatavad, see omakorda viib aga (ekslikule) mõttele, et vektorite ruumist (näiteks $\mathbb{R}^2$, üldisemalt $\mathbb{R}^n$) võiks liitmise ja arvuga korrutamise tehted (ehk algebralise struktuuri) üle tuua ka punktide ruumi.

Üleminekul reeperilt $\{O; \vec{e_i}\}$ reeperile $\{O'; \vec{e_i}\,'\}$ toimub teisendamine järgmiselt. Tähistatakse

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OO'} &= c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 \dots + c_n\vec{e}_n, \\
\vec{e}_1\,' &= c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \dots + c_{n1}\vec{e}_n, \\
\dots & \\
\vec{e}_n\,' &= c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \dots + c_{nn}\vec{e}_n, \\
\overline{C} &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & c_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Kirjutame $\{O; \vec{e_i}\} \xrightarrow{\overline{C}} \{O'; \vec{e_i}\,'\}$, kui reeperiteisendusmaatriks üleminekuks reeperilt $\{O; \vec{e_i}\}$ reeperile $\{O'; \vec{e_i}\,'\}$ on $\overline{C}$.

Lause 6. *Olgu* $\{O; \vec{e_i}\} \xrightarrow{\overline{C}} \{O; \vec{e_i}\}$. *Siis* $\overline{C} = E_{n+1}$, *kus* E_{n+1} *on* $(n+1)$*-järku ühikmaatriks.*

Tõestus. Lause 1 põhjal

$$\vec{0} = \overrightarrow{OO} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{e_i},$$

millest vektorsüsteemi $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ lin-sõltumatuse tõttu $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Kuna $e_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} e_j$, $i = 1, \ldots, n$, siis jälle vektorsüsteemi $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ lin-sõltumatuse tõttu $c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } i = j, \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$ (Kirjutatakse ka $c_{ij} = \delta_{ij}$ ja nimetatakse *Kroneckeri delta.*) $\square$

Lause 7. *Olgu* $\{O; \vec{e}_i\} \xrightarrow{\overline{A}} \{O'; \vec{e}_i\,'\}$, $\{O'; \vec{e}_i\,'\} \xrightarrow{\overline{B}} \{O''; \vec{e}_i\,''\}$ *ning* $\{O; \vec{e}_i\} \xrightarrow{\overline{C}} \{O''; \vec{e}_i\,''\}$. *Siis* $\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}$.

Tõestus. Kõigepealt paneme tähele, et nii $\overline{C}$ kui ka $\overline{A}\,\overline{B}$ viimane rida on $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Edasi saame, et

$$\overrightarrow{OO''} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{e}_i,$$

teisalt aga

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OO''} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'O''} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \vec{e}_j\,' = \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_i \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j a_{ij} \right) e_i.
\end{aligned}$$

Vektorsüsteemi $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ lin-sõltumatuse tõttu

$$c_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Paneme aga tähele, et arvud $a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j a_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$, ongi maatriksi $\overline{A}\,\overline{B}$ viimase veeru esimesed n elementi.

Lõpuks, iga $i = 1, \ldots, n$ korral

$$\vec{e}_i\,'' = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} \vec{e}_j$$

ning

$$\vec{e}_i{}'' = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\vec{e}_k{}' = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}\right)e_j.$$

Vektorsüsteemi $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ lin-sõltumatuse tõttu

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Paneme aga tähele, et arvud $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$, $j = 1, \ldots, n$, ongi maatriksi $\overline{A}\,\overline{B}$ i-nda veeru esimesed n elementi. $\square$

Järeldus 8. *Olgu* $\{O; \vec{e}_i\} \xrightarrow{\overline{C}} \{O'; \vec{e}_i{}'\}$ *ning* $\{O'; \vec{e}_i{}'\} \xrightarrow{\overline{D}} \{O; \vec{e}_i\}$. *Siis* $\overline{D} = \overline{C}^{-1}$.

