



ORGANISATION EUROPEENNE POUR LA RECHERCHE NUCLEAIRE

CERN-ISR-DI/71-6

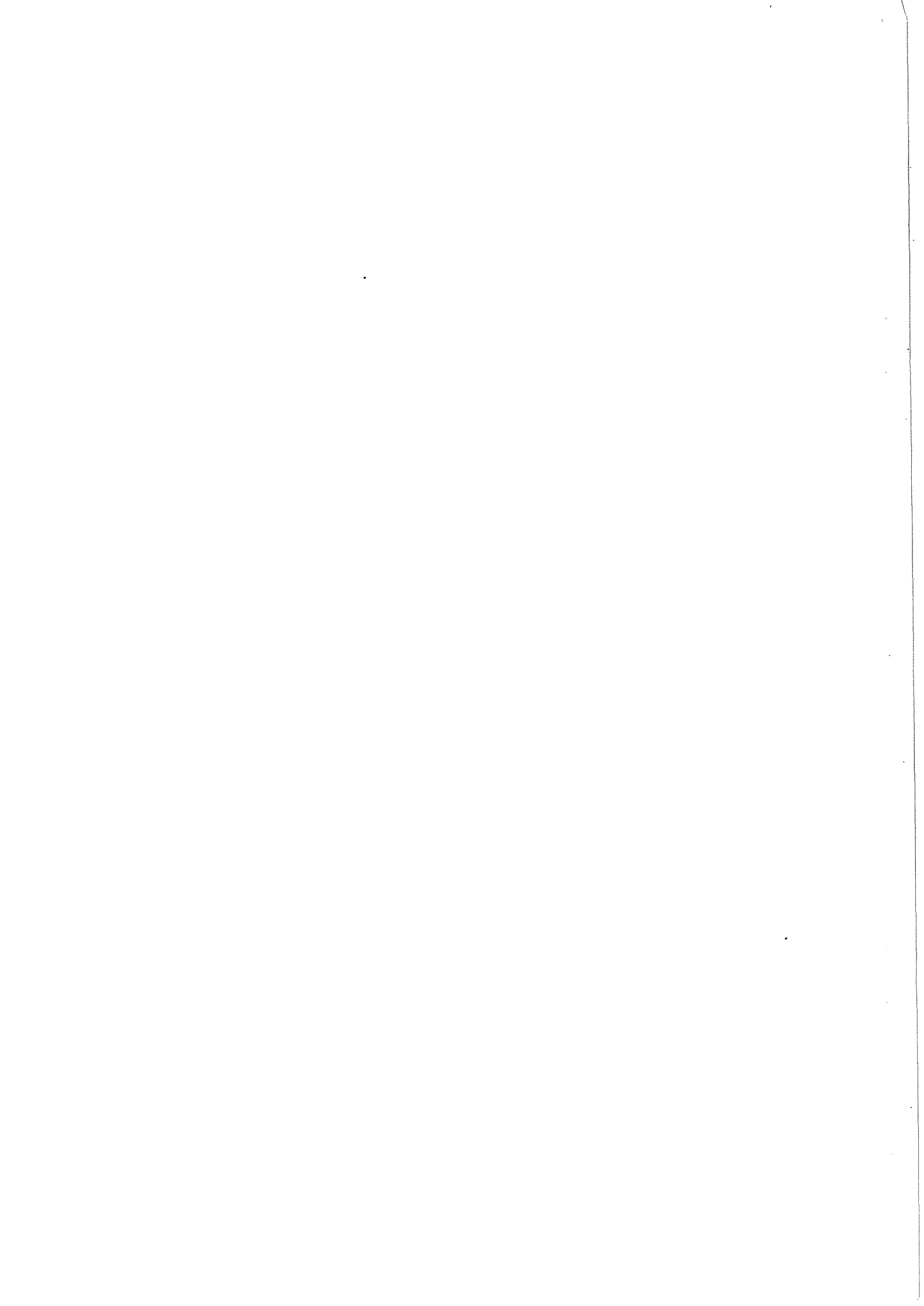
RELATIONS ENERGETIQUES DANS LES FAISCEAUX CONTINUS

(Equations de Kapchinskij/Vladimirskij généralisées)

par

P. M. Lapostolle

Genève, Mars 1971



1. INTRODUCTION

L'étude d'un certain nombre de propriétés de la charge d'espace portant une attention toute particulière à ses effets non linéaires, a déjà fait l'objet de rapports antérieurs. Non seulement l'état stationnaire de tels faisceaux (I. Kapchinskij [1966], P. Lapostolle [1969 a], M. Promé [1969], F. Sacherer [1970 a], R. Gluckstern et al [1970], J. Claus and A. Benton [1970]) mais aussi les oscillations possibles (P. Tanguy [1969], A. Davies [1969], B. et P. Lapostolle [1969], P. Lapostolle [1969 b], Taylor et al [1969], Kuznetsov et al [1969], Kuznetsov et al [1970]) ont donné lieu à des travaux théoriques et à des calculs numériques dont le but est de chercher à expliquer les grossissements de faisceaux observés dans la plupart des accélérateurs (P. Lapostolle et al [1968], Kuznetsov et al [1970]).

Dans un rapport récent (P. Lapostolle [1970]) on a montré comment l'emploi de calculs numériques avait permis de trouver que des propriétés établies dans le cas d'une approximation linéaire (I. Kapchinskij, V. Vladimirskij [1959]) pouvaient être appliquées de façon très générale même en présence de non linéarités pourvu que l'on fasse appel à des grandeurs moyennes des faisceaux considérés. Ces propriétés, seulement énoncées, ont, depuis lors été démontrées (R. Gluckstern [1970 a], F. Sacherer [1970 b]) pour une très large classe de cas particuliers.

Ces résultats ont encouragé la poursuite d'un travail à la fois théorique et numérique qui a entraîné la mise au point d'un nouveau programme de calcul plus précis faisant appel à des méthodes modernes plus rapides (R. Le Bail [1970]).

L'élaboration de ce programme et l'application d'un certain nombre de contrôles d'exactitude ont conduit à expliciter certaines notions énergétiques et à formuler de nouvelles équations de Kapchinskij/Vladimirskij "généralisées" qui font l'objet du présent rapport.

2. ENERGIE TOTALE DANS UN FAISCEAU. ENERGIE DE CHARGE D'ESPACE.
CAS D'UN FAISCEAU DE REVOLUTION.

Si l'on considère un faisceau guidé dans un canal de focalisation dont les forces dérivent d'un potentiel, l'énergie cinétique totale des particules et leur énergie potentielle dans le champ de force extérieur se calculent sans ambiguïté. Il n'en est pas de même de leur énergie de charge d'espace puisque c'est leur présence même qui crée cette dernière.

La considération de deux particules chargées (on peut généraliser à deux lignes de charges pour traiter le cas présent de faisceaux "continus") amenées depuis l'infini jusqu'aux points M_1 et M_2 conduit à penser que ce potentiel des particules doit être affecté d'un facteur $1/2$ dans les considérations énergétiques. En effet supposons qu'il n'existe aucun champ extérieur et qu'on amène la charge no. 1 en M_1 . Ceci s'effectue sans travail si la charge no. 2 est à l'infini et n'exerce aucun champ dans le domaine où l'on déplace la charge no. 1. Par contre l'amenée de la charge no. 2 en M_2 exigera alors un certain travail W_2 qui est égal à l'énergie potentielle de la charge no. 2 dans le champ de force de la charge no. 1.

Pour obtenir le même résultat final, à savoir la mise en place, partant de l'infini, des charges nos. 1 et 2 aux points M_1 et M_2 on aurait pu procéder dans l'ordre inverse. Il aurait alors fallu exercer un travail W_1 égal à l'énergie potentielle de la charge no. 1 dans le champ de force de la charge no. 2.

Evidemment ces travaux sont égaux et

$$W_1 = W_2 = W/2$$

en désignant par W l'énergie potentielle totale dans le champ total de charge d'espace, c'est-à-dire la somme des énergies potentielles des charges nos. 1 et 2 dans le champ de force total.

Ce facteur 1/2 ne diffère d'ailleurs pas du facteur qui intervient dans les expressions d'énergie en électrostatique. Les paragraphes qui suivent exposent diverses considérations confirmant qu'il s'applique bien au cas de la charge d'espace qui règne dans les faisceaux continus de particules.

D'une façon analogue aux considérations précédentes, nous allons porter notre attention sur le problème qui consisterait à constituer le faisceau possédant la densité de distribution $\rho(r)$ dans le domaine $0 < r < r_{\max}$ (r_{\max} pouvant d'ailleurs être arbitrairement grand) à partir d'un faisceau de même charge Q par unité de longueur,

$$Q = \int_0^{r_{\max}} \rho(r) 2 \pi r dr \quad (1)$$

répartie uniformément sur un cylindre de rayon R tel que

$$R > r_{\max} \quad (2)$$

Dans l'état initial les charges du faisceau ne créent aucun champ à l'intérieur du cylindre de rayon R ; il est bien connu aussi que pour $r > R$, étant donnée la symétrie de révolution, le champ de charge d'espace est le même dans l'état initial et dans l'état final.

Dans ce qui suit, on se placera dans l'approximation non relativiste, considérant seulement l'effet électrostatique de la charge d'espace et négligeant les composantes magnétiques. On traitera plus spécialement le cas d'un faisceau isolé dans l'espace libre. L'application d'une transformation de Lorentz ou l'introduction de composantes magnétiques et quelques considérations supplémentaires permettraient cependant de généraliser le problème.

De manière à conserver la symétrie de révolution, nous amènerons les charges par couches cylindriques successives, depuis le cylindre initial de rayon R jusqu'à leur position finale, en commençant par l'axe et en allant par rayons r croissant, déplaçant à chaque opération une charge élémentaire

$$\rho (r) \cdot 2\pi r \, dr \quad (3)$$

dans le champ des charges déjà déposées jusqu'au rayon r; ou désignera ces charges par

$$q(r) = \int_0^r \rho (r) 2\pi r \, dr \quad (4)$$

Ces charges $q(r)$ produisent, à l'extérieur, c'est-à-dire pour

$$r' > r$$

là où seraient déplacées les couches cylindriques suivantes (de R à r) un champ de charge d'espace (donné par la loi de Gauss)

$$E_{ce} (r') = \frac{q(r)}{2\pi r' \epsilon_0} \quad (5)$$

contre lequel il faut, pour déplacer la charge élémentaire (3) effectuer le travail

$$- \rho (r) 2\pi r \, dr \int_R^r \frac{q(r)}{2\pi r' \epsilon_0} \, dr' = \frac{q(r) \rho(r)}{\epsilon_0} [\text{Log } R - \text{Log } r] r \, dr \quad (6)$$

Effectuer cette opération, depuis l'axe jusqu'au bord du faisceau exigera le travail total:

$$\int_0^{r_{\max}} \frac{q(r) \rho(r)}{\epsilon_0} [\text{Log } R - \text{Log } r] r \, dr = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \text{Log } R - \int_0^{r_{\max}} \frac{q(r) \rho(r)}{\epsilon_0} \text{Log } r \, r \, dr \quad (7)$$

où l'on a désigné par Q la charge totale par unité de longueur transportée par le faisceau:

$$Q = q(r_{\max}) = \int_0^{r_{\max}} \rho(r) 2\pi r \, dr \quad (8)$$

(bien entendu, dans les intégrales (7) et (8) on peut remplacer la limite supérieure d'intégration r_{\max} par R).

L'expression (7) représente l'énergie de charge d'espace W_{ce} . Appliquant deux fois la formule d'intégration par parties, on peut écrire encore

$$W_{ce} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \text{Log } R - \left[\frac{q^2(r)}{4\pi\epsilon_0} \text{Log } r \right]_0^R + \int_0^R \frac{q^2(r)}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = \int_0^R \frac{q^2(r)}{4\pi\epsilon_0 r} \, dr \quad (9)$$

et remarquant que, selon (5)

$$E_{ce}(r) = \frac{q(r)}{2\pi r \epsilon_0} \quad (10)$$

est, dans l'état final, le champ de charge d'espace (radial) régnant à la distance r de l'axe:

$$W_{ce} = \int_0^R \frac{q(r) E_{ce}(r)}{2} \, dr - \left[\frac{q(r) V_{ce}(r)}{2} \right]_0^R + \int_0^R \frac{V_{ce}(r) \rho(r) 2\pi r}{2} \, dr \quad (11)$$

où l'on a fait appel à (4) et désigné par V_{ce} le potentiel de charge d'espace tel que, en symétrie de révolution

$$\text{grad } V_{ce} = \frac{d}{dr} V_{ce} (r) = - E_{ce} (r) \quad (12)$$

Ce potentiel de charge d'espace est défini à une constante près et, par convention, on posera

$$V_{ce} (R) = 0 \quad (13)$$

On obtient alors l'expression

$$W_{ce} = \frac{1}{2} \int_0^R V_{ce} (r) \rho (r) 2\pi r dr \quad (14)$$

qui montre bien que l'énergie de charge d'espace est la moitié de l'énergie potentielle des particules dans le champ de charge d'espace.

