

АТБ

2



Институт теоретической и  
экспериментальной физики

27 - 99

В.С.Демидов, В.И.Михайличенко, В.А.Окороков,  
А.К.Поносов, Ф.М.Сергеев

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУПРУГИХ  
 $\pi^-$ -р-ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ПРИ  
НАЧАЛЬНОМ ИМПУЛЬСЕ 3,91 ГэВ/с  
С ПОМОЩЬЮ ФРАКТАЛЬНОГО  
МЕТОДА НОРМИРОВАННОГО РАЗМАХА.**

Москва 1999

SCAN-0002060



CERN LIBRARIES, GENEVA

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУПРУГИХ  $\pi^-$ -P-ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ПРИ НАЧАЛЬНОМ ИМПУЛЬСЕ 3,91 ГэВ/с С ПОМОЩЬЮ ФРАКТАЛЬНОГО МЕТОДА НОРМИРОВАННОГО РАЗМАХА: Препринт ИТЭФ 27-99/

В.С.Демидов, В.И.Михайличенко, В.А.Окорок<sup>†</sup>, А.К.Поносов<sup>†</sup>, Ф.М.Сергеев<sup>†</sup> - М., 1999 -28с.

Показано, что характеристики  $\pi^-$ -p-взаимодействий образуют ряды, обладающие фрактальными свойствами. Ряды измерений могут быть представлены в виде зависимости Херста. Проявляется эффект персистентности, который усиливается при упорядочении статистики. Полученные результаты согласуются с результатами исследования  $\pi^-$ -Ne-взаимодействий методом нормированного размаха. Впервые показано, что для  $\pi^-$ -p-реакции фрактальная процедура Херста чувствительна к изменению методики отбора событий и выделению реакций, идущих через рождение резонансов. Дополнительная априорная вероятность приводит к значительному усилению эффекта персистентности.

THE INVESTIGATION OF THE INELASTIC  $\pi^-$ -p-INTERACTIONS AT INITIAL MOMENTUM 3,91 GeV/c BY MEANS OF THE NORMALIZED RANGE FRACTAL METHOD.

V.S. Demidov, V.I. Mikhailichenko, V.A. Okorokov, A.K. Ponosov, F.M. Sergeev

It is shown that characteristics of the  $\pi^-$ -p-interactions form series, which have fractal properties. The series of measurements can be represented by Hurst's dependence. The effect of the persistence increases for the ordered statistic. The results of this paper are conformed with the results, which were obtained by means of the normalized range fractal method for the  $\pi^-$ -Ne-interactions. For the first time it has been shown that the fractal Hurst's method is sensible for changing the events selection and segregation of the reaction with resonances for the  $\pi^-$ -p-reaction. The additional apriory probability leads to considerable intensification of the persistence effect.

Рис. - 13, список лит. - 16 наим.

© Институт теоретической и экспериментальной физики, 1999

<sup>†</sup>Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет)

В адронную физику идеи фрактальности начали проникать в конце 70-х годов [1-3], однако подлинный интерес к данному вопросу появился позднее, после практически одновременного выхода работы А.Бяласа и Р.Пещанского [4], в которой было предложено исследовать перемежаемость (intermittency) распределений заряженных частиц в импульсном пространстве с помощью факториальных моментов, и работы И.М.Дремина [5], где впервые была определена размерность внутренних блужданий партонов. С тех пор фрактальный анализ стал использоваться для исследования динамики множественного образования частиц [6]. Применение идеи фрактальности позволило выявить интереснейшие закономерности, которые не удавалось обнаружить ранее другими методами. В некотором классе моделей, претендующих на объединение всех известных фундаментальных взаимодействий, традиционная риманова геометрия пространства-времени рассматривается только на достаточно больших масштабах, при приближении к планковскому масштабу геометрия пространства-времени, как предполагается, становится фрактальной. Представляет интерес применение теории фракталов к многомерным обобщениям теории поля типа Калуцы-Клейна. Однако вопрос о природе фракталов в физике адронов на сегодняшний день остается открытым. К ним могут приводить, например, уравнения КХД [7] или фазовый переход второго рода [8,9].

В адронной физике новый статистический метод, фрактальный метод нормированного размаха (метод  $R/S$ ), открытый Херстом и подробно описанный в [10], мы применили для изучения  $\pi^-$ Ne-взаимодействий [11,12]. Был обнаружен "эффект памяти", который усиливался при упорядочении статистики по некоторому параметру, характеризующему увеличение неупругости процесса взаимодействия.

Фрактальное множество - это бесконечное множество с нецелой хаусдорфовой размерностью. Однако, на практике всегда рассматриваются конечные множества. Тем не менее оказывается, что при достаточно большом отношении ( $\geq 100$ ) объема (размера) всего множества к объему (размеру) слагающих его подмножеств (отдельных элементов) можно пренебречь конечностью числа составных частей рассматриваемого множества на масштабах, значительно превышающих размер этих частей, и применять для реальных множеств формализм, развитый для истинных фракталов. Основным свойством фракталов является нецелое значение их размерности. Другое фундаментальное свойство фракталов - их скейлинговая инвариантность, т.е. самоподобие на разных масштабах.

## II

В данной работе был проведен фрактальный анализ для следующей эксклюзивной адрон-адронной реакции:



Экспериментальный материал получен на 2-метровой пузырьковой камере CERN, экспонированной в пучке  $\pi^-$ -мезонов с импульсом 3,91 ГэВ/с. Подробности отбора можно найти в работах [13,14]. Всего было отобрано 35972 события, отвечающего реакции (1).

Фрактальные характеристики определялись для  $\pi^-$ -мезонов. В данной работе в качестве переменной, по которой выстраивается выборка, был взят номер события, под которым оно поступило в обработку (полностью случайная процедура). Тогда номер события  $n$  является образом момента времени, а количество анализируемых событий  $N = n_i - n_j$  может быть названо запаздыванием [15]. В соответствии с фрактальной процедурой Херста определяется величина  $\varphi(N) = R(N)/S(N)$ . Здесь  $N$  - переменное число событий в выборке,  $R(N)$  - так называемый размах,  $S(N)$  - стандартное отклонение. Конкретное содержание величин ясно из нижеследующего:

$$R(N) = \max_l X(l, N) - \min_l X(l, N), \quad (1 \leq l \leq N), \quad (2)$$

где  $\max X(l, N)$ ,  $\min X(l, N)$  - наибольшее (наименьшее) накопленное отклонение на выборке из  $N$  событий,

$$X(l, N) = \sum_{n=1}^l (F_n - \langle F(N) \rangle).$$

Здесь  $F_n$  - некая характеристика каждого события, определяемая из эксперимента,  $\langle F(N) \rangle$  - среднее значение по выборке из  $N$  событий:

$$\langle F(N) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_n.$$

Величина  $S(N)$  определяется следующим образом:

$$S(N) = \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (F_n - \langle F(N) \rangle)^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Величина показателя Херста  $H$  определяется аппроксимацией функции  $\varphi(N)$  степенной зависимостью

$$\varphi(N) = (aN)^H \quad (4)$$

и характеризует степень случайности процесса и присутствие в нем более или менее устойчивых тенденций. Так для чисто случайного процесса с независимыми измерениями в ряду (распределение Гаусса)  $H = 0,5$  и  $a = \pi/2$  [15]. Примером является обычное броуновское движение. Корреляции последующих измерений с предыдущими, т.е. поддержание определенной тенденции, выражаются в том, что  $H \neq 0,5$ . При  $H > 0,5$  проявляется, поддерживается тенденция к увеличению (уменьшению) сигнала - соответствующий термин в методе нормированного размаха - персистентность. При  $H < 0,5$  наблюдается обратный эффект - антиперсистентность.

В данной работе в качестве характеристики каждого события (функции номера) выбраны следующие величины:

а) разность наибольшего и наименьшего значений кумулятивного числа для частиц определенного сорта в событии  $\Delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}$ ; в данном случае  $\alpha = (E - p_{||})/m_N$ , где  $E, p_{||}$  - энергия, продольный импульс частицы,  $m_N$  - масса нуклона;

б) максимальное значение поперечного импульса для частиц данного сорта в событии  $p_t^{max}$ ;

в) квадрат разности наибольшего и наименьшего значений четырехмерных скоростей  $U = P/m$  частиц в событии  $b_{min}^{max} = -(U_{max} - U_{min})^2$ ;

г) разность наибольшего и наименьшего значений быстрот для частиц определенного сорта в событии:  $\Delta y = y_{max} - y_{min}$ .

Представляется, что такой выбор отражает динамику процесса.

### III

На рис.1 приведены зависимости параметра  $p_t^{max}$  от номера события  $n$  для вторичных  $\pi^-$  при различных масштабах рассмотрения, т.е. при различных шагах  $\Delta n$  увеличения объема выборки  $N$ , в случае естественного

порядка событий для  $\pi^-p$ -взаимодействий. Точки для наглядности соединены отрезками прямых. Видно, что значение  $p_i^{max}$  изменяется стохастически в зависимости от номера события  $n$ . Данные зависимости иллюстрируют отсутствие корреляций между  $p_i^{max}$  и  $n$  для отдельных событий и самоподобие кривой  $p_i^{max}(n)$ .

На рис.2 показана зависимость  $\varphi(N)$ , полученная согласно процедуре Херста для параметров  $\Delta\alpha$  (рис.2а),  $p_i^{max}$  (рис.2б),  $b_{min}^{max}$  (рис.2в) и  $\Delta y$  (рис.2г) для  $\pi^-$ -мезонов из реакции (1). Указанные зависимости получены для естественного порядка событий. На рис.2а-2в при объеме выборки  $N = 31040 \pm 10$  наблюдается резкое изменение хода зависимости  $\varphi(N)$ : начиная с  $N \simeq 31040$  рост  $\varphi(N)$  становится более быстрым, чем для выборок объемом  $N < 31040$ . Для физического параметра  $\Delta y$  особенности в поведении  $\varphi(N)$  при  $N \simeq 31040$  не наблюдаются.

На рис.3 показаны зависимости среднего значения  $\langle \Delta\alpha \rangle$  (рис.3а),  $\langle p_i^{max} \rangle$  (рис.3б),  $\langle b_{min}^{max} \rangle$  (рис.3в),  $\langle \Delta y \rangle$  (рис.3г) от номера события  $n$  для  $\pi^-p$ -взаимодействий. Усреднение проводилось по последовательной выборке из 200 событий. В области значений  $n \simeq 31040$  для первых трех параметров наблюдается резкое уменьшение средних значений. Значения  $\langle \Delta y \rangle$  практически не зависят от  $n$ . Из приведенных зависимостей следует, что последние 4932 события характеризуются меньшими значениями  $\Delta\alpha$ ,  $p_i^{max}$  и  $b_{min}^{max}$  для вторичных  $\pi^-$ -мезонов, чем остальная часть статистики. На рис.4 приведены распределения по эффективной массе системы трех вторичных пионов ( $2\pi^- \pi^+$ ) для первых 31040 событий (рис.4а) и для последних 4932 событий (рис.4б) в  $\pi^-p$ -статистике. Распределения нормированы на максимум. Видно, что в последнем случае усилен относительный вклад событий в области масс  $a_1(1260)$ -,  $a_2(1320)$ -мезона и подавлен вклад событий в области больших эффективных масс. Основываясь на приведенных распределениях, можно предположить, что в случае последних 4932 событий на случайный процесс присвоения событию порядкового номера  $n$  была наложена дополнительная априорная вероятность: отбирались события, в которых присутствовал  $a_1(1260)$ - или  $a_2(1320)$ -мезон. Таким образом, возможно, что отбор событий с  $a_1$ -,  $a_2$ -мезонами привел к меньшим (относительно средних по всей статистике значений) значениям  $\langle \Delta\alpha \rangle$ ,  $\langle p_i^{max} \rangle$ ,  $\langle b_{min}^{max} \rangle$  для указанной части статистики и к изменению хода зависимости  $\varphi(N)$  для данных физических параметров. Можно предположить, что процедура Херста чувствительна к изменению методики отбора событий и выделению реакций, идущих через рождение резонансов. Представляется, что данный результат заслуживает тщательной проверки на обширном

экспериментальном материале.

