

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ**

**Дубна**

CERN LIBRARIES, GENEVA



SCAN-9911107

P11-99-159

И.В.Амирханов, Е.В.Земляная, И.В.Пузынин,  
Т.П.Пузынина, Т.А.Стриж

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ  
УРАВНЕНИЙ НА СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ  
С КУЛОНОВСКИМ И ЛИНЕЙНЫМ  
ПОТЕНЦИАЛАМИ\***

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 97-01-01040)

**1999**

# 1. Введение

Численный анализ ряда релятивистских потенциальных моделей (см., в частности, [1]-[3]) сводится к решению задач на собственные значения для интегральных уравнений в импульсном пространстве. Одна из трудностей исследования таких задач связана с тем, что в качестве эффективного потенциала в указанных моделях, по аналогии с нерелятивистским подходом [4], обычно используется комбинация кулоновского  $V_C$  и линейно растущего  $V_L$  потенциалов:

$$V_C(|\vec{p} - \vec{q}|) = -\alpha \frac{4\pi}{|\vec{p} - \vec{q}|^2}, \quad \alpha > 0, \quad (1)$$

$$V_L(|\vec{p} - \vec{q}|) = -\sigma \frac{8\pi}{|\vec{p} - \vec{q}|^4}, \quad \sigma > 0, \quad (2)$$

что приводит к расходимостям в ядрах интегральных уравнений при  $\vec{p} = \vec{q}$  и  $\vec{p} \rightarrow \infty$ . В ряде работ (в частности, [1]) расходимость интегралов устраняется за счет дополнительно введенных в исходные уравнения контрчленов (т.н. перенормировка).

Другой подход предполагает модификацию эффективного потенциала на уровне координатного представления путем его аппроксимации некоторыми элементарными функциями. Исследование свойств ряда таких аппроксимирующих потенциалов проведено в работе [5].

В некоторых случаях расходимость под интегралом удается убрать с помощью специального преобразования исходных уравнений. В частности, такой подход рассматривается в работе [6] применительно к определенному классу задач. В работах [7] и [8] используется другой способ преобразования исходных уравнений для численного исследования КХД-инспирированной модели кваркония.

В настоящей работе исследуется обобщение разработанных в [8] и [5] приемов на случай т.н. запаздывающего взаимодействия. При этом потенциалы (1) и (2) принимают соответственно вид

$$V_C(|\vec{p} - \vec{q}|) = -\alpha \frac{4\pi}{|\vec{p} - \vec{q}|^2 - (E_p - E_q)^2}, \quad (3)$$

$$V_L(|\vec{p} - \vec{q}|) = -\sigma \frac{8\pi}{(|\vec{p} - \vec{q}|^2 - (E_p - E_q)^2)^2}, \quad (4)$$

где  $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ ,  $E_q = \sqrt{q^2 + m^2}$ ,  $m$  – масса (параметр модели).

Переход от потенциалов (1), (2) к (3), (4) означает на уровне координатного представления переход к нелокальному взаимодействию, т.е. исходные дифференциальные уравнения в координатном пространстве становятся интегродифференциальными. Это сильно усложняет интуитивное представление о свойствах спектральной задачи с такими потенциалами.

В качестве примера мы будем рассматривать следующее релятивистское уравнение [9], [10]:

$$[Q(p) - E_{nl}^{(\beta)}] \phi_{nl}^{(\beta)}(p) - \int_0^{\infty} dq V_l^{(\beta)}(p, q) \phi_{nl}^{(\beta)}(q) = 0, \quad (5)$$

где

$$Q(p) = 2(E_p - m), \quad (6)$$

$$V_l^{(\beta)}(p, q) = \int_{-1}^{+1} dx V^{(\beta)}(p, q, x) P_l(x), \quad (7)$$

с условием нормировки

$$\int_0^{\infty} (\phi_{nl}^{(\beta)}(p))^2 dp = 1. \quad (8)$$

Здесь  $n = 0, 1, 2, \dots$  (число нулей собственной функции),  $m$  – параметр (масса),  $l = 0, 1, 2, \dots$ ,  $P_l$  – полиномы Лежандра,  $\beta = 1, 2, 3, 4$  соответствует четырем указанным выше типам взаимодействия (1), (2), (3), (4).

Отметим, что целый ряд релятивистских обобщений уравнения Шредингера отличается от задачи (5), (6) только видом функции  $Q(p)$  [3].

Нерелятивистский случай, который будет использоваться для сравнения и тестирования, соответствует функции

$$Q(p) = \frac{p^2}{m} \quad (9)$$

в задаче (5), (7), (8).

В дальнейшем мы будем обозначать решения нерелятивистского уравнения (5), (9) индексом  $NR$ . Решения релятивистского уравнения (5), (6) будут обозначаться  $R$  при  $\beta = 1, 2$  и  $RT$  при  $\beta = 3, 4$ .

В следующих двух разделах представлены постановка задачи и методы численного анализа уравнения (5) с кулоновским и линейным потенциалами. В последнем разделе обсуждаются некоторые свойства спектра рассматриваемого уравнения с учетом релятивистских эффектов. Демонстрируются соответствующие численные результаты.

Для расчетов использовались вычислительные схемы и программы, разработанные на основе непрерывного аналога метода Ньютона [11].

## 2. Кулоновский потенциал

Для кулоновских потенциалов (1) и (3) выражение (7) может быть записано в следующей форме:

$$V_l^{(1)}(p, q) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-1}^{+1} dt \frac{P_l(t)}{y-t}, \quad y = \frac{p^2 + q^2}{2pq}, \quad (10)$$

$$V_l^{(3)}(p, q) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-1}^{+1} dt \frac{P_l(t)}{y-t}, \quad y = \frac{p^2 + q^2 - (E_p - E_q)^2}{2pq}. \quad (11)$$

Отметим, что численное решение нерелятивистского уравнения (5), (9) с кулоновским потенциалом (10) не представляет принципиальных трудностей, связанных с сингулярностью ядра интеграла. Однако при решении других уравнений в рамках КХД, в частности уравнения Швингера - Дайсона [1, 2], использование кулоновского потенциала приводит к неустрашимым расходимостям в этих уравнениях.

В частном случае  $l = 0$  формулы (10), (11) можно представить в виде

$$V_0^{(1)}(p, q) = \frac{\alpha}{\pi} \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right|, \quad (12)$$

$$V_0^{(3)}(p, q) = V_0^{(1)}(p, q) + \tilde{V}_0^{(3)}(p, q), \quad (13)$$

где

$$\bar{V}_0^{(3)}(p, q) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left| \frac{E_p E_q + m^2 + pq}{E_p E_q + m^2 - pq} \right|. \quad (14)$$

В нерелятивистском случае в работе [7] для устранения особой точки (при  $p = q$ ) уравнение (5) преобразовывалось следующим образом [7]:

$$\begin{aligned} [Q(p) - E_{n0}] \phi_{n0}(p) - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} dq \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| (\phi_{n0}(q) - \phi_{n0}(p)) + \\ - \frac{\alpha}{\pi} \phi_{n0}(p) I_2(p) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$I_2(p) = \int_0^{\infty} dq \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right|. \quad (16)$$

При переходе от полубесконечного интервала интегрирования  $[0, \infty)$  к конечному отрезку  $[0, P_M]$  интеграл (16) вычисляется аналитически:

$$I_2(p) = (P_M + p) \ln(P_M + p) - (P_M - p) \ln(P_M - p) - 2p \ln p$$

и решение задачи (15) на конечном интервале  $[0, P_m]$  при  $P_M \rightarrow \infty$  сходится к решению исходной сингулярной задачи. Такой прием применялся нами для численного анализа уравнений Швингера - Дайсона и Бете - Солпитера в работе [8].