En fait, lors du passage de l'état initial à l'état final les charges ont dû être déplacées dans le champ de focalisation et l'énergie totale sera la somme de l'énergie de charge d'espace (14) et de l'énergie potentielle de focalisation W_f dans l'état final si l'on suppose également cette énergie nulle dans l'état initial, c'est-à-dire si

$$V_f (R) = 0 \quad (15)$$

en désignant par $V_f(r)$ le potentiel de focalisation.

Dans l'Annexe I sera donné un autre calcul de l'énergie de charge d'espace où l'intégrale de la relation (7) apparaît comme l'énergie d'interaction des génératrices de charges les unes avec les autres,

le terme tout intégré n'étant que cette même énergie dans l'état initial. Mais il est intéressant également de donner des expressions précédentes une autre interprétation physique.

Le calcul des énergies dans les états initial et final peut s'effectuer également en faisant appel simplement aux champs qui régissent dans ces deux états.

Désignant par $E_f(r)$ le champ de focalisation, dans l'état initial on aura:

$$\begin{cases} E(r) = E_f(r) & \text{pour } r < R \\ E(r) = E_f(r) + E_{ce}(r) & \text{pour } r > R \end{cases} \quad (16)$$

Dans l'état final au contraire $E(r) = E_f(r) + E_{ce}(r)$ quel que soit r .

La différence d'énergie entre ces deux états est donc donnée par

$$W = \int_0^R \epsilon_0 \frac{[E_f(r) + E_{ce}(r)]^2}{2} 2\pi r \, dr - \int_0^R \epsilon_0 \frac{E_f(r)^2}{2} 2\pi r \, dr \quad (17)$$

Développant le carré de la première intégrale, on voit qu'il reste deux termes à intégrer; le premier s'écrit:

$$\int_0^R \epsilon_0 E_f(r) E_{ce}(r) \cdot 2\pi r \, dr = \int_0^R E_f(r) q(r) \, dr \quad (18)$$

qui, par intégration par partie, remarquant que

$$E_f(r) = - \frac{d}{dr} V_f(r) \quad (19)$$

donne

$$\int_0^R E_f(r) q(r) dr = - \left[V_f(r) q(r) \right]_0^R + \int_0^R V_f(r) \rho(r) 2\pi r dr \quad (20)$$

Le terme tout intégré est nul d'après (15) l'intégrale représente donc l'énergie potentielle de focalisation W_f .

Le deuxième terme de (17) s'écrit

$$\int_0^R \epsilon_0 \frac{E_{ce}(r)^2}{2} 2\pi r dr = \int_0^R \frac{q^2(r)}{4\pi\epsilon_0 r} dr \quad (21)$$

On voit que ce terme n'est autre que

$$\boxed{W_{ce} = \int_0^R \frac{q^2(r)}{4\pi\epsilon_0 r} dr} \quad (22)$$

forme déjà trouvée en (9).

L'expression de l'énergie par les champs redonne bien la somme de l'énergie potentielle de focalisation et de l'énergie de charge d'espace. a) (voir la page suivante)

Remarque

Lorsque les particules ont été amenées, immobiles, dans la distribution finale, il reste à leur communiquer une certaine vitesse transversale, c'est-à-dire une certaine énergie cinétique. L'expression de cette énergie cinétique ne présente aucune difficulté.

3. ENERGIE DE CHARGE D'ESPACE DANS UN FAISCEAU NE PRESENTANT PAS LA SYMETRIE DE REVOLUTION.

Le calcul des énergies dans ce cas est plus difficile. S'il n'y a aucune symétrie dans le faisceau que l'on veut créer on ne peut aisément considérer le déplacement de couches cylindriques depuis un état superficiel initial jusqu'à l'état final qui permette un calcul simple du travail effectué, comme on l'a fait pour le cas de révolution.

On va cependant évaluer encore les énergies en considérant la différence entre deux états, le premier étant toujours une distribution superficielle sur un cylindre qui sera choisi être une surface équipotentielle du potentiel de charge d'espace de la distribution finale. La densité sur ce cylindre sera choisie telle que le potentiel extérieur soit le même dans les deux états (voir Annexe II). En particulier, si l'on prend une équipotentielle très éloignée, elle coïncidera pratiquement avec un cylindre circulaire de rayon R dont l'axe passe par le centre de gravité des charges dans la distribution finale.

-
- a) Il faut, à ce sujet, signaler une erreur dans le rapport de B. et P. Lapostolle [1969] où le calcul donné en annexe et les formules d'adaptation suggérées (55) et (56) sont erronées. Les expressions de chacune des énergies, prises séparément sont cependant correctes; l'énergie potentielle donnée est la somme de l'énergie de focalisation et de l'énergie potentielle dans le champ de charge d'espace (c'est-à-dire le double de l'énergie de charge d'espace proprement dite).

Au lieu d'évaluer l'énergie de charge d'espace comme nous l'avons fait dans la première étape du cas de révolution par le calcul d'un travail, nous allons plutôt adopter la deuxième méthode faisant appel à l'énergie des champs. De plus, admettant le résultat obtenu alors (et qui serait aisément généralisé) selon lequel le terme rectangle (18) représentait l'énergie de focalisation, nous allons nous borner à évaluer l'énergie relative au champ de charge d'espace proprement dit et calculer la différence de cette énergie entre les états initial et final, c'est-à-dire l'énergie du champ de charge d'espace pour la distribution finale, à l'intérieur de la surface équipotentielle adoptée pour la distribution initiale.

Cette énergie s'obtient en appliquant la formule de Riemann (qui remplace en quelque sorte la formule d'intégration par parties) à l'expression vectorielle:

$$\vec{E}_{ce} \cdot \vec{V}_{ce}$$

En utilisant la relation:

$$\operatorname{div} \vec{E}_{ce} \cdot V = \vec{E}_{ce} \operatorname{grad} V + V_{ce} \operatorname{div} E \quad (23)$$

il vient

$$\oint V_{ce} \cdot \vec{E}_{ce} \cdot d\vec{n} = \iint \vec{E}_{ce} \operatorname{grad} V_{ce} \, dx dy + \iint V_{ce} \operatorname{div} E \, dx dy \quad (24)$$

Or, en prenant pour contour l'équipotentielle où les charges étaient réparties initialement et en prenant pour zéro le potentiel sur ce contour, le premier membre de l'équation précédente est nul. D'après les relations

$$\vec{E}_{ce} = - \text{grad } V_{ce} \quad (25)$$

et

$$\text{div } \vec{E}_{ce} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (26)$$

on obtient alors aisément

$$W_{ce} = \epsilon_0 \iint \frac{E_x^2 + E_y^2}{2} dx dy = \frac{1}{2} \iint V_{ce}(x,y) \rho(x,y) dx dy \quad (27)$$

qui généralise bien l'équation (14).

L'énergie de charge d'espace est donc bien la moitié de de l'énergie potentielle des particules dans le champ de charge d'espace.

4. AUTRES EXPRESSIONS DE L'ENERGIE DE CHARGE D'ESPACE.

Pour certaines applications, et en particulier pour mieux illustrer la partie suivante, il peut être intéressant d'exprimer l'énergie de charge d'espace sous une forme un peu différente de celles données en (14), (22) ou (27).

Reprenant la relation (7), on a

$$W_{ce} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \text{Log } R - \int_0^R \frac{q(r) \rho(r)}{\epsilon_0} \text{Log } r r dr \quad (28)$$

ou encore:

$$W_{ce} = \int_0^R \frac{q^2(r)}{4\pi r \epsilon_0} dr = \frac{Q^2}{4\pi r \epsilon_0} \text{Log } R - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_0^R \frac{d [q^2(r)]}{dr} \text{Log } r dr \quad (29)$$

C'est une expression du type (28) qui a été utilisée par R. Gluckstern et al [1970] dans leur étude de distributions stationnaires.

On peut encore écrire (29) sous la forme:

$$W_{ce} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \text{Log } R - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \overline{\overline{\text{Log } r}} \quad (30)$$

en désignant par $\overline{\overline{\text{Log } r}}$ la moyenne de $\text{Log } r$ pondérée par la fonction de distribution de $q^2(r)$.

Dans le cas où le faisceau ne présente pas la symétrie de révolution, mais seulement deux plans de symétrie, on peut encore généraliser l'expression précédente, comme on le montre dans l'Annexe III.

On peut écrire:

$$W_{ce} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \overline{\overline{\text{Log } R}} - 4 \iint_{\vec{x}, \vec{y}} E.r \rho(x,y) \text{Log } (x + y) dx dy \quad (31)$$

où l'intégration est faite seulement sur le premier quadrant (sinon il suffit de remplacer $\text{Log } (x + y)$ par $\text{Log } (|x| + |y|)$ et de supprimer le facteur 4 devant l'intégrale.)

$\overline{\overline{\text{Log } R}}$ est la moyenne de $\text{Log } (|x| + |y|)$ sur le cylindre de grand diamètre ou les charges sont distribuées dans l'état initial (ou une surface équipotentielle si sa section n'est pas circulaire) et on peut écrire

$$W_{ce} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \overline{\overline{\text{Log } R}} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \overline{\overline{\overline{\text{Log } (X + Y)}}} \quad (32)$$

les moyennes étant pondérées par l'expression $\vec{E} \cdot \vec{r} \rho(x,y)$ telle que

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{r} \rho(x,y) dx dy = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (33)$$

On peut noter que, pour un cercle de rayon R

$$\overline{\overline{\text{Log R}}} \approx \overline{\overline{\text{Log (1,115 R)}}} \quad (34)$$

si bien que (32) peut encore s'écrire:

$$W_{ce} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \overline{\overline{\text{Log R}}} - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \overline{\overline{\text{Log} \frac{X+Y}{1,115}}} \quad (35)$$

Pour un faisceau ne présentant aucune symétrie on peut encore écrire

$$W_{ce} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \overline{\overline{\text{Log R}}} - \iint \text{div} \left(\epsilon_0 \frac{E^2}{2} \vec{r} \right) \text{Log} (|x| + |y|) dx dy \quad (36)$$

le cylindre initial de grand diamètre ayant son axe sur la ligne du centre de gravité des charges des sections.

On peut noter que

$$\text{div} \left(\epsilon_0 \frac{E^2}{2} \vec{r} \right) = \epsilon_0 (\vec{E} \cdot \vec{r}) \text{div} \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \text{rot} (\vec{r} \times \vec{E})$$

et que

$$\text{div} \left(\epsilon_0 \frac{E^2}{2} \vec{r} \right) = \vec{E}_{ce} \cdot \vec{r} \rho - \epsilon_0 \vec{E}_{ce} \cdot \text{rot} (\vec{r} \times \vec{E}_{ce}) \quad (37)$$

telle que

$$\iint \text{div} \left(\epsilon_0 \frac{E^2}{2} \vec{r} \right) dx dy = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (38)$$

Par conséquent, on peut toujours écrire (32), (34) et (35), la moyenne $\overline{\text{Log (X + Y)}}$ étant simplement définie par une pondération en $\text{div} (\epsilon_0 \frac{E^2_{ce}}{2} \vec{r})$.

Remarque

Pour une distribution présentant la symétrie de révolution, d'après (10), (31) et la relation (34)

$$W_{ce} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \text{Log R} - \int_0^R \frac{q(r) \rho(r)}{\epsilon_0} \text{Log r } r dr$$

on retrouve bien la relation (28).

