ISR-300 LIN/66-32
le 26 octobre 1966

QUELQUES RELATIONS ENTRE DES DISTRIBUTIONS DE TYPE HYPERELLIPSOIDAL DANS DES ESPACES A DEUX, TROIS, QUATRE ET SIX DIMENSIONS

par

P.M. Lapostolle

1) INTRODUCTION

Les notions d'émittance et la considération de l'espace des phases ont depuis longtemps été introduites dans la technique des accélérateurs de particules. Cependant ce n'est que plus récemment, lorsque les problèmes d'augmentation d'intensité, et, corrélativement, ceux de brillance, de charge d'espace, se sont posés de façon plus aigue, que l'on a commencé à s'interroger sérieusement sur l'allure des distributions dans les espaces géométriques ou de phases, à 2, 3, 4 ou 6 dimensions, à réfléchir à leurs implications et à envisager d'autres lois que la densité uniforme qui avait servi de base aux premiers travaux. Evidemment, dès que l'on dépasse trois dimensions, notre conception visuelle est en défaut et déjà même pour trois n'est-elle pas toujours si claire.

On va indiquer ici quelques relations assez simples qu'il est possible d'établir dans le cas très particulier où les distributions dans l'espace des phases sont du type hyperellipsoïdal.

On désigne par là une distribution où la densité dans un espace à n dimensions, de coordonnées x_1 , x_2 ... x_n , peut s'exprimer sous forme de fonction d'une seule variable

$$\varrho_n\,(r_n) \quad \text{où} \qquad r_n = \sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2}} \tag{1}$$

Les surfaces equidensité sont alors des hyperellipsoïdes homothétiques et possédant les axes de coordonnées par axes principaux.

Par des changements d'axes, cette dernière restriction pourrait être levée et les relations qui vont être établies étendues au cas d'hyperellipsoïdes obliques. On laisse cependant au lecteur le soin d'examiner les cas particuliers qui pourraient l'intéresser, pensant que la simple application de propriétés projectives devrait en général suffire.

2) ESPACES A DEUX ET QUATRE DIMENSIONS

Ce cas se rencontre habituellement lorsque l'on considère la section transversale d'un faisceau dont la distribution longitudinale est, par exemple, uniforme, constante ou lentement variable, de manière à pouvoir valablement raisonner sur une tranche. Quoiqu'il en soit il s'agit d'un problème à quatre diemsnions, les distributions à deux dimensions étant les projections de la distribution totale sur un plan.

La propriété de distribution hyperellipsoïdale attribue un rôle absolument égal aux 4 coordonnées et la projection considérée peut être soit sur un des deux plans de phases relatifs à une seule coordonnée transversale, soit sur le plan de section géométrique du faisceau (ou sur le plan des quantités de mouvement).

Le cas d'une distribution uniforme dans le plan de section géométrique a depuis longtemps été examiné par I. Kapchinskij et V. Vladimirskij[1)] qui ont dès 1959 signalé qu'il correspondait à une distribution de surface sur un hyperellipsoïde dans l'espace des phases à 4 dimensions.

Il va sans dire qu'une telle distribution est invraisemblable en pratique. Il ne serait besoin, pour s'en convaincre, qu'à réfléchir à ce qu'il adviendrait d'un tel faisceau si on le diaphragmait infiniment peu par un tube métallique qui épouserait sa forme sur une distance égale à une demi longueur d'onde betatronique.

Mais supposons ici une distribution de densité quelconque

$$\rho_2\ (r_2)$$

Nous nous proposons de chercher la distribution à 4 dimensions $\rho_4(r_4)$ telle que

$$\varrho_2(r_2) = \iint \varrho_4(r_4)\ dx_3\ dx_4 \qquad (2)$$

La distribution hyperellipsoïdale adoptée nous incite à effectuer le changement de variables usuel :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = a_1 r_4 \cos\theta_1 \\ x_2 = a_2 r_4 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ x_3 = a_3 r_4 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \\ x_4 = a_4 r_4 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \end{array}\right. \qquad (3)$$

où les θ peuvent varier de 0 à π, sauf θ_3 : de 0 à 2π.

