Une remarque sur le problème de Cauchy de l'équation d'Einstein d'une variété de dimension quatre

Weishu SHIH

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Mai 1995

IHES/M/95/46

Une remarque sur le problème de Cauchy
de l'équation d'Einstein d'une variété de dimension quatre

L'harmonie naturelle
pour tous les êtres vivants

L'égalité de consommation
pour tous les êtres humains

par Weishu Shih

Résumé. On montre que l'équation d'Einstein d'une variété analytique réelle de dimension quatre possède des solutions analytiques de signature deux au voisinage de toute sous-variété analytique de codimension un compacte ou orientable, dont le fibré normal est trivial.

Introduction.

Soient Y une sous-variété analytique réelle de codimension un d'une variété analytique réelle V de dimension quatre telle que l'espace fibré normal de Y dans V soit orientable, et D l'équation d'Einstein de V (c.f. (1.8)). Le but de ce travail est d'établir l'affirmation suivante :

Théorème 1. *si Y est compacte ou orientable, alors D possède des données initiales de Cauchy analytiques de signature 2 bien posées sur Y,*

Théorème 2. *si Y est orientable alors D possède des données initiales de Cauchy analytiques de signature 2 mal posées sur Y.*

Autrement dit, pour l'équation d'Einstein les problèmes de "Cauchy caractéristique" et celui de "non caractéristique" se présentent simultanément sur la même sous-variété orientable Y. Ainsi le théorème de Cauchy-Kowalawska ne semble pas applicable immédiatement à cette équation.

La démonstration d'existence de telles données initiales est constructive. En particulier, dans le cas du Théorème 1, le programme de J.A. Shih (*) nous permet d'écrire explicitement, dans une carte locale d'un voisinage de Y, le développement de Taylor d'ordre $k < \infty$ de la solution analytique de signature 2 correspondante ; ce qui rassure peut être un peu les sceptiques de [4], [7]. Et le Théorème 2 restera valable sans l'hypothèse d'analyticité i.e. $Y \subset V$ sont de classe C^∞.

Préliminaire.

(1.1) Etant donnés trois espaces fibrés vectoriels A, B, C réels sur l'epace topologique X et deux sections

$$\varphi : X \to \mathrm{Hom}(B, C) \quad , \quad \psi : X \to \mathrm{Hom}(A, C)$$

des projections canoniques $\mathrm{Hom}(B, C) \to X$, $\mathrm{Hom}(A, C) \to X$, définissons le sous-espace

$$\mathrm{Hom}_{\varphi,\psi}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{p} X$$

comme suit : $\eta \in \mathrm{Hom}_{\varphi,\psi}(A, B)$ si et seulement si $\varphi(x) \circ \eta = \psi(x)$ où $p(\eta) = x$.

Considérons le cas particulier où $A = C$, $\psi = 1_A$, et $\varphi(x)$ est de rang maximum = dimension de A pour tout $x \in X$, alors $\mathrm{Hom}_{\varphi,\psi}(A, B)$ est un sous-espace fibré affiné de $\mathrm{Hom}(A, B)$:

(*) Pour en savoir plus, e-mail shih@poly.polytechnique.fr

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_{\varphi,\psi}(A,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A,B)\\ & \searrow \quad \swarrow p & \\ & X & \end{array}$$

(1.2) Etant données deux variétés V, Z et

$$\pi : Z \to V$$

une application, de classe $\mathcal{C}^\infty$, désignons par [2]

$$i_k : J^k_\pi(V,Z) \subseteq J^k(V,Z) \qquad k \geq 0$$

l'inclusion du sous-espace $J^k_\pi(V,Z)$ formé par des éléments $\xi_0 \in J^k(V,Z)$ qui peuvent être représentés par une application $f : V \to Z$ i.e. $\xi_0 = j^k f(x_0)$, $x_0 = \alpha^k_{-1}(\xi_0)$ telle que $\pi \circ f = 1_V$, et par

$$\alpha_\pi = \alpha^k_{k',\pi} : J^k_\pi(V,Z) \to J^{k'}_\pi(V,Z) \qquad k' \leq k$$

l'application induite par la projection canonique $\alpha = \alpha^k_{k'}$.

