

F.M. Lapostolle

par

CHAMP ET POTENTIEL DE CHARGE D'ESPACE
PRODUIT PAR UN FAISCEAU DE SECTION ELLIPTIQUE
DANS UN TUBE METALLIQUE EGAIEMENT ELLIPTIQUE

CM-P00061966



CERN LIBRARIES, GENEVA

AR/Int. SG/65-27
11 novembre 1965

I. INTRODUCTION

L'étude de la distribution des champs de charge d'espace a fait l'objet de travaux depuis de nombreuses années. En particulier le cas de faisceaux elliptiques isolés dans l'espace a été considéré par divers auteurs dès 1955^{1,2)} et l'effet d'image des parois a été traité en 1963 par L.J. Lasslett³⁾.

Cependant, si le cas de parois elliptiques a été traité par ce dernier, il ne l'a été, en toute rigueur, que pour un faisceau infiniment fin ou (comme on le verra) de section circulaire. Et la superposition des deux corrections d'antisymétrie, l'une due à la forme du faisceau, l'autre due à celle des parois, ne peut pas se faire linéairement. Il est aisé de se rendre compte, par exemple, que les formules simplifiées données par L.J. Lasslett³⁾ ne s'appliqueraient pas au cas d'une chambre elliptique remplie entièrement par un faisceau, cas qu'il est très aisé de résoudre exactement.

Le but de cette note est d'éclaircir certains points de détail relatifs à cette distribution des champs de charge d'espace dans un système non de révolution, mais présentant deux plans de symétrie. Elle s'applique principalement à des faisceaux elliptiques et de densité uniforme, mais il sera possible d'obtenir aussi des propriétés importantes relatives au cas de densités non uniformes (mais possédant toutefois deux plans de symétrie); elle permettrait aussi de traiter le cas de parois non elliptiques mais possédant les mêmes symétries. Enfin elle donnera des expressions approchées des champs qui, un peu plus complexes que celles données par L.J. Lasslett³⁾, ont par contre l'avantage d'être plus précises, d'éviter les paradoxes auxquels les expressions simplifiées risquent de conduire et, de plus, de se présenter sous forme algébrique.

II. POTENTIEL DE CHARGE D'ESPACE CREE PAR UN FAISCEAU DE SECTION ELLIPTIQUE ISOLEE DANS L'ESPACE

Un calcul du champ produit par une telle distribution de charges de densité uniforme, isolées dans l'espace, a été effectué d'abord sur les génératrices situées aux sommets des axes de l'ellipse de section¹⁾ puis en tout point intérieur et sur les plans principaux, à l'extérieur²⁾.

On va donner ici quelques propriétés complémentaires sur cette distribution de champs et étendre les résultats précédents à tout l'espace.

Rappelons d'abord le mode de calcul qui conduit aux résultats¹⁾ et²⁾. Considérons une section du faisceau (Fig. 1) et adoptons les notations de la figure; cherchons d'abord le champ électrique produit en P sur l'un des axes par les filets de charge parallèles à Ox qui constituent le faisceau.

Par raison de symétrie ce champ est parallèle à Oz. La contribution d'un filet de section $dydz$ situé en M et transportant une charge (on supposera la densité uniforme) $q dydz/\pi bc$ par unité de longueur du faisceau est, selon Oz:

$$dE = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 bc} \frac{h-z}{y^2 + (h-z)^2} dydz . \quad (1)$$

Pour obtenir le champ total en P, il suffit d'intégrer sur toute la section elliptique du faisceau. C'est seulement dans ce mode d'intégration que diffèrent les méthodes¹⁾ et²⁾ précédemment citées.

On va ici procéder de façon encore légèrement différente.

Décrivons sous forme paramétrique

$$\left. \begin{aligned} y &= b \cos \varphi \\ z &= c \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

l'ellipse de section.

Tout point intérieur peut être représenté par deux coordonnées ρ et φ telles que :

$$\left. \begin{aligned} y &= \rho b \cos \varphi \\ z &= \rho c \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq \rho \leq 1 \\ -\pi &\leq \varphi \leq \pi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

On a alors

$$E = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0} \iint \frac{h - c\rho \cos \varphi}{b^2 \rho^2 \sin^2 \varphi + (h - c\rho \cos \varphi)^2} \rho \, d\rho \, d\varphi \quad (5)$$

l'intégrale étant étendue au domaine défini par (4).

Séparant en éléments simples la fraction qui apparaît sous l'intégrale on obtient :

$$E = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 b \rho \sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}} \times \left[\frac{h + \frac{hc^2}{b^2 - c^2} + \frac{bc\sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}}{b^2 - c^2}}{\cos \varphi + \frac{hc}{(b^2 - c^2)\rho} + \frac{b\sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}}{(b^2 - c^2)\rho}} \right]$$

$$- \frac{h + \frac{hc^2}{b^2 - c^2} - \frac{bc\sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}}{b^2 - c^2}}{\cos \varphi + \frac{hc}{(b^2 - c^2)\rho} - \frac{b\sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}}{(b^2 - c^2)\rho}} \rho \, d\rho \, d\varphi$$

ou encore

$$E = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0} \iint \left[\frac{hb + c\sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}}{(b^2 - c^2)\rho \cos \varphi + hc + b\sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}} - \frac{hb - c\sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}}{(b^2 - c^2)\rho \cos \varphi + hc - b\sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}} \right] \times \frac{\rho \, d\rho \, d\varphi}{\sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}} \quad (6)$$

L'intégrale en φ est prise de $-\pi$ à $+\pi$, et en utilisant la relation :

$$\int \frac{d\varphi}{p + q \cos \varphi} = \frac{2}{\sqrt{p^2 - q^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{p^2 - q^2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{p + q}$$

on voit aisément qu'elle se réduit à deux termes valant respectivement

$$\frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - q^2}} \quad \epsilon \text{ signe de } p$$

(ϵ signe de p étant pris égal à $+1$ si $p > 0$ et à -1 si $p < 0$). On vérifie que

$$p^2 - q^2 = [hb \pm c\sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}]^2 > 0$$

ce qui justifie l'emploi de la relation utilisée.

