



ORGANISATION EUROPEENNE POUR LA RECHERCHE NUCLEAIRE

CERN-ISR/DI-70-36

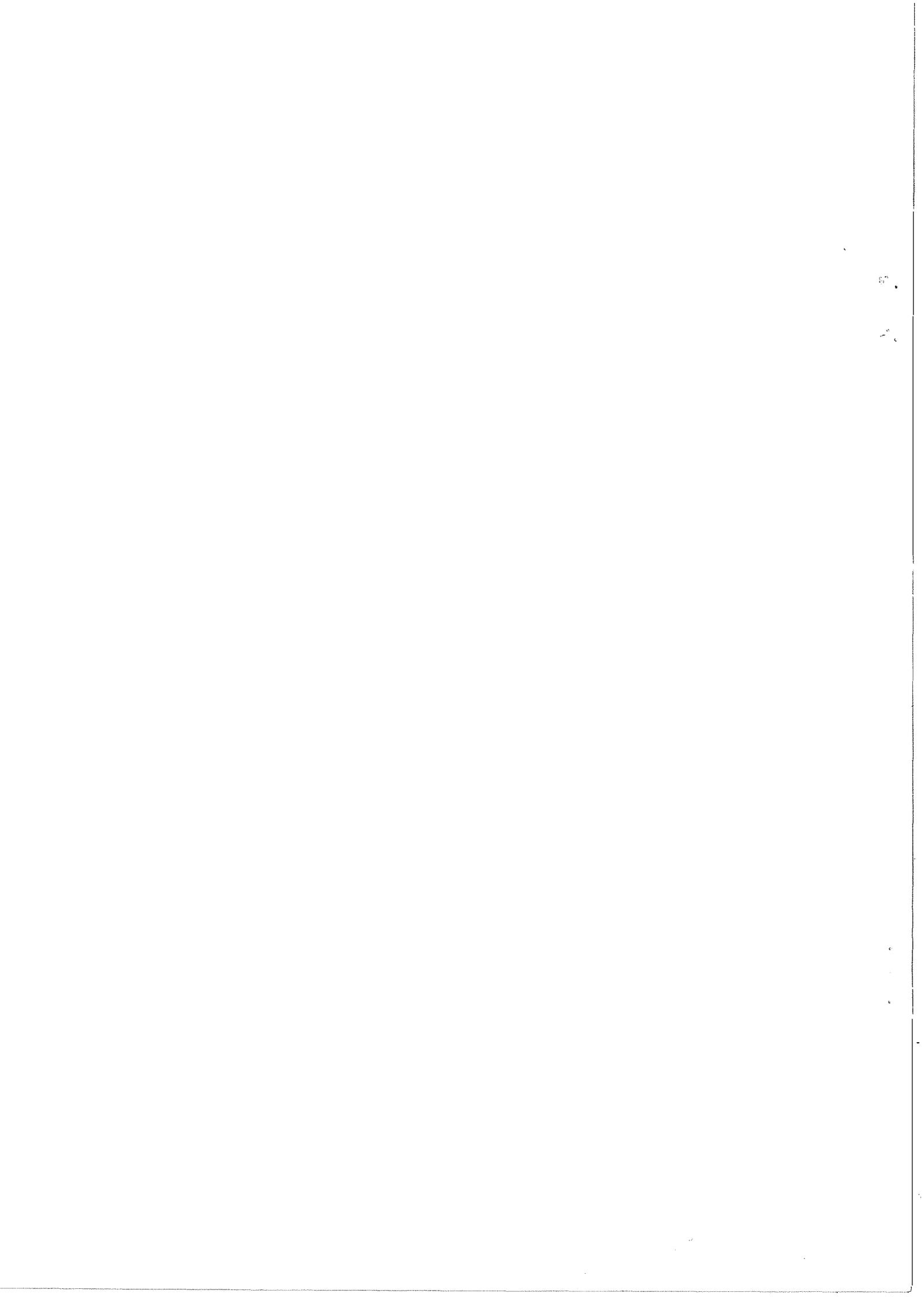
QUELQUES PROPRIETES ESSENTIELLES DES EFFETS DE LA
CHARGE D'ESPACE DANS DES FAISCEAUX CONTINUS

par

P. M. Lapostolle

Genève, Août 1970

Revisé Octobre 1970

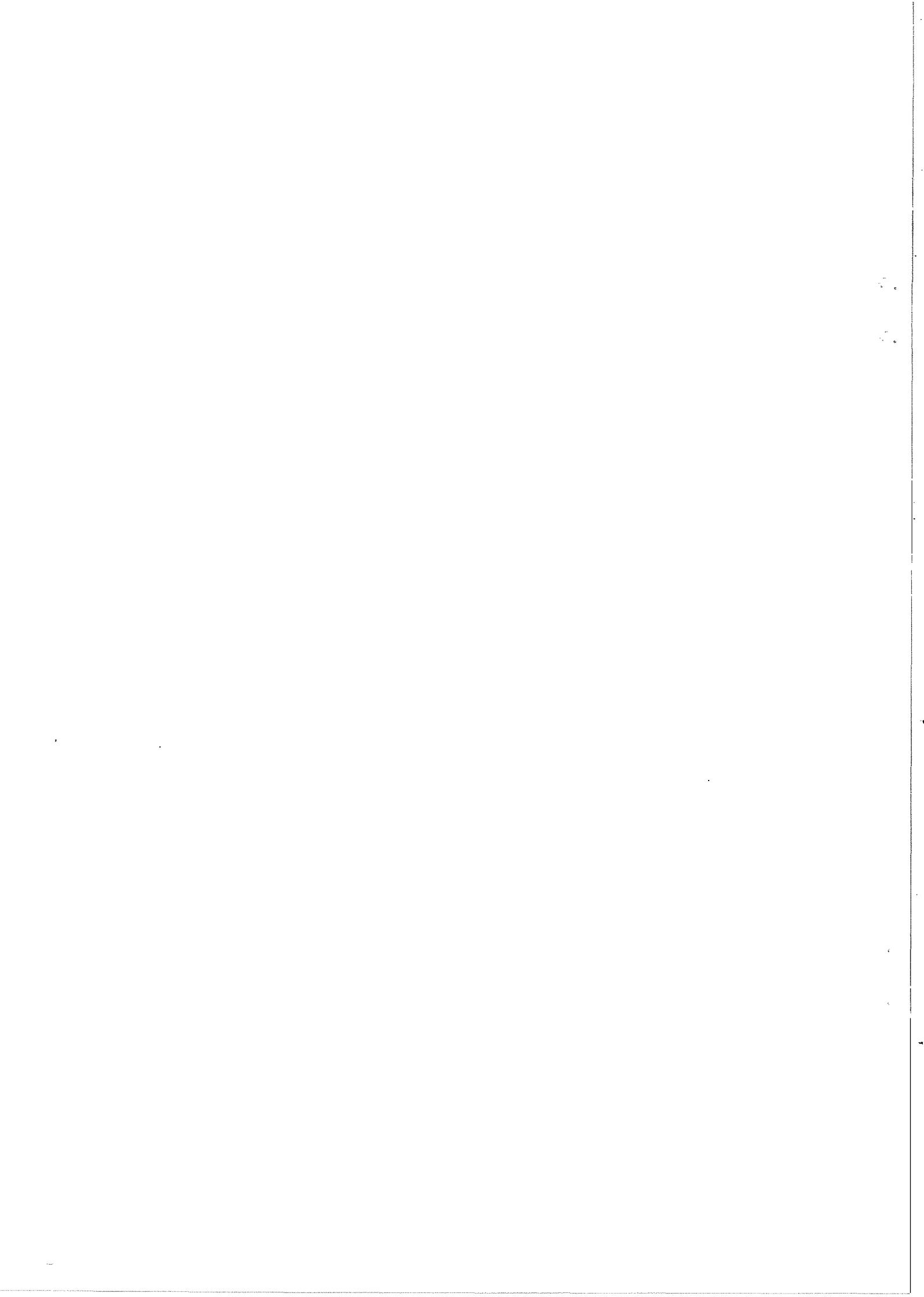


SOMMAIRE

L'étude des oscillations qui peuvent exister dans un faisceau en présence de charge d'espace ont été étendues à des distributions autres que celles décrites par Kapchinskij/Vladimirskij en 1959; le traitement, purement numérique, a permis de constater que les oscillations d'enveloppe sont toujours décrites avec une très bonne approximation par le système d'équations établies par Kapchinskij/Vladimirskij pourvu que les valeurs des axes du faisceau et de ses émittances soient remplacées par des moyennes quadratiques, applicables à n'importe quel type de distribution. Dans un cas complètement étudié on a pu montrer que les distributions stationnaires satisfont rigoureusement ce système et un théorème a été énoncé à ce sujet.

Dans le cas où un faisceau n'est pas adapté et oscille dans un canal de focalisation on assiste à une augmentation d'émittance qui semble liée à l'apparition d'oscillations de densité à l'intérieur du faisceau. On a pu établir que dans ce cas, il y a évolution vers un nouvel état stationnaire qui a été étudié. Ceci, bien entendu, ne serait pas le cas pour la distribution de Kapchinskij/Vladimirskij, à condition toutefois qu'elle soit parfaite, car elle se révèle parfois instable en présence de défauts (statistiques par exemple) d'uniformité.

Un mécanisme analogue, produit par une focalisation alternée, peut aussi conduire à des augmentations continues d'émittance dès que l'on tient compte de la charge d'espace; son étude n'est, cependant, pas terminée.



1. DISTRIBUTION DE CHARGES DE KAPCHINSKIJ ET VLADIMIRSKIJ.
EQUATIONS D'ENVELOPPE.

Le problème de l'évolution d'un faisceau continu de particules chargées dans un système de guidage assurant sa focalisation tenant compte de l'effet répulsif de la charge d'espace a été étudié depuis longtemps. Le travail de Kapchinskij/Vladimirskij (1959) a néanmoins été sans doute le premier à donner du problème une formulation rigoureuse en considérant un faisceau d'émittance transverse non nulle.

La limitation de cette théorie est cependant que le souci de linéariser les équations du mouvement des particules et, pour cela, des champs, y compris ceux de charge d'espace, exige de faire appel à une distribution particulière des charges qui, dans l'espace des phases transversal à 4 dimensions doit être une distribution uniforme de surface sur un hyperellipsoïde. Une telle situation est, évidemment, presque irréalisable en pratique, mais elle est la seule à permettre une formulation simple.

Alors, il est possible d'écrire les équations donnant l'évolution, en fonction de l'abscisse s , des demi axes a et b d'un faisceau de section elliptique possédant suivant ces deux directions transverses orthogonales des émittances E_x et E_y *) avec des forces de rappel de focalisation supposées linéaires en x et y , caractérisées par des longueurs d'onde $\lambda_{x,0}$ et $\lambda_{y,0}$. Si l'on néglige, les effets d'image (faisceau supposé isolé dans l'espace) et si l'on suppose la vitesse longitudinale suffisamment grande et identique pour toutes les particules, négligeant l'effet des

*) Les émittances sont définies comme la surface sur le plan de phase xx' ou yy' divisée par π , x' et y' étant les dérivées par rapport à s .

composantes longitudinales de la charge d'espace et, dans les trajectoires individuelles, les termes x'^2 et y'^2 devant l'unité on peut écrire:

$$\left. \begin{aligned} a'' + \omega_x^2 a - \frac{E_x^2}{a^3} - \frac{2A}{a+b} &= 0 \\ b'' + \omega_y^2 b - \frac{E_y^2}{b^3} - \frac{2A}{a+b} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

où l'on a posé

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{2\pi}{\lambda_{x,0}} \\ \omega_y &= \frac{2\pi}{\lambda_{y,0}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$A = \frac{e I}{2\pi \epsilon_0 m_0 c^3 \beta^3 \gamma^3} \quad (3)$$

I étant l'intensité transportée par le faisceau, e , m_0 , ϵ_0 , c , β et γ ayant la signification usuelle, le système d'unités utilisé étant rationalisé on peut encore écrire:

$$A = \frac{2r_0 I/e}{c \beta^3 \gamma^3} \quad (4)$$

en désignant par r_0 le "rayon électromagnétique" des particules du faisceau: on sait que, pour les protons

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = 1,5347 \cdot 10^{-18} \text{ mètre}$$

Dans le cas particulier où les forces de rappel de focalisation sont égales en x et y et où les émittances E_x et E_y sont égales, on peut mettre le système (1) sous forme réduite:

$$\begin{cases} u'' + u - \frac{1}{u^3} - \frac{2\delta}{u+v} = 0 \\ v'' + v - \frac{1}{v^3} - \frac{2\delta}{u+v} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

en posant

$$\begin{cases} u = a \sqrt{\frac{\omega}{E}} \\ v = b \sqrt{\frac{\omega}{E}} \end{cases} \quad (6)$$

les dérivées étant prises par rapport à l'abscisse $\omega \cdot s = \frac{2\pi}{\lambda_0} s$, avec

$$\delta = \frac{A}{\omega E} \quad (7)$$

ou encore

$$\delta = \frac{r_0 \lambda_0 I/e}{\pi c \beta^2 \gamma^2 (E\beta\gamma)} \quad (8)$$

On a groupé $(E\beta\gamma)$ qui représente ce que l'on appelle l'émittance normalisée qui, d'après le théorème de Liouville est, généralement, supposée invariante au cours du mouvement.