На рис.5 представлена аппроксимация  $\varphi(N)$  степенной функцией (4) в случае реакции (1) для естественного порядка событий в статистике для всего рассматриваемого набора параметров. В случае адрон-адронной реакции для параметров  $\Delta\alpha$  (рис.5а),  $p_t^{max}$  (рис.5б),  $b_{min}^{max}$  (рис.5в) фитировалась отдельно выборка из первых 31040 событий и последних 4932 событий, для параметра  $\Delta y$  (рис.5г) фитирование проводилось для полной статистики. В табл.1 приведены результаты аппроксимации зависимости  $\varphi(N)$  для различных параметров, используемых для изучения процессов  $\pi^-p$ -взаимодействий.

Для всех рассматриваемых физических параметров полученные значения показателя Херста  $H$  являются дробными. Как было показано выше, зависимости  $p_t^{max}(n)$  и др. обладают свойством самоподобия. Таким образом, можно предположить, что зависимости рассматриваемых в данной работе физических параметров от номера события  $\Delta\alpha(n)$ ,  $p_t^{max}(n)$ ,  $b_{min}^{max}(n)$  и  $\Delta y(n)$  представляют собой фрактальные кривые, что согласуется с результатами, полученными при изучении  $\pi^-Ne$ -взаимодействий при промежуточных энергиях [11]. В случае адрон-адронной реакции (1) для неупорядоченной статистики для физического параметра  $\Delta y$  наблюдается эффект антиперсистентности, для остальных переменных наблюдается эффект памяти, как и для  $\pi^-Ne$ -реакций [11,12]. Видно, что дополнительная априорная вероятность приводит к резкому усилению эффекта памяти: показатель Херста  $H \sim 10$  для выборки из 4932 событий. Как в случае адрон-ядерной реакции, так и в данном случае для всех использованных в анализе физических параметров наблюдается отличие показателя Херста от значения  $H = 0,5$ , соответствующего полностью случайному характеру процесса взаимодействия.

Как было сказано выше, в нашей процедуре фрактального анализа номер события  $n$  рассматривается как образ момента времени. Однако связь между этими двумя параметрами в общем случае нелинейная. Возможно эта нелинейность, а также малые значения  $\Delta\varphi(N)$  приводят к большим значениям  $\chi^2/\text{ст.св.}$  Далее (если специально не оговорено) при сравнении значений показателя  $H$  для различных взаимодействий и для различных типов статистик (неупорядоченная/упорядоченная) в качестве значений  $H$  для неупорядоченной статистики для реакции (1) будут использоваться  $H$ , полученные для выборки объемом 31040 событий.

В соответствии с фрактальной процедурой далее исходная статистика по реакции (1) была упорядочена. Выборка была упорядочена по возрастанию

максимального кумулятивного числа у  $\pi^-$ -мезона в событии  $\alpha_{max}$ . После упорядочения событиям были присвоены новые порядковые номера  $n'$ .

Таблица 1. Значения параметров аппроксимации  $\varphi(N)$  степенной функцией (4) в случае неупорядоченной статистики для реакции (1).

Физический параметр	Интервал значений $n$ в выборке	Параметры фитирования	
		$a$	$H$
$\Delta\alpha$	1 – 31040	$(2,54 \pm 0,01) \cdot 10^{-2}$	$0,867 \pm 0,001$
	31041 – 35972	$(5,545 \pm 0,004) \cdot 10^{-5}$	$11,21 \pm 0,01$
$p_i^{max}$	1 – 31040	$(4,863 \pm 0,006) \cdot 10^{-3}$	$1,204 \pm 0,003$
	31041 – 35972	$(5,869 \pm 0,002) \cdot 10^{-5}$	$10,500 \pm 0,004$
$b_{min}^{max}$	1 – 31040	$(1,941 \pm 0,005) \cdot 10^{-2}$	$0,9120 \pm 0,0004$
	31041 – 35972	$(5,241 \pm 0,002) \cdot 10^{-5}$	$12,018 \pm 0,006$
$\Delta y$	1 – 35972	$9,5 \pm 0,3$	$0,451 \pm 0,001$

На рис.6 приведены зависимости параметра  $p_i^{max}$  от номера события  $n'$  для вторичных  $\pi^-$  при различных масштабах рассмотрения в случае упорядоченной  $\pi^-$ -р-статистики. Видно, что значение  $p_i^{max}$  изменяется стохастически в зависимости от номера события  $n'$ . Упорядочение событий привело к тому, что  $\pi^-$ -мезоны в событиях в начале статистики в среднем имеют меньший максимальный поперечный импульс, чем  $\pi^-$ -мезоны в событиях в конце статистики (рис.6а-6г). Данное обстоятельство приводит к изменению масштаба по оси  $p_i^{max}$ , которое менее значительно, чем изменение шага  $\Delta n'$  увеличения объема выборки  $N$ . Из приведенных зависимостей видно, что при упорядочении исходной статистики самоподобный характер кривой  $p_i^{max}(n')$  сохраняется.

На рис.7 в двойном логарифмическом масштабе показана зависимость  $\varphi(N)$  в случае  $\pi^-$ -р-взаимодействий для упорядоченной статистики. В данном случае резких изменений хода зависимости  $\varphi(N)$  при увеличении объема выборки  $N$  не наблюдается. Поэтому аппроксимация  $\varphi(N)$  степенной функцией (4) для упорядоченных событий проводилась по всей статистике для всего рассматриваемого набора параметров. Результаты фитирования представлены в табл.2 и на рис.7а-г для параметров  $\Delta\alpha$ ,  $p_i^{max}$ ,  $b_{min}^{max}$  и  $\Delta y$  соответственно.

Из рис.7 и табл.2 видно, что в случае упорядоченной статистики зависимость  $\varphi(N)$  соответствует фрактальному закону Херста и лучше, чем для



**Таблица 2.** Значения параметров аппроксимации  $\varphi(N)$  степенной функцией (4) в случае упорядоченной статистики для реакции (1).

Физический параметр	Параметры фитирования	
	$a$	$H$
$\Delta\alpha$	$0,097 \pm 0,001$	$1,152 \pm 0,002$
$p_i^{max}$	$0,2341 \pm 0,0003$	$0,9788 \pm 0,0002$
$b_{min}^{max}$	$0,1636 \pm 0,0001$	$1,051 \pm 0,001$
$\Delta y$	$0,161 \pm 0,004$	$0,948 \pm 0,003$

неупорядоченной статистики описывается степенной функцией (4). Для всех рассматриваемых физических параметров наблюдается эффект персистентности. Для параметра  $p_i^{max}$  наблюдается ослабление эффекта памяти по сравнению с естественным порядком событий. Для остальных физических переменных, как и в случае  $\pi^-$ Ne-реакции, упорядочение статистики приводит к усилению эффекта памяти, т.е. к увеличению значений  $H$ .

На рис.8 показаны зависимости показателя Херста  $H$  от энергии взаимодействия  $\sqrt{S}$  для параметров  $\Delta\alpha$  (рис.8а),  $p_i^{max}$  (рис.8б),  $b_{min}^{max}$  (рис.8в),  $\Delta y$  (рис.8г) для неупорядоченных и упорядоченных  $\pi^-$ -р- и  $\pi^-$ Ne-статистик. Видно, что для переменных  $\Delta\alpha$  и  $\Delta y$  наблюдается увеличение значения  $H$  с ростом начальной энергии как для естественного порядка событий, так и в случае событий, упорядоченных по возрастанию  $\alpha_{max}$  у  $\pi^-$ -мезона в событии, причем для параметра  $\Delta\alpha$  показатель Херста  $H$  для упорядоченной статистики изменяется с ростом энергии слабее, чем в случае неупорядоченной статистики. Для  $p_i^{max}$  и  $b_{min}^{max}$  наблюдается различное поведение зависимостей  $H(\sqrt{S})$  в случае двух различных типов статистик: для естественного порядка событий в статистике  $H$  с ростом энергии взаимодействия уменьшается, а для упорядоченной статистики - растет. Таким образом, в рассматриваемой области промежуточных энергий  $\sqrt{S} \sim 3$  ГэВ фрактальные характеристики процессов взаимодействия зависят от значения  $\sqrt{S}$  и, возможно, от типа мишени. Показатель Херста  $H$  отличается от значения  $H=0,5$ , характерного для чисто случайного процесса (распределения Гаусса), как в случае адрон-адронной, так и в случае адрон-ядерной реакции. Данное обстоятельство позволяет предположить наличие физических особенностей процессов взаимодействия, которые приводят к эффекту персистентности (антиперсистентности), т.е. отклонению распределений физических параметров от распределения Гаусса.

Зависимости показателя Херста  $H$  от энергии взаимодействия  $\sqrt{S}$  полу-

чены в достаточно узком диапазоне изменения  $\sqrt{S}$  и для мишеней различных типов, что затрудняет интерпретацию результатов. Однако, исследование энергетической зависимости фрактальных характеристик может оказаться полезным для изучения динамики процессов сильного взаимодействия, в частности для описания непертурбативной стадии процесса. Поэтому представляет интерес дальнейшее изучение фрактальных свойств адронных и ядерных взаимодействий в широком диапазоне энергий на существующих и строящихся ускорителях Tevatron, SPS, HERA, RHIC, LHC.

Представляет несомненный интерес изучение влияния на поведение зависимости  $\varphi(N)$  как методических условий отбора, так и динамических особенностей развития процесса взаимодействия в пространстве-времени. На рис.9а показаны зависимости  $\varphi(N)$  для параметра  $p_t^{sum}$  - суммарного поперечного импульса пионов в событии в случае неупорядоченных  $\pi^-$  взаимодействий для выборок объемом 4932 события из различных частей статистики. Для событий, в которых образование тройки пионов идет через распад  $a_1(1260)$ -,  $a_2(1320)$ -мезонов, переменная  $p_t^{sum}$  может рассматриваться в качестве поперечного импульса резонанса. Зависимости  $\varphi(N)$  аппроксимировались степенной функцией (4), результаты фитирования показаны на рис.9а и в табл.3. Видно, что в случае последних 4932 событий ( $n=31040-35972$ ), в которых усилен относительный выход  $a_1(1260)$ -,  $a_2(1320)$ -мезонов, поведение и значения  $\varphi(N)$  при соответствующих  $N$  значительно отличаются от  $\varphi(N)$  для выборок из начала и середины статистики. В последних двух случаях  $\varphi(N)$  имеет близкие значения при одинаковых  $N$ . Для выборок из начала и середины статистики наблюдается эффект персистентности, различия в значениях показателя Херста  $H$  не носят принципиального характера. Для последних 4932 событий наблюдается эффект антиперсистентности, значение  $H$  сильно отличается от значений  $H$  для первых двух выборок. В зависимости  $\varphi(N)$  для событий с  $n=31040-35972$  наблюдается изменение в поведении  $\varphi(N)$  при  $n \sim 32040$ . На рис.9б для последних 4932 событий показаны аппроксимации  $\varphi(N)$  для выборок событий с  $n=31040-32040$  ( $B_1$ ) и  $n=32041-35972$  ( $B_2$ ), результаты фитирования приведены в табл.3.