5. COMPARAISON AVEC LES EQUATIONS DE KAPCHINSKIJ ET VLADIMIRSKIJ.

On a déjà rappelé, précédemment, que les équations établies depuis longtemps par I. Kapchinskij et V. Vladimirsij [1959] pour un faisceau de densité uniforme s'appliquaient également aux états stationnaires quelle que soit la distribution de charge qui y règne, pourvu que les paramètres caractérisant le faisceau soient remplacés par des valeurs quadratiques moyennes.

Et on a signalé que, moyennant certaines hypothèses, il avait été montré que ces relations s'appliquaient également aux oscillations "d'enveloppe" (et non seulement aux états stationnaires). On va maintenant examiner quelles propriétés énergétiques on peut associer à ce type d'équations de Kapchinskij/Vladimirsij (K/V) généralisées et voir qu'il est possible d'écrire deux jeux d'équations de K/V généralisées et déduire des relations importantes de la comparaison de ces équations.

5 a) EQUATIONS DE K/V GENERALISEES. Première forme.

Nous allons revenir d'abord rapidement sur l'origine de ces équations bien qu'elles aient déjà été établies par R.Gluckstern [1970 a] et F. Sacherer [1970 b]. Soient

$$\begin{cases} x'' + \omega_x^2 x - E_x = 0 \\ y'' + \omega_y^2 y - E_y = 0 \end{cases} \quad (39)$$

les équations du mouvement d'une particule du faisceau dont la vitesse suivant la troisième coordonnée s est supposée très grande par rapport aux vitesses transversales ($x' \ll 1, y' \ll 1$), constante et identique pour toutes les particules. Les valeurs de ω_x^2 et ω_y^2 qui caractérisent les forces de rappel de focalisation sont supposées exprimées dans une unité telle que les dérivées secondes sont prises par rapport à s ; E_x et E_y sont également à un facteur près qui sera précisé plus loin les composantes du champ de charge d'espace E_{ce} qui a fait l'objet des précédentes parties et représentent l'action de ce champ sur les particules.

On supposera que le faisceau présente deux plans de symétrie.

Pour trouver le premier jeu d'équations de K/V, on multiplie la première équation par x , la deuxième par y et calcule les moyennes sur l'ensemble des particules:

$$\begin{cases} \overline{x x''} + \omega_x^2 \overline{x^2} - \overline{x E_x} = 0 \\ \overline{y y''} + \omega_y^2 \overline{y^2} - \overline{y E_y} = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Adoptons les définitions de demi axes et d'émittance en moyenne quadratique déjà introduites par R. Chasman et al [1969] et

P. Lapostolle [1970]:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = 4 \overline{x^2} \\ EM_x^2 = 16 \left[\overline{x^2} \overline{x'^2} - \overline{xx'}^2 \right] \\ b^2 = 4 \overline{y^2} \\ EM_y^2 = 16 \left[\overline{y^2} \overline{y'^2} - \overline{yy'}^2 \right] \end{array} \right. \quad (41)$$

On déduit aisément de ces définitions:

$$aa' = 4 \overline{xx'} \quad (42)$$

$$aa'' + a'^2 = 4 \overline{xx''} + 4 \overline{x'^2} = 4 \overline{xx''} + \frac{EM_x^2}{4 \overline{x^2}} + \frac{4 \overline{xx'}^2}{\overline{x^2}} \quad (43)$$

et compte tenu de (41) et (42)

$$aa'' + a'^2 = 4 \overline{xx''} + \frac{EM_x^2}{a^2} + a'^2$$

soit finalement

$$aa'' - \frac{EM_x^2}{a^2} = 4 \overline{xx''} \quad (44)$$

Finalement, le jeu d'équations (40) s'écrit après division respective par a et b:

$$\boxed{\begin{array}{l} a'' + \omega_x^2 a - \frac{EM_x^2}{a^3} - \frac{4 \overline{xx''}}{a} = 0 \\ b'' + \omega_y^2 b - \frac{EM_y^2}{b^3} - \frac{4 \overline{yy''}}{b} = 0 \end{array}} \quad (45)$$

Les derniers termes mis à part, on reconnaît les équations de K/V.

Considérons les derniers termes. En additionnant terme à terme les équations (46), on obtient

$$\overline{x E_x} + \overline{y E_y} = \frac{1}{Q} \iint \vec{r} \cdot \vec{E}_{ce} \rho(x,y) dx dy \quad (46)$$

On reconnaît au 2^e membre l'intégrale de la relation (33). Il reste à déterminer le facteur multiplicatif à appliquer aux champs proprement dits pour retrouver les équations (39). Adoptant le formalisme du rapport P. Lapostolle [1970] on posera

$$\overline{x E_x} + \overline{y E_y} = A/2 \quad (47)$$

avec

$$A = \frac{2r_0 I/e}{e \beta^3 \gamma^3} \quad (48)$$

en désignant par I le courant transporté par le faisceau à la vitesse βc (β et γ étant les facteurs relativistes classiques), e la charge de l'électron et r_0 le "rayon classique" de proton s'il s'agit d'un faisceau de proton:

$$r_0 = 1,5347 \cdot 10^{-18} \text{ mètres} \quad (49)$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} a'' + \omega_x^2 a - \frac{EM_x^2}{a^3} - \frac{2A}{a+b} - \frac{A}{a} \epsilon_1 &= 0 \\ b'' + \omega_x^2 b - \frac{EM_y^2}{b^3} - \frac{2A}{a+b} - \frac{A}{b} \epsilon_1 &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

en posant

$$\frac{\overline{x E_x}}{a} - \frac{\overline{y E_y}}{b} = A \frac{a + b}{4ab} \epsilon_1 \quad (51)$$

Les équations (50) constituent le premier jeu d'équations de K/V généralisées.

On y voit apparaître un terme correctif ϵ_1 , défini par (51).

Il faut insister sur le fait que les émittances EM_x et EM_y ne sont pas supposées constantes: elles varient en général au cours du mouvement comme on le verra plus loin.

Considérons le terme ϵ_1 .

Il est évidemment nul si le faisceau présente une symétrie par rapport aux bissectrices.

F. Sacherer [1970 b] a montré qu'il était nul également dans le cas d'une distribution à symétrie elliptique, c'est-à-dire affine d'une distribution de révolution, isolée dans l'espace libre.

Divers types de distribution considérés ont toujours donné des valeurs très faibles de ϵ_1 : un rectangle donne au maximum $\approx 0,4\%$ (voir Annexe IV).

Le terme correctif ϵ_1 n'est cependant pas nul en général; il dépend en particulier de la forme d'une surface équipotentielle qui peut être imposée à l'extérieur du faisceau (chambre à vide, effets d'image).
Il reste cependant très petit dans la plupart des cas pratiques.

5 b) EQUATIONS ENERGETIQUES. DEUXIEME FORME DES EQUATIONS DE K/V.

Multiplions maintenant la première des équations (39) par x' , la deuxième par y' , intégrons par rapport à s . Il vient en faisant la moyenne

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{x'^2}}{2} + \omega_x^2 \frac{\overline{x^2}}{2} - \int \overline{x'E_x} ds = cte \\ \frac{\overline{y'^2}}{2} + \omega_y^2 \frac{\overline{y^2}}{2} - \int \overline{y'E_y} ds = cte \end{array} \right. \quad (52)$$

Cette opération est bien connue; elle fait apparaître l'énergie cinétique des particules leur énergie potentielle dans le champ de focalisation et, dans les intégrales, l'énergie de charge d'espace que nous avons étudiée dans les premières parties (E_x et E_y varient au cours du mouvement).

Faisant appel à (41) et (42) on écrit aisément:

$$\boxed{\begin{array}{l} a'^2 + \omega_x^2 a^2 + \frac{EM_x^2}{a^2} - 8 \int \overline{x'E_x} ds = cte \\ b'^2 + \omega_y^2 b^2 + \frac{EM_y^2}{b^2} - 8 \int \overline{y'E_y} ds = cte \end{array}} \quad (53)$$

A cette forme énergétique des équations de K/V on peut préférer celle qu'on obtient en dérivant par rapport à s et divisant les équations obtenues respectivement par $2a'$ et $2b'$:

$$\boxed{\begin{array}{l} a'' + \omega_x^2 a - \frac{EM_x^2}{a^3} + \frac{EM_x EM'_x}{a^2 a'} - \frac{\overline{4x'E_x}}{a'} = 0 \\ b'' + \omega_y^2 b - \frac{EM_y^2}{b^3} + \frac{EM_y EM'_y}{b^2 b'} - \frac{\overline{4y'E_y}}{b'} = 0 \end{array}} \quad (54)$$

On retrouve toujours bien les trois premiers termes des équations classiques de K/V mais cette fois-ci deux termes s'ajoutent: un terme faisant apparaître les dérivées des émittances (définies en moyenne quadratique) et les moyennes $\overline{x'E_x}$ et $\overline{y'E_y}$ prises sur l'ensemble des particules.

Pour ces derniers termes, on peut procéder à une évaluation du même type que celle effectuée à partir de la relation (46); on a:

$$\overline{x'E_x} + \overline{y'E_y} = \frac{dW}{ds} \frac{ce}{ds} \quad (55)$$

En effet, le premier membre n'est autre que la dérivée par rapport à s de l'énergie potentielle des particules dans leur champ de charge d'espace, dont on a vu qu'elle était le double de l'énergie de charge d'espace. Donc, d'après (32) ou (35)

$$\overline{x'E_x} + \overline{y'E_y} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{ds} \overline{\overline{\text{Log}(X+Y)}} \quad (56)$$

et introduisant la quantité A:

$$\overline{x'E_x} + \overline{y'E_y} = \frac{A}{2} \frac{d}{ds} \overline{\overline{\text{Log}(X+Y)}} \quad (57)$$

Or, pour une distribution uniforme dans un faisceau elliptique de demi axes a et b on a ^{a)}, d'après (34) (voir Annexe V)

$$\overline{\overline{\text{Log}(X+Y)}} = \text{Log}(a+b) + \epsilon_2 + \text{Log} \frac{1,115}{2\sqrt{2}} \quad (58)$$

avec

$$\epsilon_2 \approx 0,10$$

a) Pour retrouver cette expression, il est plus facile de revenir à l'expression (27) de l'énergie de charge d'espace que de faire appel à (31) (voir rapport interne CERN AR/Int.SG/65-27, équ. 12 et équ. 16 ou 20).

Et comme on le montre dans l'Annexe V dans un certain nombre de distributions assez diverses qui ont été examinées, on peut toujours écrire une expression du type (58) avec une valeur de ϵ_2 qui reste généralement comprise entre 0 et 0,10.

On pourra donc écrire une expression de la forme:

$$\overline{x'E_x} + \overline{y'E_y} = \frac{A}{2} \frac{a' + b'}{a + b} + \frac{A}{2} \epsilon_2' \quad (59)$$

et on posera même

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{x'E_x} = \frac{A}{2} \frac{a'}{a + b} + \frac{A}{2} (\epsilon_2')_x \\ \overline{y'E_y} = \frac{A}{2} \frac{b'}{a + b} + \frac{A}{2} (\epsilon_2')_y \end{array} \right. \quad (60)$$

Les équations (54) deviennent alors:

$$\boxed{\begin{array}{l} a'' + \omega_x^2 a - \frac{EM_x^2}{a^3} - \frac{2A}{a + b} + \frac{EM_x EM'_x}{a^2 a'} - \frac{2A}{a'} (\epsilon_2')_x = 0 \\ b'' + \omega_y^2 b - \frac{EM_y^2}{b^3} - \frac{2A}{a + b} + \frac{EM_y EM'_y}{b^2 b'} - \frac{2A}{b'} (\epsilon_2')_y = 0 \end{array}} \quad (61)$$

C'est le deuxième jeu d'équations de K/V généralisées. On voit apparaître deux termes correctifs: l'un contient la dérivée des émittances en moyenne quadratique et l'autre un terme qui dépend de la distribution.

Chaque terme $(\epsilon_2')_x$ et $(\epsilon_2')_y$ peut éventuellement prendre des valeurs notables mais leur somme reste probablement faible car ϵ_2 est toujours très petit. Notons que, comme ϵ_1 , ϵ_2 dépend des effets d'image.

