ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-99-109

В.С.Барашенков, М.З.Юрьев

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ
С ТРЕХМЕРНЫМ ВЕКТОРОМ ВРЕМЕНИ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика

1999

ВВЕДЕНИЕ

Развитие физики сопровождается выявлением все большей симметрии свойств пространственных и временной координат. Установленная впервые в теории относительности Пуанкаре-Эйнштейна она была обобщена путем введения собственного времени для каждой из взаимодействующих частиц [1], а затем и для каждой пространственной точки [2]. Представляет интерес сделать следующий шаг и рассмотреть следствия теории с равным числом пространственных и временных координат $\hat{\mathbf{x}} = x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3$ [1].

В литературе описаны несколько способов введения многомерности времени. В частности, в работах [3]-[6] была сделана попытка ввести свое собственное время для каждой пространственной оси:

$$\hat{\mathbf{x}} = (x, t_x) \otimes (y, t_y) \otimes (z, t_z),$$

и использовать, соответственно, три двумерных преобразования Лоренца. Однако в этом случае не удается воспроизвести наблюдаемую на опыте томасовскую прецессию [7, 8].

---

[1] В дальнейшем трехмерные пространственные и временные векторы в x- и t-подпространствах будут отмечаться, соответственно, жирным шрифтом и "шляпкой".(В рукописях удобно использовать обозначения $\bar{x}$, $\hat{x}$ и $\hat{\bar{x}}$). Для матриц будем использовать прописные литеры. 6-мерный оператор "набла" $\hat{\boldsymbol{\nabla}} = (\nabla, \hat{\nabla})$, где временной оператор $\hat{\nabla} = (-\partial/\partial t_1, -\partial/\partial t_2, -\partial/\partial t_3)$. Мы будем предполагать, что ко- и контравариантные векторы различаются знаком своих пространственных компонент: $(\hat{\mathbf{x}})_\mu = (\mathbf{x}, -c\hat{t})^T_\mu$, $(\hat{\mathbf{x}})^\mu = (\mathbf{x}, c\hat{t})^{T\mu}$, в силу чего скалярное произведение $\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{ab} - \hat{a}\hat{b}$. Как правило, латинские и греческие индексы будут пробегать значения $k = 1, ..., 3, \mu = 1, ..., 6$. Константы $\hbar = c = 1$.

Подобно тому, как это сделал впервые Коул [9]-[11], мы будем рассматривать все три временные координаты t_i как совершенно независимые величины, подчиняющиеся обобщенным 6-мерным преобразованиям Лоренца [12]-[15]. При этом каждой точке М траектории в t-пространстве $\hat{t}$ соответствует собственное время

$$t = \int_{M_o}^{M} |d\hat{t}| = \int_{M_o}^{M} \left[\sum_{i=1}^{3}(dt_i)^2\right]^{1/2},$$

где интегрирование выполняется вдоль временной траектории от некоторой начальной точки M_o. Время t может рассматриваться как параметр, определяющий траекторию $\hat{\tau}(t)$.

С физической точки зрения такой подход основан на гипотезе о том. что наша вселенная образовалась, обладая некоторой случайной "стрелой времени", определяемой эволюцией физических процессов в начальный момент ее становления. Последующее инфляционное расширение разрушило пространственно-временные корреляции удаленных областей, и каждая из них может теперь обладать своей собственной временной стрелой $\hat{t}$, вообще говоря. отличной от исходной "реликтовой". Поскольку все процессы и все тела в каждой из таких удаленных друг от друга областей имеют одинаковые, конгруэнтные, временные траектории, мы не замечаем дополнительных временных координат и воспринимаем окружающий мир как одновременной с собственным временем t.

Многомерность времени остается для нас скрытой. Ее можно было бы наблюдать, если бы наша временная траектория была бы наклонена по отношению к "реликтовой" и все компонеты временных траекторий и векторов энергии

$\hat{E}_i = \hat{\tau}_i$ участвующих во взаимодействии тел, оставались бы положительно определенными (см. рис. 1). Вместе с тем нетрудно убедиться, что даже небольшое изменение t-траектории связано с огоромным энергопотреблением и может реализоваться лишь в процессах космического масштаба или в области очень малых пространственно-временных интервалов [17, 19].

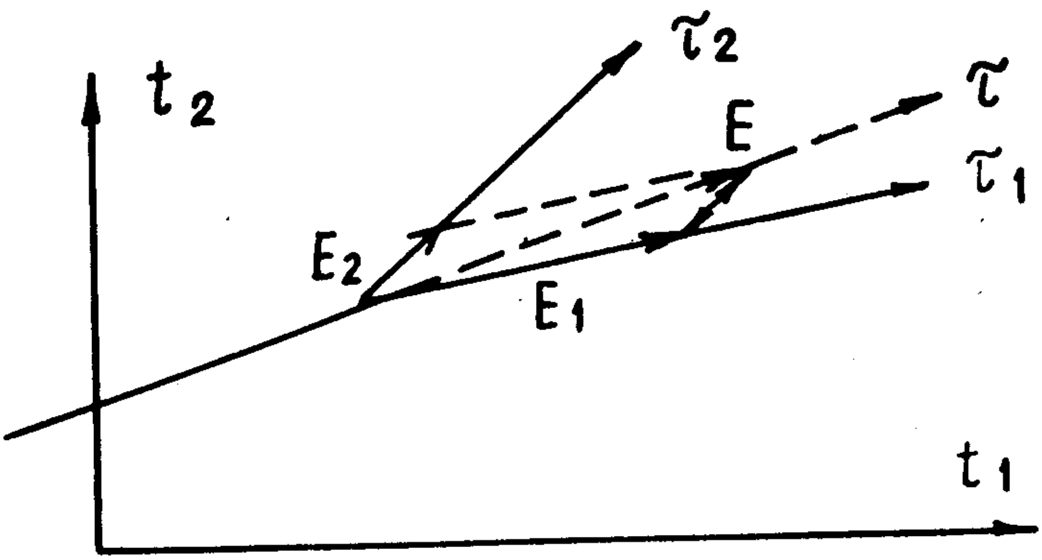

Рис. 1. Тело, движущееся вдоль наклонной временной траектории $\hat{\tau}(t)$, может распасться на несколько частей с различными временными траекториями $\hat{\tau}_i(t)$, однако постулат необратимости времени требует, чтобы компоненты всех трехмерных векторов энергии $\hat{E}_i = E\hat{\tau}_i$ оставались положительно определенными. Это исключает возможность рождения частиц из вакуума, т. к. закон сохранения энергии $\sum \hat{E}_i > 0$ требует, чтобы часть компонент $\tau_i = E_i/E$ имела отрицатенльный знак.