Dans la suite de ce travail, nous fixons l'hypothèse suivante :

$$\pi : Z \to V \text{ est surjective de rang maximum} = \text{dimension de } V \geq 2.$$

Alors il est clair que $J^k_\pi(V,Z)$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $J^k(V,Z)$ et

$$J^*_\pi(V,Z) : \cdots \to J^k_\pi(V,Z) \xrightarrow{\alpha_\pi} J^{k-1}_\pi(V,Z) \cdots \to J^0_\pi(V,Z) \to V$$

forme une chaîne d'Ehresmann par rapport à l'idéal $i^*_k(\mathcal{I}_k)$ ($\mathcal{I}_k$ l'idéal de Cartan-Ehresmann de $J^k(V,Z)$) qui est une sous-chaîne de $J^*(V,Z)$ [6]. La construction fonctorielle associée à chaque chaîne d'Ehremann nous permet d'introduire "le système canonique de V dans Z relative à π" : [3 p.22] [4 p.15]

$$\begin{array}{ccccccccc}E^\pi_{\ell,*}(V,Z) : \cdots & \longrightarrow & E^\pi_{\ell,k+1}(V,Z) & \longrightarrow & E^\pi_{\ell,k}(V,Z) & \longrightarrow & E^\pi_{\ell,k-1}(V,Z) & \longrightarrow & \cdots\\ \downarrow \rho^\pi & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ W^\pi_{\ell,*}(V,Z) : \cdots & \longrightarrow & W^\pi_{\ell,k+1}(V,Z) & \longrightarrow & W^\pi_{\ell,k}(V,Z) & \longrightarrow & W^\pi_{\ell,k-1}(V,Z) & \longrightarrow & \cdots\end{array}$$

Exemple. Considérons la cas particulier $\pi : Z = V \times F \to V$ la projection canonique. Alors on a l'isomorphisme de chaîne

$$\varphi^* : J^*(V,F) \underset{\approx}{\to} J^*_\pi(V, V \times F)$$

défini par $\varphi^k : J^k(V,F) \to J^k_\pi(V, V\times F)$

$$\varphi^k(\eta_0) = j^k(1_V \vee f)(x_0) \quad , \quad \eta_0 \in J^k(V,F)$$

où $f : V \to F$ représente η_0 : $j^k f(x_0) = \eta_0$, $x_0 = \alpha^k_{-1}(\eta_0)$, et $(1_V \vee f)(x) = (x, f(x))$.

(1.3) Soit D un sous-ensemble de $J^{k_0}(V,Z)$ contenu dans $J^{k_0}_\pi(V,Z)$

$$D \subseteq J^{k_0}_\pi(V,Z) \subseteq J^{k_0}(V,Z),$$

alors une solution [6 p.1] de D : $u : V \to Z$ vérifie évidemment : $\pi \circ u = 1_V$ i.e. une section de $\pi : Z \to V$. D'autre part l'application d'Ehresmann relative à π, "e_π" définie par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} J^{k+1}_\pi(V,Z) & \xrightarrow{e_\pi} & J^1_{\alpha_\pi}(V, J^k_\pi(V,Z)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ J^{k+1}(V,Z) & \xrightarrow{e} & J^1(V, J^k(V,Z)), \end{array}$$

nous permet d'introduire, de la même manière que [3 p.16] [4 p.31], le pré-gradué (resp. gradué) associé à D, D'_* (resp. D_*) qui sont des sous-chaînes de $J^*_\pi(V,Z)$

$$D_* \subseteq D'_* \subseteq J^*_\pi(V,Z).$$

De même on a

$$E^\pi_{\ell,*}(D) \subseteq E^\pi_{\ell,*}(V,Z) \quad , \quad W^\pi_{\ell,*}(D) \subseteq W^\pi_{\ell,*}(V,Z)$$

et les applications

$$\rho^\pi_\ell : E^\pi_{\ell,*}(D) \to W^\pi_{\ell,*}(V,Z),$$

ainsi que la notion de la stratification canonique de $D \subseteq J^{k_0}_\pi(V,Z)$ i.e. celle de ρ^π_{n-1} quand celui-là existe e.g. D soit semi-algébrique et ℓ-simple [6 p.11].

