

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И.Будкера СО РАН

С.И. Редин

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОШИБКИ И КОРРЕЛЯЦИИ
ПАРАМЕТРОВ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

ИЯФ 2000-97

NOVOSIBIRSK
2000

Содержание

1	Введение	5
2	Статистические ошибки для случая двух коррелирующих между собой параметров	6
3	Статистические ошибки параметров распределения Гаусса	8
3.1	Распределение Гаусса с фиксированной амплитудой	10
3.2	Распределение Гаусса с некоррелирующими параметрами	11
4	Распределение Брейта-Вигнера	13
4.1	Распределение Брейта-Вигнера с некоррелирующими параметрами	15
5	Распределение Брейта-Вигнера при наличии постоянного фона	17
6	Распределение Брейта-Вигнера в релятивистском случае	23
7	Распределение $f(t) = N_0 e^{-t/\tau} [1 + A \cos(\omega t + \phi)]$ в эксперименте по измерению $g-2$ мюона	25
7.1	Статистические ошибки параметров подгонки распределения $f(t) = N_0 e^{-t/\tau} [1 + A \cos(\omega t + \phi)]$	25
7.2	$\omega - \phi$ корреляции и статистическая ошибка σ_ω в случае фиксирования (абсолютного знания) фазы ϕ	29
7.3	Статистическая ошибка σ_ω в случае ограниченного знания фазы ϕ	32
7.4	Систематический сдвиг параметров подгонки при наличии малого фона	33
7.5	Некоторые приложения формулы (112)	36
7.6	Формула для δ_ω для гладкой функции $h(t)$	38
8	Заключение	40
	Приложение I	40
	Приложение II	42
	Приложение III	44

1 Введение

Подгонка (аппроксимация) экспериментальных распределений (гистограмм) некоторой функцией является одной из наиболее распространенных процедур при анализе экспериментальных данных в физике элементарных частиц. Целью подгонки как правило является получение численных значений параметров подгоночной функции, которые в свою очередь прямо или косвенно связаны с измеряемыми в эксперименте величинами.

Подгонку (фитирование, фит) гистограмм обычно производят с использованием стандартных пакетов, таких как MINUIT или ROOT. Статистические ошибки и корреляции параметров подгонки по желанию (чаще по умолчанию) выдаются вместе с их оптимальными значениями. Существуют, однако, ситуации, когда статистическую ошибку того или иного параметра необходимо оценить независимо от самого фитирования. Очевидно, что такая ситуация возникает на этапе планирования эксперимента, когда необходимо оценить уровень статистики, требуемый для измерения того или иного параметра с заданной точностью. Другой пример — проверка правильности работы программы оптимизации, проверка на самосогласованность.

В настоящей работе показано как можно выразить статистические ошибки и корреляции параметров функции подгонки через сами эти параметры и статистику (число событий в гистограмме). Задача, как правило, сводится к вычислению интегралов и для простых распределений могут быть получены аналитические формулы. Вычисление интегралов, встречающихся в тексте, приведено в Приложении I.

2 Статистические ошибки для случая двух коррелирующих между собой параметров

Пусть функция $f(t)$ для фитирования гистограммы n_i содержит два, вообще говоря коррелирующих, параметра x и y . Пусть фитирование производится с помощью минимизации χ^2 . Для упрощения введем обозначение $W \equiv \chi^2$:

$$W = \sum_i \frac{(n_i - f(t_i))^2}{\sigma_i^2} = \sum_i \frac{(n_i - f(t_i))^2}{n_i}, \quad (1)$$

где n_i — число событий в i -м канале гистограммы и σ_i^2 — квадрат статистической ошибки для i -го канала. В данной работе предметом нашего рассмотрения в основном является случай хорошего согласия между распределением и функцией, когда $f(t_i) \approx n(i)$ с точностью до статистических флуктуаций. Тогда в приближении достаточно большой статистики $\sigma_i^2 = f(t_i) \approx n_i$. После суммирования по всем каналам гистограммы W остается функцией параметров x и y : $W = W(x, y)$. Пусть функция $W(x, y)$ имеет минимум в точке $x = x_0$, $y = y_0$. Тогда вблизи этой точки

$$W(x, y) \cong W(x_0, y_0) + A(\delta x)^2 + B(\delta x)(\delta y) + C(\delta y)^2,$$

где $\delta x = x - x_0$, $\delta y = y - y_0$. Эллипс ошибок определяется уравнением:

$$\Delta W = W(x, y) - W(x_0, y_0) = A(\delta x)^2 + B(\delta x)(\delta y) + C(\delta y)^2 = 1. \quad (2)$$

На рис. 1, взятом из [1], графически показано определение статистических ошибок σ_x и σ_y для случая двух коррелирующих параметров. Эти ошибки можно выразить через коэффициенты A , B и C в уравнении (2) следующим образом. Заметим, что прямая $\delta x = \text{const}$ при малом δx пересекает эллипс ошибок в двух точках:

$$\delta y = \frac{-B\delta x \pm \sqrt{(B\delta x)^2 - 4C(A(\delta x)^2 - 1)}}{2C},$$

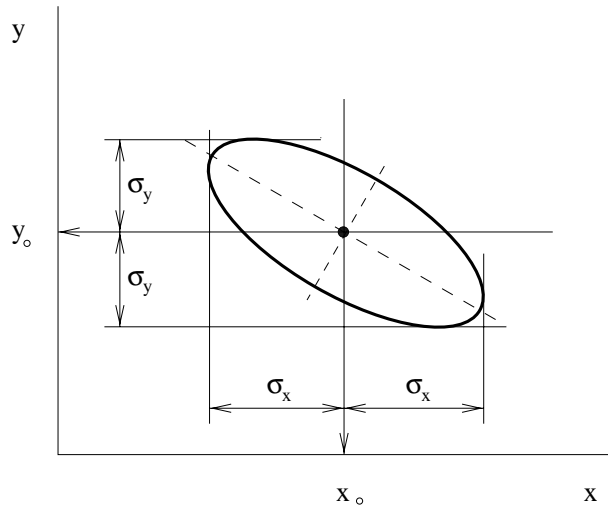


Рис. 1:

что формально выражается наличием знака \pm перед $\sqrt{\quad}$. Две точки сливаются в одну, когда подкоренное выражение зануляется и тогда $\delta x = \sigma_x$. Отсюда найдем σ_x :

$$B^2 \sigma_x^2 = 4C(A\sigma_x^2 - 1), \quad \sigma_x^{-2} = A - \frac{B^2}{4C} \quad (3)$$

и аналогично для σ_y :

$$\sigma_y^{-2} = C - \frac{B^2}{4A} \quad (4)$$

Таким же способом можно найти ошибки и для трех коррелирующих параметров x, y, z , только теперь уравнение $\delta x = const$ задает плоскость, секущую трехмерный эллипсоид ошибок. Для малых δx в сечении получается двумерный эллипс. По мере увеличения δx этот эллипс уменьшается в размере и при $\delta x = \sigma_x$ стягивается в точку. Формулы для статистических ошибок параметров x, y, z приведены в Приложении II.

3 Статистические ошибки параметров распределения Гаусса

Пусть имеется распределение (гистограмма) некоторых экспериментальных событий по Гауссу и мы хотим подогнать его функцией

$$f(x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

с тремя параметрами: амплитудой A , средним x_0 и шириной σ . Для нахождения статистических ошибок этих параметров, разложим функцию (1) вблизи минимума:

$$\begin{aligned} W(\delta A, \delta x_0, \delta \sigma) &= \sum_i \frac{(n_i - f(x_i))^2}{n_i} = \\ &= W(0, 0, 0) + \sum_i \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial A} \delta A + \frac{\partial f}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \delta \sigma \right)^2}{f(x_i)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\delta A, \delta x_0, \delta \sigma$ — отклонения параметров от своих оптимальных значений. Для получения аналитических формул представляется неизбежной замена суммирования на интегрирование:

$$\sum_i \rightarrow \int \frac{dt}{bin}, \quad (7)$$

где ширина канала гистограммы обозначена как bin . Используя формулы для производных

$$\frac{\partial f}{\partial A} = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = -A \frac{x - x_0}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = A \frac{(x - x_0)^2}{\sigma^3} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (10)$$

получаем

$$\begin{aligned}
\Delta W &= \int \frac{(\delta A - A \frac{x-x_0}{\sigma^2} \delta x_0 + A \frac{(x-x_0)^2}{\sigma^3} \delta \sigma)^2}{A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}} e^{-2\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \frac{dt}{bin} = \\
&= \frac{1}{bin} \int dt e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \times \left[\frac{1}{A} (\delta A)^2 + A \frac{(x-x_0)^2}{\sigma^4} (\delta x_0)^2 \right. \\
&\quad + A \frac{(x-x_0)^4}{\sigma^6} (\delta \sigma)^2 - 2 \frac{x-x_0}{\sigma^2} (\delta A)(\delta x_0) \\
&\quad \left. - 2 \frac{(x-x_0)^3}{\sigma^5} (\delta x_0)(\delta \sigma) + 2 \frac{(x-x_0)^2}{\sigma^3} (\delta A)(\delta \sigma) \right]. \quad (11)
\end{aligned}$$

Если границы интегрирования в выражении (11) симметричны относительно x_0 , то слагаемые, содержащие $x - x_0$ и $(x - x_0)^3$ (т.е. нечетные по $x - x_0$), зануляются. Если к тому же эти границы интегрирования достаточно далеки от x_0 , так что их можно положить $\pm \infty$, то результат интегрирования можно записать в аналитическом виде:

$$\Delta W = \frac{1}{bin} \sqrt{2\pi} \sigma \left[\frac{1}{A} (\delta A)^2 + \frac{A}{\sigma^2} (\delta x_0)^2 + \frac{3A}{\sigma^2} (\delta \sigma)^2 - \frac{2}{\sigma} (\delta A)(\delta \sigma) \right] \quad (12)$$

От “лишнего” параметра bin можно избавиться с помощью соотношения для полного числа событий в гистограмме:

$$N = \sum_i n_i \rightarrow \int \frac{dt}{bin} n_i = \frac{1}{bin} \int dt A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} = \frac{\sqrt{2\pi} \sigma A}{bin}. \quad (13)$$

В результате получаем:

$$\Delta W = \frac{N}{A^2} (\delta A)^2 + \frac{N}{\sigma^2} (\delta x_0)^2 + \frac{3N}{\sigma^2} (\delta \sigma)^2 + \frac{2N}{A\sigma} (\delta A)(\delta \sigma) \quad (14)$$

Выражение (14) не содержит перекрестных членов с δx_0 , поэтому параметр x_0 полностью независим от параметров A и σ . Для вычисления σ_{x_0} в выражении (14) можно опустить члены с δA и $\delta \sigma$ и приравнять ΔW к 1:

$$\sigma_{x_0}^2 = \frac{\sigma^2}{N} \quad \text{и} \quad \sigma_{x_0} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (15)$$

Для вычисления σ_A и σ_σ в выражении (14) нужно опустить член с $(\delta x_o)^2$ и воспользоваться формулами (3) и (4):

$$\sigma_A^{-2} = \frac{N}{A^2} - \frac{\left(\frac{2N}{A\sigma}\right)^2}{4 \frac{3N}{\sigma^2}} = \frac{2N}{3A^2} \quad \text{и} \quad \sigma_A = \sqrt{3} \frac{A}{\sqrt{2N}}, \quad (16)$$

$$\sigma_\sigma^{-2} = \frac{3N}{\sigma^2} - \frac{\left(\frac{2N}{A\sigma}\right)^2}{4 \frac{N}{A^2}} = \frac{2N}{\sigma^2} \quad \text{и} \quad \sigma_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}. \quad (17)$$

Выражения (15), (17) для статистических ошибок среднего и сигмы (среднеквадратичного отклонения) хорошо известны и могут быть получены другими способами, см. [2]. Выражение (16) для ошибки амплитуды можно вывести более простым способом, как будет показано в разделе 3.2.

3.1 Распределение Гаусса с фиксированной амплитудой

Рассмотрим частный случай распределения Гаусса (5) с фиксированной амплитудой, т.е. случай, когда амплитуда A известна и поэтому не является параметром подгонки. В этом случае в формулах для ΔW нужно исключить члены, содержащие δA , и выражение (14) принимает вид:

$$\Delta W = \frac{N}{\sigma^2} (\delta x_o)^2 + \frac{3N}{\sigma^2} (\delta\sigma)^2 \quad (18)$$

Отсюда находим статистические ошибки оставшихся параметров:

$$\sigma_{x_o} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad \sigma_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{3N}}. \quad (19)$$

Сравнивая выражения (19) с (15) и (17), можно сделать следующие выводы:

- ошибка x_o не изменилась. Формально это является следствием того, что в выражении (14) отсутствует перекрестный член с $(\delta x_o)(\delta A)$ и поэтому фиксирование параметра A никак не

сказывается на статистической точности x_0 . Можно сделать более общее утверждение: если два параметра не коррелируют между собой, то дополнительная информация об одном из них (в том числе абсолютное знание, т.е. фиксирование) никак не сказывается на статистической точности определения другого параметра.