Pour achever le calcul, il reste alors à discuter le signe des deux quantités

$$hc - b\sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}$$

qui est du signe de $c^2 - b^2$ et

$$hb - c\sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}$$

qui est du signe de $(b^2 - c^2) \times (h - c\rho)$.

Finalement, les deux termes de l'intégrale s'ajoutent si

$$c\rho < h$$

et ils se retranchent dans le cas contraire.

On a ainsi

$$E = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\min(h/c, 1)} \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{(b^2 - c^2)\rho^2 + h^2}} \quad (7)$$

la limite supérieure étant la plus petite des deux valeurs indiquées, c'est-à-dire h/c si le point P est intérieur au faisceau et 1 s'il est extérieur.

On trouve ainsi la propriété suivante qui généralise une propriété bien connue dans le cas de faisceaux de section circulaire :

si l'on décompose le faisceau en tubes creux elliptiques, de sections homothétiques, seuls contribuent au champ électrique de charge d'espace ceux qui sont intérieurs au cylindre passant par le point P; ceux qui sont extérieurs sont sans influence.

Ceci est vrai quelle que soit la distribution de densité, uniforme ou non, pourvu simplement que la symétrie elliptique soit conservée.

En cas de densité non uniforme il suffit de rajouter dans l'intégrale (7) une fonction $f(\rho)$.

Achevons le calcul dans le cas d'une densité uniforme, on trouve

$$E = \frac{q}{\pi\epsilon_0(b+c)} \times \frac{h}{c} \quad (8)$$

dans le cas d'un point intérieur

$$E = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{(b^2 - c^2) + h^2} - h}{b^2 - c^2} \quad (9)$$

dans le cas d'un point extérieur.

On a, évidemment, des expressions semblables sur l'autre axe :
il suffit de permuter b et c.

A partir de telles expressions il est aisé de déduire la distribution de potentiel dans tout l'espace. En effet, ce potentiel V doit vérifier la loi de Poisson

$$\operatorname{div} V = \frac{q}{\epsilon_0 \pi bc} \quad (10)$$

à l'intérieur du faisceau, et l'équation de Laplace

$$\operatorname{div} V = 0 \quad (11)$$

à l'extérieur.

Ayant, par intégration, la valeur de V sur les axes, la valeur en tout point de l'espace peut alors être calculée de façon univoque.

On obtient aisément, à l'intérieur du faisceau

$$V = V_0 + \frac{q}{2\pi\epsilon_0(b+c)} \left(\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \right) \quad (12)$$

qui vérifie bien (10) et satisfait (8) sur les axes. On voit que les équipotentiellles sont une famille d'ellipses homothétiques.

Le potentiel extérieur, étant laplacien, s'obtient en faisant appel aux fonctions analytiques.

Posons

$$Z = y + jz \quad (13)$$

on va chercher une fonction F(Z) telle que sa partie réelle soit égale à V lorsque y et z sont les coordonnées du point P.

Soit

$$F(Z) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \log \left[Z + \sqrt{Z^2 - (b^2 - c^2)} \right] + \frac{Z^2 - Z\sqrt{Z^2 - (b^2 - c^2)}}{b^2 - c^2} \right\} \quad (14)$$

On vérifie, aussi bien pour un axe que pour l'autre, que la partie réelle satisfait la relation (9) ou celle obtenue par permutation de b et c.

Posant

$$b^2 - c^2 = f^2 \quad (15)$$

on en déduit le potentiel

$$\begin{aligned}
 V = V_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \log & \left[\begin{aligned} & y^2 + z^2 + \sqrt{(y^2 - z^2 - f^2)^2 + 4y^2 z^2} \\ & + y\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{(y^2 - z^2 - f^2)^2 + 4y^2 z^2} + (y^2 - z^2 - f^2)} \\ & + z\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{(y^2 - z^2 - f^2)^2 + 4y^2 z^2} - (y^2 - z^2 - f^2)} \end{aligned} \right] \\
 & + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 f^2} \left[\begin{aligned} & y^2 - \frac{y}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(y^2 - z^2 - f^2)^2 + 4y^2 z^2} + (y^2 - z^2 - f^2)} \\ & - z^2 + \frac{z}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(y^2 - z^2 - f^2)^2 + 4y^2 z^2} - (y^2 - z^2 - f^2)} \end{aligned} \right] \\
 & - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \log (b + c)
 \end{aligned} \quad (16)$$

valable à l'extérieur du faisceau.

Il est très intéressant de noter que ce potentiel, à part le terme constant, ne dépend de la forme du faisceau que par la longueur focale f de l'ellipse de section. Il est le même quelle que soit la

surface de l'ellipse, pourvu que la charge q par unité de longueur soit la même et que la densité soit uniforme. En particulier la distribution du champ de charge d'espace est la même que si la charge était concentrée sur un ruban de largeur $2f$ avec une distribution en $1 - y^2/f^2$.

