ORGANISATION EUROPEENNE POUR LA RECHERCHE NUCLEAIRE

ISR-TH/69-10

PROBLEMES DE STABILITE DE L'ANNEAU ELECTRON-ION

par

A.G. Bonch-Osmolovsky, I.N. Ivanov, M.L. Iovnovich,

V.G. Makhan'kov, E.A. Perelstein

Genève, Mars 1969

INSTITUT UNIFIE DE RECHERCHES NUCLEAIRES, DUBNA

Rapport P9 - 4138

PROBLEMES DE STABILITE DE L'ANNEAU ELECTRON-ION

par

A.G. Bonch-Osmolovsky, I.N. Ivanov, M.L. Iovnovich,
V.G. Makhan'kov, E.A. Perelstein

Dubna, 1968

Traduit au CERN par A. Golovanoff
(Original : russe)

(CERN Trans. 69-7)

Genève
Février 1969

On étudie dans le présent travail les questions fondamentales liées à la stabilité d'un anneau électron-ion dans un champ magnétique externe. La méthode générale d'étude des systèmes semblables est connue en théorie des accélérateurs et du plasma et revient à l'étude conjointe de l'équation cinétique pour les fonctions de distribution des électrons et des ions et du système d'équation de Maxwell pour le champ électromagnétique. On trouvera les résultats d'une telle étude aussi bien dans l'approximation linéaire que non-linéaire. Comme l'étude générale de cette question est très difficile, il est bon d'examiner les différents modèles qui manifestent les traits les plus caractéristiques du système.

Dans notre cas, le système constitue un anneau d'électrons relativistes dans un champ magnétique externe, contenant un nombre relativement petit de ions animés d'un mouvement lent. Un tel anneau peut être le siège des instabilités propres aux faisceaux d'électrons dans un champ magnétique (accélérateur à courant fort) comme aux systèmes électron-ion (plasma). Etudions les instabilités du premier type. Dans un anneau d'électrons en rotation dans un champ magnétique les instabilités qui apparaissent sont liées au fractionnement longitudinal (azimutal) de l'anneau en paquets (effet de la masse "négative"). On sait /1/ que l'instabilité de ce type ne se produit pas si la demi-largeur de la dispersion énergétique des électrons ΔE satisfait la condition

$$\left(\frac{\Delta E}{E}\right)^2 > \frac{4\pi^2 \nu_g}{\gamma^2 \left[\frac{1}{1-n} - \frac{1}{\gamma^2}\right]}, \qquad (1)$$

Ici E - énergie moyenne des électrons, $\nu = \frac{N r_e}{2\pi R}$,
où N - nombre d'électrons, R - rayon de l'anneau, $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$,
n_{eff} - facteur efficace de descente du champ magnétique,
γ - rapport de l'énergie de rotation des électrons à l'énergie au repos, g - facteur géométrique dépendant des paramètres de la chambre de l'accélérateur et du paquet qui s'y trouve. L'un des effets possibles qui réduit la dispersion énergétique, nécessaire à la stabilisation de l'anneau, est le blindage du faisceau d'électrons par un écran métallique à conductibilité élevée. L'influence de l'écran a été étudiée sur l'exemple d'une couche cylindrique infiniment fine d'électrons relativistes en rotation dans un champ magnétique homogène et entourée par un écran cylindrique à conductibilité infinie /2/. En résolvant simultanément le système linéarisé d'équations hydrodynamiques et d'équations de Maxwell pour les grandeurs qui décrivent l'écart des valeurs d'équilibre, proportionnelles à $e^{in\theta - i\omega t}$, nous trouvons l'équation de dispersion sous la forme

$$p^2(p^2-1) = \epsilon f(p), \tag{2}$$

où $p = n - \frac{\omega}{\omega_0}$, ω_0 - fréquence de révolution de l'électron dans le champ magnétique, égale à $\frac{eH_0}{m c\gamma}$, $\epsilon = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}$ - petit paramètre dans notre cas, $\Omega^2 = \frac{2\pi e^2 \sigma_0}{mc^2\gamma} R\omega_0^2$,

σ_0 - densité superficielle des particules, R - rayon de la couche d'électrons. En résolvant l'équation (2) par la méthode des approximations successives, nous trouvons deux branches d'oscillation : les oscillations "longitudinales" ($p = 0$) et les oscillations "transversales" ($p = \pm 1$). Si le courant est voisin de l'écran et $\frac{b - R}{b} n \beta \ll 1$, où

b - rayon de l'écran, l'incrément de l'accroissement des oscillations "longitudinales" pour un faisceau monoénergétique est égal à $\frac{\Omega}{\omega_0} \frac{n}{\gamma} \sqrt{\frac{2(b-R)}{b}}$. Il en résulte que

le blindage réduit considérablement l'incrément et abaisse la valeur de la dispersion énergétique exigée par la stabilisation.