Ce paramètre δ est sans dimensions et caractérise l'intensité de la charge d'espace (P.M. Lapostolle, 1963).

Les groupes d'équations (5) ou (1) permettent d'étudier aisément les deux systèmes d'oscillations symétriques et antisymétriques du faisceau (voir Appendice I) dont le caractère non linéaire est évident; on peut aussi, si l'on s'intéresse à une machine circulaire, étudier les possibilités de traversées de résonances (P.M. Lapostolle, L. Thorndahl, 1967). Il est encore possible, à l'aide du système (1) où l'on donnerait à ω_x^2 et ω_y^2 des valeurs alternativement positives et négatives suivant la valeur de l'abscisse s , d'examiner le cas d'une focalisation périodique alternée, quadripolaire ou autre.

Dans tous les cas, les émittances E_x et E_y sont invariantes au cours du mouvement avec une distribution de Kapchinskij/Vladimirskij pourvu qu'elle soit rigoureusement de ce type car, on le verra plus loin, une telle distribution semble parfois instable (Appendice II).

2. AUTRES DISTRIBUTIONS. INTRODUCTION DE MOYENNES QUADRATIQUES.

Pendant assez longtemps aucune autre distribution que celle de Kapchinskij/Vladimirskij n'a été étudiée car, comme on l'a dit, elle seule sauvegarde le caractère linéaire des équations du mouvement des particules.

Kapchinskij dans son livre sur les accélérateurs linéaires (1966, chapitre 3) a cependant montré qu'on pouvait trouver des distributions de charges stationnaires dans un canal de focalisation continu, c'est-à-dire des distributions qui se conservent au cours du mouvement. Plus récemment P.M. Lapostolle (1969), J. Claus et A. Benton (1970) et M. Promé (1969a) ont étudié deux cas particuliers l'un relatif à une distribution uniforme dans l'espace des phases à quatre dimensions, l'autre à une distribution présentant un caractère gaussien en vitesses. Enfin, R. Gluckstern^{*}, Lloyd Smith^{**} et F. Sacherer (1970) ont établi un formalisme général permettant de trouver toute une famille de telles distributions stationnaires caractérisées par une fonction arbitraire.

*) "Stability of phase space distributions in the presence of space charge" présenté à la "Linac Conference", Batavia 1970

***) Communications privées

Certaines de ces distributions sont bornées dans l'espace des phases mais d'autres (telle, celle de type gaussien) peuvent s'étendre en principe jusqu'à l'infini.

Si l'on veut pour ces distributions établir un formalisme du type de celui décrit dans la première partie, il est clair que les notions de dimension du faisceau et de surface d'émission doivent être modifiées.

Une méthode qui vient facilement à l'esprit consiste à introduire des moyennes quadratiques, qui pour toutes les distributions d'intérêt pratique restent en général bornées (c'est le cas des distributions gaussiennes par exemple).

Pour définir les axes a et b on fera alors appel aux moyennes $\overline{x^2}$ et $\overline{y^2}$. Pour les émittances, on peut, dans le cas où elles sont centrées sur les axes Ox et Ox' adopter par exemple un produit des moyennes en x et en x' . Si la figure est oblique, un tel produit ne caractérise pas la surface d'une ellipse; on peut alors faire appel à des axes obliques disposés selon des diamètres conjugués (fig. 1) et adopter les moyennes quadratiques $\overline{x^2}$ et $\overline{(x' - \alpha x)^2}$ où α est la pente du diamètre conjugué de l'axe Ox' , tel d'ailleurs que la moyenne quadratique $\overline{(x' - \alpha x)^2}$ soit minimale en fonction de α . Avec cette valeur de α on obtient une expression valable quelle que soit l'orientation de la figure d'émission.

Si l'on veut que, pour la distribution de Kapchinskij/Vladimirskij, les valeurs quadratiques moyennes coïncident avec les valeurs d'axes et d'émission auxquelles on a fait appel dans la première partie, on écrira ainsi:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2 \sqrt{\overline{x^2}} \\ b = 2 \sqrt{\overline{y^2}} \end{array} \right. \quad (9)$$

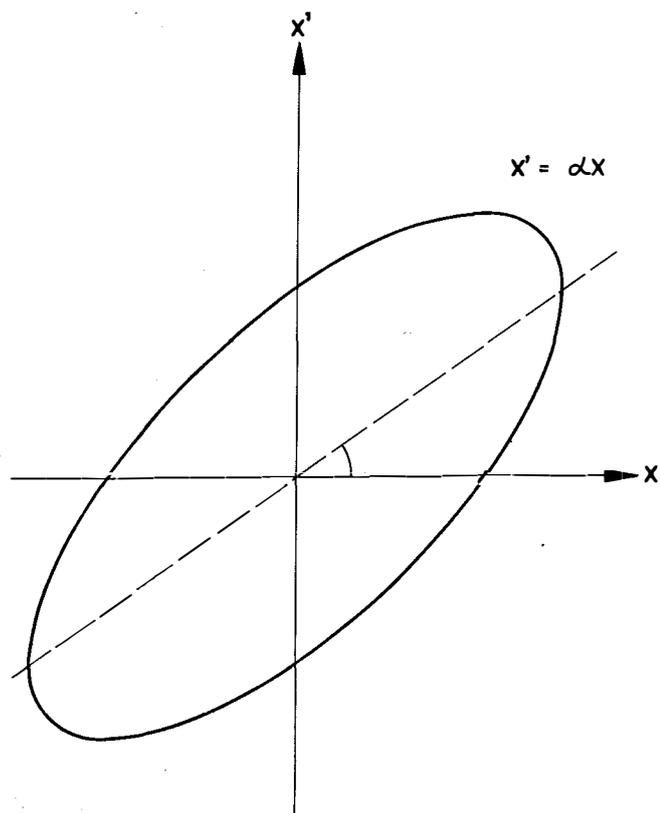


Fig. 1 Ellipse d'émittance. Emploi d'un axe oblique pour définir une valeur en moyenne quadratique.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = 4 \sqrt{x^2 x'^2 - xx'^2} \\ E_x = 4 \sqrt{y^2 y'^2 - yy'^2} \end{array} \right. \quad (10)$$

Avec des programmes de calcul de trajectoires tenant compte des effets de charge d'espace, comme ceux mis au point par P. Tanguy (1970) il est alors possible de suivre l'évolution des expressions (9) et (10) le long d'un faisceau donné, de vérifier ainsi si les distributions précédentes sont stationnaires et d'étudier les divers types d'oscillations susceptibles de prendre naissance autour de ces distributions stationnaires si les conditions initiales s'en écartent (P.M. Lapostolle, 1969).

On constate que la distribution de type uniforme dans l'espace des phases à 4 dimensions et celle de type gaussien sont stables. Il en est de même d'une autre distribution qui apparaîtra plus loin, à la fin de la 4^e partie. Par contre, la distribution de Kapchinskij/Vladimirskij peut être instable et même les erreurs statistiques dues au nombre limité de points représentant les trajectoires (2.500 en général), suffisent parfois, par les défauts d'homogénéité qu'elles entraînent sur la densité superficielle, pour induire un processus divergent; la surface se déforme progressivement, faisant apparaître des sortes de plis ou de rides conduisant à une situation analogue à celle d'une surface d'épaisseur croissante (voir Appendice II).

Parmi les oscillations que les programmes de calcul permettent d'observer, il en est que l'on peut appeler oscillation d'enveloppe, du type de celles décrites par les équations (1) pour la distribution de Kapchinskij/Vladimirskij; mais il existe également des oscillations dans la distribution des charges, à dimensions a et b constantes; ce sont ces dernières qui peuvent être instables dans la distribution de Kapchinskij/Vladimirskij alors qu'elles sont apparemment stables pour les autres distributions (du moins si elles sont seules).

A partir de ces calculs numériques il est possible d'énoncer un certain nombre de propriétés qui font l'objet des deux parties suivantes.

3. THEOREME: POUR TOUTE DISTRIBUTION STATIONNAIRE DANS UN CANAL DE FOCALISATION CONTINU ET LINEAIRE LES VALEURS QUADRATIQUES (9) ET (10) DES AXES DU FAISCEAU ET DE LEURS EMITTANCES VERIFIENT LES RELATIONS:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x^2 a - \frac{E_x^2}{a^3} - \frac{2A}{a+b} = 0 \\ \omega_y^2 b - \frac{E_y^2}{b^3} - \frac{2A}{a+b} = 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

Cette propriété est évidemment vraie pour la distribution de Kapchinskij/Vladimirskij. Elle est également vraie pour la distribution en fonction de Bessel correspondant à une distribution uniforme dans l'espace des phases à 4 dimensions (P.M. Lapostolle, 1969) (voir Appendice III). Elle s'applique également à la distribution qui sera discutée dans la 4^e partie.

Enfin, numériquement et à la précision des calculs (voir Appendice IV), elle s'est appliquée à tous les cas traités (une trentaine), de type uniforme ou gaussien à symétrie de révolution ou elliptique. Ceci remplace par une relation rigoureuse la loi empirique d'adaptation décrite par P.M. et B. Lapostolle (1969).

Aucune démonstration générale n'a été trouvée* de cette propriété relativement simple, mais les remarques précédentes ne laissent pratiquement aucun doute sur son exactitude.

*) Récemment le professeur R. Gluckstern m'a montré avoir élaboré une telle démonstration, au moins pour le cas de symétrie de révolution.

4. OSCILLATIONS D'ENVELOPPE. AMORTISSEMENT ET AUGMENTATION
D'EMITTANCE. INTERPRETATION GLOBALE.

L'étude numérique des oscillations d'enveloppe pour des distributions autres que celles de Kapchinskij/Vladimirskij (de type densité constante à 4 dimensions ou gaussienne) conduit à énoncer les propriétés suivantes:

- a) Les oscillations d'enveloppe en $\overline{x^2}$ et $\overline{y^2}$ sont quasi sinusoïdales; leurs fréquences sont données par le système d'équations (1) de Kapchinskij/Vladimirskij; elles dépendent des propriétés du faisceau (intensité, émittances) et de l'amplitude des oscillations.
- b) Ces oscillations sont amorties^{*)}, la moyenne arithmétique de $\overline{x^2}$ et $\overline{y^2}$ au cours des oscillations restant pratiquement constante. La constante d'amortissement dépend de l'intensité du faisceau (du paramètre δ (8) par exemple), de l'amplitude des oscillations et du type de distribution (on reviendra plus loin sur ces points).
- c) Le faisceau tend vers une nouvelle distribution stationnaire pour laquelle a et b sont supérieurs aux valeurs stationnaires qu'aurait pu prendre le faisceau initial convenablement adapté.
- d) Corrélativement à c) les émittances E_x et E_y augmentent et tendent vers une limite qui correspond aux dimensions limites a et b du faisceau, compte tenu des relations (11); ceci est une conséquence du théorème de la 3^e partie.

*) Comme on le verra plus loin il ne s'agit pas d'un amortissement au sens habituel du terme, mais plutôt d'un effet de désorganisation qui rappelle les phénomènes thermodynamiques d'augmentation d'entropie.

Ces propriétés sont illustrées par les figures 2, 3 et 4 qui correspondent à une situation où la charge d'espace est assez faible ($\delta = 0,085$ soit pour un accélérateur circulaire $\Delta Q/Q$ de Laslett $\approx 0,04$). La figure 2 correspond à une densité uniforme à 4 dimensions et à des oscillations symétriques. La figure 3 a la même distribution mais a des oscillations antisymétriques. La figure 4 a une distribution gaussienne. On voit que ces cas présentent des différences dans ce qu'on pourrait appeler les effets transitoires, ceux ci étant plus rapides avec des oscillations antisymétriques et plus rapides avec une distribution gaussienne. Mais l'état final est sensiblement identique.

Les propriétés précédentes peuvent être interprétées globalement de la façon suivante si l'on considère le cas d'un faisceau de faible intensité ou, plus précisément, d'un faible paramètre de charge d'espace δ . Dans un tel cas (qui est celui en particulier des figures 2, 3 et 4), la charge d'espace étant faible, les termes non linéaires qu'elle introduit sont petits; dans un espace de phase $x \ x'$ par exemple, les points représentatifs des particules décrivent alors approximativement des cercles (pour des échelles appropriées).

Si on suppose un faisceau mal adapté représenté par une ellipse, celle-ci va tourner autour de l'origine (figure 5). Cependant, les termes non linéaires, si faibles soient ils, ont pour effet de rendre la fréquence d'oscillation, donc de rotation dans l'espace des phases fonction de l'amplitude des oscillations. Il en résulte que le bord extérieur de l'ellipse tournera plus vite que le centre (filamentation).