Tõestus. Lause 7 põhjal on kompositsioonteisenduse $\{O; \vec{e}_i\} \longrightarrow \{O; \vec{e}_i\}$ maatriksiks $\overline{C}\,\overline{D}$. Lause 6 põhjal on nüüd $\overline{C}\,\overline{D} = E_{n+1}$. Rakendades sama arutelu ka teisenduse $\{O'; \vec{e}_i{}'\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}_i{}'\}$ jaoks, saame ka võrduse $\overline{D}\,\overline{C} = E_{n+1}$. $\square$

Osutub, et afiinse ruumi $\mathcal{A}$ reeperite hulga $\mathcal{R}(\mathcal{A}^n)$ ning rühma

$$\overline{\mathsf{GL}}(n+1, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} & c_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} : c_1, \ldots, c_n, c_{11} \ldots, c_{nn} \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathsf{GL}(n+1, \mathbb{R}).$$

vahel on üksühene vastavus (isegi isomorfism).

Definitsioon 5. Fikseerime punkti $A \in \mathcal{A}$ ning sihiruumi $\mathbf{V}$ mingi m-mõõtmelise alamruumi $\mathbf{M}^m$. Afiinse ruumi $\mathcal{A}$ *m-tasandiks* nimetatakse tema alamhulka

$$A + \mathbf{M}^m := \{A + \vec{x} \colon \vec{x} \in \mathbf{M}^m\}.$$

Võttes $\vec{x} = \vec{0}$ näeme, et $A \in \mathbf{M}^m$.
Saab näidata, et mistahes $B \in A + \mathbf{M}^m$ korral $A + \mathbf{M}^m = B + \mathbf{M}^m$. (Pärast tähistamisi $A + \vec{b} = B$, kus $\vec{b} \in \mathbf{M}^m$, ja $B + (-\vec{b}) = A$, on sisalduvuste $A + \mathbf{M}^m \subset B + \mathbf{M}^m$ ja $B + \mathbf{M}^m \subset A + \mathbf{M}^m$ kontroll vahetu.)
Osutub, et afiinse ruumi $\mathcal{A}$ iga m-tasand $A + \mathbf{M}^m$ on afiinne ruum sihiruumiga $\mathbf{M}^m$. (Vahetu kontroll: tehe ruumis indutseerib tehte m-tasandil; aksioomid kehtivad, kuna nad kehtivad kogu ruumis $\mathcal{A}$.)

Definitsioon 6. Afiinse ruumi $\mathcal{A}$ alamhulka $\mathcal{B}$ nimetatakse $\mathcal{A}$ *alamruumiks*, kui $\mathcal{B}$ on m-tasand (mingi m korral). Juhul $m = n - 1$ nimetatakse alamruumi $\mathcal{B}$ *hüpertasandiks*, juhul $m = 1$ *sirgeks* ja juhul $m = 2$ *tasandiks*.

Afiinses ruumis saab anda m-tasandite (sealhulgas sirgete ja tasandite) parameetrilised võrrandid koordinaatides. Loomulikul viisil defineeritakse ka lõigu keskpunkti mõiste: lõigu AB keskpunktiks on punkt $A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Afiinsesse ruumi saab sisse tuua kahe punkti vahelise kauguse mõiste, kui eeldada, et vektorruum on eukleidiline ruum (st. tal on defineeritud skalaarkorrutamine). Sellisel juhul nimetatakse tekkivat afiinset ruumi *eukleidiliseks afiinseks ruumiks*. Kui eukleidilise afiinse ruumi reeperi baas on ristbaas, nimetatakse seda reeperit *ristreeperiks*.

Vaadeldakse ka afiinseid ruume, mille sihiruum on varustatud skalaarkorrutamise mingi analoogiga ruume (nt. pseudoeukleidiline ja sümplektiline afiinne ruum).

Afiinsed teisendused

Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{A}'$ afiinsed ruumid sihiruumidega $\mathbf{V}$ ja $\mathbf{V}'$ üle sama korpuse K.

Definitsioon 7. Kujutust $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ nimetatakse *afiinseks kujutuseks*, kui leidub selline lineaarkujutus $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$, et

$$f(X + \vec{x}) = f(X) + \varphi(\vec{x}) \qquad \forall X \in \mathcal{A}\ \forall \vec{x} \in \mathbf{V}.$$

Lineaarkujutust φ nimetatakse afiinse kujutuse f *homogeenseks osaks*. Kui $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, siis nimetatakse f *afiinseks teisenduseks*.