Remarque

Au lieu du terme correctif global ϵ_2 introduit dans (58) on peut essayer de spécifier les corrections relatives à a et b en écrivant

$$\overline{\overline{\text{Log}(X + Y)}} = \frac{1}{2} \text{Log} [(1 + \epsilon_{2x}) a + (1 + \epsilon_{2y}) b] \quad (62)$$

En se limitant au premier ordre en ϵ on est alors amené à:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\epsilon_{2'}')_x \approx \frac{a'}{a} ab \frac{\epsilon_{2x} - \epsilon_{2y}}{(a + b)^2} + a \frac{\epsilon'_{2x}}{a + b} \\ (\epsilon_{2'}')_y \approx \frac{b'}{b} ab \frac{\epsilon_{2y} - \epsilon_{2x}}{(a + b)^2} + b \frac{\epsilon'_{2y}}{a + b} \end{array} \right. \quad (63)$$

Il est toutefois intéressant de noter que, avec les expressions (62) le jeu d'équations (61) de K/V généralisées devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} a'' + \omega_x^2 a - \frac{EM_x^2}{a^3} - \frac{2A}{a + b} - \frac{A}{a} \epsilon_3 + \frac{EM_x}{a^2 a'} \frac{EM'_x}{x} - A \frac{2a}{a + b} \frac{\epsilon'_{2x}}{a'} \approx 0 \\ b'' + \omega_y^2 b - \frac{EM_y^2}{b^3} - \frac{2A}{a + b} + \frac{A}{b} \epsilon_3 + \frac{EM_y}{b^2 b'} \frac{EM'_y}{y} - A \frac{2b}{a + b} \frac{\epsilon'_{2y}}{b'} \approx 0 \end{array} \right. \quad (64)$$

en posant

$$\epsilon_3 = \frac{2ab}{(a + b)^2} (\epsilon_{2x} - \epsilon_{2y}) \quad (65)$$

on y reviendra un peu plus loin.

6. APPLICATION DES EQUATIONS DE K/V GENERALISEES.
VARIATION DES EMITTANCES EN MOYENNE QUADRATIQUE.

La comparaison des jeux d'équations (50) et (61) permet immédiatement d'écrire:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{EM_x}{a^2} - \frac{EM'_x}{x} &= 2A (\epsilon'_2)_x - A \frac{a'}{a} \epsilon_1 \\ \frac{EM_y}{b^2} - \frac{EM'_y}{y} &= 2A (\epsilon'_2)_y + A \frac{b'}{b} \epsilon_1 \end{aligned}} \quad (66)$$

Remarque

En faisant appel à une forme du type (62) pour l'énergie de charge d'espace, on retrouve au lieu de (66) un jeu d'équations très semblable qui s'écrit:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{EM_x}{a^2} - \frac{EM'_x}{x} - A \frac{2a}{a+b} \epsilon'_{2x} - A \frac{a'}{a} (\epsilon_1 - \epsilon_3) \\ \frac{EM_y}{b^2} - \frac{EM'_y}{y} - A \frac{2b}{a+b} \epsilon'_{2y} + A \frac{b'}{b} (\epsilon_1 - \epsilon_3) \end{aligned} \right. \quad (67)$$

où l'on voit se grouper les termes en ϵ_1 et ϵ_3 qui tous deux, il faut le noter, sont dépendant entre autres des effets d'image, et s'annulent en symétrie de révolution.

Comme on le verra un peu plus loin en 6 b), on peut être induit à poser $\epsilon_1 = \epsilon_3$ dans tous les cas, ce qui amènerait à penser que les effets d'image jouent un rôle négligeable dans les variations d'émittance. Des études plus détaillées seraient cependant encore nécessaires pour pouvoir l'affirmer.

6 a) CAS D'UNE DISTRIBUTION DE K/V.

On l'a déjà dit, en l'absence d'effets d'image, mais que le faisceau soit rond ou elliptique, on a pour une distribution de K/V

$$\varepsilon_1 = 0$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{2x} = \varepsilon_{2y} = c^{te}$$

On déduit immédiatement de (66) que

$$EM_x = c^{te}, \quad EM_y = c^{te} \quad (69)$$

D'ailleurs, dans ce cas, les deux jeux d'équations de K/V (56) et (61) se ramènent tous deux aux équations classiques de K/V.

La distribution de K/V peut donc se conserver; ce raisonnement ne prouve cependant pas qu'elle soit stable et se conserve toujours en pratique.

6 b) DISTRIBUTIONS STATIONNAIRES.

Dans ce cas

$$a' = a'' = b' = b'' = 0$$

$$EM'_x = EM'_y = 0$$

$$(\varepsilon'_2)_x = (\varepsilon'_2)_y = \varepsilon'_{2x} = \varepsilon'_{2y} = 0$$

Dans les équations (50) le premier terme disparaît, ainsi que dans les équations (61) ou (64). On peut être tenté de dire que, dans ces dernières, les deux derniers termes également disparaissent, ce qui

entraînerait, par comparaison entre (50) et (64):

$$\epsilon_3 = \epsilon_1 \quad (70)$$

comme on l'a déjà mentionné.

Cependant, les deux derniers termes des équations (64) se présentent, dans le cas d'un régime stationnaire, sous forme indéterminée et une étude plus détaillée serait nécessaire pour être sûr de pouvoir affirmer que la relation (70) est correcte. D'ailleurs les expressions (63) ne sont qu'approchées; ainsi en est-il de (64) et par suite pourrait-il en être de (70).

6 c) OSCILLATIONS SYMETRIQUES. FAISCEAU ROND.

On a alors

$$\omega_x = \omega_y, \quad a = b, \quad EM_x = EM_y = EM$$

et

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0$$

$$\epsilon'_{2x} = \epsilon'_{2y} \approx 2(\epsilon'_2)_x = 2(\epsilon'_2)_y \approx \epsilon'_2$$

Il vient

$$EM \cdot EM' = a^2 A \epsilon'_2 \quad (71)$$

Si l'on avait $a^2 = \text{cte}$, on déduirait immédiatement

$$\Delta(EM^2) = 2a^2 A \Delta\epsilon_2 \quad (72)$$

et comme ϵ_2 reste très petit, l'émittance en moyenne quadratique serait elle même pratiquement invariante.

La relation (72) est vérifiée avec précision par les calculs numériques pour un faisceau ne présentant pas d'oscillations d'enveloppe (ou des oscillations d'amplitude négligeable) mais présentant des oscillations d'ordre supérieur où la distribution et les émittances en moyenne quadratique varient de façon absolument simultanée.

Mais au cours des oscillations d'enveloppe a^2 varie, de façon approximativement sinusoïdale. Au cours de ces oscillations la distribution change et ε_2 varie. Supposons, en première approximation, les oscillations de ε_2 également sinusoïdales.

L'examen de (71) montre alors que si a^2 et ε_2 oscillent en phase, l'émittance présente seulement une variation sinusoïdale de même phase.

Si les oscillations de a^2 et ε_2 présentent entre elles un déphasage, aux oscillations de l'émittance se superpose une variation linéaire séculaire dont le signe dépend de cet écart de phase, c'est-à-dire également de l'écart de phase entre les oscillations de l'amplitude a^2 et de l'émittance EM.

Une telle propriété avait été observée dans les calculs numériques (P. Lapostolle [1970]).

6 d) OSCILLATIONS ANTISYMETRIQUES.

L'étude du système (66) ou (67) où l'on néglige en première approximation ε_1 ou $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$ conduit, pour chaque coordonnée x et y à des conclusions analogues aux précédentes.

On peut cependant noter, de plus, en additionnant membre à membre les deux équations (66):

$$\frac{EM_x}{a^2} + \frac{EM'_x}{x} + \frac{EM_y}{b^2} + \frac{EM'_y}{y} = 2A \varepsilon'_2 - A \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \varepsilon_1 \quad (73)$$

que tout en ayant un deuxième membre très petit (ce qui est la seule affirmation certaine que l'on puisse faire jusqu'à présent) chaque terme du premier membre peut prendre des valeurs notables.

Il est ainsi possible d'obtenir des sortes d'échange d'émittance d'une direction vers l'autre ou des oscillations périodiques; de tels phénomènes ont été observés dans les calculs numériques.

6 e) EFFET D'UN DEFAUT D'ADAPTATION

Les paragraphes précédents ont montré qu'en cas de désadaptation on peut observer des variations d'émittance. Les calculs numériques indiquent que l'on assiste à une augmentation des émittances en moyenne quadratique et à un amortissement des oscillations d'enveloppe; on tend pratiquement vers un état stationnaire.

Ce dernier peut s'obtenir directement en faisant appel aux équations (53) et (58) ou (62) car l'énergie totale doit se conserver au cours du mouvement. On va considérer pour simplifier ici les cas où

$$\omega_x = \omega_y = \omega$$

et

$$EM_x = EM_y = EM$$

et examiner d'abord le cas d'oscillations symétriques pures.

L'énergie, dans l'état final (indice f) est facile à exprimer car alors $a' = b' = 0$, $a = b$ et l'état étant stationnaire, vérifie l'équation de K/V.

$$\omega^2 a_f^2 - \frac{EM_f^2}{a_f^2} - A = 0 \quad (74)$$

cette énergie s'écrit donc

$$W_f = \frac{1}{2} \omega^2 a_f^2 - \frac{A}{4} \text{Log} (a_f^2) - \frac{A}{4} (1 + 2 \epsilon_{2f}) \quad (75)$$

Afin d'obtenir une expression plus symétrique on peut, pour l'énergie initiale (indice i), se laisser guider par les résultats de calcul numérique selon lesquels, si la distribution des charges dans le faisceau a l'allure d'une distribution stationnaire, au cours d'une demi oscillation cette distribution varie peu (donc ϵ_2 varie peu) et l'émittance en moyenne quadratique est, elle aussi, sensiblement constante.

Considérant alors simultanément un maximum et un minimum d'oscillations d'enveloppe, a_{\max} et a_{\min} , on peut écrire:

$$\left\{ \begin{aligned} W_i &= \frac{1}{4} \omega^2 a_{\max}^2 + \frac{1}{4} \frac{EM_i^2}{a_{\max}^2} - \frac{A}{4} \text{Log} a_{\max} - \frac{A}{2} \epsilon_{2i} \\ &= \frac{1}{4} \omega^2 a_{\min}^2 + \frac{1}{4} \frac{EM_i^2}{a_{\min}^2} - \frac{A}{4} \text{Log} a_{\min} - \frac{A}{2} \epsilon_{2i} \end{aligned} \right. \quad (76)$$

En posant

$$\left\{ \begin{aligned} a_{\max} &= a_i r \\ a_{\min} &= a_i / r \end{aligned} \right. \quad (77)$$

$$\text{et } \text{Log} r = p \quad (78)$$

on obtient sans peine

$$\omega^2 - \frac{EM_i^2}{a_i^2} - \frac{A}{a_i^2} \frac{p}{\text{sh}p} \approx 0 \quad (79)$$

et

$$W_i = \frac{1}{2} \omega^2 a_i^2 \text{ chp} - \frac{A}{4} \text{Log} (a_i^2 \text{ chp}) - \frac{A}{4} \left(\frac{p}{\text{thp}} - \text{Log chp} + 2\varepsilon_{2i} \right) \quad (80)$$

On peut remarquer que

$$a_i^2 \text{ chp} = \frac{a_{\max}^2 + a_{\min}^2}{2} \quad (81)$$

Posant alors

$$F(u) = \frac{1}{2} \omega^2 u - \frac{A}{4} \text{Log} u \quad (82)$$

on voit que l'égalité des énergies initiale et finale s'écrit:

$$F(a_f) = F(a_i) + \frac{A}{4} \left(1 - \frac{p}{\text{thp}} + \text{Log chp} + 2\varepsilon_{2f} - 2\varepsilon_{2i} \right) \quad (83)$$

Sous cette forme on peut remarquer que la paranthèse qui multiplie A est petite: la fonction de p, égale à 0 pour $a_{\max} / a_{\min} = 1$ vaut 0,1 pour $a_{\max} / a_{\min} = 5$, 0,2 pour $a_{\max} / a_{\min} = 20$ et atteint 0,3 pour un rapport infini; la différence des ε_2 initial et final réduit encore cette valeur. On peut alors évaluer approximativement a_f^2 par un développement de Taylor de la fonction F(u) autour de a_f^2 , ce qui donne

$$a_f^2 \approx \frac{a_{\max}^2 + a_{\min}^2}{2} \left[1 + \frac{1 - \frac{p}{\text{thp}} + \text{Log chp} + 2\varepsilon_{2f} - 2\varepsilon_{2i}}{1 + 2 \left(\frac{\omega^2 a_f^2}{A} - 1 \right)} \right] \quad (84)$$

- le dénominateur figurant dans cette expression a été mis sous cette forme pour faire apparaître, d'après (74) qu'il est toujours supérieur à 1 (égal à 1 pour une charge d'espace infinie et une désadaptation initiale nulle et à l'infini pour une charge d'espace nulle).