Dans un problème à une seule coordonnée x un tel effet se bornerait à déformer l'ellipse et à lui donner progressivement la forme d'un S. Mais suivant les coordonnées $y \ y'$ la vitesse de rotation du bord de l'ellipse va varier, et la figure d'émission obtenue (Promé, 1969b) ressemble alors davantage à un éventail qui s'ouvre. (Voir figures 6, 7 et 8 correspondant respectivement aux positions A, B et C de la figure 2.) Au bout d'un certain temps, tout le cercle se remplit. Ce temps est lié à la différence de vitesse de rotation entre le centre et le bord de

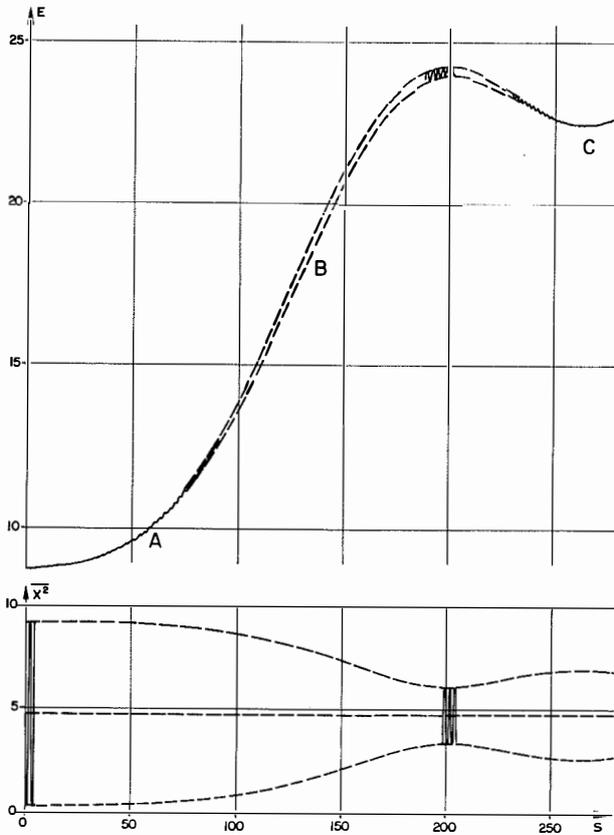


Fig. 2

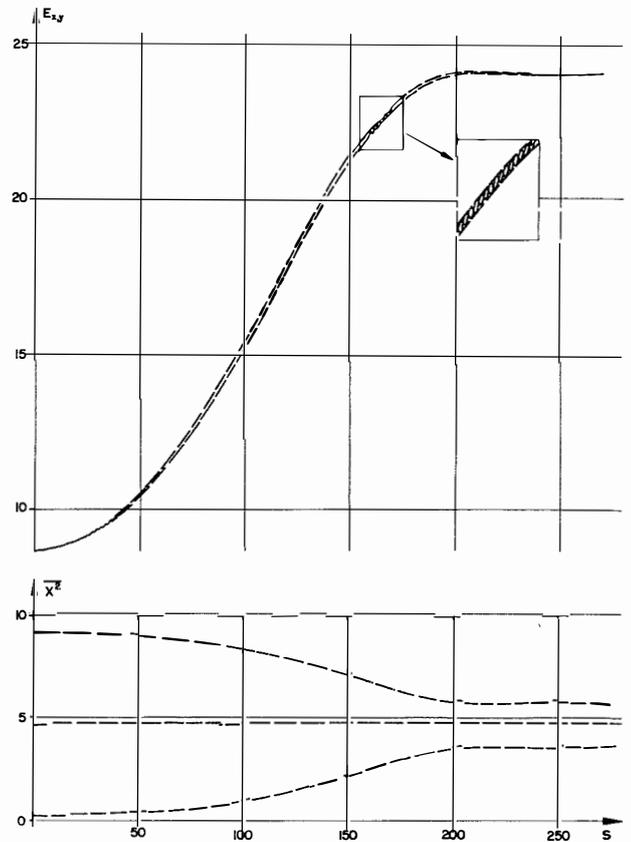


Fig. 3

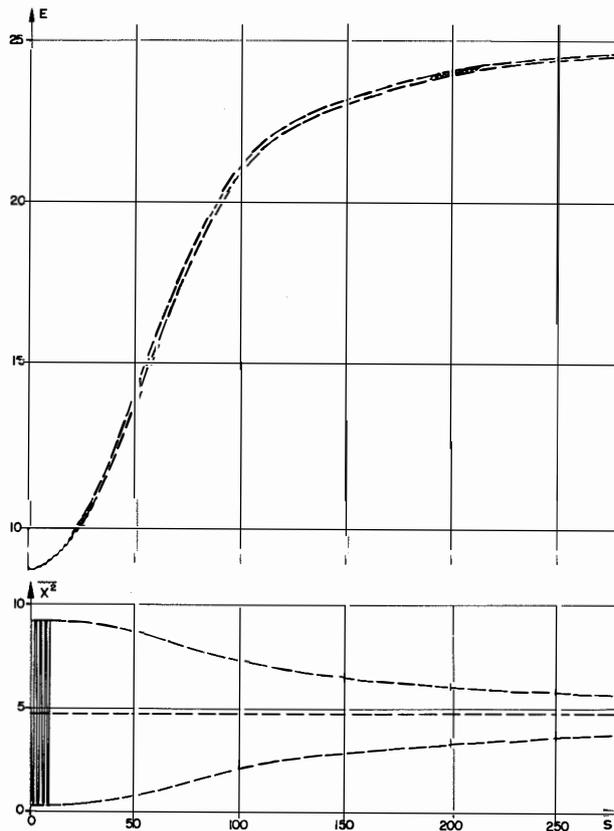


Fig. 4

Evolutions de l'amplitude des oscillations et de l'émittance d'un faisceau mal adapté, avec faible charge d'espace -

figures 2, 3 densité uniforme dans l'espace à 4 dimensions, figure 2 oscillations symétriques, figure 3 oscillations antisymétriques

figure 4 densité gaussienne dans l'espace à 4 dimensions, oscillations symétriques

Intensité 100 mA

Energie 750 Kev

$\lambda_0 = 4,72$ m

E en mrad mm

x^2 en cm^2

s en mètre

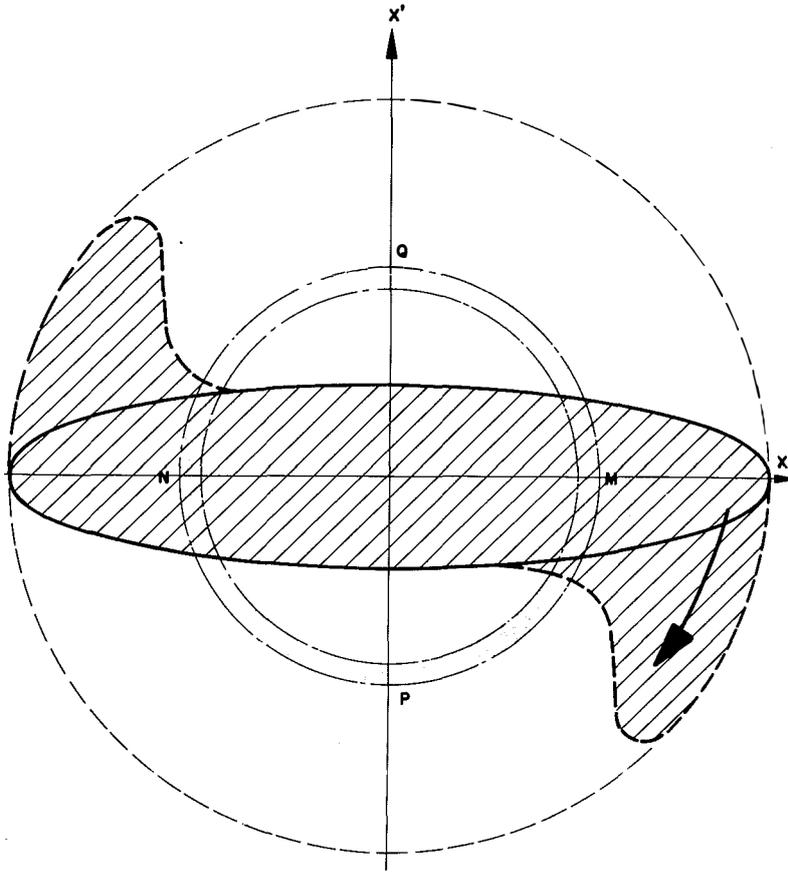


Fig. 5 Effet de filamentation dans l'espace des phases en présence des non linéarités de charge d'espace

Fig. 6, 7, 8 (ci-contre) Emittance en $x x'$ aux points A, B et C (figure 2) lors de l'évolution d'un faisceau mal adapté

№ . 4 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24 . 25 . 26 . 27
J 6
J 7
J 8
J 9
J10
J11
J12
J13
J14
J15
J16
J17
J18
J19
J20
J21
J22
J23
J24

Fig. 6 (point A)

№ . 4 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24 . 25 . 26 . 27
J 6
J 7
J 8
J 9
J10
J11
J12
J13
J14
J15
J16
J17
J18
J19
J20
J21
J22
J23
J24

Fig. 7 (point B)

№ . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24 . 25 . 26 . 27
J 6
J 7
J 8
J 9
J10
J11
J12
J13
J14
J15
J16
J17
J18
J19
J20
J21
J22
J23
J24

Fig. 8 (point C)

l'ellipse; c'est-à-dire à la variation de fréquence d'oscillations en fonction de l'amplitude; l'ordre de grandeur observé correspond bien à cela.

Pour décrire quantitativement le phénomène, on peut dire que les segments M et N de l'ellipse (figure 5) vont finalement se répartir à peu près uniformément sur l'anneau MPNQ. Mais pour préciser il est plus facile d'étendre ce raisonnement directement à l'espace de phase à 4 dimensions. Supposant une symétrie de révolution pour simplifier le raisonnement, x et y d'une part et x' et y' d'autre part jouent des rôles analogues. On peut alors remplacer la figure 5 en faisant apparaître sur les axes les quantités

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 \\ r'^2 = x'^2 + y'^2 \end{array} \right. \quad (12)$$

Toujours pour un choix convenable des échelles l'ellipse devient alors un triangle OAB rempli uniformément (Lapostolle, 1966) et le cercle un triangle isocèle OAC (figure 9). Les anneaux MPNQ deviennent alors des coquilles sphériques dans l'espace à 4 dimensions et des bandes MNP dans les axes r^2 r'^2 . Les particules qui, dans l'état initial sont réparties uniformément sur le segment MN, occupent dans l'état stationnaire final toute la bande MP; on peut supposer que dans l'état de désorganisation totale vers lequel on tend, la densité dans la bande MP est également uniforme-

La distribution finale dans l'hypersphère est alors donnée en fonction de

$$u = r^2 + r'^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 \quad (13)$$

par

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_4 = \rho_{04} \\ \text{pour } u < u_1 \end{array} \right. \quad (14)$$

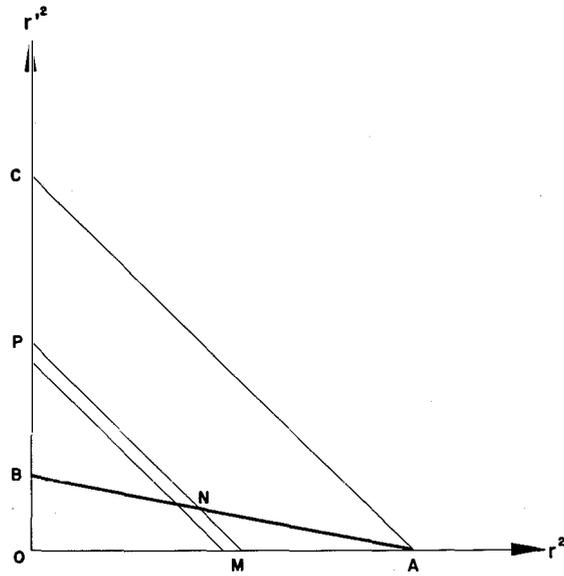


Fig. 9 Répartition dans l'espace à 4 dimensions pour un faisceau mal adapté

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_4 = \rho_{04} \frac{u_1}{u_0 - u_1} \frac{u_0 - u}{u} \\ \text{pour } u_1 < u < u_0 \end{array} \right. \quad (15)$$

où l'on a désigné par u_0 le carré du demi grand axe de l'ellipsoïde initial (le carré du rayon de la sphère) et par u_1 le carré du demi petit axe; ρ_{04} est la densité dans l'espace à 4 dimensions à l'intérieur de l'ellipsoïde initial.

L'allure de cette distribution est indiquée sur la figure 10.

On peut aussi calculer l'allure de la distribution correspondante obtenue par projection sur un plan soit la section droite du faisceau, soit un plan d'émittance. La figure 11 indique la loi de distribution dans la section du faisceau en fonction de r^2 .

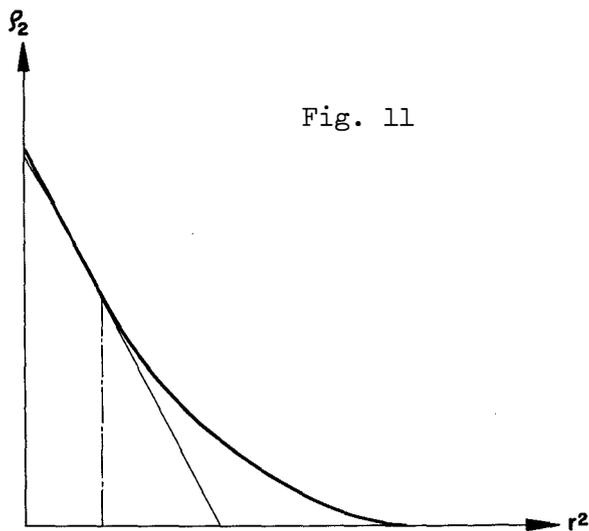
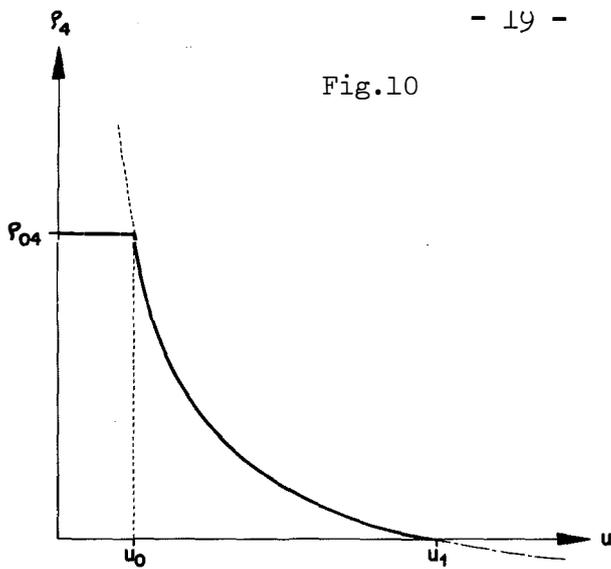
On peut enfin calculer la courbe émittance-courant donnant le courant passant dans des courbes équidensité du plan d'émittance (P.M. Lapostolle, C.S. Taylor et.al., 1968). La figure 12 représente une telle courbe dont la forme correspond bien à nombre de courbes obtenues expérimentalement par des mesures sur des faisceaux.