Для выборки  $B_1$  наблюдается эффект персистентности и значение  $H$  близко значениям показателя Херста для выборок событий из начала и середины статистики. Для выборки  $B_2$  наблюдается эффект антиперсистентности. Для рассматриваемых двух выборок наблюдаются отличия в поведении средних значений физических параметров (см.рис.3), что может быть обусловлено методическими особенностями отбора событий.

Таблица 3. Значения параметров аппроксимации  $\varphi(N)$  степенной функцией (4) для переменной  $p_i^{sum}$  в случае неупорядоченной статистики для реакции (1).

Область статистики	Интервал значений $n$ в выборке	Параметры фитирования	
		$a$	$H$
4932 первых события в статистике	1 – 4932	$0,134 \pm 0,02$	$0,704 \pm 0,002$
4932 события из середины статистики	16501 – 21433	$0,0441 \pm 0,0003$	$0,876 \pm 0,001$
4932 последних события в статистике	31040 – 35972	$207 \pm 9$	$0,418 \pm 0,001$
	31040 – 32040	$0,41 \pm 0,02$	$0,910 \pm 0,007$
	32040 – 35972	$1,01 \cdot 10^{11} \pm \pm 9,4 \cdot 10^{-4}$	$0,16826 \pm \pm 0,00003$

Физический параметр  $p_i^{sum}$  характеризует систему (кластер) трех вторичных пионов как целое. Поэтому в данном случае на поведение зависимости  $\varphi(N)$  для переменной  $p_i^{sum}$  для выборок  $V_1, V_2$  возможно оказывают влияние не только методические особенности, но и различия в динамике процесса взаимодействия и образования системы (кластера) трех вторичных пионов. На рис.9в показаны распределения по эффективной массе системы ( $2\pi^-\pi^+$ ) для двух выборок из последних 4932 событий. Видно, что в случае выборки  $V_2$  распределение более узкое и наблюдается увеличение относительной доли событий в области масс  $a_1(1260)$ -,  $a_2(1320)$ -мезонов по сравнению с распределением для  $V_1$ . Таким образом, можно предположить, что влияние резонансов приводит к изменению поведения зависимости  $\varphi(N)$  для параметра  $p_i^{sum}$  и переходу от эффекта памяти к антиперсистентности. Для подтверждения данного результата оптимальным вариантом представляется использование экспериментальной статистики, в которой отсутствует возможное влияние особенностей условий отбора событий.

На рис.10 показана зависимость  $\varphi(N)$  для параметра  $\Delta\alpha$  (рис.10а) и  $p_i^{max}$  (рис.10б) в случае выборки объемом 31040 событий для неупорядоченных  $\pi^-p$ -взаимодействий. При объемах выборки  $N \sim 20000$  и  $N \sim 17500$  для  $\Delta\alpha$  и  $p_i^{max}$  соответственно наблюдается изменение хода зависимости  $\varphi(N)$ . На рис.10 сплошной линией показаны аппроксимации  $\varphi(N)$  в случае этих двух

физических переменных для всей выборки объемом 31040 событий, параметры фитирования которых приведены выше в табл.1. Аппроксимации  $\varphi(N)$  степенной функцией (4) для выборок событий с  $n=1-20000$  ( $B_3$ , рис.10а) и  $n=1-17500$  ( $B_4$ , рис.10б) показаны штриховой линией, для выборок событий с  $n=20001-31040$  ( $B_5$ , рис.10а) и  $n=17501-31040$  ( $B_6$ , рис.10б) показаны пунктирной линией, результаты фитирования приведены в табл.4.

Видно, что в случае выборок  $B_5$  и  $B_6$  наблюдается значительное усиление эффекта памяти по сравнению с выборками  $B_3$  и  $B_4$ . Данное поведение  $\varphi(N)$  может быть обусловлено динамическими различиями процесса взаимодействия для рассматриваемых выборок событий или иметь статистическую природу. Согласно сделанным выше предположениям в первом случае поведение зависимости  $\varphi(N)$  для параметра  $p_i^{sum}$  и значения  $\varphi(N)$  при одинаковых  $N$  в случае выборок  $B_5$  и  $B_6$  должны сильно отличаться от поведения и значений  $\varphi(N)$  для выборок одинакового объема, взятых из  $B_3$  и  $B_4$  соответственно. В противном случае различия должны быть незначительными.

На рис.11 показаны зависимости  $\varphi(N)$  для параметра  $p_i^{sum}$  в случае неупорядоченных  $\pi^-p$ -реакций для выборок объемом 11040 событий (а) и 13540 событий (б), взятых из начала и из конца выборки в 31040 событий. Аппроксимации  $\varphi(N)$  степенной функцией (4) для 11040 (рис.11а) и 13540 событий (рис.11б), взятых из начала выборки в 31040 событий, показаны пунктирной линией; аппроксимации для последних 11040 (рис.11а) и 13540 событий (рис.11б) показаны сплошной линией. Результаты фитирования приведены в табл.5.

**Таблица 4.** Значения параметров аппроксимации  $\varphi(N)$  степенной функцией (4) в случае различных выборок из первых 31040 событий в случае неупорядоченной статистики для реакции (1).

Физический параметр	Интервал значений $n$ в выборке	Параметры фитирования	
		$a$	$H$
$\Delta\alpha$	1 – 20000	$22,069 \pm 0,001$	$0,39632 \pm 0,00004$
	20001 – 31040	$(4,78 \pm 0,02) \cdot 10^{-4}$	$2,293 \pm 0,003$
$p_i^{max}$	1 – 17500	$2,51 \pm 0,02$	$0,4728 \pm 0,0004$
	17501 – 31040	$(1,207 \pm 0,002) \cdot 10^{-3}$	$1,7127 \pm 0,0008$

**Таблица 5.** Значения параметров аппроксимации  $\varphi(N)$  степенной функцией (4) для переменной  $p_i^{sum}$  в случае неупорядоченной статистики для реакции (1) для различных выборок из первых 31040 событий.

Интервал значений $n$ в выборке	Параметры фитирования	
	$a$	$H$
1 – 11040	$1,19 \pm 0,03$	$0,511 \pm 0,001$
20001 – 31040	$2,28 \pm 0,08$	$0,471 \pm 0,002$
1 – 13540	$2,05 \pm 0,05$	$0,480 \pm 0,001$
17501 – 31040	$17,2 \pm 0,5$	$0,396 \pm 0,001$

Из рис.11 и табл.5 видно, что поведение зависимостей  $\varphi(N)$  и значения  $\varphi(N)$  при одинаковых  $N$  в случае выборок объемом 11040 событий (рис.11а) согласуются друг с другом, для этих двух выборок наблюдаются близкие значения показателя Херста  $H$ . Для выборок объемом 13540 событий (рис.11б) значения  $\varphi(N)$  при одинаковых  $N$  отличаются друг от друга, значение  $H$  в случае выборки событий с  $n=17501-31040$  несколько меньше, чем для выборки событий с  $n=1-17500$ . Однако, эти отличия не столь значительны как в случае выборок объемом 4932 событий и не носят принципиального характера. Таким образом, из рис.11 следует, что изменение хода зависимости  $\varphi(N)$  для параметров  $\Delta\alpha$ ,  $p_i^{max}$  в случае выборки из первых 31040 событий имеет статистическую природу.

На рис.12 приведены распределения по эффективной массе в случае неупорядоченной  $\pi^-p$ -статистики для выборок  $B_3 - B_6$  из первых 31040 событий для систем  $(2\pi^-\pi^+)$  (рис.12а,г),  $(\pi^-\pi^+)$  (рис.12б,д),  $(p\pi^+)$  (рис.12в,е). Распределения для выборок  $B_3, B_4$  показаны сплошной линией, распределения для выборки  $B_5, B_6$  показаны пунктирной линией и штриховкой. Распределения нормированы на максимум. Видно наличие избытка событий в случае выборок  $B_5, B_6$  по сравнению с выборками  $B_3, B_4$  в распределении по эффективной массе тройки вторичных пионов в области больших значений  $M_{\phi}(3\pi)$  (рис.12а,г). Для пар выборок  $B_3, B_5$  (рис.12б,в) и  $B_4, B_6$  (рис.12д,е) распределения по  $M_{\phi}(\pi^-\pi^+)$  и  $M_{\phi}(p\pi^+)$  хорошо согласуются друг с другом. На рис.13 показаны распределения по эффективной массе для тройки вторичных пионов для выборок  $B_3$  (рис.13а),  $B_5$  (рис.13б),  $B_4$  (рис.13в),  $B_6$  (рис.13г), нормированные на полное число событий. Штриховой линией показано распределение по фазовому объему. Видно, что избыток событий в области больших эффективных масс для выборок  $B_5, B_6$  хорошо описывается фазовой кривой и, следовательно, имеет статистический характер.

Таким образом, анализ распределений по эффективной массе подтверждает предположения, сделанные на основе поведения фрактальных зависимостей  $\varphi(N)$  и значений показателя Херста  $H$  для различных выборок. Это дает возможность использования фрактальных методов анализа для выделения и исследования динамических особенностей развития адрон-адронных и адрон-ядерных реакций в пространстве-времени.

#### IV

В заключение перечислим основные результаты работы.

1. Впервые проведен фрактальный анализ с помощью процедуры Херста  $\pi^-$ -р-взаимодействий в области промежуточных энергий. Проявление эффекта памяти для неупорядоченной статистики зависит от рассматриваемой физической переменной. При упорядочении событий эффект памяти, как правило, усиливается, т.е. показатель Херста увеличивается. Полученные результаты в целом согласуются с результатами, полученными для  $\pi^-$ - $\text{Ne}$ -взаимодействий.

2. Впервые показано, что процедура Херста чувствительна к изменению методики отбора событий и выделению реакций, идущих через рождение резонансов. Дополнительная априорная вероятность приводит к увеличению показателя Херста  $H$  по сравнению со значением показателя Херста  $H$  для остальной части статистики. Данный эффект наблюдается для неупорядоченной статистики.

3. Впервые обнаружено влияние на поведение зависимости  $\varphi(N)$  для физического параметра, характеризующего систему  $(2\pi^- \pi^+)$  как целое, и значение показателя Херста  $H$  динамики образования системы трех вторичных пионов: для выборки событий, в которых система  $(2\pi^- \pi^+)$  образуется преимущественно от распадов  $a_{1-}$ ,  $a_2$ -мезонов, наблюдается эффект антиперсистентности.

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы "Интеграция" (проект № А0100/99).

