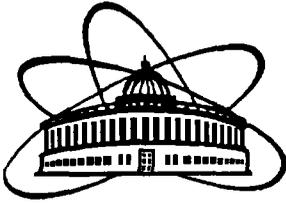




XJ02A0243

**ПИСЬМА В ЭЧАЯ**

---

**PARTICLES AND NUCLEI,  
LETTERS****3[112]-2002**

- К истории открытия Лобачевским неевклидовой геометрии**
- Компланарный разлет частиц в ядерном взаимодействии при  $E_0 > 10^{16}$  эВ, зарегистрированном в стратосфере**
- Выходы фрагментов ядра  $^{10}\text{B}$**
- Nuclear Teleportation (Proposal for an Experiment)**
- О ненаблюдаемости «склеивающих» бозонов в модельной теории поля**
- Расчет дифференциальных эффективных сечений ионизации в быстрых ионно-атомных столкновениях**
- О взаимодействии ультрахолодных нейтронов вблизи поверхности твердых тел**
- $g$  Factors as a Probe for High-Spin Structure of Neutron-Rich Dy Isotopes**
- Поиск периодичностей в экспериментальных данных методами авторегрессионной модели**

---

**Издательский отдел ОИЯИ ДУБНА**

---

**JINR Publishing Department DUBNA****. . 3 4 / 0 3**

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

*А. Н. Сисакян* — председатель  
*А. И. Малахов* — зам. председателя  
*Д. В. Ширков* — зам. председателя

Члены совета:

*А. В. Белушкин, А. Е. Дорохов* (ученый секретарь),  
*П. И. Зарубин* (ученый секретарь), *С. П. Иванова,*  
*М. Г. Иткис, В. Д. Кекелидзе, Е. А. Красавин,*  
*И. В. Пузынин, Н. А. Русакович, А. Т. Филиппов*

## EDITORIAL BOARD

*A. N. Sissakian* — Chairman  
*A. I. Malakhov* — Vice-Chairman  
*D. V. Shirkov* — Vice-Chairman

Members of the Board:

*A. V. Belushkin, A. E. Dorokhov* (Scientific Secretary),  
*P. I. Zarubin* (Scientific Secretary), *S. P. Ivanova,*  
*M. G. Itkis, V. D. Kekelidze, E. A. Krasavin, I. V. Puzynin,*  
*N. A. Russakovich, A. T. Filippov*

Объединенный институт ядерных исследований  
Joint Institute for Nuclear Research

3[112]-2002

**ПИСЬМА О ФИЗИКЕ  
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ  
И АТОМНОГО ЯДРА**

---

**PHYSICS OF PARTICLES  
AND NUCLEI, LETTERS**

Дубна 2002

В журнале «*Письма о физике элементарных частиц и атомного ядра*», кратко — «*Письма в ЭЧАЯ*», публикуются статьи, содержащие результаты оригинальных теоретических, экспериментальных, научно-технических, методических и прикладных исследований. Содержание публикуемых статей определяется тематикой научных исследований в ОИЯИ: теоретическая физика, физика элементарных частиц, релятивистская ядерная физика, физика атомного ядра и связанные вопросы общей физики, нейтронная физика, физика конденсированных сред, физика низких температур и криогенная техника, физика и техника ускорителей, методика физического эксперимента, компьютерные технологии в физике, прикладные работы по всем перечисленным разделам физики, включая радиобиологию, экологию и ядерную медицину.

Журнал зарегистрирован в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Издателем журнала является Объединенный институт ядерных исследований. Журнал выходит шесть раз в год.

The journal *PHYSICS of PARTICLES and NUCLEI, LETTERS*, brief name *PARTICLES and NUCLEI, LETTERS*, publishes the articles with results of the original theoretical, experimental, scientific-technical, methodical and applied research. Subject-matter of articles covers the principal fields of research at JINR: theoretical physics, elementary particle physics, relativistic nuclear physics, nuclear physics and related problems in other branches of physics, neutron physics, condensed matter physics, physics and technique at low temperature, physics and technique of accelerators, physical experimental instruments and methods, physical computer experiments, applied research in these branches of physics and radiology, ecology and nuclear medicine.

The journal is registered in the Ministry of the Russian Federation for Press and is published bimonthly by the Joint Institute for Nuclear Research.

References to the articles of the *PHYSICS of PARTICLES and NUCLEI, LETTERS* should contain:

- names and initials of authors,
- title of journal,
- year of publication,
- publication index,
- page number.

For example:

*Alexeev G. D.* // Part. Nucl., Lett. 2000. No. 5[102]. P. 5.

## СОДЕРЖАНИЕ CONTENTS

Н. А. Черников

**К истории открытия Лобачевским неевклидовой геометрии**

N. A. Chernikov

**On the History of Lobachevsky's Discovery of the Non-Euclidean Geomerty . . . . . 5**

А. К. Манагадзе, В. И. Оседло, В. И. Галкин, Л. А. Гончарова,  
В. В. Копенкин, К. А. Котельников, Н. Г. Полухина, И. В. Ракобольская,  
Т. М. Роганова, Л. Г. Свешникова

**Компланарный разлет частиц в ядерном взаимодействии  
при  $E_0 > 10^{16}$  эВ, зарегистрированном в стратосфере**

A. K. Managadze, V. I. Osedlo, V. I. Galkin, L. A. Goncharova, V. V. Kopenkin,  
K. A. Kotelnikov, N. G. Polukhina, I. V. Rakobolskaya, T. M. Roganova,  
L. G. Sveshnikova

**A Complanar Emission of Particles in Nuclear Interaction  
for  $E_0 > 10^{16}$  eV Detected in the Stratosphere . . . . . 19**

Ф. Г. Лепехин

**Выходы фрагментов ядра  $^{10}\text{B}$**

F. G. Lepekhin

**$^{10}\text{B}$  Nucleus Fragment Yields . . . . . 25**

В. Ф. Костенко, В. Д. Кузнецов, М. В. Миллер, А. В. Сермягин, Д. В. Каманин  
**Nuclear Teleportation (Proposal for an Experiment)**

Б. Ф. Костенко, В. Д. Кузнецов, М. Б. Миллер, А. В. Сермягин, Д. В. Каманин

**Ядерная телепортация (предложение эксперимента) . . . . . 32**

М. И. Широков

**О ненаблюдаемости «склеивающих» бозонов в модельной теории поля**

M. I. Shirokov

**Invisible «Glue» Bosons in Model Field Theory . . . . . 42**

А. К. Каминский

**Расчет дифференциальных эффективных сечений ионизации  
в быстрых ионно-атомных столкновениях**

A. K. Kaminsky

**Calculation of the Ionization Differential Effective Cross Sections  
in Fast Ion-Atom Collisions . . . . . 47**

В. А. Артемьев <b>О взаимодействии ультрахолодных нейтронов вблизи поверхности твердых тел</b> V. A. Artemiev <b>Interactions of Ultracold Neutrons near Surface of Solids . . . . .</b>	<b>56</b>
Н. Л. Ядав, М. Каушик, И. Р. Джахар, А. Анзари <b><i>g</i> Factors as a Probe for High-Spin Structure of Neutron-Rich Dy Isotopes</b> Х. Л. Ядав, М. Каушик, И. Р. Джахар, А. Анзари <b>Использование <i>g</i>-факторов для исследования структуры высокоспиновых состояний нейтроноизбыточных изотопов диспрозия . . . . .</b>	<b>66</b>
Б. З. Белашев, М. К. Сулейманов <b>Поиск периодичностей в экспериментальных данных методами авторегрессионной модели</b> B. Z. Belashev, M. K. Suleimanov <b>Search for Periodicities in Experimental Data by the Autoregressive Model Methods. . . . .</b>	<b>77</b>

УДК 514.132(091)

## К ИСТОРИИ ОТКРЫТИЯ ЛОБАЧЕВСКИМ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

*Н. А. Черников*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Показано, что открытие Лобачевского привело к созданию теории относительности и что геометрия Лобачевского вошла в физику высоких энергий в виде ее теоретического фундамента, а также и в качестве необходимого рабочего инструмента. Посвящается 210-летней годовщине со дня рождения Н. И. Лобачевского.

It has been shown that Lobachevsky's discovery leads to the creation of General Relativity theory and that the Lobachevsky geometry came into high energy physics as its theoretical fundament, as well as a necessary working tool. The review is dedicated to the 210th anniversary of Lobachevsky's birthday.

*Бессмертное имя Лобачевского стоит в одном ряду наравне с именами Архимеда и Ньютона. Его именем называется открытая им неевклидова геометрия.*

### 1. КРАТКАЯ БИОГРАФИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО (по материалам книг [1] и [2])

Творец неевклидовой геометрии Николай Иванович Лобачевский родился в Нижнем Новгороде 20 ноября (1 декабря) 1792 г. В 1802 г. был зачислен в Казанскую гимназию. В 1805 г. на базе этой гимназии был открыт Императорский Казанский университет. По окончании гимназии Лобачевский был зачислен туда студентом в феврале 1807 г.

Вся деятельность Лобачевского была связана с Казанским университетом. В 1811 г. он был произведен в магистры, через три года — в адъюнкты. В 1816 г. стал профессором. В 1827 г. был избран ректором Казанского университета. На этот пост Лобачевский избирался шесть раз и занимал его девятнадцать лет подряд.

11(23) ноября 1842 г. Лобачевский был избран по представлению Гаусса в члены-корреспонденты Геттингенского королевского общества наук. Гаусс представил кандидатуру Лобачевского к избранию за открытие неевклидовой геометрии, но не считал разумным называть эту причину.

В 1855 г. Московский университет праздновал свершившееся столетие своего существования, и в этот год советом университета единогласно был избран и министром просвещения утвержден в звании почетного члена Императорского Московского университета действительный статский советник Николай Иванович Лобачевский [2, с. 565].

Умер Н. И. Лобачевский в Казани 12(24) февраля 1856 г. Похоронен там же, на Арском кладбище.

Его могила (слава Богу!) сохранилась.

## 2. ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

7(19) февраля 1826 г. профессор Лобачевский представил в Казанский университет для напечатания за казенный счет свое первое сочинение по неевклидовой геометрии.

Через пять дней на заседании Физико-математического отделения Казанского университета Лобачевский сделал доклад об открытии им неевклидовой геометрии.

Следовательно, 12(24) февраля 1826 г. является днем рождения геометрии Лобачевского. Эта дата отмечена в следующем названии сборника [3]:

Collection des mémoires présentés  
à la Société Physico-Mathématique de Kasan  
à l'occasion de la célébration du centenaire  
de la découverte de la Géométrie Non-Euclidienne  
par N. I. Lobatcheffsky  
(12/24 Février 1826)

Извлечение из вышеуказанного доклада под названием «О началах геометрии» Лобачевский опубликовал в 1829–1830 гг. в «Казанском Вестнике, издаваемом при Императорском Казанском Университете». Теперь это сочинение опубликовано в полном собрании сочинений [4].

Задержка публикации гениального сочинения произошла из-за того, что доклад Лобачевского оказался непонятным его коллегам, что отнюдь не помешало его избранию ректором Казанского университета. Прерогатива же ректора направлять в печать работы сотрудников дала Лобачевскому возможность поступить с «Извлечением» из своего доклада по собственному усмотрению.

Чуть более длительная задержка привела бы к потере Россией приоритета великого открытия.

Своим открытием новой геометрии Лобачевский достойно отозвался на призыв Ломоносова [5] и всему миру доказал,

Что может собственных Платонов  
И быстрых разумом Невтонов  
Российская земля рождать.

## 3. О РЕАКЦИИ СОВРЕМЕННИКОВ ЛОБАЧЕВСКОГО НА ЕГО ОТКРЫТИЕ

В 1893 г. совершилось празднование Императорским Казанским Университетом столетия со дня рождения Н. И. Лобачевского. По прочтении всех адресов и телеграмм профессор Ф. М. Суворов прочел следующую речь:

*Мм. Гг. и Мм. Г-ни!*

*Уже полвека минуло с тех пор, как в аудиториях нашего Университета Н. И. Лобачевский излагал свои новые начала геометрии. Насколько ново было это учение, можно судить по тому, что ни один из слушателей его, несмотря на то, что среди них немало было людей даровитых, оставивших по себе память в науке, — ни один из них не решился выступить последователем его учения. Они боялись тех же нареканий ученого мира, с которыми безуспешно боролся Лобачевский.*

В первый раз Николай Иванович сообщил свое новое учение в 1826 году, в заседании Физико-математического отделения нашего Университета, и с тех пор неустанно старался пропагандировать его. Кроме изложения своего учения на лекциях, пред аудиторией избранных студентов, он много раз печатал свои труды.

Я опасаясь утомить ваше внимание, М.м. Гг., перечислением всех изданных сочинений Н. И. Лобачевского по геометрии, но чтобы не обвинили его, что он недостаточно озаботился обнародованием своих новых исследований, я скажу только, что он свои исследования, разработанные с различных точек зрения, опубликовал четыре раза на русском языке, два раза на французском и один раз на немецком языке. Но несмотря на все эти старания Лобачевского познакомить с новыми исследованиями современный ему ученый мир, этот последний не принял его нового учения, и даже его труды подвергались осмеянию; по преданию, о геометрических исследованиях Лобачевского говорилось, что гора мышь родила, иначе говоря, эти исследования современниками Лобачевского считались ничтожными пред тем научным авторитетом, которым пользовался Лобачевский за его труды по другим отраслям математики.

Насмешливые критические отзывы, очевидно, были крайне обидны для великого математика, вполне понимавшего значение своих исследований, что и видно из его примечания к одной из страниц его воображаемой геометрии. Других же статей, в которых бы критик выказал понимание нового учения, при жизни Н. И. Лобачевского не появлялось, — он умер в глубоком сознании, что его учение несправедливо осмеяно, и в неизвестности, скоро ли можно ожидать справедливую оценку его трудов.

Между тем едва прошло и десять лет по смерти Лобачевского, как французский геометр Гуэль обратил внимание ученого мира, что в письмах величайшего математика XIX века Гаусса, современника Лобачевского, к Шумахеру, изданных уже по смерти Лобачевского, встречаются указания на новую теорию параллельных линий, как на весьма важную геометрическую теорию, и Гаусс рекомендует Шумахеру познакомиться с этой теорией по сочинению Лобачевского. Какое наслаждение получил бы Лобачевский, если бы Провидению угодно было продлить его жизнь еще на десять лет!

Эта небольшая заметка Гуэля о значении теории Лобачевского, подкрепленная авторитетом Гаусса, вызвала целый ряд исследований и новых открытий, далеко расширивших умственный горизонт геометров [6, с. 81].

Письма Гаусса, относящиеся к неевклидовой геометрии, в переводе на русский язык первым опубликовал А. В. Летников в своем замечательном сообщении [7].

#### 4. ПРИЗНАНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

**Первый в России акт признания геометрии Лобачевского.**

**Сообщение профессора А. В. Летникова**

**«О теории параллельных линий Н. И. Лобачевского»**

Известно, что стремления разных авторов доказать *a priori* XI аксиому Евклида или так называемый евклидов постулат породили целую литературу *quasi*-математических исследований, имеющих предметом установить теорию параллельных линий на строго геометрических началах. Большая часть размышлений, представленных авторами, оказались вполне несостоятельными. Другие ученые, прибегая к посторонним соображениям

аналитического свойства, решали вопрос совсем не в том виде, в котором желательно было видеть его решение, и таким образом не достигали главной цели усовершенствования начал евклидовой геометрии.

Хотя, с одной стороны, вопрос о параллельных линиях, вследствие своей простоты и доступности, вызывал часто ученические труды, зато с другой, по своему глубоко философскому интересу, он привлекал к себе и первостепенных математиков, как напр. Бертрана (из Женевы), Лежандра и В. Я. Буняковского. Труды первых двух геометров имеют теперь больше историческое значение, так как представленные ими соображения держались некоторое время в учебниках и еще до сих пор можно встретить преподавателей геометрии, дающих так называемую «Бертранову теорему» вместо аксиомы Евклида. Академик Буняковский в одном из своих мемуаров о параллельных линиях<sup>1</sup> представил ряд замечаний, обнаруживающих недостаточность доказательств, данных Бертраном и Лежандром. После того, в нескольких мемуарах и в особом замечательном сочинении о параллельных линиях<sup>2</sup> тот же геометр изложил подробно и проследил критически постепенное развитие и современное состояние этой основной теории геометрии. Наконец, в названном выше сочинении и в других статьях г. Буняковский предложил и собственные исследования по этому важному и вместе любопытному вопросу.

В настоящей статье мы хотели бы обратить внимание наших читателей на весьма замечательные, но мало известные труды о том же предмете другого нашего соотечественника, бывшего профессора Казанского университета Н. И. Лобачевского. Этот ученый, — математические исследования которого начинают цениться по достоинству в западной Европе, — один из всех геометров, писавших о теории параллельных линий, становится при развитии ее начал на в высшей степени оригинальную точку зрения. Из некоторых мест переписки Гаусса с Шумахером, недавно изданной г. Петерсом, видно, что знаменитый германский геометр еще с 1792 года, в течение с лишком пятидесяти лет, возвращался от времени до времени к размышлениям о теории параллельных линий и, что еще замечательнее, Гаусс относился к этому вопросу именно с той самой точки зрения, на которой остановился Лобачевский.

Судьба исследований профессора Лобачевского довольно поучительна для нас, русских. Его первый опыт о началах геометрии появился еще в 1829 году в Казанском Вестнике; потом, в ученых записках Казанского университета, в журнале Крелля, автор печатал целый ряд мемуаров о том же предмете, которые, по-видимому, привлекали мало внимания его соотечественников. Даже теперь, когда труды Н. И. Лобачевского получили санкцию полного одобрения со стороны одного из величайших геометров нашего времени и когда взгляды русского ученого начинают проникать в лучшие немецкие учебники<sup>3</sup>, — у нас, вероятно, найдется немного преподавателей геометрии, которые знакомы с сущностью исследований казанского профессора.

В 1840 году Лобачевский напечатал брошюру под заглавием: *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Berlin. Брошюра эта привлекла внимание Гаусса, из писем которого к Шумахеру от 1831 года, приводимых ниже, можно увидеть, что

<sup>1</sup> *Considérations sur les démonstrations principales de la théorie des parallèles*. 1843 (Mémoires de l'Acad. de St.-Petersburg, VI serie. Tome IV).

<sup>2</sup> *Параллельные линии*. 1853.

<sup>3</sup> См. Rich. Balzer. *Elemente rer Mathematik*. 2 Aufl.

великий геометр в то время уже более сорока лет имел истинные основания нового учения, которое он называл неевклидовой геометрией и которое в сущности совпадало с теорией Лобачевского, названной этим ученым воображаемой геометрией. Когда Гаусс познакомился с трудами Лобачевского, то он поступил относительно него так же, как прежде относительно Абеля и Якоби, которые достигли в теории эллиптических функций результатов, ему уже известных, но им неизданных: он отказался от принадлежности ему нового учения и ограничился тем, что выразил свое одобрение труду Лобачевского, находя только название «воображаемой геометрии» не довольно удачно выбранным.

Исследования Лобачевского о параллельных линиях отличаются от разысканий других ученых прежде всего своею целью. Автор вовсе не имеет в виду доказать а priori XI аксиому Евклида; совершенно напротив, он начинает с допущения возможности не-встречи перпендикуляра и наклонной или, что одно и то же, — предполагает, что через данную точку всегда можно провести бесчисленное множество прямых, лежащих в одной плоскости с данною прямою и ее не встречающих. Таким образом Лобачевский показывает, что не существует никакой причины утверждать а priori, что сумма углов прямолинейного треугольника не может быть менее двух прямых углов и даже утверждает, что, кроме астрономических наблюдений, мы не имеем другого средства удостовериться в справедливости вычислений обыкновенной геометрии. Такие смелые и оригинальные мысли, развиваемые строго и последовательно, в чисто геометрическом духе, — очевидно имеют право на внимание. Ученый переводчик брошюры Лобачевского г. Нойе! полагает, что, не преувеличивая философского значения этого исследования, можно сказать, что оно бросает совершенно новый свет на основные начала геометрии и открывает новый, еще не разработанный путь разысканиям, которые могут привести к неожиданным открытиям. Во всяком случае труды Лобачевского должны оказать влияние на усовершенствование методов преподавания и уничтожить несбыточную надежду доказать аксиому Евклида а priori, надежду однородную с тою, которую питают изобретатели вечного движения, квадратуры круга и проч.

Мы думаем, что читатели Математического Сборника, и в особенности гг. преподаватели геометрии, прочтут не без интереса предлагаемый здесь перевод брошюры Лобачевского.

Малоизвестность этого труда, печатавшегося по-русски в весьма растянутом виде, со многими посторонними развятиями, в издании, всегда имевшем ограниченный круг читателей, а теперь сделавшемся почти редкостью, — оправдывает появление перевода брошюры, в которой автор излагает вкратце сущность своих изысканий, не обративших, по-видимому, большого внимания нашей ученой публики во время их появления. Притом же брошюра Лобачевского в настоящее время читается на западе: недавно она переведена на французский и итальянский языки.

Мы помещаем сначала извлечение из любопытной переписки Гаусса с Шумахером о параллельных линиях, которое определяет отношение исследований Гаусса к теории Лобачевского. Вслед за письмами мы печатаем перевод упомянутого выше сочинения нашего ученого геометра.

Здесь необходимы следующие комментарии:

1) Процитированный обзор подписан сокращенно: А. Л-въ. На этом сообщении не кончается. Дальше на страницах 81–88 следует «Извлечение из переписки Гаусса к

Шумахеру». Затем на страницах 88–120 следует сочинение «Геометрические изыскания о теории параллельных линий» Н. И. Лобачевского.

2) Брошюра Буняковского «Параллельные линии» — очень редкая книга [8]. Ее вводная часть процитирована мной в обзоре [9].

В этой части Буняковский пишет:

*Перейдем к рассмотрению различных доказательств в теории параллельных линий... Приемы, о которых будем говорить, считались в свое время удовлетворительными со стороны строгости. Мы увидим, что ни один из них не может выдержать основательного разбора.*

Судя по этому сочинению, В. Я. Буняковский (в отличие от академика М. В. Остроградского) не был знаком с трудами Лобачевского. Любопытно, что вслед за сообщением Летникова [7] там же на страницах 121–122 напечатаны «Задачи, предложенные академиком В. Я. Буняковским» вниманию любителей геометрии (поступили 5 мая 1868 г.).

3) Брошюра Лобачевского «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien» издана в Берлине у G. Finke в 1840 г.

В рассматриваемом сообщении [7] дан ее отличный перевод на русский язык, однако из-за ограниченности места мы вынуждены отказать себе в удовольствии процитировать его. Альтернативный перевод опубликован в книгах [4] и [10].

4) По сходным причинам мы процитируем здесь в переводе А. В. Летникова только два отрывка из писем Гаусса. Первый — извлечение из письма Гаусса к Шумахеру (1846).

### Отзыв Гаусса о геометрии Лобачевского

*В последнее время я имел случай перечитать небольшое сочинение Лобачевского под заглавием: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Это сочинение содержит в себе основания геометрии, которая должна бы была существовать и строгое развитие которой представляло бы непрерывную цепь, если бы евклидова геометрия не была истинною. Некто Швейкарт<sup>1</sup> дал этой геометрии имя «geometrie australe», а Лобачевский — геометрии воображаемой.*

*Вы знаете, что уже пятьдесят четыре года (с 1792), как я разделяю те же убеждения, не говоря здесь о некоторых развитиях, которые получили мои идеи об этом предмете впоследствии. Следовательно, я собственно не нашел в сочинении Лобачевского ни одного нового для меня факта; но изложение весьма различно от того, какое я предполагал сделать, и автор трактует о предмете как знаток в истинно-геометрическом духе. Я считал себя обязанным обратить Ваше внимание на эту книгу, чтение которой не преминет Вам доставить живейшее удовольствие.*

*Геттинген, 28 ноября 1846 г.*

### Проективная реализация геометрии Лобачевского

А. Кэли (A. Cayley) (16.8.1821, Ричмонд — 26.1.1895, Кембридж)

В работах [11] Артур Кэли установил, что в области проективного пространства, ограниченной произвольно взятой выпуклой коникой, т. е. поверхностью второго по-

---

<sup>1</sup>Ф. К. Швейкарт (1780–1859) — профессор юриспруденции прежде в Марбурге, потом в Кенигсберге.

рядка, названной им Абсолютом, реализуется геометрия Лобачевского, причем расстояние  $s(x, y)$  между точками  $x$  и  $y$  пространства Лобачевского в этой реализации задается ангармоническим отношением.

### Гауссова планиметрия

К. Ф. Гаусс (C. F. Gauss) (30.4.1777, Брауншвейг — 23.2.1855, Геттинген)

В 1827 г. Гаусс опубликовал работу [12], в которой подспудно изложил теорию линейного элемента  $ds$ , задаваемого на двумерном многообразии квадратичной формой

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2$$

от дифференциалов  $du, dv$  в координатной карте  $u, v$ , причем предполагается, что функции  $E, G$  и  $EG - F^2$  принимают только положительные значения.

Будем называть эту теорию гауссовой планиметрией.

Производными объектами от линейного элемента  $ds$  являются элемент площади

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv$$

и скалярное поле  $K = K(u, v)$ , вычисляемое по формуле

$$4(EG - FF)^2 K = EX + FY + GZ - 2(EG - FF)(\partial_{22}E - 2\partial_{12}F + \partial_{11}G),$$

где

$$X = \partial_2 E \partial_2 G - 2\partial_1 F \partial_2 G + \partial_1 G \partial_1 G,$$

$$Y = \partial_1 E \partial_2 G - \partial_2 E \partial_1 G -$$

$$-2\partial_2 E \partial_2 F + 4\partial_1 F \partial_2 F - 2\partial_1 F \partial_1 G,$$

$$Z = \partial_1 E \partial_1 G - 2\partial_1 E \partial_2 F + \partial_2 E \partial_2 E,$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial v}, \partial_{11} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial u}, \partial_{12} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}, \partial_{22} = \frac{\partial^2}{\partial v \partial v}.$$

Скалярное поле  $K$  называется гауссовой кривизной линейного элемента  $ds$ .

Тривиальным примером гауссовой планиметрии является планиметрия Евклида. В этом случае  $K = 0$ . Нетривиальным примером является планиметрия Лобачевского. В этом случае гауссова кривизна  $K$  тоже постоянна, но отрицательна.

В этих двух примерах линейный элемент задан на простом многообразии. И в том, и в другом случае относительно любого центра можно выбрать полярные координаты  $u = r, v = \varphi$ , в которых  $ds^2 = dr^2 + p^2 d\varphi^2, d\sigma = p dr d\varphi$ , причем  $\partial_2 p = 0$ . Следовательно, длина окружности радиуса  $r$  равна  $2\pi p(r)$ , площадь круга радиуса  $r$  равна  $2\pi T(r)$ , где

$$T(r) = \int_0^r p(u) du.$$

Скалярное же поле  $K = K(r)$  вычисляется по формуле

$$Kp = -\frac{d^2 p}{dr^2}.$$

Гаусс знал, как зависит  $p$  от  $r$ , о чем свидетельствует (в переводе Летникова на русский, [7, с. 87]) извлечение из письма Гаусса к Шумахеру (1831):

*В неевклидовой геометрии полуокружность круга радиуса  $r$  имеет величину*

$$\frac{1}{2}\pi k (e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}),$$

где  $k$  есть постоянное, которое нам опыт показывает чрезвычайно большим по сравнению ко всему, что может быть нами измеряемо. В евклидовой геометрии это постоянное делается бесконечностью.

Геттинген, 12 июля 1831 г.

Следовательно, во втором примере

$$p(r) = k \sinh \frac{r}{k}, \quad T(r) = k^2 (\cosh \frac{r}{k} - 1), \quad K = -1/k^2.$$

Отклонив пятый постулат Евклида, такие же результаты получили независимо Лобачевский и Бойя. Но это письмо Гаусс написал раньше, чем познакомился с трудами Лобачевского, и раньше, чем получил работу Яноша Бойя «Аппендикс» [13] (см. [10, с. 103; 107]).

Заметим, что Лобачевский полагал  $k = 1$ . Подобно этому, в современной теоретической физике принято полагать  $c = 1$ , где  $c$  — скорость распространения света в вакууме. Ту же константу Я. Бойя обозначил через  $i$  (см. [10, с. 83]) (теперь это представляется неудобным, поскольку в современной математике буквой  $i$  принято обозначать  $\sqrt{-1}$ ).

Заметим также, что на это письмо (в переводе Гуэля на французский, Paris, Gauthier-Villars, 1866) сослался в работе [14] Бельтрами (см. [10, с. 192]).

#### **Работа Я. Бойя «Аппендикс» (1832)**

Я. Бойя (Johannis Bolyai de Bolya)

(15.1802, Марошвашархей — 27.1.1860, Коложвар)

Говоря о работе «Appendix», известный геометр А. П. Норден в статье [15] отметил, что Янош Бойя «пришел к открытию неевклидовой геометрии независимо от Гаусса и Лобачевского в конце 20-х годов прошлого (теперь уже позапрошлого. — Н. Ч.) столетия. Работа выдающегося венгерского геометра носит печать яркого своеобразия и написана в блестящем, хотя и предельно сжатом стиле» и что «открытия Лобачевского и Бойя не получили признания при их жизни» (см. [10, с. 16]). Подробнее об этом написано в книге [16].

Гаусс был высокого мнения о работе Я. Бойя, о чем свидетельствует (см. [10, с. 112]) извлечение из письма Гаусса к Герлингу (1832) — отзыв Гаусса о работе Я. Бойя:

*На днях я получил из Венгрии небольшую брошюру о неевклидовой геометрии, в которой я нахожу все мои собственные идеи и результаты, которые изложены с большим изяществом, хотя и в такой форме, которая, вследствие своей концентрации, не без труда будет воспринята всяким, кому чужд предмет. Автор — очень юный австрийский офицер, сын друга моей юности, с которым я в 1798 году часто говорил об этом*

*предмете, хотя в то время мои идеи были значительно дальше от того развития и зрелости, которое они получили в результате собственных размышлений этого молодого человека. Я считаю этого молодого геометра фон Боляи гением первой величины.*

*14 февраля 1832 года.*

### Параметр пространства Лобачевского, или постоянная Лобачевского $k$

Как мы видели, через отрицание постулата Евклида о параллельных была введена в науку фундаментальная константа. Она называется параметром пространства Лобачевского или постоянной Лобачевского и обозначается через  $k$ . Отметим, что в пространстве Лобачевского из-за наличия такого параметра нет подобных фигур. Год введения постоянной Лобачевского — 1826.

Если из начала прямолинейного луча на параллельную ему прямую опустить перпендикуляр, то угол  $\Pi$ , образованный перпендикуляром и лучом, в планиметрии Лобачевского меньше прямого угла и монотонно убывает в зависимости от высоты  $h$ , с которой опущен перпендикуляр. Лобачевский установил для зависимости  $\Pi = \Pi(p/k)$  следующую формулу:

$$\tan \frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}.$$

Зависимость  $\Pi = \Pi(x)$  угла параллельности  $\Pi$  от поделенной на константу  $k$  высоты перпендикуляра называется функцией Лобачевского.

### Постоянная Ньютона $G$

Законы движения планет, выведенные Кеплером из наблюдений Тихо Браге за движением Марса, Ньютон закодировал в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{M\vec{r}}{r^3},$$

где  $M$  — масса Солнца,  $G$  — постоянная Ньютона.

Постоянная Лобачевского  $k$  столь же высокого рода, что и фундаментальная постоянная Ньютона  $G$ .

### Постоянная Планка $\hbar$

М. Планк (M. Planck) (23.4.1858, Киль — 4.10.1947, Геттинген)

Такого же рода фундаментальную постоянную ввел в науку Макс Планк в 1900 г.

Изучив распределение энергии в спектре электромагнитного излучения абсолютно твердого тела, Планк установил следующую формулу излучения:

$$\rho = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \frac{\mu}{e^\mu - 1}, \quad \mu = \frac{\hbar\nu}{kT}.$$

Вскоре, в первые десятилетия прошлого века, постоянная Планка  $\hbar$  была положена в основу квантовой механики.

Подобно тому как приведенные выше формулы геометрии Лобачевского в пределе  $k \rightarrow \infty$  переходят в формулы

$$p(r) = r, \quad T(r) = r^2/2, \quad K = 0$$

геометрии Евклида, в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  формула излучения Планка переходит в формулу излучения Рэлея–Джинса

$$\rho = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT,$$

а формулы квантовой механики Шредингера переходят в формулы классической механики Гамильтона.

### Скорость света $c$

О. Ремер (O. Roemer) (25.9.1644, Орхус — 19.9.1710, Копенгаген)

В 1675 г., наблюдая затмения спутников Юпитера, Ремер определил скорость  $c$  распространения света между Юпитером и Землей.

В XIX в. установлена электромагнитная природа света и доказано, что скорость  $c$  есть не что иное, как скорость распространения электромагнитных волн в вакууме. Она вошла в качестве фундаментального параметра в уравнения Максвелла. Этот параметр, естественно, вошел и в вышеприведенные формулы электромагнитного излучения.

В 1923 г. А. П. Котельников установил, что в теории относительности скорость света  $c$  оказывается постоянной Лобачевского в пространстве скоростей.

### Пространство скоростей

А. П. Котельников (1862, Казань — 1944, Москва)

Расстоянием в пространстве скоростей Лобачевского служит быстрота  $s$ , с которой обычная скорость  $v$  материальной точки связана подстановкой  $v/c = \tanh(s/c)$ , введенной Бельтрами в работе [14].

Следовательно, если прямолинейный отрезок в пространстве скоростей, длина которого равна  $s$ , разделен одной из его точек на два отрезка, длины которых равны  $s_1$  и  $s_2$ , то быстрота  $s$  равна  $s = s_1 + s_2$ , а скорость  $v$  складывается по закону

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2},$$

принятому в теории относительности.

