



УДК 539.1.074.23

## ЗАРЯЖЕННЫЙ ПРОВОДНИК ВНУТРИ ДИЭЛЕКТРИКА. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЗАРЯДОВ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*М. Д. Шафранов, Т. П. Топурия*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Настоящая работа посвящена решению задачи о проводнике в окружении диэлектрика. Представлена математическая модель — система уравнений, описывающих условия на границе диэлектрика и проводника, в соответствии с физической моделью. Метод проиллюстрирован примером решения задачи способом численного моделирования на основе нескольких физических моделей. В отличие от наших предыдущих публикаций рассмотрен способ нахождения распределений не только электрических полей, но и потенциалов. На основе метода разработана система программ, использующаяся для моделирования электростатических полей детектора ZEPLIN III по поиску корпускулярной «темной материи».

The present report is devoted to the solution of a problem of conductor in surroundings of a dielectric. The mathematical model — a set of equations describing conditions on the boundary of the dielectric and conductor is presented according to a physical analog. The method is illustrated by an example of the solution of a problem by the way of a digital simulation on the basis of several variants of physical model. On contrast to the our previous publications the way of finding allocations not only electric fields but also potentials is considered. The method is supposed to be used for simulation of electric fields of the detector ZEPLIN III on the search of corpuscular «dark matter».

Исследования последних десятилетий являются косвенным свидетельством в пользу существования ненаблюдаемой, или «темной» материи, составляющей подавляющее количество материи Вселенной. В настоящее время созданы и проектируются целый ряд детекторов, предназначенных для поиска корпускулярной «темной материи». Одним из готовящихся детекторов является детектор ZEPLIN III, в котором регистрация сигналов будет происходить фотоумножителями. ФЭУ просматривают чувствительный газовый объем детектора через объем жидкого ксенона, в котором находятся два ряда сеточных электродов. Электроды формируют электрическое поле, вытягивающее электроны в газовый объем, в котором должен возникнуть сигнал от электролюминесценции [1]. В настоящей работе рассматривается способ решения задач, который предполагается использовать для моделирования электрических полей в рабочем объеме детектора ZEPLIN III, и некоторые результаты моделирования<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Работа поддержана РФФИ, грант 01-02-17261.

Решение задач электростатики начинается с выбора физической модели, которая наиболее точно соответствует реальной системе проводников и диэлектриков с их заданными физическими характеристиками. Следующим шагом является выбор математической модели с соответствующей системой уравнений, решение которых позволяет получить зарядовые распределения, обеспечивающие выполнение граничных условий и, следовательно, решить поставленную краевую задачу электростатики.

В наших работах [2, 3] дано обоснование способа решения краевых задач электростатики — *диэлектрик в поле заряженных проводников* — с помощью размещения вспомогательных зарядов как внутри и вне диэлектриков, так и внутри проводников. Все заряды точечные или линейные размещаются вблизи поверхности проводников и диэлектриков. Величины всех вспомогательных зарядов находятся решением линейных алгебраических уравнений. Рассмотрены примеры применения метода к задачам в случае, когда изолированный диэлектрик находится в электрическом поле, создаваемом проводниками. Метод был разработан и опробован для решения задач о влиянии диэлектрических элементов в рабочем объеме на электростатику многопроволочных пропорциональных камер [4, 5]. В отличие от предыдущих публикаций в настоящей работе рассмотрен способ нахождения распределений электрических полей, создаваемых проводником внутри диэлектрика, и анализируется способ вычисления потенциалов в объеме и вне диэлектрика.

## 1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

**1.1. Граничные условия на границе двух диэлектриков.** На поверхности проводников граничными условиями являются задаваемые потенциалы, причем предполагается, что потенциал является нулевым в бесконечно удаленных точках пространства. Практически это означает, что другие проводники находятся на таком расстоянии, когда их влиянием можно пренебречь. Граничные условия на поверхности диэлектрика являются следствием законов электростатики для диэлектриков [6].

Для однородных диэлектриков  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$ , где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды. В этом случае граничные условия представляются в виде соотношений для тангенциальных и нормальных составляющих электрических полей в любой точке поверхности раздела:  $E_{t1} = E_{t2}$ ,  $\varepsilon_1 \mathbf{E}_{n1} = \varepsilon_2 \mathbf{E}_{n2}$ . Здесь  $n_1$  и  $n_2$  — внешние нормали к границе раздела среда–диэлектрик. Нормаль  $n_1$  направлена от диэлектрика в среду, а нормаль  $n_2$  — внутрь него.

Граничные условия  $E_{t1} = E_{t2}$  можно представить и в виде граничных условий для потенциала, тогда окончательно имеем:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \mathbf{E}_{n1} = \varepsilon_2 \mathbf{E}_{n2}. \quad (1.1)$$

Если на границе диэлектрика находится вакуум ( $\varepsilon = 1$ ), то второе уравнение запишется как

$$E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}. \quad (1.2)$$

**1.2. Граничные условия на границе проводник–диэлектрик.** Из теоремы Гаусса о потоке вектора  $\mathbf{E}$  через замкнутую поверхность следует:

$$E_n = (\sigma + \sigma')/\varepsilon_0. \quad (1.3)$$

В этом соотношении  $\sigma$  — поверхностная плотность зарядов проводника, а  $\sigma'$  — поверхностная плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрика.

