



ISR-300 LIN/66-31
Le 25 Octobre 1966

REMARQUES SUR LE COEFFICIENT "S" DE TEMPS DE TRANSIT

par

P.M. Lapostolle

1) INTRODUCTION

Dans les programmés récents de dynamique des particules dans un accélérateur linéaire à protons on fait souvent appel à la vitesse vraie des particules au milieu des espaces d'accélération et utilise pour la calculer un nouveau coefficient de temps de transit, le coefficient S.

Certaines expressions données dans les premiers rapports l'ayant introduit ont depuis lors été reconnues comme fausses et corrigées. La présente note explique la raison des erreurs initiales et expose quelques méthodes correctes de détermination de ce coefficient.

2) LES COEFFICIENTS DE TEMPS DE TRANSIT

Dans le calcul de la dynamique des particules dans les accélérateurs à protons, on fait depuis longtemps appel à l'équation dite de Panofsky ¹⁾, qui exprime le gain d'énergie d'une particule à la traversée d'un espace d'accélération en fonction de la "différence de potentiel" et de la phase φ du champ accélérateur :

$$\Delta W = e V_0 T \cos \varphi \quad (1)$$

Dans cette expression T est le coefficient de temps de transit. T est fonction de la vitesse et de la position radiale des particules qui traversent l'espace d'accélération et l'on utilise souvent l'expression classique (correspondant à un champ uniforme sur le cylindre de rayon a dans la fente accélératrice) :

$$T(kr) = \frac{\sin kg/2}{kg/2} \frac{I_0(k_r r)}{I_0(k_r a)} \quad (2)$$

où g est la longueur de la fente

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \frac{\omega}{v} \\ k_r^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$(4)$$

ω étant la pulsation de la HF, $\omega = 2\pi f$; v est la vitesse des particules, c celle de la lumière, r est la distance à l'axe à laquelle passe la particule considérée, a le rayon des tubes de glissement.

En pratique, aujourd'hui, les méthodes de calcul numériques permettent de connaître la distribution des champs dans la géométrie réelle des espaces accélérateurs et d'y calculer le coefficient T (fonction de la vitesse v ou de la variable k et de la position radiale).

$$T(kr) = T_0(k) I_0(k_r r) \quad (5)$$

En fait, on peut se demander quelle valeur attribuer à la vitesse v (ou à la variable k) dans cette expression, puisque un espace d'accélération est précisément un endroit où cette vitesse v change.

Des calculs plus récents ^{2) 3) 4)} ont montré qu'on avait intérêt à choisir la vitesse au milieu de l'espace d'accélération (et pour φ la phase correspondante) ; et ces mêmes calculs ^{2) 3)} ont donné un moyen de déterminer cette vitesse "médiane" par l'expression du gain d'énergie ΔW_1 dans la première moitié d'un espace d'accélération :

$$\Delta W_1 = \frac{\Delta W}{2} + \frac{cV_0}{2} S(k,r) \sin \varphi \quad (6)$$

S (k, r) est un nouveau coefficient de temps de transit défini par :

$$S(k, r) = \frac{2 \int_0^{+\infty} E_z(z, r, t) \sin kz \, dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} E_z(z, 0, t) \, dz} \quad (7)$$

expression qui a d'ailleurs la même valeur quel que soit t et que l'on peut donc évaluer pour t = 0 (champ crête).

3) ERREURS A EVITER ET EXPRESSION PARTICULIERE

Le travail déjà cité ²⁾ exprimait S(k, r) sous la forme plus générale, analogue à (5) :

$$S(k,r) = S_0(k) I_0(k_r r) \quad (8)$$

Cette expression est fausse.

Ceci apparait immédiatement à l'examen de résultats de calculs numériques de (7) d'où il ressort que S(k,r) est plus grand sur l'axe qu'en dehors de l'axe.