Мы можем видеть теперь, что как в ньютоновской механике, так и в теории относительности импульс частицы единичной массы покоя, движущейся с быстротой  $s$ , равен поделенной на  $2\pi$  длине окружности радиуса  $s$ , а поделенная на  $2\pi$  площадь круга, ограниченного этой окружностью, равна кинетической энергии этой частицы.

Отметим, что Абсолют Кэли в проективном пространстве скоростей, введенном Котельниковым в работе [17], (при  $c < \infty$ ) представляет собой пространство скоростей частицы с нулевой массой покоя (например, фотона). В пространстве скоростей частицы с нулевой массой покоя действует конформная геометрия, о которой см. книгу [18].

### Проективное отображение пространства Лобачевского в пространство Евклида

Э. Бельтрами (E. Beltrami) (16.11.1835, Кремона — 18.2.1900, Рим)

Работу [14] Бельтрами начал с замечательного введения:

*В последнее время математический мир стал заниматься новыми идеями, которым, по-видимому, суждено в случае, если они восторжествуют, глубоко изменить все основы*

классической геометрии. Идеи эти появились совсем недавно. Великий Гаусс постигал их с первых своих шагов на научном поприще; хотя ни в одном из его сочинений не заключается явного их изложения, но из писем его мы видим, насколько он был им предан, всегда их развивал, и мы можем удостовериться в его полном согласии с учением Лобачевского.

В этой работе Бельтрами построил отображение плоскости Лобачевского на плоскость Евклида, проектирующее прямые линии плоскости Лобачевского на евклидовы прямые. Такое отображение называется проективным.

В работе [21] Бельтрами построил проективное отображение пространства Лобачевского в пространство Евклида, при котором все плоскости пространства Лобачевского проективно отображаются на евклидовы плоскости.

### Празднование столетия неевклидовой геометрии в Казани

Как сообщил сам Котельников, статья [17] «представляет собой доклад, читанный 29 апр. 1923 г. в Москве Мат. Общ. и затем повторенный 16 сент. 1923 г. в Киеве на публичном соединенном заседании научно-исследовательских кафедр, посвященном принципу относительности, и 25 февраля 1926 г. в Казани на публичном заседании Казанского Физ.-мат. Общ. в день празднования столетия неевклидовой геометрии».

В праздновании столетия неевклидовой геометрии в Казани приняли участие ведущие математики, можно сказать, всего мира. В сборник [3] прислали статьи, посвященные геометрии Лобачевского, следующие авторы: Wilhelm Blachke (Hamburg), Elie Cartan (Paris), Friedrich Engel (Giessen), Gino Fano (Tyrin), Д. Граве (Киев), А. П. Котельников (Москва), Д. Мордухай-Болтовской (Ростов-на-Дону), Teikichi Nishiuchi (Kyoto), A. Schoenflies (Frankfurt a. M.), J. A. Schouten (Delft), Friedrich Schur (Breslau), В. Смирнов (Ленинград), П. Шпроков (Казань), E. T. Bell (Seattle), С. Бернштейн (Харьков), Maurice Frechet (Strasbourg), И. М. Гюнтер (Ленинград), J. Hadamard (Paris), A. Kopff (Berlin-Dahlem), Н. Крылов (Киев), S. Lefschetz (Princeton, New Jersey, U.S.A.), Верро Levi (Parme), W. Serpinski (Warsowie).

Несомненно, что сообщение в газетах об этом событии мирового значения не прошло мимо внимания поэта, жившего интересами страны, и откликом на это событие можно считать статью [19], отрывок из которой приводится ниже.

#### Из статьи «Как делать стихи?»

В. В. Маяковский (7(19).7.1893, Багдади — 14.4.1930, Москва)

*Математик — это человек, который создает, дополняет, развивает математические правила, человек, который вносит новое в математическое знание. Человек, впервые формулировавший, что «Дважды два четыре», — великий математик, если даже он получил эту истину из складывания двух окурков с двумя окурками. Все дальнейшие люди, хотя бы они складывали неизмеримо большие вещи, например, паровоз с паровозом, — все эти люди не математики. Это утверждение отнюдь не умаляет труда человека, складывающего паровозы. Его работа в дни транспортной разрухи может быть в сотни раз ценнее голой арифметической истины. Но не надо отчетность по ремонту паровозов посылать в математическое общество и требовать, чтоб она*

*рассматривалась наряду с геометрией Лобачевского. Это взбесит плановую комиссию, озадачит математиков, поставит в тупик тарификаторов.*

Так, благодаря поэту, многие школьники из тех, кто с неподдельным интересом учился не только поэзии, но и азам геометрии Евклида, узнавали о существовании загадочной для них геометрии Лобачевского.

### Выдающаяся (egregium) теорема Гаусса

Но вернемся к планиметрии Гаусса.

Опасаясь «крика беотийцев»<sup>1</sup> и не желая «потревожить осиное гнездо»<sup>2</sup>, Гаусс не стал сообщать об открытии им изложенной выше планиметрии. Но в работе [12] он привлек внимание специалистов к внутренней геометрии обыкновенной поверхности

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v)$$

в пространстве Евклида и привел доказательство установленной им теоремы о том, что мера кривизны поверхности равна скалярному полю  $K$ , задаваемому на поверхности квадратичной формой

$$E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Эта модель планиметрии Гаусса вполне устроила «евклидовские умы»<sup>3</sup>.

В частности, в той же мере моделью планиметрии Лобачевского явилась внутренняя геометрия всякой поверхности постоянной отрицательной кривизны.

В связи с этим нам представляется многозначительным сообщение Нордена о том, что после смерти Гаусса среди его бумаг обнаружена заметка, в которой Гаусс приводит уравнение трактриссы, говоря, что это — «кривая, которая своим вращением производит антипод (*Gegenstück*) сферы».

Дальше Норден продолжает: «Эти слова заставляют считать, что псевдосфера уже была известна Гауссу как поверхность постоянной отрицательной кривизны» [15, с. 17].

### Из романа «Братья Карамазовы»

Ф. М. Достоевский

(30.10(11.11).1821, Москва — 28.1(9.2).1881, Санкт-Петербург)

*Если Бог есть и если Он действительно создал землю, то, как нам совершенно известно, создал Он ее по евклидовой геометрии, а ум человеческий с понятием лишь о трех измерениях пространства. Между тем находились и находятся даже и теперь геометры и философы, и даже из замечательнейших, которые сомневаются в том, чтобы вся вселенная или, еще обширнее — все бытие было создано лишь по евклидовой геометрии, осмеливаются даже мечтать, что две параллельные линии, которые по Евклиду ни за что не могут сойтись на земле, может быть и сошлись бы где-нибудь в*

<sup>1</sup>Выражение Гаусса. См. письмо Гаусса к Герлингу от 25 августа 1818 г. [10, с. 103].

<sup>2</sup>Выражение Гаусса. См. письмо Гаусса к Бесселю от 29 января 1829 г. [10, с. 106].

<sup>3</sup>Выражение, употребленное Иваном Карамазовым в беседе с братом Алексеем. См. ниже отрывок из романа Ф. М. Достоевского [20].

*бесконечности. Я, голубчик, решил так, что если я даже этого не могу понять, то где ж мне про Бога понять. Я смиренно признаю, что у меня нет никаких способностей разрешать такие вопросы, у меня ум евклидовский, земной, а потому, где нам решать о том, что не от мира сего...*

*Пусть даже параллельные линии сойдутся и я это сам увижу: увижу и скажу, что сошлись, а все-таки не приму. Вот моя суть, Алеша.*

**К сведению любителей организовывать международные конференции по неевклидовой геометрии.** Основатель Лаборатории теоретической физики в Дубне Николай Николаевич Боголюбов говорил, что множество гениев неупорядочиваемо.

Скажите, например, кто, кроме Бога, смог бы, не вызвав возражений, упорядочить известное нам множество гениев, каждый из которых по-своему открыл неевклидову геометрию? Согласитесь, что никто.

А Бог это сделал много лет тому назад: в текущем году исполняется со дня рождения Гаусса 225 лет, Лобачевского — 210 лет, Бояя — 200 лет.

Упорядочивать множество людей по их возрасту — это прерогатива Господа Бога.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность Наталье и Льву Шавохиным за многочисленные беседы по вопросам истории Казани в связи с жизнью Лобачевского и его открытием неевклидовой геометрии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лобачевский Н. И.* Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма. М.: Наука, 1976.
2. *Модзалевский Л. Б.* Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948.
3. In memoriam N. I. Lobatschevskii (V. II). Казань: Главнаука, 1927.
4. *Лобачевский Н. И.* Полн. собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. Т. 1. С. 185.
5. *Ломоносов М. В.* Избр. произведения. Л.: Сов. писатель, 1990. С. 128.
6. Празднование Императорским Казанским Университетом столетней годовщины дня рождения Н. И. Лобачевского. Казань: Типо-литография Императорского Университета, 1894.
7. *Летников А. В.* О теории параллельных линий Н. И. Лобачевского // Математический сборник, издаваемый Московским математ. об-вом. М.: Типография А. И. Мамонтова, 1868. Т. 3, отд. 2. С. 78.
8. *Буныковский В. Я.* Параллельные линии. Напечатано по распоряжению 1-го Отделения Императорской Академии Наук. 9 сентября 1853 года. Непременный секретарь П. Фус. В типографии Императорской Академии Наук. 1853.
9. *Черников Н. А.* // ЭЧАЯ. 1992. Т. 23, вып. 5. С. 1186.
10. Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: Гостехиздат, 1956.

18 Черников Н. А.

11. Кэли А. Шестой мемуар о формах (1859). См. [10], с. 222; Note on Lobatchewsky Imaginary Geometry // Phil. Mag. London 1865. V. (4), 29. P. 231–233; Coll. Papers. V. 5. P. 771–472.
12. Гаусс К. Ф. Общие исследования о кривых поверхностях (1827). См. [10, с. 123].
13. Больаи Я. Аппендикс. См. [10, с. 71].
14. Бельтрами Э. Опыт интерпретации неевклидовой геометрии (1868). См. [10, с. 180].
15. Норден А. П. Открытие Лобачевского и его место в истории новой геометрии. См. [10, с. 9].
16. Васильев А. В. Николай Иванович Лобачевский (1792–1856). М.: Наука, 1992. 230 с.
17. Котельников А. П. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. См. [10, с. 37].
18. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.
19. Маяковский В. В. Как делать стихи? // Собр. соч. М.: Правда, 1978. Т. 11. С. 237.
20. Достоевский Ф. М. Братья Карамазовы // Собр. соч. М.: ГИХЛ, 1958. Т. 9. С. 294.
21. Бельтрами Э. Основы теории пространств постоянной кривизны (1868–1869). См. [10, с. 342].

Получено 4 сентября 2002 г.



УДК 539.171.017

## КОМПЛАНАРНЫЙ РАЗЛЕТ ЧАСТИЦ В ЯДЕРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПРИ $E_0 > 10^{16}$ эВ, ЗАРЕГИСТРИРОВАННОМ В СТРАТОСФЕРЕ

А. К. Манагадзе<sup>а,1</sup>, В. И. Оседло<sup>а</sup>, В. И. Галкин<sup>б</sup>, Л. А. Гончарова<sup>а</sup>,  
В. В. Копенкин<sup>а</sup>, К. А. Котельников<sup>а</sup>, Н. Г. Полухина<sup>а</sup>, И. В. Ракобольская<sup>б</sup>,  
Т. М. Роганова<sup>а</sup>, Л. Г. Свешникова<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына  
МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

<sup>б</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

<sup>а</sup> Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

Гамма-адронное семейство космических лучей с полной энергией  $> 10^{16}$  эВ, зарегистрированное эмульсионной камерой на борту стратосферного баллона-аэростата, является уникальным случаем ядерного взаимодействия столь высокой энергии в мировой экспериментальной статистике. С применением опыта анализа, накопленного в сотрудничестве «Памир» (горный эмульсионный эксперимент), в этом суперсемействе был обнаружен феномен компланарного разлета наиболее энергичных вторичных частиц и существенная пространственная асимметрия остальных частиц в центральной области этого события, принадлежащего к диапазону энергий, недоступному для современных ускорителей.

A gamma-hadron superfamily of cosmic rays with total energy  $> 10^{16}$  eV was detected by an emulsion chamber aboard a stratospheric balloon, the event being the unique example of so high energy nuclear interaction in the world statistics. Applying the experience accumulated in Pamir Collaboration (a mountain emulsion experiment) for superfamily analysis, in this family there were found the phenomenon of coplanar emission of most energetic particles and significant lateral asymmetry of other particles in the central area of the event. The superfamily belongs to the energy range unattainable for modern accelerators.

### ВВЕДЕНИЕ

В 1975 г. в эмульсионном баллонном эксперименте на высоте 30 км было зарегистрировано уникальное гамма-адронное семейство частиц космических лучей «Страна» с энергией свыше  $10^{16}$  эВ [1]. Это событие является результатом практически «чистого» ядерного взаимодействия частицы первичного космического излучения, т. к. по условиям наблюдения в стратосфере отсутствуют возможности для каскадного размножения вторичных частиц, рожденных в акте, что резко отличает это семейство от событий, регистрируемых в экспериментах по космическим лучам, проводимых ниже в атмосфере.

<sup>1</sup>mng@decl.sinp.msu.ru

Хотя по энергии оно сопоставимо с наиболее энергичными событиями, зарегистрированными рентгеноэмульсионными камерами с большой площадью и экспозицией в горных экспериментах [2].

В свою очередь, в горных рентгеноэмульсионных экспериментах при энергиях  $> 10^{16}$  эВ были найдены такие физические феномены, как гало (диффузное пятно потемнения большой площади в центре семейства) [3] и выстроенность вдоль прямой линии энергетически выделенных центров (т.е. наиболее энергичных объектов) в суперсемействах<sup>1</sup> [4,5]. Целью данного исследования было заново проанализировать стратосферное высокоэнергичное событие «Страна» с учетом появившихся в последнее время новых модельных расчетов и накопленного за 25 лет работы сотрудничества «Памир» опыта анализа новых явлений.

## 1. ЭКСПЕРИМЕНТ

Полеты баллонов-аэростатов с эмульсионной камерой на борту проходили на высоте около 30 км по маршруту полуостров Камчатка — Поволжье. Длительность одного полета была около 160 ч. Высота полета соответствует давлению воздуха около  $10 \text{ г/см}^2$ .

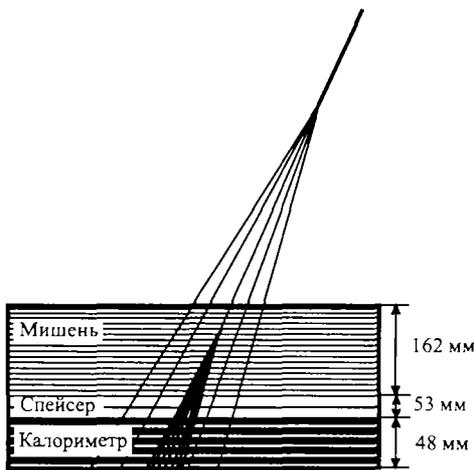


Рис. 1. Конструкция эмульсионной камеры, несомой аэростатом, и схема регистрации семейства

протонов. Калориметр был сложен из 9 слоев свинца по 0,5 мм, переслоенного двумя типами эмульсий: ядерной (P-2T-50) и рентгеновской (РТ-6М). Суммарная толщина калориметра соответствует 9 к. е. или 0,26 пробега ядерного взаимодействия. В свинцовых пластинах калориметра развиваются электронно-фотонные каскады от адронов и  $\gamma$ -квантов, регистрируемые на рентгеновской пленке в виде пятен потемнения, по которым определяется энергия упавшей на камеру частицы.

Многослойная эмульсионная камера (рис. 1) площадью  $40 \times 50$  см состояла из трех основных блоков: мишенного блока, спейсера и калориметра. Установка была предназначена прежде всего для регистрации первичных частиц космических лучей. Мишенный блок состоял из 90 слоев пластика толщиной 1,5 мм, переслоенного пластинами толщиной 200 мкм с ядерной эмульсией P-2T-50, нанесенной слоем 50 мкм. Мишенный блок необходим для регистрации первичной частицы и определения ее заряда по треку в ядерной эмульсии. Спейсер, предназначенный для расхождения вторичных частиц после взаимодействия, состоял из 10 слоев пластика по 5 мм и был также переслоен пластинами с ядерной эмульсией. Суммарная толщина мишенного блока и спейсера эквивалентна 0,5 к. е., или 0,3 пробега ядерного взаимодействия для

<sup>1</sup>Суперсемействами называются события с суммарной энергией гамма-компонента  $E_\gamma > 1000 \text{ ТэВ}$ .

В данной работе для анализа в основном используются данные, полученные по рентгеновским пленкам калориметра.

## 2. ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Данное  $\gamma$ -адронное семейство состоит из 107 частиц, упавших на камеру и зарегистрированных калориметром: 76 электромагнитных частиц (называемых далее  $\gamma$ -квантами) с суммарной энергией  $\Sigma E_\gamma = 1400$  ТэВ и 30 адронов с суммарной наблюдаемой (т. е. выделенной в  $\gamma$ -компонент при взаимодействии в свинце) энергией  $\Sigma E_h^{(\gamma)} = 800$  ТэВ (без учета лидирующей частицы). Зенитный угол падения семейства на камеру  $\Theta = 30^\circ$ , что делает глубину регистрации равной  $11,5$  г/см<sup>2</sup>.

Учтем, что эффективный  $\langle k_\gamma \rangle$  (доля энергии, передаваемой адроном в  $\gamma$ -компонент при взаимодействии с веществом) в свинце составляет около  $1/3$ . Тогда полная энергия зарегистрированных адронов  $\Sigma E_h^0 = \Sigma E_h^{(\gamma)} / \langle k_\gamma \rangle \approx 2500$  ТэВ. Учтем также, что из-за ограниченной глубины камеры эффективность регистрации адронов данной установкой составляет  $\approx 40\%$ . И около  $30\%$  частиц потеряно из-за того, что данное событие упало недалеко от края камеры. После введения всех поправок энергия воздушного семейства (без учета лидирующей частицы) будет составлять около  $0,9 \cdot 10^{16}$  эВ.

Высокоэнергичная лидирующая частица испытала второе взаимодействие в 12-м слое верхнего мишенного блока (см. рис. 1). Результатом этого взаимодействия явился узкий пучок вторичных частиц (наблюдаемый в виде треков в ядерных эмульсиях), быстро развивающийся в углеродном веществе мишени и образующий большое пятно потемнения (гало) в центре семейства на рентгеновских пленках в калориметре. С использованием результатов измерений треков в ядерной эмульсии построено распределение по псевдобыстроте  $\eta = -\ln(\operatorname{tg}(\theta/2))$  для вторичных частиц внутри этой струи. Сравнение этого распределения с расчетом, выполненным по моделям QGS и VENUS [6], дало оценку энергии лидирующей струи  $\approx 10^{16}$  эВ. Для всех остальных частиц воздушного семейства по псевдобыстротному распределению также была получена суммарная оценка  $\approx 10^{16}$  эВ, что хорошо согласуется с приведенной выше энергией семейства.

Таким образом, полная энергия первичной частицы оценивается как  $2 \cdot 10^{16}$  эВ.

## 3. ВЫСТРОЕННОСТЬ ЧАСТИЦ

Сотрудничеством «Памир» было открыто и исследовано явление выстроенности (т. е. расположения вдоль прямой линии в нормальной плоскости) наиболее высокоэнергичных объектов («энергетически выделенных центров» или ЭВЦ) в  $\gamma$ -адронных семействах [7, 8]. Выстроенность ЭВЦ на пленке вдоль прямой линии соответствует компланарному разлету вторичных частиц в акте ядерного взаимодействия над камерой. Механизм этого явления до сих пор точно не установлен. Одной из наиболее вероятных гипотез является рождение вторичных частиц вследствие разрыва кварк-глюонной струны, задающей плоскость разлета этих частиц [9]. По данным памирского сотрудничества сам феномен возникает при энергиях взаимодействия  $\sim 10^{16}$  эВ.

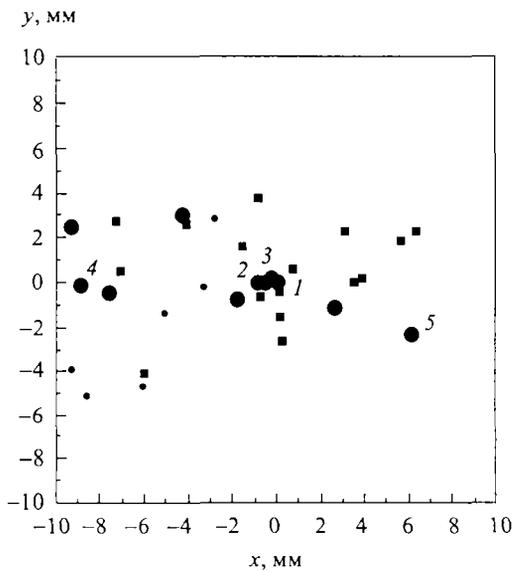


Рис. 2. Мишенная диаграмма центральной части суперсемейства «Страна»: ● — частицы с  $E_0 > 100$  ТэВ; ■ — частицы с  $E_0 = 20-100$  ТэВ; ● — частицы с  $E_0 = 3-20$  ТэВ; 1-5 — пять наиболее энергичных объектов в суперсемействе

Наблюдаемая картина в плоскости, перпендикулярной оси падения первичной частицы, представлена на рис. 2.

Критерием выстроенности является геометрический параметр  $\lambda_m$  [10]:

$$\lambda_m = \frac{\sum_{i \neq j \neq k} \cos 2\varphi_{ijk}}{m(m-1)(m-2)},$$

где  $m$  — число рассматриваемых точек;  $\varphi_{ijk}$  — угол между векторам  $\vec{k}_i$  и  $\vec{k}_j$ .

Значение  $\lambda$  стремится к 1 при расположении  $m$  точек вдоль прямой линии. Событие считается выстроенным, если  $\lambda_m > 0,8$ .

В данном семействе для трех самых энергичных объектов  $\lambda_3 = 0,98$ , для четырех —  $\lambda_4 = 0,99$ , для пяти —  $\lambda_5 = 0,90$ . Это можно считать высокой степенью выстроенности, что не удивительно в «чистом» событии. Следует отметить, что шесть наиболее энергичных частиц в семействе являются адронами. Таким образом, здесь наблюдается выстроенность не  $\gamma$ -квантов или электромагнитных гало, как в большинстве первых исследований сотрудничества «Памир», а адронов, при этом самый высокоэнергичный адрон в данном семействе образует небольшое гало в рентгеновских пленках. Особая роль адронов отмечалась нами ранее в [11]. Кроме того, следует отметить, что на рис. 2 видна выраженная асимметрия в расположении не только наиболее энергичных, но и всех частиц в центральной области семейства. Это не связано с обрезанием края пленки, т. к. этот край находится далее, чем в 10 мм от центра события, а здесь рассматрива-

В горных экспериментах с рентгеномульсионными камерами прямое наблюдение явления затруднено влиянием ядерно-электромагнитного каскада, развивающегося в атмосфере над камерой. В стратосферном суперсемействе «Страна» такие трудности отсутствуют. И ожидаемый при  $E_0 > 10^{16}$  эВ эффект выстроенности ЭВЦ наблюдается в данном семействе, что является важнейшим фактом наблюдения эффекта выстроенности в «чистом» взаимодействии, подтверждающим существование феномена компланарного разлета вторичных частиц при взаимодействиях сверхвысоких энергий.

Для правильного выделения наиболее энергичных частиц необходимо учесть, что для равноправного рассмотрения адронного и  $\gamma$ -компонента в семействе необходимо перейти от выделенной в камере энергии каждого адрона к его полной энергии путем введения поправки  $E_h^0 = E_h^{(\gamma)}/\langle k_\gamma \rangle$ . После чего все регистрируемые в камере частицы надо спроектировать на единую плоскость (построить мишенную диаграмму).

ется только центральная область семейства, содержащая все наиболее энергичные его частицы. Если рассмотреть все семейство, то 15 из 107 частиц семейства расположены вблизи линии выстроенности. Эти 15 частиц несут более половины энергии первичной частицы космических лучей.

Для оценки фона случайных событий с выстроенностью были выполнены расчеты с использованием современной модели ядерного взаимодействия QGSJET [12], где не заложено какого-либо специального механизма компланарного разлета частиц. На рис. 3 приведены доли событий с выстроенностью трех, четырех и т. д. наиболее энергичных частиц во взаимодействии с воздухом первичного протона и первичного ядра железа. Вероятность случайной выстроенности резко падает с ростом числа частиц, включенных в рассмотрение. Сравнение данных от взаимодействий с разными  $E_0$  показывает независимость случайной выстроенности от энергии события. Качественно такое же поведение было продемонстрировано и в более ранних расчетах, как наших, так и других авторов, но здесь впервые была использована наиболее современная модель взаимодействия QGSJET, описывающая область самых высоких энергий и рекомендуемая к использованию международными коллаборациями (например, KASCADE). Впервые с очень большой статистикой (по 10000 событий) были наиграны взаимодействия для столь высокой энергии, как  $E_0 = 2 \cdot 10^{16}$  эВ/ядро. Также проанализирована зависимость фоновой случайной выстроенности от типа ядра, что является весьма актуальным в связи с предполагаемым в некоторых работах ростом доли тяжелых ядер в первичном космическом излучении при  $E_0 > 10^{15}$  эВ. Из рис. 3 видно, что вероятность выстроенности в семействах от ядер железа выше, чем в семействах от протона, особенно это касается более «сильных» критериев выстроенности (т. е. для пяти и более объектов). При этом абсолютное значение вероятности случайной выстроенности остается достаточно низким, гораздо ниже зарегистрированных сотрудничеством «Памир» экспериментальных значений [4].

Для оценки вероятности одиночного события с приведенными выше значениями параметра  $\lambda$  для трех, четырех и пяти наиболее энергичных частиц был использован тот же банк искусственных событий. Такая совместная вероятность обнаружить событие с  $\lambda_3 = 0,98$ ,  $\lambda_4 = 0,99$ ,  $\lambda_5 = 0,90$  для семейств от первичного протона составляет 0,01 %, а для первичного ядра железа — 0,03 %. Учет возможных ошибок при определении координат частиц в эксперименте практически не изменяет эти вероятности. Очевидно,

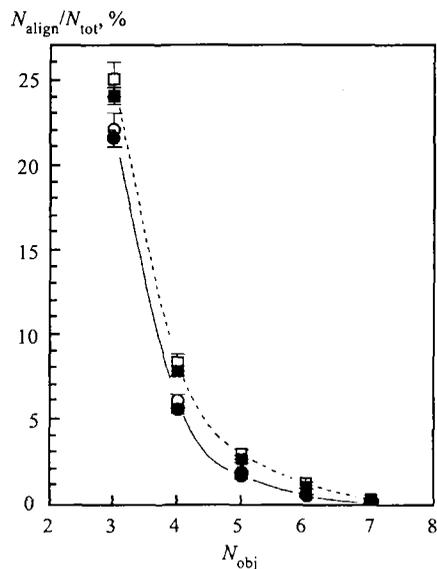


Рис. 3. Зависимость доли событий с выстроенностью от числа принятых к рассмотрению наиболее энергичных объектов в семействе  $N_{obj}$ . Расчет выполнен по модели QGSJET, по 10000 искусственных событий для каждого типа первичной частицы и ее энергии. Кружки — события от первичного протона с энергией  $10^{14}$  эВ (○) и  $2 \cdot 10^{16}$  эВ (●); квадраты — семейства от ядра железа с энергией  $10^{14}$  эВ (□) и  $2 \cdot 10^{16}$  эВ (■)

что вероятность случайного появления для такой выстроенной конфигурации чрезвычайно низка.

Стоит также отметить, что, если отобрать пяти наиболее энергичных частиц в искусственных  $\gamma$ -адронных семействах, то для первичных протонов 75 % этих объектов являются адронами, а для первичных ядер железа — 99 % имеют адронную природу (из них 10 % — фрагменты ядра). Это и согласуется с экспериментом, и еще раз подтверждает особую роль адронов при изучении компланарного разлета наиболее энергичных вторичных частиц в ядерном взаимодействии при очень высоких энергиях.

## ВЫВОДЫ

При анализе уникального стратосферного  $\gamma$ -адронного семейства с  $E_0 > 10^{16}$  эВ выявлены характеристики, ненаблюдаемые при более низких энергиях. Это прежде всего выраженная асимметрия и выстроенность вдоль прямой линии наиболее энергичных частиц в центральной части семейства.

Впервые при столь высоких энергиях явление компланарного разлета адронного компонента наблюдается в чистом ядерном взаимодействии практически без искажений каскадным процессом в атмосфере.

Данная работа поддержана грантами РФФИ 00-15-96632 и 00-02-17250.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Apanasenko A. V. et al. // Proc. of 15th ICRC. Plovdiv, 1977. V. 7. P. 220–223.*
2. *Сотрудничество «Памир» // Изв. АН СССР, сер. физ. 1986. Т. 50. С. 2125–2127.*
3. *Lattes G. M. G., Fujimoto H., Hasegawa S. // Phys. Rev. D. 1980. V. 65. P. 159.*
4. *Kopenkin V. V. et al. // Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 2766.*
5. *Сотрудничество «Памир» // Изв. АН СССР, сер. физ. 1985. Т. 49. С. 1295.*
6. *Osedlo V. I. et al. // Proc. of 27th ICRC. Hamburg, 2001. V. 4. P. 1426.*
7. *Иваненко И. П. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1992. Т. 56. С. 192.*
8. *Borisov A. S. et al. // Nucl. Phys. B (Proc. Supl.). 1997. V. 52. P. 218.*
9. *Roizen I. I. // Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9, No. 38. P. 3517.*
10. *Pamir Collaboration // Proc. of 5th Intern. Symp. on Very High Energy Cosmic Ray Interactions. Lodz, 1988. P. 9.*
11. *Копенкин В. В. и др. // Изв. РАН, сер. физ. 1994. Т. 58. С. 13.*
12. *Калмыков Н. Н., Остапченко С. С., Павлов А. И. // Там же. С. 21.*



УДК 539.165

## ВЫХОДЫ ФРАГМЕНТОВ ЯДРА $^{10}\text{B}$

*Ф. Г. Лепехин*

Петербургский институт ядерной физики РАН, Гатчина

Приведены относительные выходы фрагментов ядра  $^{10}\text{B}$ , рассчитанные по модели холодной фрагментации без каких-либо свободных параметров.

Without any free parameters, yields of boron projectile fragments have been received from calculations of a model of the cold fragmentation process.

### 1. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА РАСЧЕТА

Экспериментальные данные, полученные при изучении процесса фрагментации релятивистских ядер и ядер мишеней, согласуются с представлением о том, что этот процесс является быстрым, холодным и уже при сравнительно небольших энергиях имеет место предельная фрагментация [1, 2]. Суть этого явления наиболее ясно может быть выражена в партонной картине фрагментации ядер [3]. В соответствии с ней как релятивистское ядро, так и ядро-мишень в своем основном состоянии, еще до какого-либо взаимодействия, представляют собой облако точечных, безмассовых, фермиевских частиц в вырожденном состоянии, занимающих некоторый фазовый объем  $\Omega$ . Это и есть партоны. Они непрерывно, самопроизвольно переходят из одного состояния в этом фазовом объеме в другое. Множество преобразований этих состояний образует динамическую систему (ДС), или однопараметрическую группу [4].

Эта ДС типа потока состояний обладает хорошо известными свойствами, которые и заложены в обоснование простого метода расчета вероятностей выхода фрагментов. Так, в ней можно ввести понятие потенциала, представляющего собой функцию состояния каждого из партонов в данный момент времени по отношению ко всем остальным партонам в это же время. При переходе из одного состояния системы (1) в другое ее состояние (2) разность потенциалов этих состояний  $U_2 - U_1 = \Delta E_{1,2}$  есть «энергия» этого перехода. В ДС типа потока, инвариантных по отношению к сдвигу, всегда можно ввести нормированную инвариантную гиббсовскую меру множества состояний системы. Эта инвариантная нормированная мера по сути является вероятностью перехода из одного состояния в другое. Наша система партонов инвариантна по отношению к сдвигу во времени. Это закон сохранения энергии. А это значит, что для ДС партонов вероятность перехода из одного состояния в другое может быть записана как функция разности потенциалов этих состояний в виде распределения Гиббса

$$W = \frac{\exp(-\Delta E/T)}{\Xi}. \quad (1)$$

Кроме разности потенциалов  $\Delta E$ , конкретный вид которой еще будет обсуждаться, в распределение Гиббса входят еще две величины. Одна из них называется статистической суммой  $\Xi$  и определяется как сумма всех  $\exp(-\Delta E/T)$  по всем возможным состояниям системы. Для  $n$  независимых частиц число этих комбинаций будет  $n(n-1)/2$ . В нашем случае [5] это есть число всех возможных комбинаций перехода ядра с зарядом  $Z$  и массовым числом  $A$  в систему из  $k$  фрагментов при условии, что каждый из фрагментов с  $Z_i$  и  $A_i$  есть стабильный или радиоактивный изотоп. Каждое такое состояние из  $k$  фрагментов будем называть каналом. Вероятность наблюдения канала есть вероятность перехода из основного состояния первичного ядра в состояние из этих  $k$  фрагментов. Эту вероятность мы и будем вычислять.

Величина  $T$  пропорциональна средней величине разностей потенциалов всех возможных состояний. Естественно назвать ее «температурой». Конечно, абсолютная температура вырожденного состояния равна нулю, но средняя кинетическая энергия нуклонов, отсчитываемая от дна потенциальной ямы, равна  $3/2(P_F^2/5m_N)$  и определяется граничным импульсом Ферми  $P_F$ . А тогда температура, которую мы будем использовать, равна  $T = P_F^2/5m_N$ .