(1.4) Désignons par TV l'espace tangent d'une variété V et

$$p_1 : V \times Z \to V \quad , \quad p_2 : V \times Z \to Z$$

les projections canoniques. Alors les identifications canoniques

$$\begin{array}{ccc} J^1(V,Z) & \xrightarrow{\approx} & \mathrm{Hom}(p_1^* TV, p_2^*(TZ)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ J^0(V,Z) & \xrightarrow{\approx} & V \times Z \end{array}$$

induisent évidemment celles de

$$\begin{array}{ccc} J^1_\pi(V,Z) & \xrightarrow{\approx} & \mathrm{Hom}_{\varphi,\psi}(p_1^* TV, p_2^* TZ) \\ \downarrow & & \downarrow \\ J^0_\pi(V,Z) & \xrightarrow{\approx} & V \times_\pi Z \end{array}$$

où $V \times_\pi Z$ le graphe de π,

$$\varphi : V \times_\pi Z \to \mathrm{Hom}(p_2^* TZ, p_1^* TV)$$

l'application définie par la dérivée de π, et

$$\psi : V \times_\pi Z \longrightarrow \mathrm{Hom}(p_1^* TV, p_1^* TV)$$

l'identité (c.f. (1.1)).

(1.5) Soient V_i, Z_i, $i = 1, 2$ des variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$ et deux applications de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$g : V_1 \longrightarrow V_2 \quad , \quad h : Z_1 \longrightarrow Z_2$$

où g est un difféomorphisme. Désignons par

$$F^k_{g,h} : J^k(V_1, Z_1) \longrightarrow J^k(V_2, Z_2) \qquad\qquad k \geq 0$$

l'application définie de la manière suivante. Pour $\eta_0 \in J^k(V_1, Z_1)$ représenté par $f : V_1 \longrightarrow Z_1$ i.e. $j^k f(x_0) = \eta_0$, $x_0 = \alpha^k_{-1}(\eta_0)$, on pose

$$F^k_{g,h}(\eta_0) = j^k(h \circ f \circ g^{-1})(g(x_0)) \in J^k(V_2, Z_2).$$

Il est clair que $F^k_{g,h}$ définit une application de chaîne

$$F^*_{g,h} : J^*(V_1, Z_1) \longrightarrow J^*(V_2, Z_2),$$

et le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
J^{k+1}(V_1, Z_1) & \xrightarrow{e} & J^1(V_1, J^k(V_1, Z_1)) \\
\downarrow F^{k+1}_{g,h} & & \downarrow F^1_{g, F^k_{g,h}} \\
J^{k+1}(V_2, Z_2) & \xrightarrow{e} & J^1(V_2, J^k(V_2, Z_2))
\end{array}$$

est commutatif. Dans le cas où h est aussi un difféomorphisme, il en est de même pour les $F^k_{g,h}$, qui induisent des difféomorphismes entre les systèmes canoniques :

$$\begin{array}{ccc}
E_{\ell,k}(V_1, Z_1) & \xrightarrow{F_{g,h}} & E_{\ell,k}(V_2, Z_2) \\
\downarrow \rho & & \downarrow \rho \\
W_{\ell,k}(V_1, Z_1) & \xrightarrow{F_{g,h}} & W_{\ell,k}(V_2, Z_2).
\end{array}$$

Supposons maintenant que g et h commutent avec les π_i, $i = 1, 2$:

$$\begin{array}{ccc}
Z_1 & \xrightarrow{h} & Z_2 \\
\downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\
V_1 & \xrightarrow{g} & V_2.
\end{array}$$

Alors les $F^k_{g,h}$ induisent des isomorphismes des chaînes

$$J^*_{\pi_1}(V_1,Z_1) \xrightarrow{\approx} J^*_{\pi_2}(V_2,Z_2)$$

et

$$\begin{array}{ccc} E^{\pi_1}_{\ell,*}(V_1,Z_1) & \longrightarrow & E^{\pi_2}_{\ell,*}(V_2,Z_2) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ W^{\pi_1}_{\ell,*}(V_1,Z_1) & \longrightarrow & W^{\pi_2}_{\ell,*}(V_2,Z_2) \end{array}$$

que nous noterons de nouveau par $F^*_{g,h}$.