La forme (8) permettait d'ailleurs aussi d'exprimer S sous une forme analogue à (2). Et le rapport ³⁾ on a donné l'expression, pour le cas d'un champ uniforme :

$$S(k,r) = \frac{1 - \cos kg/2}{kg/2} \frac{I_0(k_r r)}{I_0(k_r a)} \quad (9)$$

expression également fausse, comme nous l'a révélé une comparaison plus détaillée de calculs faisant appel à cette expression et d'intégration pas à pas du mouvement des particules ³⁾.

Pourquoi ces expressions sont elles fausses ? Simplement parce qu'elles supposent le caractère maxwellien à une distribution où les champs sont remplacés par leur image dans la deuxième moitié de l'espace d'accélération. Même si chaque demi espace possède une distribution maxwellienne, la discontinuité du plan médian, où tous les champs (non nuls) se retournent, ne peut l'être.

Il est possible, toujours dans le cas de la distribution de champ uniforme qui correspond à (2), de calculer une expression correcte de S. Ce calcul a été exposé récemment⁵⁾. Il donne :

$$S(k,r) = \frac{I_0(k_r a) - \cos kg/2 I_0(k_r r)}{kg/2 I_0(k_r a)} \quad (10)$$

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ka)^2 J_0\left(\frac{r}{a} j_n\right) \exp\left(-\frac{g}{2a} j_n'\right)}{\left(\frac{kg}{2}\right) j_n J_1(j_n) \left[j_n'^2 + (ka)^2\right]}$$

où j_n est la n^{ème} racine de l'équation

$$J_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad j_n' = \sqrt{j_n^2 - \frac{\omega^2 a^2}{c^2}}$$

L'examen de cette expression montre qu'en principe, on peut aisément négliger la somme figurant au deuxième membre de (10) ou, en tous cas, la limiter à son premier terme. Si on néglige entièrement la somme, on a l'expression relativement simple :

$$S(k,r) = \frac{I_0(k_r a) - \cos kg/2 I_0(k_r r)}{kg/2 I_0(k_r a)} \quad (11)$$

où l'on constate bien que S est maximum sur l'axe et décroît lorsqu'on s'en éloigne.

4) REMARQUE SUR LA RELATION PRECEDENTE ET RAPPROCHEMENT AVEC LE CAS DES LINACS A GRILLES

Les relations (10) ou (11) correspondent à un espace d'accélération où le champ accélérateur E_z serait pour $r = a$ (qui est le rayon des tubes de glissement) nul dans les tubes et constant et égal à V_0/g dans la fente accélératrice.

Contrairement à l'opinion courante, cette distribution n'est pas obtenue avec une fente accélératrice à faces planes percées d'un

orifice cylindrique comme l'indique la figure 1 ; pour obtenir la distribution uniforme de champ sur le cylindre prolongeant des tubes de glissement, il faut modeler les faces de la fente selon une forme indiquée à titre d'exemple sur la figure 2 (a) qui correspond à une cellule basse énergie. Le rayon de courbure devient nul au bord du tube, mais la courbure présente un infini logarithmique, tel que le profil n'est pas anguleux, au sens mathématique du terme. Très loin de l'axe, on n'a pas poursuivi le tracé qui, par la méthode de prolongement analytique employée, où il est fait appel à des séries de Neumann, présente des irrégularités (pour $r \neq 3a, 5a \dots$) qui n'ont pas nécessairement de sens physique.

La figure 2 montre en outre une famille de lignes orthogonales au champ électrique.

Bien que le profil représenté sur cette figure ne soit pas extrêmement différent des profils utilisés en pratique (que l'on définit de préférence par un nombre limité d'arcs de cercle et de segments de droite) on peut se demander si les expressions (10) ou (11) y sont applicables. Des calculs sur l'ensemble des espaces d'accélération, entre 0.5 McV et 10 McV, d'un projet de linac ⁵⁾ ont montré que l'approximation (11) est assez satisfaisante.