Эта величина может быть получена в эксперименте или из распределения поперечных импульсов протонов, плотность вероятности которого есть распределение Рэлея,

$$f(P_{\perp}) = \frac{P_{\perp}}{\sigma_0^2} \exp(-P_{\perp}^2/2\sigma_0^2), \quad (2)$$

где  $\sigma_0^2 = P_F^2/5$ , или из распределения проекций поперечных импульсов на произвольное направление в поперечной плоскости

$$f(P_{\perp Y}) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp(-P_{\perp Y}^2/2\sigma_0^2). \quad (3)$$

Они будут распределены нормально с дисперсией  $\sigma_0^2$ .

Если в эксперименте наблюдается  $N$  величин  $x$ , то эффективная и состоятельная оценка величины  $s_0^2(x = P_{\perp})$  метода максимума правдоподобия будет

$$s_0^2(P_{\perp}) = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} P_{\perp i}^2}{2N}. \quad (4)$$

А для нормально распределенных величин  $x$  оценка дисперсии метода максимального правдоподобия будет

$$s_0^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \langle x \rangle)^2}{N-1}. \quad (5)$$

Во всех фотоэмульсионных работах оценка  $s_0(P_{\perp})$  завышена на 10–20% по чисто методическим причинам. Для фрагментов с  $Z > 1$  имеем из [6]

$$\sigma_Z^2 = \sigma_0^2 \frac{A_Z(A - A_Z)}{A - 1}, \quad (6)$$

и, следовательно, экспериментально наблюдаемые величины

$$x = P_{\perp Y} \sqrt{\frac{A-1}{A_Z(A-A_Z)}}$$

для фрагментов с различными зарядами будут иметь нормальное распределение, истинная величина дисперсии которого есть  $\sigma_0^2$ . Экспериментальные оценки  $s(P_{\perp Y})$  в пределах ошибок совпадают с измерением  $\sigma_0$  при рассеянии электронов на ядрах [7].

Таким образом, из распределения проекций поперечных импульсов на произвольное направление в поперечной плоскости параметр  $T$  нам известен.

Для некоторых легких изотопов величина граничного импульса Ферми не измерена. Тогда можно воспользоваться данными о величине радиуса ядра  $R = r_0 A^{1/3}$ . Величины  $r_0$  и  $\sigma_0$  связаны простым соотношением

$$\sigma_0 r_0 \simeq \hbar/2.$$

Если считать, что в одной ячейке фазового объема может находиться только 4 нуклона, то левая часть этого выражения равна  $\simeq 134$  МэВ/с на ферми [8].

Перейдем теперь к определению величины  $\Delta E$  в распределении Гиббса. Это есть работа, которую надо затратить, чтобы ядро из состояния  $A$  нуклонов, из которых  $Z$  заряжены, могло перейти в состояние из  $k$  фрагментов со средней кинетической энергией  $\langle T \rangle_i$  каждого фрагмента в СЦИ-системе. Средняя кинетическая энергия фрагмента с дисперсией проекции импульса на произвольное направление в СЦИ, равном  $\sigma_{Z_i}^2$ , будет

$$\langle T \rangle_i = 3\sigma_{Z_i}^2/2M_i,$$

где  $M_i$  есть масса покоя фрагмента с массовым числом  $A_i$  и зарядом  $Z_i$ .

Очевидно, что для того, чтобы фрагменты начали бы двигаться вне первичного ядра, их из него надо извлечь. А на это надо затратить энергию, равную разности суммы масс покоя всех фрагментов и массы покоя первичного ядра. Отсюда получаем, что для данного канала из  $k$  фрагментов

$$\Delta E_k = \sum_{i=1}^{i=k} (M_i + \langle T \rangle_i) - M. \quad (7)$$

Так как точные значения масс всех изотопов известны, а все возможные каналы фрагментации легких ядер можно перебрать, то вычисление вероятностей каналов и вероятностей обнаружения определенных изотопов становится довольно простой задачей.

Итак, информация о радиусе ядра определяет константу рэлеевского распределения поперечных импульсов фрагментов и, следовательно, максвелловское распределение кинетических энергий фрагментов в системе покоя фрагментирующего ядра через «температуру»  $T$ , а будучи дополненной данными о массах покоя ядер, эта же информация позволяет рассчитать абсолютные и относительные выходы фрагментов. Нет необходимости введения каких-либо свободных параметров, как это часто делается при расчетах выходов фрагментов. Все основные закономерности процесса фрагментации релятивистских ядер и ядер мишеней становятся ясными. Теперь они могут быть использованы как инструмент исследования структуры ядра.

Прежде чем переходить к изложению результатов расчета вероятностей выхода фрагментов ядра  $^{10}\text{B}$ , укажем на те ожидаемые качественные особенности фрагментации любых ядер и при любых энергиях, которые прямо следуют из данной методики расчета выходов фрагментов. Ясно, что среднее число фрагментов не должно зависеть от энергии релятивистского ядра и массы ядра, с которым оно взаимодействует. При фрагментации мишени среднее число фрагментов и их энергетические спектры не должны зависеть от энергии первичной частицы и ее массы. Эти параметры в данной схеме фрагментации не используются.

Фрагментация является «холодной». Все определяется внутренними свойствами фрагментирующего ядра. Фрагменты существуют в ядре до взаимодействия в виде партонов, виртуально, и становятся реальными, наблюдаемыми частицами с теми импульсами, которые они в ядре имели до взаимодействия. Наиболее вероятными будут каналы с отрывом одного нейтрона или одного протона с образованием двух фрагментов с массовыми числами  $A_1 = 1$  и  $A_2 = A - 1$ .

Вообще каналы с образованием двух фрагментов должны доминировать, а каналы с образованием 5–6 и более фрагментов всегда будут иметь очень малые вероятности. Для этих каналов становится слишком большим вклад суммы кинетических энергий фрагментов в величину  $\Delta E$  в экспоненте распределения Гиббса. С другой стороны, те каналы, в которых сумма масс фрагментов окажется ближе к массе фрагментирующего ядра, должны иметь сравнительно большие вероятности наблюдения. Все эти соображения находятся в согласии с экспериментом. Если в эксперименте будут обнаружены отклонения от них, то вот они-то и будут представлять интерес.

## 2. ВЫХОДЫ ФРАГМЕНТОВ ЯДРА $^{10}\text{B}$

Изложенная методика может быть использована для расчета выходов фрагментов из любых легких ядер, где возможен прямой перебор всех каналов фрагментации. Для более тяжелых ядер этот метод еще не использовался, но если иметь в виду замечание о том, что наиболее вероятными каналами фрагментации будут каналы с малым числом легких фрагментов, то возможно, что и для них такие расчеты будут полезны.

Первое применение этого метода [5, 9] позволило объяснить особенности азимутальных корреляций  $\alpha$ -частиц, наблюдавшиеся в экспериментах [10, 11] в реакциях  $^{16}\text{O} \rightarrow 4\alpha$  и  $^{12}\text{C} \rightarrow 3\alpha$ . Отношение вероятностей  $W(^{16}\text{O} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^4\text{He})/W(^{16}\text{O} \rightarrow 4\alpha)$  в эксперименте [12] равно  $(3,2 \pm 0,6)$ , в то время как в расчете эта величина равна 3,4. Экспериментальные отношения из работы [12]  $W(^7\text{Li})/W(^5\text{Li}) = (1,14 \pm 0,14)$  и  $W(^6\text{Li})/W(^5\text{Li}) = (1,43 \pm 0,13)$ , а в расчете эти величины равны 1,09 и 1,44 соответственно. При фрагментации углерода в эксперименте [10]  $W(2\alpha)/W(3\alpha) = (0,61 \pm 0,04)$ , а в расчете получено 0,578.

Характерной особенностью фрагментации углерода и кислорода, обнаруженной в расчетах, является сравнительно большая доля изотопов гелия и лития с массовым числом 5 и  $^5\text{Be}$  в промежуточном состоянии. Конечно, распады этих префрагментов необходимо учитывать. Если  $^8\text{Be}$  имеет только один канал распада на две  $\alpha$ -частицы, то  $^5\text{Li}$  и  $^5\text{He}$  имеют по 5 возможных каналов распада.

В табл. 1 приведены вероятности наблюдения изотопов водорода и гелия при распаде  $^5\text{Li}$  и  $^5\text{He}$ . Эти величины и будут далее использоваться.

Таблица 1

Ядро	$W(p)$ , %	$W(d)$ , %	$W(t)$ , %	$W(^3\text{He})$ , %	$W(^4\text{He})$ , %
$^5\text{He}$	13,1	42,5	20,6	8,3	1,48
$^5\text{Li}$	45,0	29,3	3,8	14,2	7,7

Таблица 2

$i$	$\Delta M_i$ , МэВ	$\Delta E_i$ , МэВ	$W$ , %	$^{10}\text{B} \rightarrow$
1	6,586	20,103	50,0690	$P + ^9\text{Be}$
2	8,435	21,935	39,9352	$N + ^9\text{B}$
3	8,250	35,270	7,7069	$N + P + ^8\text{Be}$
4	23,474	50,504	1,1766	$2P + ^8\text{Li}$
5	27,013	54,009	0,7634	$2N + ^8\text{B}$
6	25,506	66,037	0,1731	$N + 2P + ^7\text{Li}$
7	27,150	67,664	0,1416	$2N + P + ^7\text{Be}$
8	32,758	86,786	0,0134	$2N + 2P + ^6\text{Li}$
9	35,484	89,526	0,0095	$N + 3P + ^6\text{He}$
10	37,827	91,836	0,0072	$3N + P + ^6\text{Be}$
11	37,349	104,894	0,0014	$2N + 3P + ^5\text{He}$
12	38,421	105,949	0,0013	$3N + 3P + ^5\text{Li}$
13	53,629	107,691	0,0010	$5D$
14	36,455	117,514	0,0003	$3N + 3P + ^4\text{He}$

В табл. 2 приведены вероятности наблюдения каналов фрагментации ядра  $^{10}\text{B}$ . Как и ожидалось, каналы  $^{10}\text{B} \rightarrow p + ^9\text{Be}$  и  $^{10}\text{B} \rightarrow n + ^9\text{B}$  имеют вероятности 50 % и 40 % соответственно, а канал  $^{10}\text{B} \rightarrow 5\ ^2\text{H}$  наблюдается с вероятностью 0,001 %.

Полученная и ожидавшаяся малая вероятность каналов с большим числом фрагментов качественно согласуется с оценкой их относительных вероятностей, которые можно получить из отношения нерелятивистских фазовых объемов  $k$  частичного состояния [13]. Фазовый объем  $k$  частиц имеет вид

$$P_k = \frac{(2\pi^3)^{(k-1)/2}}{2\Gamma\{3(k-1)/2\}} \frac{(\prod M_i)^{1/2}}{(\sum M_i)^{3/2}} (\sum T_i)^{(3k-5)/2}. \quad (8)$$

Отношение  $\eta = W(^{10}\text{B} \rightarrow 5\ ^2\text{H})/W(^{10}\text{B} \rightarrow 2p + ^8\text{Li})$  по этой формуле оказывается порядка  $4 \cdot 10^{-4}$ , что не очень отличается от этой величины из данных табл. 2. Решающим обстоятельством, обеспечивающим малую величину отношения  $\eta$  является малость величины  $(\sum T_i)^5/(\sum T_i)^2$ . В эксперименте потеря первичным ионом одного протона или нейтрона может остаться незамеченной, а вероятность этого 90 %. С другой стороны, вероятность канала  $^8\text{Be} \rightarrow 2\alpha$  из  $^9\text{Be}$  в 12 раз больше, чем из ядра  $^9\text{B}$ . Это скажется в конце концов на вероятности наблюдения  $\alpha$ -частиц из  $^{10}\text{B}$ .

В табл. 3 и 4 приведены вероятности каналов фрагментации  $^9\text{B}$  и  $^9\text{Be}$ . Теперь ожидаемая вероятность наблюдения, например, протона будет получена сперва прямо суммированием по всем каналам, содержащим протон из реакции  $^{10}\text{B} \rightarrow p + \text{all}$ , а затем

Таблица 3

$i$	$\Delta M_i$ , МэВ	$\Delta E_i$ , МэВ	$W$ , %	${}^9\text{B} \rightarrow$
1	0,185	11,478	91,2597	$P + {}^9\text{Be}$
2	18,578	30,224	6,0463	$N + {}^8\text{B}$
3	17,071	40,393	1,3868	$2P + {}^7\text{Li}$
4	18,715	42,023	1,0953	$N + P + {}^7\text{Be}$
5	24,323	59,290	0,0899	$N + 2P + {}^6\text{Li}$
6	27,049	62,029	0,0605	$3P + {}^6\text{He}$
7	29,392	64,343	0,0432	$2N + P + {}^6\text{Be}$
8	28,913	75,542	0,0085	$N + 3P + {}^5\text{He}$
9	29,985	76,601	0,0073	$2N + 2P + {}^5\text{Li}$
10	28,020	86,308	0,0018	$2N + 3P + {}^4\text{He}$
11	47,419	94,053	0,0006	$P + 4D$

Таблица 4

$i$	$\Delta M_i$ , МэВ	$\Delta E_i$ , МэВ	$W$ , %	${}^9\text{Be} \rightarrow$
1	1,664	10,869	92,9545	$N + {}^8\text{Be}$
2	16,888	26,101	5,7014	$P + {}^8\text{Li}$
3	18,921	37,336	0,7274	$N + P + {}^7\text{Li}$
4	20,564	38,969	0,5393	$2N + {}^7\text{Be}$
5	26,172	53,789	0,0357	$2N + P + {}^6\text{Li}$
6	28,899	56,525	0,0216	$N + 2P + {}^6\text{He}$
7	31,241	58,846	0,0141	$3N + {}^6\text{Be}$
8	30,763	67,595	0,0028	$2N + 2P + {}^5\text{He}$
9	31,836	68,656	0,0023	$3N + P + {}^5\text{Li}$
10	29,870	75,912	0,0006	$3N + 2P + {}^4\text{He}$

Таблица 5

Ядро	$P$	$D$	$T$	${}^3\text{He}$	${}^4\text{He}$	${}^5\text{He}$	${}^5\text{Li}$
$W$ , % $\rightarrow$	28,7	5,4	5,0	5,0	21,0	0,0008	0,0007
Ядро	${}^6\text{He}$	${}^6\text{Li}$	${}^6\text{Be}$	${}^7\text{Li}$	${}^7\text{Be}$	${}^8\text{Li}$	${}^8\text{Be}$
$W$ , % $\rightarrow$	0,0056	0,0084	0,004	0,134	0,105	0,4	10,5

надо учесть вероятность наблюдения  ${}^5\text{He}$  и  ${}^5\text{Li}$  в каналах фрагментации  ${}^{10}\text{B}$  и вероятность наблюдения протона в них. Протоны могут быть прямыми и каскадными. В табл. 5 приведены вероятности наблюдения заряженных частиц при фрагментации  ${}^{10}\text{B}$  через все промежуточные состояния. В таблице не приводится вероятность наблюдения нейтронов. Из этой таблицы можно получить и относительные вероятности частиц (или групп частиц). Так, отношение  $W(p):W({}^3\text{He} + {}^4\text{He}) = 0,287 : 0,215$ , а  $W({}^8\text{B}) = 0,105$ .

Наличие пучка ионов в ЛВЭ ОИЯИ позволяет надеяться на сравнение этих расчетов с экспериментом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лепехин Ф. Г. Основные закономерности в распределениях поперечных импульсов фрагментов релятивистских ядер // Основные результаты научных исследований ЛИЯФ (1990–1991). СПб., 1992. С. 80–81.
2. Лепехин Ф. Г., Симонов Б. Б. Фрагментация релятивистских ядер в ядерных фотоэмульсиях. Препринт ПИЯФ 1885. Гатчина, 1993. С. 33.
3. Лепехин Ф. Г. Партоновая картина фрагментации релятивистских ядер // Физика атомного ядра и элементарных частиц: Материалы 31-й Зимней шк. ПИЯФ. СПб., 1997. С. 315–348.
4. Синай Я. Г. Динамические системы-2 // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления-2. ВИНТИ. М., 1985. С. 115.
5. Лепехин Ф. Г. Струи фрагментов релятивистских ядер в ядерных фотоэмульсиях // Физика атомного ядра и элементарных частиц: Материалы 34-й Зимней шк. ПИЯФ. СПб., 2000. С. 474–497.
6. Goldhaber A. S. Statistical Model of Fragmentation Processes // Phys. Lett. B. 1974. V. 53. P. 306.
7. Monitz E. J. et al. Nuclear Fermi Momenta from Quasielastic Electron Scattering // Phys. Rev. Lett. 1971. V. 26. P. 445.
8. Lepikhin F. G., Seliverstov D. M., Simonov B. B. Yields and transverse momenta of the  $^6\text{Li}$  fragments in the emulsion at 4.5 GeV/c per nucleon // Eur. Phys. J. A. 1998. V. 1. P. 137.
9. Lepikhin F. G., Levitskaya O. V., Simonov B. B. About the Correlations of the Fragment Transverse Momenta at Multifragmentation of Relativistic Nuclei. Preprint PNPI 2313. Gatchina, 1999. P. 19.
10. Белая В. В. и др. Фрагментация ядра углерода на три альфа-частицы в пропановой пузырьковой камере при импульсе 4,2 ГэВ/с на нуклон // ЯФ. 1996. Т. 59. С. 869.
11. Аветян Ф. А. и др. Когерентная диссоциация  $^{16}\text{O} \rightarrow 4\alpha$  в фотоэмульсии при импульсе 4,5 ГэВ на нуклон // Там же. С. 110.
12. Глаголев В. В. и др. К вопросу о фрагментации релятивистских ядер кислорода во взаимодействиях с протонами // ЯФ. 2000. Т. 63. С. 575.
13. Бьюклинг Е., Каянти К. Кинематика элементарных частиц. М., 1975. С. 338.

Получено 10 июля 2002 г.



УДК 530.145

## NUCLEAR TELEPORTATION (PROPOSAL FOR AN EXPERIMENT)

*B. F. Kostenko*<sup>a1</sup>, *V. D. Kuznetsov*<sup>a</sup>, *M. B. Miller*<sup>b</sup>,  
*A. V. Sermyagin*<sup>b</sup>, *D. V. Kamanin*<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

<sup>b</sup> Institute of Physical and Technology Problems, Dubna

Since its discovery in 1993, quantum teleportation (QT) is a subject for intense theoretical and experimental efforts. Experimental realizations of QT have so far been limited to teleportation of light. The present letter gives a new experimental scheme for QT of heavy matter. We show that the standard experimental technique used in nuclear physics may be successfully applied to teleportation of spin states of atomic nuclei. It was shown that there are no theoretical prohibitions upon a possibility of a complete Bell measurement, so that implementation of all four quantum communication channels is at least theoretically available. A general expression for scattering amplitude of two  $\frac{1}{2}$ -spin particles was given on the Bell operator basis, and peculiarities of the Bell states registration are briefly discussed.

С момента открытия в 1993 г. квантовая телепортация (КТ) является предметом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований. Экспериментальная реализация КТ до настоящего времени осуществлена лишь для квантов света. В настоящей работе приводится новая экспериментальная схема для телепортации тяжелой материи. Показывается, что стандартная экспериментальная техника, используемая в ядерной физике, с успехом применяется для телепортации спиновых состояний атомных ядер. Установлено, что нет никаких теоретических запретов на осуществление полного белловского измерения. Это означает, что реализация всех четырех возможных квантовых каналов передачи информации, по крайней мере теоретически, возможна. Дано общее выражение для амплитуды рассеяния двух частиц со спином  $\frac{1}{2}$  в операторном базисе Белла, а также кратко описаны особенности регистрации белловских состояний.

### INTRODUCTION

Not long ago only science fiction authors ventured to use a term «teleportation». However in the last few years the situation drastically changed. In a landmark work [1] a procedure for teleporting an unknown quantum state from one location to another was described. Recent experiments have proved that this process can actually happen [2, 3]. Now invention of QT is expected to have a great influence on the future computation and communication hardware comparable with the impact of radio network on modern technique. It may have important applications in superfast quantum computers (theoretical at present) [4–7] as well as in utilizing quantum phenomena to ensure a secure data transmission (by means of the so-called quantum cryptography) [8–10]. Practical realization of quantum information processing

---

<sup>1</sup>e-mail: kostenko@cv.jinr.ru

requires special quantum gates which cannot be performed through unitary operations, but may be constructed with the use of quantum teleportation for a basis element [11]. Recently a one-to-one correspondence between quantum teleportation and dense coding schemes was established as well [12].

Besides a relevancy to such applications as quantum computing, QT is also a new fundamental concept in quantum physics. Experimental demonstrations show that QT is an experimentally achievable technique to study the phenomenon of quantum entanglement. Indeed, the very phenomenon of QT appeared to be possible only due to the Einstein–Podolsky–Rosen correlations (see below), which till now are confirmed exactly only for photons. The same is true for QT, because only entangled optical beams have been so far used to teleport quantum states of massless matter.

Since quantum information processing involves material particles such as atoms and ions, teleportation of heavy matter is considered now as the next necessary step for obtaining a complete set of quantum processing tools [13–16].

We propose here a new experimental scheme for QT of heavy matter based on a standard experimental nuclear physics technique and expected to be fulfilled in the nearest one or two years. To the best of our knowledge other methods require at least ten years to be successful.

### ACTION-AT-A-DISTANCE (TELEPORTING INFORMATION)

In 1935, Albert Einstein and his colleagues Boris Podolsky and Nathan Rosen (EPR) developed a gedanken experiment to show as they believed a defect in quantum mechanics (QM) [17, 18]. This experiment has got the name of EPR-paradox. An essence of EPR-paradox is as follows. There are two particles that have interacted with each other for some time and have constituted a single system. In the QM that system is described by a certain wave function. When the interaction is terminated and the particles flew far away from each other they are as yet described by the same wave function. However individual states of each separated particle are completely unknown. Moreover, definite individual properties do not exist in principle as the QM postulates prescribe. It is only after **one** of the particles is registered by a detection instrument that the states arise to existence for **both** of them. Furthermore, these states are generated simultaneously regardless of the distance between the particles at the moment. It looks like one particle informs instantly the other of its state.

The real (not just «gedanken») experiments on teleportation of information of this type, or «a spooky-action-at-a-distance», as A. Einstein called it, were carried out only 30–35 years later, in the seventies–eighties [19, 20]. Experimenters, however, managed to achieve full and definite success only for photons, though attempts to perform experiments with atoms [21] and protons were also undertaken [22]. For the case of two photons the experiments were carried out for various distances between them at the moment of registration, and the EPR-correlations were shown to survive up to as large distances as more than ten kilometers [23]. In the case of protons, an experiment was carried out only for much less distances of about a few centimeters and the condition of causal separation,  $\Delta x > c\Delta t$ , was not met. Thus it was not fully persuasive, as have been recognized by the authors of the work [22] themselves.

## TELEPORTING PHOTON-QUANTUM STATE (OR THE LIGHT QUANTUM ITSELF?)

The next step in this direction that suggested itself was not merely the «action-at-a-distance», but transmission of a quantum state from one quantum object to another. Namely, this process was called QT. In spite of the successful EPR-effect experiments, until recently even this kind of teleportation was believed to be impossible at all. At first sight it seems as Heisenberg uncertainty principle would forbid the very first step of the teleportation which was meant as an extraction of complete information about the inner properties of a quantum object to be teleported. But it cannot be done because of the impossibility of measuring simultaneously exact values for the so-called complementary variables of a quantum microscopic object (e. g., spatial coordinates and momenta). Nevertheless, in 1993, a group of physicists (C. Bennet and his colleagues) managed to get round this difficulty [1]. They showed that measurement of full quantum information is not necessary for quantum states transferring from one object to another. Instead, it was proposed to create the so-called EPR-channel of communication on the basis of EPR-pair of two quantum particles. Let it be photons  $B$  and  $C$ , shown in Fig. 1. After they have interacted in a way to form a single system, decaying afterward, the photon  $B$  is directed to the «point of departure», where it meets  $A$  within a registration system. The system is arranged in a mode (see below) to «catch» only those events which leave no choice to  $C$  but to take a state that  $A$  had initially (before its interaction with  $B$  in the detector at the «point of departure»). This experimental technique is very fine but well known to those skilled in the EPR-art.

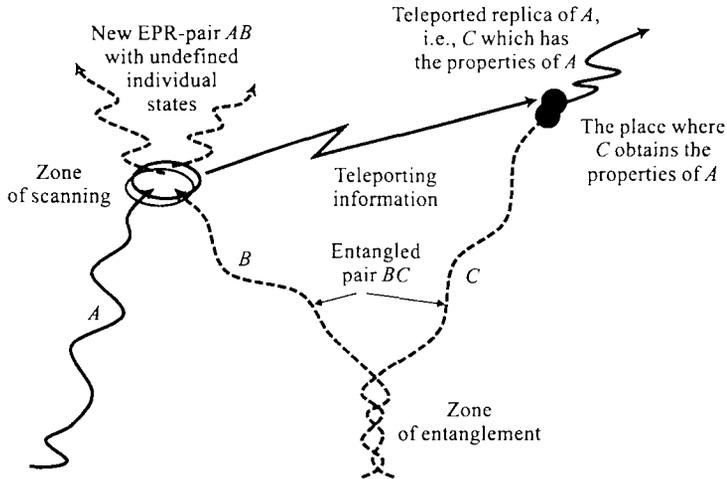


Fig. 1. Illustration of a general idea how the teleportation can be realized. Here  $A$  is a photon we want to pass to a destination place;  $B$  and  $C$ , representing an EPR-pair of photons, constitute the so-called quantum transmission channel. As a result, definite properties of  $A$  are destroyed completely at the zone of scanning, and at another place we have the photon  $C$  with the properties  $A$  had just before it met intermediary object  $B$  («vehicle»). Note that the vehicle first contacts the  $C$  photon to which the «cargo» has to be transported, and only later it calls  $A$  to take the cargo from it

What is important from the principal point of view, it is «disappearing» of  $A$  in the place, notified in Fig. 1 as «zone of scanning» (ZS). Indeed, interaction of  $B$  and  $A$  destroys the  $A$  photon, in a sense that none of the two photons outgoing from ZS has definite properties of  $A$ . They constitute a new pair of photons, which only as a whole has some quantum state, and the individual components of the pair are deprived of this property. Therefore, in some sense the photon  $A$  really disappears at ZS. Exactly at the same moment the photon  $C$  obtains the properties  $A$  had in the beginning. Once it happened, in view of the principle of identity of elementary particles, we can say that  $A$ , disappearing at ZS, reappears at another location. Thus, the quantum teleportation is accomplished.

This process has several paradoxical features. In spite of the absence of contacts between objects (particles, photons)  $A$  and  $C$ ,  $A$  manages to pass its properties to  $C$ . It may be arranged in such a way that the distance from  $A$  to  $C$  is large enough to prevent any causal signals between them! Furthermore, in contrast to the transportation of ordinary material cargo, when a delivery vehicle first visits the sender to collect a cargo from it, quantum properties are delivered in a backward fashion. Here the photon  $B$  plays a role of the delivery vehicle, and one can see that  $B$  first interacts with the recipient ( $C$  photon) and only after that it travels to the sender ( $A$ ) for the «cargo».

Finally, to reconstruct initial object completely it is necessary to inform a receiver at the destination about a result of the measurement in ZS. This allows him to accomplish processing of quantum signal (incoming with the particle  $C$ ) in a due manner. Therefore, one more channel of communication is needed for an ordinary or classical information transmission. Only receiving a message (using the classical communication line) that  $A$  and  $B$  form a **new EPR-pair with zero total spin**, an observer at destination may be sure that the properties of  $C$  are identical to those of  $A$  before teleportation. In the case when  $A + B$  system has nonzero total spin, some additional transformation of quantum signal is needed (see below).

The new idea was immediately recognized as an important one and several groups of experimenters set to implement it concurrently. Nevertheless, it took more than four years to overcome all technological obstacles on the way [2,3]. That was because such experiments, being the records, are always a step beyond the limits of experimental state of the art achieved before.

## START WITH PROTONS

The purpose of this paper is to show that experimental set-ups and instruments developed for conventional nuclear-physics studies allow one to design a new way of performing nonzero mass matter teleportation, with a prospect to implement the project in a rather short time. For example, in accordance with our estimates, teleportation of protons could be achieved in one or two years.

In Fig. 2, the layout of an experiment on teleportation of spin states of protons from a polarized  $\text{PH}_2$  target into the point of destination (target C) is shown. A proton beam  $p_0$  of a suitable energy within the range of 20–50 MeV bombards the  $\text{LH}_2$  hydrogen target [24]. According to the known experimental data, the scattering in the  $\text{LH}_2$  target onto the direction of the second target (corresponding the angle  $\theta \simeq 90^\circ$  at the c. m.) occurs within an acceptable accuracy through the singlet intermediary state [22]. Thus, the outgoing protons  $p_2$  and  $p_3$  form the two-proton entangled system fully analogous to the EPR-correlated photons used in

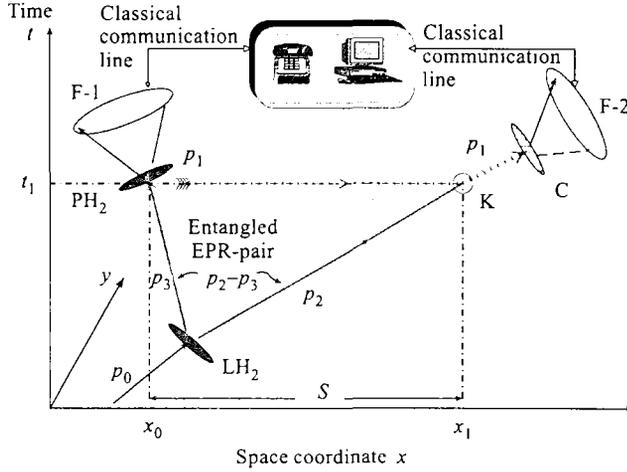


Fig. 2. Layout of experiments on proton teleportation. Here  $p_0$  is initial proton from the accelerator,  $LH_2$  is a liquid hydrogen target, which may be also replaced by ordinary polyethylene ( $CH_2$ ) foils, protons  $p_2$  and  $p_3$  constitute an entangled EPR-pair,  $PH_2$  denotes polarized hydrogen target,  $C$  is a carbon target which operates as an analyzer of the proton polarization using the left-right asymmetry of scattering,  $F-1$  and  $F-2$  are large-aperture position-sensitive particle detectors (the so-called Fobos-facilities). Proton spin-state is being teleported from the  $PH_2$  target placed at  $x_0$  to the point  $x_1$ .  $K$  is a point where the spin of  $p_2$  gets a definite orientation (which is just the same that one of the protons  $p_1$  in the  $PH_2$  target had before the scattering of  $p_3$  from it). The proton  $p_1$  loses its definite quantum state, as it forms a new EPR-pair together with the scattered proton  $p_3$ . The role of classical communication channel including a data-processing centre is explained in the text

the experiments on the teleportation of massless matter, as it was discussed in the preceding section. At this moment the system is in a state

$$|\Psi_{23}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle - |\downarrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle).$$

One of the scattered protons,  $p_2$ , then travels to the point of destination (the target-analyzer  $C$ ), while the other,  $p_3$ , arrives to a point where teleportation is started, i. e., to  $PH_2$  target. The last one is used as a source of particles to be teleported. Therefore, protons within this target play the same role as the photons  $A$  in the above section. But there are two features differentiating the case of protons from the photon one. First, the protons  $p_1$  are within the motionless target (and thus they are motionless themselves) with a much more proton density; besides, the protons within the  $PH_2$  target have quite definite quantum state, determined by a direction of polarization,

$$|\phi_1\rangle = a|\uparrow_1\rangle + b|\downarrow_1\rangle$$

which could be oriented accidentally and, thus, unknown to the experimenters.

In the case, when the scattering in the polarized  $PH_2$  target occurs in the same kinematics conditions as in the  $LH_2$  target (i. e., at the c. m. angle  $\theta \simeq 90^\circ$ ), the total spin of the particles

$p_1$  and  $p_3$  also must be equal to zero after collision. To detect the events, a removable circular module F-1 of the facility «Fobos» is supposed to be used [25]. Due to this fact, the detection efficiency is hoped to be much enhanced. If all the above conditions are provided, the protons reaching a point K will suddenly receive the same spin projections as the protons in the polarized [26]  $\text{PH}_2$  target. Indeed, using the so-called Bell's basis,

$$|\Psi_{13}^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\rangle|\downarrow_3\rangle \pm |\downarrow_1\rangle|\uparrow_3\rangle),$$

$$|\Phi_{13}^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\rangle|\uparrow_3\rangle \pm |\downarrow_1\rangle|\downarrow_3\rangle),$$

the state of three-particle system before the last scattering may be written in the form

$$\begin{aligned} |\Psi_{123}\rangle = |\phi_1\rangle|\psi_{23}\rangle = & \frac{1}{2} [ |\Psi_{13}^{(-)}\rangle(a|\uparrow_2\rangle + b|\downarrow_2\rangle) + |\Psi_{13}^{(+)}\rangle(a|\uparrow_2\rangle - b|\downarrow_2\rangle) + \\ & + |\Phi_{13}^{(-)}\rangle(-a|\downarrow_2\rangle - b|\uparrow_2\rangle) + |\Phi_{13}^{(+)}\rangle(-a|\downarrow_2\rangle + b|\uparrow_2\rangle) ]. \end{aligned}$$

The last scattering and measurement with F-1 select from this state the term containing  $|\Psi_{13}^{(-)}\rangle$ , and therefore the state of the particle 2 will be  $a|\uparrow_2\rangle + b|\downarrow_2\rangle$ . Thus, if the coincidence mode of the detection is provided via any classical channel, then a strong correlation has to take place between polarization direction in the  $\text{PH}_2$  target and the direction of the deflection of  $p_2$  protons scattered in the carbon target C. Here the carbon foil C plays a role of the polarization analyzer, i. e., one measures the asymmetry of the left-right counting rates to determine a spin state orientation of  $p_2$  before the scattering [27].