Sur ces distributions on peut calculer les moyennes quadratiques définies dans la 2^e partie. On trouve aisément

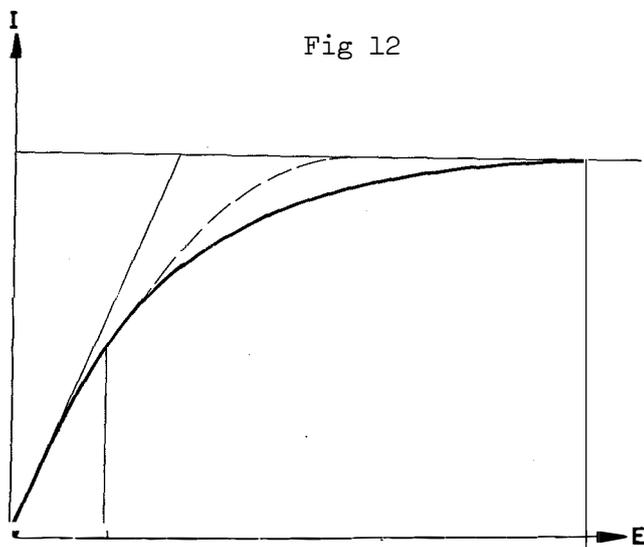
$$\bar{u} = 2 \overline{r^2} = 4 \overline{x^2} = \frac{\int \rho_4 u^2 du}{\int \rho_4 u du} = \frac{2}{3} \frac{u_0 + u_1}{2}$$

d'où l'on déduit finalement

$$\overline{x^2} = \frac{\left(\overline{x^2}\right)_{\max} + \left(\overline{x^2}\right)_{\min}}{2} \quad (16)$$



Distributions dans l'espace à 4 dimensions (en $u = r^2 + r'^2$) et dans la section droite (en r^2) et courbe émittance courant (Fig. 12) d'un faisceau initialement de densité uniforme dans l'espace à 4 dimensions mais mal adapté.



qui indique bien que la valeur finale est la moyenne arithmétique des valeurs extrêmes atteintes lors des oscillations initiales.

Quant à l'émittance finale, il est aisé de voir qu'elle est bien celle qui correspond à (16) avec les équations (11) dans l'hypothèse d'un faisceau rond de faible intensité.

5. MECANISME DETAILLE DE L'AUGMENTATION D'EMITTANCE.
AUTRES APPLICATIONS.

L'examen des figures 2, 3 et 4 montre que l'émittance n'augmente pas de façon absolument régulière au cours du processus décrit dans la partie précédente. A l'augmentation se superposent de petites oscillations. L'examen de tous les cas traités montre même que c'est seulement par un couplage entre de telles oscillations et des oscillations d'enveloppe qu'une augmentation d'émittance a lieu.

De telles oscillations d'émittance de faible amplitude apparaissent généralement lorsque l'on est en présence d'oscillations de la distribution des charges à l'intérieur du faisceau, oscillations dont l'existence a été mentionnée à la fin de la deuxième partie. Il existe toute une suite de telles oscillations, un peu comme les divers modes susceptibles d'être excités dans un guide d'ondes électromagnétiques.

Ces oscillations, qui font apparaître des distributions irrégulières de charge, des sortes de vagues qui se propagent dans le faisceau et se réfléchissent sur ses bords s'accompagnent évidemment de champs de charge d'espace non linéaires. Cependant, lorsque ces oscillations se développent isolément sur leur fréquence propre, il ne semble pas qu'elles présentent aucun caractère d'instabilité (à part, peut-être, le cas de la distribution de Kapchinskij/Vladimirskij). Si on examine la distribution d'émittance on peut, suivant le mode excité, constater par exemple que cette émittance oscille entre des formes plutôt rectangulaires et plutôt

elliptiques en passant par des intermédiaires en forme de S et de Z. On peut dire que l'on assiste à une sorte de frétillement de la figure d'émittance qui en fait osciller la valeur quadratique (10).

Or, lorsqu'un faisceau de distribution autre que celle de Kapchinskij/Valdimirskij présente des oscillations d'enveloppe d'amplitude notable, ces oscillations d'enveloppe excitent des oscillations forcées dans la distribution des charges.

Ce mécanisme peut se comprendre de la façon suivante: si un faisceau d'intensité et d'extension en phase donnée ou possédant certaines émittances est transmis adapté dans un canal de focalisation continu, il présente des dimensions différentes suivant les forces de rappel du canal qui le transporte (voir équation 11 où l'on attribue aux ω des valeurs diverses). Il en résulte que le paramètre de charge d'espace n'a pas la même valeur dans tous les systèmes de focalisation et que, en conséquence, la distribution stationnaire des particules peut elle aussi changer.

Or à tout instant les particules cherchent à se répartir suivant la distribution stationnaire et oscillent autour d'elle.

Dans un faisceau présentant des oscillations d'enveloppe cette distribution stationnaire évolue sans cesse puisqu'elle dépend des dimensions du faisceau. Ainsi les particules sont-elles en permanence à la recherche d'un état d'équilibre qu'elles ne peuvent atteindre.

Ce mécanisme est responsable de l'excitation d'oscillations forcées de la distribution des charges dans la section du faisceau. Ces oscillations s'accompagnant d'effets non linéaires conduisent à une augmentation d'émittance jusqu'à ce que les oscillations d'enveloppe soient suffisamment amorties et que la situation soit telle que les oscillations dans la distribution des charges se développent quasi isolément.

Un tel mécanisme peut aussi exister dans un système de focalisation périodique où les ondulations de forme créées par la périodicité peuvent également exciter des oscillations de distribution. Dans

ce cas, cependant, l'**augmentation** d'émittance qui en résulte ne s'accompagne plus d'amortissement des oscillations, et le processus ne tend pas vers un nouvel état stationnaire: il pourrait se poursuivre indéfiniment.

Ce phénomène actuellement en cours d'étude, fera l'objet d'un rapport ultérieur. Les résultats obtenus sont très similaires à ceux obtenus par M. Promé (1970) dans son étude sur les phénomènes d'augmentation d'émittance à la traversée d'un accélérateur linéaire.

REMERCIEMENTS

Tout ce travail n'a été possible que grâce aux programmes mis au point par P. Tanguy du groupe du Professeur E. Regenstreif à l'université de Rennes, avec le support du groupe Linac de la Division MPS du CERN; je tiens à remercier tout spécialement le Dr. C.S. Taylor pour son soutien constant. Mes remerciements vont également à Madame Y. Marti et à MM. B. Bru, L. Thorndahl et M. Weiss pour leur précieux concours dans l'exploitation de ces programmes de calcul.

Je tiens aussi à remercier le professeur R. Gluckstern pour les commentaires très utiles dont il m'a fait part et la communication de ses propres travaux.

BIBLIOGRAPHIE

- Claus, J., Benton, A.; Stationary cylindrical beam under space charge conditions. BNL Report, AADD-160. (1970)
- Kapchinskij, I., Vladimirskij, V.; Limitations of proton beam current in a strong focusing linear accelerator associated with beam space charge. Proceedings of the Int. Conference on High Energy Accelerators. CERN 1959, pp. 274 - 288. (1959)
- Kapchinskij, I.; Dynamique des particules dans les accélérateurs linéaires résonnants (en russe). Atomizdat Moscou 1966, chapitre 3. (1966)
- Lapostolle, P.M.; Oscillations in a synchrotron under space charge conditions. Proceedings of the Int. Conference on High Energy Accelerators. DUBNA 1963, pp. 900 - 905. (1963)
- Lapostolle, P.M.; Quelques relations entre des distributions de type hyperellipsoïdal dans des espaces à 2, 3, 4 et 6 dimensions. Rapport de division CERN, ISR/300 LIN/66.32. (1966)
- Lapostolle, P.M., Thorndahl, L.; Beam envelope oscillation with space charge forces. A numerical study for circular machines. Division report CERN, ISR/300 LIN/66.27, revised 1967. Washington Accelerator Conference 1967. IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. 14 No. 3, pp. 567 - 571. (1967)
- Lapostolle, P.M., Taylor, C., Tetu, P., Thorndahl, L.; Intensity dependant effects and space charge limit investigations on CERN linear accelerator and synchrotron. CERN Report 68.35. Cte. Rendus de la Conférence Nationale Soviétique sur les Accélérateurs (en russe). Moscou 1968. Tome I, pp. 99 - 105. (1968)
- Lapostolle, P.M.; Une distribution de charges stationnaire dans un système de focalisation continu. Rapport de division CERN, ISR/300 LIN/69.19. (1969)

Lapostolle, P.M.; Quelques propriétés des distributions de charge dans un système de focalisation (avec B. Lapostolle). Rapport de division CERN, ISR/300 LIN/69.43. (1969)

Lapostolle, P.M.; Density distribution in intense beams. Division report CERN, ISR/300 LIN/69.42. Presented to the Int. Conference on High Energy Accelerators. YEREVAN 1969 to be published. (1969)

Promé, M.; Etude de quelques distributions de particules dans l'espace des phases; application à la charge d'espace. Rapport interne CEA Saclay SEFS. TD 69/35. (1969a)

Promé, M.; Remarques sur l'accroissement d'émittance du fait de la charge d'espace. Rapport interne CEA Saclay SEFS. TD 69/04. (1969b)

Promé, M.; Operation of the 20 MeV Linac Injector of the 3 GeV Saclay Synchrotron. To be presented to the Linear Accelerator Conference. NAL Batavia 1970. (1970)

Sacherer, F.; Matched distributions with non uniform space charge and no emittance growth. Division report CERN, SI/Int DL/70.5. (1970)

Tanguy, P.; Procédés numériques pour l'étude des effets de charge d'espace et d'aberrations géométriques dans les systèmes de guidage de faisceaux. Rapport de division CERN, MPS/LIN/70.1. (1970)

APPENDICE I

OSCILLATIONS SYMETRIQUES ET ANTISYMETRIQUES EN PRESENCE DE CHARGE D'ESPACE.

Le système d'équations (5) a été résolu numériquement *) pour un ensemble de valeurs du paramètre δ de charge d'espace et diverses conditions initiales choisies de manière à donner naissance à des oscillations soit symétriques soit purement antisymétriques.

Les figures 13 et 14 donnent, en fonction de l'amplitude maximale u_{\max} l'amplitude minimale correspondante u_{\min} ou, plus précisément, $u_{\min} / \sqrt{\delta}$ en fonction de $u_{\max} / \sqrt{\delta}$.

Les figures 15 et 16 donnent les longueurs d'onde de ces oscillations d'enveloppe λ_{es} et λ_{ea} , fonction de δ et de l'amplitude maximale $u_{\max} / \sqrt{\delta}$. On a porté plus exactement les variations de $\lambda_{es} / \lambda_{e0}$ et $\lambda_{ea} / \lambda_{e0}$, λ_{e0} étant la longueur d'onde des oscillations d'enveloppe sans charge d'espace:

$$\lambda_{e0} = \frac{1}{2} \lambda_{\beta 0} \quad (17)$$

où $\lambda_{\beta 0}$ est la longueur d'onde bêtatronique sans charge d'espace (2π dans les équations (5)).

Enfin les figures 17 et 18 donnent les fréquences d'oscillation bêtatronique ν des particules à l'intérieur du faisceau dans le cas d'une distribution de Kapchinskij/Vladimirskij (ν_0 représente cette fréquence en l'absence de charge d'espace).