- ошибка сигмы уменьшилась. Это является следствием того, что из выражения (14) ушел перекрестный член с $(\delta\sigma)(\delta A)$, что эквивалентно занулению коэффициента B в формулах (3),(4). Сформулируем более общее утверждение: если два параметра коррелируют между собой, то любая дополнительная информация об одном из них приводит к уменьшению статистической ошибки другого параметра. В разделах 7.2 и 7.3 мы более детально рассмотрим это свойство на примере корреляции частоты и фазы в эксперименте по измерению $g-2$ мюона в Брукхейвенской национальной лаборатории (BNL), США.

3.2 Распределение Гаусса с некоррелирующими параметрами

В функции для подгонки распределения Гаусса (5) заменим параметр “амплитуда” A на параметр “площадь” S , $A \rightarrow S/\sigma$:

$$f(x) = \frac{S e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma}. \quad (20)$$

В этом случае

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{bin} \frac{S e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma} = \frac{\sqrt{2\pi} S}{bin} \quad (21)$$

и значит S с точностью до постоянного множителя равно N , т.е. “площади под кривой”. Вычислим производные и ΔW :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_o} = -S \frac{x - x_o}{\sigma^3} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{2\sigma^2}}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = S \left(\frac{(x - x_o)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{(x-x_o)^2}{2\sigma^2}}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{bin} \sqrt{2\pi} \sigma \left[\frac{1}{S\sigma} (\delta S)^2 + \frac{S}{\sigma^3} (\delta x_o)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{S}{\sigma^3} (3 - 2 + 1) (\delta\sigma)^2 + 2 \frac{1}{\sigma^3} (1 - 1) (\delta S)(\delta\sigma) \right] = \\ &= \frac{N}{S^2} (\delta S)^2 + \frac{N}{\sigma^2} (\delta x_o)^2 + \frac{2N}{\sigma^3} (\delta\sigma)^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Последнее выражение не содержит перекрестных членов и значит ни один из параметров не коррелирует с другими. Статистические ошибки находятся тривиально:

$$\sigma_{x_o} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad \sigma_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}, \quad \sigma_S = \frac{S}{\sqrt{N}}. \quad (26)$$

Сравнивая выражения (26) с (15) и (17), можно сделать следующие выводы:

- ошибки среднего и сигмы не изменились, как и следовало ожидать.
- относительная ошибка параметра “площадь” $\sigma_S/S = 1/\sqrt{N}$ меньше относительной ошибки параметра “амплитуда” $\sigma_A/A = \sqrt{3}/\sqrt{2N} = 1.22/\sqrt{N}$. Последнюю можно вывести из (26), пользуясь статистической независимостью параметров S и σ :

$$\frac{\sigma_A}{A} = \frac{\sigma(S/\sigma)}{S/\sigma} = \sqrt{\frac{\sigma_S^2}{S^2} + \frac{\sigma_\sigma^2}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{2N}} = \sqrt{\frac{3}{2N}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2N}}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует вывод:

- Наиболее оптимальным набором параметров подгоночной функции является набор статистически независимых параметров, назовем их базовыми параметрами. Вычисление статистических ошибок базовых параметров, как правило, проще, а ошибки других параметров (являющихся функциями

базовых параметров) могут быть получены из ошибок базовых параметров. Мы воспользуемся этими свойствами при вычислении ошибок параметров распределения Брейта-Вигнера в релятивистском случае в разделе 6.

4 Распределение Брейта-Вигнера

В физике высоких энергий функция Брейта-Вигнера чаще всего используется для описания резонансного сечения реакций. Формула для Брейт-Вигнеровского сечения взаимодействия двух частиц со спинами S_1 и S_2 для резонанса со спином J приведена на стр. 189 в [1]:

$$\sigma_{BW} = \frac{(2J+1)}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \frac{\pi}{k^2} \frac{B_{in}B_{out}\Gamma_{tot}^2}{(E-E_R)^2 + \Gamma_{tot}^2/4}, \quad (27)$$

где k – импульс частиц в системе центра масс. Для случая, когда массы взаимодействующих частиц и ширина резонанса много меньше массы резонанса, зависимостью k от энергии E можно пренебречь и сечение (27) сводится к выражению:

$$f(E) = A \frac{\Gamma^2/4}{(E-M)^2 + \Gamma^2/4} \quad (28)$$

с тремя параметрами: амплитудой A , массой M и шириной Γ .

Для распределения, описываемого функцией (28), выведем формулы для статистических ошибок параметров A , M и Γ . Для упрощения вычислений введем переменную $x = \frac{E-M}{\Gamma/2}$, так что $f(E) = \frac{A}{1+x(E)^2}$. Вычислим производные $f(E)$ по параметрам A , M и Γ и найдем функцию $\Delta W(\delta A, \delta M, \delta \Gamma)$:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \frac{1}{1+x^2}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial f}{\partial M} = A \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \left(\frac{-1}{\Gamma/2} \right) = \frac{4Ax}{(1+x^2)^2 \Gamma}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Gamma} = A \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \left(-\frac{E-M}{\Gamma^2/2} \right) = \frac{2Ax^2}{(1+x^2)^2 \Gamma}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
\Delta W &= \sum \frac{(\delta f)^2}{\sigma_i^2} = \sum \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial A} \delta A + \frac{\partial f}{\partial M} \delta M + \frac{\partial f}{\partial \Gamma} \delta \Gamma \right)^2}{n_i} \longrightarrow \\
&\longrightarrow \int \frac{dE}{bin} \frac{\left(\frac{1}{1+x^2} \delta A + \frac{4Ax}{(1+x^2)^2 \Gamma} \delta M + \frac{2Ax^2}{(1+x^2)^2 \Gamma} \delta \Gamma \right)^2}{\frac{A}{1+x^2}} = \\
&= \frac{\Gamma}{2A bin} \int (1+x^2) dx \left(\frac{1}{1+x^2} \delta A + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4Ax}{(1+x^2)^2 \Gamma} \delta M + \frac{2Ax^2}{(1+x^2)^2 \Gamma} \delta \Gamma \right)^2 \quad (32)
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали переход

$$\sum_i \rightarrow \int \frac{dE}{bin} = \frac{1}{bin} \int \frac{dE}{dx} dx = \frac{\Gamma}{2bin} \int dx . \quad (33)$$

Если границы интегрирования можно положить $\pm \infty$, то интегралы в (32) вычисляются аналитически, при этом интегралы от нечетных функций зануляются. Параметр bin можно заменить полным числом событий в гистограмме N :

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{bin} \frac{A}{1+x^2} = \frac{A\Gamma}{2bin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{A\Gamma\pi}{2bin} . \quad (34)$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
\Delta W &= \frac{N}{A^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \times \left[\frac{1}{1+x^2} (\delta A)^2 + \frac{16A^2}{\Gamma^2} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} (\delta M)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4A^2}{\Gamma^2} \frac{x^4}{(1+x^2)^3} (\delta \Gamma)^2 + \frac{4A}{\Gamma} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} (\delta A)(\delta \Gamma) \right] = \\
&= \frac{N}{A^2 \pi} \left[\pi (\delta A)^2 + \frac{16A^2}{\Gamma^2} \frac{\pi}{8} (\delta M)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4A^2}{\Gamma^2} \frac{3\pi}{8} (\delta \Gamma)^2 + \frac{4A}{\Gamma} \frac{\pi}{2} (\delta A)(\delta \Gamma) \right] = \\
&= \frac{N}{A^2} (\delta A)^2 + \frac{2N}{\Gamma^2} (\delta M)^2 + \frac{3N}{2\Gamma^2} (\delta \Gamma)^2 + \frac{2N}{A\Gamma} (\delta A)(\delta \Gamma) \quad (35)
\end{aligned}$$

и статистические ошибки:

$$\begin{aligned} \sigma_M^{-2} &= \frac{2N}{\Gamma^2} & \text{и} & \quad \sigma_M = \frac{\Gamma}{\sqrt{2N}}, \\ \sigma_\Gamma^{-2} &= \frac{3N}{2\Gamma^2} - \frac{\left(\frac{2N}{A\Gamma}\right)^2}{4\frac{N}{A^2}} = \frac{N}{2\Gamma^2} & \text{и} & \quad \sigma_\Gamma = \sqrt{2} \frac{\Gamma}{\sqrt{N}}, \\ \sigma_A^{-2} &= \frac{N}{A^2} - \frac{\left(\frac{2N}{A\Gamma}\right)^2}{4\frac{3N}{2\Gamma^2}} = \frac{N}{3A^2} & \text{и} & \quad \sigma_A = \sqrt{3} \frac{A}{\sqrt{N}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Напомним, что вычисление интегралов приведено в Приложении I.

4.1 Распределение Брейта-Вигнера с некоррелирующими параметрами

В приведенном выше примере параметры амплитуда A и ширина Γ коррелируют между собой. Попробуем избавиться от корреляции, перейдя, как и для распределения Гаусса, от параметра “амплитуда” A к параметру “площадь” S , $A \rightarrow S/\Gamma$:

$$f(E) = \frac{S}{\Gamma} \frac{\Gamma^2/4}{(E-M)^2 + \Gamma^2/4} = \frac{S/\Gamma}{1+x^2}, \quad (37)$$

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{bin} \frac{S/\Gamma}{1+x^2} = \frac{S}{2bin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{S\pi}{2bin}. \quad (38)$$

Площадь S с точностью до постоянного множителя равна N и мы вправе ожидать, что параметр S не коррелирует с другими параметрами и его относительная ошибка равна $\sigma_S/S = 1/\sqrt{N}$.

Найдем производные и ΔW :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1/\Gamma}{1+x^2}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial f}{\partial M} = \frac{4Sx}{(1+x^2)^2 \Gamma^2}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \Gamma} &= \frac{2Sx^2}{(1+x^2)^2 \Gamma^2} - \frac{S}{(1+x^2) \Gamma^2} = \\ &= \frac{S}{(1+x^2) \Gamma^2} \left(2\frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
\Delta W &= \Sigma \frac{(\delta f)^2}{\sigma_i^2} = \Sigma \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial S} \delta S + \frac{\partial f}{\partial M} \delta M + \frac{\partial f}{\partial \Gamma} \delta \Gamma \right)^2}{n_i} \longrightarrow \\
&\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{bin} \frac{\left[\frac{1/\Gamma}{1+x^2} \delta S + \frac{4Sx}{(1+x^2)^2 \Gamma^2} \delta M + \frac{S}{(1+x^2) \Gamma^2} \left(2 \frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right) \delta \Gamma \right]^2}{\frac{S/\Gamma}{1+x^2}} = \\
&= \frac{\Gamma^2}{2S bin} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[16 \frac{S^2}{\Gamma^4} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} (\delta M)^2 + \frac{1}{(1+x^2) \Gamma^2} (\delta S)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{S^2}{(1+x^2) \Gamma^4} \left(2 \frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right)^2 (\delta \Gamma)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{S}{(1+x^2) \Gamma^3} \left(2 \frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right) (\delta S)(\delta \Gamma) \right] = \\
&= \frac{N}{\pi} \left[\frac{16}{\Gamma^2} (\delta M)^2 \frac{\pi}{8} + \frac{1}{S^2} (\delta S)^2 \pi + \frac{1}{\Gamma^2} (\delta \Gamma)^2 \left(4 \frac{3\pi}{8} - 4 \frac{\pi}{2} + \pi \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2S}{\Gamma} (\delta S)(\delta \Gamma) \left(2 \frac{\pi}{2} - \pi \right) \right] = \\
&= \frac{2N}{\Gamma^2} (\delta M)^2 + \frac{N}{S^2} (\delta S)^2 + \frac{N}{2\Gamma^2} (\delta \Gamma)^2 \quad (42)
\end{aligned}$$

Как и для распределения Гаусса в виде (20), перекрестный член с $(\delta S)(\delta \Gamma)$ занулился и все параметры оказались статистически независимы друг от друга, их статистические ошибки:

$$\sigma_M = \frac{\Gamma}{\sqrt{2N}}, \quad \sigma_S = \frac{S}{\sqrt{N}}, \quad \sigma_\Gamma = \sqrt{2} \frac{\Gamma}{\sqrt{N}}. \quad (43)$$

Как и следовало ожидать, ошибки для M и Γ те же, что и в (36), а относительная ошибка σ_S/S равна $1/\sqrt{N}$.