Из условий для вспомогательного вектора  $\mathbf{D}$  на границе двух сред по теореме Гаусса  $D_{n2} - D_{n1} = \sigma$  имеем  $D_{n2} = \sigma$  (для проводника  $D_{n1} = 0$ ). С другой стороны,  $D_{n2} = \varepsilon\varepsilon_0 E_{n2}$ . Из соотношений для  $D_{n2}$  получаем второе выражение для нормального компонента электрического поля

$$E_{n2} = \sigma / \varepsilon\varepsilon_0. \quad (1.4)$$

Используя соотношения (1.3) и (1.4), приходим к выражению

$$\sigma' = -\sigma(\varepsilon - 1)/\varepsilon. \quad (1.5)$$

Выражение (1.5), являясь граничным условием на поверхности раздела между проводником и диэлектриком, определяет зависимость связанных зарядов на поверхности диэлектрика  $\sigma'$  от поверхностной плотности сторонних зарядов проводника  $\sigma$ . Действующая поверхностная плотность заряда  $\sigma_d = \sigma + \sigma'$ , создающая электрическое поле внутри диэлектрика, является суммой поверхностных плотностей проводника и диэлектрика  $\sigma + \sigma' = \sigma/\varepsilon$ ,

$$\sigma_d = \sigma/\varepsilon. \quad (1.6)$$

Перейдем в условии (1.6) от поверхностных плотностей зарядов к нормальным компонентам электрических полей.

Из соотношения, связывающего нормальный компонент электрического поля с поверхностной плотностью заряда  $E_n = \sigma/\varepsilon_0$ , получаем  $\sigma = E_n\varepsilon_0$ . Используя соотношение (1.6), получим соотношение (1.7), которое является граничным условием для нормальных компонентов поля проводника  $E_{nc}$  и диэлектрика  $E_{nd}$

$$E_{nc} = \varepsilon E_{nd}. \quad (1.7)$$

## 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ ВОКРУГ ПРОТЯЖЕННОГО ПРОВОДНИКА ВНУТРИ ДИЭЛЕКТРИКА

**2.1. Физическая модель.** В качестве физической модели рассмотрим уединенный протяженный проводник круглого сечения диаметром 2 мм в трех вариантах его размещения: в вакууме, в диэлектрике, заполняющем все пространство, и в диэлектрической трубке. Пусть на проводник подается отрицательный потенциал  $U_0 = -1000$  В. В задаче рассматривается только один однородный диэлектрик, поэтому индекс 2 у диэлектрической проницаемости диэлектрика можно опустить. В качестве величины относительной диэлектрической проницаемости, приводимой в таблицах, взято значение  $\varepsilon = 4$ .

Выбор протяженного проводника сделан с учетом возможности сравнения решения поставленных задач с решением задач в классической электростатике. Именно в этом идеальном и одном из простейших случаев задачи в классической электростатике решаются полностью.

**2.2. Математическая модель.** Решение краевой задачи ищется с помощью вспомогательных зарядов, схема размещения которых показана на рис. 1. Знаки вспомогательных зарядов, представленных линейными плотностями, соответствуют знакам сторонних и связанных зарядов физической модели. Число вспомогательных зарядов любой из групп  $Q$ ,  $g_{in}$  и  $f_{in}$ ,  $g_{out}$  и  $f_{out}$  на каждой из границ равно 100, и оно равно числу контрольных точек, которые находятся на границах раздела между точками 1 и 2 (рис. 1).

Контрольные точки и вспомогательные заряды эквидистантно распределены по соответствующим поверхностям. Расстояние между ними равно  $ds = 2\pi r/100$ ,  $r$  — радиус соответствующей цилиндрической поверхности. Расстояние между контрольной точкой и вспомогательным зарядом того же радиуса составляло  $dr = 2ds$ . Такое соотношение между расстоянием вспомогательный заряд — контрольная точка обеспечивает хорошую точность решения задачи [3].

По условиям задачи мы имеем дело с проводником, несущим заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$  и окруженным диэлектриком с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ .

Для нахождения величин вспомогательных зарядов в соответствии с методом решения, изложенным в [2, 3], составляется система алгебраических уравнений, учитывающая условия на границе раздела во всех контрольных точках на поверхности проводника или диэлектрика. Вид уравнения, входящего в ту или иную систему, представлен выражениями (2.1)–(2.5).

1) Система уравнений (2.1) следует из требований равенства значения искомого потенциала проводника в каждой контрольной точке задаваемому потенциалу:

$$\sum_k u(Q) + 1/2 \sum_k u(g_{in}) + 1/2 \sum_k u(g_{out}) + 1/2 \sum_k u(f_{in}) + 1/2 \sum_k u(f_{out}) = U_0. \quad (2.1)$$

Число уравнений равно числу контрольных точек проводника. Суммируются потенциалы от всех вспомогательных зарядов как проводника, так и диэлектрика. Полусумма зарядов  $g$  или полусумма зарядов  $f$  — то среднее арифметическое значение зарядов in и out, которое примерно соответствует вспомогательному заряду, размещаемому в контрольной точке поверхности диэлектрика.