Dans ce système, l'élément de volume vaut

$$dv_4 = a_1 a_2 a_3 a_4\ r_4^3 \sin^2\theta_1 \sin\theta_2\ d\theta_1\ d\theta_2\ d\theta_3\ dr_4 \qquad (4)$$

et pour calculer l'intégrale (2) nous la remplacerons par l'expression équivalente :

$$\varrho_2(r_2)\ dx_1\ dx_2 = \iiiint \varrho_4(r_4)\ dv_4 \qquad (5)$$

dans laquelle l'intégrale quadruple est étendue à l'hypervolume compris entre les hyperplans de coordonnées x_1 , $x_1 + dx_1$ et x_2, $x_2 + dx_2$.

Cet hypervolume élémentaire définit en fait une certaine relation entre les coordonnées $\theta_1\ \theta_2\ \theta_3\ r_4$. Si, par exemple on choisit une valeur de r_4, θ_1 et θ_2 sont définis par x_1 et x_2 ; il ne reste plus en (5) que la variable θ_3 à intégrer, ce qui est aisé, comme on le voit d'après l'expression (4). Dans ce cas, aussi, on voit que l'élément d'aire $dx_1\ dx_2$ découpé dans le plan $x_1\ x_2$ par les hyperplans précédents s'écrit

$$dx_1\ dx_2 = a_1\ a_2\ r_4^2 \sin^2\theta_1 \sin\theta_2\ d\theta_1\ d\theta_2 \qquad (6)$$

car r_4 ayant été choisi, les deux premières relations de (3) définissent une transformation de $x_1\ x_2$ en $\theta_1\ \theta_2$ et la relation (6) n'exprime rien d'autre que la valeur du Jacobien.

Il est alors indiqué de calculer (5) en intégrant d'abord en θ_3, à la suite de quoi on obtient simplement

$$\varrho_2(r_2)\ dx_1\ dx_2 = 2\pi\ a_3\ a_4 \iiint \varrho_4(r_4)\ r_4\ dr_4\ dx_1\ dx_2 \tag{7}$$

Cette intégrale n'est plus, en fait, qu'une intégrale simple, car dx_1 et dx_2 sont fixés et on peut voir assez aisément qu'elle doit être étendue de r_2 à l'infini, car, pour x_1 et x_2 donnés, le changement de variables (3) ne peut se faire que si $r_4 \gg r_2$.

Si l'on pose maintenant

$$\boxed{\begin{aligned} t_2 &= r_2^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} && (8) \\ t_4 &= r_4^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + \frac{x_4^2}{a_4^2} && (9) \end{aligned}}$$

on obtient aisément

$$\varrho_2\ (t_2) = a_3\ a_4 \int_{t_2}^{\infty} \varrho_4\ (t_4)\ dt_4 \tag{10}$$

ou encore

$$\boxed{-\ \pi\ a_3\ a_4\ \varrho_4\ (t) = \frac{d}{dt}\ \varrho_2\ (t)} \tag{11}$$

En particulier, si l'on veut une distribution ϱ_2 uniforme, la distribution ϱ_4 doit bien être une distribution de surface, comme l'avaient indiqué Kapchinskij et Vladimirskij. Une distribution ϱ_2 gaussienne correspond au contraire à une distribution ϱ_4 également gaussienne. Un distribution ϱ_2 linéaire en t, c'est à dire parabolique en r, du type

$$\varrho_2 = \varrho_{2\ o}(1 - r_2^2) \tag{12}$$

correspond à une distribution ϱ_4 uniforme, ce qui est peut-être assez proche de nombreux cas pratiques, (rappelons que l'hypervolume d'une hypersphère à 4 dimensions est $\pi^2/2\ R^4$).