5 Распределение Брейта-Вигнера при наличии постоянного фона

В данном случае распределение описывается функцией

$$f(E) = A \frac{\Gamma^2/4}{(E-M)^2 + \Gamma^2/4} + C = \frac{A}{1+x^2} + C. \quad (44)$$

Производные функции $f(E)$ по параметрам A , M и Γ остаются теми же, что и в (39)–(41), а производная по C равна единице. Производные по A , Γ и C являются четными функциями и поэтому эти три параметра, вообще говоря, коррелируют между собой. Производная по M – нечетная функция и параметр M статистически независим от остальных параметров.

Вычислим статистическую ошибку M .

$$\begin{aligned} \Delta W_M &= \sum \frac{(\frac{dF_{BW}}{dM} \delta M)^2}{n_i} = (\delta M)^2 \sum \frac{\left(\frac{2Ax}{(1+x^2)^2} \Gamma/2\right)^2}{\frac{A}{1+x^2} + C} \rightarrow \\ &\rightarrow (\delta M)^2 \frac{16 A^2}{\Gamma^2 C} \frac{\Gamma}{2 bin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3 (A/C + 1 + x^2)} dt = \\ &= (\delta M)^2 \frac{16 A^2}{\Gamma^2 C} \frac{\Gamma}{2 bin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^3 (Z^2 + x^2)} dt = \\ &= (\delta M)^2 \frac{2N}{\Gamma^2} \frac{A}{C} \frac{3+Z}{(1+Z)^3}, \end{aligned} \quad (45)$$

где $Z^2 = A/C + 1 = const$ и $N = \frac{A \Gamma \pi}{2 \cdot bin}$ – число событий эффекта, т.е. Брейт-Вигнера, см. формулу (34). Из (45) получаем σ_M :

$$\sigma_M = \frac{\Gamma}{\sqrt{2N}} \sqrt{\frac{C}{A}} \sqrt{\frac{(1+Z)^3}{3+Z}}. \quad (46)$$

Теперь найдем ΔW_{AGC} для коррелирующих величин A , Γ и C :

$$\Delta W_{AGC} = (\delta A)^2 \sum \frac{(\frac{dF}{dA})^2}{n_i} + (\delta \Gamma)^2 \sum \frac{(\frac{dF}{d\Gamma})^2}{n_i} + (\delta C)^2 \sum \frac{(\frac{dF}{dC})^2}{n_i} +$$

$$\begin{aligned}
& + (\delta A)(\delta \Gamma) \sum \frac{2 \left(\frac{dF}{dA} \right) \left(\frac{dF}{d\Gamma} \right)}{n_i} + (\delta A)(\delta C) \sum \frac{2 \left(\frac{dF}{dA} \right) \left(\frac{dF}{dC} \right)}{n_i} + \\
& + (\delta \Gamma)(\delta C) \sum \frac{2 \left(\frac{dF}{d\Gamma} \right) \left(\frac{dF}{dC} \right)}{n_i} = \\
& = a(\delta A)^2 + b(\delta \Gamma)^2 + c(\delta C)^2 + p(\delta A)(\delta \Gamma) + \\
& + q(\delta A)(\delta C) + r(\delta \Gamma)(\delta C). \tag{47}
\end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты a , b , c , p , q , r .

$$\begin{aligned}
a & = \frac{\Gamma}{2bin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{A}{1+x^2} + C} dx = \frac{\Gamma}{2Cbin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(Z^2+x^2)} = \\
& = \frac{\Gamma}{2Cbin} \frac{\pi}{Z(1+Z)} = \frac{N}{AC} \frac{1}{Z(1+Z)}; \tag{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b & = \frac{\Gamma}{2bin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{Ax^2}{(1+x^2)^2 \Gamma/2} \right)^2}{\frac{A}{1+x^2} + C} dx = \frac{2A^2}{\Gamma C bin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(1+x^2)^3(Z^2+x^2)} dx \\
& = \frac{2A^2}{\Gamma C bin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x^2)^2 - 2(1+x^2) + 1}{(1+x^2)^3(Z^2+x^2)} dx = \\
& = \frac{2A^2}{\Gamma C bin} \left[\frac{\pi}{Z^2} \left(1 - \frac{1}{1+Z} \right) - \frac{\pi}{Z^2} \left(1 - \frac{1}{(1+Z)^2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\pi}{8Z} \frac{8+9Z+3Z^2}{(1+Z)^3} \right] = \frac{2A^2}{\Gamma C bin} \frac{\pi}{8} \frac{1+3Z}{(1+Z)^3} = \frac{N}{2\Gamma^2} \frac{A}{C} \frac{1+3Z}{(1+Z)^3}; \tag{49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c & = \frac{\Gamma}{2bin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\frac{A}{1+x^2} + C} = \frac{\Gamma}{2bin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{A+C+Cx^2} dE = \\
& = \frac{\Gamma}{2Cbin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{Z^2+x^2} dx = \frac{\Gamma}{2Cbin} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{A/C}{Z^2+x^2} \right) dx = \\
& = \frac{\Gamma}{2Cbin} \left(\frac{E_{max} - E_{min}}{\Gamma/2} - \frac{A}{C} \frac{\pi}{Z} \right). \tag{50}
\end{aligned}$$

Здесь мы, вообще говоря, использовали приближение

$$\int \frac{1}{Z^2+x^2} dx = \frac{1}{Z} \left(\arctg \frac{E_{max} - M}{Z \cdot \Gamma/2} - \arctg \frac{M - E_{min}}{Z \cdot \Gamma/2} \right) \approx \frac{\pi}{Z}, \tag{51}$$

которое верно только при $\frac{E_{max}-M}{\Gamma/2} \gg Z$ и $\frac{M-E_{min}}{\Gamma/2} \gg Z$ (и, как следствие, при $\frac{E_{max}-E_{min}}{\Gamma/2} = \frac{\Delta E}{\Gamma/2} \gg Z$). Введем новые обозначения: число событий фона N_c

$$N_c = \sum C = \frac{1}{bin} \int_{E_{min}}^{E_{max}} C dE = \frac{E_{max} - E_{min}}{bin} C = \frac{\Delta E C}{bin} \quad (52)$$

и величину η , пропорциональную отношению интервала энергий $\Delta E = E_{max} - E_{min}$ к Брейт-Вигнеровской ширине Γ :

$$\eta = \frac{A}{C} \frac{N_c}{N} = \frac{A}{C} \left(\frac{\Delta E C}{bin} \right) \left(\frac{A \Gamma \pi}{2 bin} \right)^{-1} = \frac{2 \Delta E}{\pi \Gamma}. \quad (53)$$

Тогда

$$c = \frac{N_c}{C^2} - \frac{N}{C^2 Z} = \frac{N}{AC} \left(\frac{A}{C} \frac{N_c}{N} - \frac{A}{C} \right) = \frac{N}{AC} \left(\eta - \frac{Z^2 - 1}{Z} \right). \quad (54)$$

Продолжаем вычисление коэффициентов из уравнения (47).

$$\begin{aligned} p &= \frac{\Gamma}{2bin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \left(\frac{Ax^2}{(1+x^2)^2 \Gamma/2} \right)}{\frac{A}{1+x^2} + C} dx = \\ &= \frac{2}{bin} \frac{A}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2 (Z^2+x^2)} dx = \\ &= \frac{2}{bin} \frac{A}{C} \left[\frac{\pi}{Z^2} \left(1 - \frac{1}{1+Z} \right) - \frac{\pi}{2Z^2} \left(1 - \frac{1}{(1+Z)^2} \right) \right] = \\ &= \frac{2}{bin} \frac{A}{C} \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+Z)^2} = \frac{2N}{\Gamma C} \frac{1}{(1+Z)^2}; \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{\Gamma}{2bin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \cdot 1}{\frac{A}{1+x^2} + C} dx = \\ &= \frac{\Gamma}{Cbin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{Z^2+x^2} = \frac{\Gamma}{Cbin} \frac{\pi}{Z} = \frac{2N}{AC} \frac{1}{Z}; \end{aligned} \quad (56)$$

$$r = \frac{\Gamma}{2bin} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \left(\frac{Ax^2}{(1+x^2)^2 \Gamma/2} \right) \cdot 1}{\frac{A}{1+x^2} + C} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\text{bin}} \frac{A}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)(Z^2+x^2)} dx \\
&= \frac{2}{\text{bin}} \frac{A}{C} \left[\frac{\pi}{Z} - \frac{\pi}{Z^2} \left(1 - \frac{1}{1+Z} \right) \right] = \\
&= \frac{2}{\text{bin}} \frac{A}{C} \frac{\pi}{1+Z} = \frac{4N}{\Gamma C} \frac{1}{1+Z}. \tag{57}
\end{aligned}$$

Теперь для вычисления сигм найдем различные комбинации параметров a , b , c , p , q , r из формул (122), (123), (124) из Приложения II.

$$\begin{aligned}
4abc &= 4 \times \frac{N}{AC} \frac{1}{Z(1+Z)} \times \frac{N}{2\Gamma^2} \frac{A}{C} \frac{1+3Z}{(1+Z)^3} \times \left(\frac{N_c}{C^2} - \frac{N}{C^2 Z} \right) = \\
&= \frac{2N^3}{\Gamma^2 C^4} \frac{1+3Z}{Z^2(1+Z)^4} \left(Z \frac{N_c}{N} - 1 \right), \tag{58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pqr &= \frac{2N}{A\Gamma} \frac{A}{C} \frac{1}{(1+Z)^2} \times \frac{2N}{AC} \frac{1}{Z} \times \frac{4N}{\Gamma C} \frac{1}{1+Z} = \\
&= \frac{16N^3}{A\Gamma^2 C^3} \frac{1}{Z(1+Z)^3}, \tag{59}
\end{aligned}$$

$$ar^2 = \frac{N}{AC} \frac{1}{Z(1+Z)} \times \frac{16N^2}{\Gamma^2 C^2} \frac{1}{(1+Z)^2} = \frac{16N^3}{A\Gamma^2 C^3} \frac{1}{Z(1+Z)^3}, \tag{60}$$

$$bq^2 = \frac{N}{2\Gamma^2} \frac{A}{C} \frac{1+3Z}{(1+Z)^3} \times \frac{4N^2}{A^2 C^2} \frac{1}{Z^2} = \frac{2N^3}{A\Gamma^2 C^3} \frac{1+3Z}{Z^2(1+Z)^3}, \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
cp^2 &= \left(\frac{N_c}{C^2} - \frac{N}{C^2 Z} \right) \times \frac{4N^2}{A^2 \Gamma^2} \frac{A^2}{C^2} \frac{1}{(1+Z)^4} = \\
&= \frac{4N^3}{A\Gamma^2 C^3} \frac{A}{C} \frac{1}{Z(1+Z)^4} \left(Z \frac{N_c}{N} - 1 \right). \tag{62}
\end{aligned}$$

Вычислим выражение $4abc + pqr - ar^2 - bq^2 - cp^2$, которое является знаменателем в формулах (122), (123), (124) (заметим, что в данном случае $pqr - ar^2 = 0$):

$$\begin{aligned}
4abc + pqr - ar^2 - bq^2 - cp^2 &= \\
&= \frac{2N^3}{A\Gamma^2 C^3} \left[\frac{A}{C} \frac{1+3Z}{Z^2(1+Z)^4} \left(Z \frac{N_c}{N} - 1 \right) - \frac{1+3Z}{Z^2(1+Z)^3} \right] \tag{63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{A}{C} \frac{1}{Z(1+Z)^4} \left(Z \frac{N_c}{N} - 1 \right) \Big] = \\
& = \frac{2N^3}{A\Gamma^2 C^3} \frac{1}{Z^2(1+Z)^3} \left[\frac{A}{C} \left(Z \frac{N_c}{N} - 1 \right) - (1+3Z) \right] = \\
& = \frac{2N^3}{A\Gamma^2 C^3} \frac{Z\eta - (Z^2 - 1) - (1+3Z)}{Z^2(1+Z)^3} = \frac{2N^3}{A\Gamma^2 C^3} \frac{\eta - (Z+3)}{Z(1+Z)^3}.
\end{aligned}$$