On généraliserait d'ailleurs aisément cette remarque au cas où la distribution dans le faisceau ne serait pas uniforme : il suffirait de changer la distribution sur le ruban équivalent.

L'expression (16) peut être employée pour déterminer la forme des lignes équipotentiellles. Rappelons d'ailleurs que les lignes de force du champ sont telles que : partie imaginaire de $F(Z) = C^{te}$.

Sur l'axe Oz on a

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{-z^2 + z\sqrt{z^2 + f^2}}{f^2} + \log(z + \sqrt{z^2 + f^2}) - \log(b+c) \right]. \quad (17)$$

Sur l'axe Oy

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } y \leq f \\ V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{y^2}{f^2} + \log \frac{f}{b+c} \right] \\ \text{pour } y \geq f \\ V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{y^2 - \sqrt{y^2 - f^2}}{f^2} + \log(y + \sqrt{y^2 - f^2}) - \log(b+c) \right] \end{array} \right\} \quad (18)$$

Enfin, posant

$$\left. \begin{array}{l} y = \rho \cos \varphi \\ z = \rho \sin \varphi \end{array} \right\} \quad (19)$$

pour $\rho > f$

on a :

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[\log \frac{2\rho}{b+c} + \frac{1}{2} - \frac{f^2}{8\rho^2} \cos 2\varphi - \frac{f^4}{32\rho^4} \cos 4\varphi + \dots \right] \quad (20)$$

et, à grande distance, les équipotentiellles s'assimilent à une famille d'ellipses homofocales ayant leurs foyers sur l'axe Oy (si $b > c$) et une longueur focale $f/\sqrt{2}$.

Les figures 2 et 3 montrent les variations de V en fonction de ρ pour diverses valeurs de φ et l'allure des équipotentiellles et lignes de champ. En hachures est indiquée une section de faisceau elliptique ($b = 1,25f$, $c = 0,75f$) de longueur focale f et en pointillé les lignes équipotentiellles et de champ correspondantes à l'intérieur du faisceau (bien entendu elles se raccordent aux lignes en traits pleins à l'extérieur du faisceau).

III. EFFET D'IMAGE PRODUIT PAR UN TUBE METALLIQUE DE SECTION ELLIPTIQUE. CAS D'UN FAISCEAU INFINIMENT FIN OU CIRCULAIRE.

Si un faisceau de charge est entouré de parois métalliques on dit fréquemment que ces parois produisent un effet d'image. C'est effectivement le cas si cette paroi se réduit à un plan indéfini car, alors, l'effet de ce plan est identique à celui que créerait un faisceau de charge contraire symétrique du premier (ou son image) par rapport au plan.

Mais d'un point de vue plus général, l'effet des parois est d'imposer que le potentiel γ soit constant. La détermination des potentiels résulte alors de la résolution d'un problème de Dirichlet et peut se faire de la manière suivante :

- a) On calcule le potentiel créé par le faisceau supposé isolé dans l'espace, soit V_1 . Ce potentiel prend, à l'endroit des parois, une valeur variable $V_1(s)$, s désignant une coordonnée prise sur leur périmètre.
- b) On cherche un potentiel laplacien intérieur V_2 prenant, sur les parois, la valeur $-V_1(s)$.
- c) $V = V_1 + V_2 + C^{te}$ est la solution cherchée, comme on peut aisément le voir.

Dans l'étude que nous allons développer ici, au lieu de chercher à résoudre le problème de Dirichlet (b), nous allons considérer des potentiels laplaciens intérieurs V_2 exprimés sous forme de développements limités, de potentiels quadrupolaires, octupolaires, dodécapolaires ... qui seuls possèdent les symétries que nous nous sommes imposées. Examinant la forme des équipotentiels $V = V_1 + V_2 = C^{te}$, nous chercherons pour quelle amplitude des potentiels laplaciens élémentaires on obtient une équipotentielle présentant sensiblement la forme des parois.

Pour commencer, on prendra pour V_1 un potentiel du type

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \log \rho \quad (21)$$

qui correspond à un faisceau infiniment fin ou, encore, à un faisceau circulaire de rayon R , à condition que $\rho \geq R$; q est la charge par unité de longueur du faisceau et ϵ_0 la permittivité du vide.

Les potentiels V_2 seront, comme on l'a dit, des potentiels laplaciens intérieurs possédant les symétries imposées, c'est-à-dire de type

$$V_2 = A_1 \rho^2 \cos 2\varphi + A_2 \rho^4 \cos 4\varphi + A_3 \rho^6 \cos 6\varphi + \dots \quad (22)$$

En pratique, il est possible de normaliser les échelles de longueur et de potentiel pour ramener le potentiel total à une expression de la forme :

$$v = \log \rho - \rho^2 \cos 2\varphi + p\rho^4 \cos 4\varphi - p'\rho^6 \cos 6\varphi + \dots \quad (23)$$

Les figures 4 à 8 montrent les distributions de potentiel correspondant à diverses valeurs de p et p' . Et on y a tracé en pointillé quelques ellipses dont le contour est assez voisin de lignes équipotentielles.