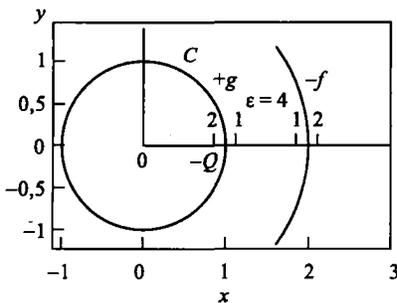


Рис. 1. Математическая модель системы. Окружность  $C$  — граница проводник–диэлектрик; дуга — часть границы диэлектрик–вакуум;  $g$  — вспомогательные линейные заряды внутренней поверхности диэлектрика;  $f$  — вспомогательные линейные заряды внешней поверхности диэлектрика. Цифрами 1 и 2 обозначены заряды  $g_{in}$  и  $f_{in}$ , размещаемые внутри диэлектрика, и заряды  $g_{out}$  и  $f_{out}$ , находящиеся вне диэлектрика.  $Q$  — вспомогательные заряды проводника. Они размещаются в тех же местах внешних зарядов  $g_{out}$  группы  $g$  для случая проводника в диэлектрике без зазора

## 2) Система уравнений

$$\sum_k E(Q) + \sum_k E(g_{in}) + \sum_k E(f_{in}) = \varepsilon \left( \sum_k E(Q) + \sum_k E(g_{out}) + \sum_k E(f_{out}) \right)$$

в соответствии с (1.2) и (1.7) определяет условия между нормальными компонентами поля в контрольной точке на поверхности диэлектрика с внутренней стороны трубки. После преобразований система запишется как

$$\sum_k (1 - \varepsilon) E(Q) - \sum_k \varepsilon E(g_{out}) - \sum_k \varepsilon E(f_{out}) + \sum_k E(g_{in}) + \sum_k E(f_{in}) = 0 \quad (2.2)$$

вне зависимости есть зазор или его нет между проводником и диэлектриком.

3) Система уравнений (2.3) определяет условия между нормальными компонентами поля в контрольной точке на границе вакуум–диэлектрик с внешней стороны трубки диэлектрика:

$$\sum_k (1 - \varepsilon) E'(Q) - \sum_k \varepsilon E'(g_{out}) - \sum_k \varepsilon E'(f_{out}) + \sum_k E'(g_{in}) + \sum_k E'(f_{in}) = 0. \quad (2.3)$$

4) Системы уравнений (2.4) и (2.5) следуют из непрерывности потенциала в каждой контрольной точке при переходе через границы раздела сред:

$$U_{in} = \sum_k u_k(g_{out}) = \sum_k u_k(g_{in}), \quad (2.4)$$

$$U_{out} = \sum_k u_k(f_{out}) = \sum_k u_k(f_{in}). \quad (2.5)$$

Здесь  $\sum_k u_k(g_{out})$ ,  $\sum_k u_k(g_{in})$  и  $\sum_k u_k(f_{out})$ ,  $\sum_k u_k(f_{in})$  — потенциалы в контрольных точках на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика, создаваемые вспомогательными зарядами, находящимися только около своей поверхности. Потенциалы от остальных вспомогательных зарядов входят одним и тем же образом и в левые, и в правые части уравнений (2.4) и (2.5), они просто сокращаются.

**2.3. Проводник внутри диэлектрической трубки, вплотную примыкающей к проводнику.** Решение приведенных выше уравнений и нахождение вспомогательных зарядов дает возможность определить распределения полей в пространстве, например, построить распределения электрического поля вдоль радиуса.

При определении величин вспомогательных зарядов для случая «проводник в вакууме» использовались только уравнения системы (2.1), в пренебрежении всеми членами, содержащими заряды групп  $g$  и  $f$ :  $\sum_k u(Q) = -1000$  В.

Для проводника в диэлектрике, заполняющем все пространство, применялись уравнения (2.1) и (2.2), в которых опускаются все члены, содержащие заряды группы  $f$ , а также уравнения (2.4).

При решении задачи «проводник в диэлектрической трубке» используются полностью системы (2.1)–(2.5).

Рассмотрим результаты решения задачи «проводник в диэлектрической трубке, вплотную примыкающей к проводнику». В процессе решения указанной системы уравнений

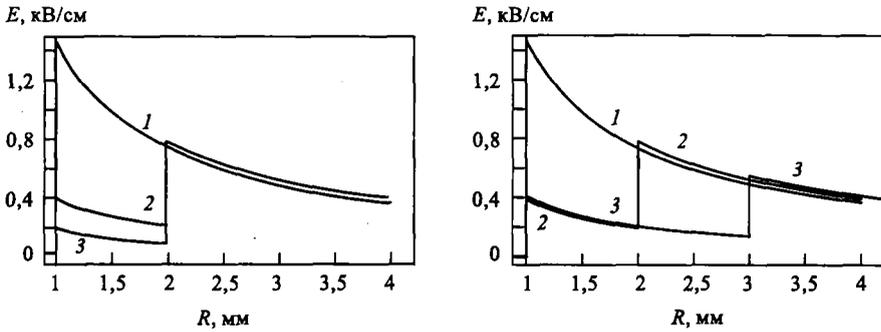


Рис. 2. Распределение напряженности электрического поля вдоль радиуса цилиндрического проводника: 1 — распределение для проводника, находящегося в вакууме или в диэлектрике, заполняющем все пространство; 2 и 3 — распределения для случая проводника в окружении диэлектрика с внешним радиусом 2 мм и относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 4$  и  $\epsilon = 8$  соответственно

Рис. 3. Распределения поля вдоль радиуса системы для диэлектрика с толщиной слоя 1 мм (кривая 2) и 2 мм (кривая 3). Кривая 1 изображает поведение поля проводника в вакууме

получены все вспомогательные заряды проводника и диэлектрика. Для вычисления величины электрического поля в произвольной точке *внутри* диэлектрика необходимо произвести суммирование вычисляемых значений поля от каждого вспомогательного линейного заряда проводника и каждого *внешнего* линейного заряда диэлектрика. При вычислении поля *вне* диэлектрика внешние вспомогательные заряды заменяются на *внутренние*. Вычисление абсолютного значения поля, создаваемого любым линейным зарядом, производится по формуле  $e(r) = \lambda/r$ , где  $\lambda$  — линейная плотность заряда. Суммирование ведется с учетом того, что мы имеем дело с вектором электрического поля.