On retrouve donc bien la propriété obtenue dans les calculs numériques (Lapostolle [1970]) à savoir que

$$a_f^2 \approx (a_{\max}^2 + a_{\min}^2) / 2 \quad (85)$$

dont on voit qu'elle est rigoureuse pour une faible charge d'espace mais peut-être seulement approchée pour les très fortes charges d'espace (à moins que les termes correctifs ε_2 ne compensent le terme en p ce que pourrait montrer une étude détaillée).

Pour des oscillations antisymétriques, afin d'obtenir un calcul présentant la même symétrie que le précédant, on peut à nouveau faire appel à une propriété suggérée par les calculs numériques qui montrent que dans les conditions initiales (du moins pour une distribution de type stationnaire) les oscillations de a^2 et b^2 sont approximativement sinusoïdales; autour d'un extremum on a alors en particulier

$$(a^2)'' + (b^2)'' \approx 0$$

d'où

$$aa'' + bb'' \approx 0$$

et après (50)

$$\omega^2 (a^2 + b^2) + \frac{EM^2}{a^2 b^2} (a^2 + b^2) - 2A \approx 0 \quad (86)$$

Reprenant un calcul d'énergie analogue à celui effectué pour les oscillations symétriques, on obtient alors, en faisant appel à cette relation (86) l'expression suivante:

$$\omega^2 - \frac{EM_i^2}{a_i^2} - \frac{A}{chp'} \approx 0 \quad (87)$$

et finalement

$$a_f^2 \approx \frac{a^2 + b^2}{2} \left[1 + \frac{\text{Log ch } p' - 2 \text{ Log ch}(p'/2) + 2\varepsilon_{2f} - 2\varepsilon_{2i}}{1 + 2 \frac{\omega^2 a_f^2}{A} - 1} \right] \quad (88)$$

où l'on a posé

$$p' = \text{Log } \frac{a}{b} \quad (89)$$

On peut voir, cette fois encore, que le terme entre crochet reste voisin de l'unité l'écart pouvant d'ailleurs être compensé par les termes en ε_2 , confirmant les résultats numériques d'après lesquels

$$a_f^2 \approx (a^2 + b^2) / 2 \quad (90)$$

Des relations (84), (85) ou (88), (90) on déduit alors facilement les augmentations d'émission résultant d'une désadaptation. La méthode énergétique permet en principe de traiter le cas de n'importe quel type de désadaptation, même complexe.

Remarque

Les formules (79) et (87) permettent de trouver approximativement la relation liant maximum et minimum d'amplitude en oscillations symétriques ou antisymétriques. Le résultat d'un calcul numérique plus précis est donné dans un rapport antérieur (Lapostolle [1970]) sur les figures (13) et (14) avec $\delta = A/\omega EM$.

7. CONCLUSIONS

Les exemples qui précèdent, montrent divers types d'application des équations de K/V généralisées.

Ces équations semblent constituer un formalisme susceptible d'être développé pour l'étude détaillée des évolutions d'émittance en présence de charge d'espace.

Si une extension de l'étude des divers modes d'oscillation libre dans un faisceau (R. Gluckstern [1970 b]) permettait d'obtenir des expressions de ϵ_1 et de ϵ_2 et ses dérivées, on pourrait écrire une équation de couplage de ces oscillations avec les oscillations d'enveloppe.

Parallèlement, l'étude de la manière dont les oscillations d'enveloppe excitent des oscillations d'ordre supérieur (P. Lapostolle [1970]) pourrait fournir une deuxième équation de couplage.

L'analyse simultanée de ces deux équations devrait alors fournir l'évolution complète du mouvement du faisceau et décrire entièrement les augmentations d'émittance entraînées par les oscillations d'enveloppe qui ont fait l'objet jusqu'ici seulement d'un traitement approché.

Un type de couplage similaire existe lors des ondulations d'un faisceau dans un système de focalisation périodique alterné; la méthode de calcul évoquée devrait alors expliciter aussi les grossissements d'emittance observés tant dans les calculs numériques (M. Promé et al [1970]) que dans les mesures expérimentales sur les accélérateurs linéaires (P. Lapostolle et al [1968]). Elle permettrait en particulier de savoir si ce type de phénomène existe aussi aux plus faibles charges d'espace ou s'il y a un seuil au dessous duquel il cesse d'apparaître.

Il serait sans doute intéressant enfin d'approfondir la différence qui existe entre l'effet de l'application de champs non linéaires fixes et celui des champs de la charge d'espace proprement dite qui

dépendent des particules elles mêmes. Il est facile, par exemple, de formuler les équations de K/V généralisées (50) et (61) dans le cas de champs appliqués non linéaires et dérivant d'un potentiel: on voit que de tels champs introduisent dans ces équations des termes analogues à $A\varepsilon_1$ ou $A(\varepsilon'_2)_x$ et $A(\varepsilon'_2)_y$, qui s'expriment simplement sous la forme d'une

série de moments d'ordre n - $\sum_{j=0}^n B_j \overline{x^j y^{n-j}}$ ou $\sum_{k=0}^{n-1} C_k \overline{x^{k-1} y^{n-k}}$ et

$\sum_{k=0}^{n-1} C'_k \overline{x^k y^{n-k-1}}$ - n'étant le degré du potentiel appliqué. Les

termes ε relatifs à la charge d'espace proprement dite pourraient-ils aussi s'exprimer à l'aide de moments ou bien une telle forme est-elle impossible? Il n'a pas été possible jusqu'ici de répondre à cette question: on peut voir que la contribution des effets d'image se met sous la forme de produits de moments, mais la contribution du champ propre est plus difficile à évaluer. Au cours des études évoquées ici, les diverses expressions de l'énergie de charge d'espace données au début pourraient se révéler utiles.

Remarque

Les méthodes développées précédemment pour l'étude d'un faisceau continu défini par deux coordonnées transversales pourraient être étendues à l'étude de paquets de particules définis par trois coordonnées (F. Sacherer [1970 b]).

REMERCIEMENTS

Ce travail a été initié par des conversations avec MM R. Le Bail et F. Sacherer. Mais il reflète aussi des idées évoquées précédemment dans des discussions avec de nombreuses personnes parmi lesquelles il faut citer MM.C.S. Taylor et M. Promé. Il n'a également pu se développer que grâce aux programmes de calcul initiaux écrits par P. Tanguy sous la directions du Prof. E. Regenstreif. Certains résultats donnés ici ont enfin été calculés par Mme M. Marty et M. B. Bru. Que tous soient ici remerciés.

BIBLIOGRAPHIE

- Chasman, R., Agritellis, C., Sluyters, Th.; Design of the low energy beam transport system of the Brookhaven 200 MeV Injector Linac. 1969 Particle Accel. Confer. Washington. IEEE trans. on Nuclear Science NS 16 No. 3 pp. 221 - 226. (1969)
- Claus, J. and Benton, A.; Stationary cylindrical beam under space charge conditions. BNL Report AADD-160. (1970)
- Davies, A.; Transverse non linear space charge effects in rotationally symmetric electron and ion beams. Division report CERN, MPS/Int.LIN 69-12. (1969). See also nuclear Instr. and Methods 80, pp. 45 - 54. (1970)
- Gluckstern, R.; Linear Accelerator Conference Batavia 1970. Discussion (to be published) (1970 a)
- Gluckstern, R.; Oscillation modes in two dimensional beams. Linear Accelerator Conference Batavia 1970 (to be published). (1970 b)
- Gluckstern, R., Chasman, R. and Crandall, K.; Stability of phase space distributions in two dimensional beams *ibid.* (1970)
- Kapchinskij, I., Vladimirskij, V.; Limitations of proton beam current in a strong focusing linear accelerator associated with beam space charge. Proceedings of the II Int. Conf. on High Energy Accel. CERN 1959, pp. 274 - 288. (1959)
- Kapchinskij, I.; Dynamique des particules dans les accélérateurs linéaires résonnants (en russe). Atomizdat Moscou 1966, chapitre 3. (1966)
- Kuznetsov, V.S., Kuznetsova, N.P., Fidelskaia, R.P., Solnichkov, A.I., Abroian, M.A.; Etude de l'évolution de la distribution de densité de phase dans des faisceaux réels des particules chargées, à l'aide du calcul numérique. Ctes Rendus Conférence nationale sur les accélérateurs de particules chargées, 9-16 octobre 1968, Moscou, pp. 419 - 425 (en russe). (1968)

- Kuznetsov, V.S., Vakhrushin, I., Komarov, O.L.; Focusing of accelerated intense beams in non periodic focusing systems. IX Int. Conf. on High Energy Accel. Erivan 1969, p. 173 (en russe). (1969)
- Kuznetsov, V.S., Kuznetsova, N.P., Fidelskaia, R.P.; Influence des forces de charge d'espace non linéaires sur la configuration du volume de phase dans des faisceaux intenses de particules chargées. Contribution au IIIe séminaire national sur les méthodes numériques du calcul des systèmes d'optique électronique. 11-13 novembre 1969, Leningrad. (1969)
- Kuznetsov, V.S., Abroian, M.A., Fidelskaia, R.P.; Etude des processus de redistribution de la densité de phase dans les faisceaux protoniques intenses extraits d'une source du type duroplasmatron. Preprint No. D 0102, NIIIEFA Leningrad (en russe). Nuclear Instr. and Methods 81, 296. (1970)
- Kuznetsov, V.S., Bogdanova, V.I., Komarov, O.L.; Calcul de la structure interne des flux intenses de particules chargées ayant une structure non laminaire, axialement symétrique. Preprint No. D 0111, NIIIEFA Leningrad (en russe). Traduction DSS TR-R-47 CEN Saclay. (1970)
- Lapostolle, P.M., Taylor, C., Tetu, P., Thorndahl, L.; Intensity dependent effects and space charge limit investigations on CERN linac and PS. CERN Report 68.35. (1968)
- Lapostolle, P.M.; Une distribution de charges stationnaire dans un système de focalisation continu. Rapport de division CERN, ISR/300 LIN/69-19. (1969 a)
- Lapostolle, P.M.; Density distributions in intense beams. CERN Divisional report ISR/300 LIN/69-42, Proceedings of the VII Int. Conf. on High Energy Accel. Erivan 1969, pp. 205-212. (1969 b)
- Lapostolle, P.M., Lapostolle, B.; Quelques propriétés des distributions de charge dans un système de focalisation. Rapport de division CERN, ISR/300 LIN/69-43. (1969)
- Lapostolle, P.M.; Quelques propriétés essentielles de la charge d'espace dans les faisceaux continus. Rapport de division CERN, ISR-DI/70-36. (1970)

- Le Bail, R.; Fast reversal mapping for the solution of an important class of linear second order two-dimensional operators. CERN Divisional Report, IS/Int/DL/70-11. (1970)
- Promé, M.; Etude de quelques distributions de particules dans l'espace des phases; application à la charge d'espace. Rapport interne CEA Saclay SEFS. TD 69/35. (1969)
- Promé, M., Lefebvre, J.M.; Operation report of the Saturne Linac Injector. Space charge computation results. Linear Accelerator Conference Batavia (1970). (to be published) (1970)
- Sacherer, F.; Matched distributions with non uniform space charge and no emittance growth. Divisional report CERN, SI/Int/DL/70-5. (1970 a)
- Sacherer, F.; RMS Envelope equations with space charge. Divisional report CERN, SI/Int/DL/70-12. Particle Accelerator Conf. Chicago 1971, to be published in IEEE trans. on Nuclear Science NS 18 No. 3 (1970 b)
- Tanguy, P.; Etude des effets de charge d'espace dans des faisceaux à densité non uniforme. Rapport de division CERN, MPS/Int LIN 69-11, et Procédés numériques pour l'étude des effets de charge d'espace et d'aberrations géométriques dans les systèmes de guidage de faisceaux. Rapport de division CERN, MPS/LIN/70-1. (1969)
- Taylor, C., Davies, A., Tanguy, P.; Non linear space charge effects in beam dynamics. IX Int. Conf. on High Energy Accel., Erivan 1969, p. 213. (1969)

ANNEXE I

CALCUL DIRECT DE L'ENERGIE DE CHARGE D'ESPACE D'UNE
DISTRIBUTION A SYMETRIE DE REVOLUTION

Si la force de répulsion entre deux charges ponctuelles est égale au produit de leurs charges divisé par $4\pi \epsilon_0 d^2$, d étant leur distance, une intégration facile montre que la force de répulsion, par unité de longueur, entre deux lignes de charge de densité linéique l_1 et l_2 est égale à

$$l_1 l_2 / 2\pi \epsilon_0 d$$

d étant leur distance.