Однако использование аналогичного подхода для решения релятивистской задачи (5), (6) приводит к тому, что, наряду с существованием решения для каждого фиксированного  $P_M$ , стабилизация решения при  $P_M \rightarrow \infty$  для потенциала (1) происходит очень медленно, а для потенциала (3) не происходит вообще (с ростом  $P_M$  собственное значение уменьшается в абсолютном значении и начиная с некоторого значения меняет знак, т.е. решение перестает существовать). Зависимость собственных значений  $E_{00}^R$  (потенциал (12)) и  $E_{00}^{RT}$  (потенциал (13)) от  $P_M$  представлена в таблице 1. Для сравнения даны также вычисленные по той же программе собственные значения  $E_{00}^{NR}$  нерелятивистского уравнения

(5), (9), (12), демонстрирующие сходимость к аналитическому значению  $E_{00}^*(m) = -15$ ,  $m = 15$  при  $P_M \rightarrow \infty$ .

Таблица 1.  $m = 15, \alpha = 2, n = 0, l = 0$

$P_M$	$E_{00}^R$	$E_{00}^{RT}$	$E_{00}^{NR}$
50	-19,52	-17,75	-14,21
100	-27,44	-20,47	-14,86
200	-33,59	-18,83	-14,98
300	-48,92	-14,02	-14,99
400	-58,15	-8,25	-15,00
500	-67,05	-1,92	-15,00

Вопрос существования решений уравнения (5), (6) с потенциалами (1), (3) тесно связан с поведением потенциалов  $V_0^{(1)}(p, q)$  и  $V_0^{(3)}(p, q)$  при различных значениях аргументов. В частности, если  $p = q$ , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} V_0^{(3)}(p, p) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{p^2 + m^2}{m^2}\right) \rightarrow \infty. \quad (17)$$

При фиксированном значении  $q = \bar{q}$  имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} V_0^{(3)}(p, \bar{q}) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{(E_{\bar{q}} + \bar{q})^2}{m^2}\right). \quad (18)$$

Из точного решения нерелятивистской задачи с кулоновским потенциалом в импульсном представлении следует

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \phi_{n0}^{NR}(p) = \frac{1}{p^3}, \quad (19)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [Q - E_{n0}^{NR}] \phi_{n0}^{NR}(p) = \frac{1}{p}, \quad (20)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int V_0^{(1)}(p, q) \phi_{n0}^{NR}(q) dq = \frac{1}{p}. \quad (21)$$

В случае существования решения уравнения (5), (6) с потенциалом (1), при выполнении условия (21), в пределе  $p \rightarrow \infty$  получаем

$$\phi_{n0}^R(p) \rightarrow \frac{1}{p^2}. \quad (22)$$

Это означает, что  $\phi_{n0}^R$  затухает существенно медленнее, чем собственная функция нерелятивистского уравнения, что и подтверждается расчетами.

С другой стороны, предполагая существование решения задачи (5), (6) с потенциалом (3), имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} V_0^{(3)}(p, q) \phi_{n0}^{RT}(q) dq = C_1, \quad (23)$$

где

$$C_1 = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} \ln \left[ \frac{(E_q + q)}{m} \right]^2 \phi_{n0}^{RT}(q) dq. \quad (24)$$

Тогда асимптотическое поведение решения должно иметь вид

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \phi_{n0}^{RT}(p) = \frac{C_1}{p}. \quad (25)$$

Однако при этом мы получаем  $C_1 = \infty$ , что указывает на отсутствие решения задачи (5), (6) с потенциалом (3).

Отметим также, что при численном решении интегральный член уравнения (5) обычно представляется в виде

$$\int_0^{\infty} V_0^{(3)}(p, q) \phi_{n0}^{RT}(q) dq = I_1(p) + I_2(p), \quad (26)$$

где

$$I_1(p) = \int_0^{P_M} V_0^{(3)}(p, q) \phi_{n0}^{RT}(q) dq, \quad (27)$$

$$I_2(p) = \int_{P_M}^{\infty} V_0^{(3)}(p, q) \phi_{n0}^{RT}(q) dq \quad (28)$$

и, далее, параметр  $P_M$  выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие

$$I_2(p, P_{M_1}) < I_2(p, P_{M_2}) < \epsilon \quad \text{при} \quad P_{M_1} > P_{M_2}, \quad (29)$$

где  $\epsilon$  – заранее заданное положительное малое число.

Из-за свойств (17), (18) и (23) условие (29) не выполняется. Из таблицы 1 видно, что при увеличении  $P_M$  стабилизации решений не происходит. Поэтому полученные численные результаты можно

интерпретировать как отсутствие решения задачи (5), (6) с потенциалом (3), хотя этот вопрос требует дальнейшего строгого теоретического исследования.

Как уже отмечалось выше, "исправить" ситуацию с расходимостями в нуле и на бесконечности можно, заменив исходный потенциал некоторой аппроксимирующей функцией. При этом правильный выбор параметров этой аппроксимирующей функции позволяет получить заданное количество состояний с известной точностью. Одна из таких модификаций, рассмотренная в [5], имеет вид

$$V_C(r) = \begin{cases} \alpha/r_1, & 0 \leq r < r_1, \\ \alpha/r, & r_1 \leq r \leq r_2, \\ 0, & r_2 < r < \infty, \end{cases} \quad (30)$$

где  $r_1 < r_2$  – параметры. При этом потенциал  $V^{(\beta)}(p, q, x)$  в формуле (7) принимает вид

$$V^{(\beta)}(p, q, x) = V(\hat{p}^{(\beta)}) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{pq}{(\hat{p}^{(\beta)})^2} \left[ \frac{\sin \hat{p}^{(\beta)} r_1}{\hat{p}^{(\beta)} r_1} - \cos \hat{p}^{(\beta)} r_2 \right], \quad (31)$$

где  $\beta = 1, 3$ ,

$$\hat{p}^{(1)} = \sqrt{p^2 + q^2 - 2pqx}, \quad (32)$$

$$\hat{p}^{(3)} = \sqrt{p^2 + q^2 - 2pqx - (E_p - E_q)^2}. \quad (33)$$

Поскольку

$$\lim_{p \rightarrow q} V^{(\beta)}(p, q, x) = \text{const} < \infty,$$

потенциал (31) не имеет сингулярности при  $p = q$ , что делает его удобным в численном анализе. Таблица 2 подтверждает стабилизацию (хотя и медленную) собственных значений  $E_{n0}^R$  ( $n = 0, 1$ ) релятивистского уравнения (5), (6) с потенциалом (31), (32) при увеличении интервала интегрирования  $P_M$ . Однако такой вариант не позволяет получить решение задачи с "запаздывающим потенциалом" (31), (33). Для сравнения в таблице даны также собственные значения  $E_{n0}^{NR}$  ( $n = 0, 1$ ) нерелятивистской задачи (5), (6) с потенциалом (31), (32), позволяющие оценить точность аппроксимации кулоновского потенциала с помощью представления (31) (аналитические собственные значения  $E_{00}^{NR*} = -1$ ,  $E_{10}^{NR*} = -0,25$  при  $m = 1$ ).



Таблица 2.  $m = 1, \alpha = 2, l = 0, r_1 = 0,01, r_2 = 20$

$P_M$	$E_{00}^R$	$E_{10}^R$	$P_M$	$E_{00}^{RT}$	$E_{10}^{RT}$	$P_M$	$E_{00}^{NR}$	$E_{10}^{NR}$
20	-3,247	-0,638	20	-8,053	-0,959	10	-0,997	-0,249
40	-4,949	-0,840	40	-55,11	-1,393	20	-0,999	-0,250
60	-6,444	-0,983	60	-109,6	-1,785	30	-0,999	-0,250
80	-7,707	-1,089	80	-165,8	-2,162	40	-1,000	-0,250
100	-8,769	-1,170	100	-222,6	-2,537	50	-1,000	-0,250
120	-9,610	-1,231	120	-279,3	-2,858	60	-1,000	-0,250
150	-9,903	-1,252	150	-367,9	-3,213	70	-1,000	-0,250

Другой способ модификации исходного потенциала, устраняющий сингулярности в нуле и на бесконечности, представляет собой комбинацию двух потенциалов Юкавы:

$$V_Y(x) = \alpha \left[ \frac{\exp(-\mu_1 x) - \exp(-\mu_2 x)}{x} \right], \quad (34)$$

где  $\mu_1 \ll 1, \mu_2 \gg 1$  - параметры.