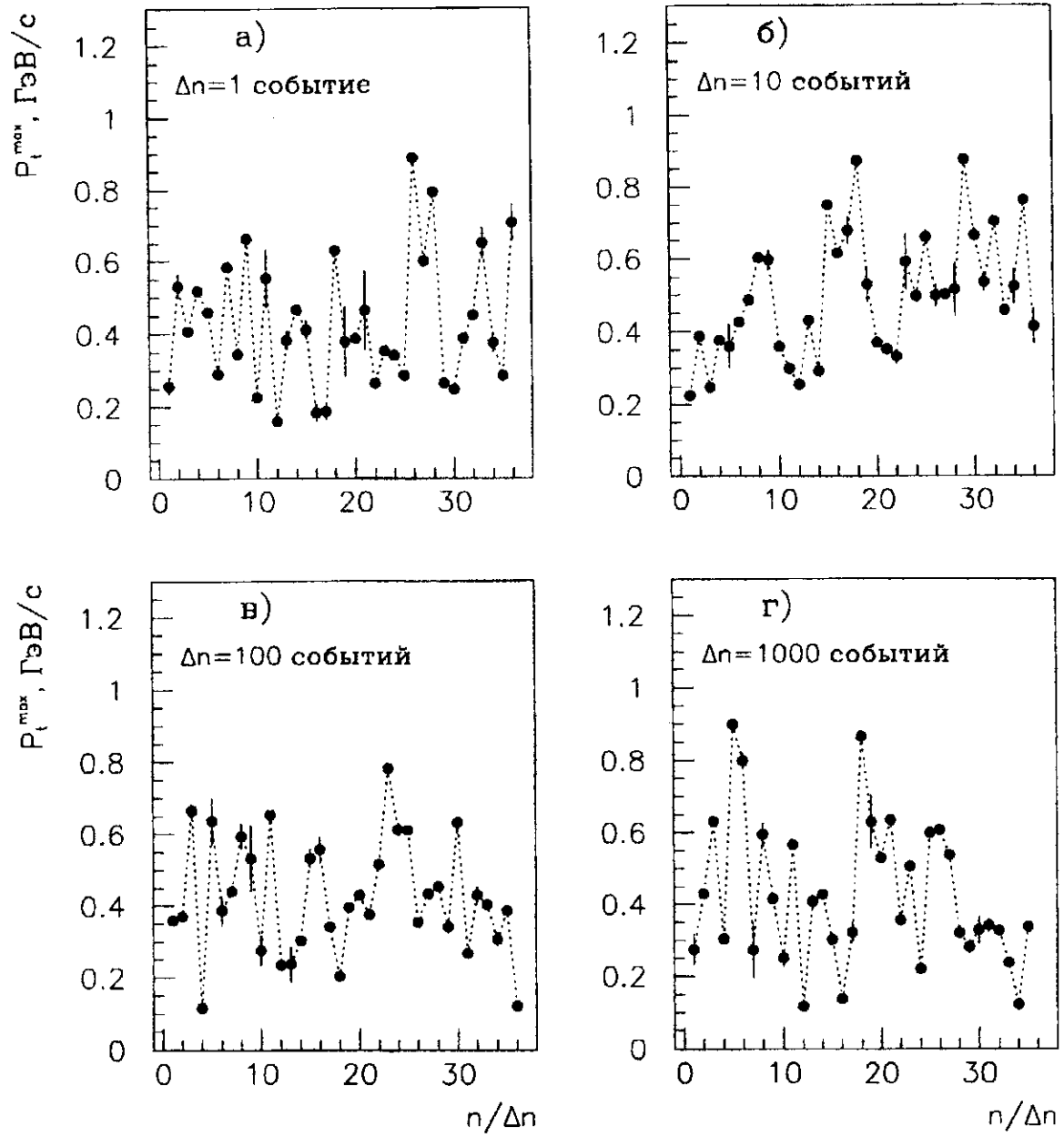


Рис. I.

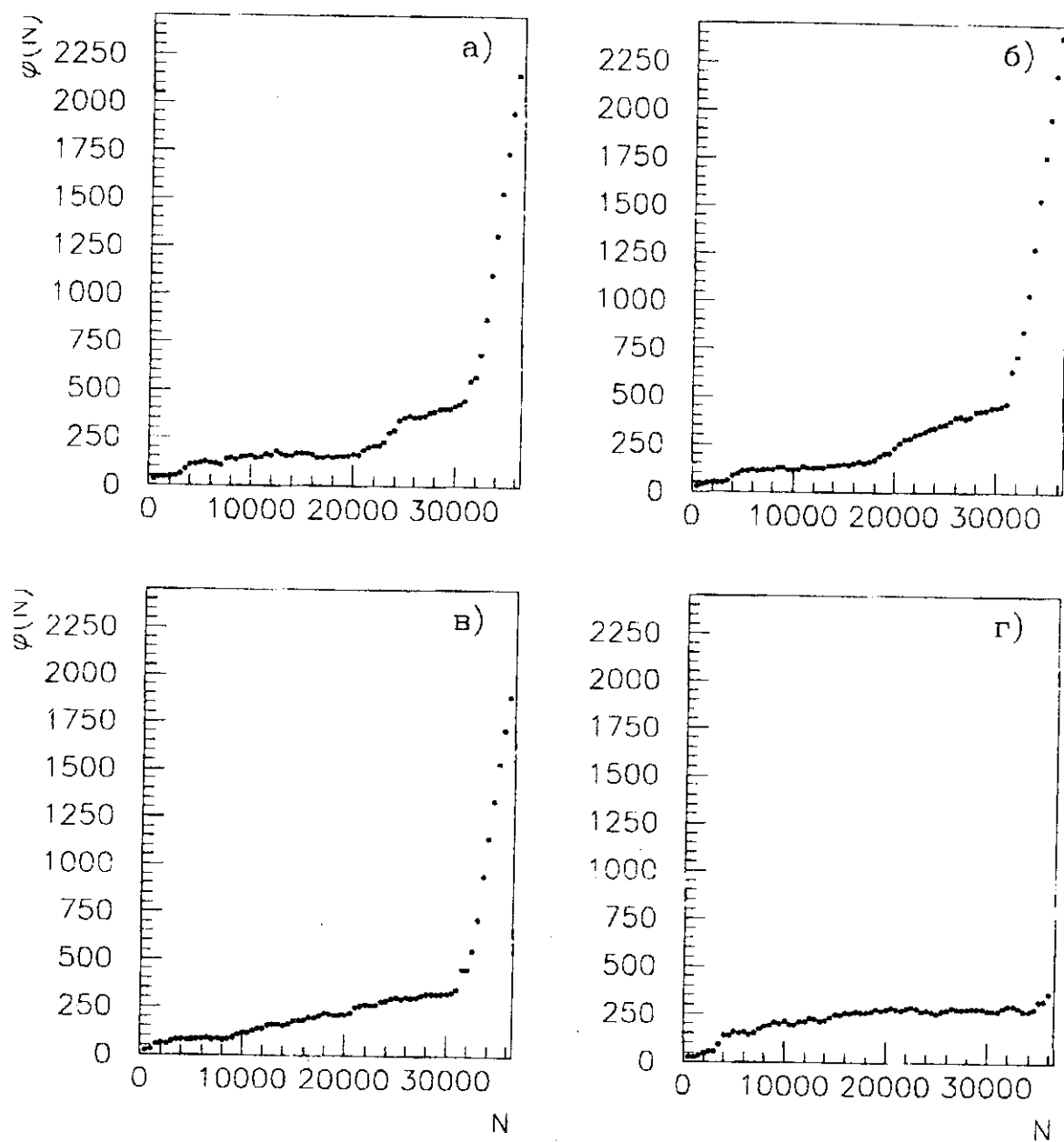


Рис. 2.



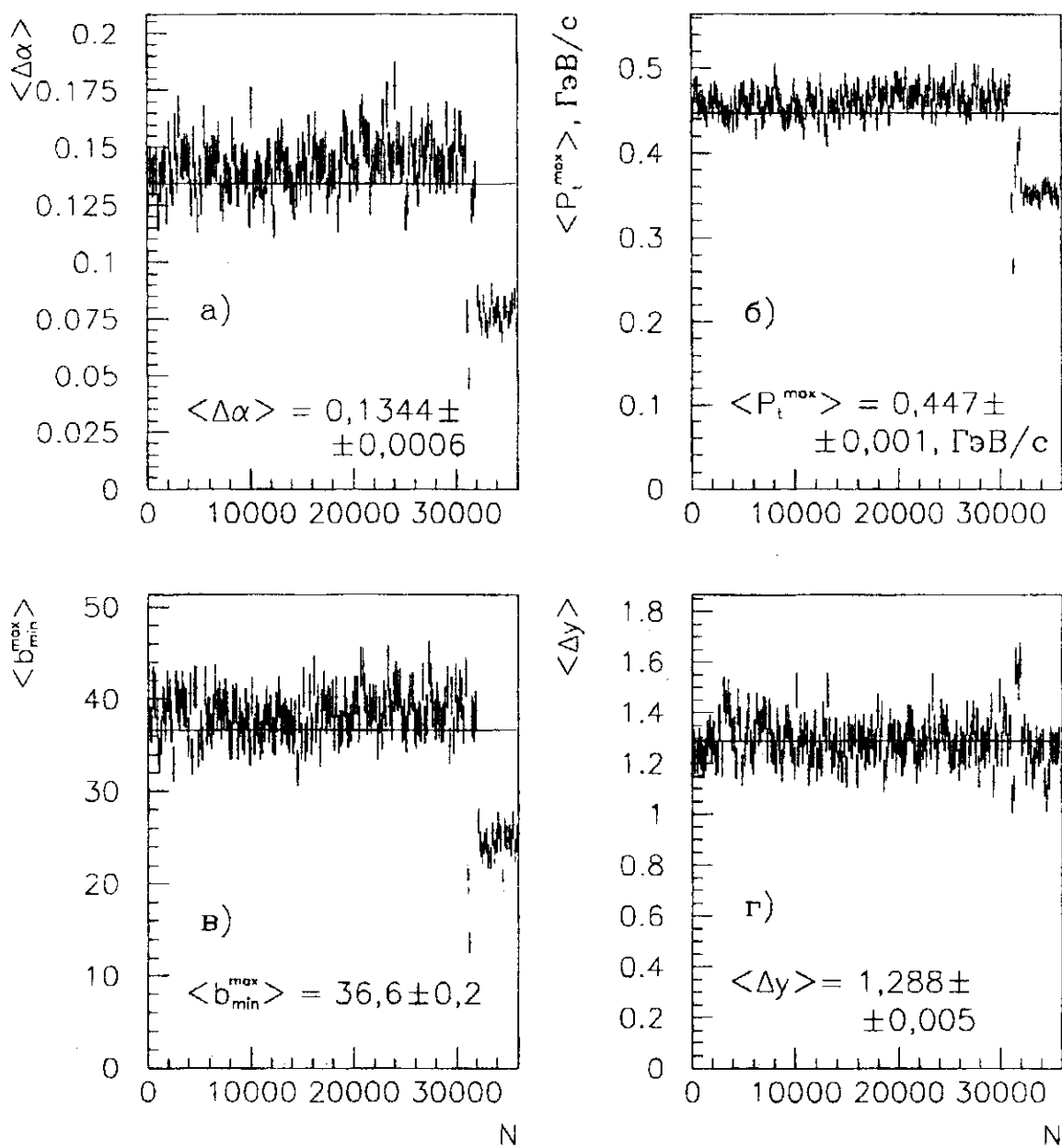


Рис.3.