On peut alors dire, par définition et en se conformant aux considérations données au début du paragraphe 2 que l'énergie de charge d'espace de ces deux lignes de charge est

$$\frac{l_1 l_2}{2\pi \epsilon_0} \text{Log } d$$

Adoptant les notations complexes et posant

$$z = x + jy$$

on peut alors dire que l'énergie de charge d'espace de deux tubes de charge de densité $\rho(z_1)$ et $\rho(z_2)$ et d'extension $dx_1 dy_1, dx_2 dy_2$ est égale à

$$- \frac{\rho(z_1) \rho(z_2)}{2\pi \epsilon_0} \text{Re}(\text{Log } [z_2 - z_1]) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

Si on considère maintenant un faisceau de densité $\rho(r)$ à symétrie de révolution, pour obtenir son énergie de charge d'espace, il suffira d'intégrer l'expression précédente sur tout le faisceau en prenant soin de ne calculer qu'une fois l'interaction relative à deux tubes donnés.

Pour effectuer cette intégration quadruple on la ramènera à une intégrale double en considérant des tubes cylindriques circulaires successifs et pour éviter de compter deux fois les mêmes termes d'interaction on va considérer l'interaction d'un tube circulaire cylindrique avec tous les tubes intérieurs.

Prenant un point Z de ce tube on sera alors amené à calculer une intégrale de la forme

$$- \iint \rho(z) \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{Log}(Z - z) \right\} dx dy$$

Comme on a, d'après notre mode de calcul

$$|Z| > |z|$$

on peut écrire

$$\operatorname{Re} \left\{ \operatorname{Log}(Z - z) \right\} = \operatorname{Log}|Z| - \operatorname{Re} \left[\frac{z}{Z} + \frac{z^2}{2Z^2} + \frac{z^3}{3Z^3} + \dots \right]$$

Prenant des tubes successifs présentant tous la symétrie de révolution, il est aisé de voir que les termes du développement donnent par sommation tous une intégrale nulle. Le terme en $\operatorname{Log}|Z| = \operatorname{Log} r$ donne une intégrale égale à $q(r)$ comme défini par (4).

On obtient finalement pour énergie de charge d'espace

$$- \int_0^{\max} \frac{q(r) \rho(r)}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{Log} r 2\pi r dr$$

On retrouve donc bien l'expression (7) où le premier membre n'est autre que l'énergie de charge d'espace (changée de signe) dans l'état "initial", c'est-à-dire lorsque toutes les charges sont réparties sur un cylindre de rayon R.

ANNEXE II

CHAMP EXTERIEUR CREE PAR UN FAISCEAU CONTINU DE CHARGES

Adoptant la notation complexe, il est facile de voir que le champ électrique dE créé en un point Z par un tube de charge de densité $\rho(z)$ et d'extension de dy est

$$dE = \frac{Z - z}{2\pi\epsilon_0 |Z - z|^2}$$

c'est-à-dire

$$dE = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 (Z - z)^*}$$

ou encore

$$2\pi\epsilon_0 dE^* = \frac{1}{Z - z}$$

Le champ total E s'obtient par intégration:

$$2\pi\epsilon_0 E^* = \iint \rho(z) \frac{dx dy}{Z - z}$$

Cette intégrale peut se mettre sous une forme aisément calculable dans le cas où

$$|Z| > |z|$$

On peut alors écrire en effet

$$\frac{1}{Z - z} = \frac{1}{Z} \left[1 + \frac{z}{Z} + \frac{z^2}{Z^2} + \frac{z^3}{Z^3} + \dots \right]$$

ce qui donne:

$$2\pi\epsilon_0 E^* = \frac{1}{Z} \iint \rho(x,y) dx dy + \frac{1}{Z^2} \iint \rho(x,y)(x + jy) dx dy + \frac{1}{Z^3} \iint \rho(x,y)(x^2 - y^2 + 2jxy) dx dy + \dots$$

Les intégrales figurant dans cette expression **sont** les moments d'ordre 0, 1, 2.... de la distribution de charges $\rho(x,y)$.

Si la distribution présente deux plans de symétrie, tous les moments d'ordre impair sont nuls et

$$2\pi\epsilon_0 E^* = \frac{1}{Z} \iint \rho(x,y) dx dy + \frac{1}{Z^3} \iint \rho(x,y)(x^2 - y^2 + 2jxy) dx dy + \frac{1}{Z^5} \iint \rho(x,y)(x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4jx^3y - 4jxy^3) dx dy + \dots$$

Il est important de noter toutefois que ces expressions ne sont valables que si

$$|Z| > |z|$$

pour tous les points du faisceau, ce qui est beaucoup plus restrictif que la condition que Z soit extérieur au faisceau.

Toute distribution présentant des moments tels que les combinaisons apparaissant dans les expressions précédentes aient les mêmes valeurs donne le même champ extérieur et le potentiel de charge d'espace y est donc le même.

ANNEXE III

ENERGIE DE CHARGE D'ESPACE D'UN FAISCEAU CONTINU OU LA DISTRIBUTION DE CHARGES PRESENTE DEUX PLANS DE SYMETRIE

L'expression de l'énergie a laquelle on va se ramener est l'expression (27)

$$W_{ce} = \frac{\epsilon_0}{2} \iint |E|^2 dx dy$$

Pour transformer cette expression on cherche un vecteur dont la divergence puisse se mettre sous la forme d'une somme de termes dont l'un soit $|E|^2$; on applique alors à l'intégrale de cette divergence la formule de Riemann.

Il est bon pour commencer de vérifier qu'en dehors de la relation classique

$$\operatorname{div} \left(\frac{E^2}{2} \vec{r} \right) = E^2 + \vec{r} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{E^2}{2}$$

on peut aussi écrire

$$\operatorname{div} \left(\frac{E^2}{2} \vec{r} \right) = (\vec{E} \cdot \vec{r}) \operatorname{div} E - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} (\vec{r} \times \vec{E})$$

Appliquant un calcul semblable au vecteur $\frac{E^2}{2} \operatorname{Log}(|x| + |y|) \vec{r}$ on obtient alors

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[\frac{E^2}{2} \operatorname{Log}(|x| + |y|) \vec{r} \right] &= \vec{E} \cdot \vec{r} \operatorname{Log}(|x| + |y|) \operatorname{div} E \\ &- \vec{E} \operatorname{Log}(|x| + |y|) \overrightarrow{\operatorname{rot}} (\vec{r} \times \vec{E}) + \frac{E^2}{2} \end{aligned}$$

Or, pour une distribution possédant deux plans de symétrie, on peut remarquer que \vec{E} , aussi bien que \vec{r} sont des vecteurs qui possèdent également en fonction de x et de y ces plans de symétrie; la fonction

$\text{Log}(|x| + |y|)$ possède elle aussi ces mêmes symétries. Dans ces conditions $\text{rot}(\vec{r} \times \vec{E})$ est antisymétrique en x et y et il en est de même de l'expression

$$\vec{E} \text{Log}(|x| + |y|) \overrightarrow{\text{rot}(\vec{r} \times \vec{E})}$$

L'intégrale de cette expression dans un domaine symétrique par rapport aux plans x et y est donc nulle.

On a alors

$$\begin{aligned} & \iint \vec{E} \cdot \vec{r} \text{Log}(|x| + |y|) \text{div } E \, dx \, dy + \iint \frac{E^2}{2} \, dx \, dy \\ &= \oint \frac{E^2}{2} \text{Log}(|x| + |y|) \vec{r} \, d\vec{n} \end{aligned}$$

où encore

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_0}{2} \iint E^2 \, dx \, dy &= \frac{\epsilon_0}{2} \oint E^2 \text{Log}(|x| + |y|) \vec{r} \, d\vec{n} \\ &- \iint \vec{E} \cdot \vec{r} \text{Log}(|x| + |y|) \rho \, dx \, dy \end{aligned}$$

Si le contour choisi est assez éloigné du faisceau, d'après l'Annexe II on voit que le champ en Z peut être développé en fonctions impaires de $\frac{1}{Z} \cdot E^2$, développé également aura alors pour partie principale

$$\frac{Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 |Z|^2}$$

le terme suivant étant en $1/Z^4$.

Sur un contour circulaire de rayon R l'intégrale curviligne a alors pour valeur

$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \text{Log } R + \frac{Q^2}{2\pi^2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \text{Log}(\sin \vartheta + \cos \vartheta) d\vartheta = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \text{Log}(1,115 \cdot R)$$

On a donc:

$$\frac{\epsilon_0}{2} \iint E^2 dx dy = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \text{Log}(1,115 R) - \iint \vec{E} \cdot \vec{r} \text{Log}(|x| + |y|) \rho dx dy$$

Remarque

Appliquant la méthode de calcul précédente au vecteur $\frac{1}{2}E^2\vec{r}$, on obtient la relation:

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{r} \rho dx dy = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}$$

on en déduit

$$\overline{x E_x} + \overline{y E_y} = A / 2$$

ANNEXE IV

CALCUL DE ϵ_1 POUR UNE DISTRIBUTION RECTANGULAIRE UNIFORME

Rappelons que l'on a:

$$A \frac{a+b}{4ab} \epsilon_1 = \frac{\overline{x E_x}}{a} - \frac{\overline{y E_y}}{b}$$

ou encore

$$\epsilon_1 = \frac{4}{A} \frac{b \overline{x E_x} - a \overline{y E_y}}{a+b}$$

et, d'après l'Annexe III (remarque)

$$\epsilon_1 = 2 \frac{b \overline{x E_x} - a \overline{y E_y}}{(a+b)(\overline{x E_x} + \overline{y E_y})}$$

Si on considère une distribution de charge uniforme dans un rectangle, le coefficient ϵ_1 ne dépendra que du rapport des côtés que nous pourrons appeler a et b.

Pour évaluer ϵ_1 , il nous faut alors calculer l'une des moyennes $\overline{x E_x}$ ou $\overline{y E_y}$ (l'autre s'en déduisant par symétrie) prise sur l'ensemble des particules.

Ces moyennes sont obtenues par une intégrale quadruple, d'abord pour le calcul du champ au point x, y (sur les particules dont nous désignerons les coordonnées par X, Y) puis pour le calcul de la moyenne (par une intégration en x, y).

En négligeant l'écriture de la densité et des facteurs numériques qui s'éliminent dans l'expression de ϵ_1 on a

$$\overline{x E_x} = \iint x E_x dx dy = \iiint \frac{x(x-X)}{(x-X)^2 + (y-Y)^2} dx dy dX dY$$

Par raison de symétrie, on a évidemment:

$$\overline{x E_x} = \iiint \frac{X (X - x)}{(x - X)^2 + (y - Y)^2} dx dy dX dY$$

d'où également

$$\overline{x E_x} = \frac{1}{2} \iiint \frac{(x - X)^2}{(x - X)^2 + (y - Y)^2} dx dy dX dY$$

L'ordre d'intégration étant arbitraire, on intègre d'abord en y, Y (sur un carré de côté 2b) et procède pour cela à un changement d'axe:

$$y - Y = u\sqrt{2}$$

$$y + Y = v\sqrt{2}$$

on obtient, en se limitant à un quadrant et multipliant le résultat par 4:

$$\begin{aligned} \overline{x E_x} &= 2 \iint (x - X)^2 dx dX \iint \frac{du dv}{2u^2 + (x - X)^2} \\ &= 2 \iint (x - X)^2 dx dX \int \frac{b\sqrt{2} - u}{2u^2 + (x - X)^2} du \\ &= 2 \iint (x - X)^2 \left[\frac{b}{x - X} \operatorname{arctg} \frac{2b}{x - X} - \frac{1}{4} \operatorname{Log} \frac{4b^2 + (x - X)^2}{(x - X)^2} \right] dx dX \end{aligned}$$

On peut procéder ensuite d'une manière analogue, par le même type de changement de variable, à l'intégration en x.X, dans un carré de côté 2a.