При погружении проводника в диэлектрик, заполняющий все окружающее пространство, и *постоянном потенциале* на проводнике поверхностная плотность его зарядов возрастет в  $\epsilon$  раз. Она становится равной  $\sigma'' = \epsilon\sigma$ . В соответствии с выражением (1.2) поверхностная плотность связанных зарядов  $\sigma' = -\sigma''(\epsilon - 1)/\epsilon$ , тогда  $\sigma' = -\epsilon\sigma(\epsilon - 1)/\epsilon$ . Окончательно получим  $\sigma' = -\sigma(\epsilon - 1)$ .

Поверхностная плотность зарядов, создающих электрическое поле, является суммой поверхностных плотностей сторонних и связанных зарядов:  $\epsilon\sigma + \sigma' = \epsilon\sigma - \sigma(\epsilon - 1) = \sigma$ . При погружении проводника в диэлектрик, заполняющий все пространство, зависимость напряженности поля от радиуса совпадает с зависимостью поля проводника в вакууме. На рис. 2 представлена зависимость электрического поля вдоль радиуса. Общая кривая 1 изображает поведение поля проводника как в вакууме, так и в диэлектрике, заполняющем все пространство. Этот факт является подтверждением справедливости математической модели, т. е. правильности выбранной системы уравнений.

Кривые 2 и 3 представляют зависимость поля вдоль радиуса для задачи «проводник в диэлектрической трубке» с толщиной стенки в 1 мм. Кривая 2 соответствует зависимости для случая  $\epsilon = 4$ , а кривая 3 соответствует случаю, когда  $\epsilon = 8$ . Расчет кривых выполнен для постоянного значения потенциала проводника ( $-1000$  В). Принятое при

решении постоянство потенциала приводит к увеличению плотности сторонних зарядов поверхности проводника в 1,0885 и в 1,0714 раза для диэлектрической проницаемости соответственно  $\varepsilon = 8$  и  $\varepsilon = 4$ . На рис. 3 приведены распределения для диэлектрика с толщиной слоя в 1 мм (кривая 2) и 2 мм (кривая 3). Кривая 1 изображает поведение поля проводника в вакууме.

В соответствии с математической моделью вспомогательные заряды проводника  $Q$  и внешние вспомогательные заряды  $g_{\text{out}}$  размещены в одних и тех же местах (рис. 1). При таком размещении зарядов их величины должны подчиняться соотношению  $(1,5)\sigma' = -\sigma(\varepsilon - 1)/\varepsilon$ . В этом случае для  $\varepsilon = 4$  получаем соотношение между вспомогательными зарядами  $g_{\text{out}}/Q = -3/4$ . Результат найденных решений в относительных единицах:

$$(-3/4)Q = 2,171452 \quad \text{и} \quad g_{\text{out}} = 2,171446.$$

По теории связанные заряды на внутренней поверхности диэлектрика  $Q_{\text{in}}$  и связанные заряды  $Q_{\text{out}}$  на внешней поверхности диэлектрического слоя равны по абсолютной величине и противоположны по знаку:

$$Q_{\text{in}} = -Q_{\text{out}}. \quad (2.6)$$

Связанные заряды  $Q_{\text{in}}$  и  $Q_{\text{out}}$  получаются суммированием (интегрированием) всех зарядов рассматриваемой поверхности. Соотношение является строгим. С определенной степенью приближения оно должно выполняться и в отношении вспомогательных зарядов, находящихся на одном радиусе. В результате решения имеем близкие результаты:

$$(g_{\text{in}} + g_{\text{out}})/2 = 2,190 \quad \text{и} \quad (f_{\text{in}} + f_{\text{out}})/2 = -2,230.$$

**2.4. Проводник внутри диэлектрической трубки с зазором между ними.** В наших работах [2, 3] обоснован и проверен способ решения краевых задач электростатики — *диэлектрик в поле заряженных проводников*. Поэтому для проверки правильности выбора систем уравнений решена задача «трубчатый диэлектрик в поле проводника», или иными словами — «проводник внутри диэлектрической трубки с зазором между ними». При решении задачи «проводник в диэлектрической трубке с зазором» используются полностью системы (2.1)–(2.5).

Рис. 4 представляет распределения полей для случая зазора между проводником и диэлектриком величиной 0,1 мм при толщине стенки трубки диэлектрика 1 и 2 мм.

На рис. 5 показаны распределения полей для случая величины зазора между проводником и диэлектриком, равного 0,5 мм при толщине стенки трубки диэлектрика 1 мм.

Перейдем к случаю, когда величина зазора равна 0,01 мм. Распределение поля вдоль радиуса для такого зазора должно быть близким к распределению поля в случае отсутствия зазора. На рис. 6, а показаны распределения полей для трубки диэлектрика с толщиной стенки 1 мм. Кривая 1, как и ранее, соответствует полю проводника в вакууме. Поле в диэлектрике без зазора и с зазором описывается кривой 2. В увеличенном масштабе на рис. 6, б показаны распределения поля с зазором и без него вблизи поверхности проволоки. Для случая отсутствия зазора распределение поля начинается на поверхности проводника ( $R = 1$  мм). В случае зазора, равного 0,01 мм, вертикальная линия при  $R = 1,01$  мм соответствует границе поверхности диэлектрика и характеризует скачок напряженности поля на границе вакуум–диэлектрик.