Il n'est pas sans intérêt d'ailleurs de rapprocher la relation (11) de travaux antérieurs. Les premiers linacs construits avaient toujours fait usage de focalisation à grille. Pour en tenir compte, on avait alors l'habitude de modifier l'expression (2) du coefficient de temps de transit et de l'écrire ⁶⁾ :

$$T(k,r) = \frac{\sin kg/2}{kg/2} \cdot \frac{1}{2} \left[1 + \frac{I_o(k_r r)}{I_o(k_r a)} \right] \quad (12)$$

Examinons un peu plus en détail cette relation. Elle correspond à un espace d'accélération schématisé sur la figure 3, où la présence d'une grille rend, en principe, le champ parallèle à l'axe sur tout le plan de sortie.

(a)

Le calcul de ce profil ⁵⁾ a été effectué par Mme M. Bell que nous tenons à remercier pour ce travail. Plusieurs cas de figure ont été considérés ; les formes sont toujours très voisines.

Ce plan peut alors être assimilé à un plan de symétrie et la distribution de champ prolongée pour représenter un espace d'accélération de longueur double (en pointillé sur la figure). Le gain d'énergie dans l'espace simple (longueur g) est alors le gain d'énergie dans la première moitié de l'espace double (longueur $g' = 2g$). Il est alors curieux de comparer le gain d'énergie dans un espace d'accélération à grille à l'expression (6) donnée précédemment.

Nous admettons, pour commencer, que le "centre électrique", selon la définition de Panofsky ¹⁾, de l'espace d'accélération dissymétrique à grille est au milieu de cet espace, à la distance $g/2$ de la grille. Il aura alors un déphasage $kg/2$ entre les phases relatives à l'espace simple (avec grille) et à l'espace double.

Or l'application des relations (2) et (11) dans l'expression (6) donne

$$\begin{aligned} \Delta W = eV_0 & \frac{\sin kg'/2}{kg'/2} \frac{I_0(k_r r)}{I_0(k_r a)} \cos \varphi' \\ & + eV_0 \frac{I_0(k_r a) - \cos kg'/2 I_0(k_r r)}{kg'/2 I_0(k_r a)} \sin \varphi' \end{aligned} \quad (13)$$

qui peut encore s'écrire, en posant

$$\varphi' = \varphi + \frac{kg}{2} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta W = eV_0 & \frac{\sin kg/2}{kg/2} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{I_0(k_r r)}{I_0(k_r a)} \right] \cos \varphi \\ & + eV_0 \frac{\cos kg/2}{kg/2} \frac{1}{2} \left[1 - \frac{I_0(k_r r)}{I_0(k_r a)} \right] \sin \varphi \end{aligned} \quad (15)$$

On reconnaît bien, dans le premier terme de (15) l'expression (12) et la forme générale (1). Le deuxième terme est un terme correctif qui montre que le centre défini par (14) n'est pas exactement le centre électrique de l'espace accélérateur ; il est d'ailleurs évident qu'une particule qui y passerait avec une phase $\pi/2$ recevrait une énergie non nulle par suite de la dissymétrie des champs.

Cependant ce deuxième terme de (15) est petit, comme le montre une évaluation numérique. Et cela justifie dans une certaine mesure la relation (12) et les calculs des linacs à grille.

5) GENERALISATION

On peut encore remarquer que si l'on essaie, par la relation (15), de définir un nouveau centre électrique pour l'espace accélérateur avec grille, la position obtenue dépend de r ; cela voudrait dire qu'on ne peut pas définir un plan milieu électrique. La raison est simplement, encore, que le champ dans un espace accélérateur à grille n'est pas maxwellien dans tout le domaine où circulent les particules ; dans ces conditions, la définition de "centre électrique" au sens de Panofsky ne peut plus s'appliquer.

On voit donc la difficulté qu'il y a à énoncer des propriétés générales concernant le coefficient de transit S .