Вычислим выражение $4bc - r^2$, стоящее в числителе в формуле (122) для σ_A^2 :

$$\begin{aligned}
4bc - r^2 & = \\
& = 4 \times \frac{N}{2\Gamma^2} \frac{A}{C} \frac{1+3Z}{(1+Z)^3} \times \left(\frac{N_c}{C^2} - \frac{N}{C^2 Z} \right) - \frac{16N^2}{\Gamma^2 C^2} \frac{1}{(1+Z)^2} = \\
& = \frac{2N^2}{\Gamma^2 C^2} \frac{1}{(1+Z)^2} \left(\frac{A}{C} \frac{1+3Z}{1+Z} \left(\frac{N_c}{N} - \frac{1}{Z} \right) - 8 \right) = \\
& = \frac{2N^2}{\Gamma^2 C^2} \frac{1}{(1+Z)^2} \left(\frac{1+3Z}{1+Z} \eta - \frac{(Z-1)(1+3Z) + 8Z}{Z} \right) = \\
& = \frac{2N^2}{\Gamma^2 C^2} \frac{Z(1+3Z)\eta - (1+Z)(3Z^2 + 6Z - 1)}{Z(1+Z)^3}. \tag{64}
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned}
\sigma_A & = \sqrt{\frac{\frac{2N^2}{\Gamma^2 C^2} \frac{Z(1+3Z)\eta - (1+Z)(3Z^2 + 6Z - 1)}{Z(1+Z)^3}}{\frac{2N^3}{A\Gamma^2 C^3} \frac{\eta - (Z+3)}{Z(1+Z)^3}}} = \\
& = \frac{A}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{C}{A}} \sqrt{\frac{Z(1+3Z)\eta - (1+Z)(3Z^2 + 6Z - 1)}{\eta - (Z+3)}}. \tag{65}
\end{aligned}$$

Вычислим σ_Γ :

$$\begin{aligned}
4ac - q^2 & = 4 \times \frac{N}{AC} \frac{1}{Z(1+Z)} \times \left(\frac{N_c}{C^2} - \frac{N}{C^2 Z} \right) - \frac{4N^2}{A^2 C^2} \frac{1}{Z^2} = \\
& = \frac{4N^2}{A^2 C^2} \frac{1}{Z^2(1+Z)} \left(\frac{A}{C} \left(Z \frac{N_c}{N} - 1 \right) - (1+Z) \right) = \tag{66} \\
& = \frac{4N^2}{A^2 C^2} \frac{Z\eta - (Z^2 - 1) - (1+Z)}{Z^2(1+Z)} = \frac{4N^2}{A^2 C^2} \frac{\eta - (1+Z)}{Z(1+Z)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\Gamma &= \sqrt{\frac{\frac{4N^2}{A^2C^2} \frac{\eta-(1+Z)}{Z(1+Z)}}{\frac{2N^3}{A\Gamma^2C^3} \frac{\eta-(Z+3)}{Z(1+Z)^3}}} = \\
&= \sqrt{2} \frac{\Gamma}{\sqrt{N}} \times \sqrt{\frac{C}{A}} \sqrt{\frac{\eta-(Z+1)}{\eta-(Z+3)}} (1+Z). \quad (67)
\end{aligned}$$

Вычислим σ_C :

$$\begin{aligned}
4ab - p^2 &= \\
&= 4 \times \frac{N}{AC} \frac{1}{Z(1+Z)} \times \frac{N}{2\Gamma^2} \frac{A}{C} \frac{1+3Z}{(1+Z)^3} - \frac{4N^2}{\Gamma^2C^2} \frac{1}{(1+Z)^4} = \\
&= \frac{2N^2}{\Gamma^2C^2} \frac{1}{(1+Z)^3} \left(\frac{1}{Z} - \frac{2}{1+Z} \right) = \frac{2N^2}{\Gamma^2C^2} \frac{1}{Z(1+Z)^3}; \quad (68)
\end{aligned}$$

$$\sigma_C = \sqrt{\frac{\frac{2N^2}{\Gamma^2C^2} \frac{1}{Z(1+Z)^3}}{\frac{2N^3}{A\Gamma^2C^3} \frac{\eta-(Z+3)}{Z(1+Z)^3}}} = \frac{C}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{A}{C}} \sqrt{\frac{1}{\eta-(Z+3)}}. \quad (69)$$

Из последнего выражения видно, что σ_C формально имеет решение только при $\eta > Z + 3$. В противном случае фигура, задаваемая уравнением $\Delta W(\delta A, \delta \Gamma, \delta C) = 1$ не является эллипсоидом и значит функция $\Delta W(\delta A, \delta \Gamma, \delta C)$ не имеет минимум в точке $\delta A = \delta \Gamma = \delta C = 0$. Покажем что условия $\eta > Z + 3$ достаточно также и для существования решения для σ_A и σ_Γ :

$$\begin{aligned}
\sigma_A: \text{ при } \eta > Z + 3 \\
&Z(1+3Z)\eta - (1+Z)(3Z^2+6Z-1) > \\
&> Z(1+3Z)(Z+3) - (1+Z)(3Z^2+6Z-1) = \\
&= Z^2 - 2Z + 1 = (Z-1)^2 = \\
&= (\sqrt{1+A/C} - 1)^2 > 0 \text{ и значит} \\
\sigma_A &= \sqrt{3} \frac{A}{\sqrt{N}} \times \sqrt{\frac{C}{3A}} \sqrt{\frac{Z(1+3Z)\eta - (1+Z)(3Z^2+6Z-1)}{\eta-(Z+3)}} \\
&\text{имеет решение;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\Gamma: \text{ при } \eta > Z + 3 \\
&\eta - (Z+1) > Z + 3 - Z - 1 = 2 > 0 \\
&\text{и значит } \sigma_\Gamma = \sqrt{2} \frac{\Gamma}{\sqrt{N}} \times \sqrt{\frac{C}{A}} \sqrt{\frac{\eta-(Z+1)}{\eta-(Z+3)}} (1+Z) \\
&\text{имеет решение.}
\end{aligned}$$

Еще раз подчеркнем, что приведенное выше рассмотрение весьма формальное, т.к. принятое нами ограничение $\frac{\Delta E}{\Gamma/2} \gg Z$ практически гарантирует $\eta > Z + 3$. Более того, в рамках этого ограничения в формулах для статистических ошибок необходимо отбросить члены порядка Z/η , что приводит к выражениям для статистических ошибок:

$$\sigma_M = \frac{\Gamma}{\sqrt{2N}} \sqrt{\frac{C}{A}} \sqrt{\frac{(1+Z)^3}{3+Z}}, \quad (70)$$

$$\sigma_A = \frac{A}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{C}{A}} \sqrt{Z(1+3Z)}, \quad (71)$$

$$\sigma_\Gamma = \sqrt{2} \frac{\Gamma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{C}{A}} (1+Z), \quad (72)$$

$$\sigma_C = \frac{C}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{A}{C}} \frac{1}{\sqrt{\eta}} = \frac{C}{\sqrt{N_c}}. \quad (73)$$

Аналитические выражения можно получить, вообще говоря, для произвольного значения Z/η , не обязательно малого. Просто в этом случае вычисления и формулы будут более громоздкими из-за наличия выражений типа

$$\arctg \frac{E_{max} - M}{Z \cdot \Gamma/2} - \arctg \frac{M - E_{min}}{Z \cdot \Gamma/2},$$

см.(51). Еще на порядок более громоздкими будут вычисления если границы гистограммы (пределы интегрирования) несимметричны относительно точки $E = M$, так как в этом случае все четыре параметра коррелируют между собой.

6 Распределение Брейта-Вигнера в релятивистском случае

Для Брейт-Вигнеровской амплитуды a_e в релятивистском случае воспользуемся выражением (35.52) из [1] :

$$a_e = \frac{-m \Gamma_{el}}{s - m^2 + i m \Gamma_{tot}}. \quad (74)$$

Для случая, когда массы взаимодействующих частиц и ширина резонанса много меньше массы резонанса, сечение реакции с точностью до постоянного множителя равно квадрату амплитуды:

$$\sigma_{BW}(s) = A |a_e|^2 = A \frac{m^2 \Gamma^2}{(s - m^2)^2 + m^2 \Gamma^2}. \quad (75)$$

С помощью подстановки $X = m^2$, $Y = 2m\Gamma$, $S = AY = 2Am\Gamma$ это выражение можно свести к виду (37):

$$f(s) = A \frac{m^2 \Gamma^2}{(s - m^2)^2 + m^2 \Gamma^2} = \frac{S}{Y} \frac{Y^2/4}{(s - X)^2 + Y^2/4}. \quad (76)$$

Параметры X , Y и S , статистически независимы друг от друга и их статистические ошибки можно взять из (43):

$$\sigma_X = \frac{Y}{\sqrt{2N}}, \quad \sigma_Y = \sqrt{2} \frac{Y}{\sqrt{N}}, \quad \sigma_S = \frac{S}{\sqrt{N}}. \quad (77)$$

Выразив параметры m , Γ , A через X , Y , S , можно получить выражения для σ_m , σ_Γ , и σ_A :

$$m = \sqrt{X}, \quad \sigma(\sqrt{X}) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{X}} = \frac{1}{2} \frac{Y/\sqrt{2N}}{m} = \frac{1}{2} \frac{2m\Gamma}{\sqrt{2N}m} = \frac{\Gamma}{\sqrt{2N}},$$

$$\text{и значит} \quad \sigma_m = \frac{\Gamma}{\sqrt{2N}}, \quad (78)$$

$$\Gamma = \frac{Y}{2m} = \frac{Y}{2\sqrt{X}}, \quad \left(\frac{\sigma_\Gamma}{\Gamma}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_Y}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(\sqrt{X})}{\sqrt{X}}\right)^2 = \frac{2}{N} + \frac{\Gamma^2}{2Nm^2},$$

$$\text{и значит} \quad \sigma_\Gamma = \sqrt{2} \frac{\Gamma}{\sqrt{N}} \times \sqrt{1 + \frac{\Gamma^2}{4m^2}}, \quad (79)$$

$$A = \frac{S}{Y}, \quad \sigma_A = A \times \sqrt{\left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_Y}{Y}\right)^2} = \sqrt{3} \frac{A}{\sqrt{N}}. \quad (80)$$

Так как в рамках применимости формулы (76) $m \ll \Gamma/2$, то в $\sqrt{1 + \frac{\Gamma^2}{4m^2}}$ можно пренебречь членом $\frac{\Gamma^2}{4m^2}$ и тогда выражения (78)–(80) в точности совпадают с выражениями в (36).

7 Распределение $f(t) = N_0 e^{-t/\tau} [1 + A \cos(\omega t + \phi)]$ в эксперименте по измерению $g-2$ мюона

Прежде чем перейти к анализу приведенного выше распределения, коротко опишем проводящийся в настоящее время в Брукхейвенской Национальной Лаборатории (BNL) США эксперимент по измерению величины $g-2$ мюона. Принцип эксперимента основан на прецессии спина мюона в постоянном магнитном поле накопительного кольца. В постоянном магнитном поле B спин мюона прецессирует с частотой ω_s , которая больше чем его орбитальная циклотронная частота ω_c на величину ω_a :

$$\omega_a = \omega_s - \omega_c = \left[g \frac{eB}{2mc} + (1 - \gamma) \frac{eB}{\gamma mc} \right] - \frac{eB}{\gamma mc} = \frac{g-2}{2} \frac{eB}{mc} = a_\mu \frac{eB}{mc}. \quad (81)$$

Мюоны распадаются с образованием электронов, которые регистрируются детекторами, расположенными с внутренней стороны накопительного кольца. $g-2$ частота ω_a проявляется в виде синусоидальной модуляции временного распределения распадных электронов, см. рис. 2. Как следует из формулы (81), прецизионное измерение величины $g-2$ (или $a_\mu = \frac{g-2}{2}$) требует точного определения двух величин: частоты ω_a и магнитного поля B . Целью эксперимента BNL является измерение $g-2$ мюона с относительной точностью порядка $3.5 \cdot 10^{-7}$. Более подробно об этом эксперименте можно узнать, например, из работы [3] и других публикаций, упомянутых в этой работе.