(1.6) Etant donnés deux sous-ensembles

$$D_i \subseteq J^{k_0}(V_i,Z_i) \quad (resp.\ D_i \subseteq J^{k_0}_{\pi_i}(V_i,Z_i)) \qquad i=1,2$$

nous posons

Définition. *D_1 et D_2 sont dits équivalents forts (resp. équivalents) s'il existe des difféomorphismes g,h tels que*

$$\text{Im } F^{k_0}_{g,h}(D_1) = D_2 \quad (resp.\ \text{Im } F^*_{g,h}(D_{1,*}) = D_{2,*})$$

où $D_{i,*}$ est le gradué associé de D_i.

Il est clair (c.f. (1.5)) que "équivalence forte" entraîne "équivalence". Mais les exemples [6 p.9] montrent que l'inverse n'est pas vrai. D'autre part si D_1 et D_2 sont équivalents, alors $F^*_{g,h}$ induit des morphismes stratifiés [9] entre les systèmes canoniques (resp. relatifs à π_i) stratifiés par D_i. En particulier, on a pour les strates transversales :

$$\begin{array}{ccc} E^t_{n-1,k_0-1}(D_1) & \underset{\approx}{\xrightarrow{F^*_{g,h}}} & E^t_{n-1,k_0-1}(D_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W^t_{n-1,k_0-1}(D_1) & \underset{\approx}{\xrightarrow{F^*_{g,h}}} & W^t_{n-1,k_0-1}(D_2) \end{array}$$

(resp. relatives à π_i).

Soient $\pi_i : Z_i \to V_i$ deux applications de classe $\mathcal{C}^\infty$, $i=1,2$, surjectives de rang maximum = dimension $V_i = n \geq 2$, et posons

Définition. *Etant donnés deux sous-ensembles $D_i \subseteq J^{k_0}_{\pi_i}(V_i,Z_i)$ et $x_i \in V_i$, nous dirons que D_1 et D_2 sont équivalents (resp. forts) localement aux points x_1 et x_2, s'il existe des voisinages ouverts $U_i \subseteq V_i$ de x_i tel que les ensembles $D_1|_{U_1}$ et $D_2|_{U_2}$*

$$D_i|_{U_i} = D_i \cap J^{k_0}_{\pi_i}(U_i, \pi_i^{-1}(U_i)) \subseteq J^{k_0}(V_i,Z_i) \qquad i=1,2$$

sont équivalents (resp. forts) dans $J^{k_0}_{\pi_i}(U_i,\pi_i^{-1}(U_i))$.

(1.7) Les définitions de (1.6) impliquent évidemment le fait suivant : Soient $V, V_i, Z, Z_i, X \subseteq V, X_i \subseteq V_i$ des variétés de classe C^∞ (resp. analytiques réelles), dimension V = dimension $V_i = n \geq 2$, dimension X = dimension $X_i = n-1$, les applications de classe C^∞ (resp. analytiques)

$$\pi : Z \to V \quad , \quad \pi_i : Z_i \to V_i$$

surjectives de rang maximum n et les sections intégrables

$$\gamma : X \to J_\pi^{k_0-1}(V,Z) \quad , \quad \gamma_i : X_i \to J_{\pi_i}^{k_0-1}(V_i, Z_i)$$

telles que γ (resp. γ_i) forme une condition initiale admissible [3 p.8] [4 p.47] pour l'ensemble

$$D \subseteq J_\pi^{k_0}(V,Z) \qquad (resp.\ E_i \subseteq J_{\pi_i}^{k_0}(V_i, Z_i)).$$