*) Les calculs ont été effectués sur ordinateur par Madame Y. Marti

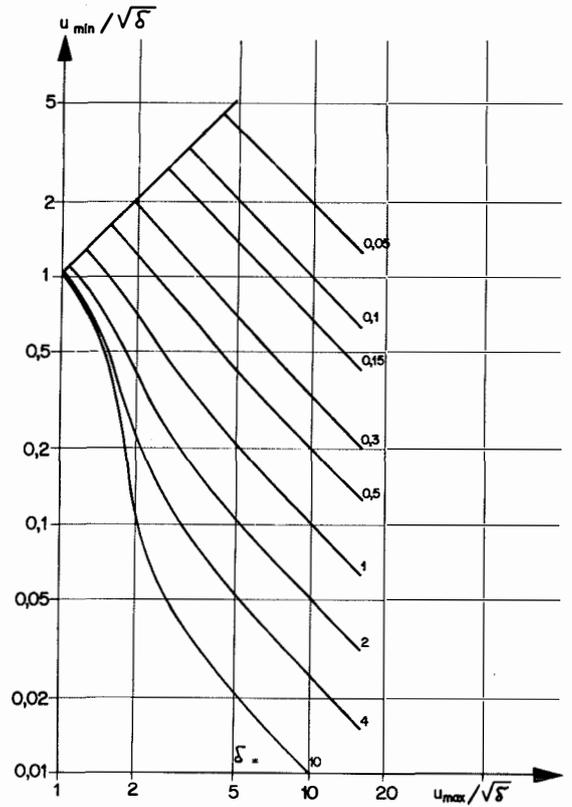
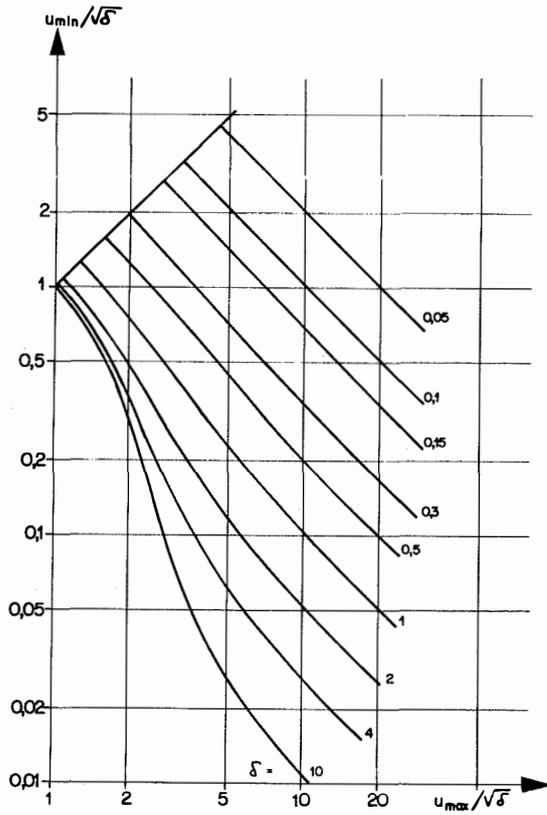


Fig. 13 et 14 Amplitudes minimales et maximales des oscillations symétriques (Fig. 13) et antisymétriques (Fig. 14) en fonction du paramètre de charge d'espace δ , d'après les équations (5)

Fig. 15 et 16 (ci-contre) Longueur d'onde des oscillations d'enveloppe de grande amplitude (amplitude u_{max}) en fonction du paramètre de charge d'espace δ

λ_{e0} , longueur d'onde sans charge d'espace

λ_{es} , longueur d'onde des oscillations symétriques

λ_{ea} , longueur d'onde des oscillations antisymétriques

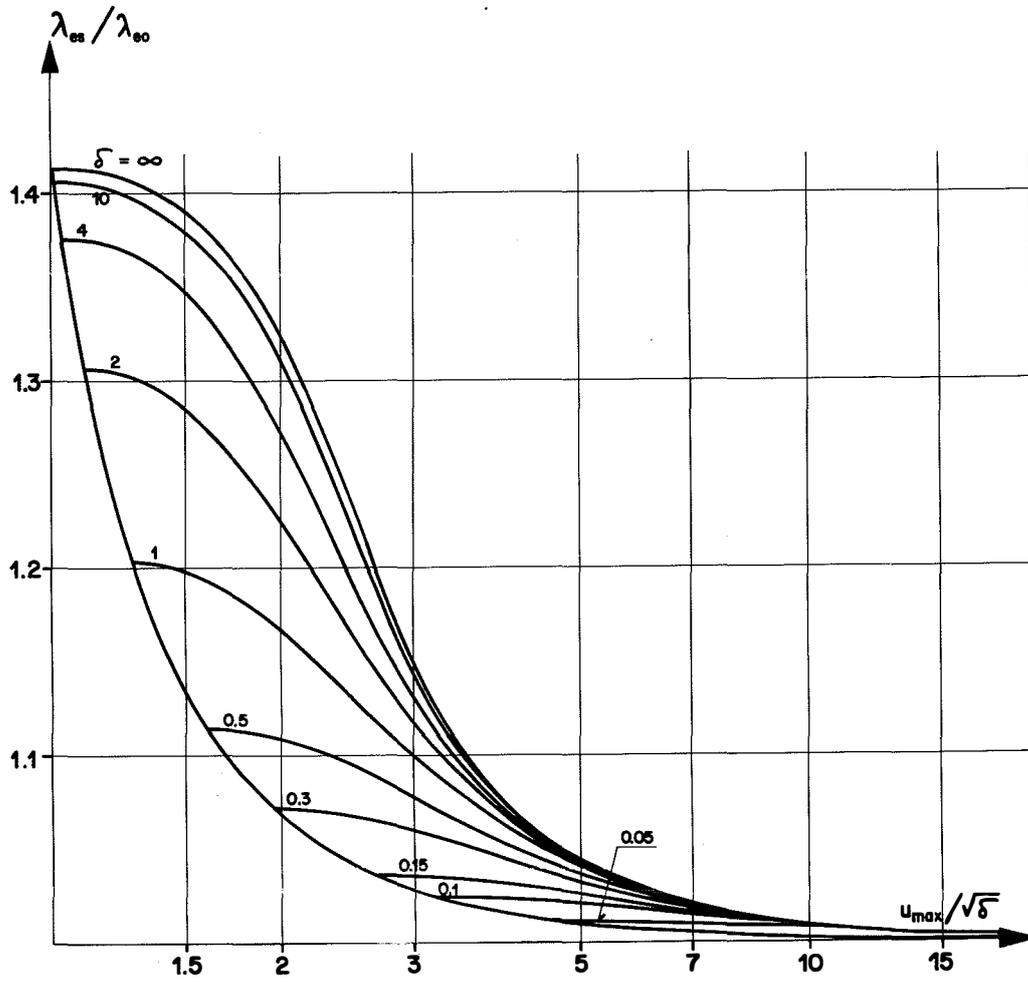


Fig. 15

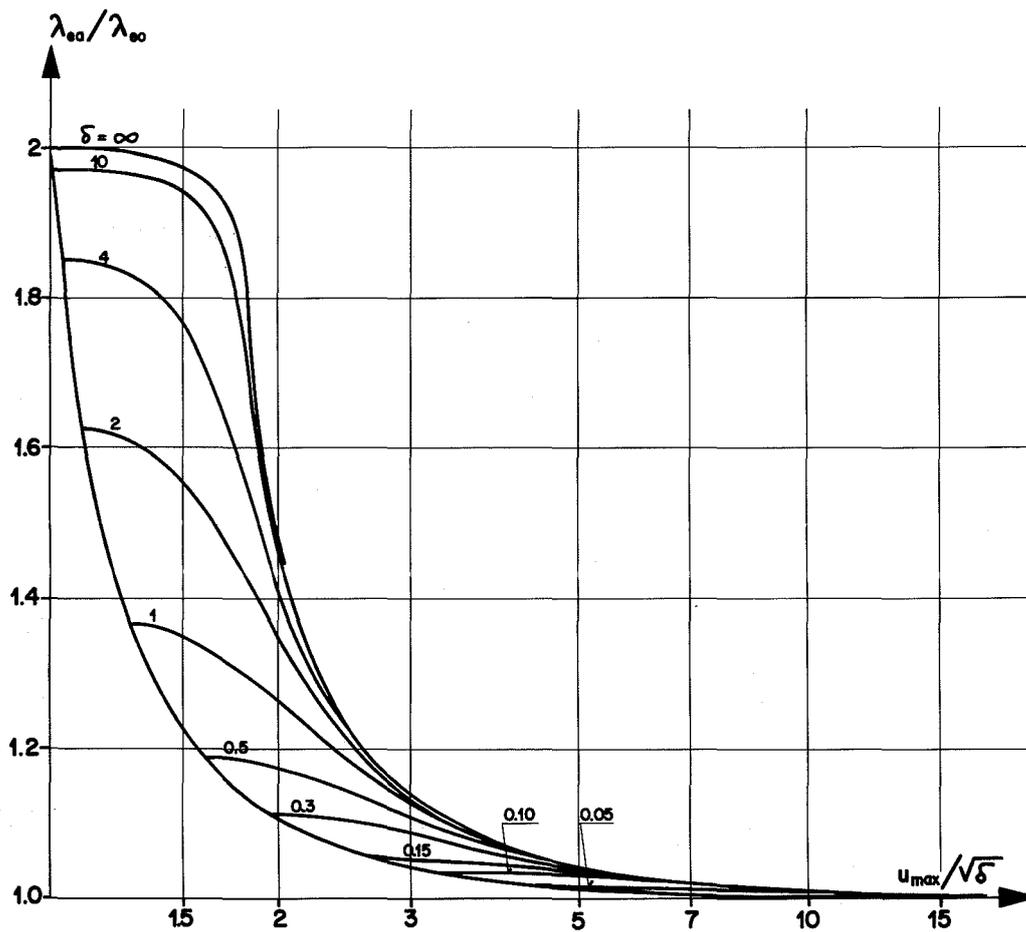


Fig. 16

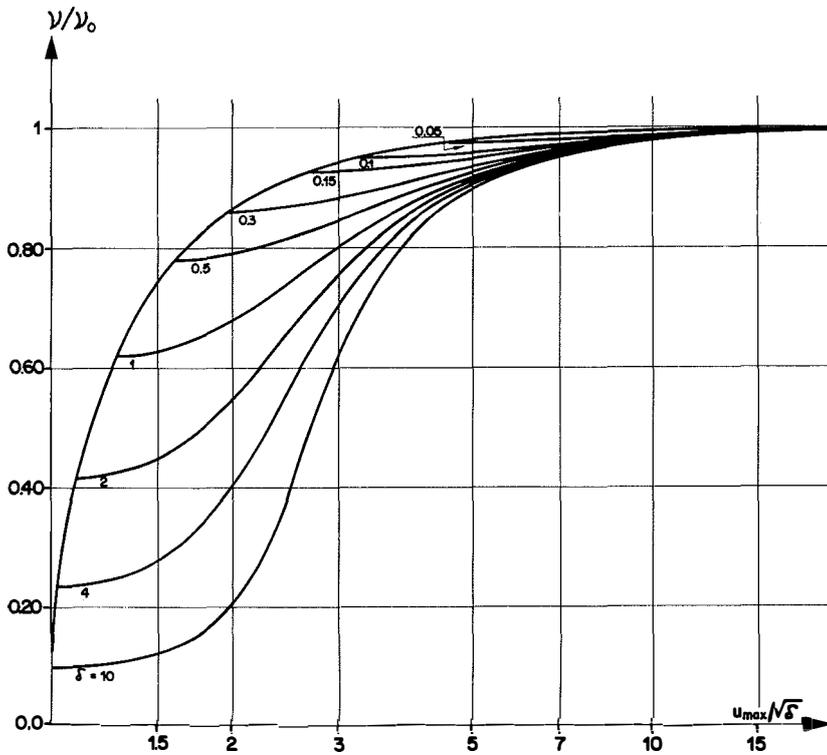


Fig 17

Fréquence d'oscillation des particules individuelles dans un faisceau de distribution Kapchinskij/Vladimirskij présentant des oscillations d'enveloppe symétriques (Fig. 17) ou antisymétriques (Fig. 18) d'amplitude maximale u_{max} (équation (5)) pour un paramètre de charge d'espace δ .

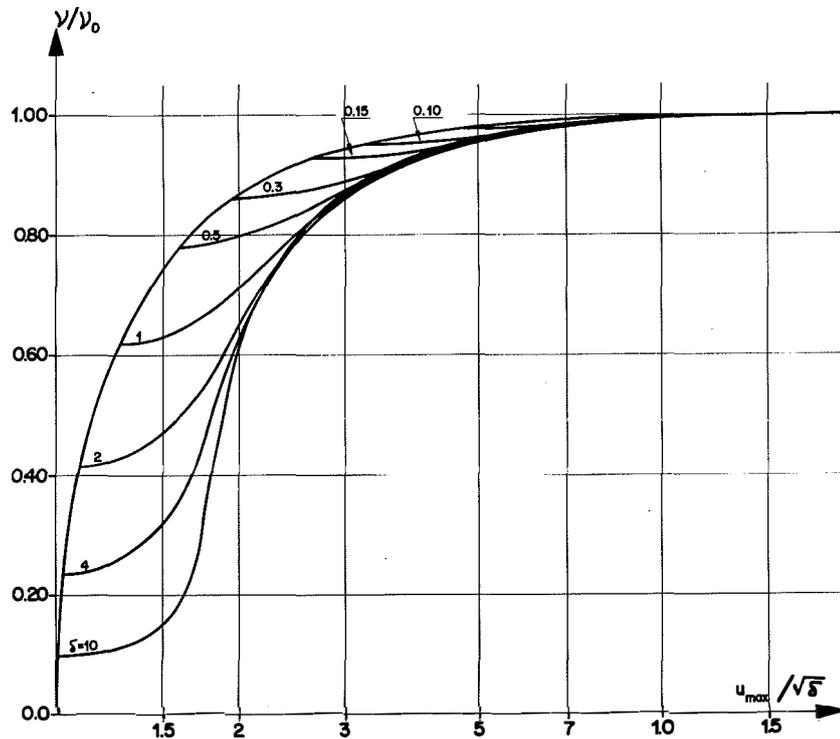


Fig. 18

Pour calculer ces fréquences dans le cas des oscillations symétriques, on a procédé ainsi:

désignant par T_1 la période d'oscillation de l'équation

$$u'' + u - \frac{1}{u^3} - \frac{\delta}{u} = 0 \quad (18)$$

on calcule la période T_2 d'oscillation de l'équation

$$v'' + v - \frac{1}{v^3} - \frac{\delta}{v} = 0 \quad (19)$$

avec comme conditions initiales

$$v_0 = 1 / u_{\max} \quad v'_0 = 0$$

On a alors (Lapostolle, 1963)

$$v_s / v_0 = T_2 / T_1$$

où v_0 est la fréquence en l'absence de charge d'espace ($1 / 2\pi$)

Dans le cas des oscillations antisymétriques on procède ainsi:

résolvant le système (5) sur la période T_1 , on calcule

$$T_2 = \int_0^{T_1} \frac{dt}{u^2} = \int_0^{T_1} \frac{dt}{v^2} \quad (20)$$

et en déduit

$$v_a / v_0 = T_2 / T_1$$

d'après la théorie de Courant et Snyder.