7.1 Статистические ошибки параметров подгонки распределения $f(t) = N_0 e^{-t/\tau} [1 + A \cos(\omega t + \phi)]$

Частота ω_a находится из подгонки временного спектра распадных электронов функцией

$$f(t) = N_0 e^{-t/\tau} [1 + A \cos(\omega t + \phi)], \quad (82)$$

которую мы для краткости будем называть функцией $g-2$. Параметрами этой функции являются: время жизни мюона в лабораторной системе $\tau \approx 64.4$ мксек, частота $\omega \approx 2\pi/(4.37$ мксек), фаза

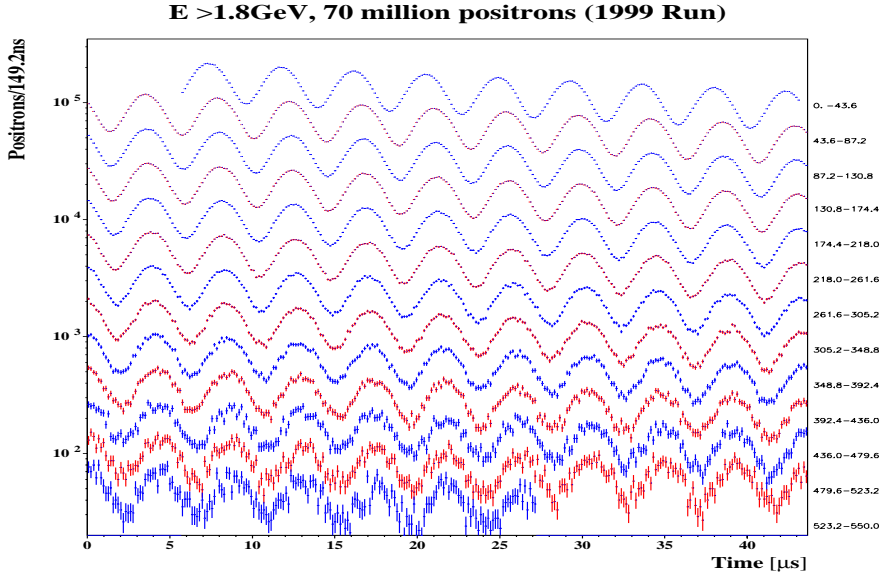


Рис. 2: Распределение распадных электронов по времени. Справа указаны интервалы времени в мксек для каждого фрагмента распределения.

ϕ и амплитуда A $g-2$ осцилляций, а также нормировочный множитель N_o . Для определения статистических ошибок параметров функции (82) найдем соответствующие производные:

$$\frac{\partial f}{\partial N_o} = e^{-t/\tau} [1 + A \cos(\omega t + \phi)] , \quad (83)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = N_o e^{-t/\tau} \frac{t}{\tau^2} [1 + A \cos(\omega t + \phi)] , \quad (84)$$

$$\frac{\partial f}{\partial A} = N_o e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi) , \quad (85)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = -N_o e^{-t/\tau} A t \sin(\omega t + \phi) , \quad (86)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = -N_o e^{-t/\tau} A \sin(\omega t + \phi) . \quad (87)$$

В данном эксперименте период $g-2$ осцилляций мал по сравнению со временем жизни мюона τ : $(\omega\tau)^{-1} \approx 0.01$. Поэтому для упрощения вычислений ΔW мы будем высреднять $g-2$ осцилляции, что приводит к занулению всех перекрестных членов за исключением

$$\begin{aligned}
\Delta W_{N_o \tau} &= \int_T^\infty \frac{dt}{bin} \frac{2 \left(\frac{\partial f}{\partial N_o} \delta N_o \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \delta \tau \right)}{f(t)} = \\
&= \frac{2 (\delta N_o) (\delta \tau)}{bin} \int_T^\infty e^{-t/\tau} \frac{t}{\tau} [1 + A \cos(\omega t + \phi)] dt \approx \\
&\approx \frac{2 (\delta N_o) (\delta \tau)}{bin} \int_T^\infty e^{-t/\tau} \frac{t}{\tau^2} dt = \\
&= \frac{2 e^{-T/\tau} (T + \tau)}{bin \tau} (\delta N_o) (\delta \tau) \quad \text{и} \tag{88}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta W_{\omega \phi} &= \int_T^\infty \frac{dt}{bin} \frac{2 \left(\frac{\partial f}{\partial \omega} \delta \omega \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \delta \phi \right)}{f(t)} = \\
&= \frac{2 (\delta \omega) (\delta \phi)}{bin} \int_T^\infty N_o e^{-t/\tau} A^2 t \frac{\sin^2(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt \approx \\
&\approx \frac{2 (\delta \omega) (\delta \phi)}{bin} \int_T^\infty N_o e^{-t/\tau} A^2 t \frac{1}{2} dt = \\
&= \frac{N_o A^2 e^{-T/\tau} \tau (T + \tau)}{bin} (\delta \omega) (\delta \phi) . \tag{89}
\end{aligned}$$

Используем выражение для полного числа событий в гистограмме N (не путать с параметром N_o):

$$\begin{aligned}
N &= \int_T^\infty \frac{dt}{bin} f(t) = \frac{N_o}{bin} \int_T^\infty e^{-t/\tau} [1 + A \cos(\omega t + \phi)] dt \approx \\
&\approx \frac{N_o}{bin} \int_T^\infty e^{-t/\tau} dt = \frac{N_o e^{-T/\tau} \tau}{bin} , \tag{90}
\end{aligned}$$

тогда

$$\Delta W_{N_o \tau} = 2 N \frac{T + \tau}{N_o \tau^2} (\delta N_o) (\delta \tau) \tag{91}$$

$$\Delta W_{\omega \phi} = N A^2 (T + \tau) (\delta \omega) (\delta \phi) . \tag{92}$$

Аналогично найдем остальные слагаемые ΔW :

$$\begin{aligned}\Delta W_{N_o} &= \frac{(\delta N_o)^2}{bin} \int_T^\infty \frac{1}{N_o} e^{-t/\tau} [1 + A \cos(\omega t + \phi)] dt \approx \\ &\approx \frac{\tau e^{-T/\tau}}{bin N_o} (\delta N_o)^2 = \frac{N}{N_o^2} (\delta N_o)^2 ,\end{aligned}\quad (93)$$

$$\begin{aligned}\Delta W_\tau &= \frac{(\delta \tau)^2}{bin} \int_T^\infty N_o e^{-t/\tau} \frac{t^2}{\tau^4} [1 + A \cos(\omega t + \phi)] dt \approx \\ &\approx \frac{N_o e^{-T/\tau}}{bin \tau^3} (T^2 + 2T\tau + 2\tau^2) (\delta \tau)^2 = \\ &= \frac{N}{\tau^4} (T^2 + 2T\tau + 2\tau^2) (\delta \tau)^2 ,\end{aligned}\quad (94)$$

$$\begin{aligned}\Delta W_A &= \frac{(\delta A)^2}{bin} \int_T^\infty N_o e^{-t/\tau} \frac{\cos^2(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt \approx \\ &\approx \frac{N_o e^{-T/\tau} \tau}{2 bin} (\delta A)^2 = \frac{N}{2} (\delta A)^2 ,\end{aligned}\quad (95)$$

$$\begin{aligned}\Delta W_\omega &= \frac{(\delta \omega)^2}{bin} \int_T^\infty N_o e^{-t/\tau} A^2 t^2 \frac{\sin^2(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt \approx \\ &\approx \frac{N_o e^{-T/\tau} \tau A^2}{2 bin} (T^2 + 2T\tau + 2\tau^2) (\delta \omega)^2 = \\ &= \frac{N A^2}{2} (T^2 + 2T\tau + 2\tau^2) (\delta \omega)^2 ,\end{aligned}\quad (96)$$

$$\begin{aligned}\Delta W_\phi &= \frac{(\delta \phi)^2}{bin} \int_T^\infty N_o e^{-t/\tau} A^2 \frac{\sin^2(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt \approx \\ &\approx \frac{N_o e^{-T/\tau} \tau A^2}{2 bin} (\delta \phi)^2 = \frac{N A^2}{2} (\delta \phi)^2 ,\end{aligned}\quad (97)$$

Параметр A не коррелирует с другими параметрами и его статистическая ошибка находится тривиально:

$$\sigma_A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} .\quad (98)$$

Статистические ошибки ω и ϕ найдем из уравнения

$$\Delta W = \frac{N A^2}{2} (T^2 + 2T\tau + 2\tau^2) (\delta \omega)^2 +$$

$$+N A^2 (T + \tau) (\delta\omega)(\delta\phi) + \frac{N A^2}{2} (\delta\phi)^2 = 1 \quad (99)$$

по формулам (3), (4):

$$\begin{aligned} \sigma_\omega^{-2} &= \frac{N A^2}{2} (T^2 + 2T\tau + 2\tau^2) - \frac{[N A^2 (T + \tau)]^2}{4 \frac{N A^2}{2}} = \\ &= \frac{N A^2}{2} (T^2 + 2T\tau + 2\tau^2 - T^2 - 2T\tau - \tau^2) = \\ &= \frac{N A^2 \tau^2}{2} \quad \text{и} \quad \sigma_\omega = \frac{\sqrt{2}}{\tau A \sqrt{N}}, \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\phi^{-2} &= \frac{N A^2}{2} - \frac{[N A^2 (T + \tau)]^2}{4 \frac{N A^2}{2} (T^2 + 2T\tau + 2\tau^2)} = \\ &= \frac{N A^2}{2} \frac{T^2 + 2T\tau + 2\tau^2 - T^2 - 2T\tau - \tau^2}{T^2 + 2T\tau + 2\tau^2} = \\ &= \frac{N A^2 \tau^2}{2 (T^2 + 2T\tau + 2\tau^2)} \quad \text{и} \quad \sigma_\phi = \frac{\sqrt{2}}{\tau A \sqrt{N}} \sqrt{T^2 + 2T\tau + 2\tau^2}. \end{aligned} \quad (101)$$

Аналогично получаются ошибки для N_o и τ :

$$\sigma_{N_o} = \frac{N_o}{\tau \sqrt{N}} \sqrt{T^2 + 2T\tau + 2\tau^2}, \quad (102)$$

$$\sigma_\tau = \frac{\tau}{\sqrt{N}}. \quad (103)$$

7.2 $\omega - \phi$ корреляции и статистическая ошибка σ_ω в случае фиксирования (абсолютного знания) фазы ϕ

Отметим любопытную особенность: ошибки параметров ϕ и N_o зависят от значения T — времени начала гистограммы и, следовательно, от выбора точки начала отсчета времени. Это можно объяснить следующим образом. Запись функции $f(t)$ в виде (82) означает, что фаза ϕ определена как значение ТЕКУЩЕЙ фазы в точке $t = 0$, т.е. в точке начала отсчета времени. Точно так же нормировочный множитель N_o определен как значение функции $f(t)$

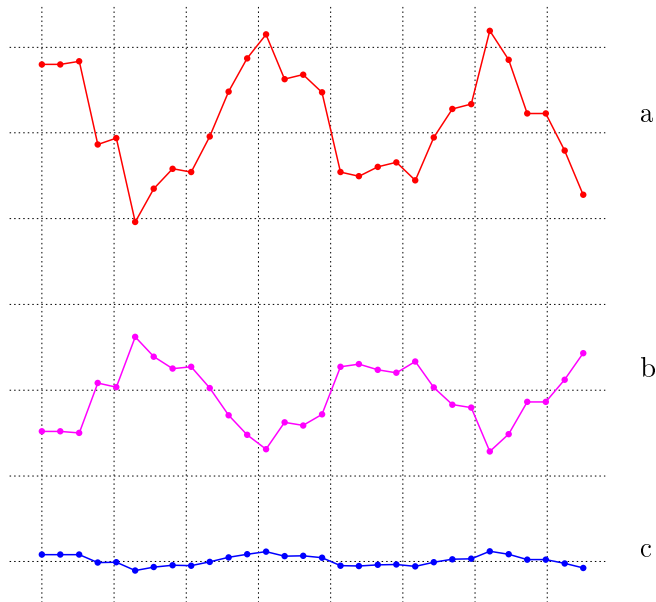


Рис. 3:

в точке $t = 0$. Неудивительно поэтому, что точность этих параметров ухудшается, если точка начала гистограммы отстоит от точки $t = 0$ на большой промежуток времени, так что $T \gg \tau$ в формулах (101) и (102). Мы как бы экстраполируем данные из некоторой области в удаленную точку.

