Robuste Anpassung digitaler Bilddaten auf mehreren Auflösungsstufen

Stefan Henn[1,2], Thorsten Schormann[2],
Knut Engler[1], Karl Zilles[2] und Kristian Witsch[1]

[1] Institut für Angewandte Mathematik,
Heinrich-Heine Universität Düsseldorf, Deutschland
[2] C. und O. Vogt Institut für Hirnforschung,
Heinrich-Heine Universität Düsseldorf, Deutschland

e-mail: henn@sunserver1.rz.uni-duesseldorf.de

Zusammenfassung. In dieser Arbeit wird ein Verfahren zur elastischen Modellierung zweier Bilddatensätze auf mehreren Auflösungsstufen beschrieben. Durch die automatische Modellierung ist es möglich die verschieden frequenten Bildstrukturen auf den verschiedenen Auflösungsstufen ohne jede Vorabinformation elastisch so zu deformieren, daß eine deckungsgleiche Anpassung möglich ist. Hierfür wird auf jeder Auflösungsstufe ein von der gewählten Modellierung abhängiges Funktional sukzessiv minimiert. Dadurch entsteht eine Folge von Verschiebungsvektoren, die die Bilddatensätze elastisch ineinander überführt.

1 Einführung

Verfahren zur räumlichen Überlagerung digitaler Bilddaten sind in der medizinischen Forschung ein notwendiges Werkzeug zur Klärung von Fragestellungen zur Organisation und Variation des menschlichen Gehirns.
Das Problem eine bestmögliche Überlagerung der Bilddaten zu erreichen, führt durch das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie auf die Aufgabe das Funktional

$$J(U) = a(U,U) - 2 \cdot l(U) \quad \text{mit} \quad U \in (H_0^1(\Omega))^n \tag{1}$$

zu minimieren [3], wobei

$$J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad J : U(x_1, .., x_n) \to J(U(x_1, .., x_n))$$

die potentielle Energie einer elastischen Verschiebung beschreibt. Hierbei ist $a(U,U)$ eine Bilinearform und $l(U) = \int_\Omega (F,U)_0 \, dX$ eine Linearform (vgl. [3]) mit dem Vektor $F = \nabla T(T - R)$ der Volumenkräfte, die auf das Template T wirken. R bezeichnet hierbei das Referenzvolumen. Äquivalent zur Minimierung von (1) ist die Lösung der Variationsgleichung

$$a(U,\phi) = l(\phi) \quad \forall \phi \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Das ist die schwache Form des Systems partieller Differentialgleichungen nach Navier-Lamé:

$$\begin{aligned} \mathbf{NLE}(\mu,\lambda)U \;:=\; \mu\Delta U \;+\; (\lambda+\mu)\nabla(\nabla)U = F(U) \quad & \text{auf} \quad \Omega \\ U = 0 \qquad\qquad & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

mit den elastischen Konstanten λ und μ.
Die Minimalstelle U^* des Funktionals $J(U)$ entspricht dem Verschiebungsfeld, welches die Bilddatensätze aufeinander transformiert. Um eine maximale Volumenänderung zu erzielen, wird $\lambda = 0$ gesetzt [1], so daß nur μ zum Ausbalancieren der äußeren und inneren Kräfte verwendet wird. Hierbei verhält sich für große μ das Ausgangsvolumen wie ein starrer Körper, der kaum Deformationen zuläst. Ist anderseits μ sehr klein, so wird der Einfluß der Kräfte so groß, daß kleinste Störungen (wie z.B. Rauschen) zu unerwünschten Fehlanpassungen führen. Deshalb wird im folgenden Text die Verschiebung U neben der Abhängigkeit vom Ort $X \in I\!R^n$ auch in Abhängigkeit der Modellierungskonstante μ geschrieben $U(X) = U(X,\mu)$. Zur Bestimmung des Minimums $U^*(X,\mu)$ von J bzgl. μ wird