Näiteks $\mathbb{R}^m$ on afiinne ruum sihiruumiga $\mathbb{R}^m$. Järgnev lause kirjeldab kõik afiinsed kujutused ruumist $\mathbb{R}^m$ ruumi $\mathbb{R}$.

Lause 9. *Olgu $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Järgmised väited on samaväärsed.*

(i) *f on afiinne kujutus;*

(ii) *leiduvad arvud $a_1, \dots, a_m, b \in \mathbb{R}$ nii, et iga $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ korral*

$$f(x_1, \dots, x_m) = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + b;$$

(iii) *iga $(x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ ja $t \in [0, 1]$ korral*

$$f\left(tx_1 + (1-t)y_1, \dots, tx_m + (1-t)y_m\right) = tf(x_1, \dots, x_m) + (1-t)f(y_1, \dots, y_m).$$

Tõestus. „(i)$\Rightarrow$(ii)“ Olgu f afiinne, siis leidub lineaarkujutus $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ nii, et iga $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ korral

$$f(x_1, \dots, x_m) = f((0, \dots, 0) + (x_1, \dots, x_m)) = f(0, \dots, 0) + \varphi(x_1, \dots, x_m).$$

Tähistame $a_1 = \varphi(1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $a_m = \varphi(0, \dots, 0, 1)$, $b = f(0, \dots, 0)$. Kujutuse φ lineaarsusest järeldub nüüd vahetult, et

$$f(x_1, \dots, x_m) = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + b.$$

„(ii)$\Rightarrow$(i)“ Defineerime kujutuse $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ seosega $\varphi(x_1, \dots, x_m) = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m$. Siis iga $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ (afiinne ruum) ja $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ (tema sihiruum) korral

$$\begin{aligned} f((x_1, \dots, x_m) + (y_1, \dots, y_m)) &= f(x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m) = \\ &= a_1(x_1 + y_1) + \ldots + a_m(x_m + y_m) + b = \\ &= (a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + b) + (a_1y_1 + \ldots + a_my_m) = \\ &= f(x_1, \dots, x_m) + \varphi(y_1, \dots, y_m), \end{aligned}$$

mis tähendab, et f on afiinne.

„(ii)⇒(iii)“ Vahetu kontroll. Kasutada tuleb ka, et $b = tb + (1-t)b$. (Ise!)

„(iii)⇒(ii)“ Defineerime $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ seosega

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_m) - f(0, \ldots, 0), \qquad (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Näitame, et φ on lineaarne.

Vahetu kontroll näitab, et $\varphi(0, \ldots, 0) = 0$. Näitame, et kujutusel φ on samasugune kumeruse-nõgususe omadus nagu funktsioonil f. Olgu $(x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ ning $t \in [0,1]$, siis

$$\begin{aligned}
\varphi\left(tx_1 + (1-t)y_1, \ldots, tx_m + (1-t)y_m\right) &= f\left(tx_1 + (1-t)y_1, \ldots, tx_m + (1-t)y_m\right) - \\
&\qquad - f(0, \ldots, 0) = \\
&= t\left(f(x_1, \ldots, x_m) - f(0, \ldots, 0)\right) + \\
&\qquad + (1-t)\left(f(y_1, \ldots, y_m) - f(0, \ldots, 0)\right) = \\
&= t\varphi(x_1, \ldots, x_m) + (1-t)\varphi(y_1, \ldots, y_m).
\end{aligned}$$

Muuhulgas järeldub siit olukorras $(y_1, \ldots, y_m) = (0, \ldots, 0)$, et iga $t \in [0,1]$ korral

$$\varphi(tx_1, \ldots, tx_m) = t\varphi(x_1, \ldots, x_m) \tag{1}$$

Juhu $t > 1$ jaoks aga annab seos (1), et

$$\varphi\left(\frac{1}{t}(tx_1), \ldots, \frac{1}{t}(tx_m)\right) = \frac{1}{t}\varphi(tx_1, \ldots, tx_m).$$