Donnons-nous un recouvrement de V par les ouverts U_i, et supposons qu'il existe des équivalences (φ_i, ψ_i) entre $D|_{U_i}$ et E_i

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\psi_i} & Z_i \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & V_i, \end{array}$$

$$F_{\varphi_i,\psi_i}^* : (D|_{U_i})_* \approx (E_i)_*,$$

compatibles avec γ et γ_i i.e.

$$\text{Im } \varphi_i(X \cap U_i) = X_i \quad , \quad \text{Im } \gamma(X \cap U_i) \subseteq J_\pi^{k_0-1}(U_i, \pi^{-1}(U_i)) \subseteq J_\pi^{k_0-1}(V,Z)$$

et les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X \cap U_i & \xrightarrow{\gamma} & J_\pi^{k_0-1}(U_i, \pi^{-1}(U_i)) \\ \downarrow \varphi_i & & \downarrow F_{\varphi_i,\psi_i}^{k_0-1} \\ X_i & \xrightarrow{\gamma_i} & J_{\pi_i}^{k_0-1}(V_i, Z_i) \end{array}$$

soient commutatifs. Alors on a évidemment

(i) D est simple [6 p.11] si et seulement si les E_i sont simples.

(ii) D est stratifié si et seulement si les E_i sont stratifiés.

(iii) Pour que Im $\tilde{\gamma} \subseteq W_{n-1,k_0-1}^{t,\pi}(D)$ (c.f. (1.6)) il faut et il suffit que

$$\text{Im } \tilde{\gamma}_i \subseteq W_{n-1,k_0-1}^{t,\pi}(E_i)$$

pour tout i, où $\tilde{\gamma} : X \to G_{n-1}(TJ_\pi^{k_0-1}(V,Z))$: espace fibré en grassmanienne des $(n-1)$ plans associés à l'espace tangent de $J_\pi^{k_0-1}(V,Z)$, qui associent à chaque point de X l'image par la dérivée de γ de l'espace tangent à X en ce point.

(1.8) Etant donnée une variété V de classe C^∞, désignons par

$$T^*V \overset{\circ}{\underset{S}{\otimes}} T^*V \subseteq T^*V \otimes T^*V$$

le sous-espace du produit tensoriel de l'espace cotangent de V avec lui-même formé par les éléments symétriques non dégénérés et

$$\pi : T^{*}V \overset{\circ}{\underset{S}{\otimes}} T^{*}V \to V$$

la projection canonique. posons

Définition. *Soit V une variété de dimension 4 de classe $\mathcal{C}^{\infty}$. Un sous-ensemble*

$$D \subseteq J^2_{\pi}(V, T^{*}V \overset{\circ}{\underset{S}{\otimes}} T^{*}V)$$

est appelé une équation d'Einstein de V s'il est localement équivalent à l'équation de la relativité générale d'Einstein de $\mathbf{R}^4$.

Plus précisément, tout point $x_0 \in V$ possède une carte locale $g : U_0 \underset{\approx}{\to} \mathbf{R}^4$ telle que g et l'application h induite par la dérivée de g définissent une équivalence locale (c.f. (1.6)) entre $D|_{U_0}$ et l'équation de la relativité générale d'Einstein

$$E \subseteq J^2_{\pi}(\mathbf{R}^4, T^{*}\mathbf{R}^4 \overset{\circ}{\underset{S}{\otimes}} T^{*}\mathbf{R}^4) \approx J^2(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^4 \overset{\circ}{\underset{S}{\otimes}} \mathbf{R}^4) \subseteq J^2(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^{10})$$

(c.f. (1.2) Exemple) de $\mathbf{R}^4$ avec dix fonctions inconnues

$$g_{ij} : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R} \qquad\qquad 1 \leq i \leq j \leq 4$$

définie par les dix équations

$$R_{ij} - (1/2)g_{ij}R = K_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4, g_{l,\mu}, \partial g_{l,\mu})$$

où R_{ij} (resp. R) est la courbure de Ricci (resp. constante) associée aux g_{ij}, où les K_{ij} sont dix fonctions de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ (resp. analytiques réelles) avec 54 variables. et par l'inéquation

$$\text{déterminant } G \neq 0$$

où G est la matrice symmétrique définie par g_{ij}.