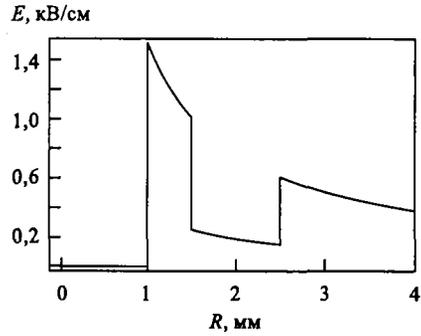
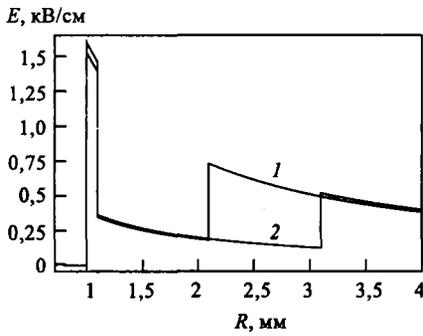


Рис. 4. Распределения поля вдоль радиуса системы для случая окружения проводника трубкой диэлектрика с зазором 0,1 мм. Кривая 1 соответствует слою диэлектрика толщиной 1 мм, кривая 2 — толщиной 2 мм

Рис. 5. Распределения поля вдоль радиуса для случая окружения проводника трубкой диэлектрика с зазором 0,5 мм

Практически во всем диапазоне распределения полей полностью совпадают. При  $R = 1,5$  мм поля соответственно равны 0,255614 и 0,255615 кВ/см. Разница при других значениях  $R$  не превышает величины нескольких единиц в шестом знаке после запятой.

Рисунок иллюстрирует правильность решения поставленных задач на основе математической модели нахождения вспомогательных зарядов, представленной системой уравнений (2.1)–(2.5). При определении величин вспомогательных зарядов для случая «проводник в вакууме» использовались только уравнения системы (2.1), с опусканием всех членов, содержащих заряды групп  $g$  и  $f$ :  $\sum_k u(Q) = -1000$  В.

Решив систему уравнений (2.1)–(2.5) при диэлектрической проницаемости  $\epsilon = 1$ , получим решение, соответствующее размещению проводника в вакууме. Полученные в

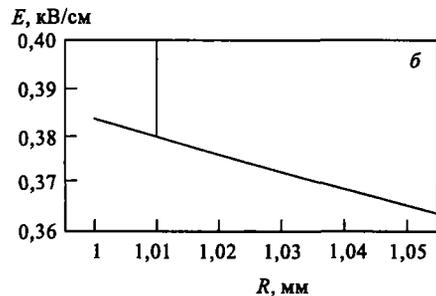
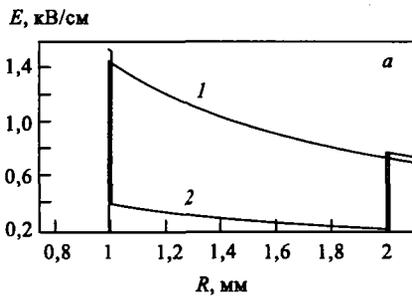


Рис. 6. Фрагменты распределения электрического поля с зазором между проводником и диэлектриком. а) Кривая 1 соответствует полю проводника в вакууме, поле в диэлектрике без зазора описывается кривой 2. Распределение электрического поля в случае зазора 0,01 мм фактически совпадает с распределением, описываемым кривой 2, оно лишь сдвинуто на величину зазора вправо. б) Начальный участок распределения в увеличенном масштабе. Распределение поля в диэлектрике и вне диэлектрика в случае с зазором 0,01 мм близко к распределению поля при отсутствии зазора

этих двух случаях распределения электрического поля вдоль радиуса совпадают между собой с высокой точностью. Разница не превышает одной единицы в двенадцатом знаке после запятой.

Рис. 6 и вычисления с заменой диэлектрической проницаемости иллюстрируют правильность решения поставленных задач на основе математической модели нахождения вспомогательных зарядов, представленной системой уравнений (2.1)–(2.5).

### 3. СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ В ПРИСУТСТВИИ ДИЭЛЕКТРИКА

Разработанный метод вычисления величин электрических полей по найденной системе вспомогательных зарядов не применим к вычислению потенциалов. Вычисление потенциала в точке поверхности диэлектрика с использованием внешних вспомогательных зарядов диэлектрика и в той же точке поверхности с применением внутренних вспомогательных зарядов приводит к разрыву потенциала на границе проводник–диэлектрик. Получить вполне удовлетворительный результат возможно следующим способом. Используется система уравнений (2.1) без правой части, т. е. берется полусумма внешнего и внутреннего вспомогательного заряда поверхности диэлектрика. В качестве места размещения этого нового вспомогательного заряда берется контрольная точка, соответствующая взятым вспомогательным зарядам. Эта процедура применяется ко всем вспомогательным зарядам диэлектрика.

В этом случае получаем два набора новых вспомогательных зарядов, размещенных по контрольным точкам внутренней и внешней поверхностей диэлектрика. Кроме этих зарядов, в нашем распоряжении имеется третий набор. Это вспомогательные заряды проводника. Используя три системы вспомогательных зарядов, рассчитываем потенциал в любой произвольной точке диэлектрика, кроме контрольных точек, в которых размещены заряды.