Il résulte immédiatement de l'examen de ces figures qu'il est indispensable d'introduire des valeurs de p et de p' différentes de zéro, c'est-à-dire des non linéarités, si l'on veut obtenir des équipotentielles sensiblement elliptiques dès que l'excentricité n'est pas négligeable; en conséquence, avec les formes usuelles de chambre à vide, les champs de charge d'espace possèdent nécessairement un taux de non linéarité appréciable.

A partir de ces figures, ou de tracés de ce type, il est aussi possible d'évaluer le coefficient A_1 à mettre avec des échelles non normalisées devant le potentiel en ρ^2 pour obtenir une ellipse dont les demi-axes h et k sont donnés.

La figure 9 indique en fonction du rapport k/h les valeurs de α tel que

$$A_1 = - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\alpha}{k^2} \quad (24)$$

Ces valeurs ^{*)} concordent d'ailleurs avec celles obtenues par L.J. Lasslett par un calcul direct ³⁾. A titre indicatif, cette figure

*) Lorsque $h/k \rightarrow \infty$ on est ramené au problème de la distribution de potentiel entre deux plans parallèles. Par la méthode des transformations conformes ³⁾, on obtient aisément cette distribution qui peut s'exprimer sous la forme :

$$\frac{2\pi\epsilon_0}{q} V = \frac{1}{2} \log \frac{\text{Ch } 2y + \cos 2z}{\text{Ch } 2y - \cos 2z}$$

(suite de la note page suivante)

montre aussi les valeurs de β tel que

$$A_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\beta}{k^4}$$

qui permet de chiffrer l'importance du premier terme non linéaire dans la distribution des champs.

Pour les applications pratiques, il est intéressant de posséder une expression algébrique de α . On peut en calculer une, applicable à des rapports h/k voisins de l'unité, de la manière suivante : négligeant le terme en A_2 et les suivants, le potentiel, hors du faisceau est de la forme

$$\frac{2\pi\epsilon_0}{q} V = \log \rho - \alpha \frac{\rho^2}{k^2} \cos 2\varphi \quad (25)$$

et V doit être le même aux deux sommets de l'ellipse qui représente les parois. On doit donc avoir, par différence :

$$\log \frac{h}{k} = \alpha \frac{h^2 + k^2}{k^2} \quad (26)$$

En remplaçant le logarithme par une formule approchée, valable au voisinage de $h/k = 1$, on trouve une expression de α .

Ecrivait par exemple

$$\log \frac{h}{k} = \frac{h-k}{k}$$

on obtient

$$\alpha = k \frac{h-k}{h^2 + k^2} \quad (27)$$

(suite de la page précédente)

que l'on peut encore développer, autour de l'origine :

$$\frac{2\pi\epsilon_0 V}{q} = \log \rho_1 - \rho_1^2 \cos 2\varphi + \frac{7}{10} \rho_1^4 \cos 4\varphi - \frac{62}{105} \rho_1^6 \cos 6\varphi + \dots$$

en posant

$$\rho_1^2 = \frac{y^2 + z^2}{3}$$

tel que les plans parallèles sont définis par

$$\rho_1 \sin \varphi = \pm \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \quad .$$

Sur la figure 9 la courbe correspondante est indiquée en tirets. On voit que l'accord n'est pas très satisfaisant, à part pour les valeurs de h très voisines de k.

Pour obtenir un meilleur accord, on doit donc modifier l'expression (27). Les courbes A, B et C représentées en pointillé sur la figure 10 correspondent à divers degrés d'approximation de la courbe exacte, la meilleure précision s'accompagnant d'une complexité plus grande des formules. Ainsi on a, pour la courbe A :

$$\alpha = \frac{k}{2h} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \left[1 + \frac{2}{5} \frac{(h-k)^2}{hk} \right] \quad (28)$$

tandis que pour B et C on aurait eu respectivement :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{k}{2h} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \left[1 + \frac{2}{5} \frac{(h-k)^2}{k(h+k)} \right] \\ \text{et} \\ \alpha &= \frac{k}{2h} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \left[1 + \frac{1}{5} \frac{(h-k)^2 (2h+k)}{hk(h+k)} \right] \end{aligned} \right\}$$

Mais il ne faut pas oublier, comme on l'a dit, que l'existence d'une excentricité dans la forme des parois entraîne obligatoirement des termes de champ non linéaire; et il serait illusoire de vouloir accroître indéfiniment la précision du coefficient du terme linéaire si l'on néglige complètement les termes non linéaires. Aussi se limitera-t-on à l'expression (28).

IV. EFFET D'IMAGE. CAS D'UN FAISCEAU DE SECTION ELLIPTIQUE.

On peut, dans ce cas, reprendre les mêmes types de calcul que ceux effectués au paragraphe précédent. Il suffit de remplacer l'expression (21) de V_1 par un potentiel du type (20) correspondant à un faisceau non circulaire.

Les figures 10 et 11 représentent deux exemples typiques de distribution de potentiel. On y a encore indiqué en pointillé des ellipses dont le contour est assez voisin de lignes équipotentielles. En tirets on a montré quelques formes de faisceau compatibles avec la répartition de potentiel adoptée (ayant la même longueur focale). Sur la figure 10 il existe en particulier une courbe sensiblement elliptique E qui peut être à la fois équipotentielle et forme de faisceau; elle correspondrait alors au cas d'un faisceau remplissant complètement la chambre.