Выполненные исследования [11],[16]-[23] убеждают в том, что в области макроскопических (неквантовых) явлений рассматриваемое многовременное обобщение является логически последовательным и не противоречит ни одному из известных сегодня экспериментальных фактов. Отмеченное в работе [24] расхождение расчетного и наблюдаемого смещений перигелия планеты Меркурий обусловлено специальным предположением о временных траекториях этой планеты и Солнца. При более точном рассмотрении многовременная поправка составляет всего лишь $10^{-8}\%$ экспериментального наблюдаемого смещения [18, 19], [23] — намного меньше точности измерений. Учет необратимости времени. т. е. требование $d\hat{t}/dt \geq 0$, обеспечивает положительную дефинитность энергии и устраняет отмеченные в работах [25, 26] трудности с возможным появлением отрицательных энергий.

Появление объектов с "иным временем" можно ожидать в областях с сильной гравитацией, где понятие энергии, если верить эйнштейновской теории гравитации, утрачивает свой обычный смысл и классический закон сохранения энергии становится неточным. Сооружаемые в настоящее время большие детекторы гравитационных волн позволяют заметить примесь волн с измененными временными траекториями, если они присутствуют во всплесках излучения, возникающего при космических катаклизмах [22].

Как уже отмечалось выше, проявление скрытых от нас измерений времени возможно также в микроскопических процессах, где сохранение энергии и необратимость времени (при очень малых Δx и Δt) виртуально нарушаются. Исследование связанных с этим явлений требует разработки многовременной квантовой теории. Первые шаги в этом направлении сделаны в работах [12,25]. Целью нашей статьи является изучить решения уравнения Дирака в случае *произвольных* временных траекторий частиц и развить теорию квантования спинорного и электромагнитного полей в пространстве с векторным временем.

Следующий раздел нашей статьи посвящен решению многовременного уравнения Дирака. Этот раздел может также служить примером того, как следует обращаться с многовременным формализмом. В разделе 2 получены многовременные уравнения Паули и Шредингера. В разделах 3 и 4 обсуждаются правила квантования полей и показано, что при использовании индефинитной метрики энергия квантов всегда остается положительно определенной. В разделе 5 суммированы основные результаты.

1. ВОСЬМИКОМПОНЕНТНЫЕ СПИНОРЫ ДИРАКА

Следуя работе [25], запишем многовременное восьмикомпонентное уравнение Дирака в виде

$$(i\,\hat{\gamma}\hat{\mathbf{\nabla}} + e\hat{\gamma}\hat{\mathbf{A}} - m)\Psi = 0 \tag{1}$$

с матрицами

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} O & \Sigma_i \\ -\Sigma_i & O \end{pmatrix} + \delta_{4i}\begin{pmatrix} I_4 & -I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_i = \begin{pmatrix} O & \sigma_i \\ \sigma_i & O \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_4 = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & I_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_5 = \begin{pmatrix} -iI_2 & O \\ O & iI_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_6 = \begin{pmatrix} O & I_2 \\ -I_2 & O \end{pmatrix},$$

где σ_i — двухкомпонентные матрицы Паули, а I_n — единичная матрица с размерностью $n \times n$.

Сделаем замену

$$\Psi(\hat{\mathbf{x}}) = \Phi(\hat{\mathbf{x}}) e^{-im\hat{\tau}\hat{t}}, \tag{2}$$

где $\Phi = (\phi_1, ..., \phi_8)^T$ — 8-компонентный спинор , $\hat{\tau}$ — постоянный единичный вектор ($\hat{\tau}^2 = 1$). Для свободной частицы этот вектор определяет остающееся неизменным направление ее временной траектории (в этом случае функция $\phi = \psi_o \exp\left[-i(E-m)\right]$ и ψ_o не зависит от времени). В случае, когда $\hat{A} \neq 0$ и направление траектории частицы в t-пространстве изменяется с течением ее собственного времени, тангенциальный вектор $\hat{\tau}$ характеризует направление t-траектории в некоторый произвольно выбранный момент t_o. Уравнение (1) теперь можно записать в виде

$$\left[i\hat{\gamma}\hat{\boldsymbol{\nabla}} + e\hat{\gamma}\hat{\mathbf{A}} - m(1-\Theta)\right]\Phi = 0 \tag{3}$$

с матрицей

$$\Theta = \hat{\gamma}\hat{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 I_4 & \Theta_{23} \\ -\Theta_{23} & -\tau_1 I_4 \end{pmatrix},$$

$$\Theta_{23} = \hat{\Sigma}\hat{\tau} - \Sigma_4\tau_1 = \begin{pmatrix} -i\tau_2 I_2 & \tau_3 I_2 \\ -\tau_3 I_2 & i\tau_2 I_2 \end{pmatrix},$$

Для дальнейшего будет удобным расщепить волновую функцию на две 4-компонентных: $\Phi = (\Phi', \Phi'')^T$. При этом уравнение (??) также расщепляется на два:

$$D\Phi' - \left[i\nabla_4 + eA_4 - m(1+\tau_1)\right]\Phi'' = 0, \tag{4}$$

$$D\Phi'' - \left[i\nabla_4 + eA_4 - m(11-\tau_1)\right]\Phi' = 0, \tag{5}$$

где

$$D = \hat{\Sigma}(i\hat{\nabla} + e\hat{\mathbf{A}}) - \Sigma_4(i\nabla_4 + eA_4) + m\Theta_{23}. \qquad (6)$$