Kokkuvõttes iga $t \geqslant 0$ korral

$$\varphi(tx_1, \ldots, tx_m) = t\varphi(x_1, \ldots, x_m).$$

Kujutuse φ aditiivsuse tõestame näiteks järgnevalt: olgu $(x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, siis

$$\begin{aligned}
\varphi((x_1, \ldots, x_m) + (y_1, \ldots, y_m)) &= \varphi\left(2\left(\frac{1}{2}(x_1 + y_1), \ldots, \frac{1}{2}(x_m + y_m)\right)\right) = \\
&= 2\varphi\left(\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot y_1, \ldots, \frac{1}{2} \cdot x_m + \frac{1}{2} \cdot y_m\right) = \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\varphi(x_1, \ldots, x_m) + \frac{1}{2}\varphi(y_1, \ldots, y_m)\right) = \\
&= \varphi(x_1, \ldots, x_m) + \varphi(y_1, \ldots, y_m).
\end{aligned}$$

Edasi saame, et iga $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ korral

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(0, \ldots, 0) = \varphi(x_1 + (-x_1), \ldots, x_m + (-x_m)) = \\ &= \varphi(x_1, \ldots, x_m) + \varphi(-x_1, \ldots, -x_m), \end{aligned}$$

millest

$$\varphi(-x_1, \ldots, -x_m) = -\varphi(x_1, \ldots, x_m). \tag{2}$$

Niisiis, kui $t < 0$, lubab võrdus (2) saada, et

$$\begin{aligned} \varphi(tx_1, \ldots, tx_m) &= \varphi((-t)(-x_1), \ldots, (-t)(-x_m)) = \\ &= (-t)\varphi(-x_1, \ldots, -x_m) = \\ &= (-t)(-\varphi(x_1, \ldots, x_m)) = \\ &= t\varphi(x_1, \ldots, x_m). \end{aligned}$$

Kujutuse φ lineaarsus (ehk homogeensus ja aditiivsus) on tõestatud.

Järgnevalt tuleb sisse viia tähised $a_1, \ldots, a_m, b$ ning viia tõestus lõpule täpselt nagu tegime implikatsiooni „(i)⇒(ii)“ tõestamisel. (Ise!) □

Tingimus (iii) sisuliselt tähendab, et afiinsed kujutused $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ on parajasti need, mis on korraga kumerad ja nõgusad.

Tingimus (ii) ütleb aga, et afiinsed kujutused $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ on täpselt need, mille graafik on (juhul $m = 1$) sirge (või kõrgemamõõtmelistel juhtudel tasand või hüpertasand).

Üldisemalt tähendab kujutuse afiinsus seda, et ta viib mingi ühe punkti kindlaks punktiks ja tema käitumine „ülejäänud osas“ (tegelikult kohavektoritel) on ära määratud lineaarkujutuse poolt. Teisiti öeldes, afiinse kujutuse saame lineaarkujutusest „konstandi liitmisel“. Järgnev teoreem veelgi täpsustab seda seost.

Teoreem 10. *Mistahes lineaarkujutuse $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ ning iga kahe punkti $A \in \mathcal{A}$ ja $A' \in \mathcal{A}'$ korral leidub selline* ***üheselt määratud*** *afiinne kujutus $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, mille homogeenseks osaks on φ ning mille korral $f(A) = A'$.*

Tõestus. Defineerime

$$f(X) := A' + \varphi(\overrightarrow{AX}), \qquad X \in \mathcal{A}.$$

Vahetu kontroll näitab, et $f(A) = A'$, $f(X + \vec{y}) = f((A + \overrightarrow{AX}) + \vec{y}) = f(X) + \varphi(\vec{y})$ (seega f on nõutavate omadustega) ning f on üheselt määratud: kui $\overline{f}$ on afiinne ja sama homogeense osaga, $\overline{f}(A) = A'$, siis $\overline{f}(X) = \overline{f}(A + \overrightarrow{AX}) = f(X)$. □

Definitsioon 8. Afiinse ruumi $\mathcal{A}$ punktisüsteemi $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ nimetatakse *afiinselt sõltumatuks*, kui vektorsüsteem $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m}\}$ on lineaarselt sõltumatu.

Paneme tähele, et afiinselt sõltumatus punktisüsteemis on punkte ühe võrra rohkem kui sihiruumi vastavas lineaarselt sõltumatus vektorsüsteemis.