Le calcul, un peu long, ne présente cependant pas de difficulté.

On trouve

$$\begin{aligned} \overline{x E_x} &= 4 a^2 b^2 + \frac{16 ab}{3} \left(a^2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - b^2 \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) \\ &\quad + \frac{4}{3} \left(a^4 \operatorname{Log} \frac{a^2}{a^2 + b^2} - b^4 \operatorname{Log} \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1}{2} &= \frac{b-a}{b+a} + \frac{4}{3} \left(\frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) \\ &+ \frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{b^2} \operatorname{Log} \frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{b^2}{a^2} \operatorname{Log} \frac{b^2}{a^2+b^2} \right) \end{aligned}$$

Les variations de ε_1 en fonction de b/a sont indiquées sur la figure 1.

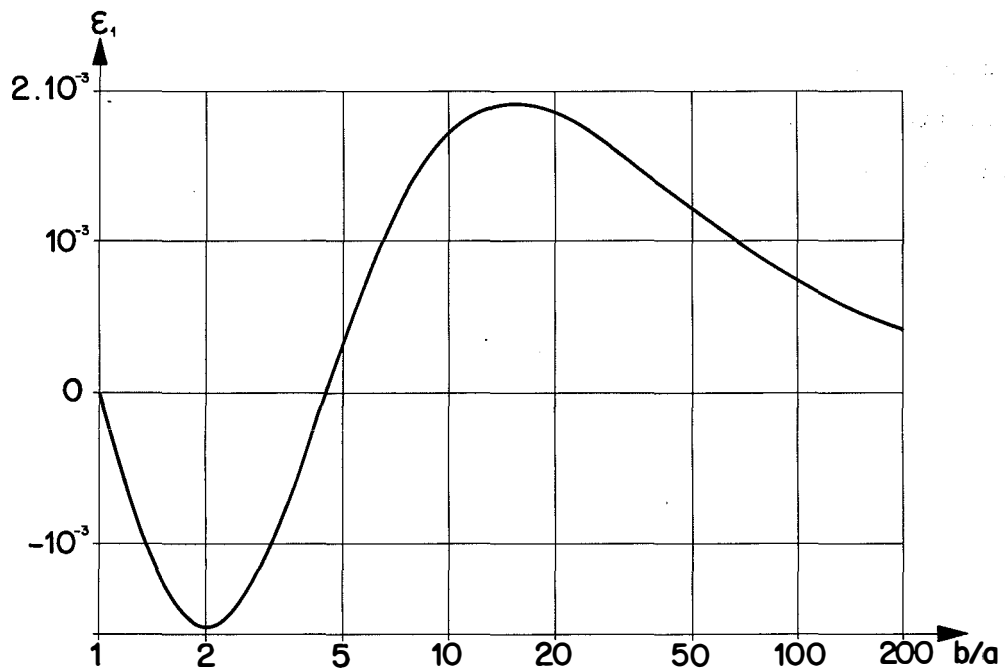


Figure 1 - Terme correctif ε_1 (de champ) des équations de Kapchinskij/Vladimirskij généralisées (le forme) pour un faisceau uniforme rectangulaire de demi axes a et b .

ANNEXE V

CALCUL DE ϵ_2 POUR DIVERSES DISTRIBUTIONS DE REVOLUTION

On va ici considérer pour simplifier des distributions présentant une symétrie de révolution, qui permettent d'utiliser l'expression

$$W_{ce} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \text{Log } R - \int_0^R \frac{q(r) \rho(r)}{\epsilon_0} \text{Log } r \, r dr$$

et on bornera l'examen à la valeur de l'intégrale qui seule caractérise la distribution (le premier terme dépend de l'état initial choisi pour définir l'énergie) a).

Posant

$$u = r^2$$

et

$$q_1(u) = \int_0^{u_0} \rho(u) \, du = \frac{q(u)}{\pi}$$

l'intégrale figurant dans W_{ce} s'écrit

$$- \frac{\pi}{4\epsilon_0} \int_0^{u_0} q_1(u) \rho(u) \text{Log } u \, du$$

-
- a) Appliquant un formalisme analogue à celui employé par F. Sacherer [1970 b] on pourrait étendre ces résultats à des distributions présentant une symétrie elliptique (affines d'une distribution circulaire), dans l'espace libre.

C'est cette intégrale, ou plus précisément

$$I = \frac{\pi^2}{Q^2} \int_0^{u_0} q_1(u) \rho(u) \text{Log } u \, du,$$

telle que

$$W_{ce} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} (\text{Log } R - I)$$

que l'on va calculer ici.

On cherchera à l'exprimer non pas en fonction de u_0 qui caractérise la dimension extrême du faisceau, mais de sa dimension en moyenne quadratique définie par

$$u_a = \frac{\int_0^{u_0} \rho(u) u \, du}{\int_0^{u_0} \rho(u) \, du}$$

et telle que (voir section 5, équ. 41):

$$u_a = a^2 / 2 = b^2 / 2$$

Remarquant que

$$Q = \pi q_1(u_0)$$

et effectuant une intégration par parties, I peut encore s'écrire:

$$I = \frac{1}{2} \text{Log } u_0 - \frac{1}{2q_1^2(u_0)} \int_0^{u_0} \frac{q_1^2(u)}{u} \, du$$

que l'on mettra sous la forme

$$I = \frac{1}{2} \text{Log } u_0 + \varepsilon_2 = \text{Log } \frac{a+b}{2\sqrt{2}} + \varepsilon_2$$

On va maintenant examiner quelques distributions particulières:

a) Distribution de couche infiniment mince

Cette distribution n'est réalisable physiquement en toute rigueur qu'avec une émittance de faisceau nulle et une charge d'espace également nulle; on l'envisage donc ici seulement comme cas limite.

On a alors

$$u_a = u_0$$

et

$$I = \frac{1}{2} \text{Log } u_a$$

b) Distribution à densité croissante en fonction du rayon

Une telle distribution est également rare en pratique.

Prenons

$$\rho(u) = u \quad u < u_0$$

Alors

$$q_1(u) = \frac{u^2}{2}$$

$$u_a = \frac{2}{3} u_0$$

et

$$I = \frac{1}{2} \text{Log } \frac{3}{2} u_a - \frac{1}{8}$$

soit

$$I = \frac{1}{2} \text{Log } u_a + 0,0777$$

c) Distribution uniforme

$$\rho(u) = 1 \quad u < u_0$$

Alors

$$q_1(u) = u$$

$$u_a = \frac{u_0}{2}$$

et

$$I = \frac{1}{2} \text{Log } 2u_a - \frac{1}{4}$$

soit

$$I = \frac{1}{2} \text{Log } u_a + 0,0966$$

d) Distribution de couche épaisse uniforme

Soit une couche s'étendant de $u_a (1 - x)$ à $u_a (1 + x) = u_0$
on peut écrire dans cet intervalle

$$q_1(u) = 1 + \frac{u - u_a}{u_0 - u_a} = \frac{u - u_a (1 - x)}{u_a x}$$

Tous calculs faits, on obtient

$$I = \frac{1}{2} \text{Log } u_a + \frac{1}{2} \text{Log}(1 + x) + \frac{1}{4} \frac{1 - 2x}{x} - \frac{1}{8} \frac{(1 - x)^2}{x^2} \frac{1 + x}{\text{Log } 1 - x}$$

La fonction de x apparaissant dans I varie de façon continue entre 0 pour $x = 0$ (couche infiniment mince) et 0,0966 pour $x = 1$ (faisceau à densité uniforme jusqu'à l'axe). Les variations sont indiquées sur la figure 2.

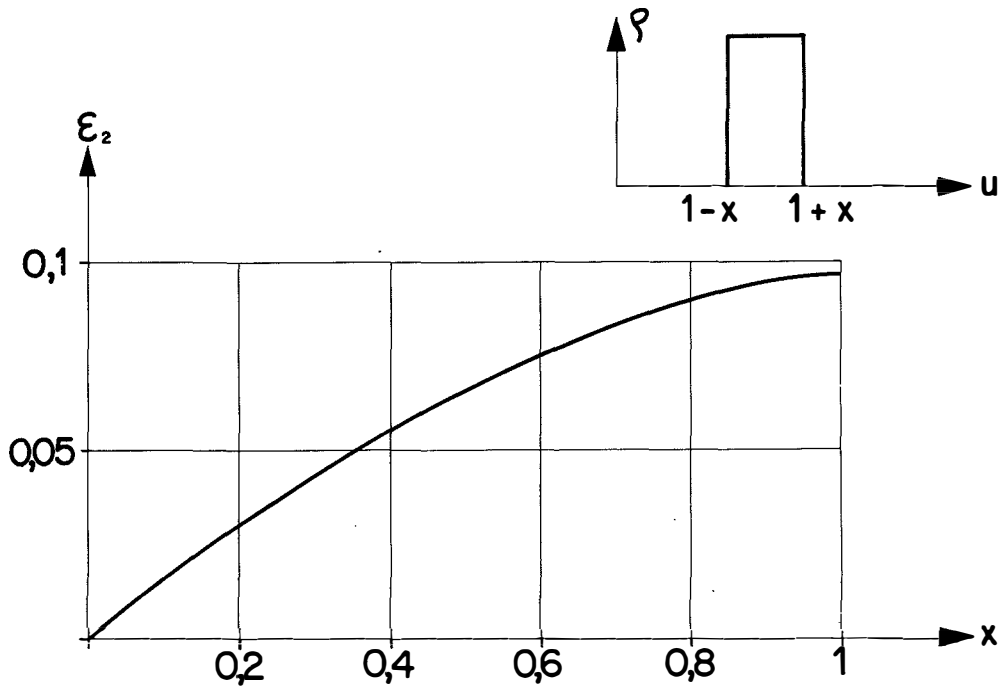


Figure 2 - Terme correctif ϵ_2 (énergétique) des équations de Kapchinskij/Vladimirskij généralisées (2e forme) pour un faisceau annulaire épais.

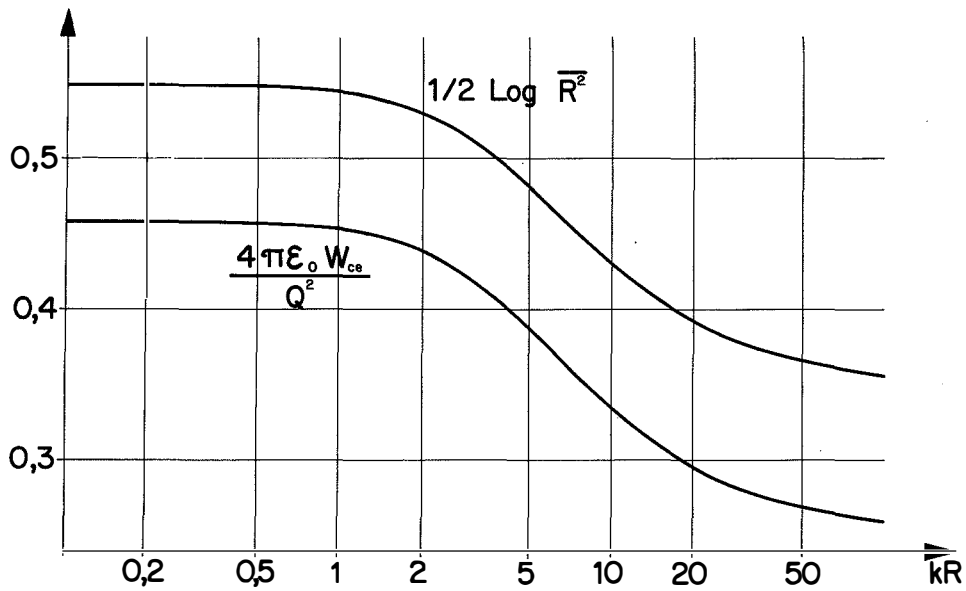


Figure 3 - Energie de charge d'espace et logarithme népérien du rayon en moyenne quadratique d'un faisceau stationnaire à distribution uniforme dans l'espace des phases (à 4 dimensions) en fonction du paramètre de charge d'espace kR .

e) Distribution parabolique

$$\rho(u) = 1 - \frac{u}{u_0} \quad u < u_0$$

Alors

$$q_1(u) = u - \frac{u^2}{2u_0}$$

$$u_a = \frac{1}{3} u_0$$

et

$$I = \frac{1}{2} \text{Log } 3u_a - \frac{11}{24}$$

soit

$$I = \frac{1}{2} \text{Log } u_a + 0,0910$$

f) Distribution en fonction de Bessel

Employant les notations du rapport B. et P. Lapostolle [1969] on obtient:

$$W_{ce} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \frac{I_1^2(kR) - 3 I_0(kR) I_2(kR) + \frac{k^2 R^2}{8} I_0^2(kR)}{k^2 R^2 I_0^2(kR)}$$

Les variations de $4\pi W_{ce} / Q^2$ en fonction de kR son indiquées sur la figure 3 ainsi que celles de $\frac{1}{2} \text{Log } \overline{R^2}$. Les variations de l'écart

$$\frac{4\pi\epsilon_0 W_{ce}}{Q_1^2} - \frac{1}{2} \text{Log } \overline{R^2}$$

sont indiquées sur la figure 4. On voit que cette quantité varie progressivement de 0,0910 pour $kR = 0$ (densité parabolique) à 0,0966 pour $kR \infty$ (densité uniforme).