Briggs et Neil /2/ ont montré que dans le cas ultrarelativiste l'instabilité longitudinale ne se produit pas du tout au voisinage de la paroi lorsque la condition

$\gamma^2 > \frac{b}{b - R}$ est vérifiée.

Le calcul du facteur géométrique, compte tenu de l'écran pour un modèle de cylindre long puis sa substitution dans la formule (1), donne la valeur de la dispersion énergétique exigée pour l'élimination de l'instabilité. Avec nos paramètres (voir travail /10/) cette valeur doit être supérieure à 3 % au début du confinement de l'anneau.

L'étude de l'instabilité longitudinale compte tenu de la longueur finie du cylindre (anneau) montre que la dispersion énergétique minimale assurant la stabilité diminue sensiblement.

L'étude des oscillations transversales /3/ montre que les oscillations de fréquence $\omega = (n \pm 1)\,\omega_0$, $n > 1$ sont stabilisées par un écran conducteur.

Si l'anneau se trouve dans une cavité résonante (résonateur, guide d'onde) il apparaît une instabilité longitudinale liée aux résonances sur les modes propres de la chambre. Cette question a été examinée dans les travaux /4/. Nos investigations ont montré que pour un modèle de cylindre linéaire dans le cas résonant, lorsque les fréquences de révolution des particules sont voisines de l'une des fréquences propres de la chambre, il se produit une instabilité accompagnée d'un rayonnement synchrotronique.

L'incrément de cette instabilité est égal à :

$\mathrm{Im}\,\omega \approx \sqrt[3]{|A|}$, lorsque la dispersion énergétique est petite

(3)

et $\mathrm{Im}\,\omega = \sqrt{\dfrac{|A|}{n\,|\omega_1 - \omega_2|}}$, lorsque la dispersion est grande

$$A = -\frac{e^2 \sigma_0 n c \beta}{m b^2 R \gamma} \; \frac{J_n'^{\,2}\left(\lambda'_{np_0} \frac{R}{b}\right)}{J_n^2(\lambda'_{np_0})\left(1 - n^2/\lambda'^{\,2}_{np_0}\right)},$$

$$A = -\frac{e^2\sigma_0 ne\beta}{mb^2R\gamma}\;\frac{J'^2_n\left(\lambda'_{np_0}\frac{R}{b}\right)}{J^2_n(\lambda'_{np_0})\,(1-n^2/\lambda'^2_{np_0})}\;,$$

λ'_{np_0} - racine de la dérivée de la fonction de Bessel. Pour un anneau, les incréments correspondants diminuent un peu. Cette instabilité est caractérisée par l'absence de seuil.

Le développement ultérieur de l'instabilité de type mase négative a été étudié /5/ à l'aide des méthodes de la théorie quasi-linéaire du plasma.

La condition d'application de cette méthode est que le rapport de l'incrément initial à la dispersion quadratique moyenne initiale $\overline{\Delta\omega}_0$ soit petit. On suppose aussi que les interactions non linéaires des harmoniques des perturbations du champ électrique soient négligeables. Les autres hypothèses sont identiques à celles de la théorie linéaire de la masse négative. Alors, la fonction de distribution des électrons peut être représentée sous la forme de la somme d'une fonction de fond variant lentement, f_0 , et d'une fonction à oscillation rapide dans le temps et dans l'espace, f_1. En effectuant le calcul habituel de la moyenne, nous obtiendrons l'équation de la diffusion pour la fonction de fond. On peut tirer de cette équation l'expression de la loi de conservation de l'énergie totale du faisceau sous la forme :

$$\frac{m_1}{2}\int R(\omega-\bar{\omega})^2 f_0\, dW + \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{c^2|\bar{\epsilon}_n|^2}{n^2(\omega_0^2-\omega_n^2)g_n(\omega_n)} = \text{const}, \qquad (4)$$

où m_1 - masse efficace d'une particule décrivant une orbite cyclique, R - rayon de courbure de l'orbite, $\bar{\omega}$ - valeur moyenne de la fréquence cyclique $\omega(W)$, $\omega_0 = \frac{c}{R}$, ω_n - partie réelle de la fréquence de la n-ième harmonique du développement en série de Fourier des termes à oscillation rapide, $\bar{\varepsilon}_n$ - amplitude de la n-ième harmonique du champ électrique, g_n - fonction qui s'exprime par les fonctions propres du problème.