3) ESPACES A DEUX ET SIX DIMENSIONS

Ce cas se présente en particulier si, pour un faisceau où les particules sont définies par leurs trois coordonnées géométriques et par un espace des phases à six dimensions on se propose de relier cette distribution à 6 dimensions à la distribution dans l'un quelconque des trois plans de phases relatifs aux trois coordonnées.

Le calcul se développe exactement comme précédemment. On aura ici le changement de variables

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = a_1 \, r_6 \cos \theta_1 \\ x_2 = a_2 \, r_6 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 = a_3 \, r_6 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ x_4 = a_4 \, r_6 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 \\ x_5 = a_5 \, r_6 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \cos \theta_5 \\ x_6 = a_6 \, r_6 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \end{array}\right. \qquad (13)$$

où les θ varient de 0 à π sauf θ_5 : de 0 à 2π.

L'élément de volume vaut :

$$dv_6 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \, r_6^5 \sin^4 \theta_1 \sin^3 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_4 \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\theta_3 \, d\theta_4 \, d\theta_5 \, dr_6 \qquad (14)$$

et on calculera

$$\varrho_2 (r_2) \, dx_1 \, dx_2 = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \varrho_6 (r_6) \, dv_6 \qquad (15)$$

étendue à l'hypervolume compris entre les hyperplans de coordonnées x_1 , $x_1 + dx_1$ et x_2, $x_2 + dx_2$, qui découpent toujours dans le plan $x_1 \, x_2$, une aire donnée par (6).

Mais, cette fois il est plus difficile d'écrire l'intégrale (15) sous une forme analogue à (7) ; on peut bien intégrer d'abord en $\theta_3 \, \theta_4 \, \theta_5$, mais θ_1 et θ_2 ne s'éliminent plus.

On a

$$\iiint \sin^2 \theta_3 \sin \theta_4 \, d\theta_3 \, d\theta_4 \, d\theta_5 = 2\pi^2 \qquad (16)$$

Pour poursuivre l'intégration de (15), qui contient encore, maintenant après élimination de $dx_1\ dx_2$,

$$r_6^3 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2$$

on peut remarquer que

$$r_6^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 = r_6^2 - r_2^2 \tag{17}$$

On obtient alors

$$\varrho_2 (r_2)\, dx_1\, dx_2 = 2\pi^2\, a_3 a_4 a_5 a_6 \iiint \varrho_6 (r_6) \quad (r_6^2 - r_2^2)\, r_6\, dr_6\, dx_1 dx_2 \tag{18}$$

Par l'introduction de t_2 défini par (8), et de

$$\boxed{t_6 = r_6^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + \frac{x_4^2}{a_4^2} + \frac{x_5^2}{a_5^2} + \frac{x_6^2}{a_6^2}} \tag{19}$$

et en remarquant que l'intégrale (18) doit se calculer pour $r_6 \geqslant r_2$ on trouve aisément

$$\varrho_2 (t_2) = \pi^2\, a_3 a_4 a_5 a_6 \int_{t_2}^{\infty} \varrho_6 (t_6)\ (t_6 - t_2)\ dt_6 \tag{20}$$

ou encore

$$\boxed{\pi^2\, a_3 a_4 a_5 a_6\ \ \varrho_6(t) = \frac{d^2}{dt^2}\ \varrho_2 (t)} \tag{21}$$

Cette fois, pour obtenir une distribution ϱ_2 uniforme, il faudrait une distribution ϱ_6 à double couche, ce qui est infiniment improbable.

Une distribution ϱ_2 gaussienne correspond toujours à une distribution ϱ_6 gaussienne.

Et à une distribution ϱ_6 uniforme doitcorrespondre une distribution ϱ_2 du type

$$\varrho_2 = \varrho_{2_0} (1 - r_2^2)^2 \tag{22}$$

qui pourrait peut-être être utilisée dans certaines applications (rappelons que l'hypervolume d'une hypersphère à 6 dimensions est $\pi^3/6\ R^6$).