(1.9) L'équation E du (1.8) possède les propriétés suivantes [5 p.430]

(i) E est simple i.e. le gradué associé à E est égale à son pré-gradué $E_{*} = E'_{*}$.

(ii) E est stratifié.

(iii) Désignons par $X_1 \subseteq \mathbf{R}^4$ l'hyperplan défini par $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in X_1$ si et seulement si $x_1 = 0$, et

$$\gamma_1 : X_1 \to J^1(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^{10})$$

la section intégrable de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ définie par vingt fonctions de trois variables $(x_2, x_3, x_4) \in X_1$ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$: f_{ij}, h_{ij} et considérons le problème de Cauchy de E

$$g_{ij}|_{X_1} = f_{ij} \qquad (\partial g_{ij}/\partial x_1)|_{X_1} = h_{ij}.$$

Alors une condition nécessaire pour que ce problème soit bien posé [3 p.11] [4 p.48] [5 p.430] est que

$$\det(\mathcal{F}) \neq 0 \ , \ \det(\mathcal{F}_{1,1}) \neq 0$$

où $\mathcal{F}$ est la matrice symétrique associée à f_{ij} et $\mathcal{F}_{1,1}$ son $(1,1)$-ième mineur.

Dans le cas où

$$f_{ij} \ , \ h_{ij} \text{ et } K_{ij} \qquad\qquad 1 \leq i \leq j \leq 4$$

sont des fonctions analytiques réelles, alors cette condition est aussi suffisante [3 p.11], [4 p.48].

La démonstration de ces propriétés est exactement la même que celle employée dans [3 p.37, 75] pour obtenir ce genre de résultats pour les équations en mécanique des fluides, et nous ne la recommencerons pas ici.

(1.10) Rappelons maintenant un résultat de M.H. Cartan [1] qui est essentiel pour la suite.

Théorème de Cartan. *Soient Z, V deux variétés analytiques réelles,*

$$\pi : Z \to V$$

une projection d'espace fibré analytique localement trivial. Alors toute section f de classe $\mathcal{C}^k$ est $\mathcal{C}^k$-homotope à une section analytique que l'on peut choisir aussi proche que l'on veut de f au sens de la topologie $\mathcal{C}^k$.

Démonstration des Théorèmes 1 et 2.

(2.1) Soient Y, V, Z trois variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$ (resp. analytiques réelles), de dimension $V \geq 2$, $Y \subseteq V$ une sous-variété de codimension un dont le fibré normal N est orientable

$$\pi : Z \to V$$

une projection d'espace fibré localement trivial de classe $\mathcal{C}^\infty$ (resp. analytique) et

$$\gamma : Y \to Z$$

une section de classe $\mathcal{C}^\infty$ (resp. analytique) de π. Désignons par $\gamma_0 : Y \to V \times_\pi Z = J^0_\pi(V, Z)$ (c.f. (1.4)) l'application $\gamma_0(y) = (y, \gamma(y))$. Alors il existe un relèvement γ_1 de γ_0

$$\begin{array}{ccc} & & J^1_\pi(V, Z) \\ & \nearrow \gamma_1 & \downarrow \alpha^1_0 \\ Y & \xrightarrow[\gamma_0]{} & J^0_\pi(V, Z) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ (resp. analytique) intégrable par rapport à l'idéal $i_1^*(\mathcal{I}_1)$ (c.f. (1.2)).

