

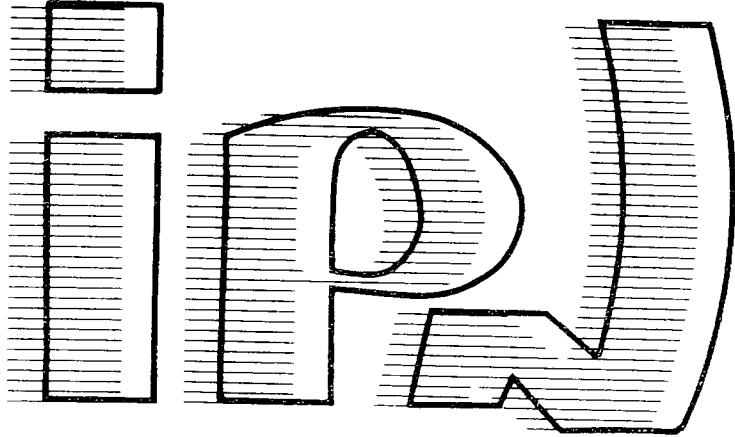
BB

I. P. N. - 91406 ORSAY CEDEX

IPNO DRE 94-11

SW 9417

institut de physique nucléaire
CNRS - IN2P3 UNIVERSITE PARIS - SUD



CERN LIBRARIES, GENEVA



P00022756

IPNO-DRE. 94-11

**DIFFUSION INELASTIQUE NUCLEON NOYAU ET
DEUTON NOYAU EN APPROXIMATION D'IMPULSION**

J. Van de Wiele¹, M. Morlet¹, A. Willis¹ et
E. Tomasi-Gustafsson²

1) Institut de Physique Nucléaire, BP n° 1, 91406 Orsay Cedex, France

2) Laboratoire National Saturne, CEN Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France

**Diffusion Inélastique Nucléon Noyau et Deuton Noyau
en approximation d'impulsion**

J. Van de Wiele¹, M. Morlet¹, A. Willis¹ et E. Tomasi-Gustafsson²

1) Institut de Physique Nucléaire. Orsay BPn^o 1, 91406 Orsay, France

2) Laboratoire National Saturne, CEN Saclay, 91191 Gif sur Yvette, France



SOMMAIRE

I. Diffusion élastique nucléon - nucléon (N-N)	1
I.1 Amplitude de diffusion	1
I.2 Calcul des observables de spin nucléon - nucléon	6
II. Diffusion inélastique nucléon - noyau	9
II.1 Amplitude de transition	9
II.2 Calcul des observables de spin \mathcal{D}_{nn} et \mathcal{S}_{nn}	18
III. Diffusion élastique deuton-nucléon	26
IV. Diffusion inélastique deuton - noyau	33
IV.1 Développement en ondes planes	35
IV.2 Développement en ondes distordues	36

Appendices

Appendice 1: Matrice nucléon-nucléon	43
Appendice 2: Théorème de Wigner-Eckart	45
Appendice 3: Calcul des observables de spin	48
Appendice 4: Calcul du terme nucléaire	51

Figures

Modules des différents termes de la matrice Nucléon-Nucléon.....	55-56
Valeurs de \mathcal{D}_{nn} et \mathcal{S}_{nn} pour des états de parité non naturelle	57



I. DIFFUSION ELASTIQUE NUCLEON-NUCLEON

I.1 Amplitude de diffusion

La forme habituelle de la matrice d'interaction nucléon-nucléon est la suivante :

$$M_{N-N} = A + B\sigma_n\sigma'_n + C(\sigma_n + \sigma'_n) + E\sigma_q\sigma'_q + F\sigma_p\sigma'_p \quad (I.1)$$

où les coefficients A, B, C, E, F sont déterminés expérimentalement et les σ sont les matrices de Pauli (Appendice A1).

Les ' se réfèrent à la cible. Le système de référence est choisi selon la convention de Madison : $Oz \parallel \vec{K}_{in}$; $Oy \parallel \vec{K}_{in} \times \vec{K}_{out}$, où \vec{K}_{in} et \vec{K}_{out} sont les moments du projectile et de l'éjectile. Nous explicitons les composantes $\vec{q}, \vec{n}, \vec{p}$:

$$\begin{aligned} \vec{q} &= \vec{K}_{in} - \vec{K}_{out} \\ \vec{n} &= \vec{K}_{in} \times \vec{K}_{out} \\ \vec{p} &= \vec{n} \times \vec{q} \end{aligned} \quad \text{avec } \sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \text{ et } \hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Dans ce repère $\sigma_n = \sigma_y$. Les coefficients s'expriment en fonction de l'isospin :

$$\begin{aligned} A &= A_0 + A_1 \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' \\ B &= B_0 + B_1 \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} 0 \equiv \text{isoscalaire} \\ 1 \equiv \text{isovecteur} \end{array} \right)$$

et ne dépendent que de scalaires.

Dans le cas d'une diffusion élastique, parmi les termes:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' = \sum_m (-1)^m \tau_m^1 \tau_{-m}^{1'} = -\tau_{-1}^1 \tau_1^{1'} + \tau_0^1 \tau_0^{1'} - \tau_1^1 \tau_{-1}^{1'}$$

seul le terme $\tau_0^1 \tau_0^{1'}$ intervient. La matrice M_{N-N} peut se développer sur une base de tenseurs irréductibles de la façon suivante : (*)

$$M_{N-N} = \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \nu\nu'}} \sigma_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \left(d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(0) + d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(1) \tau_0^1 \tau_0^{1'} \right) \quad (I.2)$$

(*) Les $d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}$ sont reliés aux coefficients de la matrice M [voir appendice A1].

avec

$$\begin{aligned}\lambda &= 0 \text{ ou } 1 & -\lambda \leq \nu \leq \lambda \\ \lambda' &= 0 \text{ ou } 1 & -\lambda' \leq \nu' < \lambda'\end{aligned}$$

et les conventions usuelles pour les opérateurs de spin [voir appendice A1]. Un élément de cette matrice s'écrit, pour des protons (spin $s = \frac{1}{2}$, isospin $t = \frac{1}{2}$)

$$M_{\bar{m}\bar{m}_t\bar{m}'\bar{m}'_t;mm_t m'm'_t} = \langle s\bar{m}t\bar{m}_t \ s\bar{m}'t\bar{m}'_t | M | smtm_t \ sm'tm'_t \rangle$$

Le spin étant égal à $\frac{1}{2}$, on le sous-entendra par la suite. La connaissance de cette matrice donne accès à toutes les observables : par exemple, la section efficace différentielle s'écrit :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \underbrace{\frac{1}{2s+1}}_{\text{proton projectile}} \underbrace{\frac{1}{2s+1}}_{\text{proton cible}} \sum_{\substack{\bar{m}\bar{m}' \\ mm'}} |M_{\bar{m}\bar{m}_t\bar{m}'\bar{m}'_t;mm_t m'm'_t}|^2 \quad (I.3)$$

Dans le cas de la diffusion inélastique que nous considérons ici la troisième composante de l'isospin ne change pas $m_t = m'_t$

Nous pouvons expliciter un élément de matrice en une somme de deux termes :

$$\begin{aligned}\langle \bar{m}\bar{m}_t\bar{m}'\bar{m}'_t | M | mm_t m'm'_t \rangle &= \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \nu\nu'}} d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(0) \langle \bar{m}\bar{m}_t\bar{m}'\bar{m}'_t | \sigma_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} | mm_t m'm'_t \rangle \quad (a) \\ &+ \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \nu\nu'}} d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(1) \langle \bar{m}\bar{m}_t\bar{m}'\bar{m}'_t | \sigma_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \tau_0^1 \tau_0'^1 | mm_t m'm'_t \rangle \quad (b)\end{aligned}$$

$$(a) \implies \langle \bar{m}\bar{m}' | \sigma_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} | mm' \rangle = \langle \frac{1}{2}\bar{m} | \sigma_\nu^\lambda | \frac{1}{2}m \rangle \langle \frac{1}{2}\bar{m}' | \sigma_{\nu'}^{\lambda'} | \frac{1}{2}m' \rangle$$

le premier terme de ce produit devient à l'aide des équations (A2.1) et (A2.11):

$$(a) \implies \langle \lambda\nu \frac{1}{2}m | \frac{1}{2}\bar{m} \rangle \langle \lambda'\nu' \frac{1}{2}m' | \frac{1}{2}\bar{m}' \rangle (-)^{\lambda+\lambda'} \hat{\lambda} \hat{\lambda}'$$

$$\text{où } \hat{\lambda} = \sqrt{2\lambda+1}, \quad \hat{\lambda}' = \sqrt{2\lambda'+1}.$$

On voit de façon explicite la factorisation des transferts de moment angulaire pour le nucléon incident et le nucléon cible.

Le deuxième terme s'explique de la façon suivante :

$$(b) \implies \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \nu\nu'}} d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(1) \langle s\bar{m} \ t\bar{m}_t \ s\bar{m}' \ t\bar{m}'_t \mid \sigma_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \tau_0^1 \tau_0'^1 \mid sm \ tm_t \ sm' \ tm'_t \rangle$$

que l'on peut factoriser en une partie dépendant du spin et une partie dépendant de l'isospin :

$$(b) \equiv \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \nu\nu'}} d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(1) \langle s\bar{m} \ s\bar{m}' \mid \sigma_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \mid sm \ sm' \rangle \langle t\bar{m}_t \ t\bar{m}'_t \mid \tau_0^1 \tau_0'^1 \mid tm_t \ tm'_t \rangle$$

La partie d'isospin a la même forme que pour le spin

$$\langle t\bar{m}_t \ t\bar{m}'_t \mid \tau_0^1 \tau_0'^1 \mid tm_t \ tm'_t \rangle = 3 \langle 1 \ 0 \ tm_t \mid t\bar{m}_t \rangle \langle 1 \ 0 \ tm'_t \mid t\bar{m}'_t \rangle$$

Nous pouvons alors donner l'expression d'un élément de matrice :

$$\begin{aligned} \langle \bar{m}\bar{m}_t \bar{m}'\bar{m}'_t \mid M \mid mm_t m' m'_t \rangle &= \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \nu\nu'}} (-1)^{\lambda+\lambda'} \hat{\lambda} \hat{\lambda}' d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(0) \langle \lambda\nu sm \mid s\bar{m} \rangle \langle \lambda'\nu' sm' \mid s\bar{m}' \rangle \\ &+ \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \nu\nu'}} 3 (-1)^{\lambda+\lambda'} \hat{\lambda} \hat{\lambda}' \langle 1 \ 0 \ tm_t \mid tm_t \rangle \langle 1 \ 0 \ tm'_t \mid tm'_t \rangle \\ &\quad d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(1) \langle \lambda\nu sm \mid s\bar{m} \rangle \langle \lambda'\nu' sm' \mid s\bar{m}' \rangle \\ &= \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \nu\nu'}} (-1)^{\lambda+\lambda'} \hat{\lambda} \hat{\lambda}' [d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(0) + 3 d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(1) \langle 1 \ 0 \ tm_t \mid tm_t \rangle \\ &\quad \langle 1 \ 0 \ tm'_t \mid tm'_t \rangle] \langle \lambda\nu sm \mid s\bar{m} \rangle \langle \lambda'\nu' sm' \mid s\bar{m}' \rangle \end{aligned}$$

Sous sa forme la plus générale, à cause du couplage $\lambda\lambda'$ dans les $d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}$, l'élément de matrice n'est pas factorisable en une partie dépendant du projectile et une partie dépendant de la cible. (λ étant le transfert de spin dans le projectile et λ' dans la cible).

A cause des valeurs particulières des coefficients il convient de définir

$$\bar{d}_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'} = d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(0) + \epsilon d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(1) \quad (I.4a)$$

avec

$$\epsilon = 3 \langle 1 \ 0 \ t m_t \mid t m_t \rangle \langle 1 \ 0 \ t m'_t \mid t m'_t \rangle \quad (I.4b)$$

Pour $t = \frac{1}{2}$ et $m_t, m'_t = \pm \frac{1}{2}$, on a:

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & \text{pour diffusion } pp \text{ ou } nn \\ -1 & \text{pour diffusion } np \text{ ou } pn \end{cases} \quad (I.4c)$$

ce qui donne finalement:

$$\langle \bar{m} \bar{m}_t \bar{m}' \bar{m}'_t \mid M \mid m m_t m' m'_t \rangle = \sum_{\substack{\lambda \lambda' \\ \nu \nu'}} (-1)^{\lambda + \lambda'} \hat{\lambda} \hat{\lambda}' \bar{d}_{\nu \nu'}^{\lambda \lambda'} \langle \lambda \nu s m \mid s \bar{m} \rangle \langle \lambda' \nu' s m' \mid s \bar{m}' \rangle \quad (I.5)$$

On peut de même écrire pour la matrice Nucléon-Nucléon:

$$\tilde{A} = A_0 + \epsilon A_1; \quad \tilde{B} = B_0 + \epsilon B_1; \dots\dots$$

et l'amplitude Nucléon Nucléon devient:

$$M_{N-N} = \tilde{A} + \tilde{B} \sigma_n \sigma'_n + \tilde{C} (\sigma_n + \sigma'_n) + \tilde{E} \sigma_q \sigma'_q + \tilde{F} \sigma_p \sigma'_p$$

La dépendance en spin de la matrice Nucléon-Nucléon est explicite. Nous pouvons aussi déterminer les amplitudes en fonction de l'isospin total T des deux nucléons, en ne tenant pas compte de l'interaction coulombienne entre les protons. Par exemple nous avons

$$A = A_0 + A_1 \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}'$$

et en utilisant l'expression:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' \mid (1/2 \ 1/2) T M_T \rangle = [2T(T+1) - 3] \mid (1/2 \ 1/2) T M_T \rangle$$

on a

$$\begin{aligned} & \langle (1/2 \ 1/2) T M_T \mid A_0 + A_1 \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' \mid (1/2 \ 1/2) T' M'_T \rangle \\ & = \delta_{T T'} \delta_{M_T M'_T} \langle (1/2 \ 1/2) T M_T \mid A_0 + A_1 \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' \mid (1/2 \ 1/2) T M_T \rangle \end{aligned}$$

On obtient alors les amplitudes pour une valeur de l'isospin total en fonction de A_0 et A_1 .

$$A(T) = A_0 + A_1 [2T(T+1) - 3]$$

ou d'une manière explicite:

$$A(T = 0) = A_0 - 3A_1; \quad A(T = 1) = A_0 + A_1$$

ou inversement

$$A_0 = \frac{A(T = 0) + 3A(T = 1)}{4}; \quad A_1 = \frac{A(T = 1) - A(T = 0)}{4}$$

Les amplitudes $A(T = 0)$ et $A(T = 1)$ peuvent s'exprimer en fonction des diffusions neutron-neutron A_{nn} , proton- proton A_{pp} et proton-neutron A_{pn} . Il est clair que:

$$A(T = 1) = A_{pp} = A_{nn}$$

Considérons maintenant la diffusion proton-neutron:

$$|pn\rangle = |1/2 \ -1/2\rangle \otimes |1/2 \ 1/2\rangle = \sum_T \langle 1/2 \ -1/2 \ 1/2 \ 1/2 | T0\rangle | (1/2 \ 1/2)T0\rangle$$

L'amplitude proton-neutron s'écrit alors:

$$\begin{aligned} A_{pn} &= \langle pn | A | pn \rangle \\ &= \sum_{TT'} \langle 1/2 \ -1/2 \ 1/2 \ 1/2 | T0\rangle \langle 1/2 \ -1/2 \ 1/2 \ 1/2 | T'0\rangle \\ &\quad \langle (1/2 \ 1/2)T0 | A_0 + A_1 \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' | (1/2 \ 1/2)T'0\rangle \\ &= \sum_T \langle 1/2 \ -1/2 \ 1/2 \ 1/2 | T0\rangle^2 \{A_0 + A_1[2T(T+1) - 3]\} \end{aligned}$$

En remplaçant les coefficients de Clebsch-Gordan par leur valeur numérique, il vient:

$$A_{pn} = \frac{1}{2}[A_0 - 3A_1] + \frac{1}{2}[A_0 + A_1]$$

Soit finalement:

$$A_{pn} = A_0 - A_1$$

Ce résultat était attendu d'après (I.4c). En remplaçant A_0 et A_1 en fonction de l'isospin, on a:

$$A_{pn} = A_0 - A_1 = \frac{1}{2}[A(T=0) + A(T=1)]$$

I.2 Calcul des OBSERVABLES de spin NUCLEON-NUCLEON

Rappelons l'expression de l'élément de matrice de transition:

$$\langle \bar{m}\bar{m}_t\bar{m}'\bar{m}'_t | M | mm_t m' m'_t \rangle = \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \nu\nu'}} \bar{d}_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'} (-)^{\lambda+\lambda'} \hat{\lambda}\hat{\lambda}' \langle \lambda\nu sm | s\bar{m} \rangle \langle \lambda'\nu' sm' | s\bar{m}' \rangle$$

La section efficace différentielle devient donc:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{mm' \\ \bar{m}\bar{m}'}} | M_{\bar{m}\bar{m}'mm'} |^2 = \frac{1}{4} \sum_{\substack{\lambda\bar{\lambda}\lambda'\bar{\lambda}' \\ \nu\bar{\nu}\nu'\bar{\nu}'}} \bar{d}_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'} (-1)^{\lambda+\lambda'} \hat{\lambda}\hat{\lambda}' \bar{d}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{\bar{\lambda}\bar{\lambda}'} (-1)^{\bar{\lambda}+\bar{\lambda}'} \hat{\bar{\lambda}}\hat{\bar{\lambda}}' F(\lambda\lambda' \dots)$$

avec

$$F(\lambda\lambda' \dots) = \sum_{\substack{mm' \\ \bar{m}\bar{m}'}} \langle \lambda\nu sm | s\bar{m} \rangle \langle \bar{\lambda}\bar{\nu} sm | s\bar{m} \rangle \langle \lambda'\nu' sm' | s\bar{m}' \rangle \langle \bar{\lambda}'\bar{\nu}' sm' | s\bar{m}' \rangle$$

on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{m\bar{m}} \langle \lambda\nu sm | s\bar{m} \rangle \langle \bar{\lambda}\bar{\nu} sm | s\bar{m} \rangle \\ &= \sum_{m\bar{m}} \frac{\sqrt{2}}{\hat{\lambda}} (-1)^{1/2+m} \frac{\sqrt{2}}{\hat{\lambda}} (-1)^{1/2+m} \langle s -\bar{m} s m | \lambda \nu \rangle \langle s -\bar{m} s m | \bar{\lambda} \bar{\nu} \rangle \\ &= \frac{2}{2\lambda+1} \delta_{\lambda\bar{\lambda}} \delta_{\nu\bar{\nu}} \end{aligned}$$

(m étant demi-entier $(-1)^{1+2m} = 1$).