On peut encore chercher empiriquement le coefficient de la composante de champ quadrupolaire tel que le potentiel dans l'espace compris entre le faisceau et les parois soit de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\epsilon_0}{q} V = \log \frac{2\rho}{b+c} + \frac{1}{2} - \frac{b^2 - c^2}{8\rho^2} \cos 2\varphi - \frac{(b^2 - c^2)^2}{32\rho^4} \cos 4\varphi \\ + \dots - \alpha \frac{\rho^2}{k^2} \cos 2\varphi + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

où b et c d'une part et h et k d'autre part représentent respectivement les demi-axes de la section du faisceau et des parois (voir figure 12).

Pour obtenir une expression analytique de α on peut procéder de la manière suivante :

supposons (ce qui, en fait, n'est vrai qu'en première approximation, si b est assez voisin de c) que α puisse se mettre sous la forme :

$$\alpha = \alpha_1(h, k) + (b^2 - c^2) \alpha_2(h, k) \quad (30)$$

le terme α_1 devra alors être le coefficient (28) correspondant à un faisceau circulaire; quant au terme α_2 on peut le choisir de manière à satisfaire les deux conditions suivantes :

- 1) si $h = k$, en limitant (29) aux termes du deuxième ordre en ρ , la valeur de $\alpha_2 = \alpha/b^2 - c^2$ doit être telle qu'on a une équipotentielle circulaire pour $\rho = h = k$:

$$\alpha_2 = - \frac{1}{8k^2} , \quad (31)$$

- 2) si $h \neq k$, mais $h^2 - k^2 = b^2 - c^2$ on peut examiner le cas particulier où l'on aurait $b = k$, $c = k$. Or le potentiel intérieur au faisceau correspondant à (29) s'écrit :

$$\frac{2\pi\epsilon V}{q} = \frac{1}{b+c} \left(\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \right) - \frac{y^2 - z^2}{k^2} \alpha + \dots \quad (32)$$

mais dans le cas évoqué ci-dessus, ce potentiel doit, évidemment, être de la forme

$$V = C^{te} \left(\frac{y^2}{h^2} + \frac{z^2}{k^2} \right)$$

d'où la condition :

$$\frac{\alpha}{k^2} = \frac{h-k}{(h+k)(h^2+k^2)} \quad (33)$$

En pratique, on se servira de (33) pour calculer α_2 et contrôlera que la valeur obtenue est compatible avec (31) pour $h = k$. On trouve ainsi, au lieu de (28) *) :

$$\alpha = \frac{k}{2h} \cdot \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \left[1 + \frac{2}{5} \frac{(h-k)^2}{hk} \right] - \frac{k}{2h} \frac{b^2 - c^2}{(h+k)^2} \left[1 + \frac{(h^2 - k^2)^2}{5hk(h^2 + k^2)} \right] \quad (34)$$

*) Aux courbes B ou C de la figure 9 auraient correspondu respectivement les valeurs de α_2 suivantes :

$$\alpha_2 = - \frac{k}{2h} \frac{1}{(h+k)^2} \left[1 + \frac{2}{5} \frac{(h-k)(h+k)^2}{k(h^2+k^2)} \right]$$

ou

$$\alpha_2 = - \frac{k}{2h} \frac{1}{(h+k)^2} \left[1 + \frac{1}{10} \frac{(h-k)(h+k)^2(3h-k)}{hk(h^2+k^2)} \right]$$

mais, comme on l'a dit, on n'y aura pas recours.

et ces expressions fournissent un accord satisfaisant avec les résultats des tracés d'équipotentiels dans la mesure, cette fois, où les foyers des ellipses sections du faisceau et de la chambre ne sont pas par trop différents.

Mais il est important de noter ici que, même dans le cas de faisceaux de densité non uniforme ou de faisceaux plats, une expression de type (34) peut être utilisée pour exprimer les effets d'image. En effet, si la distribution de charge peut s'exprimer comme la superposition d'une série d'ellipses de densité uniforme possédant les mêmes axes de symétrie, mais de longueurs d'axes variables, on peut toujours représenter le potentiel extérieur sous la forme (29) où, simplement, les expressions $q(b^2 - c^2)$, $q(b^2 - c^2)^2 \dots$ seraient remplacées par des sommes $\sum_n (b_n^2 - c_n^2) \Delta q_n \dots$; et de même, en se limitant au premier terme, la forme (30) est encore applicable pourvu que $q(b^2 - c^2)$ y soit également remplacé par la somme précédente.

En disposant d'un programme de calcul qui pourrait déterminer la distribution de potentiel dans un faisceau de densité non uniforme, mais supposé isolé dans l'espace, l'expression (34) permettrait d'y rajouter correctement l'effet d'image des parois.

Si l'on revient au cas de faisceau elliptique de densité uniforme, le potentiel de charge d'espace, à l'intérieur, peut être exprimé de façon précise sous la forme relativement compliquée, mais se prêtant aisément aux calculs numériques :

$$\frac{2\pi\epsilon_0}{q} V = \frac{y^2 + z^2}{2bc} - \frac{y^2 - z^2}{2bc} \times \left\{ \frac{b - c}{b + c} + \frac{bc}{hk} \left[\frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} - \frac{b^2 - c^2}{(h + k)^2} \right] + \frac{bc(h - k)^2}{5h^2k^2(h^2 + k^2)} \left[2(h^2 - k^2) - (b^2 - c^2) \right] \right\} \quad (35)$$

où on peut d'ailleurs remarquer que le dernier terme peut même être omis si la chambre n'a pas une trop grande ellipticité ($h/k < 1,5$ par exemple).