In particular, if one succeeds to make a distance between the detectors F-1 and F-2 to be sufficiently large and the difference between the moments of registration in F-1 and F-2 to be short enough, then it will be possible to meet the important criteria of the causal independence between the events of the «departure» of the quantum state from  $\text{PH}_2$  target and «arrival» of this «cargo» to the recipient (proton  $p_2$ ) at the point K. The measurements consist of recording signals entering two independent but strictly synchronized memory devices with the aim to select afterward those events alone that for sure appeared to be causal separated. Thus, experimental set-up shown in Fig. 2 also allows one, at least in principle, to fill the gap in verification of the EPR-effect for heavy matter.

### GENERAL CONSIDERATION

In the experiments that were carried out until now it was managed to use only one quantum information transmission channel corresponding to registration of Bell's state  $|\Psi_{13}^{(-)}\rangle$ . Is it possible to involve other channels utilizing the states  $|\Psi_{13}^{(+)}\rangle$ ,  $|\Phi_{13}^{(-)}\rangle$ , and  $|\Phi_{13}^{(+)}\rangle$ ? To answer this question let us consider a general expression for scattering amplitude of two particles, not necessarily identical ones, with the spin value  $\frac{1}{2}$  [28],

$$\begin{aligned} \hat{f} = & A + B(\mathbf{S}_1\boldsymbol{\lambda})(\mathbf{S}_2\boldsymbol{\lambda}) + C(\mathbf{S}_1\boldsymbol{\mu})(\mathbf{S}_2\boldsymbol{\mu}) + D(\mathbf{S}_1\boldsymbol{\nu})(\mathbf{S}_2\boldsymbol{\nu}) + \\ & + E((\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)\boldsymbol{\nu}) + F((\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2)\boldsymbol{\nu}). \end{aligned}$$

Using a relation

$$(\mathbf{S}_1 \mathbf{n})(\mathbf{S}_2 \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \left[ ((\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) \mathbf{n})^2 - \frac{1}{2} \right],$$

in the case of the coordinate system to be fixed for a definiteness in the following way

$$\lambda \parallel \mathbf{x}, \quad \mu \parallel \mathbf{y}, \quad \nu \parallel \mathbf{z},$$

the expression for  $\hat{f}$  can be represented in the form

$$\hat{f} = A + \frac{B}{2} \left[ S_x^2 - \frac{1}{2} \right] + \frac{C}{2} \left[ S_y^2 - \frac{1}{2} \right] + \frac{D}{2} \left[ S_z^2 - \frac{1}{2} \right] + ES_z - Fs_z,$$

where

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2, \quad \mathbf{s} = \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2.$$

The scattering operator  $\hat{f}$  can be now expressed in terms of the Bell's state transition operators making use of the following formulas

$$\begin{aligned} S_x &= |\Psi^{(+)}\rangle\langle\Phi^{(+)}| + |\Phi^{(+)}\rangle\langle\Psi^{(+)}|, \\ S_y &= i [|\Psi^{(+)}\rangle\langle\Phi^{(-)}| - |\Phi^{(-)}\rangle\langle\Psi^{(+)}|], \\ S_z &= |\Phi^{(-)}\rangle\langle\Phi^{(+)}| + |\Phi^{(+)}\rangle\langle\Phi^{(-)}|, \\ s_z &= |\Psi^{(+)}\rangle\langle\Psi^{(-)}| + |\Psi^{(-)}\rangle\langle\Psi^{(+)}| \end{aligned}$$

and a decomposition of the unity  $\hat{1} = \hat{P}_{\Psi^-} + \hat{P}_{\Psi^+} + \hat{P}_{\Phi^-} + \hat{P}_{\Phi^+}$ . As a result one obtains

$$\hat{f} = a\hat{P}_{\Psi^-} + b\hat{P}_{\Psi^+} + c\hat{P}_{\Phi^-} + d\hat{P}_{\Phi^+} + ES_z + Fs_z, \quad (1)$$

where

$$a = A - \frac{B+C+D}{4}, \quad b = a + \frac{B+C}{2}, \quad c = a + \frac{C+D}{2}, \quad d = a + \frac{B+D}{2}.$$

In the case  $E = F = 0$ , expression (1) is a usual spectral decomposition for the operator  $\hat{f}$ , which can be interpreted then as a quantum observable corresponding to measurement of one of the Bell's state. Therefore, to register a definite Bell's state one has to find such experimental conditions at which all coefficients but one of  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , or  $d$  in the expression (1) turn into zero. For these purposes, the type and energy of colliding particles, as well as the angle which scattered particles are recorded at, could be altered. Since the number of necessary conditions formulated above is less than the number of free coefficients in (1), it is clear that registration of each Bell's state is possible at least theoretically.

Directions which spin projections of the scattered particles should be measured along for detecting the states  $|\Psi^{(+)}\rangle$ ,  $|\Phi^{(-)}\rangle$ , and  $|\Phi^{(+)}\rangle$  form three orthogonal spatial vectors. It follows from the relations

$$|\Psi^{(+)}\rangle = \mathbf{e}_1, \quad |\Phi^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 \pm \mathbf{e}_3),$$

where  $\mathbf{e}_i$  are orthonormalized states with the definite values of the spin and its projections,

$$\mathbf{e}_1 = |1, 0\rangle, \quad \mathbf{e}_2 = |1, 1\rangle, \quad \mathbf{e}_3 = |1, -1\rangle,$$

which transform in accordance with 3-vector representation of the rotational group. It is clear that spatial rotations at the angle  $\frac{\pi}{2}$ , corresponding to  $\mathbf{e}_i \rightarrow \pm \mathbf{e}_j$ , represent the group of permutation for the Bell's states considered (putting aside an unimportant phase factor  $-1$ ). Thus the possibility of registration of  $|\Psi^{(+)}\rangle$  state also opens the way to register two other states  $|\Phi^{(+)}\rangle, |\Phi^{(-)}\rangle$  by means of change on  $\frac{\pi}{2}$  of the direction along which the spin projection is measured.

For identical  $\frac{1}{2}$ -spin particles the scattering operator (1) has some additional symmetries, so that in c. m. s. one has

$$\begin{aligned} a(\theta) &= a(\pi - \theta), & b(\theta) &= -b(\pi - \theta), \\ c(\theta) &= -c(\pi - \theta), & d(\theta) &= -d(\pi - \theta), \\ E(\theta) &= E(\pi - \theta), & F(\theta) &= F(\pi - \theta). \end{aligned}$$

For nucleon–nucleon scattering we have  $F \equiv 0$  as total spin squared of such a system is conserved and the last two terms in (1) describe transitions between Bell's state with different  $S^2$ . Thus, e. g., for two identical nucleons at  $\theta = \frac{\pi}{2}$  one obtains

$$\hat{f} = a\hat{P}_{\Psi^-} + E \left[ |\Phi^{(-)}\rangle\langle\Phi^{(+)}| + |\Phi^{(+)}\rangle\langle\Phi^{(-)}| \right].$$

Experimental identification of Bell's states  $|\Psi^{(-)}\rangle$  and  $|\Psi^{(+)}\rangle$  is rather simple due to the characterization of these states by the definite values of total spin and its projections ( $|\mathbf{S}| = 0, S_z = 0$ , and  $|\mathbf{S}| = 1, S_z = 0$ , respectively). The result of spin projection measurement for the particles 1 and 3 is

$$S_{z1} = \pm \frac{1}{2}, \quad S_{z3} = \mp \frac{1}{2}$$

for any choice of z axis direction, provided their initial state is  $|\Psi^{(-)}\rangle$ .

For particles in the  $|\Psi^{(+)}\rangle$  state such correlations take place only if the spin projections are measured along a definite axis  $\mathbf{n}$ . If the axis of measuring is deflected at an angle  $\theta$  from this direction, the probability to have  $S_{z1} + S_{z3} = 0$  will decrease as  $\cos^2 \theta$ . One may expect that at the energies considered, there is a scattering angle interval corresponding to  $l = 1$  and, therefore, to the  $|\Psi^{(+)}\rangle$  final state of two protons.

It seems more difficult to identify states  $|\Phi^{(-)}\rangle$  and  $|\Phi^{(+)}\rangle$ . In this case, it is necessary first to find out a direction  $\mathbf{n}'$  (which is perpendicular to  $\mathbf{n}$ ) for which measurements of spin projections give either  $S_{z1} = \frac{1}{2}$  and  $S_{z3} = \frac{1}{2}$  or  $S_{z1} = -\frac{1}{2}$  and  $S_{z3} = -\frac{1}{2}$  with the same probability  $p = 0.5$ . Now measurement of the spin projection of the particle 2 allows one to determine what of two possible states,  $|\Phi_{13}^{(-)}\rangle$  or  $|\Phi_{13}^{(+)}\rangle$ , the scattering has really occurred into.

## CONCLUSION

Referring to the principle of identity of elementary particles of the same sort with the same quantum characteristics, i. e., the protons in our case, we can say that protons from a polarized target PH<sub>2</sub> are transmitted to the destination point C (through the point K). Thus, in the nearest future, teleportation of protons can come from the domain of dreams and fiction to the reality in the physicists' laboratories.

We wish to thank I. Antoniou, F. A. Gareev, V. V. Ivanov, O. A. Khrustalev, G. P. Pron'ko, and V. V. Uzhinsky for helpful discussions and support.

## REFERENCES

1. *Bennett C. H. et al.* // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 70. P. 1895.
2. *Bauwmeester D. et al.* // *Nature.* 1997. V. 390. P. 575.
3. *Boschi D. et al.* // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80. P. 1121.
4. *Shor P. W.* Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring // *Proc. of the 35th Annual Symp. on Foundations of Computer Science, Santa Fe, NM, 1994.* IEEE Computer Society Press. P. 124.
5. *Grover L. K.* // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79. P. 325.
6. *Jozsa R., Schumacher B.* // *J. Mod. Optics.* 1994. V. 41. P. 2343.
7. *Bennet C. H., Wiesner S. J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1992. V. 69. P. 2881.
8. *Dentsch D.* // *Phys. World.* 1993. V. 6. P. 22.
9. *Bennet C. H. et al.* Quantum Cryptography, or Unforgettable Subway Tokens // *Advances in Cryptography.* N.Y., 1993.
10. *Ekert A. K et al.* // *Phys. Rev. A.* 1994. V. 50. P. 1047.
11. *Gottensman D., Chuang I. L.* // *Nature.* 1999. V. 402. P. 390.
12. *Werner R. W.* All Teleportation and Dense Coding Schemes. E-print: quant-ph/0003070.
13. *Kuzmich A., Polzik E. S.* Atomic Quantum State Teleportation and Swapping. E-print: quant-ph/0003015.
14. *Maielerle C. S., Lidar A., Harris R. A.* // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. P. 5928.
15. *Bose S. et al.* // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. P. 5158.
16. *Parkins A. S., Kimble H. J.* // *J. Optics B.* 1999. V. 1. P. 4967.
17. *Einstein A., Podolsky B., Rosen N.* // *Phys. Rev.* 1935. V. 41. P. 777.
18. *Bohr N.* // *Ibid.* V. 48. P. 696.
19. *Aspect A., Dalibard J., Roger G.* // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 49. P. 1804.

20. *Clauser J. F., Shimony A.* // *Rep. Prog. Phys.* 1978. V. 41. P. 1881.
21. *Hagley E. et al.* // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79. P. 1.
22. *Lamehi-Rachti M., Mittag W.* // *Phys. Rev. D.* 1976. V. 14. P. 2543.
23. *Tittel W. et al.* // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. P. 3563.
24. *van Uden M. A. et al.* // *Nucl. Instr. Meth. A.* 1999. V. 424. P. 580.
25. *Ortlepp H.-G. et al.* FOBOS Collaboration. Scientific Report 1995/1996 Heavy Ion Physics. Dubna, 1997. P. 236.
26. *Crabb D. J., Meyer W.* Solid Polarized Targets for Nuclear and Particle Physics Experiments // *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 1997. V. 47. P. 67.
27. *Tschalär C., Batty C. J., Kilvington A. I.* // *Nucl. Instr. Meth. A.* 1970. V. 78. P. 141.
28. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Quantum Mechanics. M.: Science, 1989 (in Russian).

Received on May 24, 2001.



УДК 539.12.01; 539.141; 524.8

## О НЕНАБЛЮДАЕМОСТИ «СКЛЕИВАЮЩИХ» БОЗОНОВ В МОДЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

*М. И. Широков*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждаются векторно-взаимодействующие фермионное  $\psi(\mathbf{x})$  и бозонное  $\varphi(\mathbf{x})$  поля. Показано, что «одетые» бозоны этой модели не взаимодействуют с фермионами и между собой. Если  $\varphi(\mathbf{x})$  не взаимодействует с другими полями физики частиц, то соответствующие «одетые» бозоны имеют свойство космологической «темной материи»: они не могут быть детектированы в земных лабораториях. Для сравнения отметим, что в КХД ненаблюдаемость изолированных глюонов объясняется их несуществованием из-за конфайнмента цвета.

Fermionic  $\psi(\mathbf{x})$  and bosonic  $\varphi(\mathbf{x})$  fields with vector coupling are discussed. It is shown that «clothed» bosons of the model do not interact with fermions and between themselves. If  $\varphi(\mathbf{x})$  does not interact with other fields of the particle physics, then the «clothed» bosons have properties of the cosmological «dark matter»: they cannot be detected in Earth's laboratories. This cause of the boson invisibility contrasts with the origin of the unobservability of the isolated gluons in QCD which is explained by the confinement of colour.

Взаимодействие между фермионами в полевых теориях обычно описываются посредством обмена «склеивающими» бозонами. Примеры — взаимодействие Юкавы типа  $\psi^\dagger \gamma_5 \psi \varphi$ , КЭД, КХД. В первых двух теориях «склеивающие» бозоны (мезоны и фотоны) могут наблюдаться наряду с фермионами. Изолированные глюоны КХД не наблюдаются, и это объясняется с помощью дополнительной гипотезы о конфайнменте цвета (заметим, что она не является теоремой, выводимой из лагранжиана теории; см., например, [1–3]). Здесь обсуждается теоретическая возможность такого «склеивания» фермионов, когда соответствующие бозоны существуют, но не наблюдаются (более точную формулировку см. в заключительном п. 4). В п. 1–3 излагаются основные исходные положения предлагаемого механизма этого явления:

1) описание бозонов с помощью *однобозонноподобных* собственных векторов полного гамильтониана, называемых «одетыми» бозонными состояниями;

2) простая модель теории, в которой фермионное поле  $\psi$  и скалярное поле  $\varphi$  связаны взаимодействием вида ток–градиент (см. далее (10));

3) унитарное преобразование полного гамильтониана модели, позволяющее точно найти «одетые» бозонные состояния.

В п. 4 формулируется основное следствие этих положений: ненаблюдаемость «одетых» бозонов. Обсуждаются другие отличия от модели Юкавы.

1. Наблюдаемые одночастичные состояния  $\Phi(\mathbf{k})$  с определенным импульсом  $\mathbf{k}$  не изменяются во времени. Поэтому они не могут описываться «голыми» состояниями (собственными векторами свободной части  $H_0$  полного гамильтониана  $H$ ), поскольку последние не стационарны. Например, «голый» бозон может переходить со временем в

пару фермион–антифермион и обратно. Принимаем, что бозонные одночастичные состояния  $\Phi(\mathbf{k})$  должны описываться подходящими *однобозонноподобными* собственными векторами  $H$ , являющимися стационарными. В нашей модели их можно найти точно с помощью унитарного преобразования  $H \rightarrow H' = \exp(iS)H \exp(-iS)$  (см. далее).

2. Модель определяется ее полным гамильтонианом  $H = H_0 + H_I$ , где  $H_0$  есть сумма свободного фермионного  $H_{0f}$  и бозонного  $H_{0b}$  гамильтонианов:  $H_0 = H_{0f} + H_{0b}$ . Они являются обычными функциями шредингеровских полей  $\psi(\mathbf{x})$ ,  $\psi^\dagger(\mathbf{x})$  и  $\varphi(\mathbf{x})$ ,  $\pi(\mathbf{x})$ :

$$H_{0f} = \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x})(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m)\psi(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$H_{0b} = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2(\mathbf{x}) + \nabla\varphi(\mathbf{x}) \cdot \nabla\varphi(\mathbf{x}) + \mu^2\varphi^2(\mathbf{x})]. \quad (2)$$

Постулируются канонические перестановочные соотношения вида

$$[\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\psi_\alpha^*(\mathbf{x}), \psi_\beta(\mathbf{y})\}_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3)$$

(выписаны только ненулевые коммутаторы и антикоммутаторы;  $\psi_\alpha^*$  есть эрмитовски-сопряженная дираковская компонента  $\psi_\alpha$ ).

К  $H_0$  добавляется трilinearное нелокальное взаимодействие  $H_I$  (см. далее формулу (10)), выражающееся через те же шредингеровские поля.

*Замечания.* Не предполагается, что существует какой-либо лагранжиан, из которого следовало бы это взаимодействие. Не требуется, чтобы модель была релятивистской теорией. Она не является инвариантной относительно локальных калибровочных преобразований, как и модель Юкавы.

3. Унитарно преобразованный гамильтониан  $H' = \exp(iS)H \exp(-iS)$  может быть вычислен с помощью формулы

$$H' = H + [iS, H] + \frac{1}{2} [iS, [iS, H]] + \dots, \text{ или} \quad (4)$$

$$H' = H_0 + H_I + [iS, H_0] + [iS, H_I] + \dots \quad (5)$$

Эрмитов оператор  $S$  предполагается трilinearным. На него накладывается следующее требование: трilinearные члены в правой части (5) должны отсутствовать:

$$H_I + [iS, H_0] = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) определяет  $S$ , если задано  $H_I$ . Для упрощения изложения принимаем иной подход. Выбираем  $S$  в виде нелокального обобщения оператора, указанного Дайсоном (см. [4, 5]),

$$S = \int d^3x \int d^3y G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) j_0(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y}), \quad j_0(\mathbf{x}) \equiv \sum_\alpha \psi_\alpha^*(\mathbf{x}) \psi_\alpha(\mathbf{x}), \quad (7)$$

и находим  $H_I$  с помощью (6).  $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  есть произвольная функция  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ , из дальнейшей формулы (10) видно, что  $G$  имеет смысл размазки взаимодействия. Для вычисления  $[iS, H_0]$  используем соотношения (3). Получаем

$$[iS, H_{0f}] = + \int d^3x \int d^3y G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla_x \mathbf{j}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y}) - \int d^3x \int d^3y G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_y \varphi(\mathbf{y}), \quad (8)$$

$$[iS, H_{0b}] = - \int d^3x \int d^3y G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) j_0(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{y}). \quad (9)$$

В (8)  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  обозначает дираковский ток:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \psi^\dagger(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}\psi(\mathbf{x}).$$

Из (6)–(9) следует:

$$H_I = \int d^3x \int d^3y G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\varphi(\mathbf{y}) + j_0(\mathbf{x})\pi(\mathbf{y})]. \quad (10)$$

Далее вычисляем коммутацию

$$[iS, H] = -H_I + [iS, H_I]$$

из ряда в правой части (4), используя соотношения

$$[j_0(\mathbf{x}), j_0(\mathbf{y})] = 0, \quad [j_0(\mathbf{x}), \mathbf{j}(\mathbf{y})] = 0,$$

вытекающие из (3). Получаем

$$[iS, H_I] = - \int d^3x \int d^3x' j_0(\mathbf{x}) \left[ \int d^3y G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) G(\mathbf{x}' - \mathbf{y}) \right] j_0(\mathbf{x}'). \quad (11)$$

Для следующей коммутации  $1/2[iS, [iS, H]]$  из (4) теперь имеем, используя  $[S, [S, H_I]] = 0$ :

$$\frac{1}{2} [iS, [iS, H]] = -\frac{1}{2} [iS, H_I].$$

Остальные коммутации в (4) обращаются в нуль, ряд обрывается, и окончательно получаем

$$H' = H_{0b} + H_f, \quad H_f \equiv H_{0f} + V_{ff}, \quad (12)$$

$$V_{ff} \equiv -\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' j_0(\mathbf{x}) F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') j_0(\mathbf{x}'), \quad (13)$$

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \int d^3y G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) G(\mathbf{x}' - \mathbf{y}). \quad (14)$$

Ввиду  $[H_{0b}, H'] = 0$  из (12) следует, что хорошо известные собственные векторы (далее СВ) свободного бозонного гамильтониана  $H_{0b}$  являются СВ оператора  $H'$ . Поскольку  $H' \neq H$ , то они не являются СВ исходного гамильтониана  $H$ . Однако если  $\psi'$  есть СВ для  $H'$ , то  $e^{-iS}\psi'$  есть СВ для  $H$ :

$$H e^{-iS}\psi' = e^{-iS} H' e^{iS} e^{-iS}\psi' = e^{-iS} H' \psi' \sim e^{-iS}\psi'. \quad (15)$$

Все найденные СВ оператора  $H$  можно явно выписать в привычном виде, используя новые бозонные и фермионные операторы

$$\tilde{\varphi} = e^{-iS}\varphi e^{iS}, \quad \tilde{\psi} = e^{-iS}\psi e^{iS}. \quad (16)$$

Для этого перепишем  $H' = \exp(iS)H \exp(-iS)$  в виде

$$H = e^{-iS} H' e^{iS} = H'(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = H_{0b}(\tilde{\varphi}) + H_f(\tilde{\psi}), \quad (17)$$

используя соотношения вида

$$e^{-iS} \varphi^2 e^{iS} = e^{-iS} \varphi e^{iS} e^{-iS} \varphi e^{iS} = \tilde{\varphi}^2$$

и полиномиальную зависимость  $H'(\varphi, \psi)$  от  $\varphi$  и  $\psi$ . Соотношение (17) означает, что исходный гамильтониан  $H(\varphi, \psi) = H_0 + H_I$  приобретает вид суммы свободного бозонного гамильтониана  $H_{0b}(\tilde{\varphi})$  и чисто фермионного оператора  $H_f(\tilde{\psi})$ , если  $H(\varphi, \psi)$  выразить через операторы  $\tilde{\varphi}$  и  $\tilde{\psi}$ . Подчеркнем, что  $H_{0b}(\varphi)$  и  $H_{0b}(\tilde{\varphi})$  одинаково зависят от своих аргументов, но это разные операторы, поскольку  $\tilde{\varphi} \neq \varphi$ .

Гамильтонианы можно выразить не через поля, а через операторы рождения-уничтожения частиц  $a, a^\dagger$  (для бозонов) и  $b, d, b^\dagger, d^\dagger$  (для фермионов), соответствующие разложения полей (см., например, в [6]). Все собственные векторы  $H_{0b}(\tilde{\varphi})$  (являющиеся одновременно СВ для  $H$ ) можно записать с помощью бозонных операторов  $\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}) = \exp(-iS)a^\dagger(\mathbf{k}) \exp(iS)$  в виде  $\Omega, \tilde{a}^\dagger(\mathbf{k})\Omega, \tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}_1)\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)\Omega, \dots$ , где безбозонное состояние  $\Omega$  удовлетворяет уравнениям  $H_f\Omega = 0$  и  $\tilde{a}(\mathbf{k})\Omega = 0$  для всех  $\mathbf{k}$ .

Согласно мотивировке п. 1 векторы  $\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k})\Omega$  следует использовать для описания состояний наблюдаемых одиночных бозонов. Операторы  $\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}), \tilde{a}(\mathbf{k})$  рождают и уничтожают «одетые» бозоны, по терминологии обзора [7]. Соотношение  $\tilde{a} = \exp(-iS)a \exp(iS)$  позволяет найти выражение  $\tilde{a}$  через исходные бозонные и фермионные операторы рождения-уничтожения («голых» частиц).

Отметим, что  $\exp(iS)$  не является «одевающим» преобразованием в отношении фермионов, поскольку состояния вида  $\tilde{b}^\dagger(\mathbf{k})\Omega$  не являются собственными векторами  $H$ . Действительно, в  $V_{ff}(\tilde{\psi})$  (см. (13)) есть члены, содержащие, например,  $\tilde{b}^\dagger \tilde{d}^\dagger \tilde{b}^\dagger \tilde{b}$  (описывающие переход  $f \rightarrow f + f + \bar{f}$ ). «Одетые» фермионные состояния можно найти с помощью описанных в [7] последовательных унитарных преобразований оператора  $H_f(\tilde{\psi})$  (в частности, убирающих из фермион-фермионного взаимодействия вышеупомянутые члены). Для нас сейчас важно только то, что при этом преобразуется только  $H_f(\tilde{\psi})$  и «одетые» фермионные операторы выражаются только через фермионные  $\tilde{\psi}$  и  $\tilde{\psi}^\dagger$  и наоборот. Поэтому отсутствие в (17) взаимодействия полей  $\tilde{\varphi}$  и  $\tilde{\psi}$  означает, что «одетые» бозоны не взаимодействуют также и с «одетыми» (наблюдаемыми) фермионами.

4. Положим, что наше бозонное поле  $\varphi$  взаимодействует только с одним фермионным полем  $\psi$  и не взаимодействует со всеми другими полями физики частиц. Выше было показано, что «одетые» бозоны не взаимодействуют между собой и с «одетыми» квантами поля  $\psi$ . По этим двум причинам «одетые» бозоны не рассеиваются, не рождаются, не уничтожаются и не могут наблюдаться, поскольку в измерительных приборах используется то или иное существующее взаимодействие. Следует сделать оговорку: если у наших бозонов масса ненулевая, то следует допустить возможность их гравитационного взаимодействия с другими частицами ненулевой массы. Посредством такого взаимодействия можно было бы наблюдать макроколичества таких бозонов, но не одиночные бозоны. Таким образом, «одетые» бозоны модели могли бы иметь свойства частиц «скрытой» или «темной» материи, известной в космологии [8, 9].

Отметим, что модель Юкавы предсказывала возможность наблюдения мезонов — переносчиков взаимодействия между нуклонами. «Одетые» бозоны нашей модели ненаблюдаемы в указанном выше смысле. Бозонное поле  $\varphi$  модели проявляет себя только

в порождении фермион-фермионного взаимодействия  $V_{ff}$  (см. (13)). В модели имеется свобода выбора формфактора  $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  в (10) и соответствующих возможных взаимодействий  $V_{ff}$ . При  $G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sim \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  взаимодействие (10) является локальным, а  $V_{ff}$  оказывается контактным:  $F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sim \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  (см. (14)). В общем случае  $V_{ff}$  зависит от параметров формфактора  $G$  и не зависит непосредственно от массы  $\mu$  бозона, в то время как в модели Юкавы радиус нуклон-нуклонного потенциала определяется массой мезона.

Для применения изложенной теоретической возможности в физике частиц нужно найти обобщения модели. Простейшее обобщение получается, когда одно скалярное поле  $\varphi$  взаимодействует с несколькими фермионными полями  $\psi_i$  так, что

$$H_I = \sum_i \int d^3x \int d^3y G_i(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\mathbf{j}_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{y}) + j_{0i}(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{y})].$$

Если  $\psi_i$  есть кварковые поля, то  $\sum_i$  означает сумму по ароматам. Так же, как в п. 3, можно показать, что «одетые» бозоны не взаимодействуют между собой и с «одетыми» квантами всех полей  $\psi_i$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weinberg S. The Quantum Theory of Fields. Cambridge, 2000. V. 2. Ch. 18.7.
2. Окунь Л. Б. Физика элементарных частиц. М., 1984. Гл. III.
3. Готтфрид К., Вайскопф В. Концепции физики элементарных частиц. М., 1988. Гл. 76.
4. Dyson F. J. // Phys. Rev. 1948. V. 73, No. 8. P. 929–930.
5. Okubo S. // Progr. Theor. Phys. 1954. V. 11, No. 1. P. 80–94.
6. Бьеркен Д., Дрелл С. Релятивистские квантовые поля. М., 1978. Гл. 12, 13.
7. Шебеко А. В., Широков М. И. // ЭЧАЯ. 2001. Т. 32, вып. 1. С. 31–95.
8. Физика космоса: Малая энцикл. / Ред. Р. А. Сюняев. М.: Сов. энцикл., 1986.
9. Review of particle properties // Phys. Lett. B. 1990. V. 239. Ch. III.3.

Получено 10 июля 2002 г.



УДК 537.56, 539.18, 621.384

## РАСЧЕТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЭФФЕКТИВНЫХ СЕЧЕНИЙ ИОНИЗАЦИИ В БЫСТРЫХ ИОННО-АТОМНЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

*А. К. Каминский*<sup>1</sup>

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына  
МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

Изложен метод расчета эффективных сечений  $d\sigma/d\Omega$  ионизации, дифференциальных по углу рассеяния налетающего иона, в быстрых столкновениях легких ионов и атомов. Приведены результаты численного расчета угловых распределений ионов Al, Mg (различных зарядов и энергии) после столкновений с атомами Ne, Mg с ионизацией последних. Обсуждена зависимость эффективных сечений ионизации от начальных состояний выбиваемых электронов, заряда и энергии налетающего иона.

The method of the calculations of the ionization effective cross sections  $d\sigma/d\Omega$  differential in the incident ion scattering angle is described in fast collisions of light ions and atoms. The calculated values of angular distributions of the ions Al, Mg (for the different values of charge and energy of ions) after their collisions with the Ne, Mg atoms being ionized are reported. The dependence of such angular distributions on the incident ion charge and energy and the initial state of ejected electron is investigated.

### ВВЕДЕНИЕ

Исследования зарядовых, энергетических и угловых распределений всех частиц после ионно-атомных столкновений являются основным направлением физики ионно-атомных столкновений. Величины указанных выше распределений необходимы также для большого класса научно-технических проблем [1–3].

В [3] изложен метод расчета угловых и энергетических распределений  $d\sigma/d\Omega$  ионов после ионизации в быстрых ионно-атомных столкновениях, когда оба сталкивающиеся партнеры  $A$  и  $B$  имеют  $N_A \leq 10$  и  $N_B \leq 10$  собственных электронов соответственно. Ниже приведены расчеты угловых распределений ионов после ионизации в быстрых ионно-атомных столкновениях, когда налетающий ион (или атом)  $A$  имеет число электронов  $N_A \leq 12$ , а ионизуемый атом (или ион) мишени  $B$  имеет число электронов  $N_B \leq 18$ . Получены необходимые формфакторы, отмечена специфика метода расчета, требующая удвоенной точности счета на компьютерах.

<sup>1</sup>kamin@annal9.npi.msu.su, kamin@he.jinr.ru

## 1. РАСЧЕТ

Дифференциальное по углу рассеяния  $\theta$  налетающего иона (или атома)  $A$  эффективное сечение  $d\sigma/d\Omega$  вырывания электрона из состояния  $|nlm\rangle$  в атоме (или ионе) мишени  $B$  в плосковолновом борновском приближении (PWBA) выражается в виде

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega} = \frac{d\sigma_B^{\text{el}}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_B^{\text{in}}}{d\Omega}, \quad (1)$$

$$\frac{d\sigma_B^{\text{el}}}{d\Omega} = \frac{4a_0^2 z_A^2 M^2}{z_B^{*4} m^2} \int \left[ 1 - \frac{N_A}{z_A} F_A(q) \right]^2 \frac{v' \eta_{nlm}(q, k) dk}{v q^4}, \quad (2)$$

$$\frac{d\sigma_B^{\text{in}}}{d\Omega} = \frac{4a_0^2 N_A M^2}{z_B^{*4} m^2} \int S_A(q) \frac{v' \eta_{nlm}(q, k) dk}{v q^4}. \quad (3)$$

Здесь и далее использованы обозначения:  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ ;  $M$  — приведенная масса сталкивающегося иона  $A$  и атома  $B$ ;  $v$  и  $v'$  — их относительные скорости до и после столкновения;  $q$  — изменение импульса  $p$  налетающего иона;  $k$  — импульс электрона в системе координат, связанной с ионом  $B$ ;  $\eta_{nlm}(q, k)$  — проинтегрированный по углу  $\chi$  вылета выбитого электрона квадрат модуля матричного элемента  $\epsilon_{nlm}(q, \mathbf{k})$  перехода электрона из состояния  $|nlm\rangle$  в непрерывный спектр;  $m$  — масса электрона;  $a_0 = 5.29 \cdot 10^{-9}$  см — боровский радиус;  $z_B^*$  — эффективный заряд ионизуемой оболочки иона  $B$ ; величины  $q$  и  $k$  даны в единицах  $z_B^* \hbar a_0^{-1}$ .

Выражения для  $\eta_{nlm}(q, k)$  для  $1s$ -,  $2s$ -,  $2p$ -,  $3s$ -,  $3p$ - и  $3d$ -состояний электронов приведены в [4–6]. Они связаны выражением

$$\frac{dF(q, \Delta E)}{d(\Delta E)} = \frac{\Delta E}{I_0} (q a_0)^{-2} \eta_{nlm}(q, k) \quad (4)$$

с так называемой плотностью обобщенных сил осциллятора  $\frac{dF(q, \Delta E)}{d(\Delta E)}$  (здесь  $\Delta E$  — передача энергии иона при столкновении).

Формулы (1)–(3) приведены в [1–3] для эффективного сечения  $d\sigma/d\Omega$  ионизации иона  $A$  при столкновении с атомом  $B$ , там же отмечена их симметрия относительно перестановки индексов  $A$  и  $B$  (реальным «нарушением симметрии» является тот факт, что величины  $\eta_{nlm}(q, k)$  имеются в литературе до  $3d$ -оболочки, а величины формфакторов приведены ниже только до  $3s$ -оболочки включительно).

Связь угла рассеяния  $\theta$  с величинами  $q$  и  $k$  определяется законами сохранения. Ионизационные потенциалы  $I_0$  атомов и ряда ионов приведены в [7–9].