L'expression finale de la section efficace est alors la suivante :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \nu\nu'}} |\bar{d}_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}|^2$$

On peut exprimer aussi cette section efficace différentielle en fonction de éléments de la matrice Nucléon-Nucléon. Il suffit de remplacer les termes $\bar{d}_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}$ en fonction de \tilde{A} , \tilde{B} , On obtient ainsi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\tilde{A}|^2 + |\tilde{B}|^2 + 2|\tilde{C}|^2 + |\tilde{E}|^2 + |\tilde{F}|^2$$

Si on s'intéresse au transfert de spin dans le projectile, on peut définir :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\nu}^{\lambda} = \sum_{\lambda'\nu'} |\bar{d}_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}|^2; \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{\lambda} = \sum_{\nu} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\nu}^{\lambda}$$

De même dans la cible:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\nu'}^{\lambda'} = \sum_{\lambda\nu} |\bar{d}_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}|^2; \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{\lambda'} = \sum_{\nu'} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\nu'}^{\lambda'}$$

Les expressions donnant les transferts de spin sont symétriques par rapport à λ et λ' et en conséquence seront les mêmes pour le projectile et pour la cible.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^0 = |\tilde{A}|^2 + |\tilde{C}|^2; \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^1 = |\tilde{B}|^2 + |\tilde{C}|^2 + |\tilde{E}|^2 + |\tilde{F}|^2$$

Les observables associées à la diffusion nucléon- nucléon peuvent être calculées soit d'après leur définition en fonction de matrices de Pauli, soit comme combinaisons linéaires d'opérateurs tensoriels irréductibles (voir l'appendice 3). Par exemple, pour le pouvoir d'analyse A_y ou le pouvoir polarisant P^y définis respectivement par:

$$A_y = \frac{\text{Tr}(M\sigma_y M^+)}{\text{Tr}(MM^+)}; \quad P^y = \frac{\text{Tr}(MM^+ \sigma_y)}{\text{Tr}(MM^+)}$$

On trouve:

$$P^y = A_y = \frac{2\Re(\tilde{A}\tilde{C}^* + \tilde{C}\tilde{B}^*)}{|\tilde{A}|^2 + |\tilde{B}|^2 + 2|\tilde{C}|^2 + |\tilde{E}|^2 + |\tilde{F}|^2}$$

Pour le coefficient de transfert de polarisation K_y^y , on a:

$$K_y^y = \frac{\text{Tr}(M\sigma_y M^+ \sigma_y)}{\text{Tr}(MM^+)} = \frac{|\tilde{A}|^2 + |\tilde{B}|^2 + 2|\tilde{C}|^2 - |\tilde{E}|^2 - |\tilde{F}|^2}{|\tilde{A}|^2 + |\tilde{B}|^2 + 2|\tilde{C}|^2 + |\tilde{E}|^2 + |\tilde{F}|^2}$$

On peut aussi déterminer la section efficace associée au transfert de 1 unité $|\Delta\nu| = 1$ entre les *composantes* des spins du projectile et de l'éjectile suivant un axe *perpendiculaire au plan de diffusion*

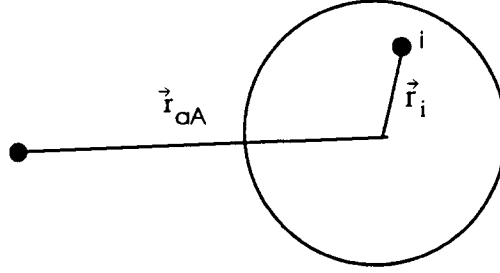
Nous ne donnerons pas ici la démonstration de ce résultat. Dans les conventions du Madison on obtient:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{|\Delta\nu|=1} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{1}{2}(1 - K_y^y) = |\tilde{E}|^2 + |\tilde{F}|^2$$

II. DIFFUSION INELASTIQUE NUCLEON-NOYAU

II.1 Amplitude de transition

Considérons une réaction $A(a,b)B$ quelconque. Dans le cas particulier de ce chapitre le projectile a est un nucléon et la cible A est un noyau formé de A nucléons. Le schéma est le suivant:



Soient S_a, S_b les spins et t_a, t_b les isospins du projectile et de l'ejectile (dont les valeurs dans le cas traité ici sont égales à $1/2$) $m_a, m_b, m_{t_a}, m_{t_b}$ leurs composantes le long de l'axe de quantification; soient J_A, J_B les spins et T_A, T_B les isospins de la cible et du noyau résiduel et $M_A, M_B, M_{T_A}, M_{T_B}$ leurs composantes le long de l'axe de quantification. Si ξ_A, ξ_B représentent l'ensemble des coordonnées internes des noyaux A et B , l'amplitude de transition, T , s'écrit (dans l'approximation des ondes planes):

$$T_{M_B m_b M_A m_a} = -\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_i \int \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}^*}(\xi_B, \vec{r}_i) \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}^*} M_i^0(p, \hat{n}, \hat{p}, \hat{q}, E) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} d^3\vec{r}_i d\xi_A d\xi_B \quad (II.1)$$

La matrice d'interaction nucléon-nucléon s'écrit pour le nucléon projectile 1 et un nucléon de la cible, i (eq. I.1):

$$M_{N-N} = (A^0 + A^1 \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}') + (B^0 + B^1 \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}') \sigma_{1n} \sigma_{in} + (C^0 + C^1 \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}') (\sigma_{1n} + \sigma_{in}) \\ (E^0 + E^1 \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}') \sigma_{1q} \sigma_{iq} + (F^0 + F^1 \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}') \sigma_{1p} \sigma_{ip} \quad (II.2)$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{q} &= \vec{K}_b - \vec{K}_a \\ \vec{n} &= \vec{K}_a \times \vec{K}_b \\ \vec{p} &= \vec{q} \times \vec{n} \end{aligned} \quad \sigma_{in} = \vec{\sigma}_i \cdot \hat{n} \quad \text{et} \quad \hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

L'amplitude de transition peut s'écrire comme la somme des amplitudes de transition T^0 isoscalaire et T^1 isovectorielle:

$$T_{M_B m_b M_A m_a} = T_{M_B m_b M_A m_a}^0 + T_{M_B m_b M_A m_a}^1$$

Explicitons d'abord la partie qui ne depend pas de l'isospin, nous montrerons plus tard que le calcul de T^1 se ramène au calcul de T^0 à un facteur multiplicatif près.

$$\begin{aligned}
T_{M_B m_b M_A m_a}^0 &= -\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \\
&[\langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | A^0 e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle \\
&+ \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1n} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | B^0 \sigma_{in} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle \\
&+ \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1n} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | C^0 e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle \\
&+ \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | C^0 \sigma_{in} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle \\
&+ \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1q} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | E^0 \sigma_{iq} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle \\
&+ \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1p} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | F^0 \sigma_{ip} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle]
\end{aligned} \tag{II.3}$$

Ecrivons les relations qui vont nous permettre d'extraire les composantes longitudinale et transverse de l'amplitude:

$$\vec{\sigma} \times \hat{q} = (\sigma_q \hat{q} + \sigma_n \hat{n} + \sigma_p \hat{p}) \times \hat{q} = -\sigma_n \hat{p} + \sigma_p \hat{n} \tag{II.4}$$

A l'aide de (II.4):

$$(\vec{\sigma} \times \hat{q}) \cdot \hat{n} = (\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) = \sigma_p \tag{II.5}$$

$$(\vec{\sigma} \times \hat{q}) \cdot \hat{p} = -(\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) = -\sigma_n \tag{II.6}$$

L'amplitude de transition (éq. II.3) peut se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned}
T_{M_B m_b M_A m_a}^0 &= -\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} [\delta_{m_a m_b} A^0 X_0 - \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1n} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle B^0 \hat{p} \cdot \vec{X}_T \\
&+ \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1n} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle C^0 X_0 - \delta_{m_a m_b} C^0 \hat{p} \cdot \vec{X}_T \\
&+ \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1q} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle E^0 X_L \\
&+ \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1p} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle F^0 \hat{n} \cdot \vec{X}_T]
\end{aligned} \tag{II.7a}$$

où on a defini:

$$X_0 = X_{0, M_B M_{T_B} M_A M_{T_A}} = \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle \tag{II.8}$$

$$\vec{X}_T = \vec{X}_{T, M_B M_{T_B} M_A M_{T_A}} = \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | (\vec{\sigma}_i \times \hat{q}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle \quad (II.9)$$

(composante dite transverse car perpendiculaire à \hat{q}) et

$$X_L = X_{L, M_B M_{T_B} M_A M_{T_A}} = \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | \vec{\sigma}_i \cdot \hat{q} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle \quad (II.10)$$

(composante dite longitudinale car parallèle à \hat{q})

Choisissons maintenant un système de coordonnées tel que : $O_x // \hat{n}$, $O_y // \hat{p}$ et $O_z // \hat{q}$. Dans ce système:

$$\begin{aligned} T_{M_B m_b M_A m_a}^0 = & -\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} [\delta_{m_a m_b} A^0 X_0 - \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1x} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle B^0 \hat{p} \cdot \vec{X}_T \\ & + \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1x} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle C^0 X_0 - \delta_{m_a m_b} C^0 \hat{p} \cdot \vec{X}_T \\ & + \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1z} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle E^0 X_L \\ & + \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1y} | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle F^0 \hat{n} \cdot \vec{X}_T] \end{aligned} \quad (II.7b)$$

Calcul du terme X_0

Nous pouvons écrire (v. App. 4):

$$X_0 = \mathcal{M}^-(0, 0, 0)$$

Donc, en introduisant la fonction:

$$\mathcal{F}_{X_0}^{\ell' j_c} = 4\pi \mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B 00}(q) \quad (II.11)$$

nous avons:

$$X_0 = \delta_{T_A T_B} \delta_{M_{T_A} M_{T_B}} \sum_{j_c m_{j_c}} \delta_{j_c \ell'} \delta_{m_{j_c} m'} \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle i^{-\ell'} Y_{\ell'}^{m' *}(\hat{q}) \mathcal{F}_{X_0}^{\ell' j_c}(q, \mathbf{s} = \mathbf{0}) \quad (II.12)$$

Le terme $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ qui rappelle $\lambda' = 0$ interdit des transitions de spin dans le noyau.

Calcul du terme $\hat{p} \cdot \vec{X}_T$

Prenons pour les matrices σ leurs composantes sphériques (A1.2):

$$\begin{aligned} \hat{p} \cdot \vec{X}_T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}} | \sigma_1^1(i) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}} \rangle \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}} | \sigma_{-1}^1(i) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}} \rangle \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathcal{M}^-(1, 1, 0) - \mathcal{M}^-(1, -1, 0)] \end{aligned} \quad (II.13)$$

Donc, en introduisant la fonction:

$$\mathcal{F}_{X_T}^{\ell' j_c} = 4\pi \mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B 10}(q) \quad (II.14)$$

nous avons:

$$\hat{p} \cdot \vec{X}_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{j_c m_{j_c} \\ \ell' m'}} \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle (\langle 1 1 \ell' m' | j_c m_{j_c} \rangle - \langle 1 -1 \ell' m' | j_c m_{j_c} \rangle) \\ i^{-\ell'} Y_{\ell' m'}^{*}(\hat{q}) \mathcal{F}_{X_T}^{\ell' j_c}(q; \mathbf{s} = \mathbf{1}) \quad (II.15)$$

Calcul du terme $\hat{n} \cdot \vec{X}_T$

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \vec{X}_T &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left[\sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}} | \sigma_1^1(i) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}} | \sigma_{-1}^1(i) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}} \rangle \right] \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} [\mathcal{M}^-(1, 1, 0) + \mathcal{M}^-(1, -1, 0)] \end{aligned} \quad (II.16)$$

De façon analogue à la précédente nous trouvons:

$$\hat{n} \cdot \vec{X}_T = \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{j_c m_{j_c} \\ \ell' m'}} \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle (\langle 1 1 \ell' m' | j_c m_{j_c} \rangle + \langle 1 -1 \ell' m' | j_c m_{j_c} \rangle) \\ i^{-\ell'} Y_{\ell' m'}^{*}(\hat{q}) \mathcal{F}_{X_T}^{\ell' j_c}(q; \mathbf{s} = \mathbf{1}) \quad (II.17)$$

Calcul du terme X_L .

L'éq. II.10 peut s'écrire:

$$X_L = X_{L, J_B T_B M_B M_{T_B}} = \mathcal{M}^-(1, 0, 0)$$

En introduisant la fonction $\mathcal{F}_{X_L}^{\ell' j_c}$: (*)

$$\mathcal{F}_{X_L}^{\ell' j_c} = 4\pi \mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B 10}(q) \quad (II.18)$$

nous avons finalement:

$$X_L = \sum_{\substack{j_c m_{j_c} \\ \ell' m'}} \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle \langle 1 0 \ell' m' | j_c m_{j_c} \rangle i^{-\ell'} Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{q}) \mathcal{F}_{X_L}^{\ell', j_c}(q; \mathbf{s} = 1) \quad (II.19)$$

En introduisant ces expressions dans II.3, avec la relation A2.11 et les propriétés des coefficients de Clebsch-Gordon et avec $O_z // \hat{q}$ on a:

$$Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{q}) = \frac{\hat{\ell}'}{\sqrt{4\pi}} \delta_{m', 0}$$

et l'amplitude de transition devient:

$$\begin{aligned} T_{M_B m_b M_A m_a}^0 &= -\frac{4\pi \hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \\ \sum_{j_c m_{j_c} \ell'} \frac{\hat{J}_B}{\hat{j}_c} (-1)^{J_A + J_B - j_c} (-1)^{J_A - M_A} \langle J_A - M_A J_B M_B | j_c m_{j_c} \rangle i^{-\ell'} \frac{\hat{\ell}'}{\sqrt{4\pi}} \\ &\left\{ \begin{aligned} &A^0 \mathcal{F}_{X_0}^{\ell', j_c}(q; \mathbf{s} = 0) \delta_{\ell', j_c} \delta_{m_{j_c}, 0} \delta_{m_a, m_b} \\ &+ \frac{1}{2} \langle S_a || \sigma^1 || S_a \rangle (\langle 1 1 S_a m_a | S_a m_a \rangle - \langle 1 -1 S_a m_a | S_a m_a \rangle) \\ &\left[\begin{aligned} &B^0 \mathcal{F}_{X_T}^{\ell', j_c}(q; \mathbf{s} = 1) (\langle 1 1 \ell' 0 | j_c m_{j_c} \rangle - \langle 1 -1 \ell' 0 | j_c m_{j_c} \rangle) \\ &- C^0 \sqrt{2} \mathcal{F}_{X_0}^{\ell', j_c}(q; \mathbf{s} = 0) \delta_{\ell', j_c} \delta_{m_{j_c}, 0} \end{aligned} \right] \\ &- \frac{C^0}{\sqrt{2}} \mathcal{F}_{X_T}^{\ell', j_c}(q; \mathbf{s} = 1) (\langle 1 1 \ell' 0 | j_c m_{j_c} \rangle - \langle 1 -1 \ell' 0 | j_c m_{j_c} \rangle) \delta_{m_a, m_b} \\ &+ E^0 \langle S_a || \sigma^1 || S_a \rangle \langle 1 0 S_a m_a | S_a m_a \rangle \\ &\quad (\langle 1 0 \ell' 0 | j_c m_{j_c} \rangle \mathcal{F}_{X_L}^{\ell', j_c}(q; \mathbf{s} = 1) \delta_{m_{j_c}, 0} \\ &- \frac{F^0}{2} \langle S_a || \sigma^1 || S_a \rangle (\langle 1 1 S_a m_a | S_a m_b \rangle + \langle 1 -1 S_a m_a | S_a m_b \rangle) \\ &\quad (\langle 1 1 \ell' 0 | j_c m_{j_c} \rangle + \langle 1 -1 \ell' 0 | j_c m_{j_c} \rangle) \mathcal{F}_{X_T}^{\ell', j_c}(q; \mathbf{s} = 1) \end{aligned} \right\} \quad (II.20) \end{aligned}$$

(*) Nous pouvons remarquer que $\mathcal{F}_{X_L}^{\ell' j_c} = \mathcal{F}_{X_T}^{\ell' j_c}$

Pour alléger l'écriture on posera par la suite:

$$\ell \equiv \ell'; \quad m \equiv m'; \quad j \equiv j_c; \quad m_j \equiv m_{j_c};$$

Reprenons l'expression de l'élément de matrice de transition en forme plus compacte (eq. II.20):

$$T_{M_B m_b M_A m_a}^0 = -\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{j, m_j} \frac{\hat{J}_B}{\hat{j}} (-1)^{J_A + J_B - j} (-1)^{J_A - M_A} \langle J_A - M_A J_B M_B | j m_j \rangle \tilde{\mathbf{F}}_{m_b m_a}^{j m_j} \quad (II.21)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{m_b m_a}^{j m_j} = & \sum_{\ell} i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \\ & \left\{ \begin{aligned} & A^0 \mathcal{F}_{X_0}^{\ell, j}(q; s=0) \delta_{\ell, j} \delta_{m_j, 0} \delta_{m_a, m_b} \\ & + \frac{1}{2} \langle S_a \| \sigma^1 \| S_a \rangle (\langle 1 1 S_a m_a | S_a m_a \rangle - \langle 1 -1 S_a m_a | S_a m_a \rangle) \\ & \left[\begin{aligned} & B^0 \mathcal{F}_{X_T}^{\ell, j}(q; s=1) (\langle 1 1 \ell 0 | j m_j \rangle - \langle 1 -1 \ell 0 | j m_j \rangle) \\ & - C^0 \sqrt{2} \mathcal{F}_{X_0}^{\ell, j}(q; s=0) \delta_{\ell, j} \delta_{m_j, 0} \end{aligned} \right] \\ & - \frac{C^0}{\sqrt{2}} \mathcal{F}_{X_T}^{\ell, j}(q; s=1) (\langle 1 1 \ell 0 | j m_j \rangle - \langle 1 -1 \ell 0 | j m_j \rangle) \delta_{m_a, m_b} \\ & + E^0 \langle S_a \| \sigma^1 \| S_a \rangle \langle 1 0 S_a m_a | S_a m_a \rangle \\ & \quad \langle 1 0 \ell 0 | j m_j \rangle \mathcal{F}_{X_L}^{\ell, j}(q; s=1) \delta_{m_j, 0} \\ & - \frac{F^0}{2} \langle S_a \| \sigma^1 \| S_a \rangle (\langle 1 1 S_a m_a | S_a m_b \rangle + \langle 1 -1 S_a m_a | S_a m_b \rangle) \\ & \quad (\langle 1 1 \ell 0 | j m_j \rangle + \langle 1 -1 \ell 0 | j m_j \rangle) \mathcal{F}_{X_T}^{\ell, j}(q; s=1) \end{aligned} \right\} \quad (II.22) \end{aligned}$$

On suppose par la suite une seule valeur de j (j entier, $|m_j| \leq 1$).

L'expression explicite des termes $\tilde{\mathbf{F}}_{m_a m_b}^{j m_j}$ devient:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0} &= A^0 \sum_{\ell} i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_0}^{\ell,j}(\mathbf{q}; s=0) \delta_{\ell,j} + E^0 \langle 10 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle \\
&\quad \langle S_a \| \sigma^1 \| S_a \rangle \sum_{\ell} i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_L}^{\ell,j}(\mathbf{q}; s=1) \langle 10 \ell 0 | j 0 \rangle
\end{aligned} \tag{II.23a}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1} = C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_T}^{\ell,j}(\mathbf{q}; s=1) \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1} = -C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_T}^{\ell,j}(\mathbf{q}; s=1) \langle 11 \ell 0 | j1 \rangle$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0} &= A^0 \sum_{\ell} i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_0}^{\ell,j}(\mathbf{q}; s=0) \delta_{\ell,j} + E^0 \langle 10 \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle \\
&\quad \langle S_a \| \sigma^1 \| S_a \rangle \sum_{\ell} i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_L}^{\ell,j}(\mathbf{q}; s=1) \langle 10 \ell 0 | j 0 \rangle
\end{aligned} \tag{II.23b}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1} = C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_T}^{\ell,j}(\mathbf{q}; s=1) \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1} = -C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_T}^{\ell,j}(\mathbf{q}; s=1) \langle 11 \ell 0 | j1 \rangle$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0} &= -C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 11 \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle \langle S_a \| \sigma^1 \| S_a \rangle i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_0}^{\ell,j}(\mathbf{q}; s=0) \delta_{\ell,j} \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1} &= -\frac{1}{2} (B^0 + F^0) \langle S_a \| \sigma^1 \| S_a \rangle \langle 11 \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle \sum_{\ell} i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_T}^{\ell,j}(\mathbf{q}; s=1) \\
&\quad \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1} &= -\frac{1}{2} (B^0 - F^0) \langle S_a \| \sigma^1 \| S_a \rangle \langle 11 \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle \sum_{\ell} i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_T}^{\ell,j}(\mathbf{q}; s=1) \\
&\quad \langle 11 \ell 0 | j1 \rangle
\end{aligned} \tag{II.24a}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0} &= C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1-1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rangle \langle S_a \| \sigma^1 \| S_a \rangle i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_0}^{\ell,j}(q; s=0) \delta_{\ell,j} \\
\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1} &= \frac{1}{2} (B^0 - F^0) \langle S_a \| \sigma^1 \| S_a \rangle \langle 1-1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rangle \sum_{\ell} i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_T}^{\ell,j}(q; s=1) \\
&\quad \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle \\
\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1} &= -\frac{1}{2} (B^0 + F^0) \langle S_a \| \sigma^1 \| S_a \rangle \langle 1-1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rangle \sum_{\ell} i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_{X_T}^{\ell,j}(q; s=1) \\
&\quad \langle 11 \ell 0 | j1 \rangle
\end{aligned} \tag{II.24b}$$

Si on pose pour simplicité d'écriture: $X^{\ell j} = i^{-\ell} \frac{\hat{\ell}}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{F}_X^{\ell,j}(q; s)$ on obtient pour les termes diagonaux:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0} &= A^0 \sum_{\ell} X_0^{\ell,j}(0) \delta_{\ell,j} + E^0 \sum_{\ell} X_L^{\ell,j}(1) \langle 10 \ell 0 | j0 \rangle \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1} &= C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1} &= -C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 11 \ell 0 | j1 \rangle
\end{aligned} \tag{II.25a}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0} &= A^0 \sum_{\ell} X_0^{\ell,j}(0) \delta_{\ell,j} - E^0 \sum_{\ell} X_L^{\ell,j}(1) \langle 10 \ell 0 | j0 \rangle \\
\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1} &= C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle \\
\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1} &= -C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 11 \ell 0 | j1 \rangle
\end{aligned} \tag{II.25b}$$

et pour les termes non diagonaux:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0} &= C^0 X_0^{\ell,j}(0) \delta_{\ell,j} \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1} &= \frac{B^0 + F^0}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1} &= \frac{F^0 - B^0}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 11 \ell 0 | j1 \rangle
\end{aligned} \tag{II.26a}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0} &= C^0 X_0^{\ell,j}(0) \delta_{\ell,j} \\
\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1} &= \frac{B^0 - F^0}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle \\
\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1} &= -\frac{B^0 + F^0}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_{X_T}^{\ell,j}(1) \langle 11 \ell 0 | j1 \rangle
\end{aligned} \tag{II.26b}$$

a) Niveaux de parité naturelle $j = \ell$:

Pour les termes diagonaux:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0}(j = \ell) &= A^0 X_0^{\ell}(0) \delta_{\ell,j} & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0}(j = \ell) &= A^0 X_0^{\ell}(0) \delta_{\ell,j} \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1}(j = \ell) &= -\frac{C^0}{2} X_T^{\ell}(1) \delta_{\ell,j} & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1}(j = \ell) &= -\frac{C^0}{2} X_T^{\ell,j}(1) \delta_{\ell,j} \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1}(j = \ell) &= -\frac{C^0}{2} X_T^{\ell}(1) \delta_{\ell,j} & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1}(j = \ell) &= -\frac{C^0}{2} X_T^{\ell}(1)
\end{aligned} \tag{II.27}$$

et pour les termes non diagonaux:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0}(\mathbf{j} = \ell) &= C^0 X_0^{\ell,j}(0) \delta_{\ell,j} & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0}(\mathbf{j} = \ell) &= C^0 X_0^{\ell}(0) \delta_{\ell,j} \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1}(\mathbf{j} = \ell) &= -\frac{B^0 + F^0}{2} X_T^{\ell}(1) \delta_{\ell,j} & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1}(\mathbf{j} = \ell) &= \frac{F^0 - B^0}{2} X_T^{\ell,j}(1) \delta_{\ell,j} \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1}(\mathbf{j} = \ell) &= \frac{F^0 - B^0}{2} X_T^{\ell}(1) \delta_{\ell,j} & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1}(\mathbf{j} = \ell) &= -\frac{B^0 + F^0}{2} X_{X_T}^{\ell,j}(1) \delta_{\ell,j}
\end{aligned} \tag{II.28}$$

a.1) *Cas particulier*: $s = 0$. Les seuls termes non nuls sont:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0}(\mathbf{j} = \ell, \mathbf{s} = \mathbf{0}) &= A^0 X_0^{\ell}(0) & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0}(\mathbf{j} = \ell, \mathbf{s} = \mathbf{0}) &= A^0 X_0^{\ell}(0) \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0}(\mathbf{j} = \ell, \mathbf{s} = \mathbf{0}) &= C^0 X_0^{\ell}(0) & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}0}(\mathbf{j} = \ell, \mathbf{s} = \mathbf{0}) &= C^0 X_0^{\ell}(0)
\end{aligned} \tag{II.29}$$

a.2) *Cas particulier*: $s = 1$. Les seuls termes non nuls sont:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1}(\mathbf{j} = \ell, \mathbf{s} = \mathbf{1}) &= \tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1}(\mathbf{j} = \ell, \mathbf{s} = \mathbf{1}) = -\frac{C^0}{2} X_T^{\ell}(1) \\
\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1}(\mathbf{j} = \ell, \mathbf{s} = \mathbf{1}) &= \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1}(\mathbf{j} = \ell, \mathbf{s} = \mathbf{1}) = -\frac{C^0}{2} X_T^{\ell}(1) \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1}(\mathbf{j} = \ell, \mathbf{s} = \mathbf{1}) &= \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1}(\mathbf{j} = \ell, \mathbf{s} = \mathbf{1}) = -\frac{B^0 + F^0}{2} X_T^{\ell}(1) \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}1}(\mathbf{j} = \ell, \mathbf{s} = \mathbf{1}) &= \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\mathbf{j}-1}(\mathbf{j} = \ell, \mathbf{s} = \mathbf{1}) = \frac{F^0 - B^0}{2} X_T^{\ell}(1)
\end{aligned} \tag{II.30}$$

b) Niveaux de parité non naturelle: $j = \ell \pm 1$, ($s = 1$)

Pour les termes diagonaux:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^j 0 &= E^0 \sum_{\ell} X_L^{\ell,j}(1) \langle 10 \ell 0 | j 0 \rangle & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^j 0 &= -E^0 \sum_{\ell} X_L^{\ell,j}(1) \langle 10 \ell 0 | j 0 \rangle \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j-1} &= C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{j-1} &= C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^j 1 &= -C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 11 \ell 0 | j 1 \rangle & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^j 1 &= -C^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 11 \ell 0 | j 1 \rangle
\end{aligned} \tag{II.31a}$$

et pour les termes non diagonaux:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^j 0 &= 0 & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^j 0 &= 0 \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{j-1} &= \frac{B^0 + F^0}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j-1} &= \frac{B^0 - F^0}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^j 1 &= \frac{F^0 - B^0}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 11 \ell 0 | j 1 \rangle & \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^j 1 &= -\frac{B^0 + F^0}{\sqrt{2}} \sum_{\ell} X_T^{\ell,j}(1) \langle 11 \ell 0 | j 1 \rangle
\end{aligned} \tag{II.31b}$$

II.2 Calcul des observables de spin \mathcal{D}_{nn} et \mathcal{S}_{nn}

Les observables de spin $\mathcal{A}_{k_a q_a}^{k_b q_b}$ (voir A3.8) s'expriment en fonction de $\tilde{\mathbf{F}}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{k_a q_a}^{k_b q_b} &= \frac{\sum_{m_b M_B} G_{m_a q_a}^{m_b q_b}(k_b, k_a) T_{M_B m_b M_A m_a} T_{M_B m_b + q_b, M_A m_a - q_a}^*}{m_a M_A \sum_{m_b M_B} |T_{M_B m_b M_A m_a}|^2} \\
&= \frac{\sum_{m_a m_b} G_{m_a q_a}^{m_b q_b}(k_b, k_a) \sum_{j m_j} \frac{1}{2j+1} \tilde{\mathbf{F}}_{m_b m_a}^{j m_j} \tilde{\mathbf{F}}_{m_b + q_b, m_a - q_a}^{j m_j *}}{\sum_{m_a m_b} \sum_{j m_j} \frac{1}{2j+1} |\tilde{\mathbf{F}}_{m_b m_a}^{j m_j}|^2}
\end{aligned} \tag{II.32}$$

Le paramètre de transfert de spin \mathcal{D}_{nn} est défini dans ce système de coordonnées par:

$$\mathcal{D}_{nn} = \frac{\text{Tr}(T \sigma_{1x} T^+ \sigma_{1x})}{\text{Tr}(T T^+)} \tag{II.33}$$

ou bien, à l'aide des composantes sphériques (A1.2):

$$\mathcal{D}_{nn} = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{Tr}(T\tau_1^1 T^+ \tau_1^1)}{\text{Tr}(TT^+)} - \frac{\text{Tr}(T\tau_1^1 T^+ \tau_{-1}^1)}{\text{Tr}(TT^+)} - \frac{\text{Tr}(T\tau_{-1}^1 T^+ \tau_1^1)}{\text{Tr}(TT^+)} + \frac{\text{Tr}(T\tau_{-1}^1 T^+ \tau_{-1}^1)}{\text{Tr}(TT^+)} \right] \quad (II.34a)$$

d'où (eq. A3.8):

$$\mathcal{D}_{nn} = \frac{1}{2} [\mathcal{A}_{11}^{11} - \mathcal{A}_{11}^{1-1} - \mathcal{A}_{1-1}^{11} + \mathcal{A}_{1-1}^{1-1}] \quad (II.34b)$$

L'observable \mathcal{S}_{nn} est définie par:

$$\mathcal{S}_{nn} = \frac{1}{2}(1 - \mathcal{D}_{nn}) \quad (II.35)$$

Explicitons donc, pour $S_a = S_b = 1/2$, les différentes contributions à $\mathcal{A}_{1q_a}^{1q_b}$; on ne retiendra explicitement dans l'amplitude de transition que les indices associés au projectile et à l'éjectile, les termes correspondant de la cible et du noyau résiduel étant diagonaux par définition.

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_{11}^{11} \\ m_b + 1 \leq 1/2 \rightarrow m_b \leq -1/2 & \quad m_b = -1/2 \\ m_a - 1 \geq -1/2 \rightarrow m_a \geq +1/2 & \quad m_a = +1/2 \\ & \mathcal{A}_{11}^{11} \propto T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} T_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^* \end{aligned}$$

seuls les éléments non diagonaux contribuent à \mathcal{A}_{11}^{11}

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_{11}^{1-1} \\ m_b - 1 \geq -1/2 \rightarrow m_b \geq 1/2 & \quad m_b = +1/2 \\ m_a - 1 \geq -1/2 \rightarrow m_a \geq 1/2 & \quad m_a = +1/2 \\ & \mathcal{A}_{11}^{1-1} \propto T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} T_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^* \end{aligned}$$

seuls les éléments diagonaux contribuent à \mathcal{A}_{11}^{1-1}

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_{1-1}^{11} \\ m_b + 1 \leq 1/2 \rightarrow m_b \leq -1/2 & \quad m_b = -1/2 \\ m_a + 1 \leq 1/2 \rightarrow m_a \leq -1/2 & \quad m_a = -1/2 \\ & \mathcal{A}_{1-1}^{11} \propto T_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^* \end{aligned}$$

seuls les éléments diagonaux contribuent à \mathcal{A}_{1-1}^{11}

$$\mathcal{A}_{1-1}^{1-1}$$

$$\begin{aligned} m_b - 1 \geq -1/2 &\rightarrow m_b \geq 1/2 & m_b &= +1/2 \\ m_a + 1 \leq 1/2 &\rightarrow m_a \leq -1/2 & m_a &= -1/2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_{1-1}^{1-1} \propto T_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} T_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^*$$

seuls les éléments non diagonaux contribuent à \mathcal{A}_{1-1}^{1-1}

Le tableau suivant resume les différentes contributions aux termes $\mathcal{A}_{1q_a}^{1q_b}$:

Tableau 1

\mathcal{A}_{11}^{11}		$B_0 X_T$	$C_0 X_0$			$F_0 X_T$
\mathcal{A}_{11}^{1-1}	$A_0 X_0$			$C_0 X_T$	$E_0 X_L$	
\mathcal{A}_{1-1}^{11}	$A_0 X_0$			$C_0 X_T$	$E_0 X_L$	
\mathcal{A}_{1-1}^{1-1}		$B_0 X_T$	$C_0 X_0$			$F_0 X_T$

Seuls les termes en X_0 peuplent les transferts $\Delta S = 0$

Calcul de $\mathcal{A}_{1q_a}^{1q_b}$ en fonction de $\tilde{F}_{m_b m_a}^{j m_j}$

Reprenons l'expression II.32. En posant

$$I = \sum_{m_a m_b} \sum_j \frac{1}{2j+1} \sum_{m_j} |\tilde{F}_{m_a m_b}^{j m_j}|^2 \quad (II.36)$$

♣ \mathcal{A}_{11}^{11} : $m_a = \frac{1}{2}$ $m_b = -\frac{1}{2}$ et $G_{\frac{1}{2}1}^{-\frac{1}{2}1} = 2$

$$\mathcal{A}_{11}^{11} = \frac{2}{I} \sum_j \frac{1}{2j+1} (\tilde{F}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j-1} \tilde{F}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{j-1*} + \tilde{F}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j0} \tilde{F}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{j0*} + \tilde{F}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j1} \tilde{F}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{j1*}) \quad (II.37a)$$

♣ \mathcal{A}_{1-1}^{11} : $m_a = \frac{1}{2}$ $m_b = \frac{1}{2}$ et $G_{\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}-1} = -2$

$$\mathcal{A}_{1-1}^{11} = -\frac{2}{I} \sum_j \frac{1}{2j+1} (\tilde{F}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j-1} \tilde{F}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{j-1*} + \tilde{F}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j0} \tilde{F}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{j0*} + \tilde{F}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j1} \tilde{F}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{j1*}) \quad (II.37b)$$

♣ \mathcal{A}_{11}^{1-1} : $m_a = -\frac{1}{2}$ $m_b = -\frac{1}{2}$ et $G_{-\frac{1}{2}-1}^{-\frac{1}{2}1} = -2$

$$\mathcal{A}_{11}^{1-1} = -\frac{2}{I} \sum_j \frac{1}{2j+1} (\tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{j-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j-1*} + \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{j0} \tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j0*} + \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j1} \tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j1*}) \quad (II.37c)$$

♣ \mathcal{A}_{1-1}^{1-1} : $m_a = -\frac{1}{2}$ $m_b = \frac{1}{2}$ et $G_{-\frac{1}{2}-1}^{\frac{1}{2}-1} = 2$

$$\mathcal{A}_{1-1}^{1-1} = \frac{2}{I} \sum_j \frac{1}{2j+1} (\tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{j-1} \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j-1*} + \tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{j0} \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j0*} + \tilde{\mathbf{F}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{j1} \tilde{\mathbf{F}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{j1*}) \quad (II.37d)$$

On voit que: $\mathcal{A}_{1-1}^{1-1} = \mathcal{A}_{11}^{11*}$ et $\mathcal{A}_{11}^{11} = \mathcal{A}_{1-1}^{1-1*}$ donc par la relation (II.35):

$$\mathcal{D}_{nn} = \Re(\mathcal{A}_{11}^{11}) - \Re(\mathcal{A}_{1-1}^{1-1}) \quad (II.38)$$

Calculons les valeurs que \mathcal{D}_{nn} peut prendre pour les différentes transitions (et pour une seule valeur de j).

a) Niveaux de parité naturelle $s = 0$, $\ell = j$. D'après (II.29), (II.36) et (II.37) on a

$$I = \frac{2}{2j+1} (|A^0|^2 + |C^0|^2) |X_0^\ell(0)|^2 \quad (II.39a)$$

et

$$I \mathcal{A}_{1-1}^{1-1} = \frac{2}{2j+1} C^0 X_0^\ell(0) C^{0*} X_0^{\ell*}(0) = \frac{2}{2j+1} |C^0|^2 |X_0^\ell(0)|^2$$

$$I \mathcal{A}_{11}^{1-1} = -\frac{2}{2j+1} A^0 X_0^\ell(0) A^{0*} X_0^{\ell*}(0) = -\frac{2}{2j+1} |A^0|^2 |X_0^\ell(0)|^2$$

d'où:

$$\mathcal{A}_{11}^{11} = \frac{|C^0|^2}{|A^0|^2 + |C^0|^2}, \quad \mathcal{A}_{1-1}^{1-1} = -\frac{|A^0|^2}{|A^0|^2 + |C^0|^2} \quad (II.39b)$$

ce qui entraine

$$\mathcal{D}_{nn} = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{nn} = 0 \quad (II.39c)$$

b) Niveaux de parité naturelle $s = 1$, $\ell = j$. D'après (II.30), (II.36) et (II.37) on a:

$$I = \frac{|X_T^\ell(1)|^2}{2j+1} \left[|C^0|^2 + \frac{|B^0 + F^0|^2}{2} + \frac{|F^0 - B^0|^2}{2} \right] \quad (II.40a)$$

$$\begin{aligned}
IA_{11}^{11} &= \frac{|X_T^\ell(1)|^2}{2(2j+1)} [(B^0 - F^0)(B^0 + F^0)^* + (B^0 + F^0)(B^0 - F^0)^*] \\
&= \frac{|X_T^\ell(1)|^2}{(2j+1)} \Re e [(B^0 - F^0)(B^0 + F^0)^*] \\
IA_{1-1}^{1-1} &= -\frac{|X_T^\ell(1)|^2}{2j+1} |C^0|^2
\end{aligned}$$

d'où:

$$D_{nn} = \frac{\Re e [(B^0 - F^0)(B^0 + F^0)^*] + |C^0|^2}{\frac{1}{2}(|B^0 + F^0|^2 + |F^0 - B^0|^2) + |C^0|^2} \quad (II.40b)$$

d'où, en utilisant les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
|B^0 + F^0|^2 + |B^0 - F^0|^2 &= 2(|B^0|^2 + |F^0|^2) \\
(B^0 - F^0)(B^0 + F^0)^* &= (|B^0|^2 - |F^0|^2 + 2i \Im m(B^0 F^{0*})) \\
\Re e [(B^0 - F^0)(B^0 + F^0)^*] &= |B^0|^2 - |F^0|^2
\end{aligned}$$

on trouve:

$$D_{nn} = \frac{|B^0|^2 - |F^0|^2 + |C^0|^2}{|B^0|^2 + |F^0|^2 + |C^0|^2} \quad (II.40c)$$

c) Niveaux de parité non naturelle $s = 1$, $\ell = j \pm 1$. D'après (II.31), (II.36) et (II.37) on a:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2j+1} \left\{ \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle^2 |X_T^{\ell j}(1)|^2 \left[|C^0|^2 + \frac{|B^0 + F^0|^2}{2} + \frac{|B^0 - F^0|^2}{2} \right] \right. \\
&\quad + \langle 1 \ 1 \ \ell 0 | j \ 1 \rangle^2 |X_T^{\ell j}(1)|^2 \left[|C^0|^2 + \frac{|F^0 - B^0|^2}{2} + \frac{|B^0 + F^0|^2}{2} \right] \\
&\quad \left. + \langle 1 \ 0 \ \ell 0 | j \ 0 \rangle^2 |X_L^{\ell j}(1)|^2 2 |E^0|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2j+1} \left\{ \langle 11 \ell 0 | j1 \rangle^2 |X_T^{\ell j}(1)|^2 \left[2 |C^0|^2 + |B^0 + F^0|^2 + |B^0 - F^0|^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + 2 \langle 10 \ell 0 | j0 \rangle^2 |X_L^{\ell j}(1)|^2 |E^0|^2 \right\} \quad (II.41a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
IA_{11}^{11} &= \frac{|X_T^\ell(1)|^2}{(2j+1)} [(B^0 - F^0)(B^0 + F^0)^* \langle 1-1 \ell 0 | j-1 \rangle^2 + (B^0 + F^0)(B^0 - F^0)^* \\
&\quad \langle 11 \ell 0 | j1 \rangle^2] = \frac{2 |X_T^\ell(1)|^2}{(2j+1)} \Re e [(B^0 - F^0)(B^0 + F^0)^*] \langle 11 \ell 0 | j1 \rangle^2
\end{aligned}$$

$$I \mathcal{A}_{1-1}^1 = -\frac{2}{(2j+1)} [|C^0|^2 \langle 11 \ell 0 | j1 \rangle^2 |X_T^{\ell j}(1)|^2 - |E^0|^2 \langle 10 \ell 0 | j0 \rangle^2 |X_L^{\ell j}(1)|^2]$$

$$\mathcal{D}_{nn} = \frac{\langle 11 \ell 0 | j1 \rangle^2 [(|B^0|^2 - |F^0|^2 + |C^0|^2) |X_T^{\ell j}(1)|^2 - \langle 10 \ell 0 | j0 \rangle^2 |E^0|^2 |X_L^{\ell j}(1)|^2]}{\langle 11 \ell 0 | j1 \rangle^2 [(|B^0|^2 + |F^0|^2 + |C^0|^2) |X_T^{\ell j}(1)|^2 + \langle 10 \ell 0 | j0 \rangle^2 |E^0|^2 |X_L^{\ell j}(1)|^2]}$$

On pose maintenant:

$$\tilde{\mathbf{X}}_L = \langle 10 \ell 0 | j0 \rangle X_L^{\ell j}(1)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_T = \langle 11 \ell 0 | j1 \rangle X_T^{\ell j}(1)$$

donc:

$$\mathcal{D}_{nn} = \frac{(|B^0|^2 - |F^0|^2 + |C^0|^2) \frac{|\tilde{\mathbf{X}}_T|^2}{|\tilde{\mathbf{X}}_L|^2} - |E^0|^2}{(|B^0|^2 + |F^0|^2 + |C^0|^2) \frac{|\tilde{\mathbf{X}}_T|^2}{|\tilde{\mathbf{X}}_L|^2} + |E^0|^2} \quad (II.41b)$$

D'après les définitions:

$$\frac{|\tilde{\mathbf{X}}_T|^2}{|\tilde{\mathbf{X}}_L|^2} = \frac{\langle 11 \ell 0 | j1 \rangle^2}{\langle 10 \ell 0 | j0 \rangle^2} = R$$

$$\text{pour } j = \ell - 1 \quad R = \frac{(\ell - 1)(2\ell + 1)}{2\ell(2\ell + 1)} = \frac{\ell - 1}{2\ell}$$

$$\text{pour } j = \ell + 1 \quad R = \frac{(\ell + 2)(2\ell + 1)}{2(\ell + 1)(2\ell + 1)} = \frac{\ell + 2}{2(\ell + 1)}$$

par exemple pour un état 1^+ , $\ell = 0$ dominant:

$$\frac{|\tilde{\mathbf{X}}_T|^2}{|\tilde{\mathbf{X}}_L|^2} = 1 \rightarrow \mathcal{D}_{nn} = \frac{|B^0|^2 - |F^0|^2 + |C^0|^2 - |E^0|^2}{|B^0|^2 + |F^0|^2 + |C^0|^2 + |E^0|^2} \quad (II.41c)$$

et

$$\mathcal{S}_{nn} = \frac{|E^0|^2 + |F^0|^2}{|B^0|^2 + |F^0|^2 + |C^0|^2 + |E^0|^2} \quad (II.41d)$$