$$\Omega^n = \{(x_1,...,x_n) \in IR^n \quad | \quad x_1,...,x_n \in (0,1)^n\}$$

so diskretisiert, daß das Gitter Ω_h^n mit der Schrittweite $h = 1/N$ ($N =$Anzahl der Bildpunkte in einer Koordinatenrichtung) mit den Bildelementen korrespondiert. Als Restriktion des Minimierungsproblems ergibt sich $X - U(X) \in \Omega$, was bedeutet, daß die Bildelemente durch die Verschiebung $U(X)$ nicht den Bildbereich verlassen dürfen. Die Suche nach einer Minimalstelle von J beginnt nun mit der Berechnung der Suchrichtung $V_h(X,\mu)$ durch Lösen von (2). Anschließend wird an der berechneten Stelle $(V_0, J(V_0))$ wieder (2) gelöst und $U_1 = V_0 + V_1$ berechnet. Dieser Iterationsprozeß (elastische Iteration vgl. [3]) wird solange durchgeführt, bis ein geeignetes Abbruchkriterium erfüllt ist.
Die Berechnung der Näherungslösungen $\{V_{i,h}(X,\mu)\}_{i=0,...,k}$ auf Ω_h^n von (2) ist trotz effizienter numerischer Methoden (vgl. [2], [3]) sehr zeitaufwendig und sollte deshalb so selten wie möglich bestimmt werden. Eine geeignete Modellierung der Bilddaten ist hierfür notwendig.
In dieser Arbeit wird eine Vorschrift zur Modellierung der Bilddaten vorgeschlagen, die es ermöglicht auf verschiedenen Diskretisierungsstufen des Funktionals $J_h(U(X,\mu)), J_{2h}(U(X,\mu)), ..., J_{Lh}(U(X,\mu))$ (bzw. der Auflösungsstufen der Bilddaten $\Omega_h, \Omega_{2h}, ..., \Omega_{Lh}$), die jeweiligen existierenden Bildstrukturen einander robust (d.h. unabhängig gegenüber kleineren Störungen) anzupassen. Die Anzahl der Auflösungsstufen wird hierbei mit L bezeichnet.

2 Mathematische Beschreibung des Verfahrens

Um auf einer Diskretisierungsstufe $\{\Omega_{lh}\}_{l\in\{1,...,L\}}$ die existierenden Bildstrukturen anzupassen wird eine Folge von Verschiebungsvektoren $\{U_i(X,\mu)\}_{i=0,..,k}$ gesucht, die sukzessiv das Funktional J bzw. den quadratischen Abstand der

Bilddaten $D_2(U(X,\mu)) = h^2 \cdot \int_{X\in\Omega_h^n}(T(X-U)-R(X))^2 dX$ minimiert.
D.h. für $\{U_i(X,\mu)\}_{i=0,..,k}$ gilt

$$\begin{aligned} J(U_0(X,\mu)) > J(U_1(X,\mu)) > \cdots > J(U_k(X,\mu)) \quad \text{bzw.} \\ D_2(U_0(X,\mu)) > D_2(U_1(X,\mu)) > \cdots > D_2(U_k(X,\mu)), \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $U_0(X,\mu) = V_0(X,\mu)$ die erste berechnete Verschiebung ist. Ist ein $k \in I\!N$ gefunden, für das

$$J(U_k(X,\mu)) < J(U_{k+1}(X,\mu)) \quad \text{oder} \quad D_2(U_k(X,\mu)) < D_2(U_{k+1}(X,\mu))$$

gilt, so ist keine weiter Minimierung des Funktionals J bzw. des quadratischen Abstands der Bilddaten D_2 mehr möglich. Anschließend wird der Verschiebungsvektor U_k^l auf die nächst feinere Auflösung $\Omega_{(l-1)h}$ interpoliert. Dort wird der Minimierungsprozeß erneut gestartet, bis die feinste Auflösung erreicht ist. Die Modellierung der Bilddaten auf den verschiedenen Auflösungsstufen erfolgt hierbei so, daß die Verschiebung U_0^l bzgl. der Norm

$$||U||_{\infty,2} \;:=\; \max_{X\in\Omega_h^n} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i(X)^2}$$

etwa ein bis zwei Bildelemente beträgt, daß dies stets möglich ist zeigt der folgende Satz:

Satz. *Ein Bilddatensatz T mit dem Referenzsystem R kann für ein $\mu > 0$ und $\lambda = 0$ stets so modelliert werden, daß der Verschiebungsvektor $U(X,\mu)$ die Eigenschaft $||U||_{\infty,2} = c \in I\!R^{>0}$ besitzt.*