APPENDICE II

STABILITE DES DISTRIBUTIONS DE KAPCHINSKIJ/VLADIMIRSKIJ

Des calculs numériques d'oscillations d'enveloppe symétriques ou antisymétriques avec une distribution de Kapchinskij/Vladimirskij *) , qui devrait satisfaire exactement les conditions d'application du système d'équations (5) ont montré qu'il pouvait n'en être rien et que l'on pouvait obtenir avec une telle distribution les mêmes phénomènes d'augmentation d'émittance que ceux décrits dans la 4^e partie.

Pour expliquer ce résultat, au lieu de mettre en cause la précision du calcul, il semble justifié de l'attribuer à une instabilité des oscillations de la distribution de densité dans un faisceau du type de Kapchinskij/Vladimirskij.

Une telle instabilité a été récemment trouvée théoriquement par R. Gluckstern **) , pour des valeurs du coefficient de charge d'espace δ telles que

$$\frac{16}{17} < \mu = \delta \sqrt{\frac{\delta^2}{u} + 1} - \frac{\delta^2}{2} < 1$$

c'est à dire

(21)

$$\delta > 3,85$$

*) La distribution aléatoire du type Kapchinskij/Vladimirskij est obtenue ainsi: on prend des points au hasard à densité moyenne uniforme dans le plan x, y , à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 1$. Les coordonnées x' et y' sont alors prises, pour chaque point précédent, égales à $\sqrt{1 - x'^2 - y'^2} \cos \theta$, $\sqrt{1 - x'^2 - y'^2} \sin \theta$, θ étant un angle au hasard pris entre 0 et 2π .

**) Le professeur R. Gluckstern a bien voulu me faire part à l'avance de ses résultats maintenant publiés (R.L. Gluckstern - Oscillation mode in two dimensional beams. Présenté à la "Linac Conference, Batavia 1970.") et je l'en remercie.

Pour contrôler ce résultat, on a calculé la façon dont évoluait au cours du mouvement, pour un faisceau représenté par 2500 macro particules réparties à l'origine selon Kapchinskij/Vladimirskij la distribution pour ces particules de la quantité sans dimensions:

$$\Sigma^2 = \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{y^2} + \frac{(\overline{x^2 x'} - \overline{xx'} x)^2}{x^2(x^2 x'^2 - \overline{xx'}^2)} + \frac{(\overline{y^2 y'} - \overline{yy'} y)^2}{y^2(y^2 y'^2 - \overline{yy'}^2)} \quad (22)$$

ou encore, d'après (9) et (10)

$$\Sigma^2 = \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{b^2} + 64 \frac{(\overline{x^2 x'} - \overline{xx'} x)^2}{a^2 E_x^2} + 64 \frac{(\overline{y^2 y'} - \overline{yy'} y)^2}{b^2 E_y^2} \quad (23)$$

quantité qui, pour une distribution rigoureusement du type Kapchinskij/Vladimirskij est toujours égale à 4.

Du fait du caractère statistique de la population initiale, les valeurs de Σ^2 se distribuent, au départ, sur un intervalle de quelques pour cent autour de la valeur 4.

Le calcul de l'évolution de la distribution a été ensuite effectué pour 3 valeurs de δ :

$$\delta = 5,25 - 1,30 - 0,33$$

Pour la première de ces valeurs, il se confirme qu'il y a instabilité totale, les valeurs de Σ^2 se répartissant, assez vite, dans un intervalle de 0 à 8 et même au delà, alors que, simultanément, si le faisceau est adapté à l'origine, les valeurs de a, b, E_x et E_y restent inchangées.

Pour la deuxième de ces valeurs de δ , les Σ^2 restent groupés autour de 4, la largeur de la distribution allant cependant jusqu'à se doubler, en présentant des phénomènes d'oscillation de concentration.

Pour la dernière valeur, le groupement des Σ^2 reste plus net, l'élargissement ne dépasse pas 50% et les oscillations sont plus lentes.

APPENDICE III

PROPRIETES COMPLEMENTAIRES DES DISTRIBUTIONS STATIONNAIRES DE
REVOLUTION UNIFORMES DANS L'ESPACE DE PHASE A 4 DIMENSIONS

Nombre de propriétés de ces distributions ont déjà été données dans des rapports antérieurs (Lapostolle, 1969). On se borne à donner ici quelques compléments utiles pour certains calculs ou certaines applications.

III.1 Détermination du paramètre de charge d'espace kR

Des relations (9) et (100) du rapport précité (B. et P. Lapostolle, 1969), on tire:

$$\frac{k^2 R^2 I_2 (kR)}{I_0 (kR)} = \frac{2e}{\epsilon_0 m} \frac{Q^2}{E_4 \rho_f} \quad (24)$$

Cette équation est utile pour déterminer la valeur du paramètre kR correspondant à un faisceau d'intensité donnée (charge Q par unité de longueur) de volume d'émission à 4 dimensions E_4 donné (donc de densité donnée dans cet espace de phase) circulant dans un canal de focalisation de force donnée (densité de charge d'espace ρ_f équivalente).

Les variations de la fonction figurant au premier membre de (24) sont indiquées sur la figure 19.

III.2 Valeur quadratique moyenne du rayon

On a

$$a^2 = 4 \overline{x^2} = 4 \overline{y^2} = 2 \overline{R^2} \quad (25)$$

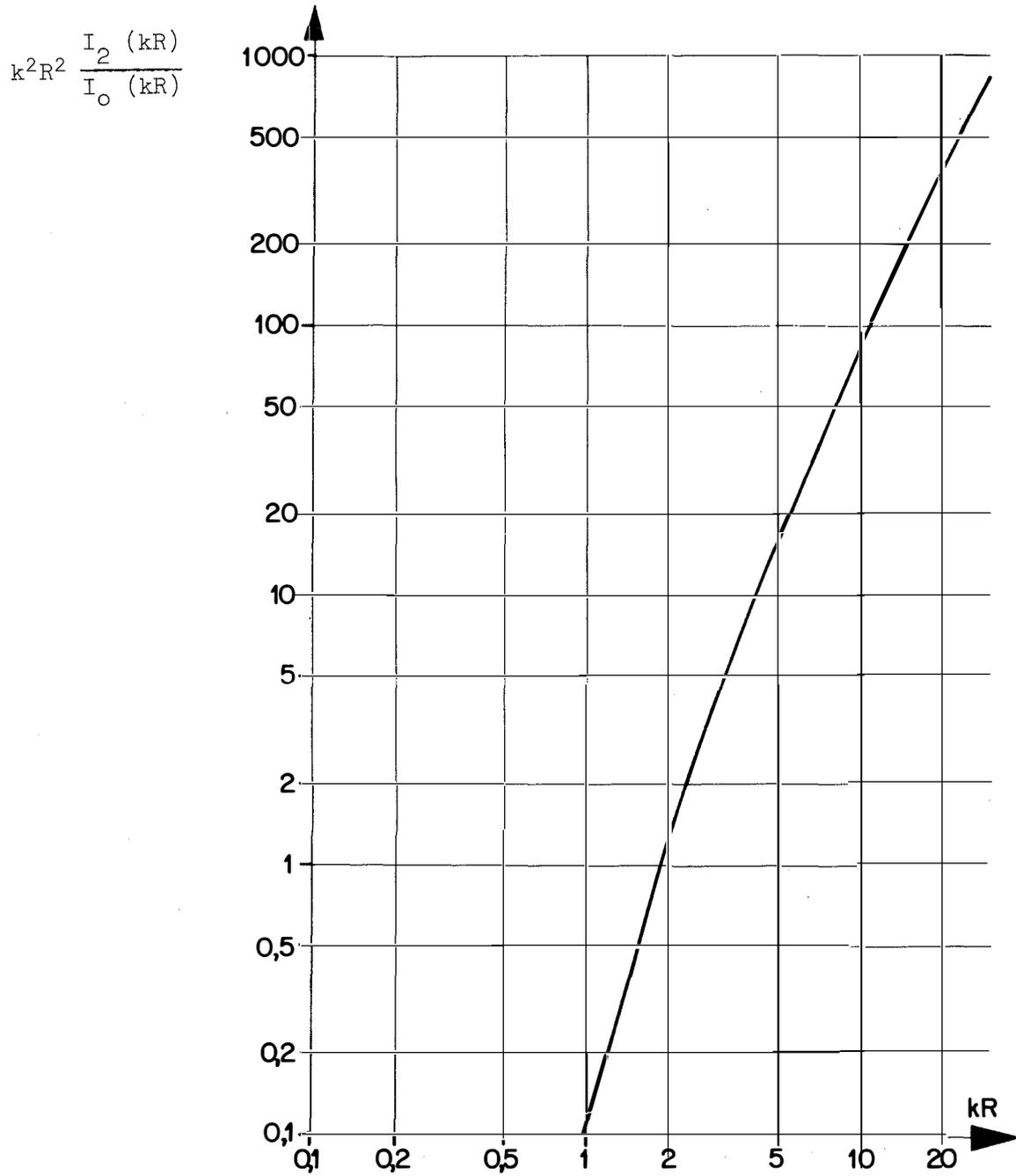


Fig. 19 Détermination du paramètre de charge d'espace kR en fonction de la charge transportée Q , de l'émittance à 4 dimensions E_4 et de la force de focalisation (ρ_f)

avec

$$\frac{\bar{\rho}}{R^2} = \frac{\int_0^R r^2 \rho(r) 2\pi r dr}{\int_0^R \rho(r) 2\pi r dr} \quad (26)$$

la densité $\rho(r)$ étant donnée par la relation (3) du rapport précité:

$$\rho(r) = \rho_f \left[1 - \frac{I_0(kr)}{I_0(kR)} \right]$$

On tire évidemment

$$\int_0^R \rho(r) r dr = \rho_f \frac{R^2}{2} \frac{I_2(kR)}{I_0(kR)}$$

et on calcule:

$$\int_0^R \rho(r) r^3 dr = \rho_f \frac{R^4}{4} - \frac{\rho_f}{I_0(kR)} \int_0^R I_0(kr) r^3 dr$$

Faisant appel à la relation

$$\int I_0(x) x^3 dx = [x^3 I_1(x)] - 2 \int x^2 I_1(x) dx = [x^3 I_1(x)] - 2[x^2 I_2(x)]$$

on obtient finalement

$$\int_0^R \rho(r) r^3 dr = \rho_f \frac{R^4}{4} \left[2 \frac{I_2(kR)}{I_0(kR)} \left(1 + \frac{4}{k^2 R^2} \right) - 1 \right]$$

et

$$\overline{R^2} = \frac{R^2}{2} \left[2 \left(1 + \frac{4}{k^2 R^2} \right) - \frac{I_0(kR)}{I_2(kR)} \right] \quad (27)$$

La figure 20 indique les variations du rapport $\overline{R^2} / R^2$ en fonction du paramètre kR . On voit que ce rapport passe de $1/3$ pour $kR = 0$ (densité parabolique) à $1/2$ pour $kR \infty$ (densité uniforme dans la section droite).

III.3 Valeur quadratique moyenne de la vitesse

Elle est donnée par l'expression (33) du rapport précité et vaut:

$$\overline{v^2} = 2\beta^2 c^2 \overline{x'^2} = 2\beta^2 c^2 \overline{y'^2} = \frac{2}{m} W_c \quad (28)$$

soit

$$\overline{v^2} = v_{\max}^2 (0) \frac{1 - \frac{I_1^2(kR)}{2 I_0(kR) I_2(kR)}}{1 - 1 / I_0(kR)} \quad (29)$$

Les variations du rapport $\overline{v^2} / v_{\max}^2 (0)$ sont rappelées sur la figure 21. Elles sont très semblables à celles indiquées sur la figure 20, allant de $1/3$ pour $kR = 0$ à $1/2$ pour $kR \infty$.