Aussi est-il bon, si l'on veut disposer d'expressions plus précises que celles données par (10) ou (11) de faire appel à des calculs basés sur la distribution exacte des champs.

Il suffit, en principe, d'évaluer les intégrales figurant en (7).

En pratique, on les calcule normalement pour une certaine valeur de k :

$$k_0 = \frac{2\pi}{L} \quad (16)$$

où L est la longueur d'une "cellule" de la structure accélératrice.

Il est utile, alors, de calculer également les dérivés

$$\left\{ \begin{array}{l} DS(k_0, r) = \frac{2k_0 \int_0^{\infty} E_z(z, r, 0) z \cos k_0 z dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} E_z(z, 0, 0) dz} \\ DD S(k_0, r) = \frac{-2k_0^2 \int_0^{\infty} E_z(z, r, 0) z^2 \sin k_0 z dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} E_z(z, 0, 0) dz} \end{array} \right. \quad (17) \quad (18)$$

et de remarquer que

$$S(k, r) = S(k_0, r) + \frac{k - k_0}{k_0} DS(k_0, r) + \frac{(k - k_0)^2}{2k_0^2} DDS(k_0, r) + \dots \quad (19)$$

qui exprime la dépendance de S en fonction de k .

Pour la dépendance en fonction de r , on peut, évidemment, utiliser chacune des fonctions précédentes données point par point par le calcul.

En fait, il semble parfaitement légitime de se contenter d'expressions du type

$$S(k_0, r) = S_0(k_0) - S_1(k_0)r^2 \quad (20)$$

limitées à deux termes. A la rigueur un troisième terme, en r^4 , pourrait être ajouté.

Ces termes S_0 et S_1 peuvent alors être déduits de l'analyse des résultats de calcul des intégrales (7) (17) et (18).

Pour terminer, il est bon de rappeler que l'introduction d'un coefficient de transit S peut aussi être utile pour préciser le mouvement transversal des particules dans un espace d'accélération.

Pour le définir, le champ E_z dans les intégrales figurant aux numérateurs de (7) (17) et (18) doit être remplacé par E_r et les fonctions sinus et cosinus inversées.

Les coefficients S ainsi obtenus sont alors des fonctions impaires de r et il est légitime de limiter leur expression à une fonction linéaire (ou à la rigueur à deux termes, en r et r^3).

Leur calcul peut alors se faire comme indiqué précédemment. Il est d'ailleurs bon de noter qu'il existe des relations étroites entre les coefficients de temps de transit longitudinaux et transversaux, relations qui peuvent être utilisées pour vérifier les calculs ou les faciliter.

- 1) W.K.H. Panofsky,
Linear Accelerator Beam Dynamics. UCRL report 1216 (1951).
- 2) P.M. Lapostolle,
Equations de la dynamique des particules dans un accélérateur
linéaire à protons. Rapport interne CERN AR/Int. SG/65-11.
31.5.1965.
- 3) A. Carne, P.M. Lapostolle, M. Promé,
Accurate Beam Dynamics equations in proton linear accelerators.
V. Int. Conference on High Energy Accelerators. Frascati Sept.
1965.
(à paraître).
- 4) B. Schnitzer,
Motion of a particle in a Spatially Homogeneous Time Harmonic
Electric Field. Rapport interne CERN (en préparation)
- 5) A. Carne, P.M. Lapostolle,
Design equations in an Alvarez type proton linear accelerator.
1966 Linac Conference, Los Alamos. (à paraître).
- 6) B. Cork,
Bevatron Injector. Review of Scientific Instruments 26 no. 2.
Fevrier 1955 p. 214.