В формулах (1)–(3) по всем начальным состояниям электронов из иона  $N_A$  проведено суммирование по правилу сумм. Формфакторы  $F_A(q)$  и  $S_A(q)$  определяются только электронной структурой атома (или иона)  $A$ , описываемой его начальной функцией  $\Psi_A(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ :

$$F_A(q) = N_A^{-1} \sum_{j=1}^{N_A} \int |\Psi_A|^2 \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_j/\hbar) d\mathbf{r}, \quad (5)$$

$$S_A(q) = N_A^{-1} \left[ \sum_{j \neq s}^{N_A} \int |\Psi_A|^2 \exp(i\mathbf{q}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_s)/\hbar) d\mathbf{r} - |N_A F_A(q)|^2 \right]. \quad (6)$$

Интегрирование в (5) и (6) ведется по всем радиусам-векторам электронов  $\mathbf{r}_j$  всех электронов иона  $N_A$ . Для расчета формфакторов  $F_A(q)$  и  $S_A(q)$  были использованы волновые функции свободных ионов и атомов в виде линейных комбинаций [1–3, 10]:

$$\Psi_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_A}) = \sum_t \alpha_t \prod_{j=1}^{N_A} \psi_j(z_j, \mathbf{r}_j) \chi_j(m_{sj}) \quad (7)$$

одноэлектронных кулоновских волновых функций

$$\psi_j(z_j^*, \mathbf{r}_j) = R_{nl}(z_j^*, r_j) Y_{lm}(\vartheta_j, \varphi_j) \quad (8)$$

и спиновых функций  $\chi_j(m_{sj})$ .

Вычисленные с использованием волновых функций (7)–(8) выражения для  $F_A(q)$  и  $S_A(q)$  для атомов с  $z_A \leq 12$  и ионов с  $N_A \leq 12$  имеют простой алгебраический вид:

$$F(q) = N^{-1} [N_{1S}L(1s, 1s) + N_{2S}L(2s, 2s) + N_{2P_0}L(2p_0, 2p_0) + N_{2P_1}L(2p_1, 2p_1) + N_{3S}L(3s, 3s)], \quad (9)$$

$$S(q) = N^{-1} [N - a_1L^2(1s, 1s) - a_2L^2(2s, 2s) - a_3L^2(1s, 2s) - a_4L^2(2p_0, 2p_0) - a_5L^2(2p_1, 2p_1) - a_6L^2(1s, 2p_0) - a_7L^2(2s, 2p_0) - a_8L(2p_0, 2p_0)L(2p_1, 2p_1) - a_9L^2(3s, 3s) - a_{10}L^2(1s, 3s) - a_{11}L^2(2s, 3s) - a_{12}L^2(3s, 2p_0)]. \quad (10)$$

Коэффициенты  $N_{nlm}$  в (9) равны числам электронов в соответствующих состояниях  $|nlm\rangle$ . Коэффициенты  $\alpha_1$ , в (10) приведены в таблице (пустые клетки соответствуют нулевым значениям), величины одночастичных матричных элементов

$$L(nlm, n'l'm') = \int \Psi_{nlm}^*(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \Psi_{n'l'm'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (11)$$

для  $N_B \leq 12$  даны в приложении (соответствующие величины для  $N_B \leq 10$  приведены в [1]).

При анализе влияния упругого формфактора  $F(q)$  на сечения удобно вместо  $F(q)$  рассматривать входящую в (2) величину

$$U_i(q) = \left[ 1 - \left( \frac{N_i}{z_i} \right) F_i(q) \right]^2. \quad (12)$$

Свойства формфакторов (8)–(11) проиллюстрированы на рис. 1, 2 формфакторами ионов Mg с зарядом от 0 до +11 (графики формфакторов для ионов Ne и Al приведены в [3, 11]). Общим свойством неупругих формфакторов  $S(q)$  является их монотонный рост с увеличением  $q$  и числа электронов в ионизирующем ионе. Упругие формфакторы  $U(q)$  подавляют подынтегральное выражение в (2) тем сильнее, чем меньше величина  $q$

Величины коэффициентов  $a_i$  в формуле (10) для неупругого формфактора  $S(q)$  для иона или атома с  $N \leq 12$

$N$	Терм	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$
1	$^2S_{1/2}$	1											
2	$^1S_0$	2											
3	$^2S_{1/2}$	2	1	2									
4	$^1S_0$	2	2	4									
5	$^2P_{1/2}$	2	2	4	1/9	4/9	2/3	2/3	4/9				
6	$^3P_0$	2	2	4	4/9	10/9	4/3	4/3	4/9				
7	$^4S_{3/2}$	2	2	4	1	2	2	2					
8	$^3P_2$	2	2	4	10/9	22/9	8/3	8/3	4/9				
9	$^3P_{3/2}$	2	2	4	13/9	28/9	10/3	10/3	4/9				
10	$^1S_0$	2	2	4	2	4	4	4					
11	$^1S_{1/2}$	2	2	4	2	4	4	4		1	2	2	2
12	$^1S_0$	2	2	4	2	4	4	4		2	4	4	4

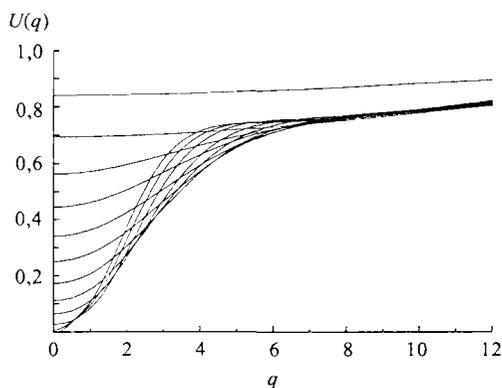


Рис. 1. Величины  $U(q)$  для атома Mg и его ионов  $Mg^{+i}$  с зарядом  $i$  от 0 до +11. Заряд иона тем выше, чем выше кривая  $U(q)$

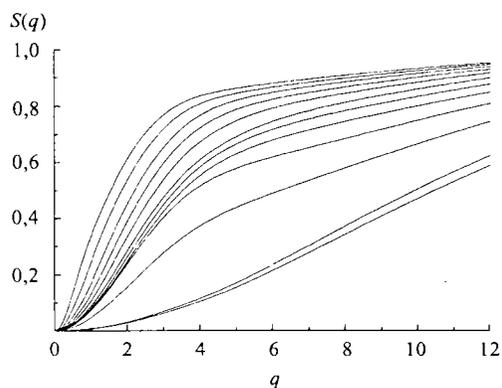


Рис. 2. Неупругий формфактор  $S(q)$  для атома Mg и его ионов  $Mg^{+i}$  с зарядом  $i$  от 0 до +12. Заряд иона тем выше, чем ниже кривая  $S(q)$

и чем меньше степень ионизации иона (подробнее свойства формфакторов и величин  $\eta_{nlm}(q, k)$  обсуждены в [3, 4]).

Формулы (1)–(3) приведены в нерелятивистском приближении, релятивистские поправки обсуждаются в [6, 12–14], в [14] приведены формулы для дифференциальных сечений ионизации в умеренно-релятивистской области энергии сталкивающихся ионов при  $E/A \leq 1$  ГэВ/нуклон.

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Существенной особенностью дифференциальных эффективных сечений  $d\sigma/d\Omega$  в ионно-атомных столкновениях является малая передача энергии и импульса иона ( $\Delta p \ll p$  и  $\Delta E \ll E$ ). Это неоднократно отмечалось ранее и лежит в основе используемого метода расчета. В то же время современные стандартные программы для персональных компьютеров могут быть использованы для подобных расчетов только с двойной точностью, это учтено при счете приведенных здесь величин  $d\sigma/d\Omega$  (недостаточный учет этого свойства программ привел к занижению величин  $d\sigma/d\Omega$  для ионизации атомов Ne ионами Al при  $\vartheta \rightarrow 0$  в [3]).

Характерные особенности угловых распределений  $d\sigma/d\Omega$  налетающих ионов после столкновений с атомами (или ионами) мишеней с ионизацией последних проиллюстрированы ниже как для ионизации атома Ne ионами Al, когда внешними являются 2s- и 2p-оболочки (рис. 3, а-в), так и для ионизации атома Mg ионами Mg с внешней

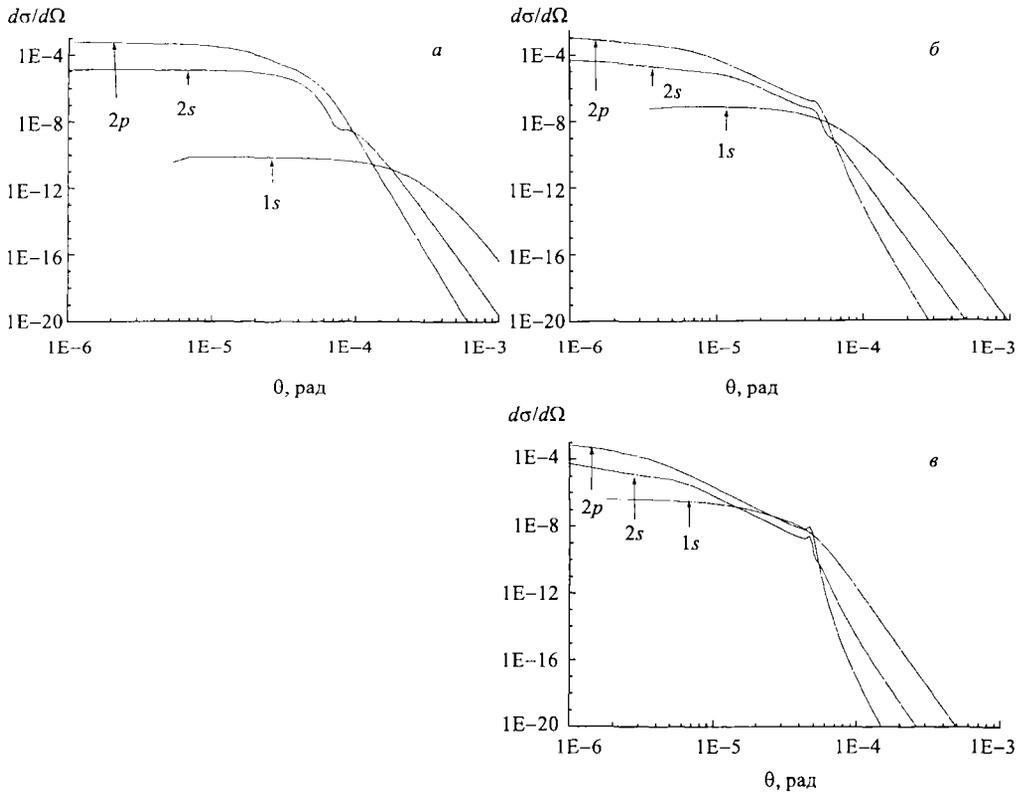


Рис. 3. Дифференциальные эффективные сечения ионизации атома Ne при столкновении с ионами: а)  $Al^{+9}$  с энергией 300 кэВ/нуклон (в единицах  $см^2/ср$  в системе центра масс); б)  $Al^{+6}$  с энергией, равной 2 МэВ/нуклон; в)  $Al^{+3}$  с энергией, равной 10 МэВ/нуклон. Начальные состояния вырываемых электронов указаны под кривыми

3s-оболочкой (рис. 4, 5) при различных энергиях налетающих ионов (для наглядной иллюстрации точности метода кривые проведены по расчетным точкам без сглаживания).

Общим свойством всех приведенных расчетов величин  $d\sigma/d\Omega$  является наличие области углов  $\theta$  с линейной (в логарифмическом масштабе) зависимостью  $d\sigma/d\Omega$  от  $\theta$  при  $\theta > mv_0z^*(Mv)^{-1}$ , что эквивалентно резерфордскому рассеянию соответствующих зарядов. Такие большие углы  $\theta$  соответствуют близким столкновениям ионов с малыми прицельными параметрами, в этой области углов  $\theta$  результаты слабо зависят от детального описания волновых функций выбиваемых электронов.

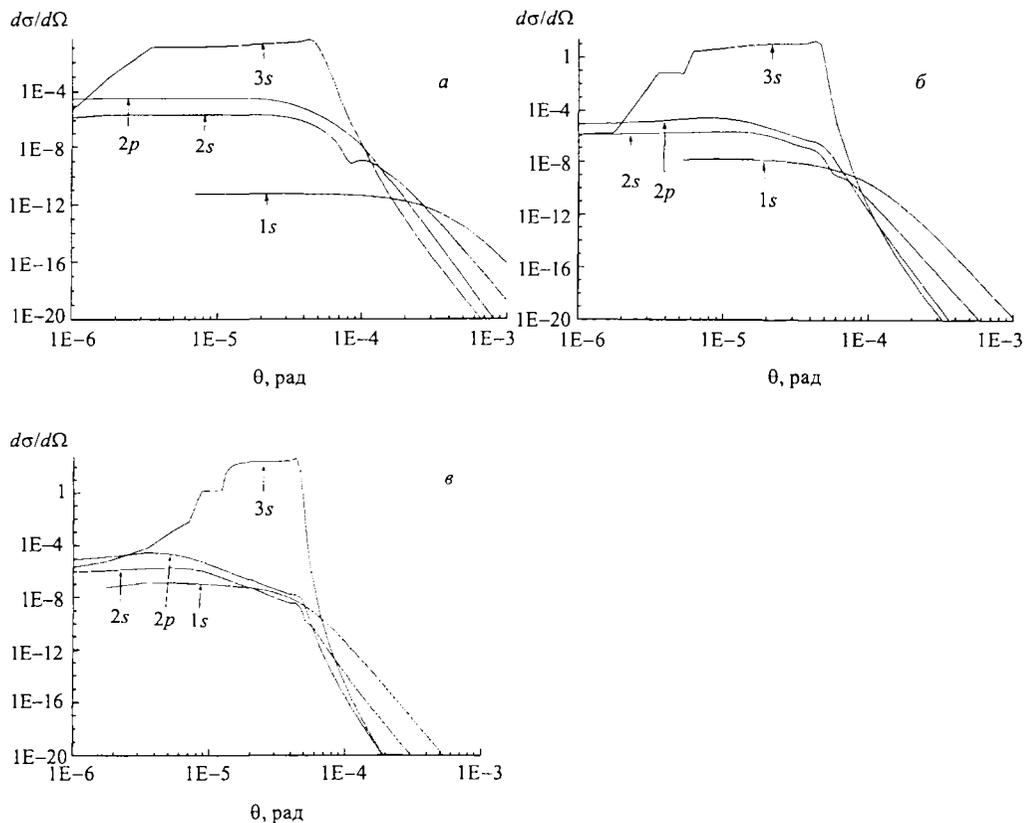


Рис. 4. Дифференциальные эффективные сечения ионизации атома Mg при столкновении с атомом Mg: а) с энергией 300 кэВ/нуклон; б) с энергией, равной 2 МэВ/нуклон; в) с энергией, равной 10 МэВ/нуклон

При ионизации с рассеянием ионов на малые углы  $\theta < mv_0z^*(Mv)^{-1}$  сечения  $d\sigma/d\Omega$  сильно зависят от начального состояния  $|nlm\rangle$  удаляемого электрона и сравнительно слабо зависят от угла  $\theta$ . При малых углах  $\theta$  величины  $d\sigma/d\Omega$  для ионизации внутренней 1s-оболочки всегда меньше всех других сечений, но это различие уменьшается с ростом энергии  $E$  ионизирующего иона. Это видно на всех рис. 3–5. В то же время при слабой

зависимости величин ионизации  $d\sigma/d\Omega$  1s-оболочки от угла  $\theta$  эти величины становятся преобладающими на больших углах  $\theta$ . Это следует из того, что для рассеяния на большие углы требуется сравнительно большая передача импульса  $q$ , разрешенная законами сохранения только для сильно связанного 1s-электрона.

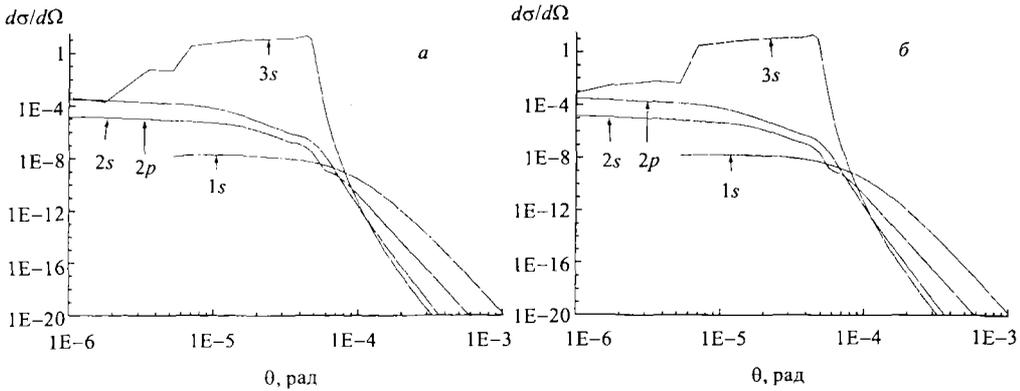


Рис. 5. Величины  $d\sigma/d\Omega$  для ионизации атома Mg ионом  $Mg^{+2}$  (a) и ионом  $Mg^{+6}$  (б) с энергией, равной 2 МэВ/нуклон

На рис. 4, 5 видно, что при малых углах  $\theta$  величины  $d\sigma/d\Omega$  для вырывания 3s-электрона значительно превышают все другие величины  $d\sigma/d\Omega$ , различие между величинами  $d\sigma/d\Omega$  для 2s–2p-электрона существенно меньше. В то же время величины  $d\sigma/d\Omega$  для 3s-электрона убывают при самых малых углах  $\theta \rightarrow 0$ . Это объясняется тем, что вероятность вырывания слабо связанного 3s-электрона экранированным ядром иона (описываемая формулой (2)) без заметной передачи поперечного импульса (при «лобовом столкновении») мала.

При далеких столкновениях ионов с атомами с малой передачей  $q$  импульса величина  $U(q)$  растет с увеличением заряда иона (см. рис. 1). Это приводит к заметному увеличению  $d\sigma/d\Omega$  при малых углах  $\theta \leq 10^{-5}$  с ростом заряда иона, что отчетливо видно при сравнении  $d\sigma/d\Omega$  для ионов  $Mg^{+i}$  и атомов Mg (рис. 4, 5).

Заметим, что вследствие законов сохранения в такие величины  $d\sigma/d\Omega$  ионизации при столкновениях двух атомов Mg (см. рис. 4, a–б) при всех приведенных энергиях при малых углах  $\theta < 10^{-6}$  основной вклад дают электрон-электронные столкновения, описываемые формулой (3). Относительный вклад электрон-электронных столкновений в  $d\sigma/d\Omega$  в других областях углов  $\theta$  при всех энергиях сравнительно мал даже для столкновения нейтральных атомов (для ионно-атомных столкновений он всегда мал из-за пропорциональности числу  $N_A$  электронов в (3) вместо  $Z_A^2$  в (2)). При электрон-электронных столкновениях налетающий ион теряет энергию и импульс на возбуждение обоих сталкивающихся электронов. Уравнение (3), описывающее вклад в сечение ионизации столкновений электронов налетающего иона (или атома) A с электронами мишени B, содержит функцию  $\eta_{nlm}(q, k)$ , входящую в (2). Но отличие в кинематике электрон-электронных столкновений от столкновений электронов с ядром приводит к сдвигу максимумов в энергетических распределениях выбитых электронов в сторону меньших (примерно в 2 раза)

значений импульсов  $k$  по сравнению с (2). Вклад этих областей  $q$  и  $k$  в сечение  $d\sigma/d\Omega$  зависит от числа электронов в сталкивающихся частицах  $A$  и  $B$  и от энергии налетающего иона  $A$ . Особенности величин  $\eta_{nlm}(q, k)$  и формфакторов необходимо учитывать при выборе процедуры интегрирования в (7), (8) и анализе результатов.

Приведенные на рисунках данные показывают возможности использованного метода расчета сечений ионизации при быстрых столкновениях многоэлектронных ионов и атомов, пределы применимости метода обсуждены ранее в [1, 2, 10].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**Величины матричных элементов  $L(nlm, n'l'm)$  в формуле (10) для 3s-оболочки.** Величины матричных элементов  $L(nlm, n'l'm)$  для первых 8 членов в (10) совпадают с опубликованными в [1] для  $N \leq 10$ .

$$L(3s, 3s) = 1/b^2 - 2(3 - a_7^2)/b^3 + 16(1 - a_7^2)/b^4 - \\ - 4(5 - 10a_7^2 + a_7^4)/b^5 + 10(3 - 10a_7^2 + 3a_7^4)/(3b^6), \quad (\text{П1})$$

$$a_7 = 2qz^*/(3z_{3s}), b = 1 + a_7^2. \quad (\text{П1а})$$

$$L(3s, 2p_0) = aa \{ 1/b_1^2 d^4 + (-3d + 9da_8^2 - 6z_{3s} + 2z_{3s}a_8^2)/(3b_1^3 d^5) + \\ + 2z_{3s}(d - 6da_8^2 + da_8^4 + 4z_{3s}/9 - 4z_{3s}a_8^2)/(b_1^4 d^6) - \\ - 8z_{3s}^2(1 - 10a_8^2 + 5a_8^4)/(9b_1^5 d^6) \}, \quad (\text{П2})$$

$$a_8 = qz^*/(z_{2p}/2 + z_{3s}/3), b_1 = 1 + a_8^2, aa = (2z_{2p}^5 z_{3s}^3/27)^{1/2}/a_8. \quad (\text{П2а})$$

$$L(1s, 3s) = c_{13}E(1s, 3s), \quad (\text{П3})$$

$$a_9 = qz^*/(z_{1s} + z_{3s}/3), b_2 = 1 + a_9^2, \quad (\text{П3а})$$

$$d_1 = z_{1s} + z_{3s}/3, aa_1 = \text{sqrt}(z_{1s}z_{3s}/3)^3, \quad (\text{П3б})$$

$$E(1s, 3s) = aa_1 [8/(b_2^2 d_1^3) - 16z_{3s}(3 - a_9^2)/(3b_2^3 d_1^4) + \\ + 32z_{3s}^2(1 - a_9^2)/(9b_2^4 d_1^5)], \quad (\text{П3в})$$

$$c(1s, 3s) = 8aa_1(z_{1s} - z_{3s}/3)(z_{1s} - z_{3s})/(z_{1s} + z_{3s})^5, \quad (\text{П3г})$$

$$c_{13} = c(1s, 3s)/[1 - c(1s, 3s)^2]^{1/2}. \quad (\text{П3д})$$

$$L(2s, 3s) = c_{23}E(2s, 3s), \quad (\text{П4})$$

$$a_{10} = qz^*/(z_{2s}/2 + z_{3s}/3), b_3 = 1 + a_{10}^2, d_2 = z_{2s}/2 + z_{3s}/3, \quad (\text{П4а})$$

$$aa_2 = \text{sqrt}(2z_{2s}z_{3s}/3)^3, \quad (\text{П4б})$$

$$E(2s, 3s) = aa_2 [1/(b_3^2 d_2^3) - (3z_{2s} + 4z_{3s})(3 - a_{10}^2)/(6b_3^3 d_2^4) + \\ + 4z_{3s}(1 - a_{10}^2)(z_{2s} + 2z_{3s}/9)/(d_2^5 b_3^4) - \\ - 4z_{2s}z_{3s}^2(5 - 10a_{10}^2 + a_{10}^4)/(9d_2^6 b_3^5)], \quad (\text{П4в})$$

$$c(2s, 3s) = aa_2 [2 - (3z_{2s} + 4z_{3s})/d_2 + 8z_{3s}(z_{2s} + 2z_{3s}/9)/d_2^2 - \\ - 40z_{2s}z_{3s}^2/(3d_2^3)]/2/d_2^3, \quad (\text{П4г})$$

$$c_{23} = c(2s, 3s)/[1 - c(2s, 3s)^2]^{1/2}. \quad (\text{П4д})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каминский А. К., Попова М. И. // ЖТФ. 1986. Т. 56, вып. 7. С. 1287.
2. Каминский А. К., Васильев А. А. // ЭЧАЯ. 1998. Т. 29, вып. 2. С. 489.
3. Каминский А. К. // Письма в ЭЧАЯ. 2000. № 5[102]. С. 96.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1963. С. 666.
5. Choi B. H., Merzbacher E., Khandelwal G. S. // Atom. Data. 1973. V. 5. P. 291.
6. Choi B. H. // Phys. Rev. A. 1973. V. 7. P. 2056.
7. Физические величины: Справ. / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М., 1991. С. 411.
8. NIST database at [http://aeldata.nist.gov/nist\\_atomic\\_spectra.html](http://aeldata.nist.gov/nist_atomic_spectra.html).
9. Biemont E., Fremat Y., Quinet P. // Atom. Data and Nucl. Data Tables. 1999. V. 71, No. 1. P. 117.
10. Каминский А. К. // Крат. сообщ. ОИЯИ. 1997. № 1[81]. С. 65.
11. Каминский А. К. // Там же. № 4[84]. С. 21.
12. Inokuti M. // Rev. Mod. Phys. 1971. V. 43. P. 297.
13. Inokuti M., Itikawa Y., Turner J. E. // Rev. Mod. Phys. 1978. V. 50. P. 23.
14. Kaminsky A. K. et al. // Nucl. Instr. Meth. 1981. V. 180. P. 231.

Получено 14 февраля 2002 г.



XJ0200249

Письма в ЭЧАЯ. 2002. № 3[112]

Particles and Nuclei, Letters. 2002. No. 3[112]

УДК 539.12

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

*В. А. Артемьев*

Научно-исследовательский институт технологии материалов,  
140083, Московская обл., г. Лыткарино-3, а/я-14

В условиях квантования поперечного движения ультрахолодных нейтронов во внешних полях (гравитационное и/или магнитное поля, потенциал вещества), когда движение нейтронов вдоль нейтроновода является эффективно одномерным, сечение их упругого рассеяния  $\propto v^{-2}$  и зависит от геометрических характеристик поперечного сечения нейтроновода. Вычисленное время жизни таких одномерных нейтронов в нейтроновом относительно поглощения объемных и поверхностных фононов, а также относительно поглощения веществом может быть больше  $10^2$  с. Обсуждаются различия в сечениях упругого рассеяния трехмерных, двумерных и одномерных нейтронов. Приведены численные оценки.

When the energy of ultracold neutrons is quantized in external fields (gravitational and/or magnetic fields, a positive surface potential barrier), their motion becomes one-dimensional along a neutron guide. The elastic scattering cross section is  $\propto v^{-2}$  and is a function of the geometric characteristics of the neutron guide cross section. The lifetime of such one-dimensional neutrons in the neutron guide relative to the absorption of volume and surface phonons and relative to the absorption by the neutron guide material was calculated to be  $> 10^2$  s. The differences among the elastic scattering cross sections of one-, two- and three-dimensional neutrons are discussed. The results of calculations are presented.

Управление ядерными реакциями посредством слабых (по сравнению с ядерными силами) внешних воздействий на систему реагирующих частиц является важной проблемой, поэтому исследование возможных путей ее решения в различных энергетических диапазонах представляет научный и практический интерес. В современной литературе обсуждаются различные подходы. Так, например, в монографии В. Г. Барышевского [1] описан широкий круг физических явлений, сопровождающих взаимодействия поляризованных элементарных частиц с поляризованным веществом, указано на резкое изменение под действием света сечения резонансного взаимодействия нейтрона с ядром. Другой подход связан с понижением эффективной размерности взаимодействующих частиц. В. И. Лушиков впервые [2, 3] фактически предложил способ получения двумерных ( $2D$ -) ультрахолодных нейтронов (УХН), совершающих свободное эффективно двумерное движение вдоль поверхности вещества, у которых в гравитационном поле Земли квантована энергия вертикального движения. Об экспериментальном наблюдении таких  $2D$ -нейтронов сообщалось в работе [4]. Использование магнитного поля для получения  $2D$ -нейтронов обсуждалось в [5]. В работах [6, 7] указано на изменение закономерностей протекания ядерных реакций с такими ультрахолодными нейтронами, обусловленное понижением их эффективной размерности в слабых внешних полях. Величина внешнего

воздействия ( $\sim 10^{-12}$  эВ) на систему при этом значительно меньше характерных энергий ядерного взаимодействия ( $\sim 10^7$  эВ). Был предложен способ получения эффективно одномерных ( $1D$ -) ультрахолодных нейтронов, совершающих свободное одномерное движение вдоль нейтроновода, у которых в гравитационном поле Земли квантована энергия поперечного движения. Качественно показано, каким образом для  $1D$ -нейтронов изменяются вероятности неупругих ядерных реакций (подавляется канал вылета нейтрона из составного ядра). Волновая функция  $1D$ -нейтрона может быть «приготовлена» варьированием двух внешних условий: величины прижимающего поля (гравитационного и/или магнитного) и геометрических характеристик поперечного сечения нейтроновода, что вызывает значительное изменение величины вероятности ядерной реакции для данного набора частиц и энергий. Причинами, обуславливающими изменение величин вероятностей ядерных реакций с нейтронами, являются специально «приготовленные» волновые функции начального и конечного состояний  $1D$ -нейтронов, которые отличаются от волновых функций частиц, совершающих трехмерное свободное движение.

В настоящем сообщении рассмотрены оценки времени жизни  $1D$ -нейтронов вблизи поверхности твердого тела относительно поглощения фононов и поглощения ядрами вещества, а также особенности упругого рассеяния  $1D$ -нейтронов по сравнению с двумерными и трехмерными частицами. Приведены вычисления для  $1D$ -нейтронов в нейтроновом желобке клиновидного сечения [7], в нейтроновом — полом цилиндрическом канале с диаметром канала  $\sim \lambda_{\text{лин}}$  — граничная длина волны УХН [8], и в потенциале двумерного осциллятора.

## 1. ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ $1D$ -НЕЙТРОНА ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Оценим время жизни  $1D$ -нейтрона, находящегося на первом (основном) уровне  $E_1$ , относительно поглощения фононов с переходом нейтрона в непрерывный спектр и относительно поглощения нейтрона веществом стенок нейтроновода. Эти два механизма «ухода»  $1D$ -нейтронов являются фундаментальными, их нельзя исключить технологическими способами. Рассеяние  $1D$ -нейтронов на шероховатостях поверхности рассматриваться не будет, поскольку качество поверхности существенно зависит от метода ее приготовления и, кроме того, известны технологии, позволяющие изготавливать атомно-гладкие поверхности [9].