Рассмотрим сначала случай свободной частицы, когда поле $\hat{\mathbf{A}} = 0$. Без ограничения общности можно считать, что импульс частицы направлен вдоль оси z: $\mathbf{p} = (0,0,1)$. Тогда, принимая во внимание соотношения

$$i\nabla\Phi' = p\Phi', \quad i\hat{\nabla}\Phi' = -\hat{\tau}E\Phi' \qquad (7)$$

и аналогичные выражения для Φ'', уравнения (4) и (5) можно заменить четырьмя уравнениями для четных компонент ϕ_{2n} и четырьмя уравнениями для нечетных компонент ϕ_{2n+1}. Каждая из этих групп имеет по два независимых решения. Например, уравнения "нечетной группы"

$$(E - m\tau_1 + p\tau_3)\phi_1 - ip\tau_2\phi_3 + im\tau_2\phi_5 - (m\tau_3 + p\tau_1)\phi_7 = 0, \quad (8)$$

$$ip\tau_2\phi_1 + (E - \tau_1 - p\tau_3)\phi_3 + (m\tau_3 - p\tau_1)\phi_5 - im\tau_2\phi_7 = 0 \quad (9)$$

имеют решение

$$\phi_1 = 1, \phi_3 = \phi_{2n} = 0, \phi_5 = i\tau_2 gE, \phi_7 = g(p + E\tau_3), \qquad (10)$$

где $g = 1/(m + E\tau_1)$, и решение, полученное из (10) путем подстановки

$$p \to -p, \quad \phi_1 \to \phi_3, \quad \phi_3 \to \phi_1, \quad \phi_5 \to -\phi_7, \quad \phi_7 \to -\phi_5.$$

"Четная группа" уравнений и, соответственно, два ее решения получаются из "нечетных решений " путем замены

$$p \to -p, \quad \phi_{2n} \to \phi_{2n+1}.$$

Полный набор независимых решений Φ_s для положительных значений энергии E представлен в таблице 1. Аналогичный набор решений имеется для $E < 0$ [2].

В отличие от одновременной теории, где скаляр

$$\bar{\Phi}_s\Phi_s = \Phi_s^+\gamma_4\Phi_s = (m/E)\Phi_s^+\Phi_s \neq 0,$$

в 6-мерном пространстве-времени независящая от выбора системы координат величина $\bar{\Phi}_s\Phi_s = \Phi_s^+\Gamma\Phi_s$ с матрицей

$$\Gamma = i\gamma_4\gamma_5\gamma_6 = \begin{pmatrix} -\Sigma_o & 0 \\ 0 & \Sigma_o \end{pmatrix}, \quad \Sigma_o = \begin{pmatrix} O & I_2 \\ I_2 & O \end{pmatrix}$$

обращается в нуль:

$$\bar{\Phi}_s\Phi_r = -N\delta_{r\ell}, \quad N = 2mg, \quad \ell = s + (-1)^{s+1}, \tag{11}$$

поэтому более удобно использовать линейные комбинации

$$\Psi_{1,2} = (2N)^{-1/2}(\Phi_1 \pm \Phi_2), \quad \Psi_{3,4} = (2N)^{-1/2}(\Phi_3 \pm \Phi_4). \tag{12}$$

[2]Решения, найденные Коулом [11], соответствуют частному случаю, когда спинорная частица движется точно вдоль временной оси t_3: $\hat{\tau} = (0, 0, 1)$. При этом

$$\Phi_{1,2}^{Cole} = \lambda^{-1}(\Phi_1 \mp \Phi_2), \quad \Phi_{3,4}^{Cole} = \lambda^{-1}(\Phi_3 \mp \Phi_4),$$

где $\lambda = [(E+p)/m]^{-1/2}$, а функции $\Phi - s$ приведены в таблице I.

Таблица 1

Решения Φ_s и $\bar{\Phi}_s$ для многовременного уравнения Дирака (1) в случае, когда поле $\hat{\mathbf{A}} = 0$ и энергия частицы $E \geq 0$

No	I	II	III	IV
ϕ_1	1	0	0	0
ϕ_2	0	0	1	0
ϕ_3	0	1	0	1
ϕ_4	0	0	0	0
ϕ_5	$igE\tau_2$	$g(p - E\tau_3)$	0	$-g(p + E\tau_3)$
ϕ_6	0	0	$ig\tau_2$	0
ϕ_7	$g(p + E\tau_3)$	$-ig\tau_2 E$	0	$-ig\tau_2 E$
ϕ_8	0	0	$g(-p + E\tau_3)$	
$\bar{\phi}_1$	0	-1	0	0
$\bar{\phi}_2$	0	0	0	-1
$\bar{\phi}_3$	-1	0	0	0
$\bar{\phi}_4$	0	0	-1	0
$\bar{\phi}_5$	$g(p + E\tau_3)$	$ig\tau_2 E$	0	0
$\bar{\phi}_6$	0	0	$g(-p + E\tau_3)$	$igE\tau_2$
$\bar{\phi}_7$	$-igE\tau_2$	$g(p - E\tau_3)$	0	0
$\bar{\phi}_8$	0	0	$-ig\tau_2 E$	$-g(p + E\tau_3)$

Пользуясь соотношением (11) или используя приведенные в таблице 1 выражения Ψ-функций, можно убедиться в том, что релятивистски инвариантные скалярные произведения

$$\bar{\Psi}_s \Psi_r = \eta_s \delta_{sr}, \tag{13}$$

где коэффициент

$$\eta_s = \begin{cases} -1, & s = 1,4 \\ 1, & s = 2.3 \end{cases} \tag{14}$$

Таблица 2

Функции $U_s = 2(mg)^{1/2}\Psi_s$ и $\bar{U}_s = 2(mg)^{1/2}\bar{\Psi}_s$ с нормировкой $\bar{U}_s U_r = 4mg\eta_s\delta_{sr}$ для четырех спиновых состояний и положительной энергии $E > 0$