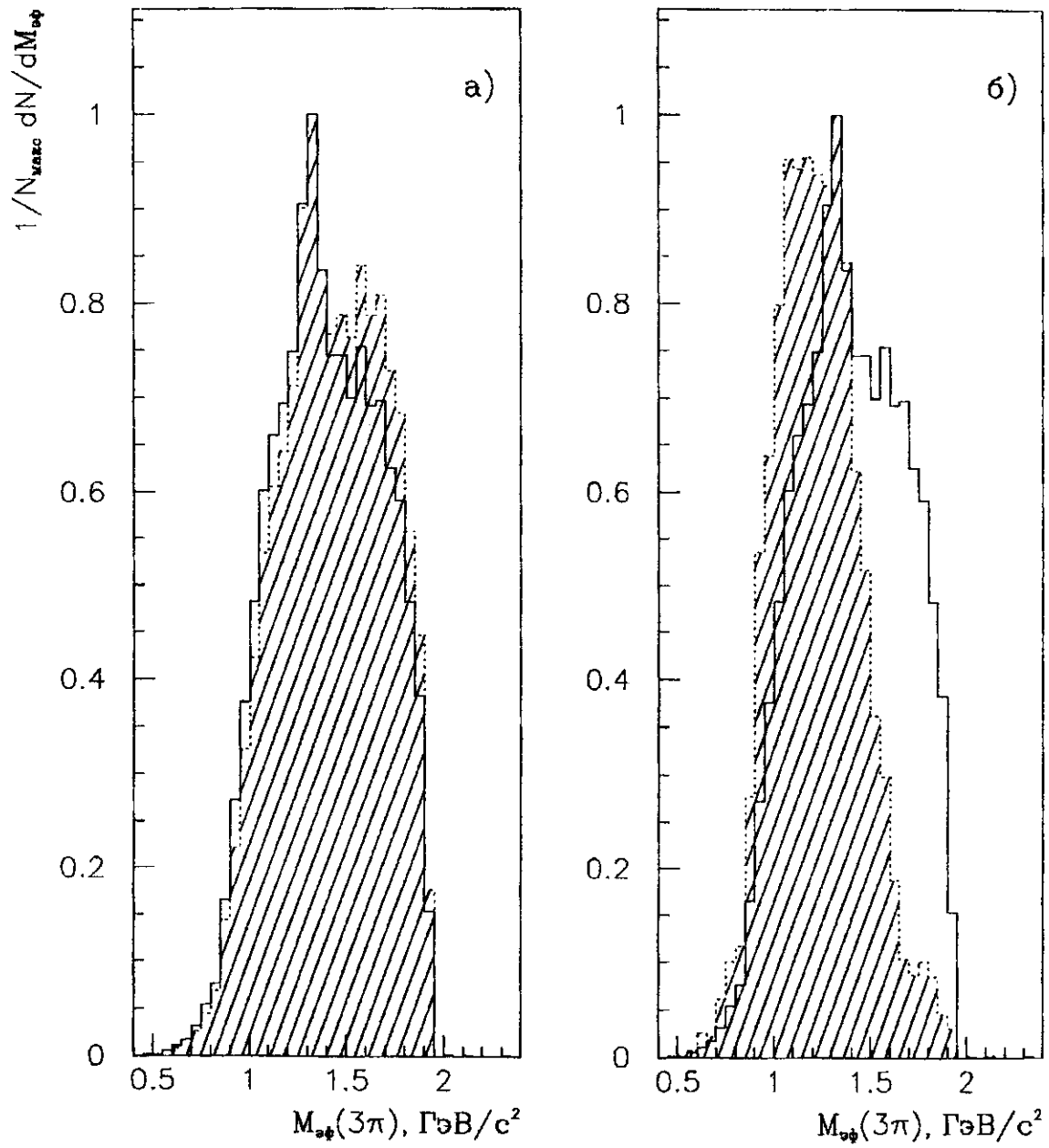


Рис. 4.

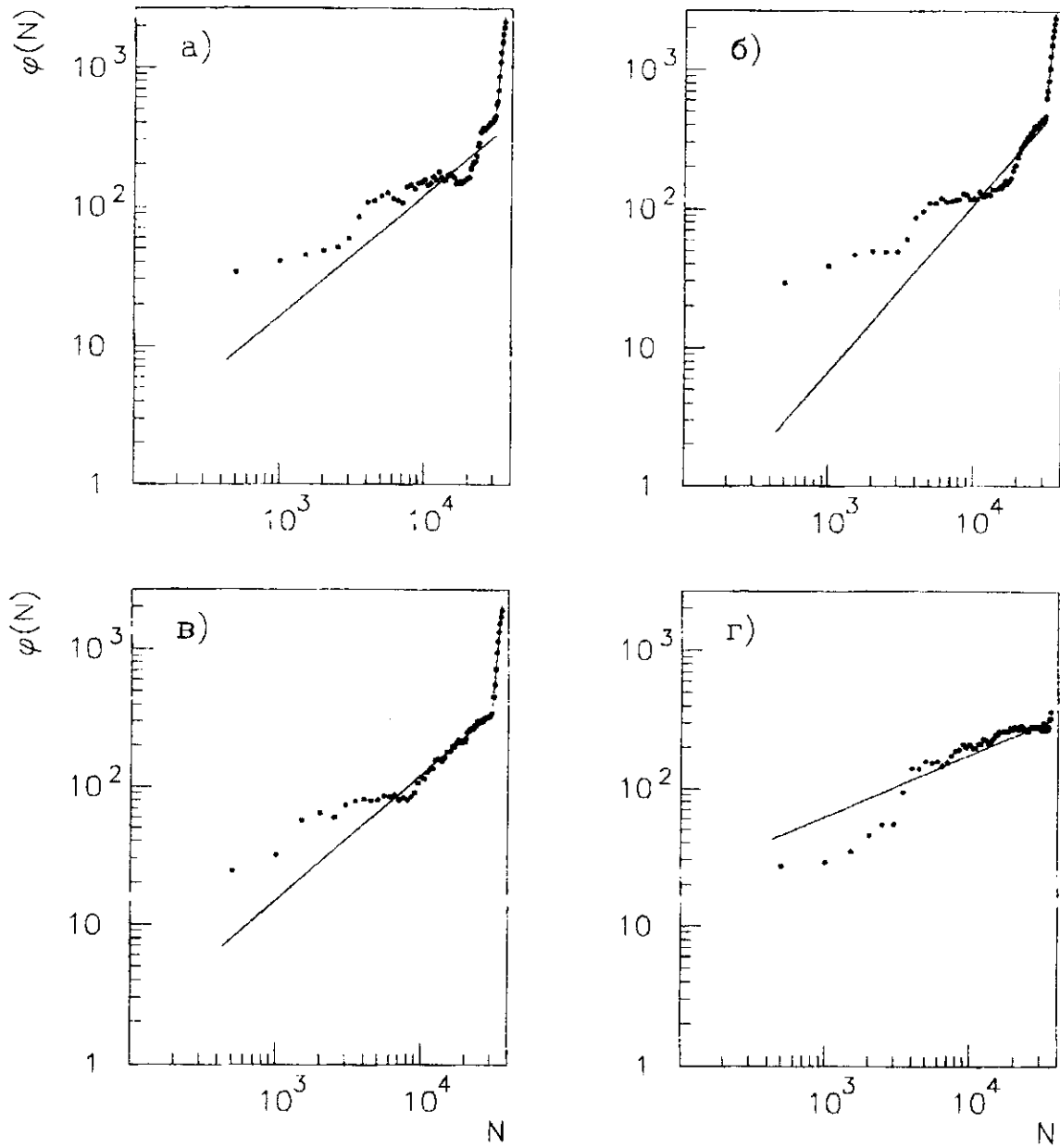


Рис. 5.

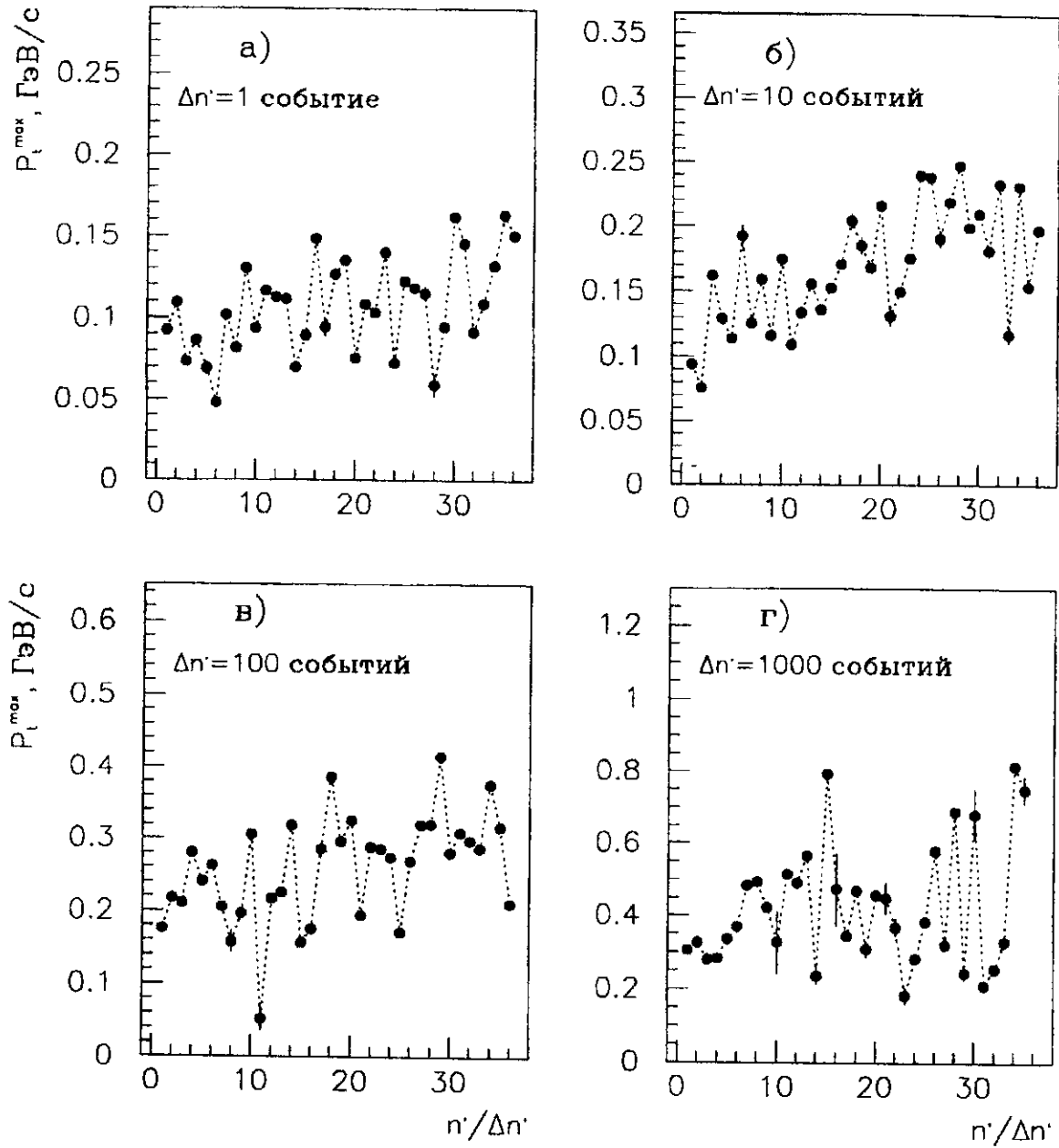


Рис. 6.