4) ESPACES A TROIS ET SIX DIMENSIONS

L'application est évidente, pour relier une distribution de volume à distribution dans l'espace des phases à six dimensions qui lui correspond.

Le calcul ne permet pas ici d'arriver à des expressions aussi simples que celles rencontrées dans les deux cas précédents.

On peut, pourtant, l'effectuer.

On a maintenant

$$dx_1\ dx_2\ dx_3 = -r_6^3 \sin^3\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin\theta_3\ d\theta_1\ d\theta_2\ d\theta_3 \qquad (23)$$

comme le montre le calcul du Jacobien, à partir du changement de variable défini par les trois premières lignes de (13), pour r_6 fixe.

D'autre part, on remarquera que

$$r_6 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 = \sqrt{r_6^2 - r_3^2} \qquad (24)$$

Par la même méthode que précédemment, on est donc amené à

$$\boxed{\rho_3(t_3) = 2\pi\ a_4\ a_5\ a_6 \int_{t_3}^{\infty} \rho_6(t_6) \sqrt{t_6 - t_3}\ dt_6} \qquad (25)$$

Cette relation donne la distribution ρ_3 correspondant à n'importe quelle distribution ρ_6. Mais il n'est plus possible à partir d'elle d'écrire des relations du type (11) ou (21) pour effectuer la transformation inverse.

Pour déterminer la distribution ρ_6 correspondant à une distribution ρ_3 donnée, on peut passer par la distribution ρ_2 et appliquer les résultats du paragraphe précédent.

On obtient assez facilement

$$\varrho_2\ (t_2) = a_3 \int_{t_2}^{\infty} \frac{\varrho_3\ (t_3)}{\sqrt{t_3 - t_2}}\ dt_3 \qquad (26)$$

d'où l'on déduit

$$\pi^2\ a_4\ a_5\ a_6\ \varrho_6(t) = \frac{d^2}{dt^2} \int_{t}^{\infty} \frac{\varrho_3\ (t_3)}{\sqrt{t_3 - t}}\ dt_3 \qquad (27)$$

Si $\varrho_3(t)$ est continue de 0 à ∞ et s'il en est de même de sa dérivée, l'une et l'autre s'annulant, bien sûr, à l'infini, et si sa dérivée seconde est définie, on peut encore écrire (27) sous la forme

$$\pi^2\ a_4\ a_5\ a_6\ \varrho_6\ (t) = \int_{t}^{\infty} \frac{\frac{d_2\ \varrho_3\ (t_3)}{dt_3^2}}{\sqrt{t_3 - t}}\ dt_3 \qquad (28)$$

expression relativement simple mais dont l'application requiert cependant une certaine prudence.

Ces diverses relations permettent de faire les remarques suivantes :

La relation (25) montre qu'à une distribution ϱ_6 uniforme correspond une distribution du type

$$\boxed{\varrho_3 = \varrho_{3_o}\ (1 - r_3^2)^{3/2} \qquad (29)}$$

avec

$$\varrho_{3_o} = \frac{4\pi}{3}\ a_4\ a_5\ a_6\ \varrho_6 \qquad (30)$$

A une distribution ϱ_6 gaussienne ne correspond pas une distribution ϱ_3 gaussienne.

La distribution ϱ_6 qui correspond à une distribution ϱ_3 uniforme s'obtient à partir de (27) ; elle est du type :

$$\varrho_6 = \varrho_{6_o}\ (1 - r_6^2)^{-\ 3/2} \qquad (31)$$

avec

$$a_4 \; a_5 \; a_6 \; \varrho_{6_0} = \frac{\varrho_3}{2\pi^2} \qquad (32)$$

Cette fois, la densité n'est plus nulle au centre. Cependant, elle devient encore infinie sur la surface de l'hypervolume à six dimensions.

Distribution: (open) AR and ISR Scientific Staff