При  $l = 0$  импульсное представление потенциала (34) принимает вид

$$V_Y(p, q) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \ln \frac{(p+q)^2 + \mu_1^2}{(p-q)^2 + \mu_1^2} - \ln \frac{(p+q)^2 + \mu_2^2}{(p-q)^2 + \mu_2^2} \right]. \quad (35)$$

Запаздывающее взаимодействие вводится в потенциал (35) следующим образом:

$$V_Y(p, q) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \ln \frac{(p+q)^2 + \mu_1^2 - \delta}{(p-q)^2 + \mu_1^2 - \delta} - \ln \frac{(p+q)^2 + \mu_2^2 - \delta}{(p-q)^2 + \mu_2^2 - \delta} \right], \quad (36)$$

где

$$\delta = (\sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{q^2 + m^2})^2. \quad (37)$$

В таблицах 3а,б даны собственные значения  $E^R$  и  $E^{RT}$  уравнения (5) с потенциалами (35) и (36) соответственно при разных значениях параметров  $\mu_1, \mu_2$ . Как и в таблицах 1, 2, для сравнения представлены численные результаты для нерелятивистского случая.

Таблица 3а.  $m = 1, \alpha = 2, l = 0, \mu_1 = 0,01, \mu_2 = 5$

$P_M$	$E_{00}^R$	$E_{10}^R$	$P_M$	$E_{00}^{RT}$	$E_{10}^{RT}$	$P_M$	$E_{00}^{NR}$	$E_{10}^{NR}$
10	-1,266	-0,364	50	-25,91	-1,55	10	-0,865	-0,225
20	-1,268	-0,365	100	-50,68	-2,83	20	-0,866	-0,226
30	-1,268	-0,365	200	-99,88	-5,47	30	-0,866	-0,226

Таблица 3б.  $m = 1, \alpha = 2, l = 0, \mu_1 = 0,001, \mu_2 = 10$

$P_M$	$E_{00}^R$	$E_{10}^R$	$P_M$	$E_{00}^{RT}$	$E_{10}^{RT}$	$P_M$	$E_{00}^{NR}$	$E_{10}^{NR}$
10	-1,723	-0,469	50	-44,43	-1,62	10	-1,018	-0,266
20	-1,771	-0,479	100	-89,56	-3,01	20	-1,017	-0,265
30	-1,774	-0,480	200	-179,3	-6,13	30	-1,017	-0,265

Отметим, что с указанными значениями параметров потенциал (35) является более грубым приближением к кулоновскому, в чем можно убедиться, сравнивая результаты решения нерелятивистского уравнения (5), (9). При этом, как видно из таблиц 2, 3, потенциал (35) обеспечивает более быструю "стабилизацию" решения релятивистского уравнения (5), (6) при  $P_M \rightarrow \infty$  по сравнению с потенциалом (31). С другой стороны, сравнивая левые части таблиц 3а,б, можно заметить, что более "аккуратная" аппроксимация кулоновского потенциала комбинацией потенциалов Юкавы ( $\mu_1 = 0,001, \mu_2 = 10$ ) приводит к более медленной стабилизации собственных значений с увеличением интервала интегрирования. Как и в случае потенциала (31), для запаздывающего взаимодействия нам не удалось добиться стабилизации решений при увеличении интервала интегрирования.

### 3. Линейный потенциал

Для представления линейного потенциала мы будем использовать следующий подход [5]:

$$V_L(r) = \sigma \begin{cases} r, & 0 \leq r < r_M \\ r_M, & r_M \leq r < \infty \end{cases}, \quad (38)$$

где  $r_M$  – параметр потенциала, который выбирается так, чтобы обеспечить вычисление нужного числа состояний. В импульсном представлении потенциал  $V^{(\beta)}(p, q, x)$  в формуле (7) примет вид

$$V^{(\beta)}(p, q, x) = V(\hat{p}^{(\beta)}) + \sigma r_M (2\pi)^3 \delta(|\vec{p} - \vec{q}|), \quad (39)$$

где

$$V^{(\beta)}(\hat{p}^{(\beta)}) = -\frac{\sigma}{\pi} \frac{pq}{(\hat{p}^{(\beta)})^2} \left[ \frac{r_M}{\hat{p}^{(\beta)}} \sin(\hat{p}^{(\beta)} r_M) - \frac{4}{(\hat{p}^{(\beta)})^2} \sin^2\left(\frac{\hat{p}^{(\beta)} r_M}{2}\right) \right], \quad (40)$$

$\beta = 2, 4$ ;  $\hat{p}^{(2)} = \hat{p}^{(1)}$  ( формула 32) и  $\hat{p}^{(4)} = \hat{p}^{(3)}$  ( формула 33).

В таблицах 4а-в представлены собственные значения  $E_{nl}^{NR}$  нерелятивистской задачи (5), (9), собственные значения  $E_{nl}^R$  релятивистской задачи (5), (6) с потенциалом (2) и собственные значения  $E_{nl}^{RT}$  релятивистской задачи (5), (6) с запаздывающим взаимодействием (4). Вычисления во всех случаях велись с использованием представленной здесь модификации линейного потенциала (38). В таблицах даны также отношения  $\Gamma_{nl}^R = E_{nl}^R / E_{0l}^R$  и  $\Gamma_{nl}^{RT} = E_{nl}^{RT} / E_{0l}^{RT}$ . Для сравнения представлены аналогичные результаты из работ [5] и [6]. Везде  $\sigma = 1$ .

Таблица 4а.  $l = 0$

$m$	$n$	$E_{n0}^{NR}$	$E_{n0}^R$	$\Gamma_{n0}^R$	$E_{n0}^{RT}$	$\Gamma_{n0}^{RT}$	$\Gamma_{n0}^R$ [5]	$\Gamma_{n0}^R$ [6]	$\Gamma_{n0}^{RT}$ [6]
5	0	1,367	1,350		0,409				
	1	2,391	2,338	1,73	0,868	2,12	1,71	1,67	1,90
	2	3,228	3,133	2,32	1,323	3,24	2,28	2,18	2,73
	3	3,969	3,828	2,84	1,780	4,35	2,76	2,62	3,52
10	0	1,085	1,080		0,874				
	1	1,897	1,880	1,74	1,544	1,77			
	2	2,562	2,531	2,34	2,102	2,41			
	3	3,150	3,103	2,87	2,603	2,98			
15	0	0,948	0,945		0,834				
	1	1,658	1,649	1,74	1,465	1,76	1,74	1,72	1,79
	2	2,239	2,224	2,35	1,987	2,38	2,34	2,30	2,47
	3	2,753	2,728	2,87	2,451	2,94	2,87	2,80	3,09

Таблица 4б.  $l = 1$ 

$m$	$n$	$E_{n1}^{NR}$	$E_{n1}^R$	$\Gamma_{n1}^R$	$E_{n1}^{RT}$	$\Gamma_{n1}^{RT}$	$\Gamma_{n1}^R[5]$	$\Gamma_{n1}^R[6]$	$\Gamma_{n1}^{RT}[6]$
5	0	1,966	1,936		0,635				
	1	2,856	2,786	1,44	1,092	1,72	1,42	1,39	1,56
	2	3,630	3,515	1,82	1,549	2,44	1,82	1,71	2,09
	3	4,331	4,168	2,15	2,008	3,16	2,14	2,00	2,60
10	0	1,560	1,550		1,264				
	1	2,267	2,244	1,45	1,853	1,47			
	2	2,881	2,842	1,83	2,373	1,88			
	3	3,437	3,382	2,18	2,851	2,26			
15	0	1,363	1,358		1,202				
	1	1,980	1,968	1,45	1,755	1,46	1,44	1,43	1,49
	2	2,516	2,496	1,84	2,240	1,86	1,83	1,80	1,92
	3	3,003	2,974	2,19	2,682	2,23	2,17	2,13	2,33