В контрольных точках на поверхности диэлектрика вычисление потенциала основано на соотношениях (2.4) и (2.5). Вместо полусумм вспомогательных внутренних и внешних зарядов берутся только вспомогательные внешние или внутренние заряды диэлектрика.

На рис. 7 кривой 1 показано распределение потенциала вдоль радиуса для системы, состоящей только из одного проводника. Кривой 2 того же рисунка показано распределение потенциала вдоль радиуса для системы вакуум–диэлектрик–вакуум. Величина

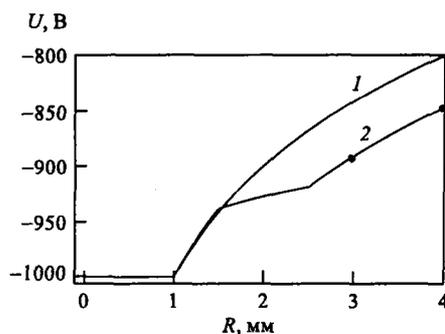


Рис. 7. Потенциальное распределение вдоль радиуса системы для случая окружения проводника трубкой диэлектрика с зазором 0,5 мм ( $\epsilon = 4$ ). Кривая 1 соответствует случаю потенциала проводника в вакууме. Кривая 2 соответствует случаю, когда слой диэлектрика равен 1 мм

вакуумного зазора равна 0,5 мм, толщина слоя диэлектрика составляет 1 мм. При решении задачи вдоль каждой из поверхностей диэлектрика и проводника использовалось по 100 и по 200 линейных вспомогательных зарядов. На рисунке представлен последний случай. Он дает более точное решение для потенциалов. Точки при  $R = 3$  и  $R = 4$  мм соответствуют результатам расчета по формулам классической электростатики [7].

#### 4. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕТЕКТОРА ZEPLIN III

Для практического применения метода было выполнено численное моделирование создаваемого детектора ZEPLIN III. Моделирование детектора проведено для центральной части детектора без учета краевых эффектов, причиной которых являются кольцевые металлические электроды [7].

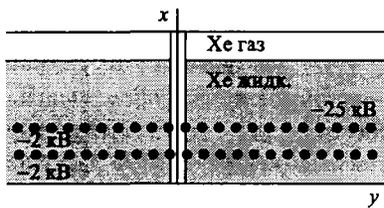


Рис. 8. Физическая модель детектора ZEPLIN III, принятая для численного моделирования электрических полей в жидкой и газовой фазах ксенона. Расстояние между нижней поверхностью и первым (нижним) рядом проволок — 2 мм. Расстояние между рядами проволок — 5 мм, глубина жидкой и газообразной фаз — 37 и 3 мм соответственно. Диаметры всех проволок равны 0,1 мм, а расстояние между ними в одном ряду — 2 мм. Диэлектрические проницаемости для жидкости и газа при моделировании составляли  $\epsilon = 1,93$  и  $\epsilon = 1,0$  соответственно. Вертикальной полосой выделена одна из дрейфовых ячеек (рабочий элемент детектора). На рисунке обозначена принятая система координат

На рис. 8 показана физическая модель детектора, принятая для численного моделирования. Расстояния между первым электродом ( $y = 0$ ) и первым рядом, вторым рядом проволок, границей газовой фазы и верхним электродом соответственно равны 2, 7, 37, 40 мм. Математическая модель заключается в использовании линейных вспомогательных зарядов, размещенных внутри и вне проводников, жидкого и газообразного ксенона. Для сокращения числа линейных уравнений использовался метод изображений и зеркального отражения.

На рис. 9, а показано 3D-распределение электрического поля в нормальном сечении по отношению к проволочным электродам. (Вид со стороны газовой фазы ксенона.) Ограниченные по размерам пики соответствуют напряженности поля на поверхности двух соседних проволок. Напряженность поля в каждом пике равна 257,5 кВ/см.

Рис. 9, б представляет фрагмент 3D-распределения электрического поля в районе газовой фазы ксенона. Виден скачок электрического поля при переходе из жидкости в газовую фазу. Размер распределения в плоскости  $x-y$  равен  $2 \times 10$  мм.

Распределение областей дрейфа электронов в электрическом поле элемента детектора показано на рис. 10. Из областей, обозначенных  $a$ , электроны дрейфуют в область газовой фазы, из областей  $b$  — к нижней поверхности детектора, находящейся под потенциалом  $-2$  кВ, из областей  $c$  — к нижним проволокам системы. Проволочки верхнего и нижнего ряда обозначены эллипсами, получающимися в этой форме из-за сжатия системы координат вдоль оси ординат.

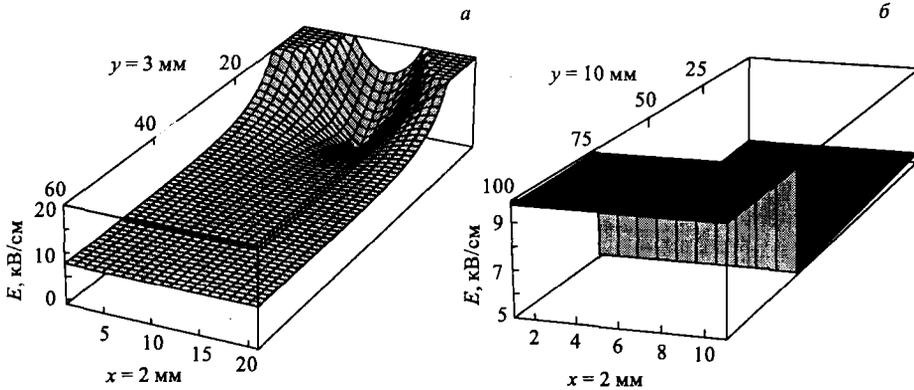


Рис. 9. а) 3D-распределение электрического поля в нормальном сечении по отношению к проводочным электродам. б) Фрагмент 3D-распределения электрического поля вблизи газовой фазы