s:	I	II	III	IV
u_1	1	1	0	0
u_2	0	0	1	1
u_3	1	−1	0	0
u_4	0	0	1	−1
u_5	$g(p + E_{23}^-)$	$g(-p + E_{23}^+)$	0	0
u_6	0	0	$g(-p + E_{23}^-)$	$g(p + E_{23}^+)$
u_7	$g(p - E_{23}^-)$	$g(p + E_{23}^+)$	0	0
u_8	0	0	$g(-p - E_{23}^-)$	$g(-p + E_{23}^+)$
$\bar{u}_1$	−1	1	0	0
$\bar{u}_2$	0	0	−1	1
$\bar{u}_3$	−1	−1	0	0
$\bar{u}_4$	0	0	−1	−1
$\bar{u}_5$	$g(p + E_{23}^+)$	$g(p - E_{23}^-)$	0	0
$\bar{u}_6$	0	0	$g(-p + E_{23}^+)$	$g(-p - E_{23}^-)$
$\bar{u}_7$	$g(p - E_{23}^+)$	$g(-p - E_{23}^-)$	0	0
$\bar{u}_8$	0	0	$g(-p - E_{23}^+)$	$g(p - E_{23}^-)$
$\bar{\Psi}\Psi$	−1	1	−1	1
$\mathcal{S}$	−1	1	1	−1
$\mathcal{T}$	1	−1	1	−1

Здесь $E_{23}^{\pm} = E(i\tau_2 \pm \tau_3)$.

Следует подчеркнуть, что во многовременной теории отрицательное значение может принимать не только энергия спинорной частицы E, но и норма $\bar{\Psi}_s\Psi_s$, т. е. мы имеем дело с гильбертовым пространством, обладающим индефинитной метрикой.

Введем теперь матрицы обычного и временного (темпорального) спинов [12]

$$\mathcal{S} = (i\gamma_2\gamma_3), i\gamma_3\gamma_1, i\gamma_1\gamma_2) = \sigma \cdot I_4 \tag{15}$$

и

$$\hat{\mathcal{T}} = (-i\gamma_5\gamma_6, -i\gamma_6\gamma_4, -i\gamma_4\gamma_5) = -\Gamma\hat{\gamma}, \tag{16}$$

удовлетворяющие двум симметричным соотношениям Паули

$$\mathcal{S}_i\mathcal{S}_k = \varepsilon_{ikell}\mathcal{S}_\ell + \delta_{ik}I_8 \quad \mathcal{T}_i\mathcal{T}_k = \varepsilon_{ikell}\mathcal{T}_\ell + \delta_{ik}I_8.$$

С помощью этих матриц вычислены приведенные в таблице 2 значения пространственной и временной спиральностей

$$S = \bar{\Psi}_s\mathcal{S}(\mathbf{p}/p)\Psi_s = \pm(p/m)\bar{\Psi}_s\Psi, \tag{17}$$

(знаки "+" и "-" соответствуют спиновым состояниям $s = 1, 2$ и $s = 3, 4$) и

$$\mathcal{T} = \bar{\Psi}_s\hat{\mathcal{T}}\hat{\tau}\Psi_s = -(E/m)\bar{\Psi}_s\Psi_s. \tag{18}$$

В этих выражениях учтено, что в силу уравнения Дирака для плоской волны $\hat{\mathbf{p}}\hat{\boldsymbol{\gamma}}\Psi = -m\Psi$, поэтому

$$\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi = -m^{-1}\bar{\Psi}(\gamma_\nu\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_\nu)p^\nu\Psi = -m^{-1}p^\mu\bar{\Psi}\Psi.$$

Понятно, что частицы с различающейся временной спиральностью могут проявлять свои особенности лишь во взаимодействиях, изменяющих траектории $\hat{t}$. Во всех других случаях такие частицы не различимы между собой.

2. НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Вернемся к уравнениям (4) - (6). По аналогии с одновременной теорией будем предполагать, что $\Phi'' \ll \Phi'$. Это позволяет пренебречь в уравнении для Φ'' членом $(i\nabla_4 + eA_4)$, после чего уравнение для Φ' может быть представлено в виде

$$[P_4 + m(1-\tau_1)]\,\Phi +$$

$$\frac{1}{m(1+\tau_1)}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\mathbf{P}} + \Sigma_4 P_4 + m\Theta_{23})^2\Phi = 0, \qquad (19)$$

где $\hat{\mathbf{P}} = i\hat{\boldsymbol{\nabla}} + e\hat{\mathbf{A}}$ и переобозначено $\Phi = \Phi'$.

Используя свойства матриц $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, можно убедиться в справедливости трех следующих соотношений:

$$\left(\boldsymbol{\Sigma}(i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A})\right)^2 \Phi = \left(\left[i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A}\right)^2 - e\sigma\mathbf{H}\right]\Phi, \quad \mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A};$$

$$\tilde{\Sigma}(i\tilde{\nabla} + e\tilde{A} + m\tilde{\tau})^2\Phi = \left[-(i\tilde{\nabla} + e\tilde{A} + m\tilde{\tau})^2 - eT_1G_1\right]\Phi,$$

где $\hat{G} = -\hat{\nabla}\times\hat{A}$, $\tilde{X} = (X_5, X_6)$ — двумерный вектор в t-подпространстве, а матрица временного спина (16)

$$T_1 = i\Sigma_5\Sigma_6 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\left[\boldsymbol{\Sigma}(i\boldsymbol{\nabla}+e\mathbf{A})\tilde{\Sigma}(\tilde{A}-m\tilde{\tau})+\tilde{\Sigma}(\tilde{A}-m\tilde{\tau})\boldsymbol{\Sigma}(i\boldsymbol{\nabla}+e\mathbf{A})\right]\Phi=$$

$$\left[ie\boldsymbol{\Sigma}\tilde{\Sigma}(\boldsymbol{\nabla}\tilde{A}-\tilde{\nabla}\mathbf{A})\right]\Phi=ie\boldsymbol{\Sigma}_i\tilde{\Sigma}_{3+k}\mathcal{E}_{ik}\Phi=e\sigma_i(\mathcal{E}_{i3}T_2-\mathcal{E}_{i2}T_3)\Phi,$$