Таблица 4в.  $l = 2$ 

$m$	$n$	$E_{n2}^{NR}$	$E_{n2}^R$	$\Gamma_{n2}^R$	$E_{n2}^{RT}$	$\Gamma_{n2}^{RT}$	$\Gamma_{n2}^R[5]$	$\Gamma_{n2}^R[6]$	$\Gamma_{n2}^{RT}[6]$
5	0	2,484	2,441		0,857				
	1	3,292	3,205	1,31	1,314	1,53	1,30	1,27	1,41
	2	4,017	3,883	1,59	1,797	2,10	1,56	1,51	1,80
	3	4,684	4,500	1,84	2,234	2,61	1,80	1,72	2,19
10	0	1,972	1,958		1,605				
	1	2,613	2,584	1,32	2,145	1,34			
	2	3,188	3,144	1,61	2,637	1,64			
	3	3,718	3,656	1,87	3,097	1,93			
15	0	1,723	1,715		1,523				
	1	2,283	2,268	1,31	2,025	1,33	1,32	1,31	1,45
	2	2,786	2,763	1,61	2,484	1,63	1,60	1,58	1,89
	3	3,250	3,218	1,88	2,908	1,91	1,86	1,82	2,33

Динамика изменения собственных значений  $E_{n0}^{NR}$ ,  $E_{n0}^R$  и  $E_{n0}^{RT}$  в зависимости от массы  $m$  представлена на рис.1. С ростом  $m$  значения  $E_{n0}^{RT}$  и  $E_{n0}^R$  сближаются с нерелятивистским собственным значением  $E_{n0}^{NR}$ . При малых  $m$  значение  $E_{n0}^{RT}$ , в отличие от  $E_{n0}^{NR}$  и  $E_{n0}^R$ , уменьшается. При этом с ростом  $n$  различия между ре-

лятивистским и нерелятивистскими собственными значениями при малых массах увеличиваются, т.е. наблюдается усиление релятивистских эффектов.

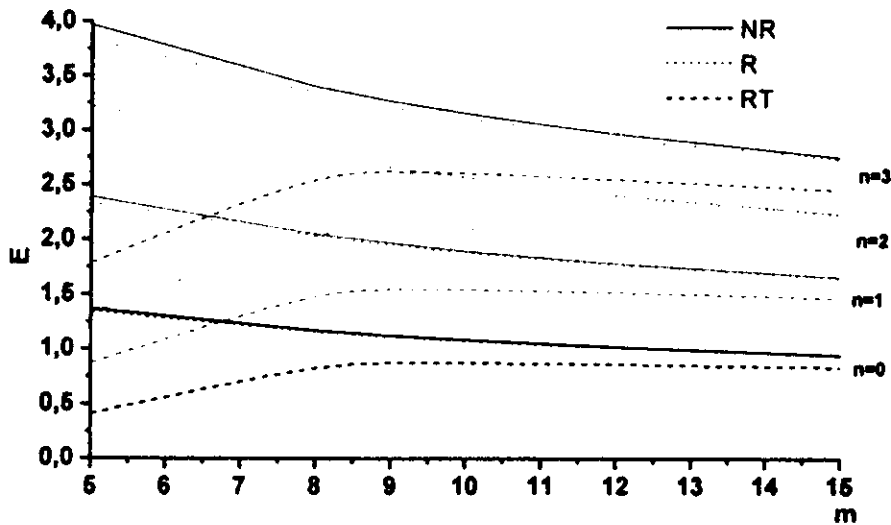


Рис.1

На рис.2 представлены собственные функции  $\phi_{00}^{NR}$ ,  $\phi_{00}^R$  и  $\phi_{00}^{RT}$  при разных значениях  $m$ . Отметим качественное различие в поведении этих функций. Функции  $\phi_{00}^{NR}$  и  $\phi_{00}^R$  с уменьшением  $m$  становятся более "компактными" (рис.2(а,б)), что согласуется с общеизвестными представлениями квантовой механики. Включение "запаздывания" в потенциал приводит к обратному эффекту – функция  $\phi_{00}^{RT}$  с уменьшением  $m$  затухает медленнее (рис.2(в,г)). Это должно приводить к уменьшению энергии  $E_{00}^{RT}$ , что и подтверждается расчетами (см. табл.4 и рис.1).

Аналогичные эффекты наблюдаются для  $n = 1$  (рис.3) и  $n = 2$  (рис.4).

На рис.5 представлены функции  $\phi_{nl}^{NR}$ ,  $\phi_{nl}^R$  и  $\phi_{nl}^{RT}$  в зависимости от  $l$  при  $n = 0$  и фиксированных  $m$ . Качественное поведение этих функций здесь одинаково.

Рассмотрим другой подход к решению релятивистского уравнения (5), (6) с запаздывающим взаимодействием. При  $l = 0$  потенциалы  $V_0^{(2)}$  и  $V_0^{(4)}$  связаны соотношением