Teoreem 11. *Olgu $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ n-mõõtmelise afiinse ruumi $\mathcal{A}^n$ afiinselt sõltumatu punktisüsteem ja $\{A'_0, A'_1, \ldots, A'_n\}$ afiinse ruumi $\mathcal{A}'$ punktisüsteem. Siis leidub üheselt määratud afiinne kujutus $f\colon \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}'$ omadusega $f(A_i) = A'_i$ iga $i = 0, 1, \ldots, n$ korral.*

Tõestus. Vektorsüsteem $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ on afiinse ruumi $\mathcal{A}^n$ sihiruumi $\mathbf{V}^n$ baas. See võimaldab defineerida kujutuse

$$\varphi(k_1\overrightarrow{A_0A_1} + \ldots + k_n\overrightarrow{A_0A_n}) = k_1\overrightarrow{A'_0A'_1} + \ldots + k_n\overrightarrow{A'_0A'_n}.$$

Vahetu kontroll näitab, et kujutus $\varphi\colon \mathbf{V}^n \to \mathbf{V}'$ on lineaarkujutus. Teoreem 10 annab meile nüüd üheselt määratud afiinse kujutuse $f\colon \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}'$ homogeense osaga φ ning omadusega $f(A_0) = A'_0$. Sealjuures

$$f(A_i) = f(A_0 + \overrightarrow{A_0A_i}) = A'_0 + \varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = A_0 + \overrightarrow{A'_0A'_i} = A'_i$$

iga $i = 1, \ldots, n$ korral. Kujutuse f ühesus tuleneb rakendatud tulemuste ühesusest. □

Teoreem 11 ütleb muuhulgas, et tasandi afiinne teisendus on määratud, kui kirjeldada, kuidas teisenevad kolm punkti, mis ei asu ühel sirgel. Ruumi afiinne teisendus on määratud, kui kirjeldada, kuidas teisenevad neli punkti, mis ei asu ühel tasandil.

Valime näiteks $O \in \mathcal{A}$ ja defineerime $f(X) = O$ iga $X \in \mathcal{A}$ korral. Siis f on afiinne teisendus, sest

$$f(X + \vec{x}) = O + \vec{0} = O + \theta(\vec{x}) = f(X) + \theta(\vec{x}), \quad X \in \mathcal{A}, \vec{x} \in \mathbf{V}$$

kus $\theta\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ on nullteisendus.

Osutub, et *rööplüke* vektori $\vec{a} \in \mathbf{V}$ võrra, mis defineeritakse seosega

$$\tau_{\vec{a}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad \tau_{\vec{a}}(X) = X + \vec{a}, \quad X \in \mathcal{A},$$

on afiinne teisendus, kusjuures tema homogeenseks osaks on $\mathbf{V}$ samasusteisendus.

Afiinset teisendust $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ nimetatakse *tsentroafiinseks*, kui leidub $O \in \mathcal{A}$ omadusega $f(O) = O$. (Punkti O nimetatakse teisenduse f püsipunktiks.)

Saab näidata, et fikseerides suvaliselt $O \in \mathcal{A}$, on iga afiinne teisendus $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ **üheselt** esituv rööplükke ja tsentroafiinse teisenduse (püsipunktiga O) kompositsioonina.

Viimane asjaolu võimaldab kirja panna punkti koordinaatide teisendamise valemid afiinse teisenduse f korral. Idee on analoogiline sellega, kuidas lineaarteisenduse rakendamisel korrutatakse teisenduse maatriks vektoriga. (Praegusel juhul tuleb veel liita vektori $\overrightarrow{Of(O)}$ koordinaadid, kus O on reeperi alguspunkt.)

Definitsioon 9. Kahte sama sihiruumiga m-tasandit $A + \mathbf{M}^m$ ja $B + \mathbf{M}^m$ nimetatakse paralleelseteks, kui $B \notin A + \mathbf{M}^m$.