где (6×6)-мерный тензор электрического поля $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=\mathbf{A}\hat{\nabla}-\boldsymbol{\nabla}\hat{A}$, индекс $k=2,3$, и две компоненты временного спина

$$T_2=\begin{pmatrix}0 & iI_2\\ -iI_2 & 0\end{pmatrix},\quad T_3=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix}.$$

Уравнение (19) теперь можно записать в виде

$$[P_4+m(1-\tau_1)]\,\phi_1+(i\boldsymbol{\nabla}+e\mathbf{A})^2-e\sigma\mathbf{H}-$$

$$-\,(i\tilde{\nabla}+e\tilde{A}+m\tilde{\tau})^2-e\mathcal{T}_1G_1+\sigma_i(\mathcal{E}_{i3}T_2-\mathcal{E}_{i2}T_3)\Phi. \quad (20)$$

Условие $\Psi''\ll\Psi'$, как это следует из таблиц 1 и 2, требует, чтобы были малы компоненты временного вектора τ_2 и τ_3, т. е. $1+\tau_1\simeq 2,\quad 1-\tau_1=\tilde{\tau}^2/(1+\tau_1)\sim 0$. Мы будем также предполагать малость потенциала $\hat{A}^2$, а также временных производных $\hat{\nabla}^2\psi$и$\hat{\nabla}\hat{A}$. С учетом этих приближений получим 4-компонентное волновое уравнение

$$i\frac{d\Psi}{dt}=\left[(1/2m)(i\boldsymbol{\nabla}+e\mathbf{A})^2-(e/2m)\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}+eA_4+\right.$$

$$\left.(ie/2m)\sigma_k(\mathcal{E}_{k3}T_2-\mathcal{E}_{k2}T_3)\right]\Psi, \quad (21)$$

которое и является многовременным обобщением известного равнения Паули. Временная производная в левой части может быть представлена в более симметричном виде

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi}{dt_k}\frac{dt_k}{dt}\tau_k = \hat{\tau}\hat{\nabla}\Psi = \frac{d\Psi}{d\hat{\tau}}.$$

Следует отметить, что уравнение (21) не содержит в явном виде компонент времени τ_2 и τ_3. Другая особенность этого уравнения состоит в неэрмитовости гамильтониана, обусловленной асимметрией тензора электрического поля $\mathcal{E}_{ik}$: в общем случае $\mathcal{E}_{ik} \neq \mathcal{E}_{ki}$ [3].

С физической точки зрения это выражает тот факт, что под действием дополнительных полевых компонент $\hat{\mathbf{A}}_k, k = 5, 6$, изменяется направление временной траектории частицы $\hat{\tau}$ и, соответственно, вектор энергии $\hat{E} = E\hat{\tau}$. Зависимость энергии от времени как раз и отражается в неэрмитовости гамильтониана.

3. КВАНТОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Далее мы будем пользоваться системой координат с осью t_1, параллельной траектории поля $\hat{\tau} = (1,0,0)^T$ в t-пространстве, которая в отсутствие взаимодействий остается неизменной. (Перейти к другим системам координат

[3] Например, в случае плоской волны с лоренцевской калибровкой [9]

$$\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & k_1 A_5(\mathbf{k}) & k_1 A_6(\mathbf{k}) \\ -\omega A_2(\mathbf{k}) & k_2 A_5(\mathbf{k}) & k_2 A_6(\mathbf{k}) \\ -\omega A_3(\mathbf{k}) & k_3 A_5(\mathbf{k}) & k_3 A_6(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad \omega = |\mathbf{k}|.$$

можно с помощью обобщенных лоренцевских преобразований [14,15]). В этом случае электромагнитный потенциал можно представить в виде 4-мерного интеграла Фурье

$$\hat{\mathbf{A}} = (2\pi)^{-3/2} \int d^4p\, \delta(\hat{\mathbf{p}}^2) \hat{\mathbf{A}}_{\hat{\mathbf{p}}} e^{i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}} =$$

$$(2\pi)^{-2/3} \int \frac{d^3p}{2p} (\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) e^{i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}} + \hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p}) e^{-i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}}), \qquad (22)$$

где $p = |\mathbf{p}|$, $\hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p}) = \hat{\mathbf{A}}(-\mathbf{p})$. Как следствие обобщенной лоренцевской калибровки $\hat{\nabla}\hat{\mathbf{A}} = 0$ [10, 21] скалярное произведение $\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) = 0$.

Из 36-компонентного тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \right). \qquad (23)$$

следует выражение для 6-мерного вектора энергии-импульса электромагнитного поля

$$P_\mu = -i \int d^3x\, T_{\mu,3+k} \tau^k =$$

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3p\, d^3p'}{pp'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \left(p'_\mu \hat{p} \hat{\tau} - (1/2) \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}}' \delta_{\mu 3+k} \tau^k \right) \times$$

$$\left[\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p}') + \hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}') \right] =$$

$$\frac{1}{4\pi} \int d^3p\, (p_\mu/p) \left[\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p}) + \hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) \right], \qquad (24)$$

где принято во внимание соотношение

$$p'_\mu \hat{p} \hat{\tau} - (1/2) \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}}' \delta_{\mu 3+k} \tau^k = p_\mu \hat{p} \hat{\tau} = p_\mu p.$$

В классической (неквантовой) электродинамике энергия поля $E = \hat{\mathbf{P}}\hat{\tau}$ содержит отрицательные члены, связанные с его временными компонентами $\nu > 3$ (см. также [12, 13]). С отрицательными членами, порождаемыми скалярной компонентой $A_4(\mathbf{p})$ мы встречаемся и в обычной одновременной теории, где, однако, благодаря лоренцевской калибровке их вклад компенсируется вкладом продольной компоненты $A_3(\mathbf{p})$. Во многовременной теории такая компенсация также имеет место, но полевые компоненты A_5 и A_6 остаются некомпенсированными и дают отрицательной вклад а энергию поля (24). В этом случае, чтобы обеспечить положительную дефинитность компонент вектора энергии P_{k+3}, мы должны наложить дополнительное требование

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p})\hat{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{p}) + \hat{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{p})\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) = 2|\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p})|^2 \geq 0, \tag{25}$$

т. е. вектор-потенциал $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p})$ должен быть пространственноподобным. Это условие является следствием необратимости времени, поскольку электромагнитные волны с отрицательными компонентами энергии (большими компонентами A_5 и A_6) соответствуют обратному движению по времени по крайней мере вдоль одной из осей t_i. В частности, не может быть распространяющихся лишь в t-пространстве волн с потенциалом $\hat{\mathbf{A}} = (0, \hat{A})$ [21].