**1.1. Оценка времени жизни  $1D$ -нейтрона относительно поглощения фононов.** Волновая функция (ВФ) начального состояния  $1D$ -нейтрона, находящегося на уровне  $E_1$ :

$$\Psi_i(\mathbf{r}) = \psi_1(y, z) L^{-1/2} \exp(ikl), \quad (1)$$

а в конечном состоянии непрерывного спектра:

$$\Psi_f(\mathbf{r}) = V^{-1/2} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}). \quad (2)$$

Здесь:  $\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$ ,  $\mathbf{l} = (x, 0, 0)$  — одномерные векторы в направлении линии движения  $1D$ -нейтрона;  $L, V$  — линейный размер и объем пространства; ось  $x$  выбрана в направлении движения;  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}$  — волновые векторы нейтрона в начальном и конечном состояниях;

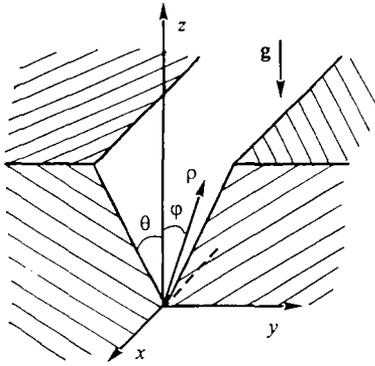


Рис. 1. Нейтроновод-желобок клиновидного сечения с углом раствора  $2\theta$  на поверхности вещества. Ультрахолодный нейтрон совершает свободное эффективно одномерное движение вдоль оси  $x$ . В плоскости  $yz$  движение нейтрона локализовано: вдоль оси  $z$  — гравитационным полем и потенциалом  $U_S$  вещества, вдоль оси  $y$  — потенциалом  $U_S$  вещества

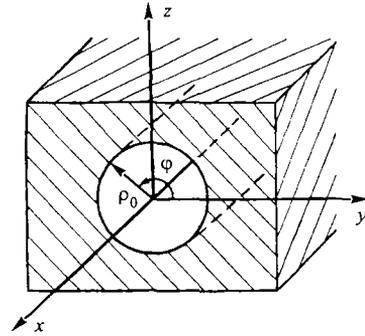


Рис. 2. Нейтроновод — прямой полый цилиндрический канал радиусом  $\rho_0$  внутри вещества. Ультрахолодный нейтрон совершает свободное эффективно одномерное движение вдоль оси  $x$ . В плоскости  $yz$  движение нейтрона локализовано потенциалом  $U_S$

$\psi_1(y, z)$  — локализованная в поперечной плоскости  $yz$  ВФ квантового уровня  $E_1$   $1D$ -нейтрона (см. рис. 1, 2). Потенциал взаимодействия нейтронов с веществом равен [8, 10]:  $V(\mathbf{r}) = 2\pi\hbar^2 m^{-1} \sum_{\nu} f_{\nu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\nu})$ , где  $\nu = (n, j)$ ,  $n$  — номер элементарной ячейки,  $j$  — номер атома в элементарной ячейке,  $f_{\nu}$  — длина рассеяния нейтрона на  $\nu$ -м ядре,  $m$  — масса нейтрона. Радиус-вектор  $\nu$ -го ядра  $\mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{R}_{\nu} + \mathbf{u}_{\nu}$ , где  $\mathbf{u}_{\nu}$  — смещение  $\nu$ -го ядра из положения равновесия  $\mathbf{R}_{\nu}$  в кристаллической решетке. Ограничимся рассмотрением диамагнитных материалов, тогда переход  $1D$ -нейтрона из (1) в (2) при любых начальных энергиях нейтрона может происходить только при поглощении фононов. Вероятность перехода  $1D$ -нейтрона в непрерывный спектр [10]:

$$W = 2\pi\hbar^{-1} (2\pi\hbar^2 m^{-1})^2 (2\pi\hbar L/2)^{-1} \int d^3\mathbf{p} (2\pi)^{-3} \int dt \exp(i\epsilon t/\hbar) \sum_{\nu} \sum_{\mu} (f_{\nu}^{\text{кор}} f_{\mu}^{\text{кор}} + \delta_{\nu\mu} f_{\nu}^{\text{нк}} f_{\mu}^{\text{нк}}) \psi_1(y_{\nu}, z_{\nu}) \psi_1(y_{\mu}, z_{\mu}) \exp(i\kappa \mathbf{R}_{\nu}) \exp(-i\kappa \mathbf{R}_{\mu}) \times \langle \exp[i\kappa \hat{\mathbf{u}}(t, \nu)] \exp[-i\kappa \hat{\mathbf{u}}(0, \mu)] \rangle, \quad (3)$$

здесь  $\kappa = \mathbf{p} - \mathbf{k}$ ;  $\hat{\mathbf{u}}(t, \nu)$  — оператор смещения  $\nu$ -го ядра атома кристаллической решетки в гейзенберговском представлении. Примем следующие упрощающие предположения. Для вещества стенок нейтроновода выберем гармоническую модель, тогда для коррелятора в (3) можем записать [11]:  $\langle \exp[i\kappa \hat{\mathbf{u}}(t, \nu)] \exp[-i\kappa \hat{\mathbf{u}}(0, \mu)] \rangle \approx \exp[\langle (i\kappa \hat{\mathbf{u}}(t, \nu)) \times (i\kappa \hat{\mathbf{u}}(0, \mu)) \rangle]$ ; здесь пренебрегли фактором Дебая–Уоллера при низких температурах  $T$  вещества, рассмотрением которых и ограничимся. Произведем фононное разложение и учтем лишь однофононные процессы. Вклад в однофононный переход в (3) дает в

первую очередь некогерентное неупругое рассеяние [12]. При начальной энергии  $1D$ -нейтрона меньше  $10^{-7}$  эВ и гелиевых (и выше) температурах  $T$  вещества стенок нейтроновода имеем  $p \gg k$  и  $\mathbf{p} \approx \kappa$ . С учетом вышесказанного для коррелятора в (3) получим приближенно  $\approx p_\alpha p_\beta \langle \hat{u}_\alpha(t, \nu) \hat{u}_\beta(0, \mu) \rangle$ , где суммирование выполняется по  $\alpha, \beta = x, y, z$ . Обозначим фурье-образ коррелятора через  $\langle u_\alpha(\nu) u_\beta(\mu) \rangle_\omega = \int dt \exp(i\omega t) \times \langle \hat{u}_\alpha(t, \nu) \hat{u}_\beta(0, \mu) \rangle$ . Для вероятности однофононного перехода  $1D$ -нейтрона в непрерывный спектр после интегрирования по конечным углам вылета нейтрона получим из (3):

$$W_1^{\text{нк}} \approx 4\hbar^2 (3m^2 L)^{-1} \int dp p^4 \Sigma_\nu |f_\nu^{\text{нк}}|^2 \psi_1^2(y_\nu, z_\nu) \langle \mathbf{u}(\nu) \mathbf{u}(\nu) \rangle_\omega. \quad (4)$$

В результате задача свелась к определению фурье-образа коррелятора смещений атомов вещества стенок нейтроновода. В рассматриваемых конструкциях нейтроноводов (рис. 1, 2) имеется твердое тело, ограниченное свободной поверхностью, вблизи которой УХН в начальном состоянии совершает свободное эффективно одномерное движение вдоль оси  $x$ . Колебательный спектр кристалла, ограниченного поверхностью, отличается от спектра бесконечного кристалла тем, что появляются дополнительные, локализованные вблизи поверхности колебания [13]. При низких температурах возбуждена только длинноволновая часть акустических ветвей спектра колебаний среды, которую можно рассматривать в континуальном пределе. В этом случае поверхностные колебания будут представлены только рэлеевскими волнами, экспоненциально затухающими в глубь вещества [14]. Принимая во внимание известное соотношение между фурье-образом коррелятора  $\langle u_\alpha(\nu) u_\beta(\mu) \rangle_\omega$  и запаздывающими функциями Грина фононного поля [11], используя вычисления работы [7], напомним результат для коррелятора из (4) в случае перехода  $1D$ -нейтрона в непрерывный спектр с поглощением энергии  $\hbar\omega$  одного поверхностного фонона:

$$\langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle_\omega = \hbar N_\omega \xi \omega (4\rho c_t^3 |F|)^{-1} [(1 - \xi^2)^{1/2} + (1 - \xi^2 c_t^2/c_l^2)^{1/2}]. \quad (5)$$

Здесь  $N_\omega = [\exp(\hbar\omega/T) - 1]^{-1}$ ;  $c_t$  и  $c_l$  — скорости поперечного и продольного звуков в веществе;  $\rho$  — плотность вещества стенок нейтроновода;  $c_R = \xi c_t$  — скорость поверхностной рэлеевской волны, значение  $\xi$  определяется коэффициентом Пуассона вещества,  $0,874 \leq \xi \leq 0,955$  [14];  $F = 2(2 - \xi^2) - 2(1 - \xi^2)^{1/2}(1 - \xi^2 c_t^2/c_l^2)^{1/2} - (1 - \xi^2)^{-1/2}(1 - \xi^2 c_t^2/c_l^2)^{1/2} - (1 - \xi^2)^{1/2}(1 - \xi^2 c_t^2/c_l^2)^{-1/2}$ .

Подставляя (5) в (4) и учитывая, что энергия нейтрона в конечном состоянии  $\hbar^2 p^2/2m \approx \hbar\omega$ , после интегрирования окончательно получим выражение для величины вероятности перехода  $1D$ -нейтрона из локализованного состояния в непрерывный спектр с поглощением одного поверхностного фонона в результате некогерентного рассеяния:

$$W_{1(S)}^{\text{нк}} \approx 3,5m^{1/2} T^{7/2} \xi n_l (\rho \hbar^3 c_t^3 |F|)^{-1} \times \\ \times [(1 - \xi^2)^{1/2} + (1 - \xi^2 c_t^2/c_l^2)^{1/2}] \Sigma_j |f_j^{\text{нк}}|^2 \Sigma_n \psi_1^2(y_n, z_n), \quad (6)$$

здесь температура вещества  $T$  измеряется в единицах энергии;  $n_l$  — линейная концентрация атомов вещества вдоль направления движения  $1D$ -нейтрона (вдоль оси  $x$ ), суммирование по  $j$  проводится по атомам элементарной ячейки, а суммирование по  $n$  проводится по элементарным ячейкам в глубь вещества нейтроновода. Учитывалось, что

поверхностная рэлеевская волна при характерных частотах (гелиевые температуры) проникает в вещество стенок нейтроновода на глубину  $\sim T(1 - \xi^2)^{1/2}/\hbar c_t \xi \sim 10^{-6}$  см, т. е. на порядок (и более) глубже, чем ВФ  $1D$ -нейтрона, проникающая в вещество на глубину  $\sim \lambda_{\text{lim}}$  — граничная длина волны для УХН. Поэтому при получении (6) пренебрегли затуханием рэлеевской волны вдали от поверхности стенок нейтроновода в глубине вещества.

Аналогично работе [7] получим из (4) величину вероятности перехода  $1D$ -нейтрона из локализованного состояния в непрерывный спектр в результате некогерентного рассеяния с поглощением энергии  $\hbar\omega$  одного объемного фонона:

$$W_{1(V)}^{\text{HK}} \approx 2 \cdot 10^2 (m\Theta_D)^{1/2} n_l (T/\Theta_D)^{7/2} \sum_j |f_j^{\text{HK}}|^2 M_j^{-1} \Sigma_n \psi_1^2(y_n, z_n), \quad (7)$$

здесь  $M_j$  — масса ядра  $j$ -го атома элементарной ячейки.

При получении (6) и (7) предполагалось, что дебаевская температура  $\Theta_D \gg T$  (например, для кремния  $\Theta_D = 645$  К [15]). В формулы (6) и (7) для величин вероятностей перехода не входит энергия нейтрона в начальном состоянии, поэтому эти формулы справедливы при любых начальных энергиях  $1D$ -нейтрона, меньших  $\sim 10^{-7}$  эВ.

**1.2. Оценка времени жизни  $1D$ -нейтрона относительно поглощения ядрами вещества.** Вероятность реакции  $n - \gamma$  в единицу времени для  $1D$ -нейтрона с веществом стенок нейтроновода есть  $W_a = j\sigma_a^* n_{\text{at}}$ , где  $j$  — плотность потока вероятности,  $\sigma_a^*$  — сечение  $n - \gamma$ -реакции на одном ядре,  $n_{\text{at}}$  — концентрация атомов вещества. Из (1) следует  $j = (\hbar k/mL) \psi_1^2(y, z)$ . После суммирования по всем атомам вещества получим окончательно:

$$W_a = \sigma_a(k) (\hbar k/m) n_l \Sigma_n \psi_1^2(y_n, z_n), \quad (8)$$

здесь  $\sigma_a(k)$  — сечение  $n - \gamma$ -реакции, отнесенное к одной элементарной ячейке.

Время жизни  $1D$ -нейтрона в локализованном состоянии вблизи поверхности вещества стенок нейтроновода относительно поглощения поверхностного фонона и перехода в непрерывный спектр будет  $\tau_S = 1/W_{1(S)}^{\text{HK}}$ , относительно поглощения объемного фонона —  $\tau_V = 1/W_{1(V)}^{\text{HK}}$ , и относительно поглощения нейтрона веществом стенок нейтроновода —  $\tau_a = 1/W_a$ .

**1.3. Оценка времени жизни  $1D$ -нейтрона в нейтроноводе-желобке.** Нейтроновод в форме желобка клиновидного сечения с углом раствора  $2\theta$  показан на рис. 1. Чтобы точно вычислить сумму  $\Sigma_n \psi_1^2(y_n, z_n)$ , необходимо решить уравнение Шредингера с учетом конечности величины потенциала  $U_S$  вещества стенок нейтроновода. Однако для вычисления времени жизни  $1D$ -нейтрона в нейтроноводе можно получить удовлетворительную оценку этой суммы, исходя из чисто геометрических соображений, аналогичных [7].

Вариационная ВФ  $1D$ -нейтрона для первого уровня  $E_1$  будет (при  $U_S \rightarrow \infty$ ):

$$\begin{aligned} \psi_1(\rho, \varphi) &= 2\beta^2 (2/3\theta)^{1/2} \rho \exp(-\beta\rho) \cos(\pi\varphi/2\theta), \\ \beta &= [12\pi^2 m^2 g \theta \sin \theta / \hbar^2 (\pi^2 + 2\theta^2)(\pi^2 - \theta^2)]^{1/3}, \\ E_1 &= \hbar^2 \beta^2 / 6m + \pi^2 \hbar^2 \beta^2 / 12m\theta^2 + 2mg\pi^2 \sin \theta / (\pi^2 - \theta^2) \theta \beta, \end{aligned} \quad (9)$$

здесь  $g$  — величина ускорения свободного падения в гравитационном поле.

С учетом экспоненциального затухания точной ВФ 1D-нейтрона  $\psi_1(y, z)$  в веществе стенок нейтроновода на глубине  $\sim \lambda_{\text{lim}}$  получим

$$\Sigma_n \psi_1^2(y_n, z_n) \approx (\lambda_{\text{lim}}/a_l) \Sigma_n \psi_1^2(\rho_n, \varphi = \theta), \quad (10)$$

здесь  $a_l$  — постоянная решетки вещества;  $\rho, \varphi$  — полярные координаты в плоскости  $yz$ . Учитывая явный вид вариационной ВФ (9), получим оценку

$$\psi_1^2(\rho, \varphi = \theta) \approx (8/3\theta) \beta^4 \rho^2 \exp(-2\beta\rho) [\lambda_{\text{lim}}/(\rho \sin \theta + \lambda_{\text{lim}})]^2. \quad (11)$$

Полагая  $\theta \ll 1$ ,  $\rho \sin \theta \gg \lambda_{\text{lim}}$  и переходя от суммирования по  $n$  к интегрированию по  $\rho$ , получим из (10), (11):

$$\Sigma_n \psi_1^2(y_n, z_n) \approx (4/3a_l^2) (\beta \lambda_{\text{lim}}/\theta)^3. \quad (12)$$

Принимая во внимание (12), из (6)–(8) получим для времени жизни 1D-нейтрона в кремниевом нейтроноводе-желобке с углом раствора клина  $2\theta = 10^\circ$  при  $T = 10$  К:  $\tau_S = 3 \cdot 10^8$  с,  $\tau_V = 6 \cdot 10^8$  с,  $\tau_a = 150$  с. Для угла  $\theta = 10^\circ$  указанные времена увеличатся приблизительно в 2 раза. Таким образом, при соответствующем выборе вещества стенок нейтроновода и профиля сечения желобка время жизни 1D-нейтрона может быть ограничено только собственным временем жизни  $\tau_0 \approx 10^3$  с.

**1.4. Оценка времени жизни 1D-нейтрона в нейтроноводе — цилиндрическом канале.** Нейтроновод в форме полого прямого цилиндрического канала в массиве материала показан на рис. 2. Эффективный потенциал взаимодействия УХН с веществом стенок нейтроновода равен  $U_S$ . Для определения нижних энергетических уровней локализованного состояния 1D-нейтрона в таком нейтроноводе хорошим является приближение, когда потенциал взаимодействия УХН со стенками нейтроновода неограничен ( $U_S \rightarrow \infty$ ). В этом случае уровни энергии 1D-нейтрона будут определяться уравнением  $J_{|l|}(\kappa\rho_0) = 0$ , где  $\kappa = (2m\varepsilon)^{1/2}/\hbar$ ,  $m$  — масса нейтрона,  $\varepsilon$  — собственное значение энергии,  $J_l(\alpha)$  — функция Бесселя. Энергетические уровни 1D-нейтрона будут  $\varepsilon_{n|l|} = \hbar^2 \alpha_{n+1,l}^2 (2m\rho_0^2)^{-1}$ , здесь  $\alpha_{k,l}$  —  $k$ -й нуль функции Бесселя  $J_l(\alpha)$  в порядке возрастания  $\alpha_{k,l}$ . Нижние энергетические уровни 1D-нейтрона легко находятся из данных таблиц [16]: первые три уровня имеют значения энергий  $\varepsilon_{00} = 2,88\hbar^2/m\rho_0^2$ ;  $\varepsilon_{01} = 7,33\hbar^2/m\rho_0^2$ ;  $\varepsilon_{02} = 13,21\hbar^2/m\rho_0^2$ . Приведем численные значения для нейтроновода из графита ( $U_S = 195$  нэВ). При радиусе нейтроновода  $\rho_0 = \lambda_{\text{lim}} = 64,8$  нм первые три уровня энергии будут 29; 74 и 134 нэВ. При радиусе  $\rho_0 = 2\lambda_{\text{lim}}$  получим значения уровней энергии 7,3; 18,6 и 33,5 нэВ. Таким образом, принятое приближение о бесконечной величине потенциала вещества стенок нейтроновода является оправданным для нижних уровней энергии 1D-нейтрона.

В дальнейшем нам понадобится явный вид ВФ 1D-нейтрона в основном состоянии. Вариационным методом Ритца получим ВФ

$$\Psi(x, \rho, \varphi) = [2(2\gamma + 1)]^{1/2} \rho_0^{-1} [1 - (\rho/\rho_0)^2]^\gamma \exp(ikx)/(2\pi)^{1/2} \quad \text{при } \rho \leq \rho_0, \quad (13)$$

и  $\Psi(x, \rho, \varphi) \equiv 0$  при  $\rho > \rho_0$ ; значение  $\gamma = (1 + 2^{1/2})/2 \approx 1,207$  и  $[2(2\gamma + 1)]^{1/2} \approx 2,613$ . Для ВФ (13) энергия основного локализованного состояния будет  $E_{\text{min}} = \gamma(2\gamma + 1)(2\gamma - 1)^{-1} \hbar^2/m\rho_0^2 \approx 2,91\hbar^2/m\rho_0^2$ , что хорошо согласуется с точным значением энергии  $\varepsilon_{00}$ .

Для вычисления  $\tau_S$ ,  $\tau_V$  и  $\tau_a$  сделаем оценку величины суммы  $\sum_n \psi_1^2(y_n, z_n)$ , используя соображения, аналогичные приведенным в п. 1.3. Учитывая явный вид ВФ (13), получаем оценку

$$\sum_n \psi_1^2(y_n, z_n) \approx \lambda_{\text{lim}}(2\rho_0 + \lambda_{\text{lim}})(2a_i \rho_0)^{-2} [\lambda_{\text{lim}}/(\rho_0 + \lambda_{\text{lim}})]^2. \quad (14)$$

Принимая во внимание (14), из (6)–(8) получим значения величин времени жизни  $1D$ -нейтрона в полом цилиндрическом нейтроноводе внутри вещества (кремний) при  $T = 10$  К: для  $\rho_0 = \lambda_{\text{lim}} - \tau_S = 4 \cdot 10^4$  с,  $\tau_V = 8 \cdot 10^4$  с,  $\tau_a = 0,02$  с; для  $\rho_0 = 10\lambda_{\text{lim}} - \tau_S = 2 \cdot 10^7$  с,  $\tau_V = 4 \cdot 10^7$  с,  $\tau_a = 10$  с. Таким образом, при соответствующем выборе вещества стенок и размера диаметра нейтроновода время жизни  $1D$ -нейтрона будет ограничено только собственным временем жизни.

## 2. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ $1D$ -НЕЙТРОНОВ ДРУГ НА ДРУГЕ

Рассмотрим процесс упругого рассеяния двух  $1D$ -нейтронов с антипараллельными спинами ( $\uparrow\downarrow$ ). Предполагаем, что энергии нейтронов достаточно малы ( $\sim 10^{-10}$  эВ) и энергия их поперечного движения остается все время квантованной. В начальном ( $i$ ) состоянии навстречу друг другу вдоль оси нейтроновода (рис. 1 и 2) свободно движутся  $1D$ -нейтроны с  $1D$ -импульсами  $P_{i1}$  и  $P_{i2}$ , а после рассеяния (в конечном состоянии  $f$ ) расходятся  $1D$ -нейтроны с  $1D$ -импульсами  $P_{f1}$  и  $P_{f2}$ . В системе координат, описывающей относительное движение двух  $1D$ -нейтронов вдоль оси нейтроновода (оси  $x$ ), гамильтониан взаимодействия имеет вид:  $H = -(\hbar^2/m)\partial^2/\partial x^2 - (\hbar^2/2m)(\Delta_1 + \Delta_2) + F_1(y_1, z_1) + F_2(y_2, z_2) + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ . Здесь  $m$  — масса нейтрона;  $\Delta_k = \partial^2/\partial y_k^2 + \partial^2/\partial z_k^2$ ,  $k = 1, 2$ ;  $x = x_1 - x_2$ ;  $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  — потенциал взаимодействия нейтронов ( $\uparrow\downarrow$ );  $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$  — радиусы-векторы нейтронов.

Для  $1D$ -нейтронов в нейтроноводе-желобке (рис. 1):  $F_1(y_1, z_1) + F_2(y_2, z_2) = mg(z_1 + z_2) + V_S(y_1, z_1) + V_S(y_2, z_2)$ , где  $g$  — ускорение свободного падения,  $V_S$  — потенциал вещества стенок желобка ( $\sim 10^{-7}$  эВ). Для  $1D$ -нейтронов в нейтроноводе — цилиндрическом канале (рис. 2):  $F_1(y_1, z_1) + F_2(y_2, z_2) = V_S(\rho_1, \varphi_1) + V_S(\rho_2, \varphi_2)$ , здесь  $V_S(\rho, \varphi) = \{0 \text{ при } \rho < \rho_0; U_S \text{ при } \rho \geq \rho_0\}$ ,  $U_S \sim 10^{-7}$  эВ}. Для  $1D$ -нейтронов, движущихся в нейтроноводе, образованном потенциалом осцилляторного типа:  $F_1(y_1, z_1) + F_2(y_2, z_2) = m\omega^2(\rho_1^2 + \rho_2^2)/2$ .

ВФ системы до ( $i$ ) и после ( $f$ ) рассеяния:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= u(y_1, z_1) u(y_2, z_2) (2\pi\hbar)^{-1/2} \exp(iP_i x/\hbar), \\ \Psi_f &= u(y_1, z_1) u(y_2, z_2) (2\pi\hbar)^{-1/2} \exp(iP_f x/\hbar), \end{aligned} \quad (15)$$

здесь:  $u(y_1, z_1)$  и  $u(y_2, z_2)$  — локализованные ВФ первого и второго  $1D$ -нейтронов в поперечной плоскости нейтроновода;  $P_i$  и  $P_f$  —  $1D$ -импульсы относительного движения  $1D$ -нейтронов до и после взаимодействия,  $P_i = (P_{i1} - P_{i2})/2$ ,  $P_f = (P_{f1} - P_{f2})/2$ .

Для описания процесса рассеяния УХН в присутствии внешнего поля необходимо использовать уравнения Фаддеева. Если ограничиться случаем, когда  $1D$ -нейтроны находятся на первом квантовом уровне и невозможен переход на более высокие уровни энергии, то, как было показано в [7] на основе решения уравнений Фаддеева, для вычисления сечения рассеяния можно использовать борновское приближение, описывая

взаимодействие УХН псевдопотенциалом Ферми  $V_F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 4\pi\alpha\hbar^2 m^{-1} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ , где  $\alpha \approx -18,5$  фм — длина  $n - n$ -рассеяния [17]. Относительная погрешность такого решения по сравнению с точным решением уравнений Фаддеева для  $1D$ -нейтронов в нейтроноводе-желобке будет  $\sim \alpha\beta \sim 10^{-10}$ , где  $\beta^{-1} \sim 10^{-4}$  м — характерная длина для локализованной ВФ нейтрона в поперечной плоскости нейтроновода [7], и для  $1D$ -нейтронов в нейтроноводе — цилиндрическом канале относительная погрешность будет  $\sim \alpha/\rho_0 < \alpha/\lambda_{\text{литт}} \sim 10^{-7}$ .

Вероятность рассеяния  $1D$ -нейтронов ( $\uparrow\downarrow$ ) есть  $dw_{fi} = (2\pi/\hbar)|V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) dP_f$ , где  $V_{fi} = \int \Psi_f^* V_F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \Psi_i dx dy_1 dy_2 dz_1 dz_2$ ;  $E_i$  и  $E_f$  — энергия системы до и после рассеяния.

Для определения сечения рассеяния  $d\sigma$  необходимо вероятность  $dw_{fi}$  поделить на плотность потока  $J$  сталкивающихся частиц. Для  $1D$ -движения  $d\sigma$  является безразмерной величиной, в отличие от случаев  $3D$ - и  $2D$ -движения, когда сечения имеют размерности площади и длины соответственно. При  $1D$ -движении распределение нейтронов в поперечной плоскости нейтроновода полностью определено локализованными ВФ  $u(y_1, z_1)$  и  $u(y_2, z_2)$ . В потоке  $1D$ -нейтронов на одном квантовом уровне не может находиться более одной частицы с одинаковыми квантовыми числами. Поэтому количество  $1D$ -нейтронов, прошедших в единицу времени вдоль нейтроновода, и будет определять плотность потока нейтронов, т. е.  $J = v_i/2\pi\hbar$ , где  $v_i = 2P_i/m$  — относительная скорость  $1D$ -нейтронов до столкновения. Сечение рассеяния  $1D$ -нейтронов будет  $d\sigma = dw_{fi}/J = 4\pi^2 v_i^{-1} |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) dP_f$ . Проводя интегрирование по конечным импульсам и учитывая тождественность частиц, получим выражение для сечения упругого рассеяния  $1D$ -нейтронов

$$\sigma_{1D} = 16\pi^2 v^{-2} |V_{fi}|_{E_i=E_f}^2. \quad (16)$$

**2.1. Упругое рассеяние  $1D$ -нейтронов в нейтроноводе-желобке.** Для вычисления сечения упругого рассеяния  $1D$ -нейтронов, находящихся в нейтроноводе-желобке (рис. 1), в качестве локализованных ВФ начального и конечного состояний используем вариационную ВФ (9). Тогда, принимая во внимание ВФ (15), получим после вычисления  $V_{fi}$

$$\sigma_{1D} = (5\pi\alpha\hbar\beta^2/4m\theta)^2 v^{-2}. \quad (17)$$

Сделаем численные оценки, используя данные [7]. Для  $\theta = 5^\circ$ :  $\beta^{-1} = 3,4 \cdot 10^{-5}$  м и энергии первых двух квантовых уровней:  $E_1 = 1,1 \cdot 10^{-11}$  эВ,  $E_2 = 1,7 \cdot 10^{-11}$  эВ. Для  $\theta = 0,1^\circ$ :  $\beta^{-1} = 4,6 \cdot 10^{-4}$  м и энергии первых двух квантовых уровней:  $E_1 = 1,5 \cdot 10^{-10}$  эВ,  $E_2 = 2,3 \cdot 10^{-10}$  эВ. Рассматриваем  $1D$ -движение УХН вдоль нейтроновода с относительной кинетической энергией  $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-11}$  эВ, что соответствует относительной скорости  $v = 2(\varepsilon/m)^{1/2} = 4,2$  см/с. После вычислений получаем из (17) для  $\theta = 5^\circ$ :  $\sigma_{1D} = 1,1 \cdot 10^{-18}$ , а для  $\theta = 0,1^\circ$ :  $\sigma_{1D} = 8,5 \cdot 10^{-20}$ .

**2.2. Упругое рассеяние  $1D$ -нейтронов в нейтроноводе — цилиндрическом канале.** Для вычисления сечения упругого рассеяния  $1D$ -нейтронов, находящихся на первом энергетическом уровне в нейтроноводе — цилиндрическом канале (рис. 2), в качестве локализованных ВФ начального и конечного состояний используем вариационную ВФ из (13). После вычисления  $V_{fi}$  с ВФ (15), получим ( $\gamma = 1,207$ ):

$$\sigma_{1D} = [8\alpha\hbar(2\gamma + 1)^2/m\rho_0^2(4\gamma + 1)]^2 v^{-2}. \quad (18)$$

Сделаем численные оценки. Материал нейтроновода — кремний. Рассматриваем  $1D$ -движение УХН вдоль нейтроновода с относительной кинетической энергией  $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-11}$  эВ. Для значения  $\rho_0 = \lambda_{\text{lim}} = 79$  нм энергии первых двух квантовых уровней  $E_1 = 2,88\hbar^2/m\rho_0^2 = 19$  нэВ,  $E_2 = 7,33\hbar^2/m\rho_0^2 = 49$  нэВ и  $\sigma_{1D} = 5,1 \cdot 10^{-9}$ . Для значения  $\rho_0 = 10\lambda_{\text{lim}} = 790$  нм энергии первых двух квантовых уровней  $E_1 = 0,19$  нэВ,  $E_2 = 0,49$  нэВ и  $\sigma_{1D} = 5,1 \cdot 10^{-13}$ .

**2.3. Упругое рассеяние  $1D$ -нейтронов в потенциале осциллятора.** Вычислим сечение упругого рассеяния  $1D$ -нейтронов, движущихся в нейтроноводе вдоль оси  $x$ , стенки которого представляют собой потенциал осцилляторного типа (в поперечном сечении нейтроновода):  $V = m\omega^2\rho^2/2$ ,  $\rho^2 = y^2 + z^2$ . Энергия основного (локализованного) состояния будет  $E_0 = \hbar\omega$ , а локализованная ВФ —  $u(y, z) = u(\rho, \varphi) = (\lambda/\pi)^{1/2} \exp(-\lambda\rho^2/2)$ , где  $\lambda = m\omega/\hbar$ . Борновское приближение даст решение с относительной точностью  $\sim \alpha\lambda^{1/2}$  по сравнению с точным решением уравнений Фаддеева для рассеяния  $1D$ -нейтронов на нижнем уровне энергии в случае, когда отсутствуют переходы нейтронов между уровнями энергии осциллятора, т.е. когда энергия относительного движения  $1D$ -нейтронов вдоль оси  $x$  меньше  $\hbar\omega$ . С учетом ВФ (15) вычисляем  $V_{fi}$  и из (16) получаем

$$\sigma_{1D} = (4\alpha\hbar\lambda/m)^2 v^{-2}. \quad (19)$$

**2.4. Обсуждение результатов.** Полученные формулы (16)–(19) для сечения упругого рассеяния  $1D$ -нейтронов ( $\uparrow\downarrow$ ) позволяют сделать следующие выводы.

Во-первых, при энергиях УХН, когда является существенным квантование их поперечного движения в нейтроноводе и движение нейтронов становится эффективно одномерным, сечение упругого рассеяния возрастает  $\propto v^{-2}$  с уменьшением относительной скорости  $v$ , в отличие от случая более высокой энергии нейтронов, когда влиянием гравитационного поля и потенциала вещества можно пренебречь ( $\sigma = \text{const}$ ), или случая  $2D$ -движения нейтронов на плоскости ( $\sigma \propto v^{-1}$ ).

Во-вторых, сечение упругого рассеяния  $1D$ -нейтронов зависит от геометрических характеристик нейтроновода: от геометрии его профиля, от величины прижимающего поля (гравитационного и/или магнитного). Если обозначить через  $S$  величину эффективной площади локализации ВФ  $1D$ -нейтрона в поперечном сечении нейтроновода, то  $\sigma_{1D} \propto S^{-2}$ . Эту зависимость можно объяснить следующим образом. Вероятность обнаружить один нейтрон в какой-либо точке поперечного сечения нейтроновода  $\propto S^{-1}$ , и для другого нейтрона вероятность также  $\propto S^{-1}$ . Поэтому вероятность двум нейтронам «встретиться» и провзаимодействовать между собой  $\propto S^{-2}$ . Аналогично, если обозначить через  $L$  величину характерной длины локализации ВФ  $2D$ -нейтрона над поверхностью в гравитационном (и/или магнитном) поле, то сечение упругого рассеяния  $2D$ -нейтронов будет  $\sigma_{2D} \propto L^{-2}$  [7].

В заключение суммируем результаты.

Сечение упругого рассеяния нейтронов ( $\uparrow\downarrow$ ) имеет следующие сравнительные закономерности:

1. Свободное трехмерное движение нейтронов:  $\sigma_{3D} = \text{const}$ ,  $[\sigma_{3D}] = \text{м}^2$ .
2. Свободное эффективно двумерное движение нейтронов вдоль поверхности вещества:  $\sigma_{2D} \propto v^{-1}L^{-2}$ ,  $[\sigma_{2D}] = \text{м}$ .
3. Свободное эффективно одномерное движение нейтронов вдоль оси нейтроновода:  $\sigma_{1D} \propto v^{-2}S^{-2}$ ,  $[\sigma_{1D}] = 1$ .

Посредством выбора материала стенок и геометрических характеристик нейтронотода время жизни УХН в нейтронотоде может определяться только собственным временем жизни нейтрона.

Благодарю В. И. Лушикова за полезные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышевский В. Г. Ядерная оптика поляризованных сред. М.: Энергоатомиздат, Москва, 1995.
2. Luschnikov V. I. // Proc. of Intern. Conf. on the Interactions of Neutrons with Nuclei, Lowell, USA, July 6–9, 1976. V. 1. P. 117–142; ERDA, CONF-760715-P1. 1976.
3. Luschnikov V. I. // Physics Today. 1977, June. P. 42–51.
4. Nesvizhevsky V. V. et al. // Nucl. Instr. Meth. A. 2000. V. 440. P. 754.
5. Лушиков В. И., Франк А. И. // Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28. С. 607.
6. Артемьев В. А. // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. С. 840.
7. Артемьев В. А. // ЯФ. 1991. Т. 53. С. 20.
8. Игнатович В. К. Физика ультрахолодных нейтронов. М.: Наука, 1986.
9. Силин А. П. // УФН. 1985. Т. 147. С. 485.
10. Гуревич И. И., Тарасов Л. В. Физика нейтронов низких энергий. М.: Наука, 1965.
11. Бетгер Х. Принципы динамической теории решетки. М.: Мир, 1986;  
Bötinger H. Principles of the Theory of Lattice Dynamics. Berlin: Academie-Verlag, 1983.
12. Каган Ю. // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11. С. 235.
13. Маделунг О. Физика твердого тела. Локализованные состояния. М.: Наука, 1985;  
Madelung O. Introduction to Solid-State Theory. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1978.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
15. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978;  
Kittel C. Introduction to Solid State Physics. 4th ed. N. Y.; London; Sydney; Toronto: John Wiley and Sons, Inc.
16. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979;  
Handbook of Mathematical Functions / Ed. by M. Abramowitz, I. Stegun. National Bureau of Standards, 1964.
17. Александров Ю. А. Фундаментальные свойства нейтрона. М.: Энергоатомиздат, 1992.



УДК 539.144.4

## *g* FACTORS AS A PROBE FOR HIGH-SPIN STRUCTURE OF NEUTRON-RICH Dy ISOTOPES

*H. L. Yadav*<sup>a</sup>, *M. Kaushik*<sup>a</sup>, *I. R. Jakhar*<sup>a</sup>, *A. Ansari*<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Department of Physics, Rajasthan University, Jaipur, India

<sup>b</sup> Institute of Physics, Bhubaneswar 751 005, India

We have made theoretical investigations on the structure of high spin states of <sup>160–170</sup>Dy isotopes to supplement the current experimental progress being made on the production and spectroscopy of neutron-rich Dy nuclei with mass number  $A = 166$  and  $168$ . The calculations have been carried out within the framework of cranked Hartree–Fock–Bogoliubov (CHFb) theory employing a pairing + quadrupole + hexadecapole model interaction. Our results for the  $g$  factors show a remarkable variation as a function of angular momentum while moving from <sup>164</sup>Dy to neutron-rich isotopes <sup>166–170</sup>Dy. This is explained in terms of relative rate of change in proton and neutron single-particle contributions to the total aligned angular momentum as the system acquires higher spins. Amongst single-particle orbitals, the  $\pi h_{11/2}$  and  $\nu i_{13/2}$  states and their respective positions from the proton and neutron Fermi levels are found to play the most crucial role. A comparison with the available experimental data shows that our calculated spin dependence of  $g$ -factor values for yrast states in the stable isotopes <sup>160,162,164</sup>Dy are consistent with the recent measurements of Brandolini et al.