Beweis. Mit $\lambda = 0$ folgt für den Differentialoperator aus (2)

$$\mathbf{NLE}(\mu,\lambda) \stackrel{\lambda=0}{\equiv} \mathbf{NLE}(\mu,0) \stackrel{(2)}{=} \mu\Delta \,+\, \mu\nabla(\nabla) =: \mathbf{L}(\mu).$$

Da $\mathbf{L}$ linear in μ ist (d.h. $\mathbf{L}(a\cdot\mu) = \mu\cdot\mathbf{L}(a)$ für ein $a \in I\!R^{>0}$), folgt aus (2)

$$\big(\mathbf{L}(\mu)\big)(U) \;=\; \mu\cdot\big(\mathbf{L}(1)\big)(U) = F.$$

Da die Lösung U^* von Gleichung (2) eindeutig existiert, existiert auch der inverse Operator $\mathbf{L}^{-1}$ [2]. Sei nun $\mu > 0$ beliebig aber fest.
Dann gilt:

$$\mu\cdot\big(\mathbf{L}(1)\big)(U) = F \iff \mu\cdot U = \mathbf{L}(1)^{-1}F \iff U = \frac{\mathbf{L}(1)^{-1}F}{\mu} =: U(\mu) \tag{4}$$

Setze mit $c \in I\!R^{>0}$:

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu\cdot||U(\mu)||_{\infty,2}}{c}, \tag{5}$$

damit gilt:

$$||U(\tilde{\mu})||_{\infty,2} \stackrel{(4)}{=} \frac{||\mathbf{L}(1)^{-1}F||_{\infty,2}}{||\tilde{\mu}||_{\infty,2}} \stackrel{(5)}{=} \frac{||\mathbf{L}(1)^{-1}F||_{\infty,2}\cdot c}{\mu\cdot||U(\mu)||_{\infty,2}} \stackrel{(4)}{=} \frac{||\mathbf{L}(1)^{-1}F||_{\infty,2}\cdot c}{\mu\cdot\frac{||\mathbf{L}(1)^{-1}F||_{\infty,2}}{\mu}} = c.$$

□

Gemäß (5) können also auf jeder Auflösungsstufe die Bilddaten so modelliert werden, daß die Verschiebung $||U_0||_{\infty,2} = \nu \cdot h$ ist, und somit das Template T um maximal ν Bildelemente verschoben wird.

3 Ergebnisse

Anhand zweier Bilddatensätze soll die Zweckmäßigkeit der oben vorgeschlagenen Modellierung der Bilddaten verdeutlicht werden. Dazu werden die Bildaten auf drei verschiedene Arten ($c_1 = h$, $c_2 = 2h$ und $c_3 = 4h$ gemäß (5)) modelliert. In Abbildung 3 erkennt man gut, daß für c_1 und c_2 der quadratische Abstand der Bilder D_2 sowie die potentielle Energie der elastischen Verschiebung J kontinuierlich minimiert werden. Wählt man μ zu klein (bzw. c zu groß), so wird der quadratische Abstand und das Funktional zunächst käfig minimiert. Jedoch nach einigen elastischen Iterationen beginnen die Werte zu alternieren, was zur Folge hat, daß das Templatebild um das Referenzsystem alterniert. Die Anpassung ist nicht mehr robust.

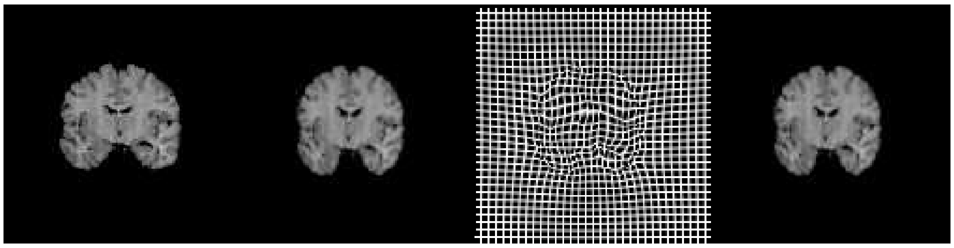

Abb. 1. Von links nach rechts: Referenz-Bild, Template-Bild, Verschiebungsfeld angewendet auf ein äquidistantes Gitter, Ergebnisbild nach 10 elastischen Iterationen wobei die Ausbangsbilder gemäß $||U_0||_{\infty,2} = h$ modelliert worden sind.