$$V_0^{(4)} = V_0^{(2)} \bar{V}_0^{(4)}, \quad (41)$$

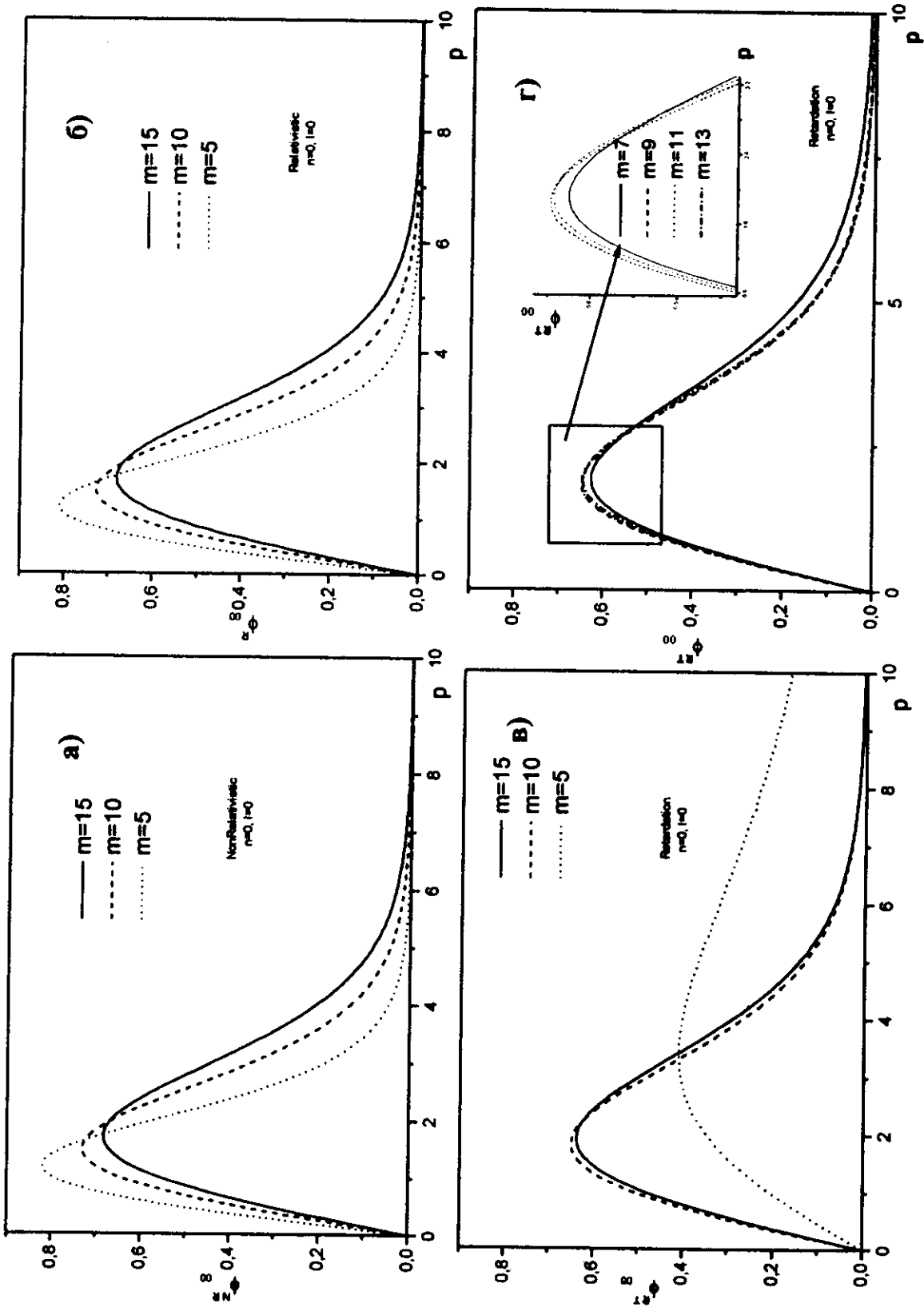


Рис. 2 а-г

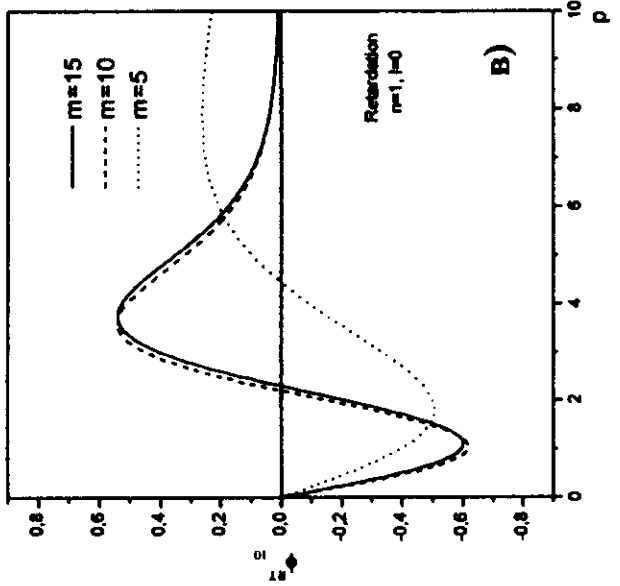
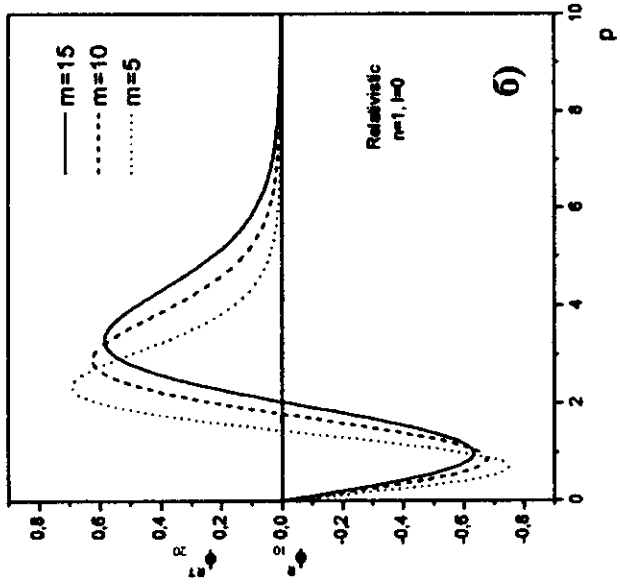
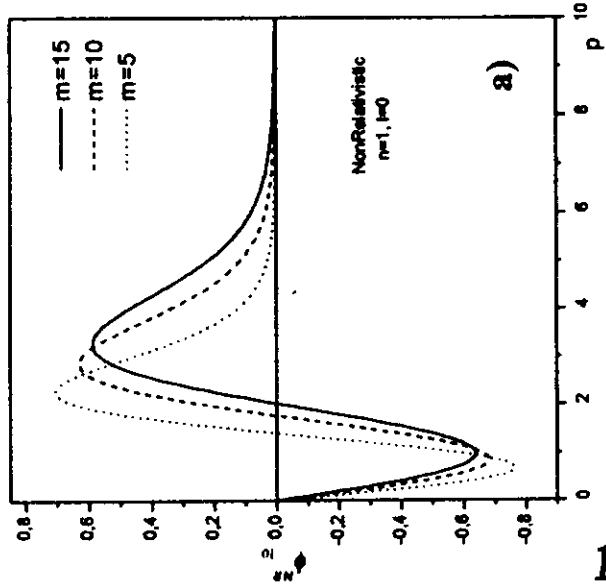


Рис. 3 а-в

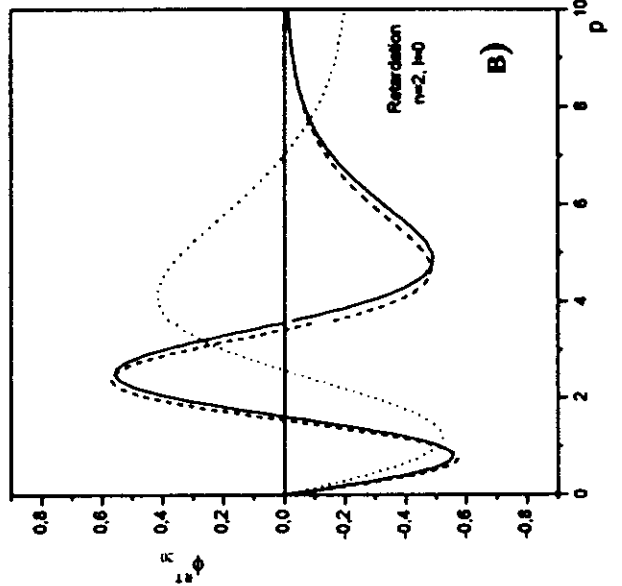
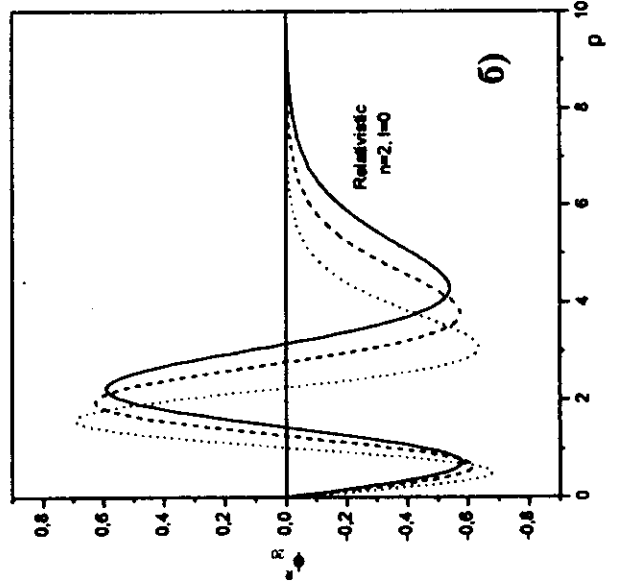
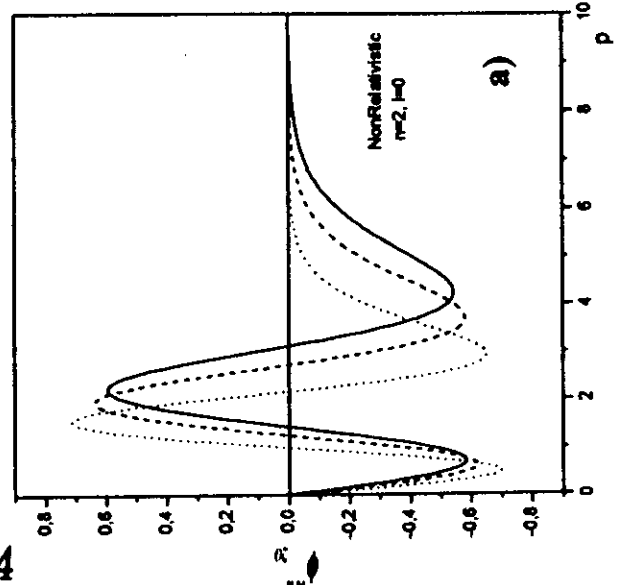