В статье представлены результаты расчета  $g$ -факторов для состояний ираст-полосы с большими моментами ряда изотопов диспрозия с  $A = 160 \div 170$ . Расчеты выполнены в рамках модели, развитой П. Рингом и П. Шуком для деформированных ядер в приближении Хартри–Фока–Боголюбова с учетом вращения. Учитываются остаточные силы парного и мультиполь-мультипольного ( $\lambda = 2, 4$ ) взаимодействий. Показано, что поведение  $g$ -фактора возбужденных состояний в зависимости от углового момента ядра различается для легких и тяжелых нейтроноизбыточных изотопов Dy. Причина этого связана с изменением вклада нейтронного  $i_{13/2}$  и протонного  $h_{11/2}$  состояний в полный выстроенный угловой момент. Результаты расчетов для легких изотопов находятся в соответствии с недавними экспериментальными результатами. В связи с этим ставится вопрос о необходимости проверки на эксперименте их предсказаний для тяжелых изотопов Dy.

### INTRODUCTION

The study of magnetic moment or  $g$  factor has been extensively employed in the past as a sensitive probe for a better understanding of the structure of ground state as well as excited states up to very high angular momentum in stable nuclei in different mass regions. With the advent of radioactive beam facilities, now the focus has shifted to the production and study of spectroscopic properties of neutron-rich nuclei. Such studies in the mass  $A > 160$  region have been limited though to the neighbourhood of stable nuclei because of difficulties in their production and observations. However, recently there have been made successful experimental attempts to study the properties of neutron-rich Dy isotopes: <sup>166</sup>Dy [1] and <sup>168</sup>Dy [2]. The change in the moment of inertia as a function of rotational frequency for the even-even <sup>160–166</sup>Dy isotopes as discussed in Ref. 1 reveals variation in the detailed structure of the excitation spectrum indicating separation in behaviour as a function of neutron number

$N$  beyond  $^{164}\text{Dy}$ . Similar neutron number dependence has been inferred from the systematics of measured [2] energy of the first  $2^+$  state  $E_2^+$ , and the excitation energy ratio  $R_4 = E_4/E_2$  for Dy and other rare-earth nuclei [3].

In yet another recent experiment Brandolini et al. [4] have measured the  $g$ -factor values for the yrast levels in  $^{160-164}\text{Dy}$  isotopes. These measurements comprise the results up to angular momentum states  $J = 12^+$  in  $^{160}\text{Dy}$  and up to  $J = 10^+$  in  $^{162-164}\text{Dy}$  nuclei. Earlier measurements by the Bonn group [5,6] for the  $g$  factors in these nuclei were restricted up to the states with spin  $J = 6^+$ . The Bonn group data [5,6] are not compatible with those of Brandolini et al. [4]. Apart from the overall differences in the  $g$ -factor values of the two measurements for all the three isotopes, one also finds that the values for the  $2^+$ ,  $4^+$ , and  $6^+$  states in  $^{160}\text{Dy}$  in Refs. 5, 6 show oscillatory behaviour whereas those of Ref. 4 are marked by a smooth reduction, albeit slow, right up to  $J = 12^+$  states. In this connection we should add that it is gratifying to note that the results of our earlier CHFB calculations [7] using the pairing-plus-quadrupole Hamiltonian [8] for the nuclei  $^{158,164}\text{Dy}$  and  $^{166}\text{Er}$  have proved to be consistent with experimental data [4,9,10] on the  $g$ -factor values providing a correct trend for their angular momentum dependence.

In view of these interesting experimental developments, we have carried out a systematic study of the structure of ground state as well as high spin states of  $^{160-170}\text{Dy}$  isotopes within the framework of CHFB using the pairing + quadrupole + hexadecapole model interaction Hamiltonian. It should be mentioned that guided by the past experience we have not included at this stage of our investigations the particle number and angular momentum projections as we believe that such calculations, though desired, would not significantly change the gross features of the present results for the  $g$  factors. Further, since our main interest is in the high spin structure of neutron rich isotopes, we present here the results for  $^{164-170}\text{Dy}$  isotopes in greater detail. It may be emphasized that one of the main aims of the present work is to show that the low as well as high spin behaviour of  $g$  factors in  $^{166}\text{Dy}$  and in heavier isotopes is strikingly different from that in  $^{160,162,164}\text{Dy}$ . Thus a measurement of  $g$  factors even at low spins in  $^{166}\text{Dy}$  and in heavier isotopes would be extremely valuable to enrich our understanding of the neutron-rich rare-earth nuclei. For the purpose of our general study we have chosen the interaction strengths which provide a reasonably good description for the ground state shape parameters, the first  $2^+$  excitation energy, and the spin dependence of the  $g$  factors of  $^{164}\text{Dy}$ . The calculations are then performed with the same set of interaction parameters for all other isotopes  $^{166,168,170}\text{Dy}$  in order to illustrate the general trend for neutron number dependence of the variation in  $g$  factor as a function of increasing spin. The same set of parameters provides a consistent trend of  $g$  factor values for lighter isotopes  $^{160,162}\text{Dy}$  as well. A very small adjustment only of pairing interaction strengths, keeping other interaction parameters unchanged, even provides almost a quantitative agreement with experiments.

## 1. THE MODEL AND CALCULATIONAL DETAILS

The CHFB theory [11] has been successfully applied in the past especially for the study of high-spin structures and by now it has become a standard tool. We therefore describe here only the most relevant aspects of this approach. For a deformed nucleus, with  $z$  axis as its

symmetry axis, a cranked Hamiltonian is given by

$$H_\omega = H - \omega J_x, \quad (1)$$

where  $\omega$  is the cranking frequency for rotation about the  $x$  axis and  $\hat{H}$  represents the usual many-body Hamiltonian for the ground state with  $\omega = 0$ . The angular momentum and particle number are conserved on the average and satisfy the following constraints simultaneously,

$$\langle \Psi_{\text{CHF B}} | \hat{J}_x | \Psi_{\text{CHF B}} \rangle = \langle \hat{J}_x \rangle = \sqrt{J(J+1)}, \quad (2)$$

$$\langle \Psi_{\text{CHF B}} | \hat{N} | \Psi_{\text{CHF B}} \rangle = N. \quad (3)$$

Here  $N$  denotes the particle number.

For the purpose of our calculations we employ a quadrupole + hexadecapole + pairing model interaction Hamiltonian  $H$  written as,

$$H = H_0 - \frac{1}{2} \sum_{\lambda=2,4} \chi_\lambda \sum_{\mu} \hat{Q}_{\lambda\mu} (-1)^\mu \hat{Q}_{\lambda-\mu} - \frac{1}{4} \sum_{\tau=p,n} G_\tau \hat{P}_\tau^\dagger \hat{P}_\tau, \quad (4)$$

where  $H_0$  stands for the one-body spherical part;  $\chi_\lambda$  term represents the quadrupole and hexadecapole terms with  $\lambda = 2, 4$ ; and the  $G_\tau$  term represents the proton and neutron monopole pairing interaction. Explicitly we have

$$\hat{Q}_{\lambda\mu} = \left( \frac{r^2}{b^2} \right) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi), \quad (5)$$

$$\hat{P}_\tau^\dagger = \sum_{\alpha_\tau, \bar{\alpha}_\tau} c_{\alpha_\tau}^\dagger c_{\bar{\alpha}_\tau}^\dagger. \quad (6)$$

In the above  $c^\dagger$  are the creation operators with  $\alpha \equiv (n_\alpha l_\alpha j_\alpha m_\alpha)$  as the spherical basis-states quantum numbers with  $\bar{\alpha}$  denoting the conjugate time-reversed orbital. The standard mean field CHF B equations for which an excellent account is available in Ref. 11, are solved self-consistently for the quadrupole, hexadecapole and pairing gap parameters. The deformation parameters are defined in terms of the following expectation values:

$$D_{2\mu} = \chi_2 \langle \hat{Q}_{2\mu} \rangle, \quad D_{4\mu} = \chi_4 \langle \hat{Q}_{4\mu} \rangle, \quad (7)$$

$$\hbar\omega\beta \cos \gamma = D_{20}, \quad \hbar\omega\beta \sin \gamma = \sqrt{2}D_{22}, \quad \hbar\omega\beta_{40} = D_{40}, \quad (8)$$

$$\Delta_\tau = \frac{1}{2} G_\tau \langle \hat{P}_\tau \rangle. \quad (9)$$

The oscillator frequency  $\hbar\omega = 41.0A^{-1/3}$  (MeV), whereas  $\beta, \gamma$ , and  $\beta_{40}$  are the usual deformation parameters, while  $\Delta_p$  and  $\Delta_n$  are the pairing gap parameters for protons and neutrons, respectively. For the *g*-factor calculations we use the relation

$$g = \langle \Psi_{\text{CHFB}} | \mu_x | \Psi_{\text{CHFB}} \rangle / \langle \hat{J}_x \rangle, \quad (10)$$

where the *x* component of the magnetic moment operator is given by

$$\mu_x = g_l \sum_i j_x(i) + (g_s - g_l) \sum_i s_x(i) \quad (11)$$

with  $g_l = 1$  and  $g_s = 5.586$  for proton, and  $g_l = 0$  and  $g_s = -3.826$  for neutrons. From the form of the expression for *g* it is evident that the contribution of intrinsic spin  $s_x$  of neutron single particle states is negative whereas that from protons is positive. Thus in the case of predominant neutron alignments the *g* factor values may become close to zero (or even negative) as is observed in many rare earth nuclei at relatively higher angular momenta.

Present calculations have been performed within the basis space consisting of  $N = 4, 5$  harmonic oscillator major shells  $+0i_{13/2}$  orbitals for protons, and  $N = 5, 6$  major shells  $+0j_{15/2}$  orbitals for neutrons with the assumption of an inert core  $Z = 40$  and  $N = 70$ . For the model Hamiltonian with multipole separable forces having  $r^2$  radial dependence a basis space constituted of many shells is not required as has been elaborated in Ref. 8. Nevertheless, we have considered the additional subshells  $0i_{13/2}$  for protons, and  $0j_{15/2}$  for neutrons in our calculations. It is observed that these additional orbitals do not play any significant role even at high spins. The spherical single particle energies are taken as the spherical Nilsson model single particle energies with *A*-dependent Nilsson parameters [12]. The upper shell radial matrix elements are reduced by factors,  $(N_0 + 3/2)/(N + 3/2)$ , as discussed in Ref. 8, where  $N_0$  takes the value 4 for protons and 5 for neutrons. Finally the interaction strengths are chosen such that reasonable values of the ground-state shape parameters, the first  $2^+$  excitation energy ( $\sim 100$  keV), and the spin-dependent (up to  $J = 10$ ) *g* factors of  $^{164}\text{Dy}$  are obtained. On the basis of this consideration we have taken the following values of interaction strengths (all in MeV)

$$\chi_2 = 60/A^{1.4}, \quad \chi_4 = 55/A^{1.4}, \quad G_p = 25.3/A, \quad G_n = 21.5/A. \quad (12)$$

For our general qualitative study of spin dependence of *g*-factor values we use only this set of global interaction strengths for all the isotopes  $^{164-170}\text{Dy}$  throughout. However, it should be emphasized that for a quantitative agreement with experimental data one has to slightly fine tune the pairing interaction strengths, as the proton and neutron contribution to the total alignment  $\langle j_x \rangle$  is very sensitive to the single particle energies and the position of the proton and neutron Fermi levels as has been demonstrated in the case of  $^{160,162}\text{Dy}$  isotopes.

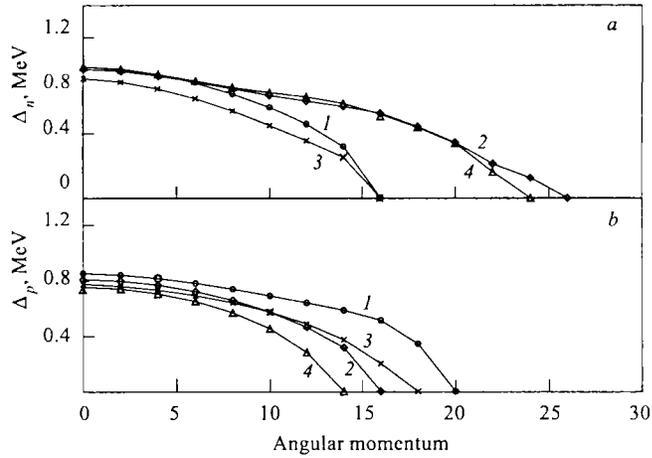
## 2. RESULTS AND DISCUSSIONS

First we make some remarks about the ground state properties of these nuclei summarized in Table 1. Our results show that in their ground state all these isotopes, excepting  $^{164}\text{Dy}$  which shows a tendency to have small prolate deformation  $\gamma$ , are symmetrically deformed

with almost similar values of  $\beta$  ranging from 0.3444 for  $^{170}\text{Dy}$  to 0.3529 for  $^{166}\text{Dy}$ . This  $\gamma$  asymmetry of  $^{164}\text{Dy}$  becomes more pronounced at higher spins as compared to that in other isotopes. For example, it becomes  $8^\circ$  at  $J = 20^+$  for  $^{164}\text{Dy}$  but remains less than  $4^\circ$  for others. Further, the systematics of energy of  $2^+$  state and the ratio  $R_4 = E_4/E_2$  obtained in our calculations are found to be consistent with the experimental results [2]. The proton and neutron pairing gaps  $\Delta_p$  and  $\Delta_n$  for this isotope are found to be largest, though the  $\Delta_n$  values for  $^{166}\text{Dy}$  and  $^{170}\text{Dy}$  are similar to that of  $^{164}\text{Dy}$ . These attributes are finally seen to be responsible for  $^{164}\text{Dy}$  to show marked differences in its angular momentum dependence of the  $g$  factors as compared to neutron-rich isotopes studied here.

**Table 1. CHF results for the ground-state intrinsic-shape parameters quadrupole deformation  $\beta$ , asymmetric deformation  $\gamma$ , hexa-decapole deformation  $\beta_{40}$ . The table also shows the proton and neutron pairing gaps  $\Delta_p$  and  $\Delta_n$ , and the Fermi energies  $\lambda_p$  and  $\lambda_n$  for the ground state along with the excitation energy  $E_2$  and the ratio  $R_4 = E_4/E_2$  for the  $^{164-170}\text{Dy}$  isotopes**

Nucleus	$\beta$	$\gamma$ , deg	$\beta_{40}$	$\Delta_p$ , MeV	$\Delta_n$ , MeV	$\lambda_p$ , MeV	$\lambda_n$ , MeV	$E_2^+$ , KeV	$R_4$
$^{164}\text{Dy}$	0.3528	0.0299	0.0293	0.854	0.816	-2.095	-4.386	96.5	3.219
$^{166}\text{Dy}$	0.3529	0.0080	0.0160	0.811	0.801	-2.147	-3.994	97.3	3.258
$^{168}\text{Dy}$	0.3524	0.0003	0.0025	0.774	0.743	-2.204	-3.520	91.7	3.226
$^{170}\text{Dy}$	0.3444	0.0130	-0.0109	0.756	0.815	-2.257	-3.013	98.1	3.233



**Fig. 1.** The angular momentum dependence of neutron (a) and proton (b) pairing gaps  $\Delta_n$  and  $\Delta_p$  for the yrast levels in  $^{164-170}\text{Dy}$  isotopes: 1,  $\circ$  ---  $A = 164$ ; 2,  $\diamond$  ---  $A = 166$ ; 3,  $\times$  ---  $A = 168$ ; 4,  $\triangle$  ---  $A = 170$

In order to look into the mass dependence of the high-spin structure of these isotopes, we have shown in Fig. 1 the variation of proton and neutron pairing gaps,  $\Delta_p$  and  $\Delta_n$ , for the

states with angular momentum up to  $J = 26^+$ . While moving towards neutron-rich isotopes from  $A = 164$  to  $A = 170$ , it is found that the proton-pairing gap collapses for these isotopes, respectively at spin value  $J = 20^+$ ,  $J = 16^+$ ,  $J = 18^+$ ,  $J = 14^+$ ; whereas the neutron pairing collapses at  $J = 16^+$ ,  $J = 26^+$ ,  $J = 16^+$ , and  $J = 24^+$ , respectively. It is seen from the figure that the rate of decrease of  $\Delta_p$  with increasing angular momentum is much slower for  $^{164}\text{Dy}$ . In contrast to  $^{170}\text{Dy}$  it is quite fast as compared to other isotopes. An almost opposite trend is observed for the neutron-pairing gap  $\Delta_n$ . It may be emphasized that in a number projected calculation the finer details of the variations in  $\Delta_p$  and  $\Delta_n$  could be changed, but guided by our experience we believe that the gross features of the results discussed above will not be washed out to change our conclusions. The change of angular frequency  $\omega$  with spin  $J$  has been shown in Fig. 2. It is seen that these curves do not exhibit any backbending feature, though in case of  $^{168}\text{Dy}$  and  $^{170}\text{Dy}$  the rate of change in  $\omega$  increases sharply at around  $J = 14$  in contrast to  $^{164}\text{Dy}$  which shows moderate change around  $J = 20$ .

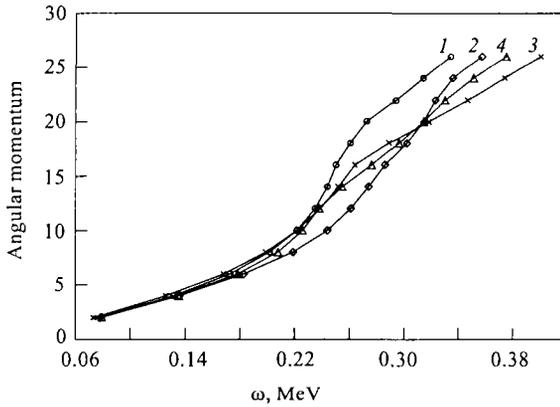


Fig. 2. Variation of angular frequency  $\omega$  with angular momentum  $J$  for the yrast levels in  $^{164-170}\text{Dy}$ : 1,  $\circ$  —  $^{164}\text{Dy}$ ; 2,  $\diamond$  —  $^{166}\text{Dy}$ ; 3,  $\times$  —  $^{168}\text{Dy}$ ; 4,  $\triangle$  —  $^{170}\text{Dy}$

In Fig. 3 we have shown the variation of calculated  $g$  factors for the four Dy isotopes. The experimental data for the  $^{164}\text{Dy}$  isotope taken from the work of Brandolini et al. [4] and that of Bonn group [5, 6] are also displayed. The experimental data of Ref. 4 and Refs. 5, 6 are not consistent with each other. We have not shown the Canberra data [13] as these are quite old and have large uncertainty. Our results for the isotope dependence show that the enhancement in  $g$ -factor values starting already at low spin becomes increasingly sharp while moving from  $^{164}\text{Dy}$  to higher mass number. In contrast, for the  $^{164}\text{Dy}$  isotope the trend is much different. The  $g$  factor continues to decrease slowly until  $J = 14^+$  and then goes up suddenly to level off at  $J = 20^+$ . For the isotopes  $^{166}\text{Dy}$  and  $^{170}\text{Dy}$  a very sharp increase is followed by a rapid reduction in  $g$  factors beyond  $J = 14^+$  and  $J = 16^+$ , respectively. This variation with increasing spin for  $^{168}\text{Dy}$  characteristically shows intermediate behaviour between the two extremes described above for  $^{164}\text{Dy}$  and  $^{170}\text{Dy}$  and underlines the interplay between the single particle and collective degrees of freedom. In this respect the positions of the single-particle levels with respect to the Fermi surface play the most crucial role as

has been illustrated in Fig. 4 which displays the predominant contributions coming from the single-particle states  $\pi h_{11/2}$  and  $\nu i_{13/2}$  to the total angular momentum of the system through alignments due to the coriolis coupling. It may be mentioned that the effect of variation in Fermi energy with increasing mass number on the spectra and electromagnetic properties of nuclei has been demonstrated earlier in the context of our studies [14] of coriolis antipairing and alignment effects in transitional nuclei. From the form of the magnetic moment operator given by Eq. (11), it is evident that the proton states contribute positively and increase the  $g$  factor whereas in contrast the neutron single particles reduce it as these contribute only through the anomalous  $g_s$  term which has a negative value.

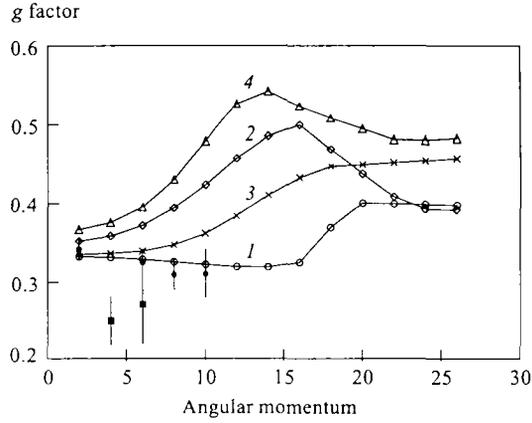


Fig. 3. Angular momentum dependence of  $g$ -factor values for the yrast levels in  $^{164-170}\text{Dy}$  isotopes: 1,  $\circ$  —  $^{164}\text{Dy}$ ; 2,  $\diamond$  —  $^{166}\text{Dy}$ ; 3,  $\times$  —  $^{168}\text{Dy}$ ; 4,  $\triangle$  —  $^{170}\text{Dy}$ . The full circles and full squares show the experimental data of Brandolini et al. [4] and that of Bonn group [5, 6], respectively

We first consider the  $g$ -factor variation for the yrast states in  $^{164}\text{Dy}$ . From Fig. 5 it is seen that the contribution of  $\nu i_{13/2}$  single-particle orbital to the total angular momentum of  $^{164}\text{Dy}$  is larger than that coming from the alignment of the  $\pi h_{11/2}$  state through out for all spins starting from  $J = 2^+$ . This is due to closer proximity of the  $\nu i_{13/2}$  state to the neutron Fermi energy  $\lambda_n$  as compared to that of  $\pi h_{11/2}$  state to the proton Fermi energy  $\lambda_p$ . Remembering that the neutron states have negative contribution, this accounts for a rather small value of the  $g$  factor for  $^{164}\text{Dy}$  as shown in Fig. 3. The  $\langle j_x \rangle$  for the  $\nu i_{13/2}$  increases linearly up to spin  $J = 16^+$  where the neutron-pairing gap  $\Delta_n$  becomes zero as is seen from Fig. 2. Similar increase is observed for the  $\langle j_x \rangle$  contribution from the  $\pi h_{11/2}$  state until spin value  $J = 20^+$  where the proton-pairing gap  $\Delta_p$  almost vanishes. This relative variation of the  $\langle j_x \rangle$  values from the two states with increasing spin is reflected in the variation of the  $g$  factor of  $^{164}\text{Dy}$  observed experimentally as depicted in Fig. 3. Thus one observes that due to relatively large increase of neutron contribution to  $\langle j_x \rangle$  the net result is that  $g$  factor continuously decreases until the total angular momentum of the system attains a value  $J = 14^+$  and then increases sharply around  $J = 16^+$  beyond which the rate of increase for the proton contribution to the  $\langle j_x \rangle$  value is enhanced and that of neutron contribution is diminished due to the collapse of the neutron pairing. This increase in the  $g$  factor for  $^{164}\text{Dy}$  is sustained until it acquires the

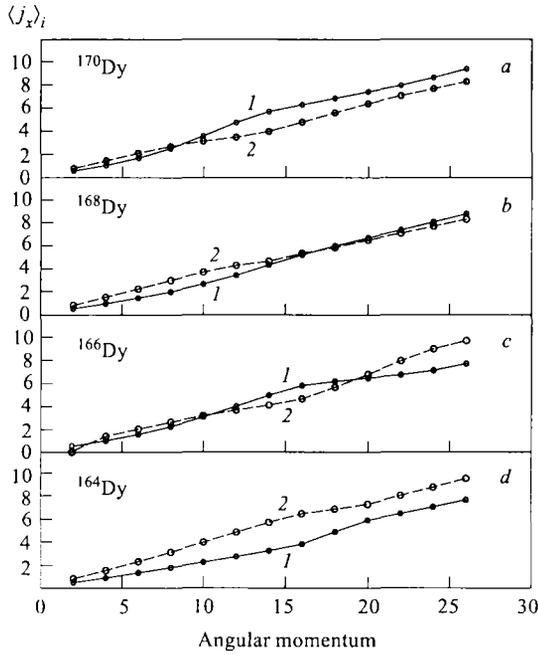


Fig. 4. Contribution of single-particle orbitals  $\pi h_{11/2}$  (1, small circles), and  $\nu i_{13/2}$  (2, large circles) to the total angular momentum  $J$  in  $^{164}\text{Dy}$  (d),  $^{166}\text{Dy}$  (c),  $^{168}\text{Dy}$  (b) and  $^{170}\text{Dy}$  (a). The contributions from other proton and neutron single-particle states are rather small and have not been depicted in this plot

total spin  $J = 20^+$ , when the proton pairing also collapses to zero. Beyond spin  $J = 20^+$  the contributions of proton and neutron states to  $\langle j_x \rangle$  exhibit almost similar rate of increase and therefore the  $g$  factor remains almost constant. A comparison with the experimental data in Fig.3 shows that the new measurements of Brandolini et al. [4] carried out up to spin  $J = 10^+$  show a similar trend of slowly decreasing  $g$  factor value with increasing spin as obtained in our CHFB calculations. As mentioned earlier, if particle number projection is performed, a small pairing gap will continue to persist even at very high spins. However, our experience with such calculations [15] is that the rotation alignment is not much affected to change the  $g$  factor values appreciably.

The variation of  $g$  factor for other isotopes shown in Fig. 3 can be understood in a similar manner. While moving from  $^{164}\text{Dy}$  to neutron rich isotopes, the proton Fermi energy remains almost constant while that for the neutron moves up as shown in Table 1. Consequently contribution of the neutron single-particle state  $\nu i_{13/2}$  to the  $\langle j_x \rangle$  value decreases due to somewhat reduced coriolis coupling and already for  $^{168}\text{Dy}$  the proton contribution becomes larger to that from neutron at spin values beyond  $J = 18^+$ . This take-over in the case of  $^{170}\text{Dy}$  occurs at much lower angular momentum  $J = 10^+$ . In case of  $^{166}\text{Dy}$  it is seen from Fig. 4 that the rate of enhancement for proton contribution at lower spins is larger as compared to that of neutrons. Consequently total contribution of proton states becomes larger than that from neutron states beyond spin  $J = 10^+$  and remains so until  $J = 18^+$ . This causes the

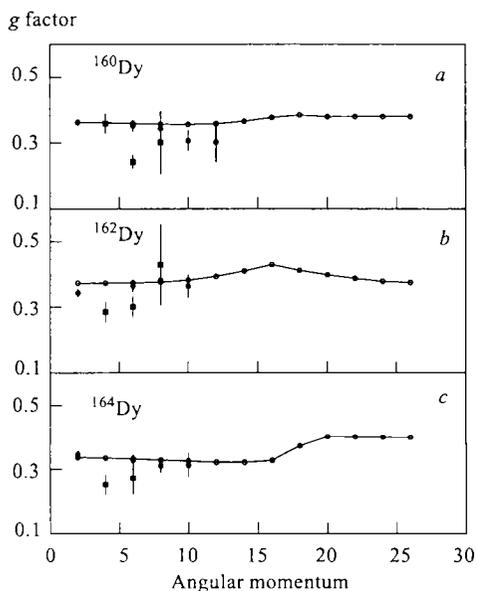


Fig. 5. Angular momentum dependence of  $g$ -factor values for the yrast levels in  $^{160}\text{Dy}$  (a),  $^{162}\text{Dy}$  (b) and  $^{164}\text{Dy}$  (c). The experimental data of Brandolini et al. [4] and that of Bonn group [5, 6] have been shown by full circles and full squares, respectively; empty circles and curves — theory

$g$  factor to rise continuously up to  $J = 18^+$  as seen in Fig. 3. The proton-pairing gap for  $^{166}\text{Dy}$  tends to become negligible at  $J = 16^+$ , whereas the neutron pairing collapses only at higher spin around  $J = 26^+$ . This is the reason that the rate of rise in the proton alignment is drastically reduced beyond spin value  $J = 16^+$  whereas it continues to increase for the neutron right up to spin value  $J = 26^+$ . This variation causes the  $g$  factor to have much reduced rate of increase beyond spin  $J = 18^+$  as is seen from Fig. 3. The slope of the curve for  $\pi h_{11/2}$  at lower spins up to  $J = 14^+$ , as seen in Fig. 4, is maximum in the case of  $^{170}\text{Dy}$  and thereafter it is reduced. Consequently one observes in Fig. 3 that growth in the  $g$  factor for  $^{170}\text{Dy}$  within this region of spin values is very sharp. The pairing gap  $\Delta_p$  for this isotope collapses around  $J = 14^+$  whereas  $\Delta_n$  becomes zero at  $J = 24^+$ . This in turn results in the sharp reduction of  $g$  factor after  $J = 14^+$ . The  $g$  factor keeps decreasing up to spin value  $J = 24^+$  due to neutron contribution to  $\langle j_x \rangle$ . After both  $\Delta_p$  and  $\Delta_n$  become zero, that is for  $J \geq 24^+$ , the  $g$  factor attains almost a constant value as can be seen in Fig. 3. A similar explanation holds for the case of  $^{166}\text{Dy}$  isotope.

Brandoni et al. [4] have carried out measurements of the  $g$  factors also in the yrast band of  $^{160}\text{Dy}$ ,  $^{162}\text{Dy}$  nuclei and the data are understood to be greatly improved over earlier results obtained by the Bonn group [5, 6]. With this in view, we have also studied the spin dependence of  $g$  factor values for these isotopes as well. It is found that using the same strengths for the quadrupole and hexa-decapole interactions as used for  $^{164-170}\text{Dy}$  and with a slight change in the pairing interaction strength, the experimental results are well accounted for by the theory as shown in Fig. 5. The pairing strengths used for  $^{160}\text{Dy}$  are  $AG_p = 23.02$

and  $AG_n = 21.50$ , and those for  $^{162}\text{Dy}$  are  $AG_p = 24.00$  and  $AG_n = 22.00$ . Such a small variation in pairing strengths from one nucleus to another is quite expected in order to obtain a quantitative description of the data.

The experimental *g*-factor values in  $^{160}\text{Dy}$  and  $^{164}\text{Dy}$  exhibit a slight decrease with increasing spin values whereas in the case of  $^{162}\text{Dy}$  it tends to increase a bit up to  $J = 6^+$  and then decreases again. As discussed above for the  $^{164-170}\text{Dy}$  isotopes such a behaviour reflects the relative increase in contributions to total alignment coming from proton and neutron single particle orbitals as the system acquires higher and higher spin. This in turn depends sensitively on the position of the Fermi energy with respect to single particle levels, especially the  $\pi h_{11/2}$  and  $\nu i_{13/2}$  as explained for heavier isotopes above.

## CONCLUSIONS

In view of the new experiments being successfully performed for the neutron rich  $^{166}\text{Dy}$  and  $^{168}\text{Dy}$  nuclei, we have carried out the standard *x*-axis CHFB calculations using a separable pairing + quadrupole + hexadecapole model Hamiltonian for the  $^{164-170}\text{Dy}$  isotopes to study the spin dependence of *g*-factor values for the yrast states, especially in the neutron rich isotopes.

The systematics of CHFB results for the ground and excited  $2^+$  states, and that of the ratio  $R_3 = E_4/E_2$  for these isotopes indicate that in the ground state the maximum deformation occurs at neutron number  $N = 102$  corresponding to  $^{168}\text{Dy}$ , instead of the expected  $N = 104$  which signifies the midshell for the magic numbers 82 and 126. Our results also suggest that  $^{164}\text{Dy}$  is asymmetrically deformed in the ground state having quadrupole deformation  $\beta$  close to that for  $^{168}\text{Dy}$ . This implies a second maximum deformation occurs at neutron number  $N = 98$ . These findings are consistent with the recent experimental results [2, 3]. The axial component of hexadecapole deformation in the ground state of these isotopes varies from  $\beta_{40} = 0.029$  in  $^{164}\text{Dy}$  to  $\beta_{40} = -0.01$  in neutron rich  $^{170}\text{Dy}$ . Our  $\beta_{40} = 0.029$  in  $^{164}\text{Dy}$  is slightly larger than the value  $\beta_{40} = 0.019$  reported by Stuchbery et al. [16].

The spin dependence of the *g*-factor values in  $^{166,168,170}\text{Dy}$  are found to be characteristically different from that observed in stable  $^{164}\text{Dy}$ . The *g*-factor values in neutron rich  $^{170}\text{Dy}$  exhibit a sharp rise with increasing spin attaining a maximum at  $J = 14^+$ . This sharp increase in  $^{164}\text{Dy}$  is found to set in at much higher spin beyond  $J = 16^+$ . This marked separation of behaviour is explained in terms of the relative rate of increase in contributions to the total aligned angular momentum coming from proton and neutron single particle orbitals. Our calculations indicate that for  $^{166,168,170}\text{Dy}$   $g_J > g_2$  for  $J = 4$  to  $26$  contrary to  $g_J < g_2$  for  $J$  values up to 14. At much higher spins  $J \geq 24^+$  the *g* factor values in all these isotopes are seen to level off. In the Dy nuclei studied here it is found that the  $\pi h_{11/2}$  and  $\nu i_{13/2}$  single-particle states and their positions with respect to the Fermi levels play important role in influencing the main trend of spin dependence of the *g* factors. Finally it is shown that the recent experimental data [4] for the spin dependence of *g* factor values for the yrast states in  $^{160,162,164}\text{Dy}$  can be satisfactorily accounted for within the cranking approach with multipole interactions. In order to verify the new trend in spin dependence of *g*-factor values for the neutron rich nuclei it would be of great interest to have measurements of *g*-factor values even at low spins for the yrast states in  $^{166,168,170}\text{Dy}$ .

**Acknowledgements.** The authors are grateful to the Department of Science and Technology (DST), Government of India for financial support under the project No. SP/S2/K-28/97.