Если теперь ввести нормированные шестимерные амплитуды $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{p}) = (4\pi p)^{1/2}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p})$, подчиняющиеся условиям

$$[a^{+}_{\mu}(\mathbf{p}), a_{\nu}(\mathbf{p}')] = g_{\mu\nu}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \tag{26}$$

$$[a_{\mu}(\mathbf{p}), a_{\nu}(\mathbf{p}')] = [a^{+}_{\mu}(\mathbf{p}), a^{+}_{\nu}(\mathbf{p}')] = 0. \tag{27}$$

с метрическим тензором $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ для $\mu, \nu \le 3$ и $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$ для $\mu, \nu > 3$ (т. е. как и в обычной одновременной теории мы пользуемся индефинитной метрикой), то вектор энергии-импульса электромагнитного поля

$$\hat{\mathbf{P}} = \int d^3p\, \hat{\mathbf{p}} \left[\mathbf{a}^+(\mathbf{p})\mathbf{a}(\mathbf{p} - \hat{a}^+(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}\right] =$$

$$\sum_{k=1}^{3} \int d^3p\, \hat{\mathbf{p}} \left[n_k(\mathbf{p}) + n_{3+k}(\mathbf{p})\right] + \hat{\mathbf{P}}_{o\mu}, \qquad (28)$$

где положительные величины n_ν представляют собой числа фотонов, обладающих поляризацией вдоль оси x_ν, а $\hat{\mathbf{P}}_{o\mu}$ — вакуумное значение энергии-импульса.

4. КВАНТОВАНИЕ СПИНОРНОГО ПОЛЯ

Аналогично электромагнитному полю спинор $\Psi(\hat{\mathbf{x}})$ можно представить в виде 4-мерного интеграла Фурье:

$$\Psi(\hat{\mathbf{x}}) = (2\pi){-}3/2 \sum_{s=1}^{4} \int d^4p\, \delta(\hat{\mathbf{p}}^2 + m^2) A_s(\hat{\mathbf{p}}) U_s(\hat{\mathbf{p}}) e^{i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}}, \qquad (29)$$

где U_s — приведенные в таблице 2 (для частного случая $\mathbf{p} = (0,0,1)$) решения многовременного уравнения Дирака.

Принимая во внимание свойства δ-функции, разложение (29) перепишем как

$$\Psi(\hat{\mathbf{x}}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=1}^{4} \int \frac{{}^3p}{2E_p} \times$$

$$\left(A_s(\mathbf{p}) U_s(\mathbf{p}, E_p) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x} - iE_p t} + A_s(-\mathbf{p},) V_s(\mathbf{p}, E_p) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x} + iE_p t}\right). \qquad (30)$$

Здесь $E_p = (\mathbf{p}^2+m^2)^{1/2}$, а спинор V_s — решение уравнения Дирака для $E_p < 0$,

Изменив знак импульса $\mathbf{p}$ во втором члене правой части уравнения (30), получим

$$\Psi(\hat{\mathbf{x}}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=1}^{4} \int \frac{{}^3p}{2E_p} \times$$

$$\left(A_s(\mathbf{p}) U_s(\mathbf{p}) e^{i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}} + B_s^+(\mathbf{p}) V_s(-\mathbf{p}) e^{-i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}}\right), \qquad (31)$$

где $\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{px} - E_p t$ и обозначено $B_s^+(\mathbf{p}) = A_s(-\mathbf{p})$.

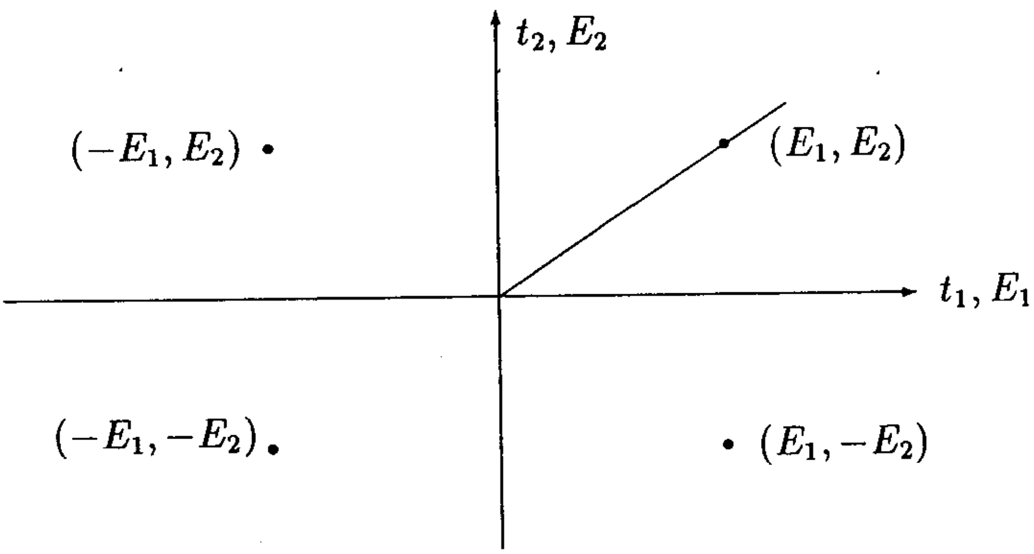

Рис. 2. Условие $d\hat{t}/dt \geq 0$ разрешает лишь те временные траектории $\hat{t}(t)$ с положительной энергией $\hat{E} = e\hat{t} = (E_1, E_2)$, которые расположены в первом квадранте. Отрицательные компоненты энергии, соответствующие траекториям в других квадрантах, исключаются.