Saab näidata, et kui $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ bijektiivne afiinne teisendus, siis

- iga m-tasandi $A + \mathbf{M}^m$ korral on $f(A + \mathbf{M}^m) = f(A) + \varphi(\mathbf{M}^m)$ m-tasand (vahetu kontroll, $\varphi(\mathbf{M}^m)$ on m-mõõtmeline, kuna f on bijektiivne, mis omakorda tähendab, et homogeenne osa φ on bijektiivne);
- kui m-tasandid $\mathcal{A}^m := A + \mathbf{M}^m$ ja $\mathcal{B}^m := B + \mathbf{M}^m$ on paralleelsed, siis m-tasandid $f(\mathcal{A}^m)$ ja $f(\mathcal{B}^m)$ on paralleelsed (tuleb tähele panna, et $f(B) \notin f(\mathcal{A}^m)$ – vastasel korral $f(B) = f(A) + \vec{x}\,'$ mingi $\vec{x}\,' \in \varphi(\mathbf{M}^m)$ korral, järelikult φ sürjektiivsuse tõttu $f(B) = f(A + \vec{x})$ mingi $x \in \mathbf{M}^m$ korral, mis annaks f bijektiivsuse tõttu $B \in \mathcal{A}^m$, vastuolu).

Muuhulgas bijektiivse afiinse teisenduse korral sirged kujutuvad sirgeteks, tasandid tasanditeks, sealjuures paralleelsed sirged või tasandid kujutuvad paralleelsetekst sirgeteks või tasanditeks.

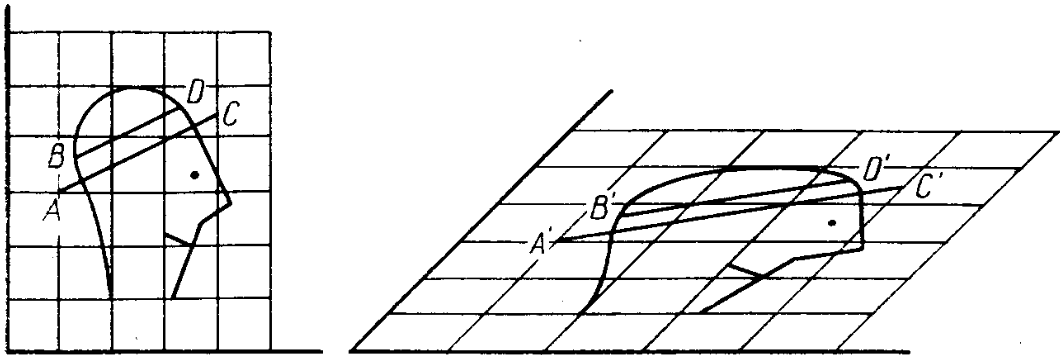
Olgu f kahemõõtmelise eukleidilise afiinse ruumi (ehk tasandi) bijektiivne afiinne teisendus. Afiinse teisenduse f korral üldiselt nurgad ja lõikude pikkused ei säili.

Saab näidata, et f korral jäävad muutumatuks ühe sirge punktide lihtsuhted[1], samadel või paralleelsetel sirgetel olevate lõikude pikkuste suhted ning rööpnelinurkade pindalade suhted. Sealjuures, kui $S(\vec{a}, \vec{b})$ on vektoritele $\vec{a}, \vec{b}$ ehitatud rööpküliku pindala, kehtib $\dfrac{S(f(\vec{a}), f(\vec{b}))}{S(\vec{a}, \vec{b})} = |\det C|$, kus C on baasiteisendusmaatriks üleminekul baasilt $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ baasile $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)$. Suurust $|\det C|$ nimetatakse bijektiivse afiinse teisenduse f *determinandiks*.

[1] Öeldakse, et ühel sirgel asuva kolme erineva punkti A, B ja C lihtsuhe on $\lambda =: (ABC)$, kui $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$.

Ruumi bijektiivse afiinse teisenduse korral on analoogilise konstandi (determinandi) rollis rööptahukate ruumalade jagatis.

Tasandi bijektiivse afiinse teisenduse käitumist iseloomustab järgmine joonis.



Saab näidata, et tasandi või ruumi (vastavalt üle $\mathbb{R}^2$ või $\mathbb{R}^3$) bijektiivne teisendus, mis kujutab iga sirge jälle sirgeks, on afiinne teisendus.

Seega bijektiivse teisenduse afiinsuse kriteerium tasandil või ruumis on *kujutada iga sirge sirgeks.*