Note concernant l'isospin

Quelques remarques maintenant sur les termes dependant de l'isospin: $T_{M_B m_b M_A m_a}^1$:
Déjà nous constatons que, dans le cas d'une diffusion inélastique parmi les termes:

$$\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_i = \sum_m (-1)^m \tau_m^1(1) \tau_{-m}^1(i) = \tau_1^1(1) \tau_1^1(i) + \tau_0^1(1) \tau_0^1(i) - \tau_{-1}^1(1) \tau_{-1}^1(i)$$

seul le terme $\tau_0^1(1) \tau_0^1(i)$ intervient. D'où, si on reprend l'expression (II.3) pour l'amplitude de transition:

$$\begin{aligned} T_{M_B m_b M_A m_a}^1 &= -\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \\ [&\langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \tau_0^1(1) | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle \\ &\sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | A^1 e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \tau_0^1(i) | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle \\ &+ \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1n} \tau_0^1(1) | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle \\ &\sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | B^1 \sigma_{in} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \tau_0^1(i) | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle \\ &+ \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1n} \tau_0^1(1) | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle \\ &\sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | C^1 e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \tau_0^1(i) | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle \\ &+ \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \tau_0^1(1) | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle \\ &\sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | C^1 \sigma_{in} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \tau_0^1(i) | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle \\ &+ \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1q} \tau_0^1(1) | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle \\ &\sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | E^1 \sigma_{iq} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \tau_0^1(i) | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle \\ &+ \langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_{1p} \tau_0^1(1) | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle \\ &\sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}}(\xi_B, \vec{r}_i) | F^1 \sigma_{ip} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \tau_0^1(i) | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}}(\xi_A, \vec{r}_i) \rangle] \end{aligned} \quad (II.42)$$

Calculons le terme:

$$\begin{aligned} &\langle \Phi_{S_b t_b}^{m_b m_{t_b}} | \sigma_u^1 \tau_0^1(1) | \Phi_{S_a t_a}^{m_a m_{t_a}} \rangle \\ &= \langle S_b m_b | \sigma_u^1 | S_a m_a \rangle \langle t_a m_{t_a} | \tau_0^1(1) | t_a m_{t_a} \rangle \\ &= \langle S_b m_b | \sigma_u^1 | S_a m_a \rangle \langle 1 \ 0 \ t_a \ m_{t_a} | t_a \ m_{t_a} \rangle \langle \frac{1}{2} \| \tau^1 \| \frac{1}{2} \rangle \\ &= \langle S_a m_b | \sigma_u^1 | S_a m_a \rangle \end{aligned} \quad (II.43)$$

où σ_u^1 sont les matrices σ pour $u = x, y, z$ et la matrice unité pour $u = 0$

D'après l'Appendice 4, dans les expressions obtenues pour $T = 0$ il suffit de remplacer:

1) $A^0, B^0, C^0 \dots$ par $A^1, B^1, C^1 \dots$

2) $\mathcal{F}_X^{\ell,j}(k=0)$ par $(-1)^{1+T_A-T_B} \langle T_A M_{T_A} \ 1 \ 0 \mid T_B M_{T_A} \rangle \mathcal{F}_X^{\ell,j}(k=1)$

Discussion:

Si $T_A \neq 0$ les transitions $\Delta T = 0$ peuvent donner aussi $T_B = T_A$. Dans le cas d'un niveau $T_B = T_A + 1$ seules les transitions $\Delta T = 1$ interviennent.

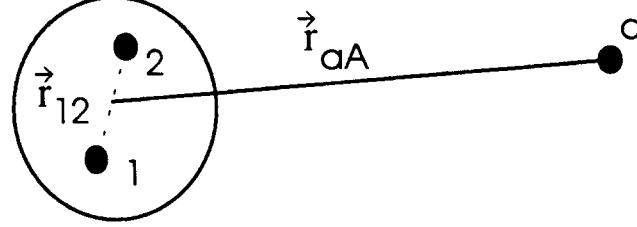
Dans le cas d'un niveaux $T_B = T_A$:

- si $T_A = 0$ seules les transitions $\Delta T = 0$ interviennent;
- si $T_A \neq 0$ ou si le niveau final est un mélange d'isospin alors la transition n'est pas purement isoscalaire ou isovectorielle (par ex. l'état 1^+ du ^{48}Ca).



III. DIFFUSION ELASTIQUE DEUTON-NUCLEON

Considérons une réaction $A(a,b)B$; en particulier le projectile a est ici un deuton formé des nucléons 1 et 2 et la cible A est un nucléon noté 0. Le schéma est le suivant:



Soient S_a, S_b les spins du projectile et de l'ejectile (dans le cas traité ici égaux à 1) m_a, m_b leurs composantes le long de l'axe de quantification, J_A, J_B les spins de la cible et du noyau résiduel (dans le cas traité ici $J_A = J_B = 1/2$) et M_A, M_B leur composantes le long de l'axe de quantification.

L'amplitude de transition T s'écrit comme la somme des amplitudes de transition T_1 et T_2 qui décrivent respectivement les interactions des nucléons 1 et 2 avec le nucléon 0:

$$T = T_1 + T_2$$

Calculons d'abord T_1 :

$$T_1 = \sum_{m'_a, m'_b} \int X_{m_b, m'_b}^{(-)*}(\vec{k}_b, \vec{r}_{aA}) \langle S_b m'_b J_B M_B | V_1 | S_a m'_a J_A M_A \rangle X_{m_a, m'_a}^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_{aA}) d^3 \vec{r}_{aA} \quad (III.1)$$

le terme entre *bra* et *ket* s'écrivant de manière explicite:

$$\begin{aligned} & \langle S_b m'_b J_B M_B | V_1 | S_a m'_a J_A M_A \rangle = \\ & \langle \Phi_{S_b}^{m'_b}(\vec{r}_{12}, \xi_1, \xi_2) \Psi_{J_B}^{M_B} | V(r_{10}, \xi_1, \xi_0) | \Phi_{S_a}^{m'_a}(\vec{r}_{12}, \xi_1, \xi_2) \Psi_{J_A}^{M_A} \rangle \end{aligned} \quad (III.2)$$

Le potentiel V_1 dépend de la distance r_{10} et des variables de spin. Considérons le terme central $V_c(r_{10})$. Par transformée de Fourier :

$$V_c(r_{10}) = \int d^3 \vec{q} \tilde{V}_c(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{10}}$$

Le terme central ne dépendant que de la distance r_{10} , $\tilde{V}_c(\vec{q})$ ne dépend que de q . Nous nous intéressons à une dépendance en \vec{r} , (où $\vec{r} = \vec{r}_{aA}$ distance relative projectile-cible) et

non pas à \vec{r}_{10} (distance relative d'un nucléon du projectile-cible), donc nous exprimons \vec{r}_{10} en fonction de \vec{r} : $\vec{r}_{10} = \vec{r}_{12}/2 - \vec{r}$

$$V_c(r_{10}) = \int d^3 \vec{q} \tilde{V}_c(q) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_{12}/2}$$

Le terme central donne alors:

$$T_1^c = \sum_{m'_a, m'_b} \int \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} X_{m_b, m'_b}^{(-)*}(\vec{k}_b, \vec{r}) \langle m'_b M_b | \tilde{V}_c(q) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_{12}/2} | m'_a M_a \rangle X_{m_a, m'_a}^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}) d^3 \vec{r} d^3 \vec{q}$$

Dans l'hypothèse où les fonctions d'onde du mouvement relatif sont des **ondes planes**:

$$X^{(\pm)}(\vec{k}, \vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (III.3)$$

la partie d'intégration sur \vec{r} de la formule (III.2) se réduit à:

$$\int d^3 \vec{r} e^{i(\vec{k}_a - \vec{k}_b - \vec{q})\cdot\vec{r}} = (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_a - \vec{k}_b - \vec{q}) \quad (III.4)$$

D'où

$$T_1^c = (2\pi)^3 \langle \Psi_{S_b}^{m_b}(\vec{r}_{12}, \xi_1, \xi_2) J_B M_B | \tilde{V}(q = |\vec{k}_a - \vec{k}_b|) | \Psi_{S_a}^{m_a}(\vec{r}_{12}, \xi_1, \xi_2) J_A M_A \rangle$$

De façon générale pour un terme quelconque de l'interaction on suppose:

$$T_1 = (2\pi)^3 \langle \Psi_{S_b}^{m_b}(\vec{r}_{12}, \xi_1, \xi_2) J_B M_B | \tilde{V}(q = |\vec{k}_a - \vec{k}_b|, \hat{q}, \hat{n}, \hat{p}) | \Psi_{S_a}^{m_a}(\vec{r}_{12}, \xi_1, \xi_2) J_A M_A \rangle$$

avec

$$\vec{q} = \vec{k}_a - \vec{k}_b \quad \vec{n} = \vec{k}_a \times \vec{k}_b \quad \vec{p} = \vec{n} \times \vec{q}$$

La fonction d'onde du deuton s'écrit :

$$\Psi_{S_a}^{m_a}(\vec{r}_{12}, \xi_1, \xi_2) = \sum_{L=0,2} i^L U_L(r_{12}) [Y_L(\vec{r}_{12}) \mathcal{X}_1(1,2)]_{S_a}^{m_a} | \mathcal{X}_0^0(1,2) \rangle \quad (III.5)$$

où on a factorisé en:

- une partie radiale,

$$U_L(r_{12}) \quad \text{pour} \quad L = 0 \quad U_0(r_{12}) = U(r_{12})/r_{12} \quad : \text{état } \mathcal{S}$$

$$L = 2 \quad U_2(r_{12}) = -W(r_{12})/r_{12} \quad : \text{état } \mathcal{D}$$

- une partie angulaire Y_L ,
- une partie de spin où les nucléons 1 et 2 sont couplés à $S=1$,
- une partie d'isospin où les nucléons 1 et 2 sont couplés à $T=0$. (Le deuton étant dans un état 1^+ , seules les valeurs paires de L (0 ou 2) sont permises).

En prenant dans l'espace q la matrice nucléon nucléon (éq. I.1), explicitons la formule (III.1) en introduisant l'expression (III.2):

$$\begin{aligned}
T_1 &= \left(-\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \\
&\sum_{\substack{LL'\lambda \\ \lambda'\nu\nu'}} \int d^3\vec{r}_{12} i^{L-L'} U_L(r_{12}) U_{L'}(r_{12}) \langle \mathcal{X}_0^0(1,2) T_B M_{T_B} | \langle Y_{L'}(\vec{r}_{12}) [\mathcal{X}_0^0(1,2)]_{S_b}^{m_b} | \\
&\quad \langle J_B M_B | d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q;0) \sigma_\nu^\lambda(1) \sigma_{\nu'}^{\lambda'}(0) + d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q;1) \sigma_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \tau_0(1) \tau_0(0) \\
&\quad | [Y_L(\vec{r}_{12}) \mathcal{X}_1(1,2)]_{S_a}^{m_a} \rangle | J_A M_A \rangle | \mathcal{X}_0^0(1,2) T_A M_{T_A} \rangle
\end{aligned} \tag{III.6}$$

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{X}_0^0(1,2) T_B M_{T_B} | \tau_0(1) \tau_0(0) | \mathcal{X}_0^0(1,2) T_A M_{T_A} \rangle \\
\propto \langle \mathcal{X}_0^0(1,2) | \tau_0^1(1) | \mathcal{X}_0^0(1,2) \rangle = \langle 1000 | 00 \rangle \langle \mathcal{X}_0(1,2) | \tau^1(1) | \mathcal{X}_0(1,2) \rangle = 0
\end{aligned} \tag{III.7}$$

On retrouve bien que le deuton est une sonde isoscalaire. Dans la suite nous n'utiliserons que la partie isoscalaire $d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q)$ de la matrice N-N. L'amplitude s'écrit alors:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \left(-\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \\
&\sum_{\substack{LL'\lambda \\ \lambda'\nu\nu'}} \int d^3\vec{r}_{12} i^{L-L'} U_{L'}(r_{12}) U_L(r_{12}) \langle [Y_{L'}(\vec{r}_{12}) \mathcal{X}_1(1,2)]_{S_b}^{m_b} J_B M_B | \\
&\quad d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) \sigma_\nu^\lambda(1) \sigma_{\nu'}^{\lambda'}(0) e^{i\vec{q}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{2}} | [Y_L(\vec{r}_{12}) \mathcal{X}_1(1,2)]_{S_a}^{m_a} J_A M_A \rangle
\end{aligned} \tag{III.8}$$

$$= \left(-\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \nu\nu'}} \mathcal{Z} \langle J_B M_B | \sigma_{\nu'}^{\lambda'} | J_A M_A \rangle$$

où l'on a factorisé en une fonction \mathcal{Z} et en un terme qui dépend du spin de la cible. Ce dernier s'explique de la façon suivante, à l'aide de (A2.1) et (A2.11):

$$\begin{aligned}
\langle J_B M_B | \sigma_{\nu'}^{\lambda'} | J_A M_A \rangle &= (-1)^{\lambda'} \hat{\lambda}' \langle \lambda' \nu' J_A M_A | J_B M_B \rangle \\
&= (-1)^{\lambda'} (-1)^{J_A + \lambda' - J_B} \hat{\lambda}' \langle J_A M_A \lambda' \nu' | J_B M_B \rangle
\end{aligned} \tag{III.9}$$

Calcul du terme \mathcal{Z} .

Nous venons de définir le terme \mathcal{Z} par:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \langle \Phi_{S_b}^{m_b}(\vec{r}_{12}, \xi_1, \xi_2) | d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) \sigma_\nu^\lambda e^{i\vec{q}\cdot\frac{r_{12}}{2}} | \Phi_{S_a}^{m_a}(\vec{r}_{12}, \xi_1, \xi_2) \rangle \\ &= \sum_{L,L'} \int d^3\vec{r}_{12} i^{L-L'} U_{L'}(r_{12}) U_L(r_{12}) \langle [Y_{L'}(\vec{r}_{12})\mathcal{X}(1,2)]_{m_b}^{S_b} | \\ &\quad d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) \sigma_\nu^\lambda(1) e^{i\vec{q}\cdot\frac{r_{12}}{2}} | [Y_L(\vec{r}_{12})\mathcal{X}_1(1,2)]_{S_a}^{m_a} \rangle \end{aligned} \quad (III.10)$$

Développons le terme $e^{i\vec{q}\cdot\frac{r_{12}}{2}}$:

$$e^{i\vec{q}\cdot\frac{r_{12}}{2}} = 4\pi \sum_{\ell m} i^\ell j_\ell\left(\frac{q}{2}r_{12}\right) Y_\ell^{m*}(\hat{q}) Y_\ell^m(\hat{r}_{12})$$

on peut développer le produit :

$$Y_\ell^m(\vec{r}_{12}) \sigma_\nu^\lambda(1) = \sum_{j_p m_p} \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle [Y_\ell(\vec{r}_{12}) \sigma^\lambda]_{j_p}^{m_{j_p}} \quad (III.11)$$

Le terme \mathcal{Z} devient:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum 4\pi i^\ell Y_\ell^{m*}(\hat{q}) \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle i^{L-L'} d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) \\ &\quad \int U_{L'}(r_{12}) U_L(r_{12}) j_\ell\left(\frac{q}{2}r_{12}\right) r_{12}^2 dr_{12} \\ &\quad \langle [Y_{L'}(\vec{r}_{12})\mathcal{X}_1(1,2)]_{S_b}^{m_b} | [Y_\ell(\vec{r}_{12})\sigma^\lambda]_{j_p}^{m_{j_p}} | [Y_L(\vec{r}_{12})\mathcal{X}_1(1,2)]_{S_a}^{m_a} \rangle \end{aligned} \quad (III.12)$$

Nous pouvons isoler l'intégration sur r_{12} et les termes qui en dépendent :

$$C_{L'\ell L}(q) = \int U_{L'}(r_{12}) U_L(r_{12}) j_\ell\left(\frac{q}{2}r_{12}\right) r_{12}^2 dr_{12} \quad (III.13)$$

Nous pouvons aussi développer la partie angulaire :

$$\begin{aligned} &\langle [Y_{L'}(\vec{r}_{12})\mathcal{X}_1(1,2)]_{S_b}^{m_b} | [Y_\ell(\vec{r}_{12})\sigma^\lambda]_{j_p}^{m_{j_p}} | [Y_L(\vec{r}_{12})\mathcal{X}_1(1,2)]_{S_a}^{m_a} \rangle \\ &= \langle j_p m_{j_p} S_a m_a | S_b m_b \rangle \langle [Y_{L'}(\vec{r}_{12})\mathcal{X}_1(1,2)]_{S_b} \parallel [Y_\ell(r_{12})\sigma^\lambda]_{j_p} \parallel [Y_L(\vec{r}_{12})\mathcal{X}_1(1,2)]_{S_a} \rangle \\ &= \langle j_p m_{j_p} S_a m_a | S_b m_b \rangle \hat{L}' \sqrt{3} \hat{j}_p \hat{S}_a \left\{ \begin{array}{ccc} L' & \ell & L \\ 1 & \lambda & 1 \\ S_b & j_p & S_a \end{array} \right\} \\ &\quad \langle Y_{L'}(\vec{r}_{12}) \parallel Y_\ell(\vec{r}_{12}) \parallel Y_L(\vec{r}_{12}) \rangle \langle \mathcal{X}_1(1,2) \parallel \sigma^\lambda \parallel \mathcal{X}_1(1,2) \rangle \end{aligned} \quad (III.14)$$

Sachant que :

$$\langle Y_{L'}(\vec{r}_{12}) \| Y_\ell(\vec{r}_{12}) \| Y_L(\vec{r}_{12}) \rangle = \frac{\hat{\ell}\hat{L}}{\sqrt{4\pi}\hat{L}'} \langle \ell 0 L 0 | L' 0 \rangle \quad (III.15)$$

on obtient pour la partie angulaire :

$$\begin{aligned} & \langle [Y_{L'}(\vec{r}_{12})\mathcal{X}_1(1,2)]_{S_b}^{m_b} \left| [Y_\ell(\vec{r}_{12})\sigma^\lambda]_{j_p}^{m_{j_p}} \right| [Y_L(\vec{r}_{12})\mathcal{X}_1(1,2)]_{S_a}^{m_a} \rangle \\ & = \langle S_a m_a j_p m_{j_p} | S_b m_b \rangle (-1)^{S_a+j_p-S_b} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}} \hat{j}_p \hat{\ell} \hat{L} \hat{S}_a \left\{ \begin{array}{ccc} L' & \ell & L \\ 1 & \lambda & 1 \\ S_b & j_p & S_a \end{array} \right\} \langle L 0 \ell 0 | L' 0 \rangle \\ & \langle \mathcal{X}_1(1,2) \| \sigma^\lambda \| \mathcal{X}_1(1,2) \rangle \end{aligned} \quad (III.16)$$

D'après (A2.4) et (A2.11), on a aussi:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{X}_1(1,2) \| \sigma^\lambda \| \mathcal{X}_1(1,2) \rangle & = \sqrt{6} (-1)^\lambda \hat{\lambda} W(\lambda \ 1/2 \ 1 \ 1/2; \ 1/2 \ 1) \\ & = (-1)^\lambda \sqrt{\lambda+1} \end{aligned} \quad (III.17)$$

ce qui donne pour la partie angulaire:

$$\begin{aligned} & \langle [Y_{L'}(\vec{r}_{12})\mathcal{X}_1(1,2)]_{S_b}^{m_b} \left| [Y_\ell(\vec{r}_{12})\sigma^\lambda]_{j_p}^{m_{j_p}} \right| [Y_L(\vec{r}_{12})\mathcal{X}_1(1,2)]_{S_a}^{m_a} \rangle \\ & = \langle S_a m_a j_p m_{j_p} | S_b m_b \rangle (-1)^{\lambda+S_a+j_p-S_b} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}} \hat{j}_p \hat{\ell} \hat{L} \hat{S}_a \left\{ \begin{array}{ccc} L' & \ell & L \\ 1 & \lambda & 1 \\ S_b & j_p & S_a \end{array} \right\} \langle L 0 \ell 0 | L' 0 \rangle \sqrt{\lambda+1} \end{aligned} \quad (III.18)$$

- $j_p \ m_{j_p}$ représente le transfert de spin total dans le deuton,
- ℓ le transfert de moment angulaire dans le deuton
- $L \ (L')$ le moment angulaire initial (final) dans le deuton de valeurs possibles 0 ou 2.