En effet, l'hypothèse entraine l'existence d'un voisinage tubulaire $\mathcal{U}$ de Y $\mathcal{C}^\infty$-équivalente (resp. analytique) à $Y \times (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$Y \xrightarrow[i]{} \mathcal{U} \approx N \approx Y \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Donc on a

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}) \approx \pi^{-1}(Y) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

puisque les applications homotopes induisent des fibrés isomorphes. D'où il y a un prolongement de γ à une section de classe $\mathcal{C}^\infty$ (resp. analytique)

$$\overline{\gamma} : \mathcal{U} \to \pi^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq Z.$$

Or, l'application

$$j^1\,\overline{\gamma} : \mathcal{U} \to J^1_\pi(V, Z)$$

vérifie

$$\alpha^1_0 \circ j^1\,\overline{\gamma} \circ i = \gamma_0.$$

Alors $\gamma_1 = j^1\,\overline{\gamma} \circ i$ est le relèvement voulu.

(2.2) Commençons par la démonstration du Théorème 1 de "Introduction". Pour cela, remarquons d'abord qu'il suffit d'étudier le cas où

$$Y = \{0\} \times Y \subseteq \mathbb{R} \times Y = V$$

puisque le problème se trouve dans un voisinage de Y et le fibré normal N est supposé trivial. Autrement dit on a (c.f. (1.8))

$$\begin{aligned} Z &= T^*V \overset{2}{\underset{S}{\otimes}} T^*V \subseteq T^*V \otimes T^*V \\ &= p_2^*(T^*Y \otimes T^*Y) \oplus p_2^*T^*Y \otimes p_1^*T^*\mathbb{R} \oplus p_1^*T^*\mathbb{R} \otimes p_2^*T^*Y \oplus p_1^*(T^*\mathbb{R} \otimes T^*\mathbb{R}) \end{aligned} \qquad (*)$$

où $p_1 : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, $p_2 : \mathbb{R} \times Y \to Y$. D'autre part, il existe une section analytique

$$\delta_2 : Y \to T^*Y \overset{2}{\underset{S}{\otimes}} T^*Y \subseteq T^*Y \otimes T^*Y$$

de signature 1. En effet l'hypothèse de la compacticité (resp. orientabilité) de Y entraine [8] l'existence d'une section de classe C^∞ de signature 1. Alors le théorème de Cartan nous assure l'existence de δ_2 (c.f. (1.10)).

Ceci étant, considérons la section γ de $\pi : Z \to V$ au-dessus de Y définie par

$$\gamma = p_2^*(\delta_2) \oplus 0 \oplus 0 \oplus (-1)$$

via $(*)$, qui est évidemment symétrique non-dégénérée analytique de signature 2. Choisir, d'après (2.1) (c.f. (1.4)) un relèvement analytique de γ_0

$$\begin{array}{ccc} & & J^1_\pi(V,Z) \\ & \overset{\gamma_1}{\nearrow} & \downarrow \\ Y & \underset{\gamma_0}{\longrightarrow} & V \times_\pi Z = J^0_\pi(V,Z) \end{array}$$

intégrable. alors γ_1 est une donnée de Cauchy analytique bien posée de signature 2 de D. En effet choisissons une carte locale (φ_0, U_0) de $y_0 \in Y \subseteq V = \mathbb{R} \times Y$ suffisamment petite de sorte que

(i) $U_0 = \mathbb{R} \times U'$ où U' est une carte locale de y_0 dans Y

$$\varphi' : U' \underset{\approx}{\longrightarrow} \mathbb{R}^3 \quad , \quad \varphi'(y) = (x_2(y), x_3(y), x_4(y))$$

(ii) $\varphi_0 = 1 \times \varphi' : U_0 = \mathbb{R} \times U' \underset{\approx}{\longrightarrow} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \quad , \quad \varphi_0(x_1, y) = (x_1, \varphi'(y))$

(iii) $D|_{U_0} \approx E$ (c.f. (1.8)).

D'où la dérivée de φ_0, $D\varphi_0$ s'écrit sous la forme matricielle via l'identification $T^*(\mathbb{R} \times Y) = p_1^*T^*\mathbb{R} \oplus p_2^*T^*Y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathcal{F}'_{1,1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Donc l'application ψ_0 (c.f. (1.8)) induite par $D\varphi_0$ préserve d'une part la signature de $\gamma = \alpha_0^1 \circ \gamma_1$ i.e. 2 et, d'autre part, le déterminant du (1,1)-ième mineur $\mathcal{F}'_{1,1}$ est non nul puisque δ_2 est non dégénéré. Alors le Théorème 1 est une conséquence immédiate de (1.9) (iii).