Рис. 4 а-в

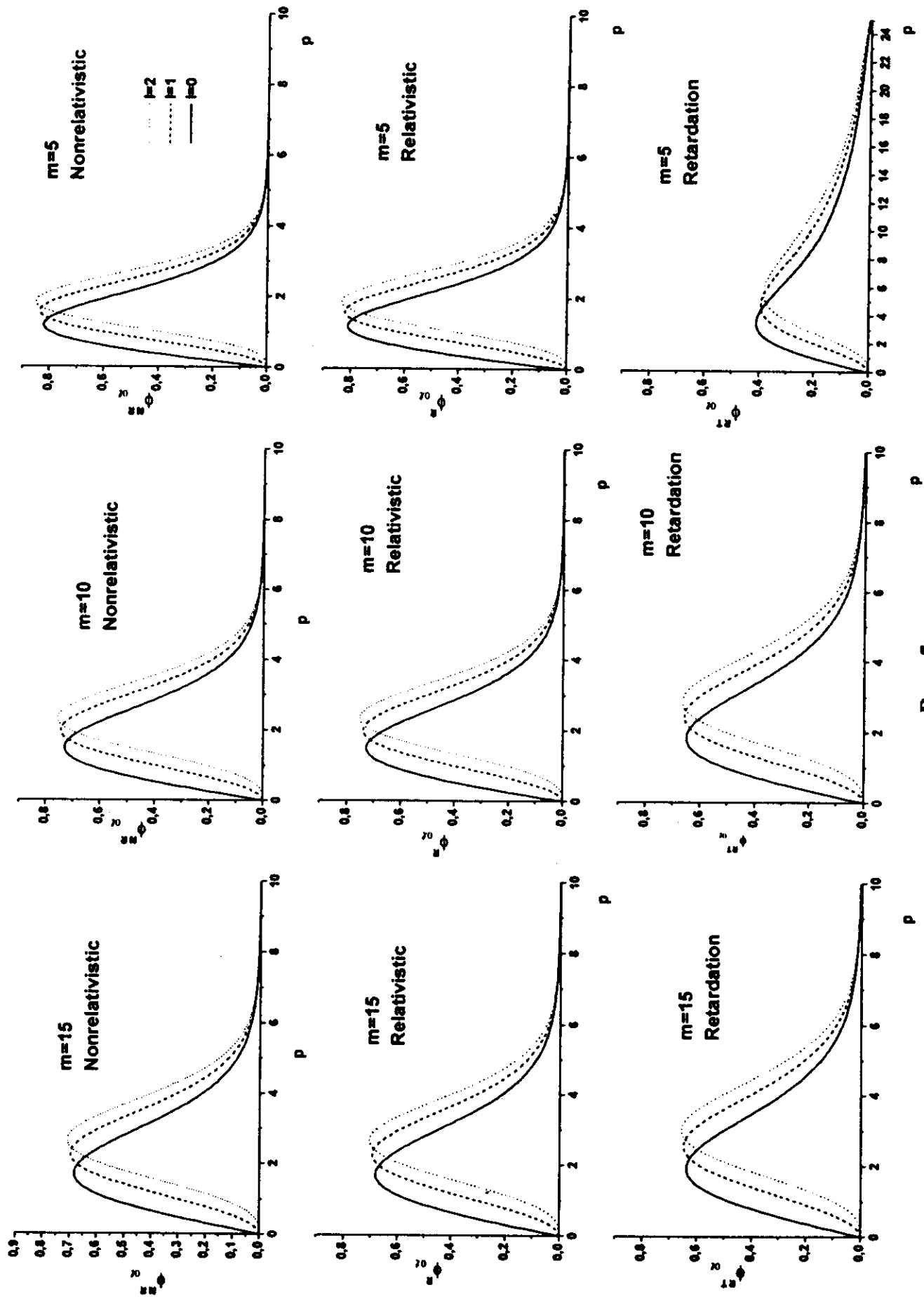


Рис. 5



где

$$\bar{V}_0^{(4)} = \frac{(E_p + E_q)^2}{4m^2}. \quad (42)$$

Используя формулу (40) для представления  $V_0^{(2)}$  в (41), мы получаем новую модификацию потенциала (4). Результаты численного решения уравнения (5), (6) с потенциалом (41) представлены в таблице 5.

Таблица 5.  $l = 0, \quad m = 15$

$n$	$E_{n0}^{RT}$	$\Gamma_{n0}^{RT}$
0	0,655	
1	1,146	1,75
2	1,540	2,35
3	1,884	2,88

Из таблицы видно, что хотя собственные значения  $E_{n0}^{RT}$  отличаются от результатов таблицы 4а, отношения  $\Gamma_{n0}^{RT}$  изменились мало. Отметим также, что в обеих таблицах значения  $\Gamma_{n0}$  близки к результатам работ [5] и [6].

Все представленные в этом разделе результаты получены при значениях параметров  $P_M = 25, r_M = 10$ . Для сравнения в табл.6 даны численные результаты решения нерелятивистской задачи (5), (9) для значения массы  $m = 1$ , полученные при тех же значениях параметров, и значения, представленные в [12]. Отметим, что поскольку с уменьшением  $m$  функция  $\phi_{nl}^{RT}$  затухает медленно, при расчетах с малыми  $m$  необходимо увеличивать интервал интегрирования.

Таблица 6.  $l = 0, \quad m = 1$

$n$	$E_{n0}^{NR}$	$E_{n0}[12]$
0	2,33809	2,338
1	4,08787	4,088
2	5,52039	5,521
3	6,78646	6,787

Еще одна возможность решения уравнений в импульсном пространстве с линейным потенциалом состоит в следующем. Пользуясь тождеством

$$\frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|^4} = \frac{1}{6} \Delta_p \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|^2}, \quad (43)$$

можно выразить линейный потенциал через кулоновский, для представления которого, в случае  $l = 0$ , используется формула (12). Такой прием применялся в работе [8] при численном исследовании КХД-инспирированной модели кваркония.

#### 4. О некоторых особенностях спектра релятивистского уравнения (5), (6) с потенциалами (1)-(4)

С физической точки зрения представляет интерес сравнительный анализ собственных функций  $\phi_{nl}^{(\beta)}$  и собственных значений  $E_{nl}^{(\beta)}$  для потенциалов (1), (2) и (3), (4), т.е. выяснение влияния релятивистских эффектов и эффектов запаздывания, а также изучение зависимости решений от физических и математических параметров.

Поскольку динамика спектра уравнения (5), (6) существенно зависит от типа потенциала, мы будем анализировать каждый потенциал отдельно.

Отметим, что все приводимые рассуждения сделаны в предположении, что решение исходной задачи существует.

##### Кулоновский потенциал.

Замечательным свойством уравнения (5) с потенциалами (1) и (3) является тот факт, что после масштабного преобразования

$$\hat{p} = \frac{p}{m}, \quad \hat{E}_{nl} = \frac{E_{nl}}{m} \quad (44)$$

уравнение (5) в новых переменных явно не содержит параметр  $m$ . Благодаря этому свойству собственные значения для двух значений массы  $m_1$  и  $m_2$  связаны соотношением

$$\frac{E_{nl}(m_1)}{E_{nl}(m_2)} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (45)$$

Таким образом, достаточно решить данное уравнение только для одного значения параметра  $m$ . Собственные значения для других значений  $m$  определяются из соотношения (45).

Отметим, что указанное свойство справедливо как для релятивистской задачи (6), так и для нерелятивистского случая (9).

При приближенном решении задачи (5) все параметры аппроксимации необходимо подбирать так, чтобы свойство (45) не нарушалось.

Предполагая существование  $\{E_{nl}^R, \phi_{nl}^R(x)\}$  и  $\{E_{nl}^{RT}, \phi_{nl}^{RT}(x)\}$ , не трудно получить связь между этими решениями и решением нерелятивистской задачи. Ограничимся рассмотрением случая  $l = 0$ . Для того, чтобы оперировать с положительными величинами, введем обозначения:  $\tilde{E}_{n0}^{NR} = -E_{n0}^{NR} > 0$ ,  $\tilde{E}_{n0}^R = -E_{n0}^R > 0$ ,  $\tilde{E}_{n0}^{RT} = -E_{n0}^{(3)} > 0$ . Тогда

$$\tilde{E}_{n0}^R = \tilde{E}_{n0}^{NR} + \Delta E_{1n}^R, \quad (46)$$

где

$$\Delta E_{1n}^R = \frac{\int dp Q_{12}(p) \phi_{n0}^{NR}(p) \phi_{n0}^R(p)}{\int dp \phi_{n0}^{NR}(p) \phi_{n0}^R(p)}, \quad (47)$$

$$Q_{12}(p) = \frac{p^4}{m(E_p + m)^2}. \quad (48)$$

Очевидно, что  $\Delta E_{1n}^R > 0$  при  $n = 0$ . Это означает, что собственные значения релятивистского уравнения лежат ниже, чем нерелятивистские собственные значения, что подтверждается численно для модифицированных потенциалов, аппроксимирующих кулоновский.