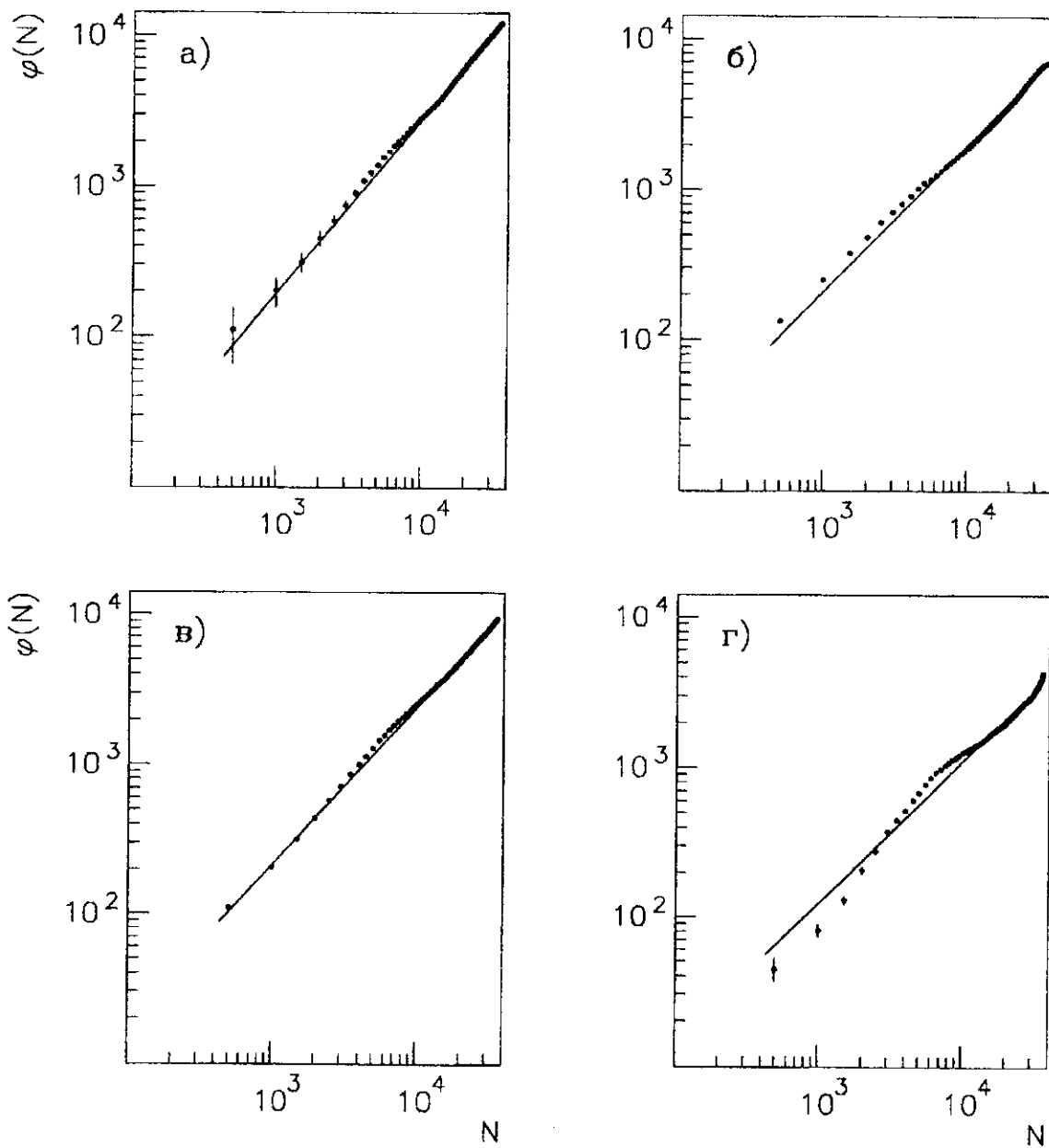


Рис.7.

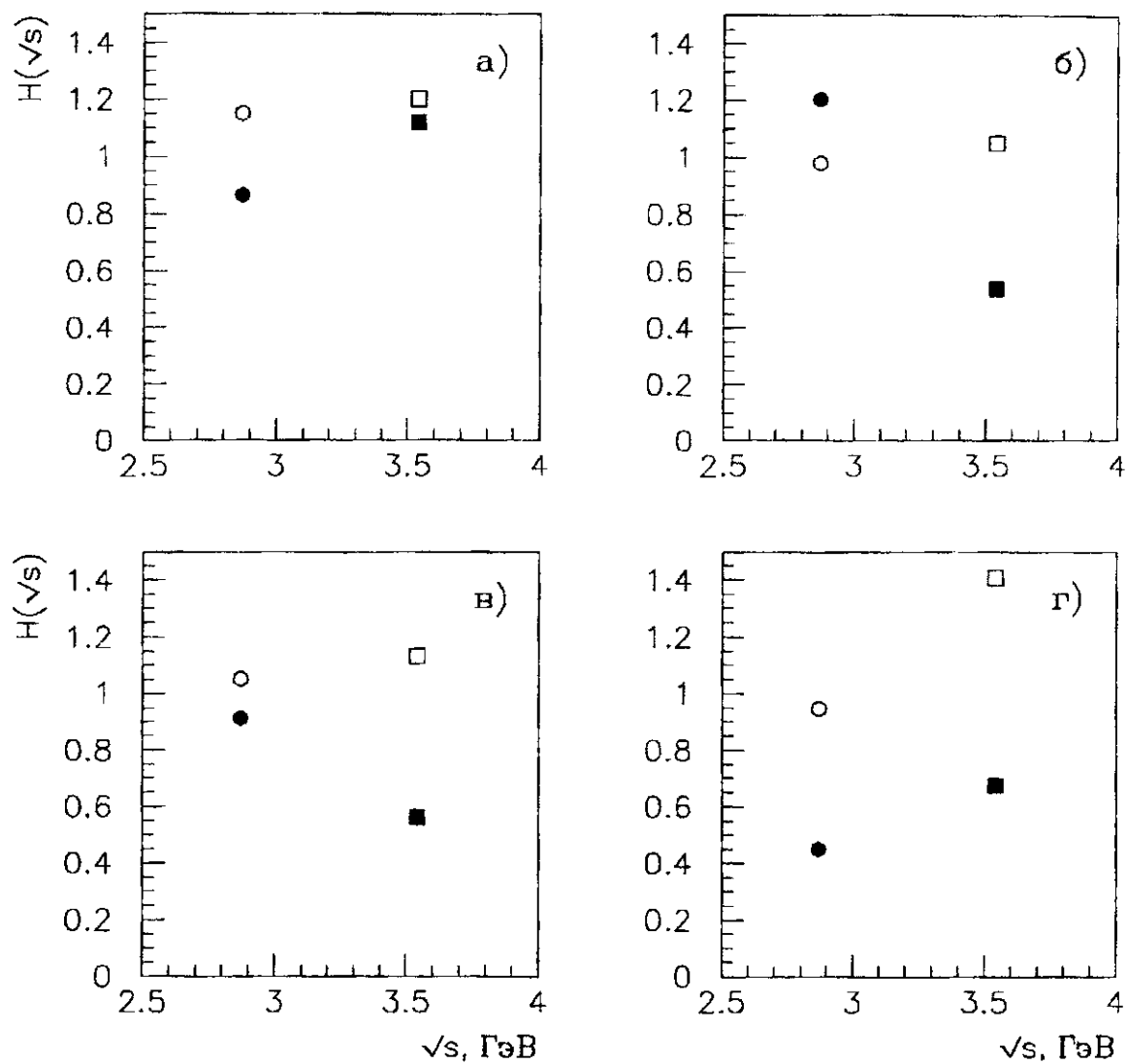


Рис. 8.

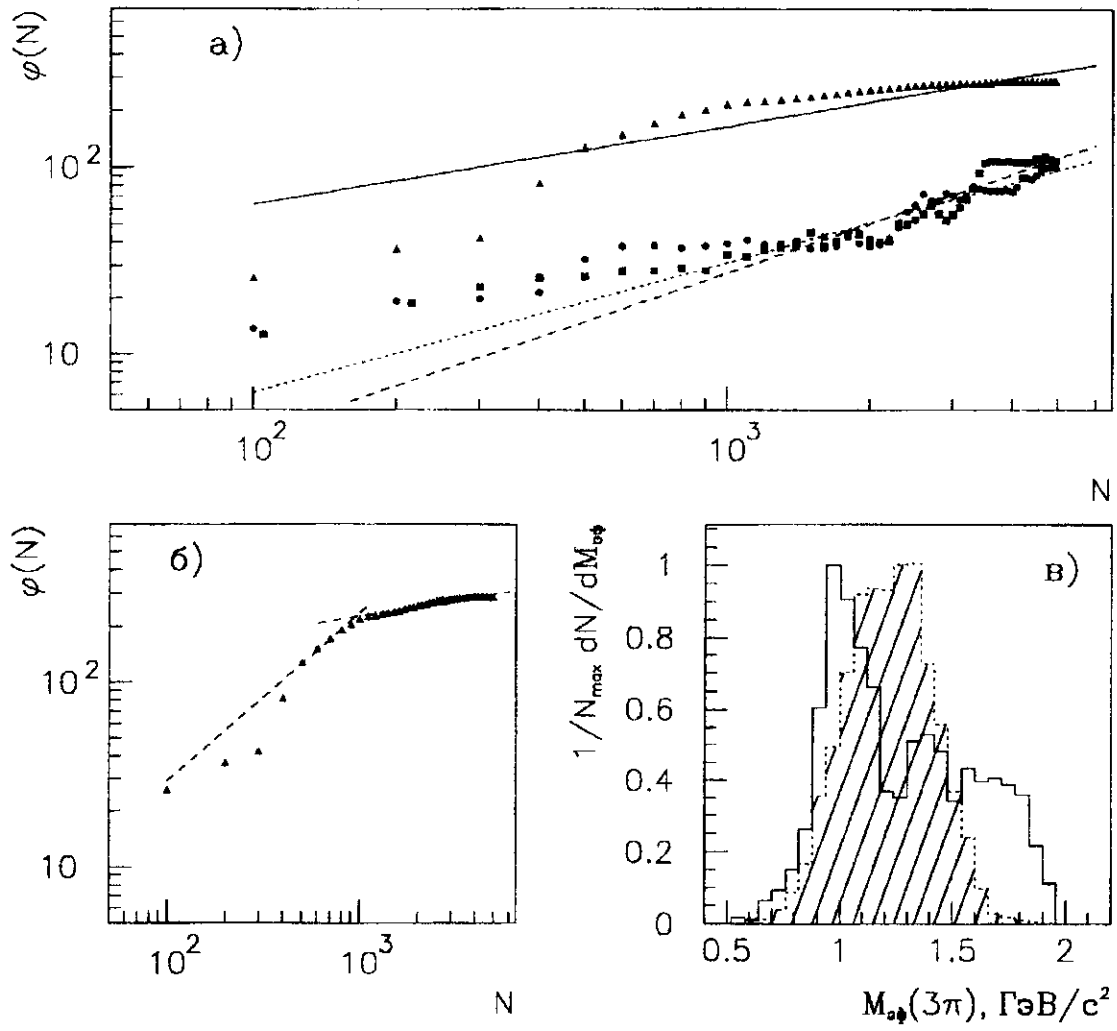


Рис. 9.