Аналогично

$$\bar{\Psi}(\hat{\mathbf{x}}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=1}^{4} \int \frac{^3p}{2E_p} \times$$

$$\left(A_s^+(\mathbf{p}) \bar{U}_s(\mathbf{p}) e^{-i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}} + B_s(\mathbf{p}) \bar{V}_s(-\mathbf{p}) e^{i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}} \right), \qquad (32)$$

В отличие от обычной одновременной теории во многовременном случае отсутствует энергетическая щель $\Delta E = 2m$ между полостями гиперболоида $\hat{\mathbf{P}}^2 = m^2$, соответствующими положительным и отрицательным значениям компонент энергии. Между этими значениями возможен такой же непрерывный переход, как и между разнознаковыми компонентами импульса p_i. Это означает, что в пространстве с многомерным временем, вообще говоря, нельзя однозначно разделить положительно- и отрицательночастотные компоненты поля. Однако такое разделение становится возможным, если учесть ограничение на временные траектории $d\hat{t}/dt \geq 0$, накладываемое необратимостью времени (см. частный случай двумерного времени на рис. 2).

Шестимерный вектор энергии-импульса и электрический заряд спинорного поля теперь могут быть записаны в виде

$$\hat{\mathbf{P}} = -\frac{i}{2} \int d^4x \, T_{\mu k} \tau^k = -\frac{i}{2} \int d^4x \, T_{\mu 4} =$$

$$\frac{1}{2} \int d^4x \left(\bar{\Psi} \gamma_4 \, \hat{\boldsymbol{\nabla}} \Psi - \hat{\boldsymbol{\nabla}} \bar{\Psi} \gamma_4 \Psi \right) =$$

$$\sum_{s=1}^{4} \eta_s \int d^3p \, N_p \hat{\mathbf{p}} \left[A_s^+(\mathbf{p}) A_s(\mathbf{p}) - B_s(\mathbf{p}) B_s^+(\mathbf{p}) \right], \qquad (33)$$

$$Q = q \int d^3x\, \bar{\Psi}\gamma_4\Psi =$$

$$\sum_{s=1}^{4} \eta_s \int d^3p\, N_p \left[A_s^+(\mathbf{p})A_s(\mathbf{p}) + B_s(\mathbf{p})B_s^+\mathbf{p})\right], \qquad (34)$$

с однозначно разделенными амплитудами A и B. При этом введена величина $N_p = 1/E_p(E_p + m)$ и учтены соотношения

$$\bar{U}_s(\mathbf{p})\gamma_4 U_r(\mathbf{p}) = (E_p/m)\bar{U}_s(\mathbf{p})U_r(\mathbf{p}) = 4E_p(E_P + m)^{-1}\eta_s\delta_{sr}, \qquad (35)$$

$$\bar{V}_s(\mathbf{p})\gamma_4 V_r(\mathbf{p}) = (E_p/m)\bar{V}_s(\mathbf{p})V_r(\mathbf{p}) = N_p\eta_s\delta_(sr), \qquad (36)$$

$$U_s(\mathbf{p})\gamma_4 V_r(\mathbf{p}) = \bar{U}_s(\mathbf{p})\gamma_4 V_r(\mathbf{p}) = \bar{U}_s(\mathbf{p})\gamma_4\bar{V}_r(\mathbf{p}) = 0. \qquad (37)$$

Если перейти к перенормированным амплитудам $a_s = A_s N_p^{1/2}$, $b_s = b_s N_p^{1/2}$ и ввести правила квантования

$$[a_s^+(\mathbf{p}), a_r(\mathbf{p}')]_+ = [b_s^+(\mathbf{p}), b_r(\mathbf{p}')]_+ = \eta_s\delta_{rs}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \qquad (38)$$

$$[a_s(\mathbf{p}'), a_r(\mathbf{p}')]_+ = [b_s(\mathbf{p}), b_r(\mathbf{p}')]_+ = [a_s(\mathbf{p}), b_r(\mathbf{p}')]_+ =$$

$$[a_s^+(\mathbf{p}), b_r(\mathbf{p}')]_+ = 0, \qquad (39)$$

то выражения для энергии-импульса и заряда запишутся в виде

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{s=1}^{4} \int d^3p\, \hat{\mathbf{p}} \left[n^+(\mathbf{p}) + n^-(\mathbf{p}) \right] + \hat{\mathbf{P}}_o \tag{40}$$

$$Q = q \sum_{s=1}^{4} \int d^3p \left[n^+(\mathbf{p}) - n^-(\mathbf{p}) \right] + Q_o, \tag{41}$$

откуда можно заключить, что, как и в обычной одновременной теории, $n^+ = a_s^+(\mathbf{p})a_r(\mathbf{p}')$ и $n^- = b_s^+(\mathbf{p})b_r(\mathbf{p}')$ — числа частиц и античастиц, а бесконечные величины $\hat{\mathbf{P}}_o$ и Q_o — вакуумные значения энергии-импульса и заряда.

Мы видим, что независимо от знака нормы $\bar{\Psi}\Psi$ энергия частицы $(\hat{P} - \hat{P}_o)\hat{\tau}$ всегда остается положительной величиной. Этот результат не зависит и от выбора системы координат в t-пространстве.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По сравнению с одновременным случаем уравнение Дирака в пространстве с трехмерным временем имеет вдвое большее число линейно независимых решений, половина которых соответствует положительным, а вторая половина — отрицательным компонентам вектора энергии $\hat{E} = E\hat{\tau}$, где $\hat{\tau}$ — вектор, определяющий направление траектории частицы в t-пространстве. В каждой из этих двух групп решений два решения обладают отрицательной нормой ($\bar{\psi}\psi = -1$), что затрудняет интерпретацию ψ-функции как амплитуды вероятности. Однако если задаться определенным значением временной спиральности $\mathcal{T}$, то норма ψ-функции остается знакопостоянной.

В нерелятивистском пределе волновое уравнение не содержит дополнительных временных координат τ_2, τ_3 и не отличается от обычного уравнения Шредингера для бесспиновой частицы.