Еще более интересная особенность состоит в том, что при выборе начала отсчета времени в точке, отстоящей от времени начала гистограммы на τ (так что T становится равным $-\tau$), перекрестные члены (91) и (92) зануляются и, следовательно, корреляции между параметрами ω и ϕ и между τ и N_0 исчезают и все 5 параметров функции (82) становятся статистически независимыми. Для корреляции частоты и фазы этот факт был проверен и подтвержден “экспериментально”. На Рис. 3 показаны результаты подгонки распределения (82) для частоты и фазы для 30 различных групп событий (гистограмм). На Рис. 3 *a* и *b* приведены результаты для частоты (*a*) и фазы (*b*) для “стандартного” случая, когда время начала набора статистики (начало гистограмм) T отстоит от

момента инъекции мюонов, принятого за начало отсчета, на ~ 60 мксек, т.е. $T \approx 60$ мксек. Корреляция фазы с частотой очевидна. Затем подгонку повторили, но во всех тридцати гистограммах сделали замену переменной $t \rightarrow t - \Delta t$, $\Delta t \approx T + \tau$, что эквивалентно смещению точки начала отсчета примерно на τ ПОСЛЕ начала гистограмм. На Рис. 3 с показан результат для фазы для этого случая. Результат для частоты при этом не изменился и остался таким же как на Рис. 3 а. Видно что корреляция фазы с частотой оказалась сильно подавленной, хотя и не до конца. Интересно отметить что знак корреляции сменился. По-видимому, начало отсчета оказалось смещенным несколько больше оптимального.

Помимо чисто академического интереса, вопросы корреляции параметров подгонки имеют немаловажное практическое значение для эксперимента $g-2$ в BNL. В этом эксперименте пучок поляризованных мюонов инжектируется в накопительное кольцо и в момент инъекции вектор поляризации мюонов направлен по направлению их движения. В постоянном вертикальном магнитном поле кольца вектор поляризации начинает прецессировать (вращаться) в горизонтальной плоскости относительно импульса с частотой $g-2$ (81). При инъекции пучка только малая часть мюонов ($\sim 7\%$) захватывается на стационарные орбиты. Остальные мюоны, а также пионы и другие частицы, составляющие небольшую примесь в пучке, попадают на стенки вакуумной камеры и выбывают из пучка за время первого оборота. Ливни вторичных частиц вызывают гигантскую вспышку загрузки в детекторах, способную на долгое время “ослепить” регистрирующую аппаратуру. Поэтому в эксперименте предусмотрено кратковременное отключение всех ФЭУ на время инъекции.

На гистограммах временного распределения распадных электронов представляется “естественным” выбрать за начало отсчета момент инъекции мюонного пучка. Набор данных начинается по мере включения ФЭУ. Время включения разное для разных детекторов и зависит от их удаленности от места инъекции. Раньше других включаются наиболее удаленные детекторы, примерно 5–10 мксек после инъекции, см. Рис. 2.

Выбор момента инъекции за начало отсчета является удобным еще и потому, что фаза $g-2$ осцилляций в этот момент известна и равна 0, так как спин мюонов в этот момент направлен по импульсу. Поскольку частота и фаза вообще говоря коррелируют, знание фазы можно использовать для улучшения статистической точности определения частоты. Для случая точного знания фазы в формуле (99) нужно положить $\delta\phi = 0$ и тогда получается

$$\sigma_\omega = \frac{\sqrt{2}}{A\sqrt{N}\sqrt{T^2 + 2T\tau + 2\tau^2}} = \frac{\sqrt{2}}{A\sqrt{N}\sqrt{(T+\tau)^2 + \tau^2}}, \quad (104)$$

что в $\sqrt{(T/\tau + 1)^2 + 1}$ раз меньше, чем в (100). Если бы набор статистики начинался сразу с момента инъекции ($T = 0$), то это улучшение было бы в $\sqrt{2} = 1.41$ раз, для задержки в 10 мксек в $\sqrt{2.33} = 1.53$ раз, для задержки в 64.4 мксек ($T = \tau$) в $\sqrt{5} = 2.24$ раз и т.д. Для гипотетического случая, когда начало набора статистики ПРЕДШЕСТВУЕТ “моменту инъекции” (моменту, когда фаза известна) на время $\tau = 64.4$ мксек, T равно $-\tau$ и улучшения статистической точности определения частоты не происходит. Это является следствием того что, как было показано выше, при $T = -\tau$ корреляция между частотой и фазой исчезает и эти параметры становятся НЕЗАВИСИМЫМИ друг от друга.

7.3 Статистическая ошибка σ_ω в случае ограниченного знания фазы ϕ

На практике, вообще говоря, любая величина может быть известна с ограниченной точностью. Для фазы $g-2$ осцилляций источником неточностей могут быть временные задержки кабельных линий, конечная длина мюонного пучка, разность времени между распадом мюона и регистрацией электрона, временные задержки в системе регистрации и т.д.

Пусть фаза $g-2$ колебаний известна в момент инъекции с точностью σ_F . Вычислим σ_ω для этого случая. Для этого в уравнение (99) нужно добавить $(\delta\phi)^2/\sigma_F^2$:

$$\Delta W = \frac{N A^2}{2} (T^2 + 2T\tau + 2\tau^2)(\delta\omega)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +N A^2 (T + \tau) (\delta\omega)(\delta\phi) + \frac{N A^2}{2} (\delta\phi)^2 + \frac{(\delta\phi)^2}{\sigma_F^2} = \\
= & \frac{T^2 + 2T\tau + 2\tau^2}{\tau^2\sigma_{\omega_0}^2} (\delta\omega)^2 + 2 \frac{T + \tau}{\tau^2\sigma_{\omega_0}^2} (\delta\omega)(\delta\phi) + \\
& + \left[\frac{1}{\tau^2\sigma_{\omega_0}^2} + \frac{1}{\sigma_F^2} \right] (\delta\phi)^2 = 1, \tag{105}
\end{aligned}$$

где $\sigma_{\omega_0} = \frac{2}{\tau A \sqrt{N}}$. Отсюда найдем σ_ω :

$$\begin{aligned}
\sigma_\omega^{-2} & = \frac{T^2 + 2T\tau + 2\tau^2}{\tau^2\sigma_{\omega_0}^2} - \frac{\left(2 \frac{T+\tau}{\tau^2\sigma_{\omega_0}^2}\right)^2}{4 \left(\frac{1}{\tau^2\sigma_{\omega_0}^2} + \frac{1}{\sigma_F^2}\right)} = \\
& = \sigma_{\omega_0}^{-2} \left[1 + \frac{\sigma_F^{-2}}{(\tau\sigma_{\omega_0})^{-2} + \sigma_F^{-2}} \frac{(T + \tau)^2}{\tau^2} \right] \tag{106}
\end{aligned}$$

Если фаза известна в произвольный момент времени T' , то вместо $(\delta\phi)^2/\sigma_F^2$ в уравнение (99) нужно добавить $[\delta(\omega T' + \phi)]^2/\sigma_F^2 = \sigma_F^{-2}[T'^2(\delta\omega)^2 + 2T'(\delta\omega)(\delta\phi) + (\delta\phi)^2]$. В этом случае для σ_ω^{-2} получается:

$$\sigma_\omega^{-2} = \sigma_{\omega_0}^{-2} \left[1 + \frac{\sigma_F^{-2}}{(\tau\sigma_{\omega_0})^{-2} + \sigma_F^{-2}} \frac{(T + \tau - T')^2}{\tau^2} \right]. \tag{107}$$

Последнее выражение зависит только от РАЗНОСТИ $(T - T')$ и поэтому не зависит от выбора точки начала отсчета времени, как и следовало ожидать.

7.4 Систематический сдвиг параметров подгонки при наличии малого фона

Описанные в данной работе методы статистического анализа могут использоваться, в частности, для оценки систематических ошибок определения подгоночных параметров из-за наличия малого фона. Мы рассмотрим эту задачу на примере все того же распределения $g-2$ (82).

Пусть имеется распределение событий, описываемое функцией с 5 параметрами $f(t)$, приведенной в (82). Пусть к этому распределению добавляется некоторое малое количество фона, описываемое функцией $h(t)$. Количество этого фона мало чтобы заметить его “глазом”, однако его наличие приводит к систематическому сдвигу параметров, получаемых подгонкой суммарного распределения функцией (82):

$$\begin{aligned}\vec{X}' &= (N'_o, \tau', A', \omega', \phi') \rightarrow \vec{X}' + \delta\vec{X} = \\ &= (N'_o + \delta N_o, \tau' + \delta\tau, A' + \delta A, \omega' + \delta\omega, \phi' + \delta\phi), \quad (108)\end{aligned}$$

где $\vec{X}' = (N'_o, \tau', A', \omega', \phi')$ – “истинные” параметры распределения $g-2$, т.е. параметры подгонки в случае отсутствия фона.

Задача нахождения систематических сдвигов параметров решается методом минимизации χ^2 , т.е. функции $W(N_o, \tau, A, \omega, \phi)$ в наших обозначениях. Для нахождения минимума $W(N_o, \tau, A, \omega, \phi)$ вопросы корреляции не имеют значения, т.к. задача ограничивается вычислением первых производных. Однако, для упрощения вычислений мы выберем за начало отсчета времени точку, отстоящую от начала гистограммы на τ , так что $T = -\tau$ и корреляции между параметрами отсутствуют.

Обозначим число событий в i -м канале гистограммы n_i . Отметим, что, с точностью до статистических флуктуаций, $n_i = f_{\vec{X}'}(t_i) + h(t_i)$. Систематический сдвиг частоты $g-2$ осцилляций $\delta\omega$ найдем из условия минимума χ^2 , $\partial W/\partial\omega = 0$:

$$\frac{\partial W}{\partial\omega} = \frac{\partial}{\partial\omega} \sum_i \frac{(f(t_i) - n_i)^2}{\sigma_i^2} = 2 \sum_i \frac{(f(t_i) - n_i)}{n_i} \frac{\partial f}{\partial\omega} = 0, \quad (109)$$

где мы использовали $\sigma_i^2 = n_i$. Далее воспользуемся разложением

$$\begin{aligned}f(t_i) - n_i &= f(t_i) - [f_{\vec{X}'}(t_i) + h(t_i)] = \delta f - h = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial N_o} \delta N_o + \frac{\partial f}{\partial \tau} \delta \tau + \frac{\partial f}{\partial A} \delta A + \frac{\partial f}{\partial \omega} \delta \omega + \frac{\partial f}{\partial \phi} \delta \phi \right] - h.\end{aligned} \quad (110)$$

Все слагаемые этого выражения имеют первый порядок малости по h . Мы не будем учитывать поправки второго порядка по h , поэтому в знаменателе (109) $n = f + h$ опустим h : $n \approx f = N_o^{-t/\tau} [1 +$

$A \cos(\omega t + \phi)$]. Наконец, воспользуемся уравнениями (83)–(87) для производных, перейдем от суммирования к интегрированию и отбросим постоянные общие множители. В результате получим:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta N_o \int_{-\tau}^{\infty} e^{-t/\tau} A t \sin(\omega t + \phi) dt \\
&+ \delta \tau \int_{-\tau}^{\infty} \frac{N_o}{\tau^2} e^{-t/\tau} A t^2 \sin(\omega t + \phi) dt \\
&+ \delta A \int_{-\tau}^{\infty} \frac{N_o e^{-t/\tau} A t \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt \\
&- \delta \phi \int_{-\tau}^{\infty} \frac{N_o e^{-t/\tau} A^2 t \sin^2(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt \\
&- \delta \omega \int_{-\tau}^{\infty} \frac{N_o e^{-t/\tau} A^2 t^2 \sin^2(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt \\
&- \int_{-\tau}^{\infty} \frac{h(t) A t \sin^2(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt . \tag{111}
\end{aligned}$$

Первые три слагаемых в правой части уравнения (111) зануляются вследствие высреднения $g-2$ осцилляций, слагаемое с $\delta \phi$ зануляется из-за удачного выбора точки начала отсчета времени: $\int_{-\tau}^{\infty} e^{-t/\tau} t dt = e^{-t/\tau} (-t\tau - \tau^2) \Big|_{-\tau}^{\infty} = 0$. Оставшиеся слагаемые приводят к выражению для смещения частоты:

$$\delta \omega = - \frac{2}{e N_o A \tau^3} \int_{-\tau}^{\infty} \frac{t h(t) \sin(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt , \tag{112}$$

здесь мы использовали

$$\begin{aligned}
&\int_{-\tau}^{\infty} \frac{e^{-t/\tau} t^2 \sin^2(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt \approx \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-t/\tau} t^2 dt = \\
&= \frac{1}{2} e^{-t/\tau} (-t^2 \tau - 2t\tau^2 - 2\tau^3) \Big|_{-\tau}^{\infty} = \frac{1}{2} e\tau^3 .
\end{aligned}$$

Смещения остальных параметров находятся аналогично, результаты приведены ниже:

$$\delta N_o = \frac{1}{e\tau} \int_{-\tau}^{\infty} h(t) dt , \tag{113}$$

$$\delta\tau = \frac{1}{e N_o \tau} \int_{-\tau}^{\infty} t h(t) dt, \quad (114)$$

$$\delta A = \frac{2}{e N_o \tau} \int_{-\tau}^{\infty} \frac{h(t) \cos(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt, \quad (115)$$

$$\delta\phi = -\frac{2}{e N_o A \tau} \int_{-\tau}^{\infty} \frac{h(t) \sin(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt. \quad (116)$$

Формулы (112), (115) и (116) имеют некоторые ограничения применимости, которые мы обсудим в разделе 7.6. Там же мы приведем более общее выражение для $\delta\omega$. А пока рассмотрим некоторые примеры применения формулы (112).