Аналогично

$$\tilde{E}_{n0}^{RT} = \tilde{E}_{n0}^{NR} + \Delta E_{1n}^{RT} + \Delta E_{2n}^{RT}, \quad (49)$$

где

$$\Delta E_{1n}^{RT} = \frac{\int dp Q_{12}(p) \phi_{n0}^{NR}(p) \phi_{n0}^{RT}(p)}{\int dp \phi_{n0}^{NR}(p) \phi_{n0}^{RT}(p)}, \quad (50)$$

$$\Delta E_{2n}^{RT} = \frac{\int \int dq dp V_0^{(3)}(p, q) \phi_{n0}^{NR}(p) \phi_{n0}^{RT}(q)}{\int dp \phi_{n0}^{NR}(p) \phi_{n0}^{RT}(p)}. \quad (51)$$

Величины  $\Delta E_{1n}^{RT}$  и  $\Delta E_{2n}^{RT}$  положительны при  $n = 0$ . Поэтому  $\tilde{E}_{n0}^{RT} > \tilde{E}_{n0}^{NR}$ .

С другой стороны, можно оценить, как изменится спектр релятивистского уравнения при включении запаздывающего взаимодействия. Действительно,

$$\tilde{E}_{n0}^{RT} = \tilde{E}_{n0}^R + \Delta E_{1n}^{RTR}, \quad (52)$$

где

$$\Delta E_{1n}^{RTR} = \frac{\int \int dq dp V_0^{(3)}(p, q) \phi_{n0}^R(p) \phi_{n0}^{RT}(q)}{\int dp \phi_{n0}^R(p) \phi_{n0}^{RT}(p)}. \quad (53)$$

Так как  $\Delta E_{1n}^{RTR} > 0$  при  $n = 0$ ,  $\tilde{E}_{n0}^{RT} > \tilde{E}_{n0}^R$ .

Приведенные для потенциала (3) оценки остаются чисто теоретическими, поскольку нам не удалось найти модифицированный потенциал, удовлетворительно аппроксимирующий (3). Однако они могут оказаться полезными в дальнейшем исследовании.

### Линейно растущий потенциал.

Для этого потенциала масштабным преобразованием не удастся исключить параметр  $m$  из уравнения, поэтому вместо соотношения (45) получается более сложное выражение, позволяющее оценить сдвиг спектра в зависимости от параметра  $m$ . Для нерелятивистского и релятивистского уравнений без запаздывания такие оценки сделаны в [5]. В частности, для потенциала (2) мы имеем [5]

$$E_{nl}^R(m_2) = E_{nl}^R(m_1) - 2(m_2 - m_1) \Delta E_{nl}^R, \quad (54)$$

где

$$\Delta E_{nl}^R = \frac{\int dp Q_2(p) \phi_{nl}^R(p, m_1) \phi_{nl}^R(p, m_2)}{\int dp \phi_{nl}^R(p, m_1) \phi_{nl}^R(p, m_2)}, \quad (55)$$

$$Q_2(p) = 1 - \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{p^2 + m_1^2} + \sqrt{p^2 + m_2^2}} \geq 0. \quad (56)$$

Равенство, аналогичное (54), для потенциала (4) в случае  $l = 0$  имеет вид

$$E_{n0}^{RT}(m_2) = E_{n0}^{RT}(m_1) - 2(m_2 - m_1)(\Delta E_{n0}^1 - \Delta E_{n0}^2), \quad (57)$$

где

$$\Delta E_{n0}^1 = \frac{\int dp Q_2(p) \phi_{n0}^{RT}(p, m_1) \phi_{n0}^{RT}(p, m_2)}{\int dp \phi_{n0}^{RT}(p, m_1) \phi_{n0}^{RT}(p, m_2)}, \quad (58)$$

$$\Delta E_{n0}^2 = \frac{\int \int dp dq V_0^{(2)}(p, q) \Delta V_0^{(4)}(p, q) \phi_{n0}^{RT}(p, m_1) \phi_{n0}^{RT}(p, m_2)}{\int dp \phi_{n0}^{RT}(p, m_1) \phi_{n0}^{RT}(p, m_2)}, \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_0^{(4)} &= \frac{(m_1 + m_2)}{8m_1^2 m_2^2} [(p^2 + q^2) + \\ &+ 2 \frac{(m_1 + m_2)p^2 q^2 + m_1^2(p^2 + q^2)}{m_1^2 \sqrt{p^2 + m_2^2} \sqrt{q^2 + m_2^2} + m_2^2 \sqrt{p^2 + m_1^2} \sqrt{q^2 + m_1^2}}]. \end{aligned} \quad (60)$$

При  $n = 0$  обе поправки  $\Delta E_{00}^1$  и  $\Delta E_{00}^2$  положительны, что объясняет поведение  $E_{00}^{RT}$  при малых массах  $m$  (см. табл.4а-в и рис.1).

Связь собственных значений релятивистского и нерелятивистского уравнений для потенциала (2) определяется равенством

$$E_{n0}^R = E_{n0}^{NR} + \Delta E_{1n}^R, \quad (61)$$

где  $\Delta E_{1n}^R$  вычисляется по формулам (47) и (48). Очевидно, что при  $n = 0$   $\Delta E_{0n}^R > 0$ , т.е.  $E_{00}^R < E_{00}^{NR}$ .

Оценка, аналогичная (52), в случае потенциалов (2), (4) имеет вид

$$E_{n0}^{RT} = E_{n0}^R - \Delta E_{1n}^{RTR}, \quad (62)$$

где

$$\Delta E_{1n}^{RTR} = \frac{\int \int dq dp V_0^{(2)}(p, q) [\bar{V}_0^{(4)}(p, q) - 1] \phi_{n0}^R(p) \phi_{n0}^{RT}(q)}{\int dp \phi_{n0}^R(p) \phi_{n0}^{RT}(p)}, \quad (63)$$

$$\bar{V}_0^{(4)} = \frac{(E_p + E_q)^2}{2m^2} \geq 1,$$

откуда следует, что  $\Delta E_{1n}^{RTR} > 0$  и  $E_{n0}^{RT} < E_{n0}^R$ .

Приведенные соотношения являются полезными для контроля численных результатов и позволяют предсказывать, как изменятся собственные значения в зависимости от типа потенциала, что подтверждается представленными выше численными результатами.

## 5. Заключение

В работе рассматриваются некоторые проблемы численного исследования задач на собственные значения в импульсном представлении с кулоновским и линейным потенциалами. Сделан анализ динамики спектра в зависимости от параметров на примере одного релятивистского уравнения. Получены численные результаты, демонстрирующие влияние релятивистских эффектов и эффектов запаздывания взаимодействия на изменение спектра. В частности, установлено, что для запаздывающего взаимодействия поведение спектра резко отличается от релятивистского и нерелятивистского случаев.

Авторы искренне признательны проф. Е.П. Жидкову за внимание к работе и полезные замечания, а также А.И. Мачавариани, который обратил наше внимание на затронутые здесь проблемы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 97-01-01040).

## Список литературы

- [1] S.L.Adler and A.C.Davis, Nucl.Phys. **B244**, 469 (1984); A.Koćic, Phys. Rev. **D33**, 1785 (1986); R.Alkofer and P.A.Amundsen, Nucl. Phys. **B306**, 305 (1988); D.W.McKay, H.J.Munczek and Bing-Lin Young, Phys.Rev. **D37**, 195 (1988); A.Trzuppek, Acta Physica Polonica **B20**, N2, 93 (1989); И.В.Амирханов, Е.В.Земляная, В.Н.Первушин, И.В.Пузынин, Т.П.Пузынина, Н.А.Сариков, Т.А.Стриж, Математическое моделирование **6**, N7, 55 (1994).