Emittance valeur quadratique

D'après (10), (27) et (29) on obtient

$$c\beta E = 2Rv_{\max} (0) \sqrt{\left[1 + \frac{4}{k^2 R^2} - \frac{I_0(kR)}{2 I_2(kR)} \right] \frac{I_0(kR) - I_1^2(kR) / 2 I_2(kR)}{I_0(kR) - 1}} \quad (30)$$

ou encore

$$c\beta E = \sqrt{\frac{E_4}{\pi^2}} 2 \sqrt{\left[1 + \frac{4}{k^2 R^2} - \frac{I_0(kR)}{2 I_2(kR)} \right] \left[\frac{I_0(kR)}{I_2(kR)} - \frac{I_1^2(kR)}{2 I_2^2(kR)} \right]} \quad (31)$$

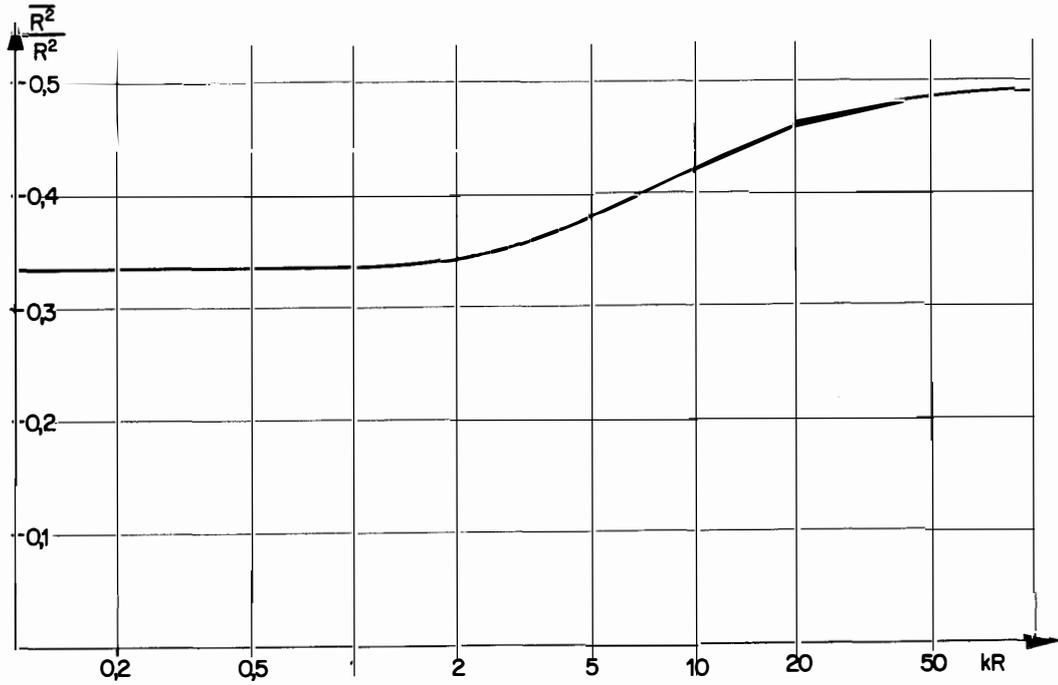


Fig. 20

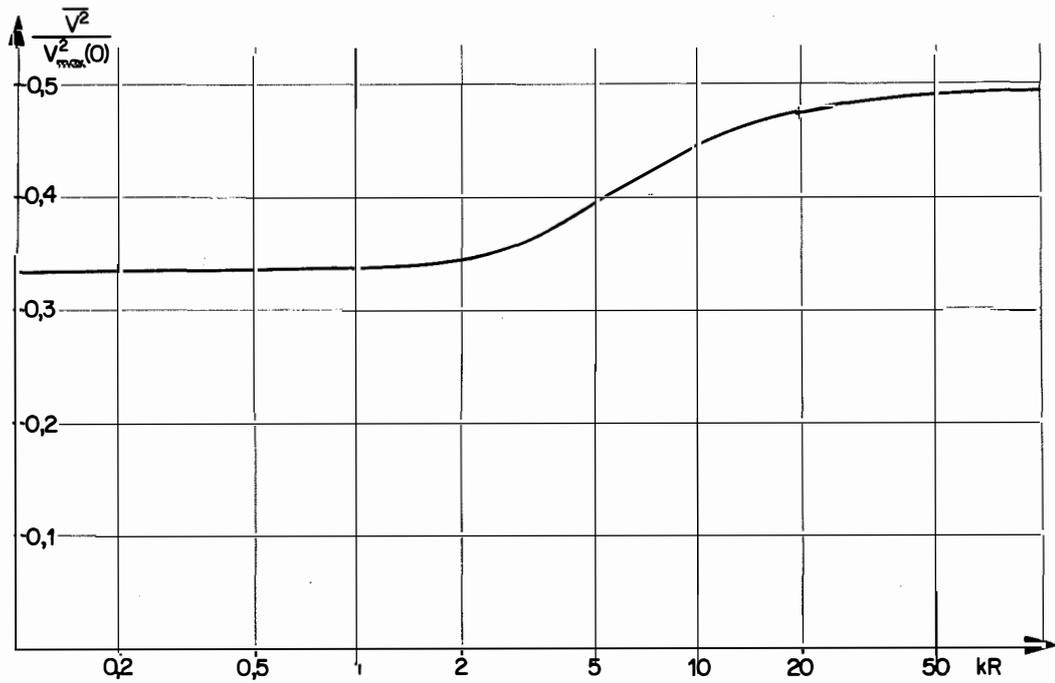


Fig. 21

Relations entre les valeurs moyennes quadratiques et maximales du rayon et de la vitesse d'un faisceau stationnaire de distribution uniforme dans l'espace à 4 dimensions en fonction du paramètre de charge d'espace kR .

E_4 étant l'extension en phase à 4 dimensions (pour un hyperellipsoïde - $kR = 0$ - $E_4 = \frac{\pi^2}{2} R^2 v_{\max}^2 (0)$ et pour un bicylindre - $kR \infty$ - $E_4 = \pi^2 R^2 v_{\max}^2 (0)$).

Les variations du double du deuxième radical figurant en (31) sont indiquées sur la figure 22. Il est très intéressant de noter que cette quantité varie extrêmement peu (moins de 6%). Ce fait est à rapprocher de la faible évolution des courbes émittance-courant (voir figure 7 du rapport précédent) avec le paramètre kR . Il entraîne que la définition de l'émittance moyenne quadratique est, pour les distributions de type uniforme dans l'espace à 4 dimensions une valeur qui permet une détermination approximative simple de la densité dans cet espace.

III.4 Relation entre les paramètres de charge d'espace δ et kR .

Le rapport déjà cité (B. et P. Lapostolle, 1969) donnait dans la 4^e partie divers calculs approchés tendant à raccorder le paramètre kR de charge d'espace à ceux introduits de manière classique pour un faisceau de distribution de Kapchinskij/Vladimirskij.

D'après les propriétés énoncées maintenant dans le présent rapport, il est possible d'établir des relations rigoureuses. On va le faire pour le paramètre δ , ce qui remplacera la relation approximative (75) du précédent rapport.

Comme dans ce précédent rapport, on négligera, dans le calcul, le facteur relativiste γ ; mais le résultat obtenu sera général dans la mesure où la vitesse transversale et la masse qui interviennent dans l'expression de k^2 sont exprimées dans le référentiel correct.

L'expression (7) de δ peut s'écrire, compte tenu de (3):

$$\delta = \frac{e I \lambda_0}{4\pi^2 \epsilon_0 m c^2 \beta^2 (c\beta E)} \quad (32)$$

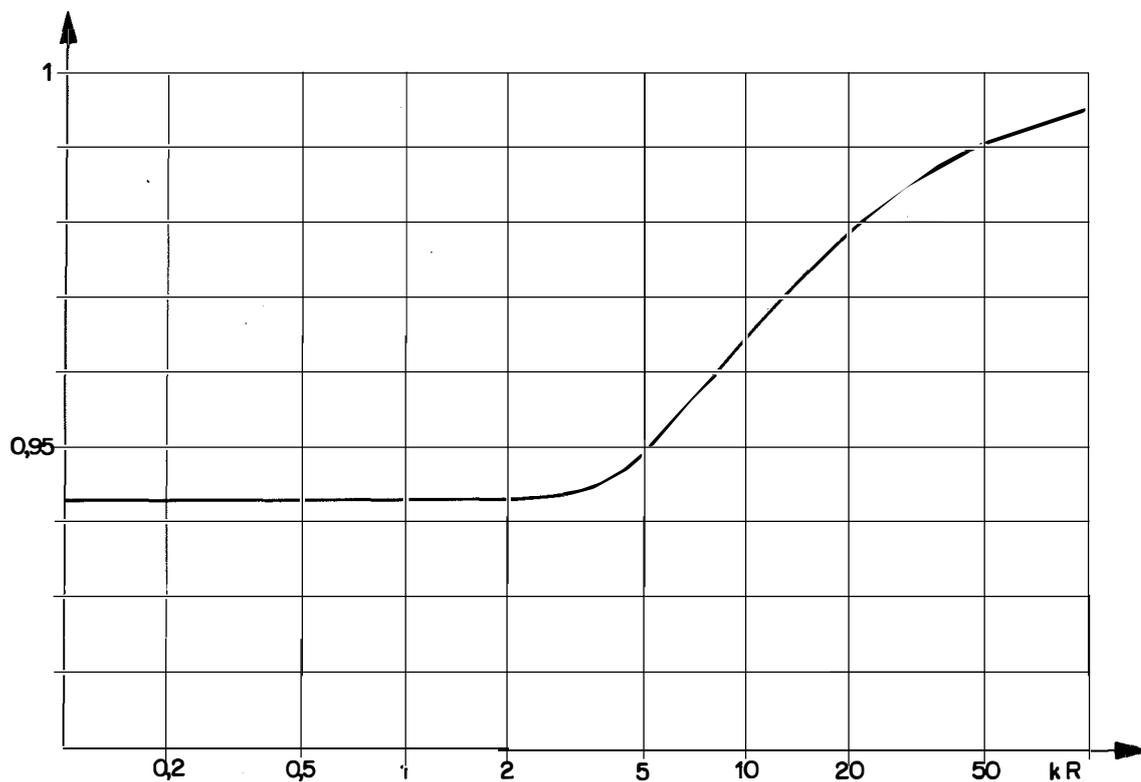


Fig. 22

Emittance moyenne quadratique d'un faisceau stationnaire comparée à la racine carrée de l'extension à 4 dimensions E_4 remplie uniformément, en fonction du paramètre de charge d'espace kR . Les variations sont extrêmement faibles.

soit encore, comme

$$I = Q c \beta \quad (33)$$

$$\delta = \frac{e Q}{2 \epsilon_0 m} \frac{\lambda_0}{2 \pi c \beta} \frac{1}{\pi (c \beta E)} \quad (34)$$

Or, on peut montrer que le carré de la fréquence angulaire les oscillations en l'absence de charge d'espace est

$$c^2 \beta^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 = \frac{e p_f}{2 \epsilon_0 m} \quad (35)$$

on a donc

$$\delta^2 = \frac{e Q^2}{2 \epsilon_0 m p_f} \frac{1}{\pi^2 (c \beta E)^2} \quad (36)$$

Faisant alors appel aux relations (24) et (31) ci-dessus, on trouve aisément:

$$\delta = \frac{kR}{2} \frac{\sqrt{I_2(kR) / I_0(kR)}}{2 \sqrt{\left[1 + \frac{4}{k^2 R^2} - \frac{I_0(kR)}{2 I_2(kR)} \right] \left[\frac{I_0(kR)}{I_2(kR)} - \frac{I_1^2(kR)}{2 I_2^2(kR)} \right]}} \quad (37)$$

Les variations de δ en fonction de kR sont indiquées sur la figure 23. On peut montrer que, pour les petites valeurs de kR

$$\delta \approx \frac{3 k^2 R^2}{16} \left(1 - \frac{k^2 R^2}{12} \right) \quad (38)$$