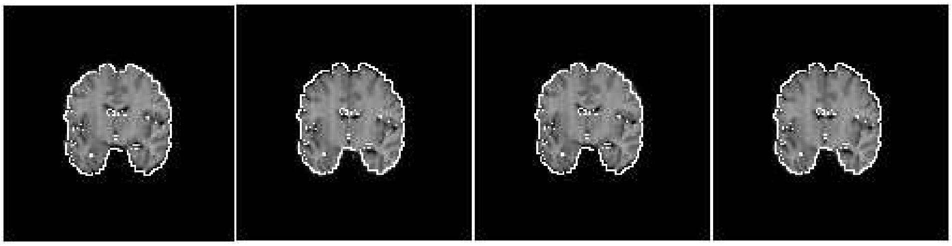

Abb. 2. Das transformierte Template nach der 7, 8, 9 und 10 -ten elastischen Iteration, wobei die Ausgangsbilder gemäß $||U_0||_{\infty,2} = 4h$ modelliert worden sind.

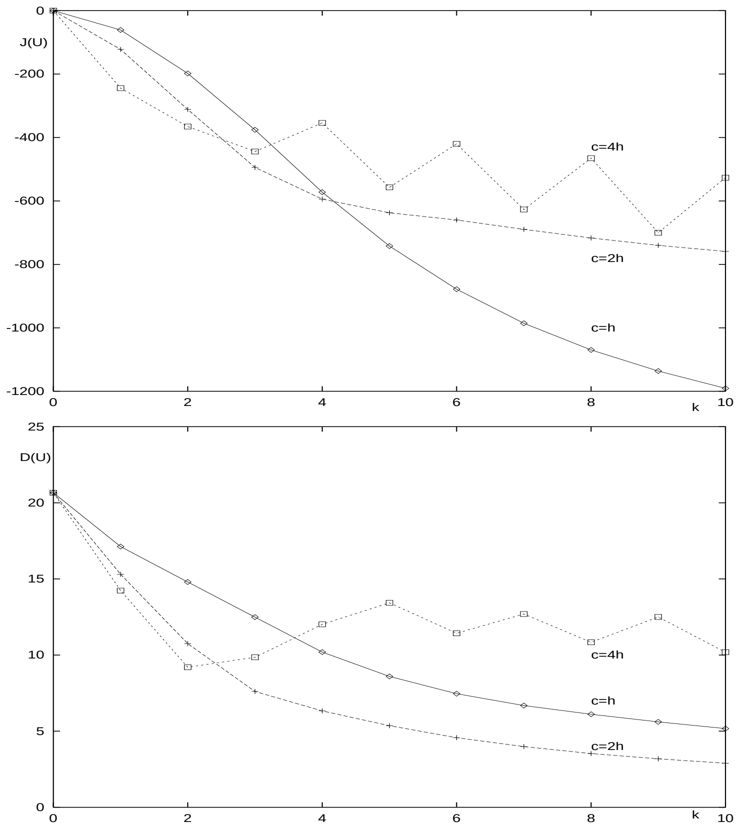

Abb. 3. Entwicklung der potentiellen Energie der elastischen Verschiebung J (oben) und des quadratischen Abstandes der Bilddaten D_2 (unten) bzgl. der elastischen Iteration für die Modellierungen c_1, c_2 und c_3.

Literatur

1. Bajcsy R. and Kovacic S. (1989): Multiresolution Elastic Matching, *Computer Vision, Graphics and Image Processing 46, 1-21.*
2. Henn S. (1997): Schnelle elastische Anpassung in der digitalen Bildverarbeitung mit Hilfe von Mehrgitterverfahren, *Diplomarbeit Heinrich-Heine Universität Düsseldorf*, http://www.hirn.uni-duesseldorf.de/~stef/
3. Henn, S., Schormann, T., Engler, K., Zilles, K., Witsch, K. (1997): Elastische Anpassung in der digitalen Bildverarbeitung auf mehreren Auflösungsstufen mit Hilfe von Mehrgitterverfahren. *Springer Series: "Informatik-Aktuell", Springer-Verlag (1997), 392-399.*
4. Schormann T., Henn S. and Zilles K. (1996): A New Approach to Fast Elastic Alignment with Applications to Human Brains. *Lecture Notes in Computer Science 1131, Springer-Verlag (1996), 437-442.*