Donc:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} & = \sqrt{12\pi} \sum_{\substack{LL' \\ j_p \ell m}} (-1)^{\lambda+S_a+j_p-S_b} \langle S_a m_a j_p m_{j_p} | S_b m_b \rangle \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \\ & \hat{j}_p \hat{\ell} \hat{L} \hat{S}_a \langle L 0 \ell 0 | L' 0 \rangle \sqrt{\lambda+1} \\ & \left\{ \begin{array}{ccc} L' & \ell & L \\ 1 & \lambda & 1 \\ S_b & j_p & S_a \end{array} \right\} C_{L'\ell L}(q) i^{L-L'+\ell} d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) Y_\ell^{m*}(\hat{q}) \end{aligned} \quad (III.19)$$

On peut définir:

$$\mathcal{K}_{\ell \lambda j_p}(q) = \sqrt{12\pi} (-1)^{\lambda+S_a+j_p-S_b} \hat{j}_p \hat{\ell} \hat{S}_a \sqrt{\lambda+1} \sum_{LL'} i^{L-L'+\ell} \hat{L} \langle L0\ell0 | L'0 \rangle \begin{Bmatrix} L' & \ell & L \\ 1 & \lambda & 1 \\ S_b & j_p & S_a \end{Bmatrix} C_{L'\ell L}(q) \quad (III.20)$$

ce qui donne alors pour \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z} = \sum_{j_p \ell m} \langle S_a m_a j_p m_{j_p} | S_b m_b \rangle \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \mathcal{K}_{\ell \lambda j_p}(q) d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}) \quad (III.21)$$

L'amplitude de diffusion T_1 devient donc :

$$T_1 = \left(-\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \sum_{j_p \ell m} (-1)^{\lambda'} (-1)^{J_A+\lambda'-J_B} \hat{\lambda}' \langle S_a m_a j_p m_{j_p} | S_b m_b \rangle \langle J_A M_A \lambda' \nu' | J_B M_B \rangle \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \mathcal{K}_{\ell \lambda j_p}(q) d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}) \quad (III.22)$$

L'amplitude T_2 se calcule de manière identique. Il suffit de faire le changement $r_{12} \rightarrow -r_{12}$ dans le calcul précédent. Comme seules les valeurs paires de ℓ peuvent contribuer, le terme T_2 sera égal à T_1 . Finalement, on a donc:

$$T = 2 \left(-\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \sum_{j_p \ell m} (-1)^{\lambda'} (-1)^{J_A+\lambda'-J_B} \hat{\lambda}' \langle S_a m_a j_p m_{j_p} | S_b m_b \rangle \langle J_A M_A \lambda' \nu' | J_B M_B \rangle \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \mathcal{K}_{\ell \lambda j_p}(q) d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}) \quad (III.23)$$

Cas particulier: état S.

Dans le cas où on ne considère que l'état S dans le deuton, les formules se simplifient. Seule la valeur $\ell = 0$ est permise et on obtient:

$$\mathcal{K}_{0 \lambda j_p}(q) = \sqrt{4\pi} \sqrt{\lambda+1} C_{000}(q) \delta_{\ell 0} \delta_{j_p \lambda} \quad (III.24)$$

L'amplitude de transition s'écrit:

$$T_{M_B m_b M_A m_a}(\text{état S}) = 2 \left(-\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \sum_{\lambda \lambda' \nu \nu'} (-1)^{\lambda'} (-1)^{J_A+\lambda'-J_B} \hat{\lambda}' \langle S_a m_a \lambda \nu | S_b m_b \rangle \langle J_A M_A \lambda' \nu' | J_B M_B \rangle \mathcal{K}_{0 \lambda \lambda}(q) d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) \quad (III.25)$$

Il est important de remarquer que seules les valeurs $j_p = \lambda = 0, 1$ sont permises dans la sommation ci-dessus.

Si \hat{S}_x , \hat{S}_y et \hat{S}_z sont les opérateurs associés à une particule de spin $s = 1$, leur représentation matricielle est donnée par:

$$\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \hat{S}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \hat{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (III.26)$$

et si on définit les opérateurs de spin sphériques correspondant:

$$S_0^0 = 1; S_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_x - iS_y); S_0^1 = S_z; S_1^1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(S_x + iS_y) \quad (III.27)$$

leurs éléments de matrice s'écrivent (A2.8):

$$\begin{aligned} \langle S_b m_b | S_\nu^\lambda | S_a m_a \rangle &= \langle S_a m_a \lambda \nu | S_b m_b \rangle (-1)^{S_a + \lambda - S_b} \langle S_b || S^\lambda || S_a \rangle \\ &= \langle S_a m_a \lambda \nu | S_b m_b \rangle \delta_{S_a S_b} \delta_{S_a 1} (-1)^\lambda \sqrt{\lambda + 1} \end{aligned} \quad (III.28)$$

En utilisant la relation (III.9), on a donc:

$$\begin{aligned} &T_{M_B m_b M_A m_a}(\text{état } S) \\ &= 2 \left(-\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 C_{000}(q) \sum_{\lambda \lambda' \nu \nu'} d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) \langle J_B M_B S_b m_b | S_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} | J_A M_A S_a m_a \rangle \end{aligned} \quad (III.29a)$$

Cette relation entre éléments de matrice s'écrit sous forme d'opérateurs:

$$T_{D-N}(\text{état } S) = 2 \left(-\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 C_{000}(q) \sum_{\lambda \lambda' \nu \nu'} d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) S_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \quad (III.29b)$$

En comparant les relations (I.1), (I.2) et (III.29a), on déduit:

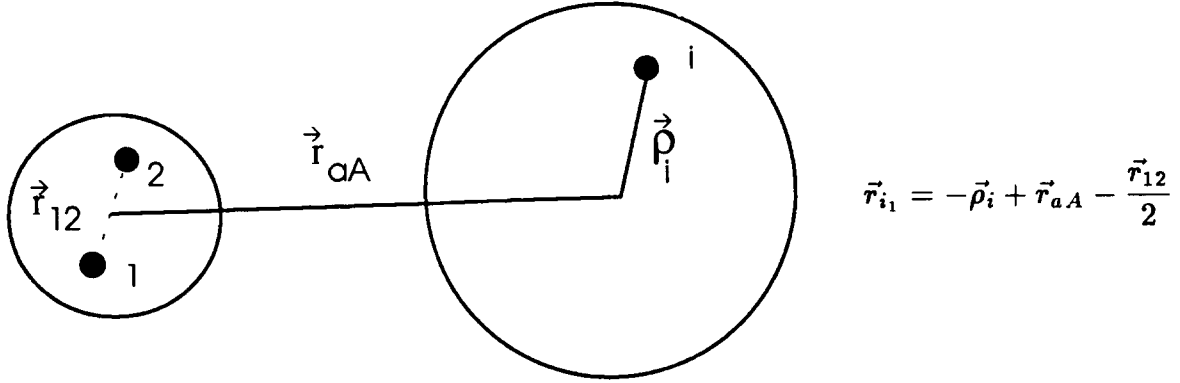
$$T_{D-N}(\text{état } S) = A_d + B_d S_n \sigma'_n + C_d (S_n + \sigma'_n) + E_d S_q \sigma'_q + F_d S_p \sigma'_p \quad (III.29c)$$

avec:

$$A_d = -\frac{8\pi\hbar^2}{m} C_{000}(q) A_0(q); \quad B_d = -\frac{8\pi\hbar^2}{m} C_{000}(q) B_0(q); \quad \text{etc.} \quad (III.29d)$$



IV. DIFFUSION INELASTIQUE DEUTON-NOYAU



Pour une diffusion inélastique $\vec{r}_{bB} = \vec{r}_{aA}$, l'amplitude de transition T dans l'approximation locale s'écrit :

$$T_{M_B m_b M_A m_a} = 2 \mathcal{N} \sum_{m'_a m'_b} \int d^3 \vec{r}_{aA} X_{m_b m'_b}^{(-)*}(\vec{k}_b, r_{aA}) \\ < \Phi_{S_b}^{m'_b} \Psi_{J_B}^{M_B} | \sum_{i=1}^A V_i | \Phi_{S_a}^{m'_a} \Psi_{J_A}^{M_A} > X_{m_a m'_a}^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_{aA}) \quad (IV.1a)$$

avec:

$$V_i = \int d^3 \vec{q} M_i(q) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_{aA} - \vec{\rho}_i - \frac{\vec{r}_{12}}{2})} \quad (IV.1b)$$

et

$$\mathcal{N} = -\frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \quad (IV.1c)$$

ou encore en faisant apparaître les variables explicitement:

$$T_{M_B m_b M_A m_a} = 2 \mathcal{N} \sum_{i=1}^A \sum_{m'_a m'_b} \int d^3 \vec{\rho}_i d^3 \vec{r}_{aA} d^3 \vec{r}_{12} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_{A-1} d^3 \vec{q} d\xi_i X_{m_b m'_b}^{(-)*}(\vec{k}_b, r_{aA}) \\ \Phi_{S_b}^{m'_b*}(\xi_1, \xi_2, \vec{r}_{12}) \Psi_{J_B}^{M_B*}(\xi_{A-1}, \rho_i, \xi_i) M_i(q) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_{aA} - \vec{\rho}_i - \frac{\vec{r}_{12}}{2})} \\ \Phi_{S_a}^{m'_a}(\xi_1, \xi_2, \vec{r}_{12}) \Psi_{J_A}^{M_A}(\xi_{A-1}, \rho_i, \xi_i) X_{m_a m'_a}^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_{aA}) \quad (IV.1d)$$

En introduisant le développement de la matrice d'interaction (A1.1):

$$M(q) = \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \nu\nu'}} d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) \sigma_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'}$$

l'équation (IV.1) devient :

$$\begin{aligned}
& T_{M_B m_b M_A m_a} \\
&= 2\mathcal{N} \sum_{m'_a m'_b} \int X_{m_b m'_b}^{(-)*}(\vec{k}_b, \vec{r}_{aA}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{aA}} d^3 \vec{r}_{aA} d^3 \vec{q} \sum_{i=1}^A \langle \Phi_{S_b}^{m'_b}(\vec{r}_{12}) \Psi_{J_B}^{M_B}(\vec{\rho}_i) | d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) \sigma_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \\
&\quad e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{\rho}_i + \frac{\vec{r}_{12}}{2})} | \Phi_{S_a}^{m'_a}(\vec{r}_{12}) \Psi_{J_A}^{M_A}(\vec{\rho}_i) \rangle X_{m_a m'_a}^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_{aA}) \\
&= 2\mathcal{N} \sum_{m'_a m'_b} \int X_{m_b m'_b}^{(-)*}(\vec{k}_b, \vec{r}_{aA}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{aA}} d^3 r_{aA} d^3 q \langle \Phi_{S_b}^{m'_b}(\vec{r}_{12}) | d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) \sigma_\nu^\lambda e^{-i\vec{q} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{2}} | \Phi_{S_a}^{m'_a}(\vec{r}_{12}) \rangle \\
&\quad \sum_{i=1}^A \langle \Psi_{J_B}^{M_B}(\rho_i) | \sigma_{\nu'}^{\lambda'} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{\rho}_i} | \Psi_{J_A}^{M_A}(\rho_i) \rangle X_{m_a m'_a}^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_{aA}) \\
&= 2\mathcal{N} \int X_{m_b m'_b}^{(-)*}(\vec{k}_b, \vec{r}_{aA}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{aA}} \mathcal{Z} \mathcal{M} X_{m_a m'_a}^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_{aA}) d^3 r_{aA} d^3 q
\end{aligned} \tag{IV.2}$$

où l'on a introduit les fonctions \mathcal{Z} et \mathcal{M} ainsi définies :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \langle \Phi_{S_b}^{m'_b}(\vec{r}_{12}, \xi_1, \xi_2) | d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) \sigma_\nu^\lambda e^{-i\vec{q} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{2}} | \Phi_{S_a}^{m'_a}(\vec{r}_{12}, \xi_1, \xi_2) \rangle \\
&= \sum_{L, L'} \int d^3 \vec{r}_{12} i^{L-L'} U_{L'}(r_{12}) U_L(r_{12}) \langle [Y_L(\vec{r}_{12}) \mathcal{X}(1, 2) 1]_{S_b}^{m'_b} | \\
&\quad d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(0) \sigma_\nu^\lambda(1) e^{i\vec{q} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{2}} | [Y_L(\vec{r}_{12}) \mathcal{X}_1(1, 2)]_{S_a}^{m'_a} \rangle
\end{aligned} \tag{IV.3a}$$

$$\mathcal{M} = \sum_i \langle \Psi_{J_B}^{M_B} | \sigma_{\nu'}^{\lambda'} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{\rho}_i} | \Psi_{J_A}^{M_A} \rangle \tag{IV.3b}$$

Le terme \mathcal{Z} , d'après le chapitre III, s'écrit:

$$\mathcal{Z} = \sum_{j_p \ell m} \langle S_a m_a j_p m_{j_p} | S_b m_b \rangle \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \mathcal{K}_{\ell \lambda j_p}(q) d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(0) Y_\ell^{m*}(\hat{q}) \tag{IV.4a}$$

avec:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\ell \lambda j_p}(q) &= \sqrt{12\pi} (-1)^{\lambda+S_a+j_p-S_b} \hat{j}_p \hat{\ell} \hat{S}_a \sqrt{\lambda+1} \\
&\quad \sum_{LL'} i^{L-L'-\ell} \hat{L} \langle L0\ell0 | L'0 \rangle \left\{ \begin{matrix} L' & \ell & L \\ 1 & \lambda & 1 \\ S_b & j_p & S_a \end{matrix} \right\} \mathcal{C}_{L'\ell L}(q)
\end{aligned} \tag{IV.4b}$$

Le terme \mathcal{M} a été calculé dans l'Appendice 4; de (A4.4b) on a:

$$\mathcal{M}^-(\lambda', \nu', 0) = 4\pi \sum_{\substack{\ell' m' \\ j_c m_{j_c}}} \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle \delta_{T_A, T_B} \delta_{M_{T_A}, M_{T_B}} \\ \langle \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle \mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' 0}(q) i^{-\ell'} Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{q}) \quad (IV.5)$$

La matrice de transition devient:

$$T_{M_B m_b M_A m_a} \\ = 2\mathcal{N} 4\pi \sum_{\substack{\ell j_p m_{j_p} \\ \ell' m' \lambda \lambda' \\ \nu \nu' j_c m_{j_c}}} \int X^{(-)*}(\vec{k}_b, \vec{r}_{aA}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{aA}} X^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_{aA}) d^3 \vec{q} d^3 \vec{r}_{aA} \\ \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \langle S_a m'_a j_p m_{j_p} | S_b m'_b \rangle \\ \langle \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle \delta_{T_A, T_B} \delta_{M_{T_A}, M_{T_B}} \\ d_{\nu \nu'}^{\lambda \lambda'}(q) \mathcal{K}_{\ell \lambda j_p}(q) Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}) \mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' 0}(q) i^{-\ell'} Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{q}) \quad (IV.6)$$

IV.1 Developpement en Ondes Planes

Le terme : $\int X^{(-)*}(\vec{k}_b, \vec{r}_{aA}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{aA}} X^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_{aA}) d^3 r_{aA}$ devient :

$$\int e^{-i\vec{k}_b \cdot \vec{r}_{aA}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{aA}} e^{i\vec{k}_a \cdot \vec{r}_{aA}} d^3 \vec{r}_{aA} \\ = \int e^{i(\vec{k}_a - \vec{k}_b + \vec{q}) \cdot \vec{r}_{aA}} d^3 \vec{r}_{aA} = (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_a - \vec{k}_b + \vec{q}) \quad (IV.7)$$

L'éq. (IV.6) s'écrit:

$$T_{M_B m_b M_A m_a}(q) = 2\mathcal{N} (2\pi)^3 4\pi \delta_{T_A, T_B} \delta_{M_{T_A}, M_{T_B}} \\ \sum_{\substack{\ell j_p m_{j_p} \\ \ell' m' \lambda \lambda' \\ \nu \nu' j_c m_{j_c}}} \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \langle S_a m'_a j_p m_{j_p} | S_b m'_b \rangle \\ \langle \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle \\ \int d_{\nu \nu'}^{\lambda \lambda'}(q) \mathcal{K}_{\ell \lambda j_p}(q) Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}) \mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' 0}(q) i^{-\ell'} Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{q}) \\ \delta(\vec{k}_a - \vec{k}_b + \vec{q}) d^3 \vec{q} \quad (IV.8a)$$

Si on écrit:

$$Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}) Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{q}) = \sum_{L_{tr} M_{L_{tr}}} \frac{\hat{\ell} \hat{\ell}'}{\sqrt{4\pi \hat{L}_{tr}}} \langle \ell 0 \ell' 0 | L_{tr} 0 \rangle \langle \ell m \ell' m' | L_{tr} M_{L_{tr}} \rangle Y_{L_{tr}}^{M_{L_{tr}}*}(\hat{q})$$

on a:

$$\begin{aligned}
T_{M_B m_b M_A m_a}(q) &= 2\mathcal{N} (2\pi)^3 4\pi \delta_{T_A, T_B} \delta_{M_{T_A}, M_{T_B}} \\
\sum_{\substack{\ell j_p m_{j_p} \\ \ell' m' \lambda \lambda' \\ \nu \nu' j_c m_{j_c} \\ L_{tr} M_{L_{tr}}}} &< \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \langle S_a m_a j_p m_{j_p} | S_b m_b \rangle \langle \ell 0 \ell' 0 | L_{tr} 0 \rangle \\
&< \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle \langle \ell m \ell' m' | L_{tr} M_{L_{tr}} \rangle \\
&\frac{\hat{\ell} \hat{\ell}'}{\sqrt{4\pi \hat{L}_{tr}}} \int d_{\nu \nu'}^{\lambda \lambda'}(q) \mathcal{K}_{\ell \lambda j_p}(q) \mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' 0}(q) i^{-\ell'} Y_{L_{tr}}^{M_{L_{tr}}*}(\hat{q}) \\
&\delta(\vec{k}_a - \vec{k}_b + \vec{q}) d^3 \vec{q}
\end{aligned} \tag{IV.8b}$$

En remplaçant \mathcal{N} par son expression (IV.1c), l'amplitude de transition s'écrit finalement:

$$\begin{aligned}
T_{M_B m_b M_A m_a}(q) &= -\frac{32\pi^2 \hbar^2}{m} \delta_{T_A, T_B} \delta_{M_{T_A}, M_{T_B}} \\
\sum_{\substack{\ell j_p m_{j_p} \\ \ell' m' \lambda \lambda' \\ \nu \nu' j_c m_{j_c} \\ L_{tr} M_{L_{tr}}}} &< \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \langle S_a m_a j_p m_{j_p} | S_b m_b \rangle \langle \ell 0 \ell' 0 | L_{tr} 0 \rangle \\
&< \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle \langle \ell m \ell' m' | L_{tr} M_{L_{tr}} \rangle \\
&\frac{\hat{\ell} \hat{\ell}'}{\sqrt{4\pi \hat{L}_{tr}}} \int d_{\nu \nu'}^{\lambda \lambda'}(q) \mathcal{K}_{\ell \lambda j_p}(q) \mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' 0}(q) i^{-\ell'} Y_{L_{tr}}^{M_{L_{tr}}*}(\hat{q}) \\
&\delta(\vec{k}_a - \vec{k}_b + \vec{q}) d^3 \vec{q}
\end{aligned} \tag{IV.8c}$$

IV.2 Developpement en Ondes Distordues

Les expressions pour les ondes distordues dans la voie d'entrée $X_{m_a m'_a}^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_{aA})$ et de sortie $X_{m_b m'_b}^{(-)*}(\vec{k}_b, \vec{r}_{aA})$ sont les suivantes:

$$X_{m_a m'_a}^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_{aA}) = \frac{4\pi}{k_a r_{aA}} \sum_{\substack{L_a M_{L_a} \\ j_a m_{j_a}}} \langle L_a M_{L_a} S_a m_a | j_a m_{j_a} \rangle \langle L_a M'_{L_a} S_a m'_a | j_a m_{j_a} \rangle \\
i^{L_a} U_{L_a S_a j_a}(r_{aA}) Y_{L_a}^{M_{L_a}*}(\hat{k}_a) Y_{L_a}^{M'_{L_a}}(\hat{r}_{aA}) \tag{IV.9a}$$

$$X_{m_b m'_b}^{(-)*}(\vec{k}_b, \vec{r}_{aA}) = \frac{4\pi}{k_b r_{aA}} \sum_{\substack{L_b M_{L_b} \\ j_b m_{j_b}}} \langle L_b M_{L_b} S_b m_b | j_b m_{j_b} \rangle \langle L_b M'_{L_b} S_b m'_b | j_b m_{j_b} \rangle \\
i^{-L_b} U_{L_b S_b j_b}(r_{aA}) Y_{L_b}^{M_{L_b}}(\hat{k}_b) Y_{L_b}^{M'_{L_b}*}(\hat{r}_{aA}) \tag{IV.9b}$$

Si on choisit la direction O_z suivant \vec{k}_a on a $Y_{L_a}^{M_{L_a}^*}(\hat{k}_a) = \frac{\hat{L}_a}{\sqrt{4\pi}} \delta_{M_{L_a}, 0}$ donc:

$$X_{m_a m'_a}^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_{aA}) = \frac{4\pi}{k_a r_{aA}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\substack{L_a j_a \\ M'_{L_a} m_{j_a}}} \langle L_a 0 \ S_a m_a \mid j_a m_{j_a} \rangle \langle L_a M'_{L_a} \ S_a m'_a \mid j_a m_{j_a} \rangle \\ i^{L_a} \hat{L}_a U_{L_a S_a j_a}(r_{aA}) Y_{L_a}^{M'_{L_a}}(\hat{r}_{aA}) \quad (IV.9c)$$