Рис. 11, а представляет распределение электрического поля элемента детектора вдоль линии, соединяющей центры двух провололочек при одинаковых значениях координаты  $x$ . При переходе из жидкой фазы в газообразную ( $y > 37$  мм) в ходе электрического поля наблюдается скачок. Этот скачок связан с изменением диэлектрической проницаемости на границе двух сред в соответствии с законами электростатики диэлектриков. Распределение электрического поля элемента детектора вдоль линии  $x = 0$  (см. рис. 8) показано на рис. 11, б. Электрическое поле принимает нулевое значение в точке с координатами  $(0; 7,55$  мм). В симметричной системе (например, как в пропорциональных камерах) координаты были бы равны 0 и 7,0 мм.

В нижнем и верхнем рядах провололочек поле с внутренних сторон имеет большую величину, чем с внешних. Это показано на рис. 12. Объясняется это тем, что расстояние между линией нижних провололочек с потенциалом  $-2,0$  кВ ближе к провололочкам с потенциалом  $-25$  кВ почти в шесть раз по сравнению с линией равного  $-2,0$  кВ потенциала, проходящей в газовой среде. Эффект связан с несимметричностью системы.

На рис. 13 можно видеть сравнительные распределения  $E_y$ -компонентов электрического поля элемента детектора вдоль линии  $x = 0$  и  $x = 1$  мм (линии провололочек). На рис. 13, а компонент поля  $E_y$  вдоль линии  $x = 0$  мм для значений  $y < 10$  мм увеличивается, а вдоль линии  $x = 1$  мм уменьшается. Оба компонента примерно равны для интер-

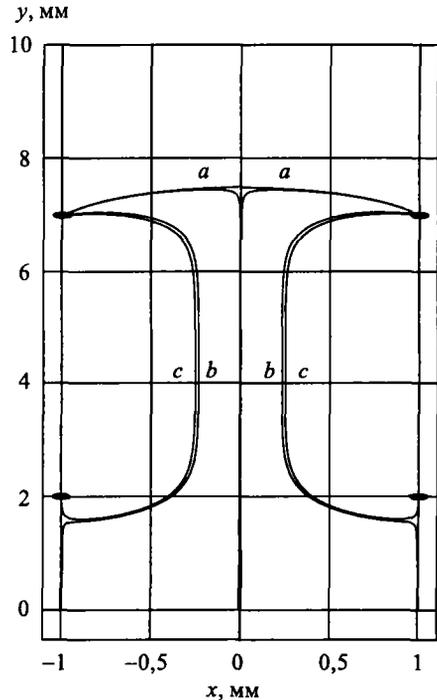


Рис. 10. Распределение областей дрейфа электронов в электрическом поле элемента детектора

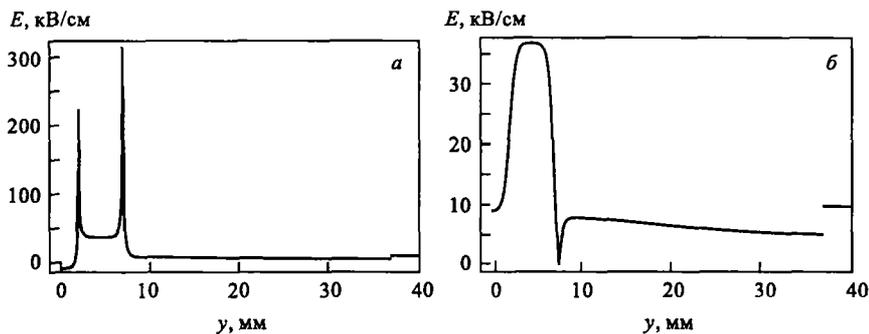


Рис. 11. Распределение электрического поля элемента детектора вдоль линии, соединяющей центры двух проволочек при одинаковых значениях координаты  $x$  (а) и распределение вдоль линии  $x = 0$  (б)

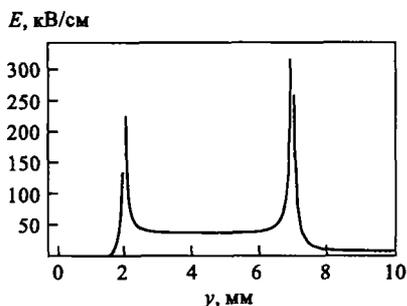


Рис. 12. Увеличенный фрагмент распределения электрического поля детектора вдоль линии, соединяющей центры двух проволочек

вала  $y > 10$  мм. На рис. 13, б показано распределение электрического поля в газовой фазе. Верхняя кривая соответствует распределению при  $x = 0$  мм, т. е. распределение соответствует середине ячейки, а нижняя кривая проходит по линии  $x = 1$  мм.

Увеличенный во много раз по сравнению с действительным размером рис. 14 представляет фрагменты правой проволочки средней сетки. По углу в  $34,7^\circ$  между касательной к линии поля в точке на поверхности проволочки и линией поля, идущей вертикально, можно судить о величине площади, с которой могут выбиваться электроны с проволочек средней сетки при взаимодействии с ультрафиолетовым излучением, возникающим в газовой среде детектора за счет электролюминесценции.