(2.3) Nous regardons maintenant le Théorème 2 de "Introduction". mais seulement le cas C^∞ puisque le cas analytique est une conséquence du Théorème de Cartan (1.10). Rappelons qu'une variété orientable Y de dimension trois de classe C^∞ est parallisable. et puis nous supposons que $V = \mathbb{R} \times Y$ (c.f. (2.2)), d'où une trivialisation C^∞ $T^*Y = Y \times \mathbb{R}^3$ induit une identification

$$T^*V \overset{2}{\otimes} T^*V \approx V \times \mathcal{M}_{4,4}$$

où $\mathcal{M}_{4,4}$ est l'espace des 4×4 matrices réelles. Cela nous permet de considérer la section γ de $\pi : Z = T^*V \overset{2}{\underset{S}{\otimes}} T^*V \to V$ au-dessus de Y définie par

$$\gamma(y) = ((y, 0), M_0) \in V \times_\pi Z \qquad y \in Y$$

où $M_0 \in \mathcal{M}_{4,4}$ est donné par

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1, & 1 \\ 0, & 1, & 0, & 1 \\ -1, & 0, & -1, & 0 \\ 1, & 1, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors il est clair que l'image $\gamma(y)$ est une forme bilinéaire symétrique non-dégénéré de signature 2. D'autre part, le déterminant du $(1,1)$-ième mineur de M_0 est nul. Donc tout relèvement intégrable de classe C^∞ de γ dans $J^1_\tau(V, Z)$ (c.f. (2.1) et (1.9) (iii)) est une donnée de Cauchy de classe C^∞ de signature 2 mal posée de D sur Y.

Remarque.

Ce travail montre en même temps que d'une part les études des équations aux dérivées partielles des sections d'un espace fibré, non nécessairement vectoriel, n'est qu'un cas particulier des études des équations des applications entre deux variétés, et que d'autre part, la construction fonctorielle [4 p.47] indépendante, semble-t-il, des notions profondes de caractéristique, d'involubilité, etc, nous permet d'étudier aussi le cas semi-local i.e. localement au voisinage d'une sous-variété. Enfin une solution analytique dont le développement de Taylor d'ordre $k < \infty$ explicitement écrit via un ordinateur, apportera peut-être d'autres enseignements que celui des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions.

En remplaçant la condition "signature 2" par "signature 1", les Théorèmes 1 et 2 resterons évidemment encore valables (*).

REFERENCES

[1] H. Cartan, Communication personnelle.

[2] C. Ehresmann, Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie (Colloques du C.N.R.S., Paris 1953).

[3] Shi Wei Hui, Sur les solutions analytiques de quelques équations aux dérivées partielles en mécanique des fluides. Thèse soutenue le 10 mai 1991, Université de Perpignan, France.

[4] Weishu Shih, Une méthode élémentaire pour l'étude des équations aux dérivées partielles, Diagrammes Vol. 16, 1986, Paris.

[5] Weishu Shih, Comptes Rendus, Paris, t. 299, Série I, n^{0}10, 1984, 429.

[6] Weishu Shih, Stratification et équation aux dérivées partielles, Proceedings of the Hawaii - Luminy Singularities Conferences, 1990.

[7] Weishu Shih, Gazette de la S.M.F., 1991, 1.

[8] N. Steerod, The topology of fibre bundles, Princeton University Press, 1951.

[9] R. Thom, Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. A.M.S., Vol. 75, 1969, p. 240-284.

(*) L'auteur remercie MM. H. Cartan, J.E. Shih, D. Sullivan et Zhang Weiping pour leur aide.

Science sans Conscience

n'est que

Ruine de l'Ame

La Chênetière
Raizeux
78120 France

慈儉和尚
辛未中秋