#### REFERENCES

1. *Wu C. Y. et al.* // *Phys. Rev. C.* 1998. V. 57. P. 3466.
2. *Asai M. et al.* // *Phys. Rev. C.* 1999. V. 59. P. 3060.
3. *Joss D. T. et al.* // *Nucl. Phys. A.* 2001. V. 689. P. 631.
4. *Brandolini F. et al.* // *Eur. Phys. J. A.* 1999. V. 6. P. 149.
5. *Alfter I. et al.* // *Z. Phys. A.* 1997. V. 357. P. 13.
6. *Alfter I. et al.* // *Hyp. Int.* 1997. V. 110. P. 313.
7. *Ansari A., Wuest E., Muhlans K.* // *Nucl. Phys. A.* 1984. V. 415. P. 215.
8. *Baranger M., Kumar K.* // *Nucl. Phys. A.* 1968. V. 110. P. 490; 529.
9. *Alzner A. et al.* // *Z. Phys. A.* 1985. V. 322. P. 467.
10. *Doran C. E. et al.* // *Z. Phys. A.* 1986. V. 325. P. 285.
11. *Ring P., Schuck P.* *The Nuclear Many-Body Problem.* Berlin: Springer, 1980.
12. *Nilsson S. G. et al.* // *Nucl. Phys. A.* 1969. V. 131. P. 1.
13. *Doran C. E. et al.* // *Phys. Rev. C.* 1989. V. 40. P. 2035.
14. *Yadav H. L., Toki H., Faessler A.* // *Phys. Rev. Lett.* 1977. V. 39. P. 1128; *Phys. Lett. B.* 1979. V. 81. P. 119.
15. *Wuest E., Ansari A., Mosel U.* // *Nucl. Phys. A.* 1985. V. 435. P. 477.
16. *Stuchbery A. E. et al.* // *Nucl. Phys. A.* 1995. V. 589. P. 222.

Received on July 10, 2002.



УДК 681.511

## ПОИСК ПЕРИОДИЧНОСТЕЙ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ МЕТОДАМИ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

*Б. З. Белашев<sup>а</sup>, М. К. Сулейманов<sup>б</sup>*

<sup>а</sup>Институт геологии Карельского научного центра РАН, Петрозаводск

<sup>б</sup>Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обработка данных интерференционных экспериментов в физике высоких энергий предполагает привлечение методов спектрального анализа. Изложены методы спектрального анализа, использующие авторегрессионную модель экспериментальных данных: максимума энтропии, Писаренко и Прони. Возможности методов продемонстрированы на примере экспериментальных и симулированных зашумленных данных.

The treatment of data of the interferential experiments in high energy physics needs to attract the spectral analysis methods. The spectral analysis methods are explained: the maximum entropy technique, the Pisarenko and the Prony based on the autoregressive model data. The possibilities of these methods have been demonstrated on the examples of experimental and simulation data with the noise.

Альтернативой повышению энергии сталкивающихся частиц при исследовании свойств вещества на малых расстояниях является наблюдение и изучение тонких эффектов связанных состояний атомов и элементарных частиц [1]. Особый интерес представляют энергии и фазы интерференции состояний, чувствительные к поведению потенциала на малых расстояниях и внешним воздействиям [2]. Информацию о связанных состояниях систем получают в интерференционных экспериментах [3]. Данные такого эксперимента представлены осциллирующими зависимостями, по спектральным параметрам которых судят об энергетических и фазовых характеристиках системы [4]. Достоверность получаемой информации зависит от способности выделять из экспериментальных данных периодичности и определять их параметры.

Математическая теория и алгоритмический аппарат выявления скрытых периодичностей имеют длительную историю и разнообразные практические приложения. Методы выявления периодичностей подразделяют на аппроксимационные, позволяющие аппроксимировать экспериментальные данные функцией, соответствующей априори заданной модели, и фильтрационные, дающие информацию о компонентах и их параметрах при минимальных априорных сведениях. По сравнению с аппроксимационными методами фильтрационные методы дают меньшую точность при определении спектральных характеристик сигнала [5].

В работе речь пойдет о поиске скрытых периодичностей в данных самой различной природы с помощью методов на основе авторегрессионной модели данных (АМД) [6].

Методы на основе АМД занимают промежуточное положение среди обсуждаемых групп методов обработки данных. Аппроксимация в них представлена постулатом о

локальной связи данных, а фильтрация — операциями по получению спектра и выделению компонент. Благодаря промежуточному положению методы АМД используют преимущества каждой из описанных групп и характеризуются более высокой точностью определения спектральных параметров и разрешением по сравнению с фильтрационными методами на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ) [7, 8].

В отличие от алгоритмов ДПФ, в которых наблюдаемый сигнал раскладывают на гармонические компоненты, некоторые из АМД-методов (метод Прони) используют разложение на компоненты в виде затухающих колебаний. При обработке данных интерференционного эксперимента такое представление оказывается более реалистичным по сравнению с традиционным, поскольку учитывает время жизни состояний. Эта тенденция продолжена в вейвлет-анализе, где разложение на солитоноподобные компоненты позволило проследить изменения спектральных характеристик сигналов в пространстве и времени [9].

Метод Прони дает возможность определить фазы колебаний с точностью более высокой, чем при использовании ДПФ. Такая возможность представляется важной с учетом информативности фаз в интерференционных экспериментах.

В работе проведено моделирование АМД спектральных методов максимума энтропии (ММЭ), Писаренко и Прони [10–12] на примере смоделированных и экспериментальных данных.

**Авторегрессионная модель данных.** АМД случайного процесса постулирует локальную связь данных: текущее значение функции  $y(l)$ , аппроксимирующей исследуемый процесс, определено предшествующими отсчетами данных  $x(l - k)$  в виде линейной комбинации:

$$y(l) = \sum_{k=1}^p a(k)x(l - k) \quad (1)$$

с глубиной  $p$  и параметрами  $a(k)$ . Параметры  $a(k)$  содержат всю информацию о спектральных характеристиках процесса [13].

Вычитая из обеих частей равенства (1) значение переменной  $x(l)$ , ошибку текущего значения  $\varepsilon(l) = y(l) - x(l)$  выражают в виде

$$\varepsilon(l) = \sum_{k=0}^p a(k)x(l - k) \quad (2)$$

с параметром  $a(0) = -1$ . Ошибка текущего значения также представлена линейной комбинацией предшествующих отсчетов данных, что позволяет рассматривать параметры  $a(k)$  как коэффициенты линейного фильтра, предсказывающего ошибку.

Ошибку предсказания текущего значения ошибки можно минимизировать, исходя, например, из принципа наименьших квадратов. При независимых сигнале и аддитивном шуме поступающие на вход фильтра предсказания ошибки данные наблюдений на выходе превращаются в белый шум. Такой фильтр называют «отбеливающим».

Умножая обе части соотношения (2) на комплексно-сопряженное значение  $x^*(l)$  и усредняя по всем данным наблюдений, для параметров  $a(k)$  получаем систему линейных

уравнений (3)

$$\sum_{k=0}^p R(m-k)a(k) = \sigma^2 \delta(m), \quad (3)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия шума;  $\delta(m)$  — дельта-функция;  $R(m-k)$  — значения автокорреляционной функции  $R(k)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, p$ .

Для нахождения коэффициентов фильтра  $a(k)$  обычно применяют рекурсивный алгоритм Дербу–Левинсона [14], состоящий в последовательном уточнении коэффициентов отбеливающего фильтра и оценке мощности предсказанной ошибки, начиная с фильтра первого порядка и кончая фильтром  $p$ -го порядка, вычисляющего последовательность:  $\{a_{11}, \sigma_1^2\}$ ,  $\{a_{21}, a_{22}, \sigma_2^2\}$ ,  $\dots$ ,  $\{a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pp}, \sigma_p^2\}$  по формулам:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -R(1)/R(0); \quad \sigma_1^2 = (1 - /a_{11}/^2)R(0), \\ a_{kk} &= - \left[ R(k) + \sum_{i=1}^{k-1} a_{k-1,i}R(k-i) \right] / \sigma_{k-1}^2, \\ a_{ki} &= a_{k-1,i} + a_{kk}a_{k-1,k-i}^*; \quad \sigma_k^2 = (1 - /a_{kk}/^2)\sigma_{k-1}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Быстродействие и экономичность алгоритма Дербу–Левинсона объясняется тем, что в отличие от алгоритма решения систем линейных уравнений Гаусса для нахождения решения он требует  $p^2$  операций вместо  $p^3$  операций и использует результаты предшествующих вычислений. Для тех же целей разработаны более эффективные алгоритмы [15].

**Метод максимума энтропии (ММЭ).** В качестве спектрального метода ММЭ был впервые предложен Бургом [10]. Идея состояла в максимизации энтропийного функционала плотности спектральной мощности процесса  $P(l)$

$$- \sum_{l=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} \ln P(l) - \max \quad (5)$$

при выполнении условий теоремы Винера–Хинчина для  $p+1$  известных значений автокорреляционной функции

$$\sum_{l=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} P(l) \exp(-j\Delta\omega l k \Delta t) = R(k), \quad (6)$$

где  $\Delta\omega$  и  $\Delta t$  — частотные и временные интервалы между отсчетами спектра и данных;  $j$  — мнимая единица ( $j^2 = -1$ ),  $k = 0, 1, 2, \dots, p$ .

Для гауссовского случайного процесса требование максимума энтропийного функционала эквивалентно минимуму функционала предсказываемой ошибки. Решение такой вариационной задачи с коэффициентами отбеливающего фильтра  $a(k)$  в качестве множителей Лагранжа дано формулой

$$P(l) = \frac{\sigma^2}{/1 + \sum_{k=1}^p a(k) \exp(-j\Delta\omega l \Delta t k) / ^2}, \quad (7)$$

имеющей простой смысл: спектр мощности сигнала получают делением выходной мощности шума на квадрат модуля спектральной характеристики отбеливающего фильтра. Коэффициенты  $a(k)$  находят в АДД путем решения системы уравнений (3).

ММЭ учитывает локальную связь данных, дает оценку спектра мощности шума, не приводит к отрицательным значениям в спектре мощности, имеет лучшее разрешение по сравнению с ДПФ, но уступает по разрешению методам Писаренко и Прони. В силу эквивалентности методу наименьших квадратов ММЭ дает несмещенную оценку спектра. А требование максимальной энтропии или минимальной при заданных ограничениях информации автоматически исключает из оценки спектра все посторонние частотные пики. По этой причине следует ожидать, что в ММЭ спектральные пики, соответствующие ангармонической периодической гистограмме, должны проявляться слабее, чем в ДПФ [16].

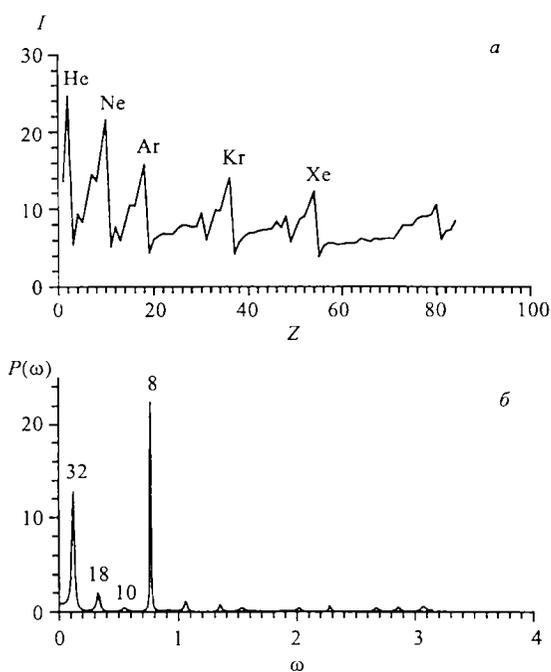


Рис. 1. Зависимость потенциала ионизации атомов в основном состоянии от атомного номера элемента (а) и ММЭ-оценка ее спектра мощности (б). Частотным пикам спектра мощности поставлены в соответствие периоды таблицы Менделеева

Во втором примере характер исследуемого сигнала весьма близок смеси гармоник и шумовой компоненты. В спектре мощности данного сигнала (рис. 2, б) все среднечастотные и высокочастотные пики нашли объяснение. Этим пикам в порядке возрастания периодов были сопоставлены сейшевые колебания водоема, соединенного через пролив с Петрозаводской губой, Петрозаводской губы и Большого Онега. Сопоставление с данными натурных наблюдений и моделирования дало согласующиеся результаты [18].

ММЭ эффективен при экспрессном определении частотного спектра случайных процессов. Применение ММЭ к выявлению скрытых периодичностей рассмотрим на примере зависимостей потенциала ионизации атома в основном состоянии от атомного номера элемента [17] (рис. 1, а) и скорости течения через Соломенский пролив Петрозаводской губы Онежского озера от времени [18] (рис. 2, а). Для получения частотных спектров в этих примерах была использована программа [19].

Частотный спектр рис. 1, б демонстрирует периоды 8, 10, 18, 32, характерные для таблицы Менделеева. ДПФ-спектр такого ангармонического распределения помимо основных периодов  $T_{k,1}$  содержит периоды  $T_{k,i} = T_{k,i-1}((i-1)/i)$ ,  $i = 2, 3, 4$ , составляющие для наиболее интенсивного и узкого пика периода 8 соответственно 4,0, 2,7, 2,0. В данном спектре слабоинтенсивных пиков оказывается значительно больше, а среди их периодов 6,0, 4,7, 4,1, 3,1, 2,8, 2,3, 2,2, 2,1 только 4,1, 2,8 и 2,1 можно считать близкими к указанным ангармоническим периодам.

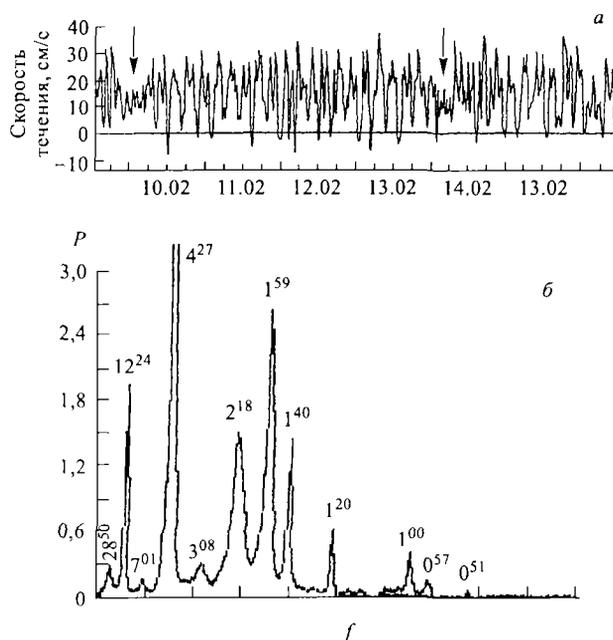


Рис. 2. Временная зависимость скорости течения через Соломенский пролив Петрозаводской губы Онежского озера (а) и ее ММЭ-оценка спектра мощности (б). Частотным пикам соответствуют периоды сейшевых колебаний: Логмозера (водоема, соединенного через Соломенский пролив с Петрозаводской губой) — 22–60 мин; Петрозаводской губы — 1 ч 20 мин–2 ч 18 мин; Онежского озера — 3 ч 08 мин–4 ч 27 мин, приливного периода — 12 ч 24 мин

Спектральный анализ выявил ранее неизвестный для озерных водоемов приливной период около 12 часов, а также другие низкочастотные периоды, с трудом поддающиеся интерпретации. Для анализа полученных результатов спектральное разрешение ММЭ оказалось вполне достаточным.

**Методы Писаренко и Прони.** Метод Писаренко, применяемый для выделения гармонических компонент из их смеси с белым шумом, дает еще более высокое спектральное разрешение, чем ММЭ. В этом методе частоты компонент определяют не визуально, как в ДПФ или ММЭ, по положениям пиков частотного спектра, а вычисляют. Точность определения частоты и спектральное разрешение заданы точностью вычислений.

Алгоритм вычислений частот в методе Писаренко продемонстрируем на примере синусоиды  $x(l) = \sin(\Omega l)$ . Тригонометрическое тождество

$$\sin(\Omega l) = 2 \cos \Omega \sin(\Omega(l-1)) - \sin(\Omega(l-2)) \quad (8)$$

дает связь между данными:

$$x(l) = 2 \cos \Omega x(l-1) - x(l-2). \quad (9)$$

Фурье-преобразование соотношения (9) приводит к соотношению

$$X(\omega)(1 - 2 \cos \Omega z^{-1} + z^{-2}) = 0, \quad (10)$$

где под  $z$  понимают  $\exp(-j\Omega)$ . Корни уравнения второй степени  $z_1 = z_2^*$  определяют частоты  $\Omega$  и  $-\Omega$  в соответствии с выражением

$$\Omega = \arctg(\operatorname{Im} z_i / \operatorname{Re} z_i). \quad (11)$$

В общем случае локальную связь между данными в методе Писаренко задают в виде

$$x(l) = - \sum_{k=1}^{2p} a(k)y(l-k) + \varepsilon(l), \quad (12)$$

а для коэффициентов  $a(k)$  получают систему линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{2p} R(m-k)a(k) = \sigma^2 a(m). \quad (13)$$

Коэффициенты  $a(k)$  и дисперсию шума  $\sigma^2$  находят, определяя собственные числа и собственные векторы матрицы автокорреляционных функций  $R(m, k)$  [20]. Минимальному собственному числу матрицы  $R(m, k)$  соответствует дисперсия  $\sigma^2$ . При этом удобно использовать рекурсивное выражение  $Rc(l+1) = c(l)$ , следующее из (13), и определить вектор  $c(l+1)$  по вектору  $c(l)$ , полученному на предыдущей итерации. Вектор  $c(0) = [1, 1, 1, \dots, 1]$  удобно принять за начальное приближение. Несколько итераций позволяют получить вектор, близкий к  $c(\infty)$ . По нему вычисляют  $\lambda_{\min} = \sigma^2 = (c^T Rc / c^T c)$ , и вектор  $a$  находят как  $a = c / \lambda_{\min}$ .

Структура матрицы автокорреляционных функций  $R(m, k)$  такова, что при наличии в исследуемом процессе гармоник коэффициенты фильтра  $a(k)$  действительны и удовлетворяют условию:  $a(k) = a(2p-k)$ . Составляя и решая алгебраическое уравнение степени  $2p$  с действительными коэффициентами  $a(k)$  и  $a(0) = 1$

$$\sum_{k=0}^{2p} a(k)z^{2p-k} = 0, \quad (14)$$

получают комплексно-сопряженные, равные по модулю единице корни, определяющие частоты гармоник в соответствии с выражением (11).

Положительные частоты гармоник  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , используют для нахождения плотностей спектральной мощности  $P(l)$ , решая систему уравнений

$$\sum_{i=1}^p P(i) \cos(\Omega_i l \Delta t) = R(l). \quad (15)$$

Самосогласованность полученных результатов проверяют, определяя дисперсию шума  $\sigma^2$ , выразив ее соотношением (16)

$$\sigma^2 = R(0) - \sum_{i=1}^p P(i). \quad (16)$$

Метод Писаренко позволяет определить дисперсию аддитивного белого шума. Однако в методе отсутствуют гарантии получения неотрицательных оценок спектральной плотности гармоник. Как и в ММЭ, в методе Писаренко начальную фазу гармоник не определяют.

Этот недостаток преодолен в методе Прони, обобщившем идею Писаренко на случай нестационарных периодических процессов, с использованием в качестве базиса спектрального разложения затухающие колебания.

В методе Прони функция, аппроксимирующая процесс,  $y(l)$  выражена через комплексные числа  $b_i$  и  $z_i$  соотношением

$$\begin{aligned} y(l) &= \sum_{i=1}^{2p} b_i z_i, \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ b_i &= A_i \exp(j\theta_i), \\ z_i &= \exp(\alpha_i + j\Omega_i \Delta t), \end{aligned} \quad (17)$$

где параметры  $A_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\Omega_i$ ,  $\theta_i$  — соответственно амплитуда, коэффициент затухания, частота и начальная фаза  $i$ -й компоненты разложения исходных данных.

Локальную связь между данными постулируют так же, как и в методе Писаренко, так же определяют коэффициенты  $a(k)$  и по ним составляют полином (14). Отличие заключается в том, что корнями полинома теперь оказываются комплексные экспоненты  $z_i$ .

Исходя из минимума функционала наименьших квадратов

$$\sum_{l=0}^{n-1} (x(l) - y(l))^2 - \min \quad (18)$$

находят вектор  $B(b_1, b_2, \dots, b_{2p})$ , определяемый соотношением

$$B = (\Phi^{\#} \Phi)^{-1} \Phi^{\#} X, \quad (19)$$

где под  $X$  понимают строку данных, под  $\Phi$  — матрицу Ван-дер-Монда, составленную из степеней корней  $z_i$ , под  $\Phi^{\#}$  — транспонированную матрицу. А по нему и корням полинома  $z_i$  определяют параметры компонент разложения:

$$\begin{aligned} A_i &= |b_i|, & \Omega_i &= \arctg(\operatorname{Im} z_i / \operatorname{Re} z_i), \\ \alpha_i &= (\ln |z_i|) / \Delta t, & \theta_i &= \arctg(\operatorname{Im} b_i / \operatorname{Re} b_i). \end{aligned} \quad (20)$$

Окончательно метод Прони дает:  
оценку данных

$$s(t) = \sum_{i=1}^{2p} A_i \exp(\alpha_i t) \exp(j(\omega_i t + \theta_i)), \quad (21)$$

ее фурье-образ

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{2p} A_i \exp(j\theta_i) \frac{1}{(\omega - \omega_i) - j\alpha_i} \quad (22)$$

и спектр энергии

$$E(\omega) = |S(\omega)|^2. \quad (23)$$

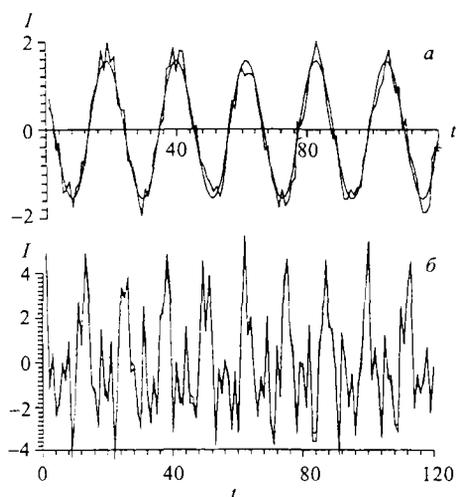


Рис. 3. Результаты моделирования метода Прони на моделях: *а*) простой гармонический сигнал  $1,600 \cos(2,021t + 1,0798)$  и его оценка  $1,594 \cos(2,021t + 1,0930)$ ; *б*) смесь гармоник  $2,000 \cos(0,5054t + 0,2670) + 2,000 \cos(1,015t + 0,5422) + 1,000 \cos(1,844t + 0,9848) + 1,6 \cos(2,465t + 1,3167)$  и ее оценка  $1,932 \cos(0,5054t + 0,2821) + 1,957 \cos(1,015t + 0,5887) + 0,9216 \cos(1,844t + 0,9716) + 1,636 \cos(2,465t + 1,2530)$

с шумом 6% — оценка  $1,932 \cos(0,5054t + 0,2821) + 1,957 \cos(1,015t + 0,5887) + 0,9216 \cos(1,844t + 0,9716) + 1,636 \cos(2,465t + 1,2530)$ .

Приведенные результаты демонстрируют хорошее соответствие исходным сигналам. В этих и других вычислительных экспериментах показано, что наиболее точно метод Прони определяет частоты, наименее точно — фазы компонент и коэффициенты затухания компонент, а спектральные параметры высокочастотных компонент имеют лучшую точность по сравнению с низкочастотными.

В методах АМД априорная информация о процессе, заданная в виде локальной связи данных, носит обобщенный характер, позволяет сформировать модель осциллирующего сигнала, определить его состав и спектральные параметры компонент без каких-либо специальных априорных предположений. Уточнение полученных параметров в рамках сформированной модели возможно, а в ряде случаев и целесообразно с применением других методов, например, таких мощных аппроксимационных методов, как метод Монте-Карло [21].

**Выводы.** 1. Методы спектрального анализа информативны при обработке данных интерференционных экспериментов, позволяют получить сведения о характеристиках связанных состояний систем: атомов, ядер, частиц.

Как уже отмечалось, преимуществом метода Прони является расширение класса функций, используемых в качестве базиса спектрального разложения. Формализм метода допускает включение в этот класс экспоненциально спадающих и нарастающих сигналов, что позволяет распространить методы спектрального анализа на монотонно меняющиеся и переходные случайные процессы. Возможность вычислять амплитуды, коэффициенты затухания, частоты и особенно фазы колебаний с высокой точностью может оказаться полезной при интерполяции и экстраполяции сигналов, а в некоторых случаях способствовать решению весьма трудной проблемы прогнозирования процессов.

Моделирование метода Прони проведено с помощью авторской программы, написанной на Фортране. На рис.3 представлены исходные сигналы в виде одиночной синусоиды (*а*) и смеси четырех различных гармоник с аддитивным белым шумом (*б*) и результаты их реконструкции по полученным при разложении параметрам. Для синусоиды, заданной формулой  $1,600 \cos(2,021t + 1,0798)$  с аддитивным шумом 15% получена оценка  $1,594 \cos(2,021t + 1,0930)$ , а для смеси гармоник  $2,000 \cos(0,5054t + 0,2670) + 2,000 \cos(1,015t + 0,5422) + 1,000 \cos(1,844t + 0,9848) + 1,6 \cos(2,465t + 1,3167)$  с шумом 6% — оценка  $1,932 \cos(0,5054t + 0,2821) + 1,957 \cos(1,015t + 0,5887) + 0,9216 \cos(1,844t + 0,9716) + 1,636 \cos(2,465t + 1,2530)$ .

2. Методы на основе АМД сочетают сильные стороны аппроксимационных и фильтрационных методов при определении спектральных характеристик сигналов.

3. ММЭ-оценки спектров мощности реальных сигналов отличаются информативностью и применимы для анализа гармонических сигналов и ангармонических распределений. Спектральные параметры осциллирующих сигналов, определенные методом Прони, имеют высокую точность и позволяют представить экспериментальные данные суперпозицией базисных функций.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хрипович И. Б. Несохранение четности в атомных явлениях. М.: Наука, 1981.
2. Соколов Ю. Л. Интерференционный метод измерения параметров атомных состояний // УФН. 1999. Т. 69. С. 559–583.
3. Подгорецкий М. И., Хрусталева О. А. О некоторых интерференционных явлениях в квантовых переходах // УФН. 1963. Т. 81. С. 217–247.
4. Александров Е. Б., Хвостенко Г. И., Чайка М. П. Интерференция атомных состояний. М.: Наука, 1991.
5. Василенко Г. И. Теория восстановления сигналов. М.: Сов. радио, 1979.
6. Kay S. K., Marple S. L. Spectrum Analysis — A Modern Perspective // Proc. of the IEEE. 1981. V. 69, No. 11. P. 1380–1418.
7. Babic H., Temes G. C. Optimum Low Order Windows for Discrete Fourier Transform System. 1976. V. ASSP-24. P. 512–517.
8. Серебрянников М. Г., Первозванский А. А. Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука, 1965.
9. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. Т. 166. С. 1145–1170.
10. Burg J. R. Maximum Entropy Spectral Analysis // Proc. of the 37th Meeting Society of Exploration Geophysicist, Oklahoma City, OK, 1967. P. 31.
11. Pisarenko V. F. On the Estimation of Spectra by Means of Nonlinear Functions of Covariance Matrix // Geophys. J. Royal Astronom. Soc. 1972. V. 28. P. 511–513.
12. Prony G. R. B. Essai Experimental and Analytique, etc. Paris, 1975. V. 1. Cahier 2. P. 24–76.
13. Akaike H. Power Spectrum Estimation through Autoregressive Model Fitting // Ann. Inst. Statist. Math. 1969. V. 21. P. 243–247.
14. Gybenko B. G. Round of Error Propagation in Durbin's Levinson's and Trench's Algorithms // Rec. 1979 IEEE Conf. Acoustic, Speech, and Signal Proc. P. 498–501.
15. Hildenbrand F. B. Introduction to Numerical Analysis. Mc.Graw Hill, 1956. Ch. 9.
16. Злоказов В. Б. Анализ скрытых ангармонических периодичностей. Препринт ОИЯИ Р11-89-378. Дубна, 1989.

17. *Протодьяконов М. М.* Свойства породообразующих минералов и их электронное строение. М.: Наука, 1965.
18. *Руднев С. Ф.* Взаимодействие сейш и стокового течения в Онежском озере. 19 с. Деп. в ВИНТИ 29.03.89, № 2060-B89.
19. *Barrodale I., Erickson R. E.* Algorithms for Least-Square Linear Prediction and Maximum Entropy Spectral Analysis // *Geophysics*. 1980. V. 45, No. 3. P. 420.
20. *Farden D. S.* Solution of a Toeplitz Set of Linear Equations // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 1976. V. AP-24. P. 906–908.
21. *Соболь И. М.* Числовые методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.

Получено 6 апреля 2001 г.

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ АВТОРСКОГО ОРИГИНАЛА СТАТЬИ В ЖУРНАЛ «ПИСЬМА В ЭЧАЯ»

1. *Оригинал статьи* предоставляется автором в двух экземплярах. Необходимо предоставить дискету с текстовым файлом в формате LaTeX-2 $\epsilon$  (не следует вводить свои макроккоманды) и файлами рисунков, таблиц, подрисуночных подписей. Оригинал должен включать все необходимые элементы статьи, иметь сквозную нумерацию страниц и быть подписан всеми авторами.

2. *На первой странице* статьи указывается индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов на двух языках (русском и английском), место работы.

Затем следует *аннотация* на русском и английском языках, включающая характеристику основной темы, цели работы и ее результаты. В аннотации указывают, что нового несет в себе данная статья. Аннотация должна быть краткой, 5–8 строк.

3. *В формулах* все буквы латинского алфавита, обозначающие физические величины, набирают светлым курсивным шрифтом ( $E$ ,  $V$ ,  $m$  и др.). Векторы следует набирать прямым полужирным шрифтом, без стрелок сверху.

Шрифтом прямого светлого начертания набирают следующие обозначения: чисел подобия ( $Ar$ ,  $Re$  и др.); функций ( $\sin$ ,  $\arcsin$ ,  $sh$  и др.); условных математических сокращений ( $\max$ ,  $\min$ ,  $\text{opt}$ ,  $\text{const}$ ,  $\text{idem}$ ,  $\text{lim}$ ,  $\lg$ ,  $\ln$ ,  $\log$ ,  $\det$ ,  $\exp$ ) и др.

Латинские буквы в индексах набирают строчным курсивом, кроме сокращений, в том числе и от фамилий (их набирают шрифтом прямого начертания):  $f_{abc}$ ,  $\zeta_{xy}$ ,  $G_{yuk}$ ,  $\lambda_{eff}(t, \beta)$ ,  $x_{\max}$ . Буквы русского алфавита в индексах используют, когда отсутствуют стандартизованные международные индексы, и набирают строчным шрифтом прямого начертания:  $U_{\phi}$  — фазное напряжение;  $P_{\nu}$  — мощность возбуждения.

Символы химических элементов набирают шрифтом прямого светлого начертания:  $Cl$ ,  $Fe$ .

4. *Рисунки* должны быть четкими и качественными. Желательно, чтобы файл рисунка был подготовлен в формате .eps (Encapsulated PostScript). Не рекомендуется предоставлять цветные рисунки. Рисунки должны быть одного масштаба, их максимальная ширина 13,5 см, максимальная высота 19,5 см (с учетом подписи). Размеры небольших рисунков не должны превышать 7 см по ширине.

Не следует загромождать рисунок ненужными деталями: надписи выносятся в подпись, а на рисунке заменяются арабскими цифрами или буквами. Если рисунок предоставлен на отдельном листе, то необходимо указать фамилии авторов, название статьи и номер рисунка.

5. *Библиографические ссылки* приводят в конце статьи в порядке их упоминания в тексте под рубрикой «Список литературы». Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ниже следуют примеры оформления:

- книги:  
*Кокорева Л. В.* Проектирование банков данных. М.: Наука, 1998. 241 с.
- статьи из сборника:  
*Быстрицкий В. М. и др.* Исследование температурной зависимости скорости образования мезомолекул  $dd\bar{c}$  в газообразном дейтерии // Мезоны в веществе: Тр. Междунар. симпоз. Дубна, 1977. С. 199–205.
- статей из журналов:  
*Афанасьев Ю. В. и др.* Лазерное инициирование термоядерной реакции в неоднородных сферических мишенях // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21, вып. 2. С. 150–155.  
*Barbashov V. M., Pestov I. B.* On Spinor Representations in the Weyl Gauge Theory // Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12, No. 26. P. 1957–1968.
- препринта и сообщения:  
*Тяпкин А. А.* Экспериментальные указания о существовании тахионов, полученные при исследовании черенковского излучения. Препринт ОИЯИ Д1-99-292. Дубна, 1999. 4 с.  
*Мишухка А. Ю., Pokotilovski Yu. N., Geltenbort P.* Search for an Anomalous Transmission of Ultracold Neutrons Through Metal Foils. JINR Commun. E3-98-18. Dubna, 1998. 10 p.

**Более подробные правила оформления Вы найдете на странице издательского отдела ОИЯИ: [www1.jinr.ru](http://www1.jinr.ru)**

**Письма о физике элементарных частиц и атомного ядра № 3[112]-2002**

Учредитель и издатель — Объединенный институт ядерных исследований.

Журнал зарегистрирован в Министерстве РФ по делам печати,  
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Регистрационное свидетельство ПИ № 77-1338 от 10.12.99.

Редакторы: *М. И. Зарубина, Э. В. Ивашикевич, Е. В. Калининкова*  
Технический редактор *Е. Н. Водоватова*  
Корректор *Е. В. Сабеева*

Подписано в печать 17.09.2002.

Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 7,15. Уч.-изд. л. 9,41. Тираж 600. Заказ 53489.

---

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

---

**ИНДЕКС**  
**72597**