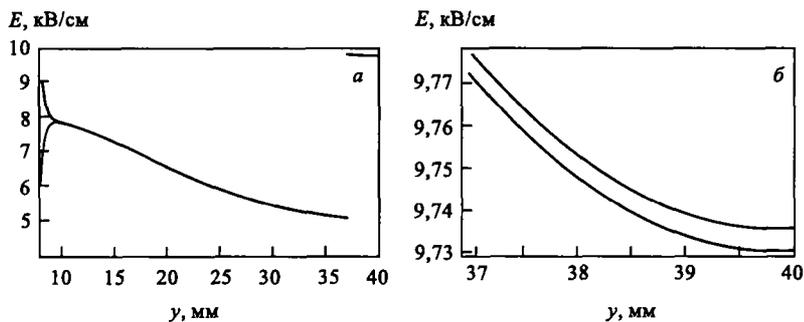


Рис. 13. Фрагменты распределения  $E_y$ -компонентов электрического поля элемента детектора вдоль линии  $x = 0$  и  $x = 1$  мм

При решении задачи было взято ограниченное число проволочек детектора: по 10 проволочек слева и справа от координаты  $x = 0$ . Как это реально сказалось на результатах расчета, можно сделать вывод по рис. 13, на котором показано распределение электрического поля в газовой фазе. При неограниченном или во всяком случае достаточно большом числе проволочек обе кривые должны совпадать. Из рисунка следует, что разница между кривыми не превышает величины  $\delta E/E = 5 \cdot 10^{-4}$ . Для решения задачи использовалось 1130 неизвестных и столько же линейных уравнений.

### ВЫВОДЫ

Для решения практических задач электростатики необходимо уметь получать распределения ограниченного числа вспомогательных зарядов проводников и связанных зарядов диэлектриков, которые с определенной точностью должны обеспечить выполнение граничных условий. По значениям потенциалов, подаваемых на проводники, требуется найти распределения зарядов иногда при очень сложной форме проводников и диэлектриков. Для этих целей разработаны и более тридцати лет совершенствуются компьютерные методы решения задач электростатики.

Наиболее развит метод конечных элементов (МКЭ). В процессе решения этим методом все поверхности разбиваются на элементарные ячейки из треугольных элементов. Центры элементов являются местом нахождения зарядов, которые необходимо найти. Пространство заполняется объемными ячейками — тетраэдрами. В них определяются значения потенциалов и электрических полей, служащих для всех последующих расчетов и построений. Алгоритмы программного обеспечения являются секретом фирмы разработчика, а сами программы — лицензионными. По-видимому, наиболее известной является система программ фирмы «Ansoft Corporation». В ЦЕРН лицензионная программа «MAXWELL Electric field simulator» указанной фирмы широко используется в составе системы «Garfield», используемой для моделирования координатных детекторов [9].

Предложенный авторами настоящей работы метод прост и вследствие простоты доступен широкому кругу пользователей. Эти два качества являются его достоинством. Он позволяет решать задачи на плоскости [2, 5] и в пространстве [3]. Метод помогает избежать серьезных промахов, допущенных авторами одного из проектов детекторов с диэлектриком в рабочем объеме и вскрытых в нашей работе [4].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Howard A. S. *et al.* Measurements with a two-phase xenon dark matter detector // York 2000. The identification of dark matter / Eds. by N. J. C. Spooner, V. Kudryavtsev. Singapore, 2001. P. 457–462.
2. Топурия Т. П., Шафранов М. Д. Диэлектрик в электростатическом поле. Решение краевых задач методом линейных алгебраических уравнений. Сообщение ОИЯИ P11-99-155. Дубна, 1999. С. 1–14.

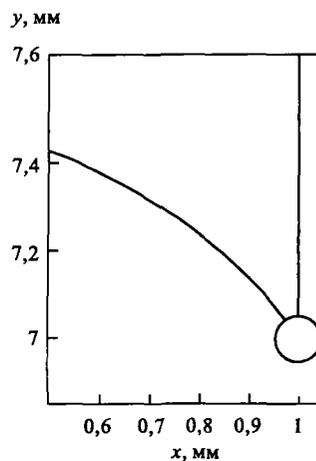


Рис. 14. Увеличенный фрагмент границы между областями  $a$  и  $b$  в районе правой проволочки рабочей ячейки средней сетки (см. рис. 10)

3. *Шафранов М. Д., Топурия Т. П.* Диэлектрики в электрических полях заряженных проводников. Постановка, обоснование и решение краевой задачи методом линейных уравнений. Сообщение ОИЯИ Р11-99-237. Дубна, 1999. С. 1–19.
4. *Шафранов М. Д., Топурия Т. П.* Проблемы электростатики многопроволочных пропорциональных камер с диэлектриком в рабочем объеме. Сообщение ОИЯИ Р13-99-318. Дубна, 1999. С. 1–16.
5. *Топурия Т. П., Шафранов М. Д.* Краевые эффекты в пропорциональной камере. Влияние диэлектрической рамки // Крат. сообщ. ОИЯИ. 1999. № 5,6[97]. С. 42–51.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1992. С. 57–70.
7. *Матвеев А. Н.* Электричество и магнетизм. М., 1983. С. 151–152.
8. *Veenhov R.* // Nucl. Instr. Meth. A. 1998. V. 419. P. 726–730.

Получено 2 октября 2002 г.