Reprenons l'expression générale de l'amplitude de transition (IV.6):

$$T_{M_B m_b M_A m_a} \\ = 2\mathcal{N} 4\pi \sum_{\substack{\ell j_p m_{j_p} \\ \ell' m' \lambda \lambda' \\ \nu \nu' j_c m_{j_c}}} \langle \ell m \lambda \nu \mid j_p m_{j_p} \rangle \langle \ell' m' \lambda' \nu' \mid j_c m_{j_c} \rangle \\ \langle J_A M_A j_c m_{j_c} \mid J_B M_B \rangle \delta_{T_A, T_B} \delta_{M_{T_A}, M_{T_B}} \\ \int q^2 dq B(q) d_{\nu \nu'}^{\lambda \lambda'}(q) \mathcal{K}_{\ell \lambda j_p}(q) i^{-\ell'} \mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' 0}(q) \quad (IV.10)$$

où nous avons défini le terme $B(q)$:

$$B(q) = \sum_{m'_a m'_b} \langle S_a m'_a \ j_p m_{j_p} \mid S_b m'_b \rangle \int X_{m_b m'_b}^{(-)*}(\vec{k}_b, \vec{r}_{aA}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{aA}} \\ Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}) Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{q}) X_{m_a m'_a}^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_{aA}) d^3 \vec{r}_{aA} d\hat{q} \quad (IV.11)$$

Developpons en multipoles le terme $e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{aA}}$:

$$e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_{aA}} = 4\pi i^{L'_{tr}} j_{L'_{tr}}(qr_{aA}) Y_{L'_{tr}}^{M'_{L'_{tr}}}(\hat{q}) Y_{L'_{tr}}^{M'_{L'_{tr}*}(\hat{r}_{aA}) \quad (IV.12)$$

En rappelant que :

$$i) \int Y_{\ell}^{m*}(\hat{q}) Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{q}) Y_{L'_{tr}}^{M'_{L'_{tr}}}(\hat{q}) d\hat{q} = \frac{\hat{\ell} \hat{\ell}'}{\sqrt{4\pi} \hat{L}'_{tr}} \langle \ell 0 \ \ell' 0 \mid L'_{tr} 0 \rangle \langle \ell m \ \ell' m' \mid L'_{tr} M'_{L'_{tr}} \rangle \quad (IV.13a)$$

$$ii) \int Y_{L_b}^{M'_{L_b}*}(\hat{r}_{aA}) Y_{L'_{tr}}^{M'_{L'_{tr}*}(\hat{r}_{aA}) Y_{L_a}^{M'_{L_a}}(\hat{r}_{aA}) d\hat{r}_{aA} = \frac{\hat{L}_b \hat{L}'_{tr}}{\sqrt{4\pi} \hat{L}_a} \langle L_b 0 \ L'_{tr} 0 \mid L_a 0 \rangle \\ \langle L_b M'_{L_b} \ L'_{tr} M'_{L'_{tr}} \mid L_a M'_{L_a} \rangle \quad (IV.13b)$$

et en réduisant les coefficients de Clebsch-Gordan qui apparaissent, on obtient:

$$\begin{aligned}
B = & \sum_{L_a L_b} i^{L_a - L_b + L_{tr}} \hat{L}_a \langle L_a 0 S_a m_a | j_a m_{j_a} \rangle \langle L_b M_{L_b} S_b m_b | j_b m_{j_b} \rangle Y_{L_b}^{M_{L_b}}(\hat{k}_b) \\
& \frac{j_a j_b}{m_{j_a} m_{j_b}} \frac{\hat{j}_a}{\hat{j}_p} \hat{S}_b \frac{\hat{\ell} \hat{\ell}'}{\sqrt{4\pi}} \hat{L}_b (2j_{tr} + 1) \langle L_b 0 L_{tr} 0 | L_a 0 \rangle \langle \ell 0 \ell' 0 | L_{tr} 0 \rangle \\
& \left. \begin{array}{ccc} L_{tr} M_{L_{tr}} & L_a & L_{tr} & L_b \\ j_{tr} m_{j_{tr}} & S_a & j_p & S_b \\ & j_a & j_{tr} & j_b \end{array} \right\} \langle L_{tr} M_{L_{tr}} j_{tr} m_{j_{tr}} | j_p -m_{j_p} \rangle \\
& \langle j_a m_{j_a} j_{tr} -m_{j_{tr}} | j_b m_{j_b} \rangle \langle \ell m \ell' m' | L_{tr} -M_{L_{tr}} \rangle \\
& \frac{(4\pi)^2}{k_a k_b} \int dr_{aA} U_{L_b S_b j_b}(r_{aA}) U_{L_a S_a j_a}(r_{aA}) j_{L_{tr}}(qr_{aA})
\end{aligned} \tag{IV.14}$$

En remplaçant \mathcal{N} par son expression (IV.1c), l'amplitude de transition s'écrit:

$$\begin{aligned}
T_{M_B m_b M_A m_a} &= 2 \left(-\frac{4\pi \hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \right) 4\pi \\
\sum & \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle \delta_{T_A, T_B} \delta_{M_{T_A}, M_{T_B}} \\
& i^{L_a - L_b + L_{tr}} \langle L_a 0 S_a m_a | j_a m_{j_a} \rangle \langle L_b M_{L_b} S_b m_b | j_b m_{j_b} \rangle Y_{L_b}^{M_{L_b}}(\hat{k}_b) \\
& \frac{\hat{j}_a}{\hat{j}_p} \hat{L}_a \hat{S}_b \frac{\hat{\ell} \hat{\ell}'}{\sqrt{4\pi}} \hat{L}_b \hat{j}_{tr}^2 \langle L_b 0 L_{tr} 0 | L_a 0 \rangle \langle \ell 0 \ell' 0 | L_{tr} 0 \rangle \\
& \left\{ \begin{array}{ccc} L_a & L_{tr} & L_b \\ S_a & j_p & S_b \\ j_a & j_{tr} & j_b \end{array} \right\} \langle L_{tr} M_{L_{tr}} j_{tr} m_{j_{tr}} | j_p m_{j_p} \rangle (-1)^{L_{tr} + j_{tr} - j_p} \\
& \langle j_a m_{j_a} j_{tr} m_{j_{tr}} | j_b m_{j_b} \rangle \langle \ell m \ell' m' | L_{tr} M_{L_{tr}} \rangle \\
& \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \langle \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle \\
& \frac{(4\pi)^2}{k_a k_b} \int dr_{aA} U_{L_b S_b j_b}(r_{aA}) U_{L_a S_a j_a}(r_{aA}) \\
& \int q^2 dq j_{L_{tr}}(qr_{aA}) d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(q) \mathcal{K}_{\ell \lambda j_p}(q) i^{-\ell'} \mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' 0}(q)
\end{aligned} \tag{IV.15}$$

Approximation de l'amplitude moyenne.

On suppose que dans le domaine angulaire exploré, l'opérateur $M_i(q)$ peut être remplacé par une valeur moyenne:

$$M_i(q) = \overline{M}_i(\overline{q})$$

On s'attend à ce que les valeurs $q \approx 0$ vont dominer aux angles avant, comme le prédit l'approximation des ondes planes. Dans ces conditions:

$$V_i \rightarrow \overline{V}_i = (2\pi)^3 \delta(\vec{r}_{aA} - \vec{\rho}_i - \frac{\vec{r}_{12}}{2})$$

On peut corriger cette approximation en tenant compte de la variation angulaire de la matrice Nucléon-Nucléon. L'amplitude de transition (IV.2) s'écrit alors:

$$\begin{aligned} & T_{M_B m_b M_A m_a} \\ &= 2\mathcal{N}(2\pi)^3 \sum_{m'_a m'_b} \int X_{m_b m'_b}^{(-)*}(\vec{k}_b, \vec{r}_{aA}) d^3 \vec{r}_{aA} \sum_{i=1}^A \langle \Phi_{S_b}^{m'_b}(\vec{r}_{12}) \Psi_{J_B}^{M_B}(\vec{\rho}_i) | d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(\overline{q}) \sigma_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \\ & \quad \delta(\vec{r}_{aA} - \vec{\rho}_i - \frac{\vec{r}_{12}}{2}) | \Phi_{S_a}^{m'_a}(\vec{r}_{12}) \Psi_{J_A}^{M_A}(\vec{\rho}_i) \rangle X_{m_a m'_a}^{(+)}(\vec{k}_a, \vec{r}_{aA}) \end{aligned} \quad (IV.16)$$

On définit maintenant:

$$\frac{\vec{y}_i}{2} = \vec{r}_{aA} - \vec{\rho}_i \quad (IV.17a)$$

$$\delta(\frac{\vec{y}_i}{2} - \frac{\vec{r}_{12}}{2}) = 2^3 \delta(\vec{y}_i - \vec{r}_{12}) \quad (IV.17b)$$

et on utilise le développement multipolaire:

$$\delta(\vec{y}_i - \vec{r}_{12}) = \frac{\delta(y_i - r_{12})}{r_{12}^2} \sum_{\ell m} i^\ell Y_\ell^m(\hat{r}_{12}) i^{-\ell} Y_\ell^{m*}(\hat{y}_i) \quad (IV.18)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^A \langle \Phi_{S_b}^{m'_b}(\vec{r}_{12}) \Psi_{J_B}^{M_B}(\vec{\rho}_i) | d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(\bar{q}) \sigma_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \delta(\vec{r}_{aA} - \vec{\rho}_i - \frac{\vec{r}_{12}}{2}) | \Phi_{S_a}^{m'_a}(\vec{r}_{12}) \Psi_{J_A}^{M_A}(\vec{\rho}_i) \rangle \\
&= 2^3 d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(\bar{q}) \sum_{i=1}^A \langle \Psi_{J_B}^{M_B}(\vec{\rho}_i) | \bar{\mathcal{Z}}(y_i) i^{-\ell} Y_\ell^{m*}(\hat{y}_i) \sigma_{\nu'}^{\lambda'} | \Psi_{J_A}^{M_A}(\vec{\rho}_i) \rangle
\end{aligned} \tag{IV.19a}$$

avec:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{Z}}(y_i) &= \sum_{\ell m} \langle \Phi_{S_b}^{m'_b}(\vec{r}_{12}) | \frac{\delta(y_i - r_{12})}{r_{12}^2} i^\ell Y_\ell^m(\hat{r}_{12}) \sigma_\nu^\lambda | \Phi_{S_a}^{m'_a}(\vec{r}_{12}) \rangle \\
&= \sum \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle i^{L-L'-\ell} U_{L'}(y_i) U_L(y_i) \\
&\quad \langle [Y_{L'}(\vec{r}_{12}) \mathcal{X}_1(1,2)]_{S_b}^{m_b} | [Y_\ell(\vec{r}_{12}) \sigma^\lambda]_{j_p}^{m_{j_p}} | [Y_L(\vec{r}_{12}) \mathcal{X}_1(1,2)]_{S_a}^{m_a} \rangle
\end{aligned} \tag{IV.19b}$$

En utilisant la relation (III.18), on obtient:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{Z}}(y_i) &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}} \sum \langle S_a m'_a j_p m_{j_p} | S_b m'_b \rangle \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle (-1)^{\lambda+S_a+j_p-S_b} \hat{j}_p \hat{\ell} \hat{S}_a \\
&\quad \sqrt{\lambda+1} i^{L-L'-\ell} \hat{L} \langle L0\ell0 | L'0 \rangle \left\{ \begin{matrix} L' & \ell & L \\ 1 & \lambda & 1 \\ S_b & j_p & S_a \end{matrix} \right\} U_{L'}(y_i) U_L(y_i)
\end{aligned} \tag{IV.20}$$

On définit:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{K}}_{\ell \lambda j_p}(y_i) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (-1)^{\lambda+S_a+j_p-S_b} \hat{j}_p \hat{\ell} \hat{S}_a \sqrt{\lambda+1} \\
&\quad \sum_{LL'} i^{L-L'-\ell} \hat{L} \langle L0\ell0 | L'0 \rangle \left\{ \begin{matrix} L' & \ell & L \\ 1 & \lambda & 1 \\ S_b & j_p & S_a \end{matrix} \right\} U_{L'}(y_i) U_L(y_i)
\end{aligned} \tag{IV.21}$$

ce qui donne:

$$\bar{\mathcal{Z}}(y_i) = \sum_{j_p \ell m} \langle S_a m'_a j_p m_{j_p} | S_b m'_b \rangle \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \bar{\mathcal{K}}_{\ell \lambda j_p}(y_i) \tag{IV.22}$$

L'expression (IV.19a) devient:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^A \langle \Phi_{S_b}^{m'_b}(\vec{r}_{12}) \Psi_{J_B}^{M_B}(\vec{\rho}_i) | d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(\bar{q}) \sigma_{\nu}^{\lambda} \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \delta(\vec{r}_{aA} - \vec{\rho}_i - \frac{\vec{r}_{12}}{2}) | \Phi_{S_a}^{m'_a}(\vec{r}_{12}) \Psi_{J_A}^{M_A}(\vec{\rho}_i) \rangle \\
& = 2^3 d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(\bar{q}) \sum_{j_p \ell m} \langle S_a m'_a j_p m_{j_p} | S_b m'_b \rangle \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \\
& \quad \sum_{i=1}^A \langle \Psi_{J_B}^{M_B}(\vec{\rho}_i) | \bar{\mathcal{K}}_{\ell \lambda j_p}(\mathbf{y}_i) i^{-\ell} Y_{\ell}^{m*}(\hat{\mathbf{y}}_i) \sigma_{\nu'}^{\lambda'} | \Psi_{J_A}^{M_A}(\vec{\rho}_i) \rangle
\end{aligned} \tag{IV.23}$$

On développe en multipôles:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{K}}_{\ell \lambda j_p}(\mathbf{y}_i) i^{-\ell} Y_{\ell}^{m*}(\hat{\mathbf{y}}_i) & = \bar{\mathcal{K}}_{\ell \lambda j_p}(\mathbf{y}_i) i^{-\ell} (-1)^m Y_{\ell}^{-m}(\hat{\mathbf{y}}_i) \\
& = i^{-\ell} (-1)^m \sum [\mathcal{F}(r_{aA}, \rho_i) Y_{L'_{tr}}(\hat{r}_{aA}) Y_{\ell'}(\hat{\rho}_i)]_{\ell}^{-m}
\end{aligned} \tag{IV.24a}$$

avec:

$$\mathcal{F}(r_{aA}, \rho_i) \equiv \mathcal{F}_{L'_{tr}, \ell', \ell, \lambda, j_p}(r_{aA}, \rho_i) \tag{IV.24b}$$

L'expression (IV.23) devient alors:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^A \langle \Phi_{S_b}^{m'_b}(\vec{r}_{12}) \Psi_{J_B}^{M_B}(\vec{\rho}_i) | d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(\bar{q}) \sigma_{\nu}^{\lambda} \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \delta(\vec{r}_{aA} - \vec{\rho}_i - \frac{\vec{r}_{12}}{2}) | \Phi_{S_a}^{m'_a}(\vec{r}_{12}) \Psi_{J_A}^{M_A}(\vec{\rho}_i) \rangle \\
& = 2^3 d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(\bar{q}) \sum i^{-\ell-L'_{tr}+\ell'} (-1)^{\ell'} \frac{\hat{\ell}}{\hat{L}'_{tr}} \langle S_a m'_a j_p m_{j_p} | S_b m'_b \rangle \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \\
& \quad \langle \ell m \ell' m' | L'_{tr} M'_{L'_{tr}} \rangle i^{L'_{tr}} Y_{L'_{tr}}^{M'_{L'_{tr}*}}(\hat{r}_{aA}) \\
& \quad \sum_{i=1}^A \langle \Psi_{J_B}^{M_B}(\vec{\rho}_i) | \mathcal{F}(r_{aA}, \rho_i) i^{-\ell'} Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\rho}_i) \sigma_{\nu'}^{\lambda'} | \Psi_{J_A}^{M_A}(\vec{\rho}_i) \rangle
\end{aligned} \tag{IV.25}$$

et d'après l'appendice (A4) (relations A4.8 et A4.10b):

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^A \langle \Phi_{S_b}^{m'_b}(\vec{r}_{12}) \Psi_{J_B}^{M_B}(\vec{\rho}_i) | d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(\vec{q}) \sigma_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \delta(\vec{r}_{aA} - \vec{\rho}_i - \frac{\vec{r}_{12}}{2}) | \Phi_{S_a}^{m'_a}(\vec{r}_{12}) \Psi_{J_A}^{M_A}(\vec{\rho}_i) \rangle \\
& = 2^3 d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(\vec{q}) \sum i^{-\ell-L'_{tr}-\ell'} \frac{\hat{\ell}}{\hat{L}'_{tr}} \bar{\mathcal{J}}_{L'_{tr}, \lambda \ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' 0}(r_{aA}) i^{L'_{tr}} Y_{L'_{tr}}^{M'_{L'_{tr}}}{}^*(\hat{r}_{aA}) \\
& \quad \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle \langle S_a m'_a j_p m_{j_p} | S_b m'_b \rangle \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \\
& \quad \langle \ell m \ell' m' | L'_{tr} M'_{L'_{tr}} \rangle \langle \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle
\end{aligned} \tag{IV.26}$$

L'amplitude de transition (IV.16) devient finalement:

$$\begin{aligned}
T_{M_B m_b M_A m_a} & = 2 \left(-\frac{4\pi \hbar^2}{m} \frac{1}{(2\pi)^3} \right) \frac{(2\pi)^3 2^3}{\sqrt{4\pi}} \\
& \sum \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle \delta_{T_A, T_B} \delta_{M_{T_A}, M_{T_B}} \\
& \quad \langle L_a 0 \ S_a m_a | j_a m_{j_a} \rangle \langle L_b M_{L_b} \ S_b m_b | j_b m_{j_b} \rangle Y_{L_b}^{M_{L_b}}(\hat{k}_b) \\
& \quad i^{-\ell-L'_{tr}-\ell'} \hat{\ell} \hat{L}_a \frac{\hat{L}_b}{\sqrt{4\pi}} \frac{\hat{j}_a}{\hat{j}_p} \hat{j}_{tr}^2 \hat{S}_b i^{L_a-L_b+L'_{tr}} \langle L_b 0 \ L_{tr} 0 | L_a 0 \rangle \\
& \quad \left\{ \begin{array}{ccc} L_a & L_{tr} & L_b \\ S_a & j_p & S_b \\ j_a & j_{tr} & j_b \end{array} \right\} \langle L_{tr} M_{L_{tr}} \ j_{tr} m_{j_{tr}} | j_p m_{j_p} \rangle (-1)^{L_{tr}+j_{tr}-j_p} \\
& \quad \langle j_a m_{j_a} \ j_{tr} m_{j_{tr}} | j_b m_{j_b} \rangle \langle \ell m \ell' m' | L_{tr} M_{L_{tr}} \rangle \\
& \quad d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(\vec{q}) \langle \ell m \lambda \nu | j_p m_{j_p} \rangle \langle \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle \\
& \quad \frac{(4\pi)^2}{k_a k_b} \int dr_{aA} U_{L_b S_b j_b}(r_{aA}) \bar{\mathcal{J}}_{L'_{tr}, \lambda \ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' 0}(r_{aA}) U_{L_a S_a j_a}(r_{aA})
\end{aligned} \tag{IV.27}$$

APPENDICE 1: Matrice Nucléon-Nucléon

Nous reprenons l'expression de la matrice nucléon-nucléon: (éq. 1.2):

$$M_{N-N} = \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \nu\nu'}} \sigma_\nu^\lambda \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \left(d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(0) + d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}(1) \tau_0^1 \tau_0'^1 \right) \quad (A1.1)$$

avec $-\lambda \leq \nu \leq \lambda$ $\lambda = 0$ ou 1
 $-\lambda' \leq \nu' < \lambda'$ $\lambda' = 0$ ou 1

Les composantes des opérateurs de spin s'écrivent : $\sigma^0 = 1$, $\sigma^1 = \vec{\sigma}$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_1^1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + i\sigma_y) & \sigma_x &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1^1 - \sigma_{-1}^1) \\ \sigma_0^1 &= \sigma_z & \sigma_y &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_1^1 + \sigma_{-1}^1) \\ \sigma_{-1}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x - i\sigma_y) & \sigma_z &= \sigma_0^1 \end{aligned} \quad (A1.2)$$