Distribution: (open) AR and ISR Scientific Staff

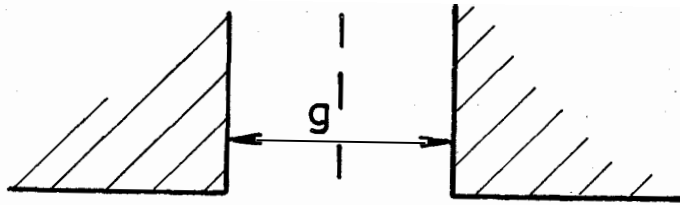


FIG. 1

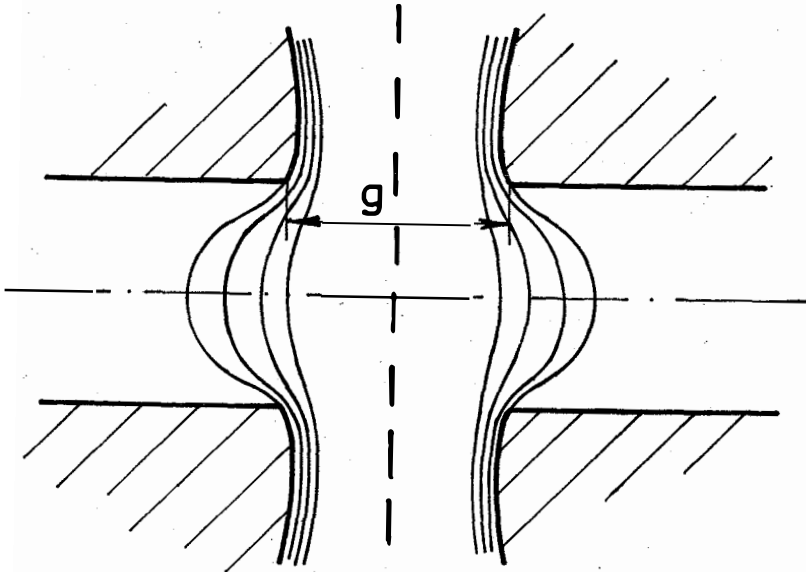
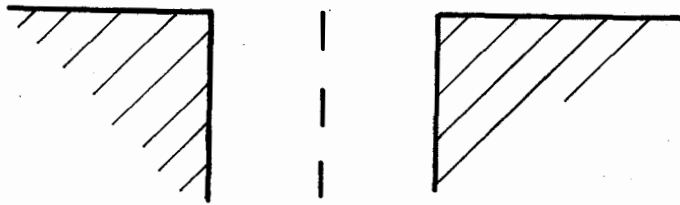


FIG. 2

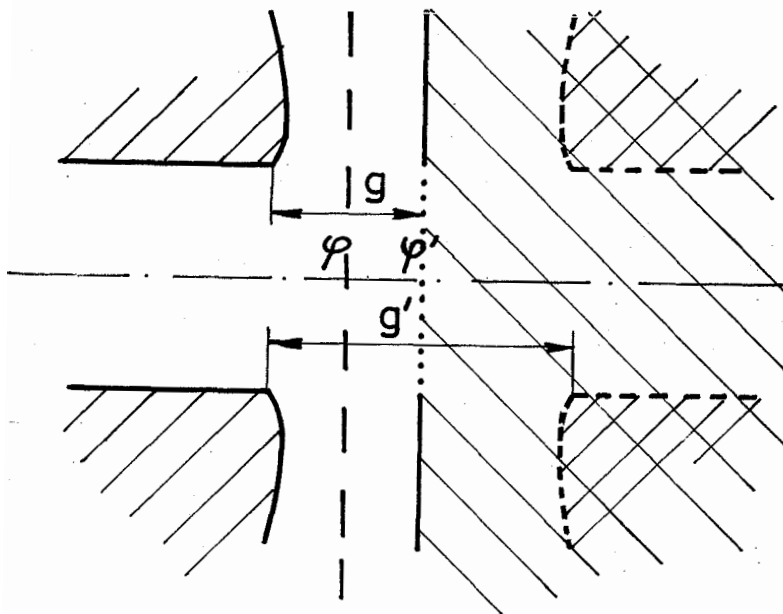


FIG. 3