Comme la masse efficace des particules est négative, quand l'amplitude du champ électrique augmente avec un développement d'instabilité, la valeur du premier terme de l'expression (4) augmente, ce terme étant analogue à la température longitudinale du faisceau. Cela traduit un accroissement de la dispersion énergétique dans le faisceau, ce qui, à son tour, doit entraîner l'interruption de l'instabilité. L'énergie finale totale du champ électromagnétique est proportionnelle à la quatrième puissance de l'incrément initial. On a montré ainsi la possibilité d'arrêter dans certaines conditions l'instabilité au stade non linéaire de développement.

Abordons maintenant les instabilités provoquées par la présence d'un petit nombre d'ions dans l'anneau d'électrons, c'est-à-dire, les instabilités de plasma. Commençons par l'instabilité de faisceau bien connue, qui apparaît dans un plasma électron-ion. L'étude de l'instabilité longitudinale de faisceau dans l'approximation hydrodynamique en négligeant la dispersion thermique des vitesses des particules montre qu'une interaction efficace se produit pour les particules qui sont en résonance avec l'onde (lorsque la vitesse des phases de l'onde est voisine de la vitesse du mouvement relatif des électrons et des ions v_0). Dans le système de coordonnées lié aux électrons, nous nous trouvons dans le cas bien connu de la traversée d'un plasma dense par un faisceau ionique de faible densité. De plus, l'excitation de modes à symétrie axiale dans un faisceau cylindrique est extrêmement difficile, car les incréments sont exponentiellement petits. La diminution de l'incrément des ondes azimutales se produit, mais elle n'est pas très importante /6/. Toutefois, dans notre cas, la longueur d'onde critique, calculée pour un faisceau illimité, est égale à $\frac{v_0 \gamma_0^{3/2}}{\Omega_0}$ $\left(\gamma_0 = \left(1-\frac{v_0}{c^2}\right)^{-1/2}, \Omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_0}}\right.$ – fréquence de Langmuir , n – densité des électrons) prend la valeur $\lambda_{Kp} \approx 10^3$ cm, c'est-à-dire qu'elle surpasse considérablement le grand rayon de l'anneau. Par conséquent, avec les paramètres donnés de l'anneau, l'instabilité longitudinale de faisceaux ne peut apparaître.

L'étude de l'approximation linéaire montre la possibilité d'une instabilité apériodique hydrodynamique /7/. Le passage du faisceau de particules chargées à travers le plasma engendre des ondes électromagnétiques se propageant transversalement au faisceau et dont l'amplitude augmente dans le temps avec un incrément égal à

$$\Omega_1 \beta_0 \frac{\gamma_0}{\sqrt{2}} \quad , \qquad (5)$$

où $\Omega_i = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_i}{m_i}}$, $\beta_0 = \frac{u_0}{c}$. La valeur numérique de l'incrément atteint 10^6 sec.$^{-1}$. Toutefois, l'application des méthodes de la théorie quasilinéaire montre qu'au stade non linéaire l'instabilité disparaît /11/, et les pertes relatives d'énergie du faisceau, égales à $\frac{m_e n_i}{m_i m_e}$, s'avèrent petites. Remarquons aussi que la dispersion thermique, dont on n'a pas tenu compte dans l'approche hydrodynamique, améliore les conditions de stabilité dans l'approximation linéaire.

Examinons maintenant la question de la stabilité de l'anneau électron-ion par rapport aux déformations transversales /8/. La solution de l'équation de dispersion montre qu'il existe une zone de résonance étroite des modes instables, pour lesquels la longueur d'onde critique avec les paramètres choisis de l'anneau s'avère de nouveau grande par rapport aux dimensions de l'anneau. Etudions les oscillations de potentiel de basse fréquence dans le système d'électrons sur l'exemple d'une couche cylindrique de particules relativistes, en rotation dans un champ magnétique homogène /9/. A l'aide de l'équation cinétique linéarisée et de l'équation de Poisson nous obtiendrons l'équation différentielle du potentiel du champ électrique Ψ. Faisons quelques hypothèses simpliantes : la fréquence des oscillations est très petite par rapport à la fréquence cyclotronique des particules, la vitesse des phases des ondes est très petite par rapport à la vitesse de la lumière, la distribution des particules dans les impulsions longitudinales, c'est-à-dire le long du champ magnétique, n'est pas relativiste, la longueur d'onde longitudinale est très petite par rapport au rayon de la couche. Dans ce cas, on peut trouver le spectre des oscillations de la couche par la méthode de l'optique géométrique, et la grandeur de l'incrément à l'aide de la théorie des perturbations. Les oscillations de mode $|n| = 1$, correspondant au bruit ionique dans un plasma homogène, sont instables, l'incrément d'accroissement des oscillations est égal à