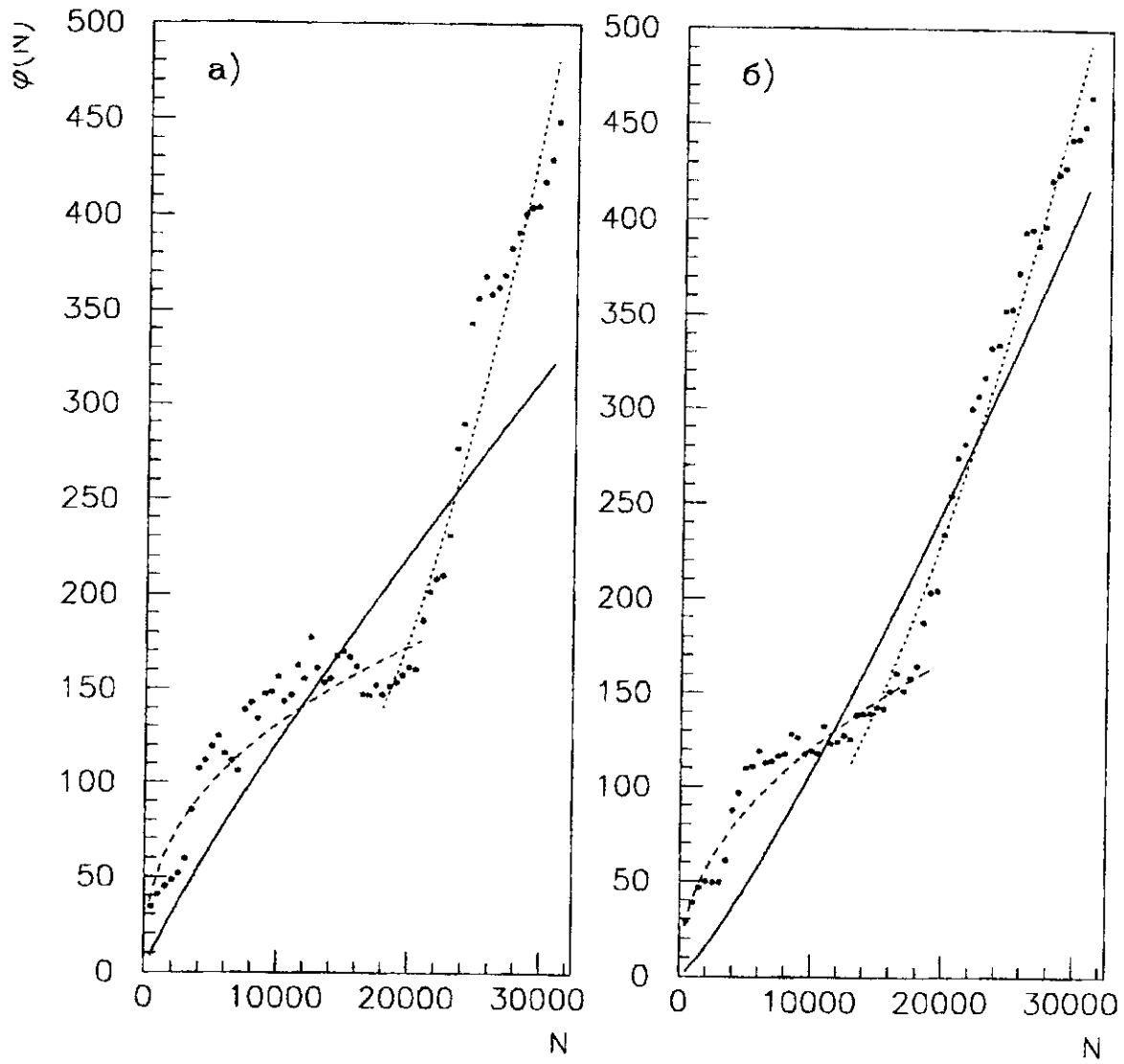


Рис. 10.



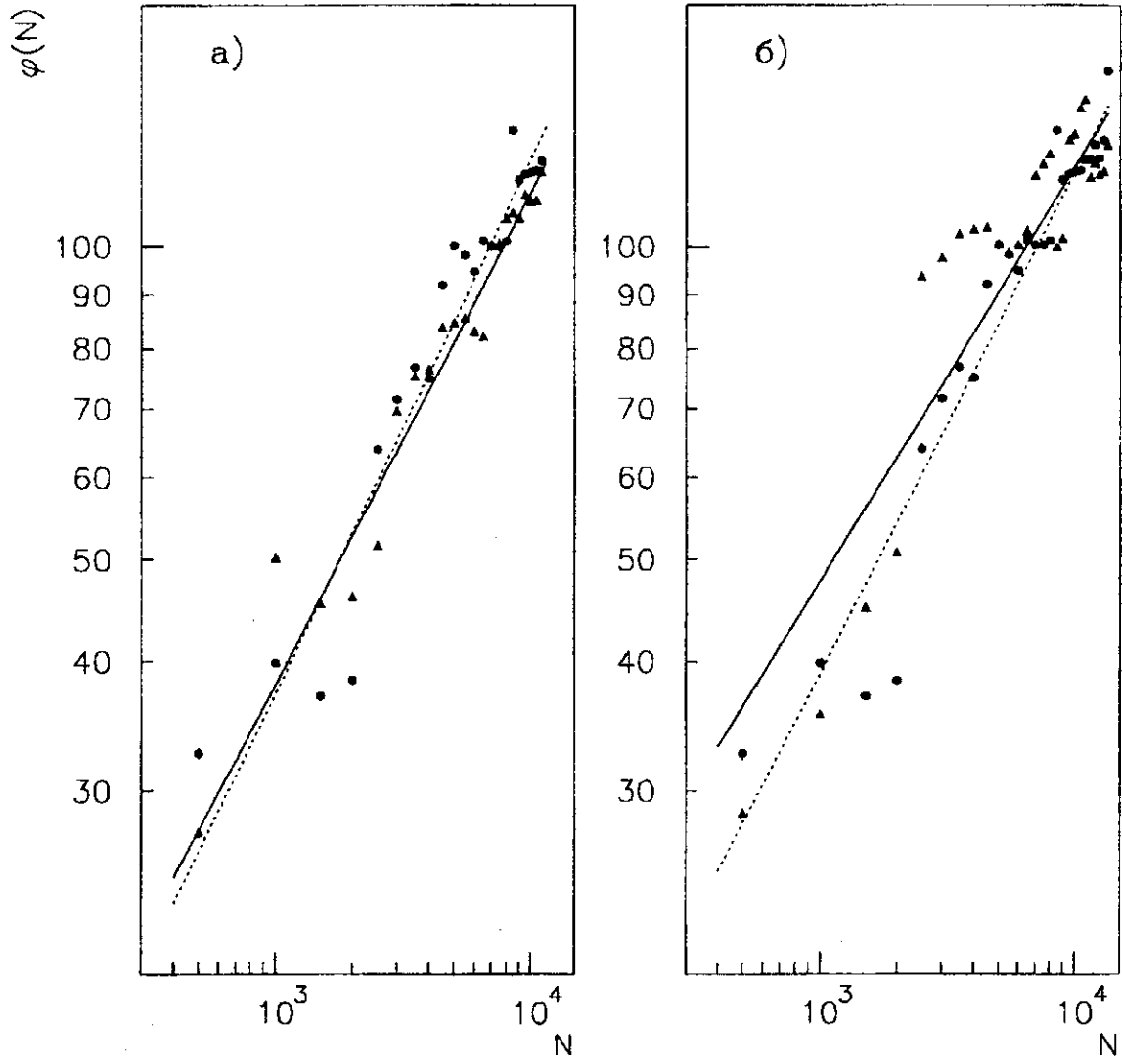


Рис. II.

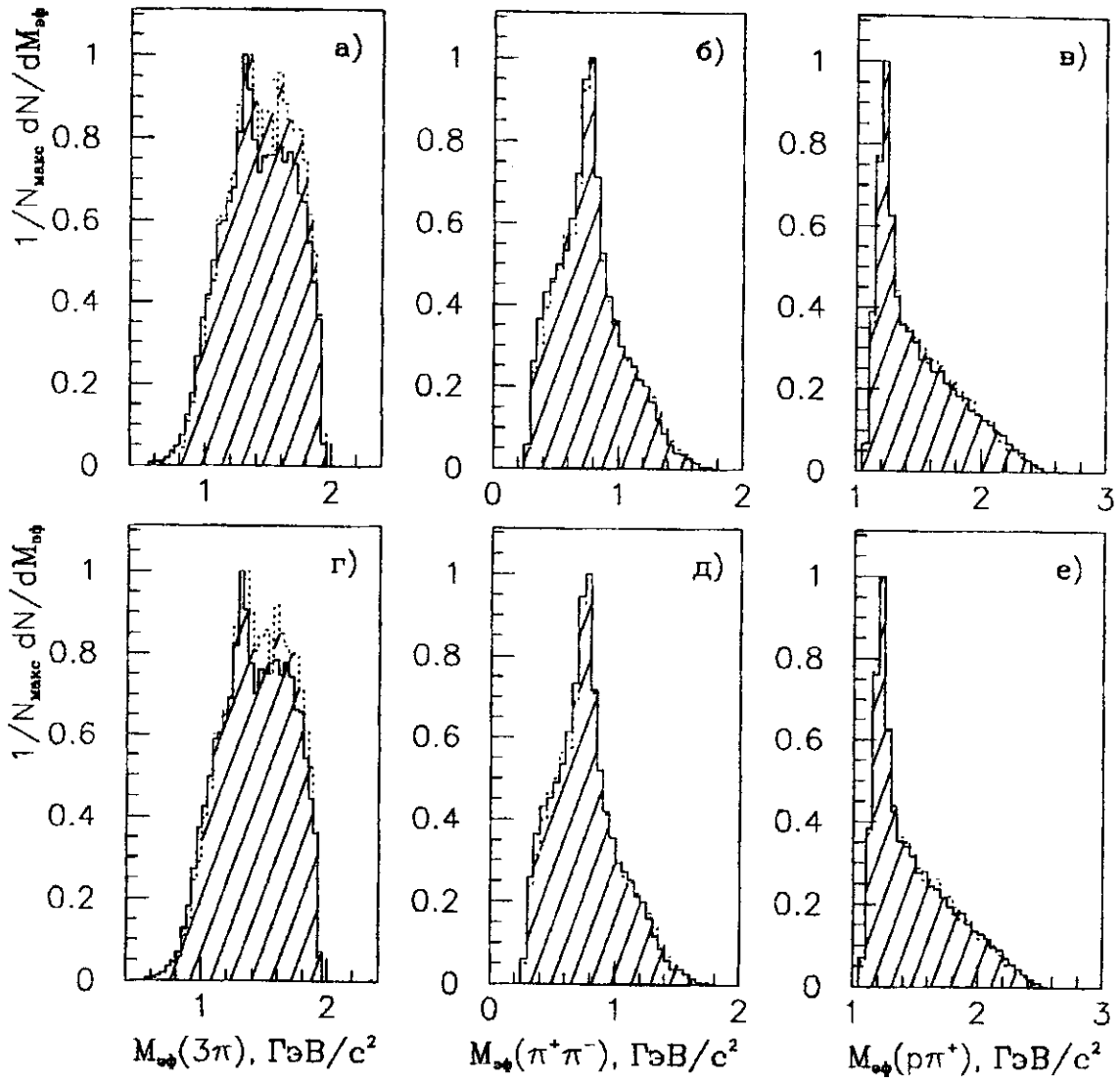


Рис. 12.