Les $d_{\nu\nu'}^{\lambda\lambda'}$ sont reliés aux coefficients de la matrice M de la façon suivante, dans la convention de Madison:

$$\begin{aligned} \lambda + \lambda' = 0: & \quad d_{00}^{00} = A \\ \lambda + \lambda' = 1: & \quad d_{0-1}^{01} = d_{-10}^{10} = d_{01}^{01} = d_{10}^{10} = \frac{iC}{\sqrt{2}} \\ & \quad d_{00}^{01} = d_{00}^{10} = 0 \\ \lambda + \lambda' = 2: & \quad d_{00}^{11} = I \\ & \quad d_{0-1}^{11} = d_{-10}^{11} = \frac{H}{\sqrt{2}} \\ & \quad d_{01}^{11} = d_{10}^{11} = \frac{-H}{\sqrt{2}} \\ & \quad d_{-1-1}^{11} = d_{11}^{11} = \frac{-(B-G)}{2} \\ & \quad d_{1-1}^{11} = d_{-11}^{11} = \frac{-(B+G)}{2} \end{aligned}$$

où les coefficients G, H, I interviennent à cause du changement de référentiel et ils sont reliés aux coefficients de l'éq (1.1) par

$$G = E \cos^2(\theta/2) + F \sin^2(\theta/2)$$

$$H = \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)(F - E)$$

$$I = F \cos^2(\theta/2) + E \sin^2(\theta/2)$$

où θ est l'angle entre \vec{k}_i et \vec{k}_f

APPENDICE 2: Théorème de Wigner-Eckart

Définition

Considérons un état défini par l'ensemble de ses nombres quantiques α , son spin J et composante M . Soit T_q^k un opérateur tensoriel irréductible défini dans l'espace auquel appartient l'état $|\alpha J M\rangle$, le théorème de Wigner-Eckart s'énonce de la façon suivante:

$$\langle \alpha_2 J_2 M_2 | T_q^k | \alpha_1 J_1 M_1 \rangle = \langle k q J_1 M_1 | J_2 M_2 \rangle \langle \alpha_2 J_2 || T^k || \alpha_1 J_1 \rangle. \quad (A2.1)$$

Cas particulier : $T_q^k = \mathcal{I}$, où \mathcal{I} est l'opérateur identité:

$$\langle \alpha_2 J_2 M_2 | \mathcal{I} | \alpha_1 J_1 M_1 \rangle = \langle 0 0 J_1 M_1 | J_2 M_2 \rangle \langle \alpha_2 J_2 || \mathcal{I} || \alpha_1 J_1 \rangle = \delta_{J_2 J_1} \delta_{M_2 M_1} \delta_{\alpha_2 \alpha_1}$$

ce qui entraîne que:

$$\langle \alpha_2 J_2 || \mathcal{I} || \alpha_1 J_1 \rangle = \delta_{J_2 J_1} \delta_{\alpha_2 \alpha_1} \quad (A2.2)$$

Propriétés

Si l'opérateur T agit dans deux espaces différents nous avons:

$$\begin{aligned} & \langle [\Phi^{j'_1}(1)\Phi^{j'_2}(2)]_{M'}^{j'} || [T^{k_1}(1)T^{k_2}(2)]_q^k || [\Phi^{j_1}(1)\Phi^{j_2}(2)]_M^j \rangle \\ & = \langle K q J M | J' M' \rangle \langle [\Phi^{j'_1}(1)\Phi^{j'_2}(2)]_{M'}^{j'} || [T^{k_1}(1)T^{k_2}(2)]_q^k || [\Phi^{j_1}(1)\Phi^{j_2}(2)]_M^j \rangle \end{aligned} \quad (A2.3a)$$

avec

$$\begin{aligned} & \langle [\Phi^{j'_1}(1)\Phi^{j'_2}(2)]_{M'}^{j'} || [T^{k_1}(1)T^{k_2}(2)]_q^k || [\Phi^{j_1}(1)\Phi^{j_2}(2)]_M^j \rangle \\ & = \hat{j}'_1 \hat{j}'_2 \hat{k} \hat{J} \left\{ \begin{array}{ccc} k_1 & j_1 & j'_1 \\ k_2 & j_2 & j'_2 \\ k & J & J' \end{array} \right\} \langle j'_1 || T^{k_1} || j_1 \rangle \langle j'_2 || T^{k_2} || j_2 \rangle \end{aligned} \quad (A2.3b)$$

et $\hat{x} = \sqrt{2x+1}$

Cas particuliers:

1) $T_q^k(2)$ est l'operateur identité:

$$\begin{aligned} & \langle [\Phi^{j'_1}(1)\Phi^{j'_2}(2)]_{M'}^{j'} \mid T_q^k(1) \mid [\Phi^{j_1}(1)\Phi^{j_2}(2)]_M^j \rangle \\ & = \langle KqJM \mid J'M' \rangle \langle [\Phi^{j'_1}(1)\Phi^{j'_2}(2)]^{j'} \parallel T^k(1) \parallel [\Phi^{j_1}(1)\Phi^{j_2}(2)]^j \rangle \end{aligned} \quad (A2.4)$$

avec

$$\langle [\Phi^{j'_1}(1)\Phi^{j'_2}(2)]^{j'} \parallel T^k(1) \parallel [\Phi^{j_1}(1)\Phi^{j_2}(2)]^j \rangle = \hat{j}'_1 \hat{J}W(kj_1 J' j'_2; j'_1 J) \langle j'_1 \parallel T^k(1) \parallel J_1 \rangle \delta_{j_2 j'_2}$$

2) $T_q^k(1)$ est l'operateur identité:

$$\begin{aligned} & \langle [\Phi^{j'_1}(1)\Phi^{j'_2}(2)]_{M'}^{j'} \mid T_q^k(2) \mid [\Phi^{j_1}(1)\Phi^{j_2}(2)]_M^j \rangle \\ & = \langle KqJM \mid J'M' \rangle \langle [\Phi^{j'_1}(1)\Phi^{j'_2}(2)]^{j'} \parallel T^k(2) \parallel [\Phi^{j_1}(1)\Phi^{j_2}(2)]^j \rangle \end{aligned} \quad (A2.5)$$

avec

$$\begin{aligned} & \langle [\Phi^{j'_1}(1)\Phi^{j'_2}(2)]^{j'} \parallel T^k(2) \parallel [\Phi^{j_1}(1)\Phi^{j_2}(2)]^j \rangle \\ & = (-1)^{k+J-J'} (-1)^{k+j_2-j'_2} \hat{j}'_2 \hat{J}W(j'_1 j_2 J' k; J j'_2) \langle \Phi^{j'_2}(2) \parallel T^k(2) \parallel \Phi^{j_2}(2) \rangle \delta_{j_1 j'_1} \end{aligned}$$

3) Produit d'operateurs dans le même espace:

$$\begin{aligned} & \langle \alpha'_1 J'_1 M'_1 \mid [T_q^{k_1}(1) T_q^{k'_1}(1)]_Q^K \mid \alpha_1 J_1 M_1 \rangle \\ & = \langle KQJ_1 M_1 \mid J'_1 M'_1 \rangle \langle \alpha'_1 J'_1 \parallel [T_q^{k_1}(1) T_q^{k'_1}(1)]^K \parallel \alpha_1 J_1 \rangle \end{aligned} \quad (A2.6)$$

avec

$$\begin{aligned} & \langle \alpha'_1 J'_1 \parallel [T_q^{k_1}(1) T_q^{k'_1}(1)]^K \parallel \alpha_1 J_1 \rangle \\ & = \hat{K} \sum_{J_\alpha} \hat{J}W(k_1 k'_1 J'_1 J_1; K J) \langle \alpha'_1 J'_1 \parallel T^{k_1} \parallel \alpha J \rangle \langle \alpha J \parallel T^{k'_1} \parallel \alpha_1 J_1 \rangle \end{aligned}$$

Eléments de matrices réduits particuliers:

$$\langle Y_{l'} \| Y_k \| Y_l \rangle = \frac{\hat{k}\hat{l}}{\sqrt{4\pi\hat{l}'}} \langle k0l0 | l'0 \rangle \quad (A2.7)$$

$$\langle J' \| \vec{J} \| J \rangle = -\delta_{JJ'} \sqrt{J(J+1)} \quad (A2.8)$$

Exemples:

$$\langle 1/2 \| \vec{s} \| 1/2 \rangle = -\sqrt{3}/2 \quad (A2.9)$$

$$\langle 1/2 \| \vec{\sigma} \| 1/2 \rangle = -\sqrt{3} \quad (A2.10)$$

$$\langle 1/2 \| \sigma^\lambda \| 1/2 \rangle = (-1)^\lambda \hat{\lambda} \quad (A2.11)$$

APPENDICE 3: Calcul des OBSERVABLES de spin

La matrice de transition étant calculée pour une réaction donnée $A(a,b)B$ et J_A, J_B, S_a et S_b étant respectivement le spin de la cible, du noyau résiduel, du projectile et de l'éjectile, toutes les observables se calculent à partir de l'élément de matrice :

$$\langle J_B M_B S_b m_b | T | J_A M_A S_a m_a \rangle \equiv \langle M_B m_b | T | M_A m_a \rangle$$

La section efficace différentielle s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{\mu_a}{2J_A + 1} \frac{\mu_b}{2S_a + 1} \frac{K_b}{K_a} T r(TT^+) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{\mu_a}{2J_A + 1} \frac{\mu_b}{2S_a + 1} \frac{K_b}{K_a} \sum_{\substack{M_A m_a \\ M_B m_b}} |T_{M_B m_b M_A m_a}|^2 \end{aligned} \quad (A3.1)$$

μ_a et μ_b étant les masses réduites dans les voies initiales et finales. Plus généralement, aux observables O^a , O^b associées respectivement au projectile et à l'éjectile, correspondent une grandeur physique que nous noterons $\overline{O^a O^b}$ définie par:

$$\overline{O^a O^b} = \frac{T r(T O^a T^+ O^b)}{T r(TT^+)} \quad (A3.2)$$

Développons la trace du numérateur:

$$\begin{aligned} T r(T O^a T^+ O^b) &= \sum_{M_B m_b} \langle M_B m_b | T O^a T^+ O^b | M_B m_b \rangle \\ &= \sum_{\substack{M_B m_b M_A m_A \\ M'_A m'_a M'_B m'_b}} \langle M_B m_b | T | M_A m_a \rangle \langle M_A m_a | O^a | M'_A m'_a \rangle \\ &\quad \langle M'_A m'_a | T^+ | M'_B m'_b \rangle \langle M'_B m'_b | O^b | M_B m_b \rangle \end{aligned}$$

Les opérateurs O^a et O^b n'agissent respectivement que dans l'espace des spins du projectile et de l'éjectile, en conséquence on a $\langle M_A m_a | O^a | M'_A m'_a \rangle \propto \delta_{M_A M'_A}$ et $\langle M'_B m'_b | O^b | M_B m_b \rangle \propto \delta_{M_B M'_B}$.

D'où:

$$\text{Tr}(TO^a T^+ O^b) = \sum_{\substack{M_B m_b m'_b \\ M_A m_a m'_a}} \langle M_B m_b | T | M_A m_a \rangle [O^a]_{m_a m'_a} \langle M_A m'_a | T^+ | M_B m'_b \rangle [O^b]_{m'_b m_b}$$

Ce qui donne finalement

$$\text{Tr}(TO^a T^+ O^b) = \sum_{\substack{m_a m'_a \\ m_b m'_b}} Y(m_b, m'_b, m_a, m'_a) [O^a]_{m_a m'_a} [O^b]_{m'_b m_b} \quad (\text{A3.3a})$$

avec

$$Y(m_b, m'_b, m_a, m'_a) \equiv \sum_{M_A M_B} \langle M_B m_b | T | M_A m_a \rangle \langle M_A m'_a | T^+ | M_B m'_b \rangle \quad (\text{A3.3b})$$

En particulier si $O^b = \mathcal{I}$, $\overline{O^a}$ est un pouvoir d'analyse, si $O^a = \mathcal{I}$, $\overline{O^b} = \langle O^b \rangle$ est un pouvoir polarisant.

Si O^a et (O^b) sont des observables cartésiennes, il est toujours possible de les développer sur une base d'opérateurs sphériques τ_q^k et $\tau_{q'}^{k'}$ qui obéissent au théorème de Wigner-Eckart. On peut choisir ces derniers de manière à vérifier les relations:

$$\langle S_a m_a | \tau_q^k | S_a m'_a \rangle \equiv (-1)^{S_a - m'_a} \hat{S}_a \langle S_a m_a S_a - m'_a | k q \rangle \quad (\text{A3.4a})$$

$$\langle S_b m_b | \tau_{q'}^{k'} | S_b - m'_b \rangle \equiv (-1)^{S_b + m'_b} \hat{S}_b \langle S_b m_b S_b m'_b | k' q' \rangle \quad (\text{A3.4b})$$

avec

$$0 \leq k \leq 2S_a \text{ et } -k \leq q \leq k; \quad 0 \leq k' \leq 2S_b \text{ et } -k' \leq q' \leq k' \quad (\text{A3.4c})$$

Les observables cartésiennes s'écrivent alors:

$$O^a = \sum_{ikq} \lambda_i^a \tau_q^k \quad O^b = \sum_{ik'q'} \lambda_i^b \tau_{q'}^{k'} \quad (\text{A3.5})$$

$$\overline{O^a O^b} = \sum_{ijkqk'q'} \lambda_i^a \lambda_j^b \mathcal{A}_{kq}^{k'q'} \quad (\text{A3.6})$$

avec

$$\mathcal{A}_{kq}^{k'q'} = \frac{\text{Tr}(T \tau_q^k T^+ \tau_{q'}^{k'})}{\text{Tr}(TT^+)} \quad (\text{A3.7})$$

En remplaçant dans (A3.7) les éléments de matrice des opérateurs sphériques (A3.4) on obtient:

$$\mathcal{A}_{kq}^{k'q'} = \frac{\sum_{m_b M_B} G_{m_a q}^{m_b q'}(k', k) T_{M_B m_b M_A m_a} T_{M_B m_b + q' M_A m_a - q}^*}{m_a M_A \sum_{m_b M_B} |T_{M_B m_b M_A m_a}|^2} \quad (\text{A3.8a})$$

avec

$$G_{m_a q}^{m_b q'}(k', k) = \hat{S}_a \hat{S}_b (-1)^{S_a - m_a + S_b - m_b + q} \langle S_a m_a S_a q - m_a | k q \rangle \langle S_b m_b + q' S_b - m_b | k' q' \rangle \quad (\text{A3.8b})$$

Avec ces conventions: $\mathcal{A}_{00}^{00} = 1$.

Cas particuliers:

$$G_{m_a q}^{m_b 0}(k' = 0, k) = \hat{S}_a (-1)^{S_a - m_a + q} \langle S_a m_a S_a q - m_a | k q \rangle \quad (\text{A3.9a})$$

$$G_{m_a 0}^{m_b q'}(k', k = 0) = \hat{S}_b (-1)^{S_b - m_b} \langle S_b m_b + q' S_b - m_b | k' q' \rangle \quad (\text{A3.9b})$$

La relation (A3.8a) peut encore s'écrire:

$$\mathcal{A}_{kq}^{k'q'} = \frac{\sum_{m_a m'_a m_b m'_b} Y(m_b, m'_b, m_a, m'_a) G_{m_a q}^{m_b q'}(k', k)}{\sum_{m_a m_b} Y(m_b, m_b, m_a, m_a)} \quad (\text{A3.10})$$



APPENDICE 4: Calcul du terme nucléaire.

Calcul en portée finie

Développons les quantités contenues dans $\mathcal{M}^\pm(\lambda', \nu', k')$ défini par:

$$\mathcal{M}^\pm(\lambda', \nu', k') = \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}} | \sigma_{\nu'}^{\lambda'} e^{\pm i \vec{q} \cdot \vec{\rho}_i} \tau_0^{k'} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}} \rangle \quad (A4.1)$$

et

$$\sigma_{\nu'}^{\lambda'} e^{\pm i \vec{q} \cdot \vec{\rho}_i} = 4\pi \sum_{\ell' m'} i^{\pm \ell'} j_{\ell'}(q \rho_i) Y_{\ell'}^{m' *}(\hat{q}) Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\rho}_i) \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \quad (A4.2)$$

On couple les deux derniers termes pour avoir le moment transféré dans la cible j_c, m_{j_c} :

$$Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\rho}_i) \sigma_{\nu'}^{\lambda'} = \sum_{j_c m_{j_c}} \langle \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle [Y_{\ell'}(\hat{\rho}_i) \otimes \sigma^{\lambda'}]_{j_c}^{m_{j_c}} \quad (A4.3)$$

on trouve

$$\mathcal{M}^\pm = 4\pi \sum_{\substack{\ell' m' \\ j_c m_{j_c}}} \langle \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle i^{\pm \ell'} Y_{\ell'}^{m' *}(\hat{q}) G(J_B M_B \dots)$$

avec

$$\begin{aligned} G(J_B M_B \dots) &= \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}} | j_{\ell'}(q \rho_i) [Y_{\ell'}(\hat{\rho}_i) \otimes \sigma^{\lambda'}]_{j_c}^{m_{j_c}} \tau_0^{k'} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}} \rangle \\ &= \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle \langle T_A M_{T_A} k' 0 | T_B M_{T_B} \rangle \mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' k'}(q) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' k'}(q) \\ &= (-1)^{j_c + J_A - J_B} (-1)^{k' + T_A - T_B} \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B} || j_{\ell'}(q \rho_i) [Y_{\ell'}(\hat{\rho}_i) \otimes \sigma^{\lambda'}]_{j_c} \tau^{k'} || \Psi_{J_A T_A} \rangle \end{aligned} \quad (A4.4a)$$

L'expression finale de \mathcal{M}^\pm devient alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\pm &= 4\pi \sum_{\substack{\ell' m' \\ j_c m_{j_c}}} \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle \langle T_A M_{T_A} k' 0 | T_B M_{T_B} \rangle \\ &\quad \langle \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle \mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' k'}(q) i^{\pm \ell'} Y_{\ell'}^{m' *}(\hat{q}) \end{aligned} \quad (A4.4b)$$

Developpons, à titre d'exemple, dans un modèle de particule-trou le terme contenu dans $\mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' k'}(q)$:

$$\begin{aligned}
& \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B} \parallel j_{\ell}(q\rho_i) [Y_{\ell'}(\hat{\rho}_i) \otimes \sigma^{\lambda'}]_{j_c} \tau^{k'} \parallel \Psi_{J_A T_A} \rangle \\
= & \sum_{j_p j_t} \sqrt{2} (-1)^{j_t + j_c - j_p} \frac{\hat{j}_p}{\hat{j}_c} \frac{(-1)^{k'}}{\hat{k}'} \langle j_p \ 1/2 \parallel j_{\ell}(q\rho_i) [Y_{\ell'}(\hat{\rho}_i) \otimes \sigma^{\lambda'}]_{j_c} \tau^{k'} \parallel j_t \ 1/2 \rangle \\
& \langle \Psi_{J_B T_B} \parallel [a_{j_p 1/2}^+ a_{j_t 1/2}]_{j_c k'} \parallel \Psi_{J_A T_A} \rangle
\end{aligned} \tag{A4.5}$$

et

$$\begin{aligned}
& \langle j_p \ 1/2 \parallel j_{\ell'}(q\rho_i) [Y_{\ell'}(\hat{\rho}_i) \otimes \sigma^{\lambda'}]_{j_c} \tau^{k'} \parallel j_t \ 1/2 \rangle \\
= & i^{\ell'} \sum_{\ell_p \ell_t} i^{\ell_t - \ell' - \ell_p} \sqrt{\frac{2}{4\pi}} (-1)^{k'} \hat{k}' (-1)^{\lambda'} \hat{\lambda}' \hat{j}_c \hat{\ell}' \hat{\ell}_t \hat{j}_t \langle \ell_t \ 0 \ \ell' \ 0 \mid \ell_p \ 0 \rangle \\
& \left\{ \begin{array}{ccc} \ell_p & 1/2 & j_p \\ \ell' & \lambda' & j_c \\ \ell_t & 1/2 & j_t \end{array} \right\} \int_0^{\infty} \rho^2 j_{\ell'}(q\rho) \mathcal{R}_{n_p \ell_p j_p}(\rho) \mathcal{R}_{n_t \ell_t j_t}(\rho) d\rho
\end{aligned} \tag{A4.6}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' k'}(q) \\
= & (-1)^{j_c + J_A - J_B} (-1)^{k' + T_A - T_B} \\
& i^{\ell'} \sum_{\substack{j_p j_t \\ \ell_p \ell_t}} \sqrt{2} (-1)^{j_t + j_c - j_p} \frac{\hat{j}_p}{\hat{j}_c} \frac{(-1)^{k'}}{\hat{k}'} \langle \Psi_{J_B T_B} \parallel [a_{j_p 1/2}^+ a_{j_t 1/2}]_{j_c k'} \parallel \Psi_{J_A T_A} \rangle \\
& i^{\ell_t - \ell' - \ell_p} \sqrt{\frac{2}{4\pi}} (-1)^{k'} \hat{k}' (-1)^{\lambda'} \hat{\lambda}' \hat{j}_c \hat{\ell}' \hat{\ell}_t \hat{j}_t \langle \ell_t \ 0 \ \ell' \ 0 \mid \ell_p \ 0 \rangle \\
& \left\{ \begin{array}{ccc} \ell_p & 1/2 & j_p \\ \ell' & \lambda' & j_c \\ \ell_t & 1/2 & j_t \end{array} \right\} \int_0^{\infty} \rho^2 j_{\ell'}(q\rho) \mathcal{R}_{n_p \ell_p j_p}(\rho) \mathcal{R}_{n_t \ell_t j_t}(\rho) d\rho
\end{aligned} \tag{A4.7}$$