$$\mathrm{Jm}\,\omega = \sqrt{\pi}\,\frac{n_e}{n_i}\,\frac{\omega^2}{c|k_3|u_e}\;\frac{\int_0^\infty ds\, f\sqrt{1+u_{pe}^2\, s}\,\left|\frac{d\psi}{ds}\right|^2 s}{\int_0^\infty ds\, f\, s\,\left|\frac{d\psi}{ds}\right|^2}, \tag{6}$$

où k_3 - nombre d'onde longitudinale ; la fonction f décrit la distribution des particules perpendiculairement au champ magnétique, u^2_{pe}, u^2_e sont exprimés par la valeur moyenne du carré de l'impulsion respectivement longitudinale et transversale de l'électron, n - densité linéaire des particules. Une telle instabilité cinétique correspond à une instabilité de drift dans un plasma non relativiste à faible inhomogénéité. On peut montrer que pour un paquet limité le long du champ magnétique, dont la longueur est petite vis-à-vis du rapport de la vitesse thermique des particules à la fréquence de l'onde, cette instabilité n'a pas le temps de se développer. Les estimations montrent que ceci est valable dans notre cas. On a aussi examiné les différents procédés d'élimination des instabilités à leur stade de développement non linéaire. A la suite de la prise en considération de l'influence de la turbulence HF sur la stabilité du plasma dans le domaine des basses fréquences, il est apparu possible d'éliminer de nombreuses instabilités; toutefois de telles méthodes se trouvent au stade de l'étude pour l'anneau.

Ainsi, l'examen des différents modèles caractéristiques pour notre sujet permet d'exprimer l'espoir qu'au cours de la formation et de l'accélération ultérieure de l'anneau électron-ion, les instabilités n'auront pas le temps de se développer jusqu'à un niveau qui pourrait provoquer la destruction de l'anneau.

REFERENCES

1. A.A. Kolomenskij, A.N. Lebedev. Atomnaya Energiya, 7, 549 (1959)
C. Nielsen, A. Sessler, K. Symon. Proc. Int. Conf. on high Energy Accel. and Instrum., Geneva, 239 (1959).

2. I.N. Ivanov. Preprint OIYaI, p 9-3476-2, Dubna, 1967.

3. I.N. Ivanov, V.G. Makhan'kov. Preprint OIYaI, p 9-3475-2, Dubna, 1967.
R. Briggs, V. Neil. Plasma Phys., 9, N2, p. 209 (1967).

4. I.N. Ivanov. Preprint OIYaI, p 9-3474-2, Dubna, 1967 ;
R. Briggs, Symp. ERA, Lawrence Radiation Laboratory (1968).

5. E.A. Perel'shtejn. Rapport à la Conférence internationale sur les Accélérateurs. Frascati (1965), ZhTF, 37, 1177 (1967) ; Preprint OIYaI p-2648, Dubna, 1966.

6. V.G. Makhan'kov. ZhTF, 36, 1752 (1966) ; Radiofizika, 10, 455 (1967).

7. V.G. Makhan'kov, A.A. Rukhadze; Yadernyj Cintez, 2, 177 (1962).

8. G.I. Budker. Atomnaya Energiya, 5, 9 (1956).

9. M. L. Iovnovich. Preprint OIYaI, 9-3395-2, Dubna, 1967.

10. I.N. Ivanov, M.L. Iovnovich, A.B. Kuznezov, Yu.L. Obukhov, K.A. Reshetnikova, N.B. Rubin, V.P. Sarancev, O.I. Yakovoj. Problèmes du mouvement des particules dans l'adgésateur. Preprint OIYaI, p 9-4132, Dubna, 1968.

11. V.G. Makhan'kov, V.N. Cytovich, ZhTF, XXXVIII, 809 (1968).