7.5 Некоторые приложения формулы (112)

В свое время среди участников $g-2$ эксперимента обсуждалась следующая ситуация. Допустим что в результате наводки или по иным причинам в один из каналов гистограммы попали лишние (ложные) события. Пусть число их мало и на гистограмме на уровне статистических флуктуаций вклад их не заметен. Однако для такого прецизионного эксперимента как $g-2$ не исключено, что систематический сдвиг частоты тем не менее окажется неприемлемо большим. Формула (112) позволяет оценить систематическую ошибку для такого случая.

Пусть примесь “лишних” событий в некотором канале гистограммы составляет величину, равную одному стандартному отклонению для этого канала. Если данный канал соответствует времени t , то число “нормальных” событий в нем составляет $n(t) = N_o e^{-t/\tau} [1 + A \cos(\omega t + \phi)]$ и следовательно $h(t) = \sqrt{n(t)}$. Тогда по формуле (112) найдем сдвиг частоты:

$$\begin{aligned} \delta\omega &= -\frac{2}{e N_o A \tau^3} \left[\frac{t \sqrt{N_o e^{-t/\tau} (1 + A \cos(\omega t + \phi))} \sin(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} bin \right] = \\ &= -\frac{2 bin t}{e A \tau^3} \sqrt{\frac{e^{-t/\tau}}{N_o (1 + A \cos(\omega t + \phi))}} \sin(\omega t + \phi) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2te^{-t/2\tau} \sin(\omega t + \phi)}{A\tau^2} \sqrt{\frac{bin}{Ne\tau(1+A\cos(\omega t + \phi))}} = \\
&= -\sigma_\omega \left(\frac{t}{\tau} e^{-t/2\tau} \sin(\omega t + \phi) \sqrt{\frac{2bin}{e\tau(1+A\cos(\omega t + \phi))}} \right). \quad (117)
\end{aligned}$$

График функции $\frac{t}{\tau} e^{-t/2\tau} \sqrt{\frac{2bin}{e\tau}}$ (амплитуда колебаний $\frac{-\sin(\omega t + \phi)}{\sqrt{1+A\cos(\omega t + \phi)}}$ в формуле (117)) приведен на Рис. 4.

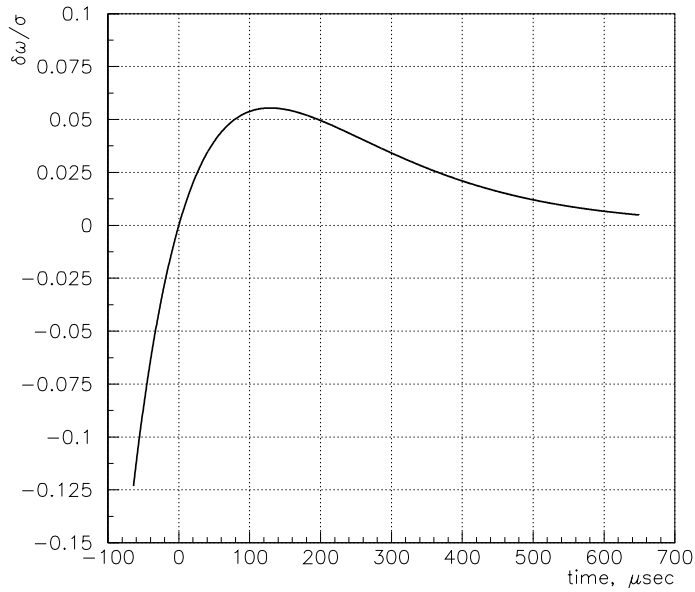


Рис. 4: Амплитуда $\delta\omega/\sigma_\omega$ для ширины канала $bin=0.5$ мксек.

Рассмотрим другой пример использования формулы (112). В эксперименте $g-2$ в некоторых заходах в целях калибровки на детекторы подается лазерный импульс, неотличимый по амплитуде и форме от импульсов от распадных электронов. Единственная особенность, по которой можно выделить лазерные импульсы, — это то, что они подаются в строго фиксированное время и проявляются

в виде мощных узких пиков на фоне плавного распределения $g-2$ по формуле (82). Для калибровки эти пики выделяются (вырезаются) и используются для изучения регистрирующей аппаратуры. Возникает вопрос: можно ли использовать оставшуюся часть гистограммы для определения частоты $g-2$ и других параметров.

Формула (112) позволяет оценить систематический сдвиг частоты из-за наличия узкой дыры, остающейся на гистограмме после вырезания лазерного пика. Отсутствие событий в узкой дыре шириной Δt , много меньшей чем период $g-2$ осцилляций, эквивалентно наличию “отрицательного” фона $h(t) = -N_0 e^{-t/\tau} [1 + A \cos(\omega t + \phi)]$ в этом интервале. Сдвиг частоты $\delta\omega(hole)$ можно оценить по формуле (112):

$$\begin{aligned} \delta\omega(hole) &= \\ &= -\frac{2}{eN_0 A \tau^3} \left(\frac{t [-N_0 e^{-t/\tau} (1 + A \cos(\omega t + \phi))] \sin(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} \Delta t \right) = \\ &= \frac{2t \Delta t}{e A \tau^3} e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \phi), \end{aligned} \quad (118)$$

где t – центр вырезанного интервала. График функции $\frac{2t \Delta t}{e A \tau^3} e^{-t/\tau}$ (амплитуда колебаний $\sin(\omega t + \phi)$ в формуле (118)) показан на Рис. 5. Еще раз обратим внимание на то что точка начала отсчета времени выбрана нами на 64.4 мксек ($= \tau$) после начала гистограммы, поэтому графики на Рис. 4 и 5 начинаются с -64.4 мксек.

7.6 Формула для δ_ω для гладкой функции $h(t)$

Оба рассмотренные нами примера имеют одну общую особенность: в обоих случаях функция $h(t)$ не является “гладкой” в масштабе времени порядка периода $g-2$ колебаний. В случае же гладкой функции мы не можем, вообще говоря, воспользоваться формулой (112), так как при ее выводе мы “высредняли” $g-2$ осцилляции, т.е. отбрасывали члены порядка $\int_{-\tau}^{\infty} e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \phi) \frac{dt}{\tau} \sim (\tau\omega)^{-1} = 0.01$, между тем как в правой части (112) содержится выражение такого же порядка малости. Это же относится и к формулам (115) и (116).

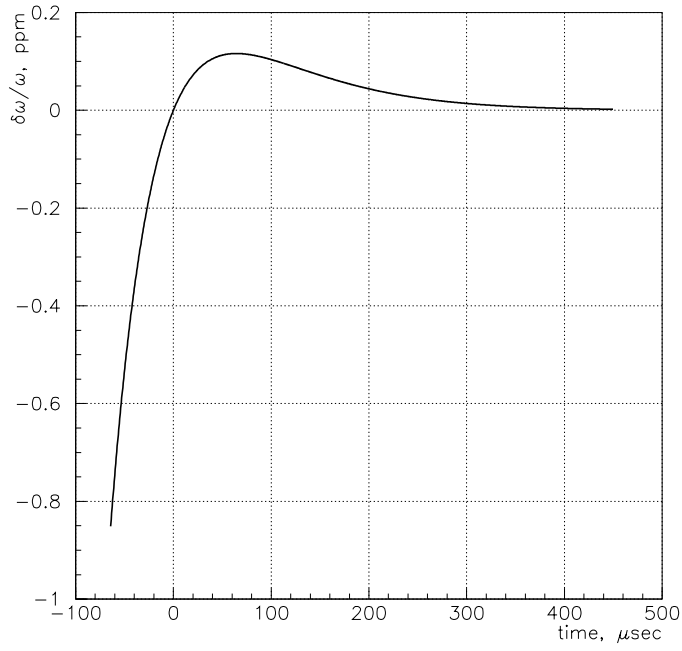


Рис. 5: Амплитуда $\delta\omega(hole)/\omega$ в зависимости от положения дыры для $\Delta t = 1$ нсек.

Вывод формулы для сдвига частоты $g-2$ в более общем случае приведен в Приложении III. Здесь же мы приведем лишь окончательный результат:

$$\begin{aligned}
 \delta\omega &= \frac{2}{N_o A e^2 \tau^4} \int_{-\tau}^{\infty} h(t) dt \int_{-\tau}^{\infty} t e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \phi) dt \\
 &+ \frac{2}{N_o A e^2 \tau^6} \int_{-\tau}^{\infty} t h(t) dt \int_{-\tau}^{\infty} t^2 e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \phi) dt \\
 &- \frac{2}{N_o A e \tau^3} \int_{-\tau}^{\infty} \frac{t h(t) \sin(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt. \quad (119)
 \end{aligned}$$

8 Заключение

В данной работе описан общий метод нахождения аналитических формул для статистических ошибок параметров подгонки экспериментальных распределений (гистограмм), а также формул для систематических сдвигов параметров подгонки при наличии малого фона. В рамках этого метода получен ряд формул для распределений Гаусса, Брейта-Вигнера, распределения $f(t) = N_0 e^{-t/\tau} [1 + A \cos(\omega t + \phi)]$ для эксперимента $g-2$ в BNL, изучены вопросы корреляции и фиксирования параметров.

При выводе формул существенными моментами, которые могут служить исходными точками для возможных обобщений, являются:

- объектом фитирования является гистограмма n_i с вариацией в каждом канале $\sigma_i^2 = n_i$. В более общем случае объектом может быть эквидистантный набор точек $y(x_i)$ с произвольной зависимостью σ_i от $y(x_i)$, например $\sigma_i = y(x_i)$ или $\sigma_i = const$.
- переход от суммирования к интегрированию. Это позволяет получить аналитические выражения или по крайней мере упростить их вывод. Этот переход возможен, если число каналов достаточно велико. Если это не так и/или объектом фитирования является неэквидистантный набор точек, то можно попытаться вывести аналитические соотношения непосредственно из суммирования.

В заключение автор выражает свою искреннюю признательность руководителю эксперимента $g-2$, профессору Йельского Университета В. Хьюзу (V.W.Hughes) и заведующему лабораторией 2 Института Ядерной Физики им. Г.И.Будкера СО РАН Б.И. Хазину за их поддержку и интерес к данной работе.