Как и в одновременном случае, теория поля с трехмерным вектором времени, описывающая взаимодействие спинорной частицы с 6-мерным электромагнитным потенциалом, может быть сформулирована в гамильтоновой форме и допускает квантование в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой. При этом условие необратимости времени обеспечивает положительную дефинитность компонент векторов энергии квантов и однозначное разделение частиц и античастиц. Неэрмитовость части гамильтониана, отвечающей за взаимодействие, отражает возможность изменения направлений временных траекторий взаимодействующих частиц $\hat{\tau}_i$ и, соответственно, вектора энергии $\hat{E}_i = e\hat{\tau}_i$. Следует заметить, что неэрмитовость может иметь место доже при постоянном значении полной энергии E.

Как видим, в теории многомерного времени пока не удается обнаружить каких-либо противоречий. Возможно, они проявятся при более детальном изучении процессов взаимодействия элементарных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *P. A. M. Dirac, V. A. Fock, B. Podolsky.* **Zs. d. Sowjetunion. 1932. V. 2. P. 468.**

[2] *S. Tomonaga.* **Prog. Theor. Phys. 1946. V. 1. P. 27.**

[3] *P. T. Pappas.* Lett. Nuovo Cim. 1978. V. 22. P. 601.

[4] *G. Zieno.* Lett. Nuovo Cim. 1979. V. 24. P. 171.

[5] *G. Zieno.* Lett. Nuovo Cim. 1981. V. 31. P. 629.

[6] *.P. T. Pappas.* Nuovo Cim. B. 1982. V. 68. P. 111.

[7] *J. Strnag.* Lett. Nuovo Cim. 1983. V. 25. P. 73.

[8] *J. Strnag.* Phys.Lett. A. 1983. V. 96. P. 231.

[9] *E. A. B. Cole.* Nuovo Cim. B. 1978. V. 44. P. 157.

[10] *E. A. B. Cole.* Nuovo Cim. A. 1980. V. 60. P. 1.

[11] *E. A. B. Cole.* Nuovo Cim. B. 1985. V. 85. P. 105.

[12] *J. B. Boyling, E. A. B. Cole.* Intern. J. Theor. Rhys. 1993. V. 32. P. 801.

[13] *M. Pavšič.* J. Phys. A: Math. Gen. 1981. V. 14. P. 3217.

[14] *E. A. B. Cole, S. A. Buchman.* J. Phys. A: Math. Gen. 1982. V. 15. P. L255.

[15] *V. S. Barashenkov.* Six-dimensional space-time transformations. Preprint JINR E2-97-83, Dubna, 1997.

[16] *E. A. B. Cole.* Phys. Lett. A. 1983. V. 95. P. 282.

[17] *E. A. B. Cole.* J. Phys. A: Math. Gen. 1980. V. 13. P. 109.

[18] *V. S. Barashenkov.* Tur. J. Phys. 1998. V. 22. S. 1.

[19] *V. S. Barashenkov.* Found. Phys. 1998. V. 28. P. 471.

[20] *V. S. Barashenkov.* Propogation of signals in space with multidimensional time. Preprint JINR E2-96-112, Dubna, 1996.

[21] *V. S. Barashenkov, M. Z. Yur'iev.* Nuovo Cim. B. 1997. V. 112. P. 117.

[22] *V. S. Barashenkov, A. B. Pestov, M. Z. Yur'iev.* Gen. Rel. & Grav. 1997. V. 29. P. 1345.

[23] *V. S. Barashenkov, M. Z. Yur'iev.* Is the Hypothesis of Time Multi-Dimensionality at Variance with the Facts? Preprint JINR E2-96-246. Dubna. 1996.

[24] *E. A. B. Cole.* Nuovo Cim. B. 1980. V. 55. P. 269.

[25] *J. Dorling* . Amer. J. Phys. 1970, V. 38. P. 539.

[26] *P. Demers.* Canad. j. Phys. 1975. V. 53. P. 1687.

[27] *C. E. Patty, L. I. Smalley.* Phys. Rev. D. 1991. V. 32. P. 891.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 апреля 1999 года.

Барашенков В.С., Юрьев М.З. P2-99-109
Квантовая теория поля с трехмерным вектором времени

Найдена система линейно независимых, ортогональных решений уравнений Дирака в пространстве с трехмерным временем в общем случае произвольно направленной временной траектории частицы. Обсуждаются свойства этих решений. Рассмотрены взаимодействие с электромагнитным полем и переход к нерелятивистским уравнениям Паули и Шредингера. Определены правила квантования спинорного и электромагнитного полей, сохраняющие положительную дефинитность энергии. В отличие от одновременной теории норма волновой функции многовременного уравнения Дирака оказывается знакопеременной ($\bar{\psi}\psi = \pm 1$). Знак нормы сохраняется лишь при неизменном направлении времени (при фиксированном значении временной спиральности). Еще одна особенность многовременной теории состоит в том, что гамильтониан взаимодействия является неэрмитовым, что обусловлено временной зависимостью компонент вектора энергии.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1999

Перевод авторов

Barashenkov V.S., Yuriev M.Z. P2-99-109
Quantum Field Theory with the Three-Dimensional Time Vector

A system of linearly independent, orthogonal solutions for the Dirac equation is found in a space with a three-dimensional time in the general case of an arbitrary directed particle time trajectory. The properties of these solutions are discussed. The interactions with the electromagnetic field and the transition to the non-relativistic Pauli and Schrödinger equations are considered. Rules of the quantization of the spinor and the electromagnetic fields preserving the positive definiteness of the energy are defined. In contrast to the customary one-time Dirak equation the wave function norm has alternating signs $\bar{\psi}\psi = \pm 1$. The sign of these norm is conserved only for an immitable time direction X for a fixed value of the temporal helicity. Another peculiarity consists in the non-Hermiticy of the interaction Hamiltonian which is stipulated by a time dependence of the energy vector components.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1999

Редактор М.И.Зарубина. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 11.05.99.
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 2,36
Тираж 460. Заказ 51358. Цена 3 р. 24 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области