tandis que, pour les grandes

$$\delta \approx \frac{kR}{2} - \frac{1}{4} \quad (39)$$

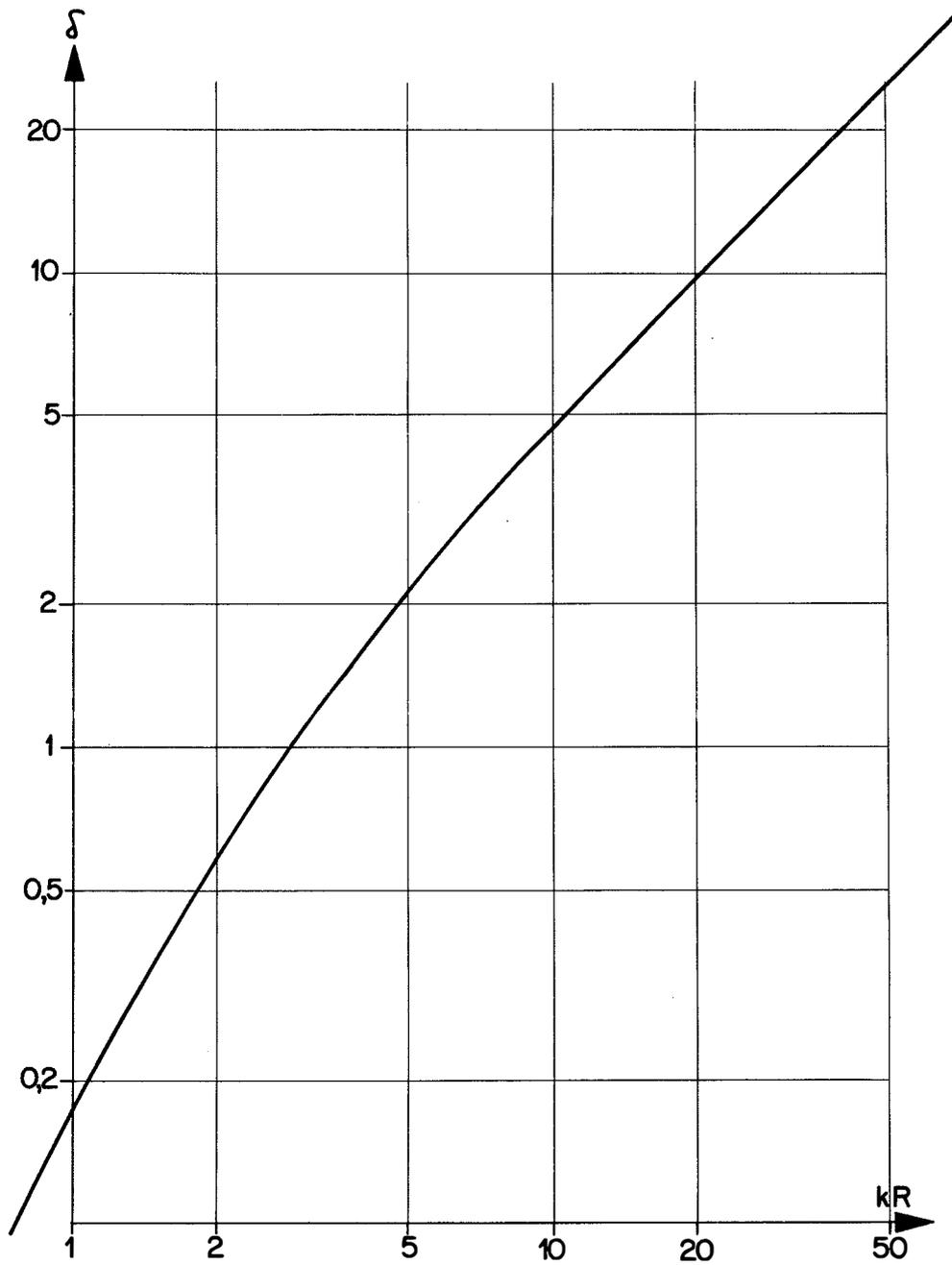


Fig. 23

Relation entre les paramètres de charge d'espace δ et kR

III.5 Vérification du théorème énoncé dans la 3^e partie.

Une telle vérification peut se faire en introduisant les expressions (25), (27) et (31) de a et de E dans l'équation (11) écrite en symétrie de révolution. Un tel calcul est long et fastidieux. Il peut être intéressant de procéder différemment par une méthode qui se borne au calcul de termes sans dimensions, comme suit:

Considérant les variables réduites (6), on peut écrire la condition de stationnarité sous la forme:

$$u - \frac{1}{u^3} - \frac{\delta}{u} = 0 \quad (40)$$

on en déduit sans peine

$$u^2 = \delta \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\delta^2}} \right] \quad (41)$$

Or on a

$$a^2 = u^2 \frac{E}{\omega}$$

donc

$$a^2 = \frac{E\delta}{\omega} \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\delta^2}} \right] \quad (42)$$

On va utiliser cette relation pour calculer a^2 et comparer la valeur obtenue à l'expression (27) calculée précédemment pour $\overline{R^2}$.

Dans un système focalisant donné et pour une intensité donnée (ω et I fixés), $E\delta/\omega$ est constant quel que soit E ou δ .

Dans le cas où $E = 0$ (emittance nulle), on sait, en particulier, que la distribution stationnaire est uniforme et le champ de charge d'espace linéaire à l'intérieur du faisceau; appliquant les calculs

classiques, on trouve alors

$$a^2 (\delta\infty) = \frac{E\delta}{\omega} = R_{\min}^2 \quad (43)$$

R_{\min} étant le rayon minimal d'un faisceau d'intensité donné dans un canal de focalisation donné, minimum obtenu pour une émittance nulle (Lapostolle, 1969).

On a donc, en général

$$a^2 = R_{\min}^2 \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\delta^2}} \right] \quad (44)$$

et c'est cette expression que l'on va évaluer:

On a, posant pour simplifier

$$kR = z$$

et remarquant que

$$I_1(z) = \frac{z}{2} [I_0(z) - I_2(z)]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{4} &= \frac{4}{z^2} \frac{I_0}{I_2} \left(2 + \frac{8}{z^2} - \frac{I_0}{I_2} \right) \left(2 \frac{I_0}{I_2} - \frac{z^2 I_0^2}{4 I_2^2} + \frac{z^2 I_0}{2 I_2} - \frac{z^2}{4} \right) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{I_0^2}{I_2^2} \left[\left(2 + \frac{8}{z^2} - \frac{I_0}{I_2} \right) \left(\frac{8}{z^2} - \frac{I_0}{I_2} + 2 - \frac{I_2}{I_0} \right) + \frac{1}{4} \frac{I_2^2}{I_0^2} \right] \\ &= \frac{I_0^2}{I_2^2} \left[\left(2 + \frac{8}{z^2} - \frac{I_0}{I_2} \right)^2 - \frac{I_2}{I_0} \left(2 + \frac{8}{z^2} - \frac{I_0}{I_2} \right) + \frac{1}{4} \frac{I_2^2}{I_0^2} \right] = \frac{I_0^2}{I_2^2} \left(2 + \frac{8}{z^2} - \frac{I_0}{I_2} - \frac{I_2}{2 I_0} \right)^2 \end{aligned}$$

On obtient donc

$$a^2 = R_{\min}^2 \frac{I_0(kR)}{I_2(kR)} \left[2 + \frac{8}{k^2 R^2} - \frac{I_0(kR)}{I_2(kR)} \right] \quad (45)$$

Comme, d'après le rapport précédemment cité

$$R_{\min}^2 = R^2 \frac{I_2 (kR)}{I_0 (kR)}$$

on voit, comparant à l'expression (27), que

$$a^2 = 2 \overline{R^2}$$

ce qui vérifie bien les propriétés annoncées.

APPENDICE IV

PRECISION DES PROGRAMMES DE CALCUL UTILISES

Comme l'un des buts de ces études concernait les variations possibles de l'émittance d'un faisceau, un soin tout particulier a été consacré à s'assurer que les calculs numériques satisfaisaient le théorème de

La routine adoptée pour l'intégration du mouvement (aux différences centrées) a été choisie pour sa propriété de conserver rigoureusement l'émittance.

Elle peut se décrire très simplement par les équations suivantes, qui se réfèrent à une coordonnée d'une particule; on passe du point 0 au point 1 par les opérations:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0 + h x'_0 + \frac{h^2}{2} f_0(x_0) \\ x'_1 = \frac{h}{2} f_0(x_0) + \frac{h}{2} f_1(x_1) + x'_0 \end{array} \right.$$

où h est le pas d'intégration et f_0 et f_1 , facteurs de force aux points 0 et 1 sont des fonctions qui dépendent des coordonnées de toutes les autres particules à leur passage en 0 et 1.

On peut écrire la deuxième des équations précédentes sous la forme

$$x'_1 = \frac{h}{2} f_0(x_0) + \frac{h}{2} f_1 \left[x_0 + h x'_0 + \frac{h^2}{2} f_0(x_0) \right] + x'_0$$

et calculer le jacobien de la transformation $0 \rightarrow 1$, pour la coordonnée x:

$$J = \begin{vmatrix} 1 + \frac{h^2}{2} f'_0(x_0) & h \\ \frac{h}{2} f'_0(x_0) + \frac{h}{2} f'_1(x_1) + \frac{h^3}{4} f'_1(x_1) f'_0(x_0) & 1 + \frac{h^2}{2} f'_1(x_1) \end{vmatrix}$$

On vérifie aisément que

$$J \equiv 1$$

La propriété s'étend au Jacobien relatif à toutes les coordonnées.

Des contrôles ont été effectués en suivant, au cours du mouvement, un certain nombre de points choisis sur des plans de symétrie pour s'assurer de l'invariance de la surface occupée, mais la précision de tels contrôles a toujours été très inférieure à celle obtenue qui, d'après la propriété vérifiée ci-dessus est la précision numérique de l'ordinateur.

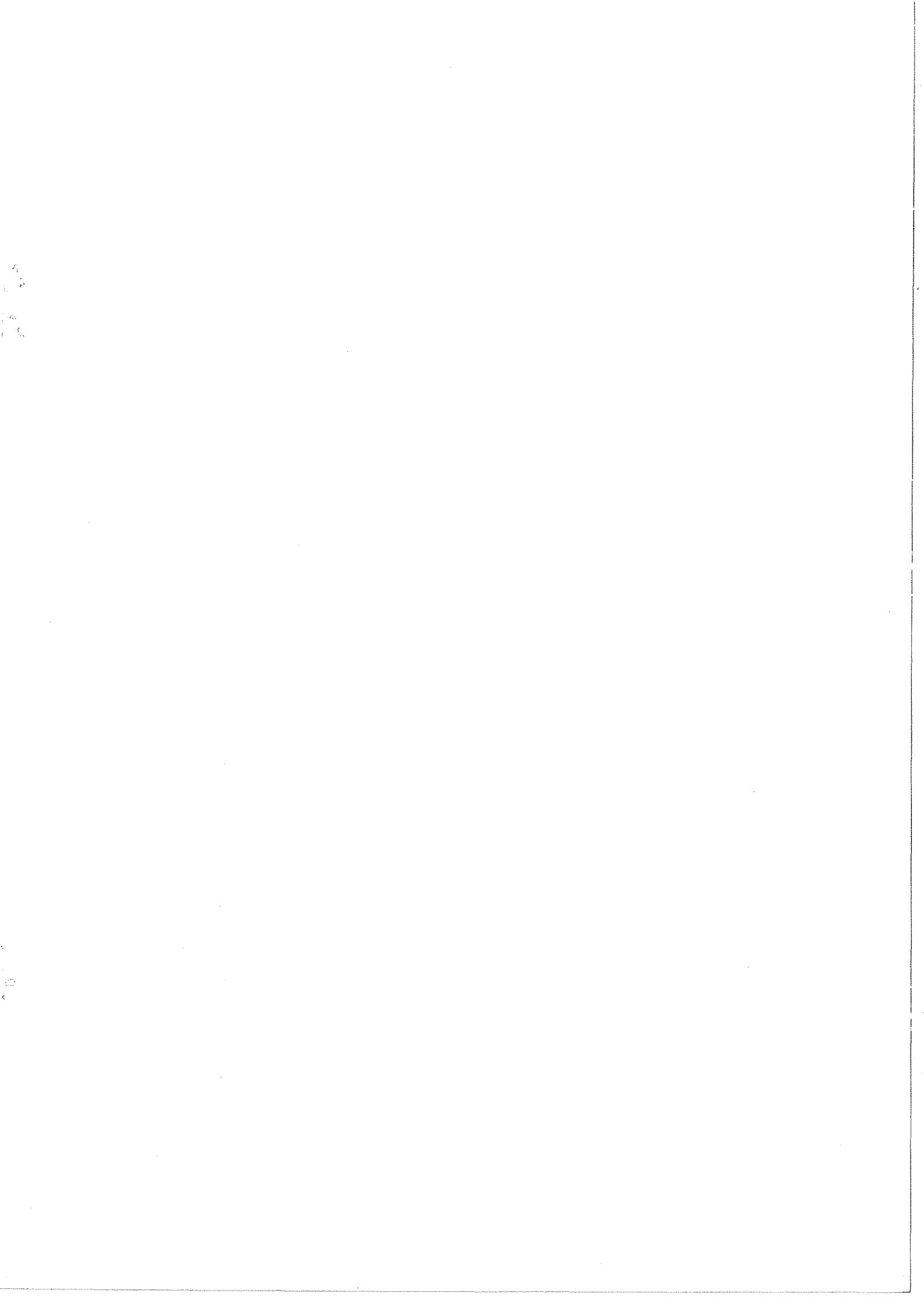
Des essais ont été faits de suivre sur une grande longueur (une dizaine de longueurs d'onde bêtatronique) l'évolution d'un faisceau présentant à l'origine une distribution sensiblement adaptée (stationnaire aux erreurs statistiques près) pour une intensité très élevée ($\delta = 5,45$ ou $kR = 11,5$). Ce calcul a été effectué avec les deux programmes utilisés (symétrie de révolution ou deux plans de symétrie); sur cette distance, l'évolution des dimensions du faisceau et de ses émittances (valeurs quadratiques moyennes) est restée inférieure en moyenne à 1%, c'est-à-dire à l'intérieur des limites imputables aux erreurs statistiques obtenues avec 2500 particules seulement. Les résultats obtenus avec les deux programmes sont très similaires, à part le fait, bien sûr, que le résidu d'oscillations antisymétriques n'apparaît pas dans le programme à symétrie de révolution et quelques différences mineures de ce type. Pour des intensités de charge d'espace plus faibles, la même précision de 1% est maintenue sur des intervalles d'intégration plus longs.

Les résultats représentés sur les figures 2, 3 et 4 constituent à ce titre, avec une intégration sur plus de 60 longueurs d'onde bêtatronique, un test très convaincant.

Remarque:

La démonstration précédente, relative au Jacobien, suppose implicitement que la fonction f est dérivable, ce qui peut être mis en doute à cause de son caractère aléatoire dû aux erreurs statistiques

provenant du remplacement de la fonction continue de densité par un nombre limité de lignes de courant. Le programme de calcul procède à un lissage et une interpolation, mais la dernière remarque sur la confirmation a posteriori des calculs reste sans doute la plus valable.



11
12
13

14