Приложение I

Вычисление интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi} \sigma,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi} \sigma^3,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 3\sqrt{2\pi} \sigma^5,$$

$$\int \frac{dx}{b^2 + x^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{b^2 + x^2} = \frac{\pi}{b},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(b^2 + x^2)^2} = -\frac{x}{2(b^2 + x^2)} + \frac{1}{2b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(b^2 + x^2)^2} = \frac{\pi}{2b},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(b^2 + x^2)^3} = -\frac{x}{4(b^2 + x^2)^2} + \frac{x}{8b^2(b^2 + x^2)} + \frac{1}{8b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(b^2 + x^2)^3} = \frac{\pi}{8b^3},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{(b^2 + x^2)^3} = \frac{b^2 x}{4(b^2 + x^2)^2} - \frac{5x}{8(b^2 + x^2)} + \frac{3}{8b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 dx}{(b^2 + x^2)^3} = \frac{3\pi}{8b},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)} = \frac{\pi}{b^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right),$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2 (b^2 + x^2)} &= -\frac{1}{2a} \frac{d}{da} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2ab^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+b)^2} \right), \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^3 (b^2 + x^2)} = -\frac{1}{4a} \frac{d}{da} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2 (b^2 + x^2)} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{8a^3b^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+b)^2} \right) + \frac{\pi}{8a^2b^2} \left(\frac{2}{a^3} - \frac{2}{(a+b)^3} \right) = \\
&= \frac{\pi}{8a^2b^2} \left(\frac{3}{a^3} - \frac{1}{a(a+b)^2} - \frac{2}{(a+b)^3} \right) = \\
&= \frac{\pi}{8a^2b^2} \frac{3(a+b)^3 - a^2(a+b) - 2a^3}{a^3(a+b)^3} = \frac{\pi}{8a^2b} \frac{8a^2 + 9ab + 3b^2}{a^3(a+b)^3}, \\
\int e^{-t/\tau} dt &= -\tau e^{-t/\tau}, \\
\int t e^{-t/\tau} dt &= e^{-t/\tau} (-t\tau - \tau^2), \\
\int t^2 e^{-t/\tau} dt &= e^{-t/\tau} (-t^2\tau - 2t\tau^2 - 2\tau^3).
\end{aligned}$$

Все встречающиеся в тексте интегралы могут быть сведены к перечисленным выше. Например:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3 (Z^2+x^2)} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x^2) - 1}{(1+x^2)^3 (Z^2+x^2)} dx = \\
&= \frac{\pi}{2Z^2} \left(1 - \frac{1}{(1+Z)^2} \right) - \frac{\pi}{8Z} \frac{8+9Z+3Z^2}{(1+Z)^3} = \frac{\pi}{8} \frac{3+Z}{(1+Z)^3}
\end{aligned}$$

Приложение II

Статистические ошибки для случая трех коррелирующих между собой параметров

Пусть функция $\chi^2 \equiv W(x, y, z)$ для случая трех коррелирующих между собой параметров имеет минимум в точке $x = y = z = 0$. Тогда вблизи минимума

$$W(x, y, z) = W(0, 0, 0) + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Pxy + Qxz + Ryz. \quad (120)$$

Условие $\Delta W = 1$ задает эллипсоид ошибок в пространстве $x-y-z$. Ошибка, к примеру, параметра x в данном случае определяется

как максимальная координата x этого эллипсоида. Попробуем выразить σ_x через коэффициенты A, B, C, P, Q, R . Заметим, что сечение эллипсоида ошибок плоскостью $x = 0$ дает эллипс $By^2 + Cz^2 + Ryz = 1$. Если немного сдвинуть эту плоскость ($x = const$), то в сечении снова будет эллипс, но, вообще говоря, со сдвинутым центром и меньшего размера: $B(y-y_0)^2 + C(z-z_0)^2 + R(y-y_0)(z-z_0) = \rho^2$, $\rho < 1$. Выразим параметры y_0, z_0 и ρ через $x = const$:

$$\begin{cases} -2Byy_0 - Ryz_0 = Pxy \\ -2Czz_0 - Rzy_0 = Qxz \\ \rho^2 = 1 - Ax^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + Rz_0y_0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем

$$(ACB - R^2)y_0 = -2CPx + RQx \quad \text{или} \quad y_0 = \frac{RQ - 2CP}{4BC - R^2} x$$

и

$$(4BC - R^2)z_0 = -2BQx + RPx \quad \text{или} \quad z_0 = \frac{RP - 2BQ}{4BC - R^2} x.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \rho^2 &= 1 - x^2 \left[A - B \left(\frac{RQ - 2CP}{4BC - R^2} \right)^2 - C \left(\frac{RP - 2BQ}{4BC - R^2} \right)^2 - R \frac{RQ - 2CP}{4BC - R^2} \frac{RP - 2BQ}{4BC - R^2} \right] = \\ &= 1 - x^2 \left(A - \frac{-BR^2Q^2 - 4BRQCP + 4BC^2P^2 - CR^2P^2 + 4CB^2Q^2 + R^3QP}{(4BC - R^2)^2} \right) = \\ &= 1 - x^2 \left(A - \frac{BQ^2 + CP^2 - PQR}{4BC - R^2} \right). \end{aligned}$$

Эллипс в сечении эллипсоида ошибок плоскостью $x = const$ стягивается в точку когда $\rho = 0$. Это и есть точка эллипсоида с максимальным удалением (по оси x) от точки максимума W $x = y = z = 0$. Таким образом находим σ_x :

$$\begin{aligned}
1 - \sigma_x^2 \left(A - \frac{BQ^2 + CP^2 - PQR}{4BC - R^2} \right) &= 0 \rightarrow \\
\rightarrow \sigma_x^{-2} &= A - \frac{BQ^2 + CP^2 - PQR}{4BC - R^2} \quad (121)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sqrt{\left(A - \frac{BQ^2 + CP^2 - PQR}{4BC - R^2} \right)^{-1}} = \\
&= \sqrt{\frac{4BC - R^2}{4ABC + PQR - AR^2 - BQ^2 - CP^2}}. \quad (122)
\end{aligned}$$

Аналогично для σ_y и σ_z :

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= \sqrt{\left(B - \frac{AR^2 + CP^2 - PQR}{4AC - Q^2} \right)^{-1}} = \\
&= \sqrt{\frac{4AC - Q^2}{4ABC + PQR - AR^2 - BQ^2 - CP^2}}, \quad (123)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= \sqrt{\left(C - \frac{AR^2 + BQ^2 - PQR}{4AB - P^2} \right)^{-1}} = \\
&= \sqrt{\frac{4AB - P^2}{4ABC + PQR - AR^2 - BQ^2 - CP^2}}. \quad (124)
\end{aligned}$$

Приложение III

Систематический сдвиг параметров $g-2$ в общем случае находится решением системы пяти уравнений: $\partial W/\partial N_o = \partial W/\partial \tau = \partial W/\partial A = \partial W/\partial \omega = \partial W/\partial \phi = 0$. Простые преобразования и упрощения по типу (109), (111) и (111) приводят к системе линейных уравнений, которые мы запишем в матричном виде:

$$\mathcal{A} \times Y = \mathcal{B},$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} \delta N \\ \frac{N_0}{\tau} \delta \tau \\ N_0 \delta A \\ N_0 A \delta \omega \\ N_0 A \delta \phi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \int_{-\tau}^{\infty} h(t) dt \\ \int_{-\tau}^{\infty} t h(t) dt \\ \int_{-\tau}^{\infty} \frac{h(t) \cos \alpha}{1+A \cos \alpha} dt \\ - \int_{-\tau}^{\infty} \frac{t h(t) \sin \alpha}{1+A \cos \alpha} dt \\ - \int_{-\tau}^{\infty} \frac{h(t) \sin \alpha}{1+A \cos \alpha} dt \end{pmatrix},$$

$$A = \int_{-\tau}^{\infty} e^{-t/\tau} dt \times$$

$$\begin{pmatrix} (1 + A \cos \alpha) & t \cdot (1 + A \cos \alpha) & \cos \alpha & -t \cdot \sin \alpha & -\sin \alpha \\ t \cdot (1 + A \cos \alpha) & t^2 \cdot (1 + A \cos \alpha) & t \cdot \cos \alpha & -t^2 \cdot \sin \alpha & -t \cdot \sin \alpha \\ \cos \alpha & t \cdot \cos \alpha & \frac{\cos^2 \alpha}{1+A \cos \alpha} & -\frac{t \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1+A \cos \alpha} & -\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1+A \cos \alpha} \\ -t \cdot \sin \alpha & -t^2 \cdot \sin \alpha & -\frac{t \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1+A \cos \alpha} & \frac{t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{1+A \cos \alpha} & \frac{t \cdot \sin^2 \alpha}{1+A \cos \alpha} \\ -\sin \alpha & -t \cdot \sin \alpha & -\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1+A \cos \alpha} & \frac{t \cdot \sin^2 \alpha}{1+A \cos \alpha} & \frac{\sin^2 \alpha}{1+A \cos \alpha} \end{pmatrix}.$$

Для краткости мы ввели обозначение $\alpha = \omega t + \phi$. Матрица A симметрична и почти диагональна:

$$A \approx \begin{pmatrix} e \cdot \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e \cdot \tau^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} e \cdot \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} e \cdot \tau^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} e \cdot \tau \end{pmatrix}.$$

Решение системы линейных уравнений можно найти по правилу Крамера:

$$y_j = \frac{A_{1j} b_1 + A_{2j} b_2 + A_{3j} b_3 + A_{4j} b_4 + A_{5j} b_5}{\det(A)}, \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где A_{ij} — кофакторы элементов a_{ij} матрицы A , а M_{ij} — миноры, т.е. детерминанты матриц, получающихся из матрицы A после вычеркивания i -ой строки и j -го столбца. Мы будем искать решение

для $\delta\omega$ в главном приближении по $\varepsilon = \int \mathcal{F}(t) \times \cos(\omega t + \phi) dt$, где $\mathcal{F}(t)$ – “гладкая” функция от t . Заметим что все диагональные элементы матрицы \mathcal{A} имеют порядок ε^0 , а недиагональные элементы – порядок ε^1 . При вычислении миноров мы будем удерживать только слагаемые с наименьшим числом недиагональных элементов, в частности для интересующего нас решения для y_4 :

$$y_4 = (-a_{22} a_{33} a_{55} a_{41} b_1 - a_{11} a_{33} a_{55} a_{42} b_2 - a_{11} a_{22} a_{55} a_{43} b_3 + \\ + a_{11} a_{22} a_{33} a_{55} b_4 - a_{11} a_{22} a_{33} a_{45} b_5) / \det(\mathcal{A}). \quad (125)$$

Детерминант матрицы \mathcal{A} в главном приближении по ε равен произведению диагональных элементов:

$$\det(\mathcal{A}) = (e \cdot \tau) \times (e \cdot \tau^3) \times \left(\frac{1}{2}e \cdot \tau\right) \times \left(\frac{1}{2}e \cdot \tau^3\right) \times \left(\frac{1}{2}e \cdot \tau\right) = \frac{1}{8}e^5 \cdot \tau^9. \quad (126)$$

Из (125) и (126) получаем решение для $\delta\omega$:

$$N_o A \delta\omega = \frac{2}{e^2 \tau^4} \int_{-\tau}^{\infty} h(t) dt \int_{-\tau}^{\infty} t e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \phi) dt \quad (127) \\ + \frac{2}{e^2 \tau^6} \int_{-\tau}^{\infty} t h(t) dt \int_{-\tau}^{\infty} t^2 e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \phi) dt \\ + \frac{4}{e^2 \tau^4} \int_{-\tau}^{\infty} \frac{h(t) \cos(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt \times \\ \times \int_{-\tau}^{\infty} \frac{t e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt \\ - \frac{2}{e \tau^3} \int_{-\tau}^{\infty} \frac{t h(t) \sin(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt \\ + \frac{4}{e^2 \tau^4} \int_{-\tau}^{\infty} \frac{h(t) \sin(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt \int_{-\tau}^{\infty} \frac{t e^{-t/\tau} \sin^2(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt.$$

Заметим, что если функция $f(t)$ не является гладкой, то четвертый член в выражении (127) имеет порядок малости ε^0 , а остальные члены ε^1 и, следовательно, ими можно пренебречь. В этом случае мы получаем уравнение (112). Если же функция $f(t)$ является гладкой, тогда первый, второй и четвертый члены в выражении

(127) имеют порядок малости ε^1 , а третий и пятый ε^2 и их можно отбросить. Таким образом, третий и пятый члены пренебрежимо малы в любом случае и мы приходим к выражению:

$$\begin{aligned} \delta\omega &= \frac{2}{N_o A e^2 \tau^4} \int_{-\tau}^{\infty} h(t) dt \int_{-\tau}^{\infty} t e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \phi) dt \quad (128) \\ &+ \frac{2}{N_o A e^2 \tau^6} \int_{-\tau}^{\infty} t h(t) dt \int_{-\tau}^{\infty} t^2 e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \phi) dt \\ &- \frac{2}{N_o A e \tau^3} \int_{-\tau}^{\infty} \frac{t h(t) \sin(\omega t + \phi)}{1 + A \cos(\omega t + \phi)} dt. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Review of Particle Physics, Eur. Phys. J. **C3**, 1(1998).
- [2] Худсон, Статистика для физиков, Москва, ИИЛ, 1970.
- [3] S.Redin, Proceedings of International Workshop “ e^+e^- collisions from ϕ to J/ψ ”, Novosibirsk, 1999.

С.И. Редин

**Статистические ошибки и корреляции параметров
при аппроксимации экспериментальных данных**

S.I. Redin

**Statistical errors and correlations
of parameters of fit of experimental data**

ИЯФ 2000-97

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 27.12.2000 г.

Сдано в набор 28.12.2000 г.

Подписано в печать 29.12.2000 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.3 печ.л., 1.9 уч.-изд.л.

Тираж 90 экз. Бесплатно. Заказ № 97

Обработано на IBM PC и отпечатано на
ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирск, 630090, пр.академика Лаврентьева, 11.