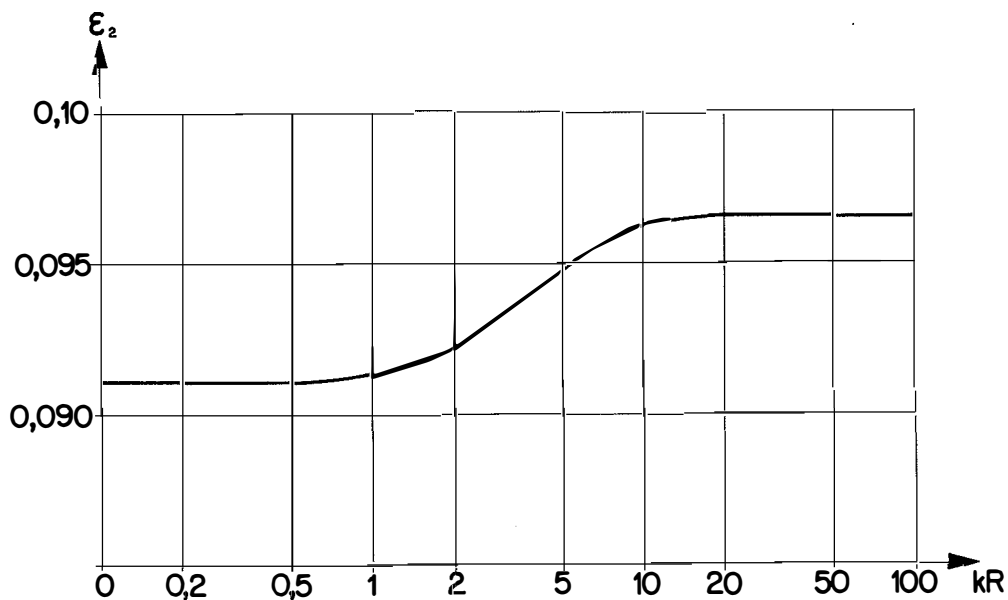


Figure 4 - Terme correctif ϵ_2 (énergétique) des équations de Kapchinskij/Vladimirskij généralisées (2e forme) pour un faisceau stationnaire à densité uniforme dans l'espace des phases (à 4 dimensions) en fonction du paramètre de charge d'espace kR .

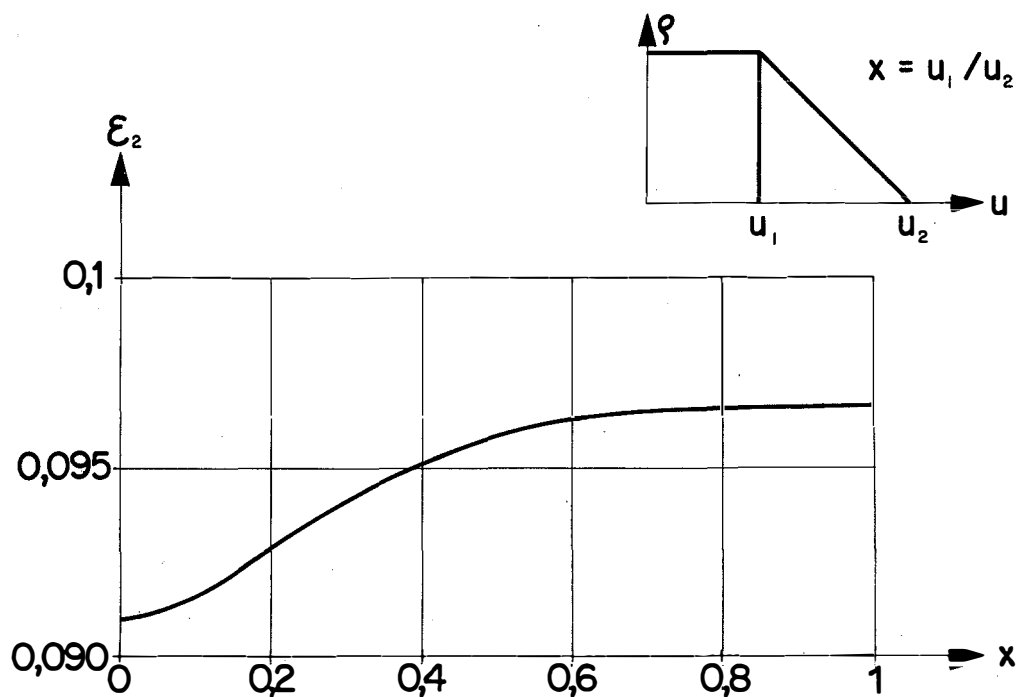


Figure 5 - Terme correctif ϵ_2 (énergétique) des équations de Kapchinskij/Vladimirskij généralisées (2e forme) pour un faisceau circulaire de densité uniforme au centre et parabolique sur les bords.

g) Distribution uniforme au centre, parabolique sur les bords.

On peut écrire

$$\rho = 1 \quad q_1 = u \quad u < u_1$$
$$\rho = \frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} \quad q_1 = \frac{-u_1^2 + 2u_2 u - u^2}{2(u_2 - u_1)} \quad u_1 < u < u_2$$

On a alors

$$u_a = \frac{1}{3} \frac{u_2^3 - u_1^3}{u_2^2 - u_1^2}$$

et après un calcul sans grande difficulté, on trouve en posant $x = u_1/u_2$

$$I = \frac{1}{2} \text{Log } u_a + \frac{1}{2} \text{Log } 3 - \frac{11}{24}$$
$$+ \frac{x^2}{(1+x)^2} \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{(1-x)^2} \text{Log } x + \frac{1}{2} \text{Log} \left(1 - \frac{x^2}{1+x+x^2}\right)$$

Les variations de ε_2 , continues entre 0,0910 et 0,0966 sont indiquées sur la figure 5.

h) Distribution gaussienne

Prenons

$$\rho(u) = e^{-u}$$

$$q_1(u) = 1 - e^{-u}$$

$$u_a = 1$$

On doit, pour achever les calculs avoir recours à une estimation numérique de l'intégrale. On trouve

$$I = \frac{1}{2} \text{Log } u_a + 0,0559$$

i) Autre distribution en cloche, décroissante de l'axe vers les bords

Soit

$$\rho(u) = \frac{1}{(1 + u^2)^{3/2}}$$

$$q(u) = \frac{u}{(1 + u^2)^{1/2}}$$

$$u_a = 1$$

Les calculs sont aisés. On trouve

$$\frac{q_1^2(u)}{u} du = \frac{1}{2} \text{Log} (1 + u^2)$$

et

$$I = \frac{1}{2} \text{Log} u_a$$

c'est à dire $\varepsilon_2 = 0$.

Il est intéressant de noter cependant que la coupure d'une partie de la queue de la distribution fait rapidement monter la valeur de ε_2 .

j) Distributions diverses: deux couches minces de même charge

On peut trouver des distributions pour lesquelles ε_2 est extérieur à l'intervalle $0 - 0,1$. Celle de deux couches minces en donne un premier exemple.

Supposons les couches disposées en $u_a (1 \pm x)$. On trouve aisement

$$I = \frac{1}{2} \text{Log} u_a + \frac{1}{8} \text{Log}(1 + x)^3(1 - x)$$

Le terme en x présente un maximum égal à 0,0654, pour $x = 0,5$.
Les variations sont indiquées sur la figure 6.

On voit que pour $x > 0,839$ le terme correctif ϵ_2 présente un signe négatif.

k) Distributions diverses: superposition de deux faisceaux de densité uniforme jusqu'à l'axe transportant la même charge.

On a ici un nouvel exemple où ϵ_2 peut sortir de l'intervalle $0 - 0,1$.

On peut représenter la distribution précédente par

$$q_1 = \frac{2u}{u_0(1-x^2)} \quad \text{pour } u < u_0(1-x)$$

et

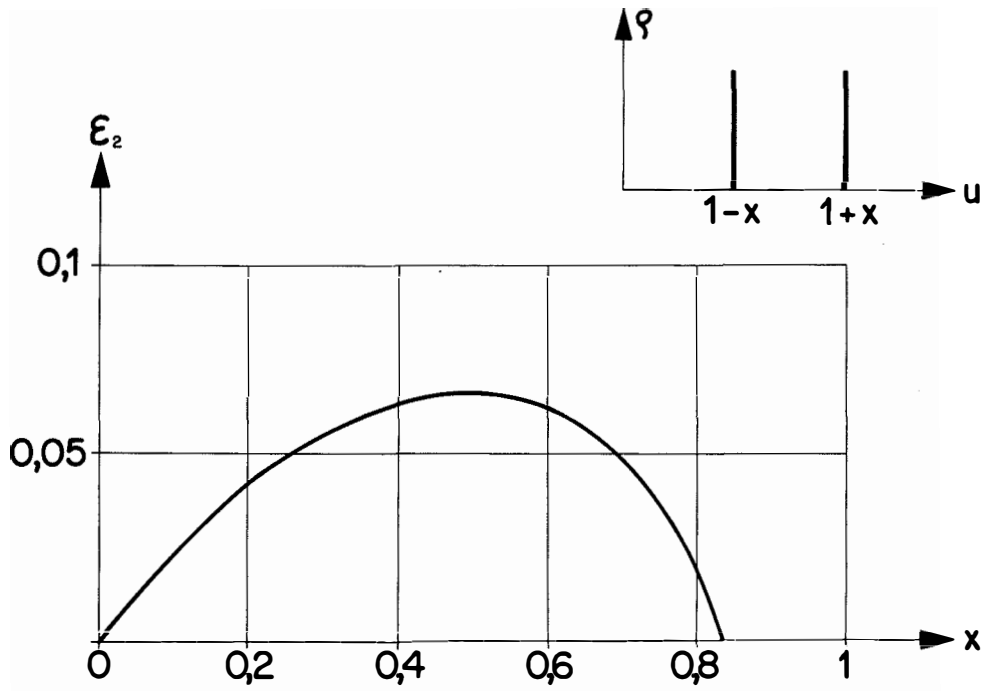
$$q_1 = 1 + \frac{u}{u_0(1+x)} \quad \text{pour } u_0(1-x) < u < u_0(1+x)$$

On trouve sans difficulté

$$I = \frac{1}{2} \text{Log } u_a + \frac{1}{2} \text{Log } 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \text{Log}(1+x)^3(1-x) - \frac{x}{4(1+x)^2}$$

Les variations du terme ϵ_2 sont indiquées sur la figure 7. On voit qu'il peut devenir légèrement supérieur à 0,10 et, comme dans le cas précédent, devenir négatif lorsqu'on a une très forte densité près de l'axe.

Il est bon de remarquer toutefois que parmi les distributions étudiées seules sortent de l'intervalle $0 - 0,1$ des distributions présentant des discontinuités.



Figures 6 et 7 - Terme correctif ϵ_2 (énergétique) des équations de Kapchinskij/Vladimírskij généralisées (2e forme) pour des faisceaux circulaires de distributions diverses.