- [2] A.Le Yaouanc, L.Oliver, P.Pene and J.C.Raynal, Phys.Rev. **D29**, 1233 (1984); Phys.Rev. **D31**, 137 (1985); Ю.Л.Калиновский, В.Каллис, Б.Н.Куранов, В.Н.Первушин, Н.А.Сариков, ЯФ **49**, 1709 (1989); Yu.L.Kalinovsky, W.Kallies, L.Kaschluhn, L.Münchow, V.N.Pervushin and N.A.Sarikov, Fortschr. Phys. **38**, 333 (1990); Few Body Systems **10**, 87 (1991).
- [3] R. Blankenbecler and R. Sugar, Phys. Rev. **142**, 1051 (1966); V. G. Kadyshevsky, Nucl. Phys. **B6**, 125 (1968); J.W.Norbury, D.E.Kahana and K.N.Maung, Can J.Phys.**70**, 866 (1992).
- [4] А.А.Быков, И.М.Дремин, А.В.Леонидов, УФН Т.143, 3 (1984); Chikade Habe (Yoshida) et al., Prog.Th.Phys. **77**, 917 (1987).
- [5] И. В. Амирханов, Е. В. Земляная, И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина, Т. А. Стриж, Математическое моделирование **9**, N10, 111 (1997).
- [6] К.Н.Маунг, D.E.Kahana and J.W.Norbury, Phys.Rev. **D47**, N3, 1183 (1993).
- [7] I.V.Puzynin, I.V.Amirkhanov, T.P.Puzynina, E.V.Zemlyanaya , JINR Rapid Comm. 5[62]-93, 63 (1993).
- [8] И. В. Амирханов, Е. В. Земляная, И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина, Т. А. Стриж, Математическое моделирование **7**, N7, 34 (1995).
- [9] R.H.Thompson, Phys.Rev. **D1**, 110 (1970).
- [10] F.Gross, Phys.Rev. **186**, 1448 (1969); F.Gross and J.Milane, Phys.Rev. **D43**, 2401 (1991); Phys.Rev. **D45**, 969 (1992).
- [11] Т.Жанлав, И.В.Пузынин, ЖВМиМФ **32**, N16, 846 (1992).
- [12] Г.Бете, Е.Е.Солпитер. Квантовая механика одного и двух электронов. Физматгиз, М, 1960; А.С.Давыдов. Квантовая механика. Наука, М, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел  
31 мая 1999 года.

**Издательский отдел  
Объединенного института ядерных исследований  
предлагает Вам приобрести перечисленные ниже книги:**

Индекс книги	Название книги
94-55	Боголюбовские чтения. Материалы Международного совещания. Дубна, 1993 г. 216 с. (на русском и англ. яз.) Книга В.С.Барашенкова «Сечения взаимодействия частиц и ядер с ядрами». 1993 г. 346 с.
ДЗ,14-95-323	Труды VII школы по нейтронной физике. Дубна, 1995, том I, 356 с. (на русском и англ. яз.)
Е10,11-95-387	Труды Международной конференции REAL TIME DATA '94. Дубна, 1994, 358 с. (на англ. яз.)
Д15-96-18	Труды рабочего совещания «Зарядовые и нуклонные радиусы экзотических ядер». Познань, 1995, 172 с. (на русском и англ. яз.)
Е9-96-21	Труды рабочего совещания секции ICFA динамики пучков «По эффектам встречи в кольцевых коллайдерах». Дубна, 1995, 198 с. (на англ.яз.)
Е2-96-100	Труды 3 международного симпозиума «Дейтрон — Дубна-95». Дубна, 1995, 374 с. (на англ. яз.)
Е2-96-224	Труды VII международной конференции «Методы симметрии в физике». Дубна, 1996, 2 тома, 630 с. (на англ. яз.)
Е10-96-258	Труды 17 ежегодного совещания группы пользователей ТЕР. Дубна, 1996, 170 с. (на англ. яз.)
Е-96-321	Труды международного семинара «Интегралы по траекториям: Дубна-96». Дубна, 1996, 392 с. (на англ. яз.)
Е2-96-334	Труды Российско-немецкого совещания по физике тяжелых кварков. Дубна, 1996, 240 с. (на англ. яз.)
Е3-96-336	Труды 4 Международного семинара по взаимодействию нейтронов с ядрами. Дубна, 1996, 396 с. (на англ. яз.)
Е3-96-369	Труды X международной конференции «Проблемы квантовой теории поля». Дубна, 1996, 437 с. (на англ. яз.)
Е3-96-507	Труды международного семинара «Поляризованные нейтроны в исследованиях конденсированных сред». Дубна, 1996, 154 с. (на англ. яз.) Книга А.Н.Боголюбова. Н.Н.Боголюбов. Жизнь. Творчество. Дубна, 1996; 182 с. (на русском яз.)
Д1,2-97-6	Труды международного семинара «Релятивистская ядерная физика от сотен МэВ до ТэВ». Дубна, 1996, 2 тома, 418 с. и 412 с. (на русском и англ. яз.)
Е7-97-49	Труды 3 международной конференции и «Динамические аспекты деления ядер». Словакия, 1996, 426 с. (на англ. яз.)



Индекс книги	Название книги
E1,2-97-79	Труды XII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Релятивистская ядерная физика и квантовая хромодинамика. Дубна, 1994, 2 тома, 364 с. и 370 с. (на англ. яз.)
D5,11-97-112	Труды IX международной конференции «Математическое моделирование в физике». Дубна, 1996, 378 с. (на русском и англ. яз.)
E3-97-213	Труды V Международного семинара по взаимодействию нейтронов с ядрами. Дубна, 1997, 446 с. (на англ. яз.)
D9-97-231	Труды международной школы молодых ученых «Проблемы ускорения заряженных частиц». Дубна, 1996, 285 с. (на русском и англ. яз.)
E2,4-97-263	Труды III международной конференции «Ренормгруппа-96». Дубна, 1996, 436 с. (на англ. яз.)
E10-97-272	Труды международного рабочего совещания «Системы сбора данных в экспериментах на нейтронных источниках». Дубна, 1997, 325 с. (на англ. яз.)
D19-97-284	Труды международного симпозиума «Проблемы биохимии, радиационной и космической биологии». Дубна, 1997, 2 тома: 284 и 405 стр. (на русском и англ. яз.)
P14-97-343	Труды Национальной конференции по применению рентгеновского синхротронного излучения нейтронов и электронов для исследования материалов. Дубна, 1997, 3 тома, 370 с., 448 с., 340 с. (на русском яз.)
D -97-376	Труды I открытой конференции молодых ученых и специалистов ОИЯИ. Дубна, 1997, 254 с. (на русском яз.)
E2-97-413	Труды VII Международного совещания по спиновой физике высоких энергий (СПИН-97). Дубна, 1997, 398 с. (на англ. яз.)

За дополнительной информацией просим обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу:

141980, г.Дубна, Московской области,  
ул.Жолио-Кюри, 6.  
Объединенный институт ядерных исследований,  
издательский отдел  
E-mail: [publish@pds.jinr.dubna.su](mailto:publish@pds.jinr.dubna.su)

Амирханов И.В. и др.

P11-99-159

Численное исследование релятивистских уравнений  
на связанные состояния с кулоновским и линейным потенциалами

В современных исследованиях спектроскопии мезонов на основе трактовки мезонов как связанных кварк-антикварковых состояний обычно используются трехмерные релятивистские уравнения с различными обобщениями кулоновского и линейного потенциалов. В работе обсуждаются проблемы численного исследования таких задач в импульсном пространстве. Представленные методы основаны на модификациях обобщенного непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН). Приведены численные результаты.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1999

Перевод авторов

Amirkhanov I.V. et al.

P11-99-159

Numerical Solution of Two-Body Relativistic Equations  
for the Bound-State Problem with Coulomb and Linear Potentials

The recent investigations of the meson spectroscopy are often based on the models considering mesons as quark-antiquark bound states. These models are described by three-dimensional relativistic equations with various generalizations of coulomb and linear potentials in the momentum space. Algorithms and codes are developed for numerical investigations of these equations. The modified generalized Continuous Analog of Newton's method (CANM) is used. The numerical results are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1999

Редактор Е.Ю.Шаталова. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 7.06.99.

Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 1,88  
Тираж 345. Заказ 51417. Цена 2 р. 26 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
Дубна Московской области