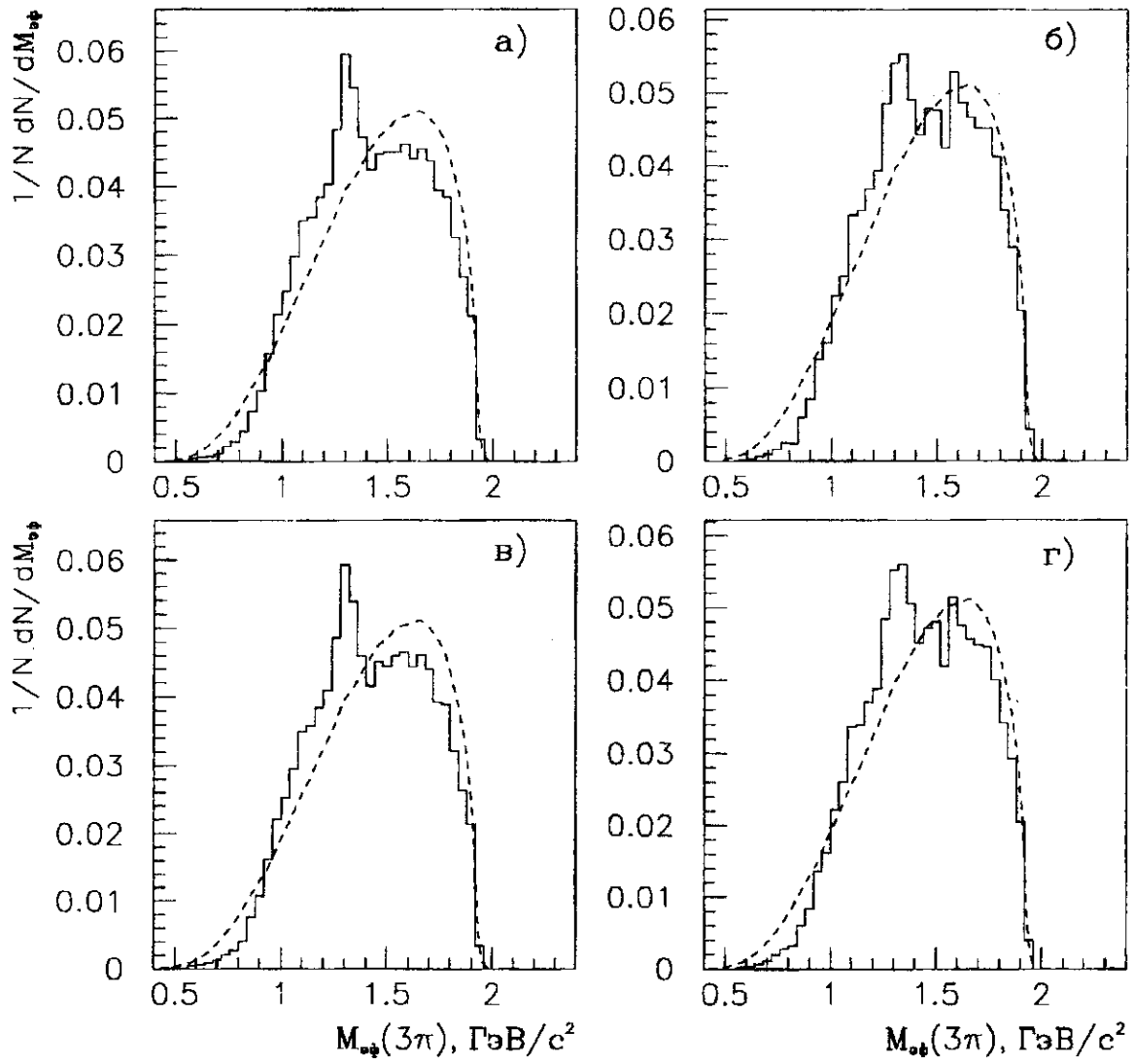


Рис.13.

## Подписи к рисункам

Рис.1. Зависимости  $p_t^{max}(n)$  для  $\pi^-$ -мезонов в случае естественного порядка событий в статистике при увеличении объема выборки с различным шагом  $\Delta n$ .

Рис.2. Зависимость  $\varphi(N)$  в случае неупорядоченной статистики для параметров  $\Delta\alpha$  (а),  $p_t^{max}$  (б),  $b_{min}^{max}$  (в) и  $\Delta y$  (г) для реакции (1).

Рис.3. Зависимости среднего значения  $\langle \Delta\alpha \rangle$  (а),  $\langle p_t^{max} \rangle$  (б),  $\langle b_{min}^{max} \rangle$  (в),  $\langle \Delta y \rangle$  (г) от номера события  $n$  для  $\pi^-p$ -взаимодействий. Сплошной линией показаны средние по всей статистике значения рассматриваемых параметров.

Рис.4. Распределения по эффективной массе системы ( $2\pi^-\pi^+$ ) для первых 31040 событий (а) и для последних 4932 событий (б) в неупорядоченной  $\pi^-p$ -статистике. Распределения нормированы на максимум.

Рис.5. Аппроксимация  $\varphi(N)$  степенной функцией (4) в случае реакции (1) для естественного порядка событий в статистике для  $\Delta\alpha$  (а),  $p_t^{max}$  (б),  $b_{min}^{max}$  (в),  $\Delta y$  (г).

Рис.6. Зависимости  $p_t^{max}(n')$  для  $\pi^-$ -мезонов в случае упорядоченной статистики при увеличении объема выборки с различным шагом  $\Delta n'$ .

Рис.7. Аппроксимация  $\varphi(N)$  степенной функцией (4) в случае реакции (1) для упорядоченной статистики для  $\Delta\alpha$  (а),  $p_t^{max}$  (б),  $b_{min}^{max}$  (в),  $\Delta y$  (г).

Рис.8. Зависимость показателя Херста  $H$  от энергии взаимодействия  $\sqrt{S}$  для параметров  $\Delta\alpha$  (а),  $p_t^{max}$  (б),  $b_{min}^{max}$  (в),  $\Delta y$  (г). Значения  $H$  для различных взаимодействий обозначаются следующим образом:  $\bullet$ ( $\circ$ ) - неупорядоченная (упорядоченная) статистика для  $\pi^-p$ -взаимодействий;  $\blacksquare$ ( $\square$ ) - неупорядоченная (упорядоченная) статистика для  $\pi^-Ne$ -реакций [16].

Рис.9. Зависимость  $\varphi(N)$  для параметра  $p_t^{sum}$  в случае неупорядоченных  $\pi^-p$ -взаимодействий (а,б) и распределения по эффективной массе системы ( $2\pi^-\pi^+$ ) для двух выборок из последних 4932 событий (в). На рис.а) значения  $\varphi(N)$  и аппроксимации степенной функцией для выборок объемом 4932 событий из различных частей статистики:  $\bullet$  (пунктирная линия) - при  $n=1-4932$ ,  $\blacksquare$  (штриховая линия) - при  $n=16501-21433$ ,  $\blacktriangle$  (сплошная линия) - при  $n=31040-35972$ . На рис.б) показаны аппроксимации  $\varphi(N)$  для двух выборок из последних 4932 событий. На рис.в) сплошной линией показано распределение для событий с  $n=31040-32040$ , пунктирной линией и штриховкой - распределение для событий с  $n=32041-35972$ ; распределения нормированы на максимум.

Рис.10. Зависимость  $\varphi(N)$  для параметра  $\Delta\alpha$  (а),  $p_i^{max}$  (б) в случае выборки объемом 31040 событий для неупорядоченных  $\pi^-$ -р-взаимодействий. Сплошная линия - аппроксимация  $\varphi(N)$  для всей выборки, штриховая линия - аппроксимация  $\varphi(N)$  для первых 20000 событий (а) и для первых 17500 событий (б), пунктирная линия - аппроксимация  $\varphi(N)$  для 11040 событий (а) и для 13540 событий (б).

Рис.11. Зависимость  $\varphi(N)$  для параметра  $p_i^{sum}$  в случае неупорядоченных  $\pi^-$ -р-взаимодействий для выборок объемом 11040 событий (а) и 13540 событий (б). Экспериментальные данные и аппроксимации  $\varphi(N)$  степенной функцией:  $\bullet$  (пунктирная линия) - для выборок событий с  $n=1-11040$  ( $n=1-13540$  - для рис.б)),  $\blacktriangle$  (сплошная линия) - для выборок событий с  $n=20001-31040$  ( $n=17501-31040$  - для рис.б)).

Рис.12. Распределения по эффективной массе в случае неупорядоченной  $\pi^-$ -р-статистики для различных выборок из первых 31040 событий для систем  $(2\pi^-\pi^+)$  - рис.(а) и (г),  $(\pi^-\pi^+)$  - рис.(б) и (д),  $(p\pi^+)$  - рис.(в) и (е). На рис.а)-в) распределения для выборки объемом 20000 событий показаны сплошной линией, распределения для выборки объемом 11040 событий показаны пунктирной линией и штриховкой. На рис.г)-е) сплошной линией показаны распределения для выборки объемом 17500 событий, пунктирной линией и штриховкой - распределения для выборки объемом 13540 событий.

Рис.13. Распределения по эффективной массе системы  $(2\pi^-\pi^+)$  в случае неупорядоченной  $\pi^-$ -р-статистики для выборок событий при:  $n=1-20000$  (а),  $n=20001-31040$  (б),  $n=1-17500$  (в),  $n=17501-31040$  (г). Экспериментальные распределения показаны сплошной линией, пунктиром показаны распределения по фазовому объему.

## Литература

1. Konishi K., Ukawa A., Veneziano G. // Nucl.Phys., 1979, V.B157, P.45.
2. Giovannini A. // Proceeding of IX Conference on multiparticle dynamics, 1979, P.364.
3. Carruthers P., Mihn Duong Van, Los Alamos Rep., LA-UR-83-2419, 1983.
4. Bialas A., Peschanski R. // Nucl.Phys., 1986, V.B273, P.730.
5. И.М.Дремин. // Письма в ЖЭТФ, 1987, Т.45, С.643.
6. А.В.Батунин. // УФН, 1995, Т.165, С.645.
7. Dokshitzer Yu.L., Dremin I.M. // Nucl.Phys., 1993, V.B402, P.139.
8. И.М.Дремин, М.Т.Назиров. // ЯФ, 1992, Т.55, С.197.
9. Hwa R.C. // Phys.Rev., 1193, V.D47, P.2773.
10. H.E.Hurst, R.P.Black, Y.M.Simaika. // Long-term storage: an experimental study. London, Constable, 1965.
11. В.И.Михайличенко и др. Препринт ИТЭФ, М., 1994, N79, 9 с.
12. В.И.Михайличенко и др. Препринт МИФИ, М., 1995, N2, 28 с.
13. Abramovich M. et al. // Nucl.Phys., 1970, V.B20, P.209.
14. Losty M.J. et al. // Phys.Lett., 1975, V.B56, P.96.
15. Федер Е. // Фракталы. М.: Мир, 1991.
16. В.И.Михайличенко и др. Препринт ИТЭФ, М., 1999, N21, 20 с.

---

Подписано к печати 10.08.99    Формат 60x90    1/16  
Усл.-печ.л.1,75.    Уч.-изд.л.1,3.    Тираж 121 экз.    Заказ 27.  
Индекс 3649

---

Отпечатано в ИТЭФ, П17259, Москва, Б.Черемушкинская, 25

**Индекс 3649**

**Препринт 27 -99, ИТЭФ, 1999**