Approximation de l'amplitude moyenne.

$$\overline{\mathcal{M}}^{(-)}(\lambda', \nu', k') = \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}} | \mathcal{F}(r, \rho_i) i^{-\ell'} Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\rho}_i) \sigma_{\nu'}^{\lambda'} \tau_0^{k'} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}} \rangle \quad (A4.8)$$

On couple les deux derniers termes pour avoir le moment transféré dans la cible j_c, m_{j_c} :

$$Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\rho}_i) \sigma_{\nu'}^{\lambda'} = \sum_{j_c m_{j_c}} \langle \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle [Y_{\ell'}(\hat{\rho}_i) \otimes \sigma^{\lambda'}]_{j_c}^{m_{j_c}} \quad (A4.9)$$

on trouve

$$\overline{\mathcal{M}}^{(-)} = \sum_{\substack{\ell' m' \\ j_c m_{j_c}}} \langle \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle \overline{G}(J_B M_B \dots)$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{G}(J_B M_B \dots) &= \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B}^{M_B M_{T_B}} | \mathcal{F}(r, \rho_i) i^{-\ell'} [Y_{\ell'}(\hat{\rho}_i) \otimes \sigma^{\lambda'}]_{j_c}^{m_{j_c}} \tau_0^{k'} | \Psi_{J_A T_A}^{M_A M_{T_A}} \rangle \\ &= \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle \langle T_A M_{T_A} k' 0 | T_B M_{T_B} \rangle \overline{\mathcal{J}}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' k'}(r) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{J}}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' k'}(r) \\ &= (-1)^{j_c + J_A - J_B} (-1)^{k' + T_A - T_B} \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B} || \mathcal{F}(r, \rho_i) i^{-\ell'} [Y_{\ell'}(\hat{\rho}_i) \otimes \sigma^{\lambda'}]_{j_c} \tau^{k'} || \Psi_{J_A T_A} \rangle \end{aligned} \quad (A4.10a)$$

L'expression finale de $\overline{\mathcal{M}}^{(-)}$ devient alors:

$$\overline{\mathcal{M}}^{(-)} = \sum_{\substack{\ell' m' \\ j_c m_{j_c}}} \langle J_A M_A j_c m_{j_c} | J_B M_B \rangle \langle T_A M_{T_A} k' 0 | T_B M_{T_B} \rangle \langle \ell' m' \lambda' \nu' | j_c m_{j_c} \rangle \overline{\mathcal{J}}_{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' k'}(r) \quad (A4.10b)$$

Developpons, à titre d'exemple, dans un modèle de particule-trou le terme contenu dans $\overline{\mathcal{J}}^{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' k'}(\mathbf{r})$:

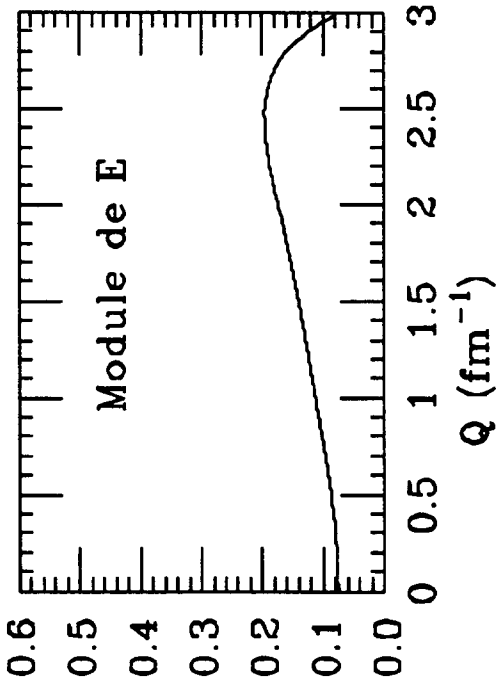
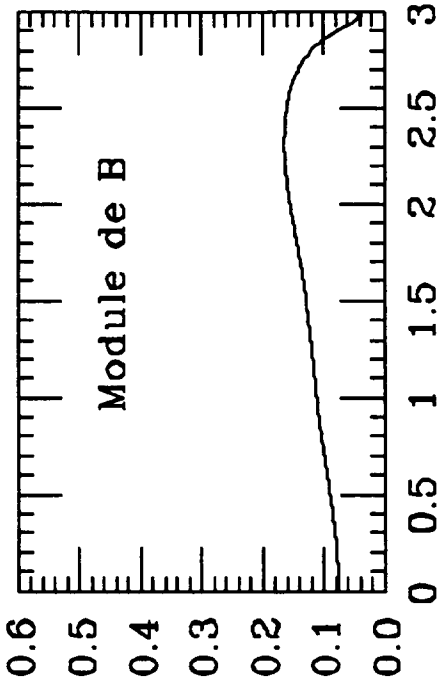
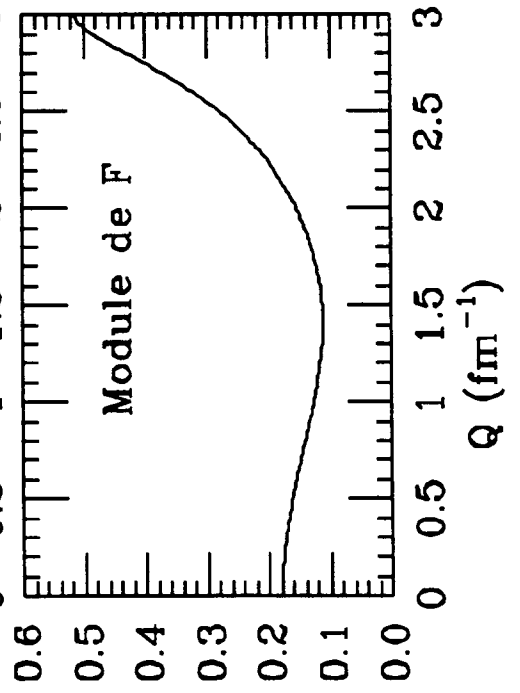
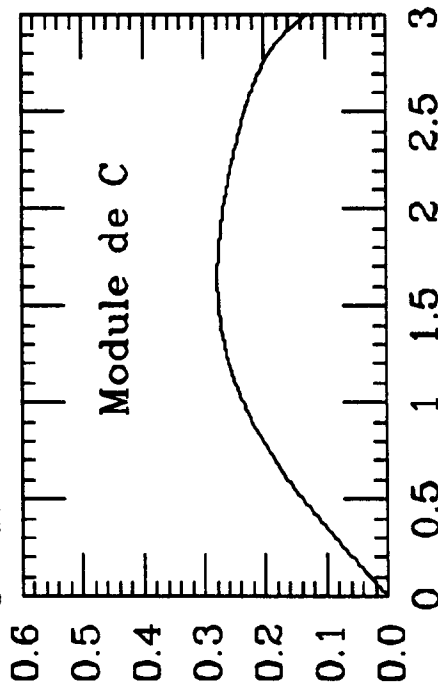
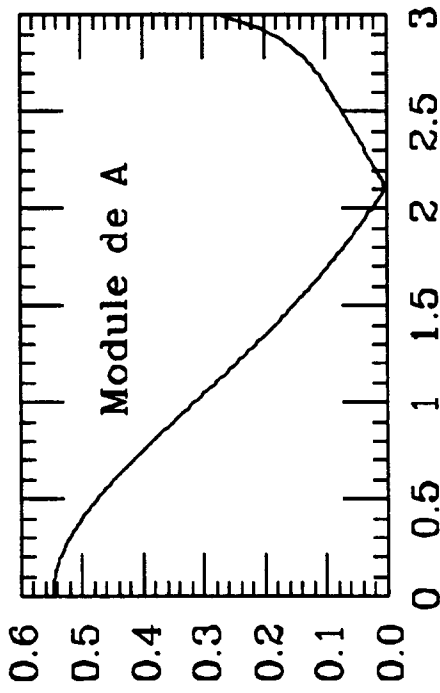
$$\begin{aligned}
& \sum_i \langle \Psi_{J_B T_B} \parallel \mathcal{F}(\mathbf{r}, \rho) i^{-\ell'} [Y_{\ell'}(\hat{\rho}_i) \otimes \sigma^{\lambda'}]_{j_c} \tau^{k'} \parallel \Psi_{J_A T_A} \rangle \\
&= \sum_{\substack{j_p j_t \\ j_p j_t}} \sqrt{2} (-1)^{j_t + j_c - j_p} \frac{\hat{j}_p}{\hat{j}_c} \frac{(-1)^{k'}}{\hat{k}'} \langle j_p \ 1/2 \parallel \mathcal{F}(\mathbf{r}, \rho_i) i^{-\ell'} [Y_{\ell'}(\hat{\rho}_i) \otimes \sigma^{\lambda'}]_{j_c} \tau^{k'} \parallel j_t \ 1/2 \rangle \\
& \quad \langle \Psi_{J_B T_B} \parallel [a_{j_p 1/2}^+ a_{j_t 1/2}]_{j_c k'} \parallel \Psi_{J_A T_A} \rangle
\end{aligned} \tag{A4.11}$$

et

$$\begin{aligned}
& \langle j_p \ 1/2 \parallel \mathcal{F}(\mathbf{r}, \rho) i^{-\ell'} [Y_{\ell'}(\hat{\rho}_i) \otimes \sigma^{\lambda'}]_{j_c} \tau^{k'} \parallel j_t \ 1/2 \rangle \\
&= \sum_{\substack{\ell_p \ell_t \\ \ell_p \ell_t}} i^{\ell_t - \ell' - \ell_p} \sqrt{\frac{2}{4\pi}} (-1)^{k'} \hat{k}' (-1)^{\lambda'} \hat{\lambda}' \hat{j}_c \hat{\ell}' \hat{\ell}_t \hat{j}_t \langle \ell_t \ 0 \ \ell' \ 0 \mid \ell_p \ 0 \rangle \\
& \quad \left\{ \begin{matrix} \ell_p & 1/2 & j_p \\ \ell' & \lambda' & j_c \\ \ell_t & 1/2 & j_t \end{matrix} \right\} \int_0^\infty \rho^2 \mathcal{F}(\mathbf{r}, \rho) \mathcal{R}_{n_p \ell_p j_p}(\rho) \mathcal{R}_{n_t \ell_t j_t}(\rho) d\rho
\end{aligned} \tag{A4.12}$$

d'où

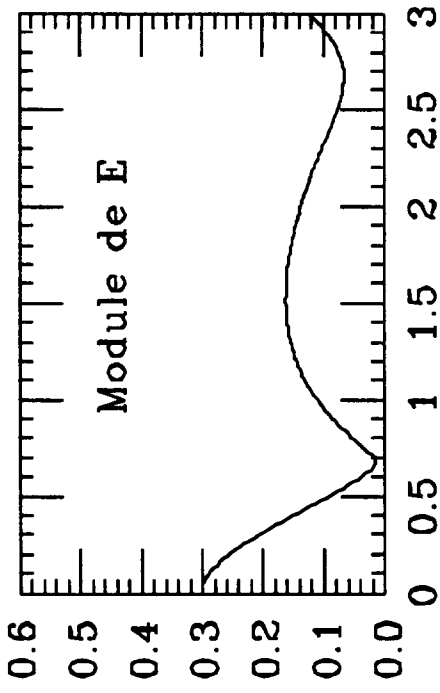
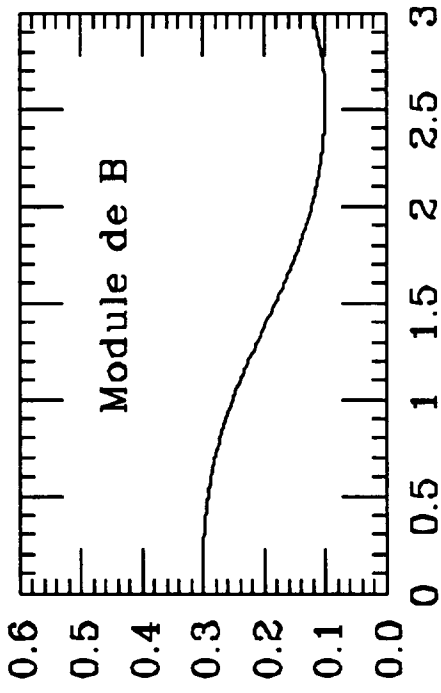
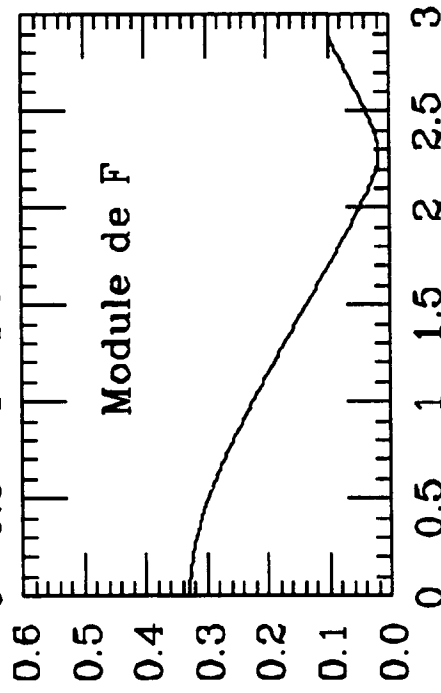
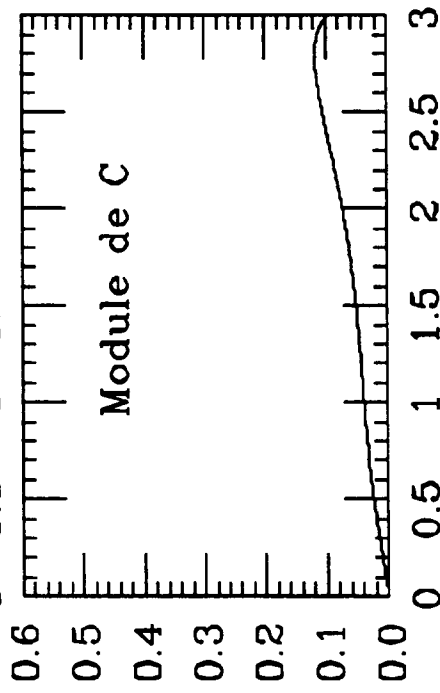
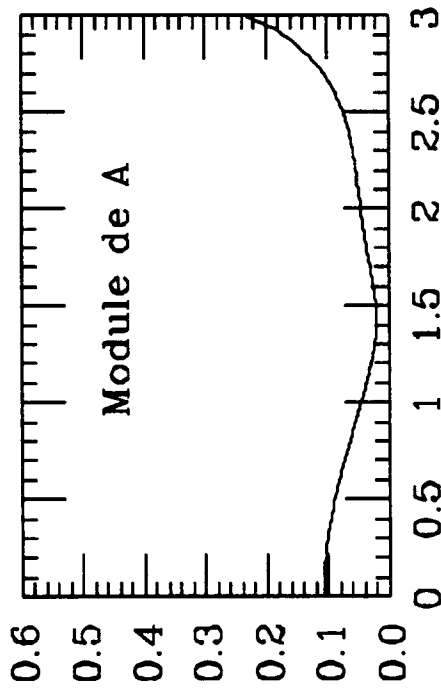
$$\begin{aligned}
& \overline{\mathcal{J}}^{\ell' j_c J_A J_B T_A T_B \lambda' k'}(\mathbf{r}) \\
&= (-1)^{j_c + J_A - J_B} (-1)^{k' + T_A - T_B} \\
& \quad \sum_{\substack{j_p j_t \\ j_p j_t \\ \ell_p \ell_t}} \sqrt{2} (-1)^{j_t + j_c - j_p} \frac{\hat{j}_p}{\hat{j}_c} \frac{(-1)^{k'}}{\hat{k}'} \langle \Psi_{J_B T_B} \parallel [a_{j_p 1/2}^+ a_{j_t 1/2}]_{j_c k'} \parallel \Psi_{J_A T_A} \rangle \\
& \quad i^{\ell_t - \ell' - \ell_p} \sqrt{\frac{2}{4\pi}} (-1)^{k'} \hat{k}' (-1)^{\lambda'} \hat{\lambda}' \hat{j}_c \hat{\ell}' \hat{\ell}_t \hat{j}_t \langle \ell_t \ 0 \ \ell' \ 0 \mid \ell_p \ 0 \rangle \\
& \quad \left\{ \begin{matrix} \ell_p & 1/2 & j_p \\ \ell' & \lambda' & j_c \\ \ell_t & 1/2 & j_t \end{matrix} \right\} \int_0^\infty \rho^2 \mathcal{F}(\mathbf{r}, \rho) \mathcal{R}_{n_p \ell_p j_p}(\rho) \mathcal{R}_{n_t \ell_t j_t}(\rho) d\rho
\end{aligned} \tag{A4.13}$$



$E_{NN} = 200 \text{ MeV} \quad T=0$

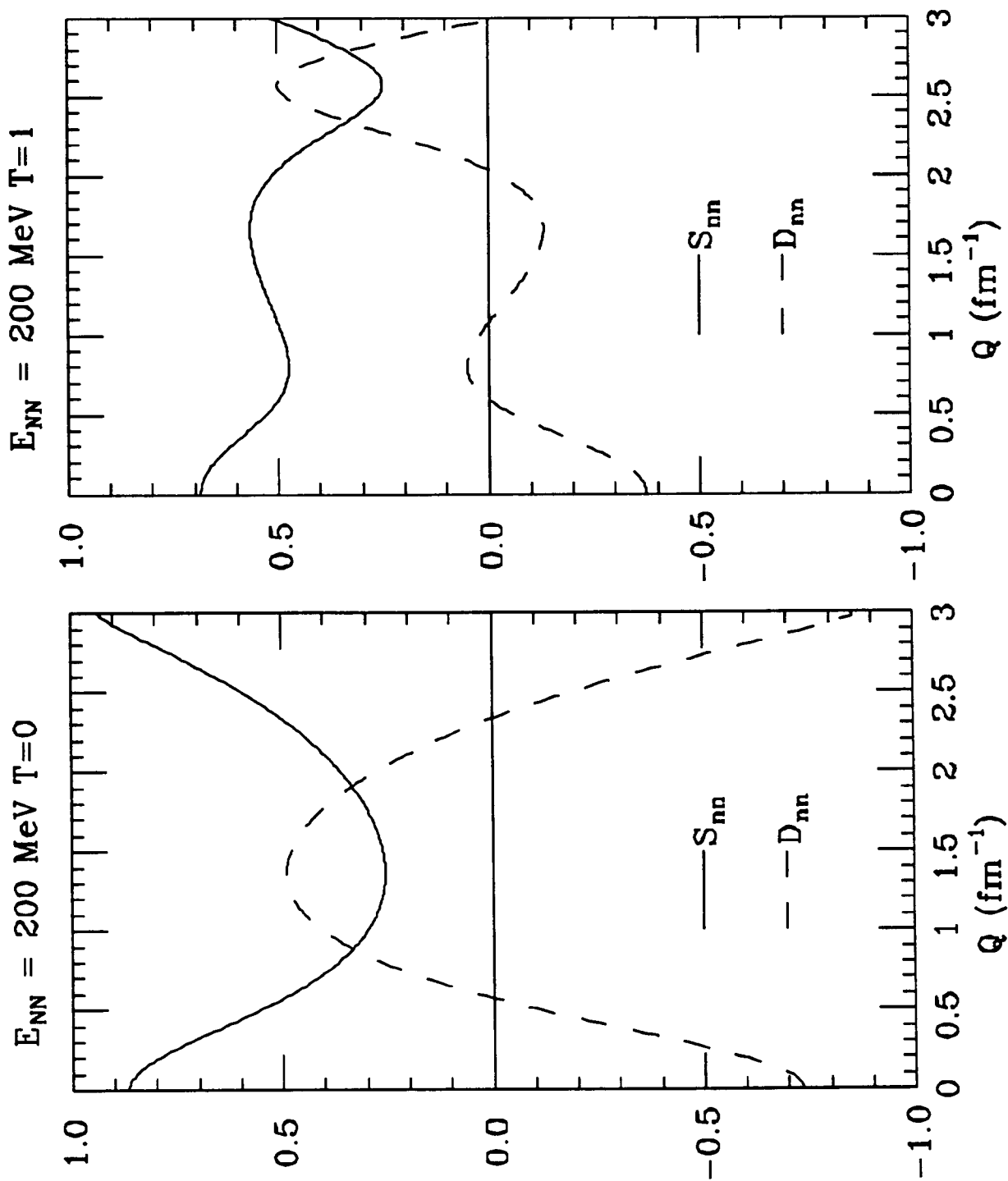
Modules des différents termes
de la matrice Nucléon-Nucléon





$E_{NN} = 200 \text{ MeV} \quad T=1$

Modules des différents termes
de la matrice Nucléon-Nucléon



Valeurs de D_{nn} et S_{nn} pour des états de parité non naturelle