REFERENCES

- 1) P. Lapostolle, Etude graphique des trajectoires, Représentation dans l'espace des phases, Rapport interne CERN/PS, PL2 Février 1955.
- 2) L.C. Tong, Transverse space charge effects, Report ANLAD-59 (Argonne, Illinois) February 1, 1960.
- 3) L.J. Lasslett, On intensity limitations imposed by transverse space charge effects in circular particle accelerators. Proc. 1963 Summer study on storage rings, accelerators and experimentation at super-high energies, Brookhaven (BNL 7534) p.324.

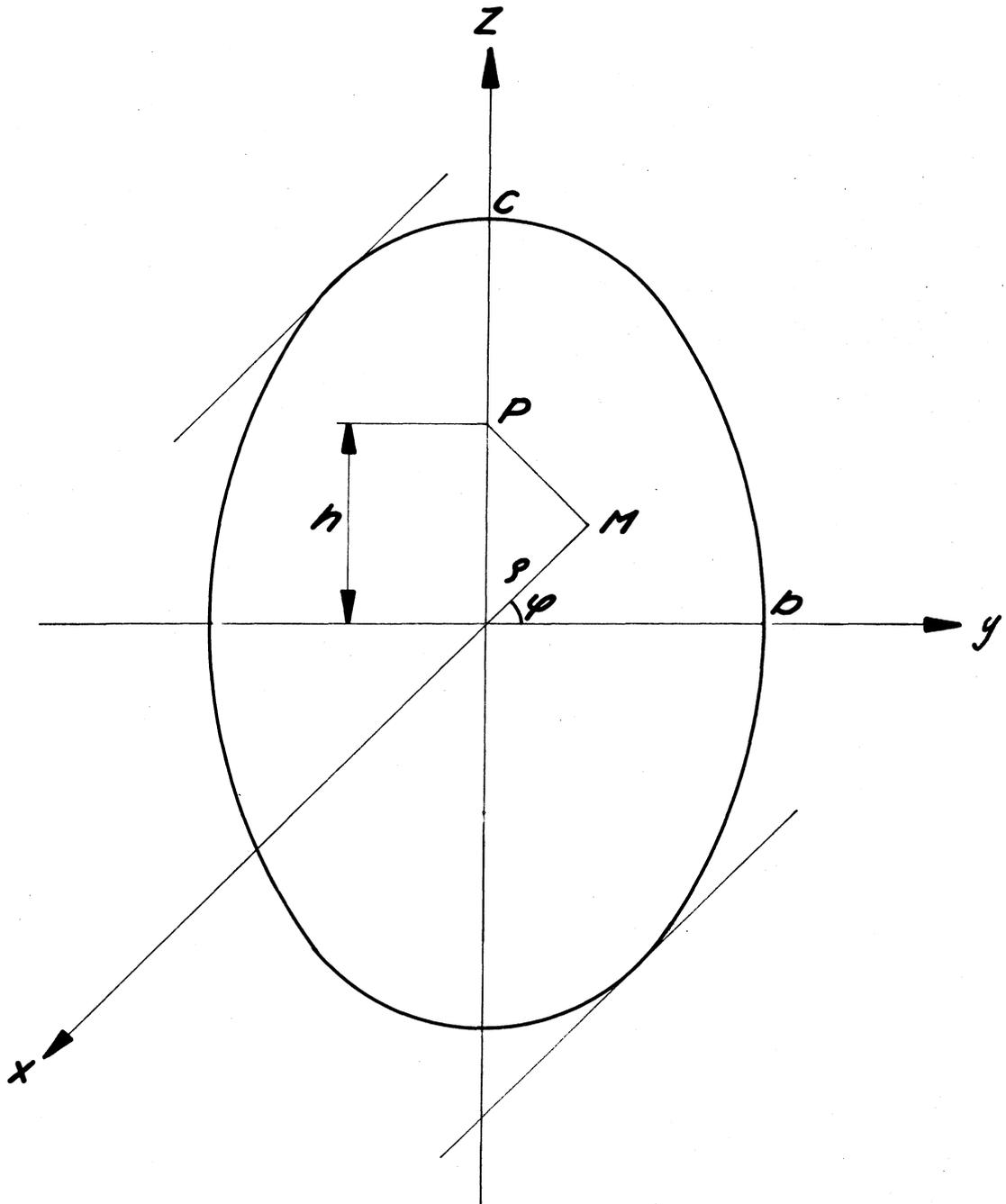


FIG. 1

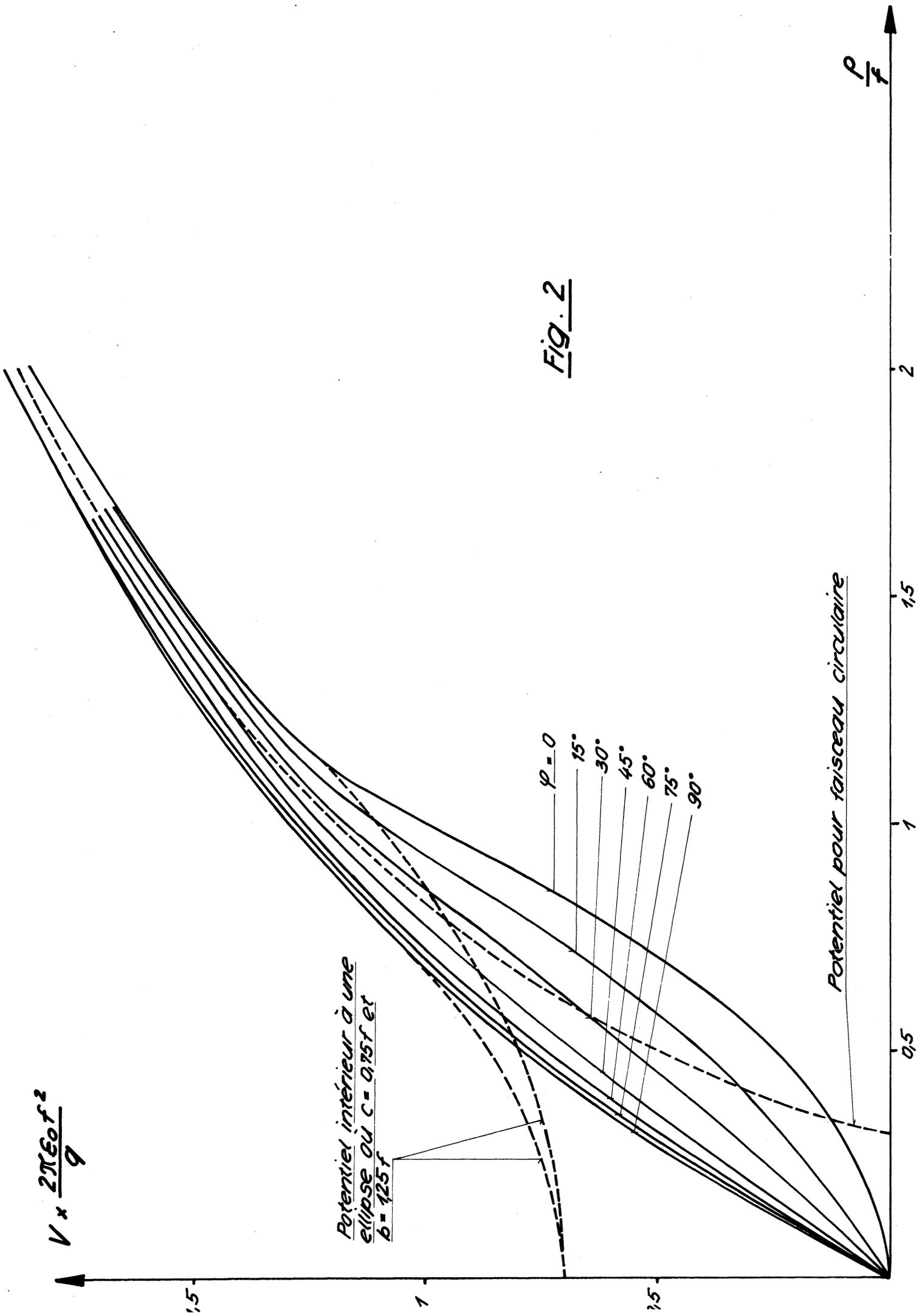


Fig. 2

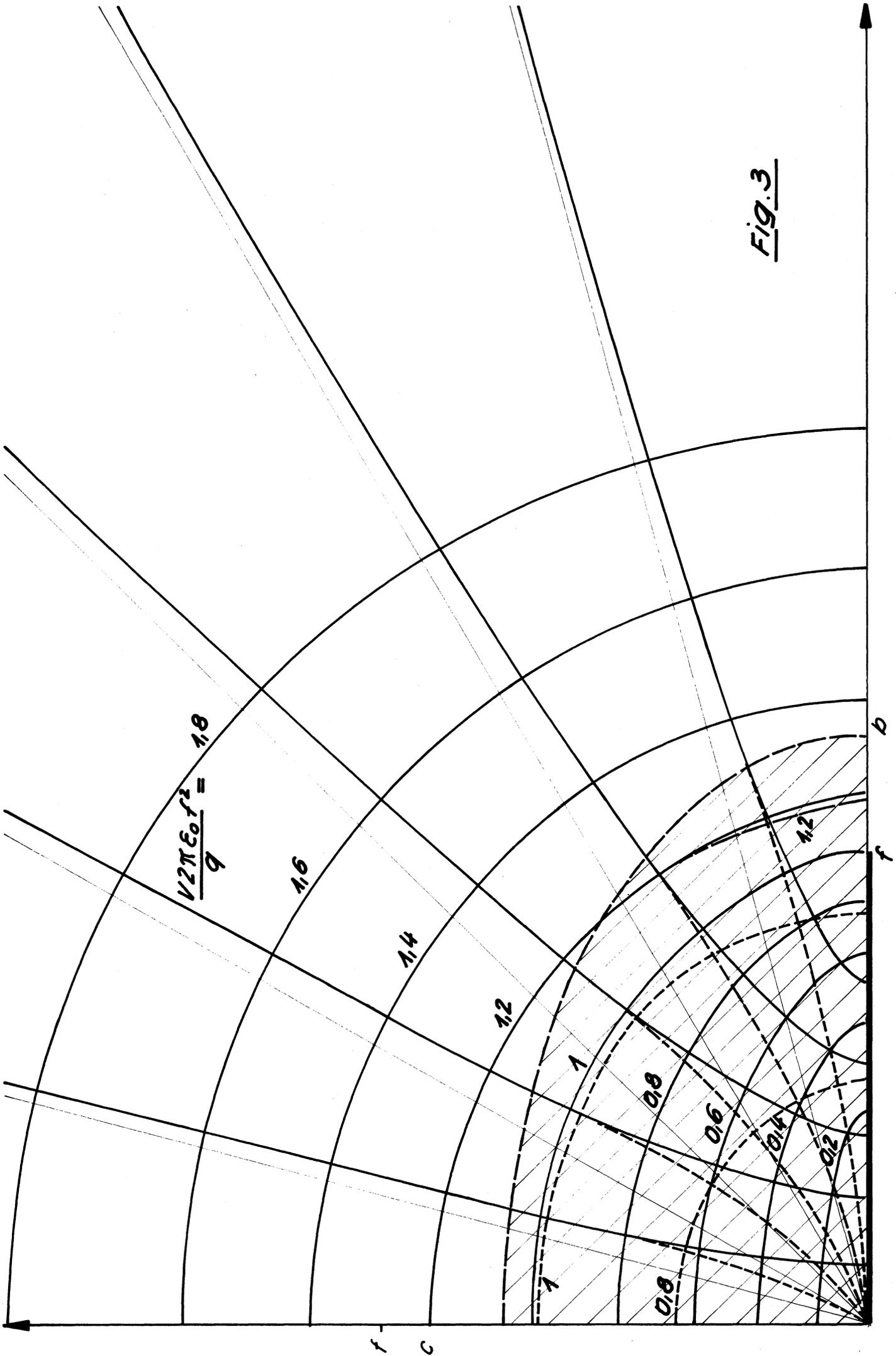


Fig. 3

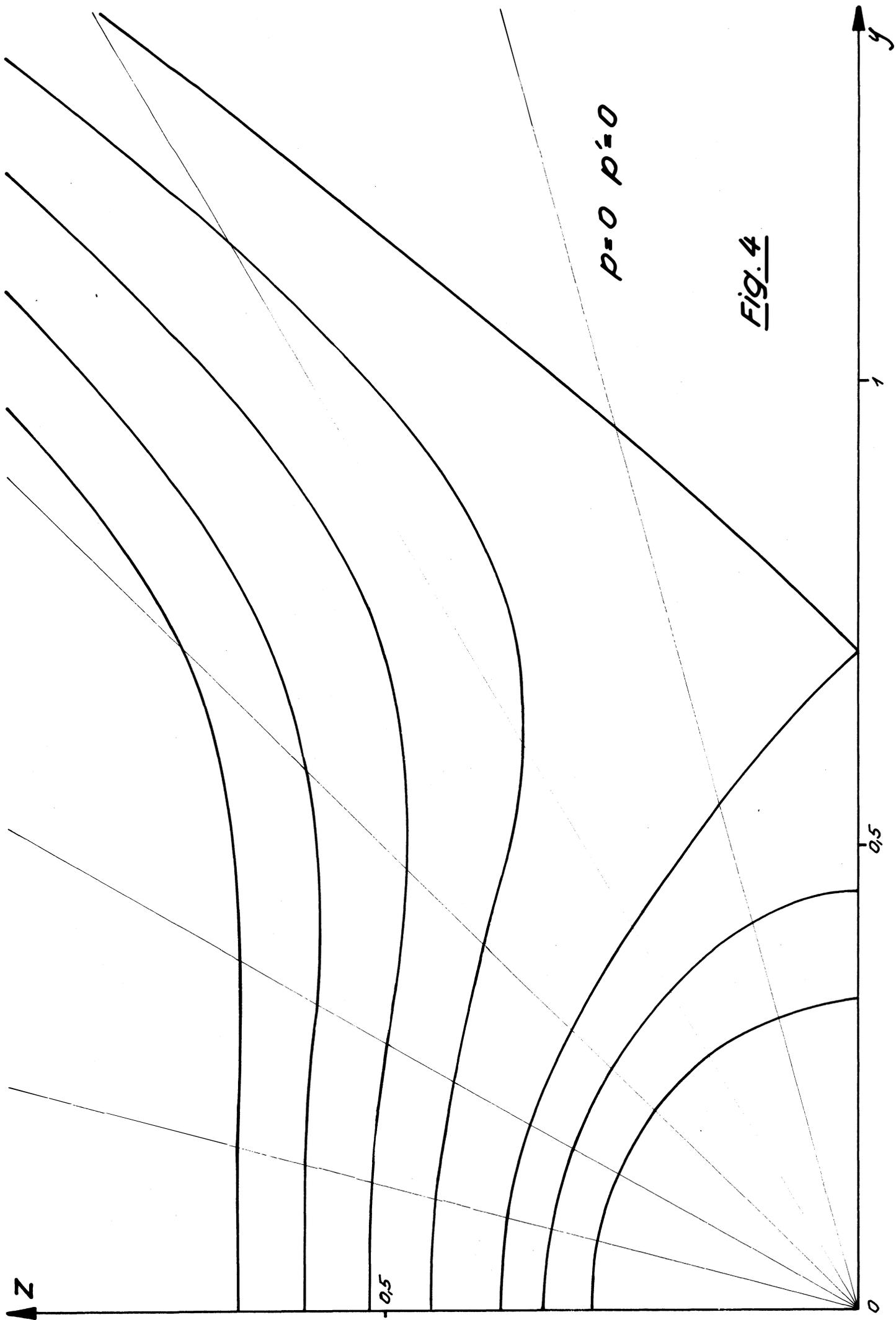
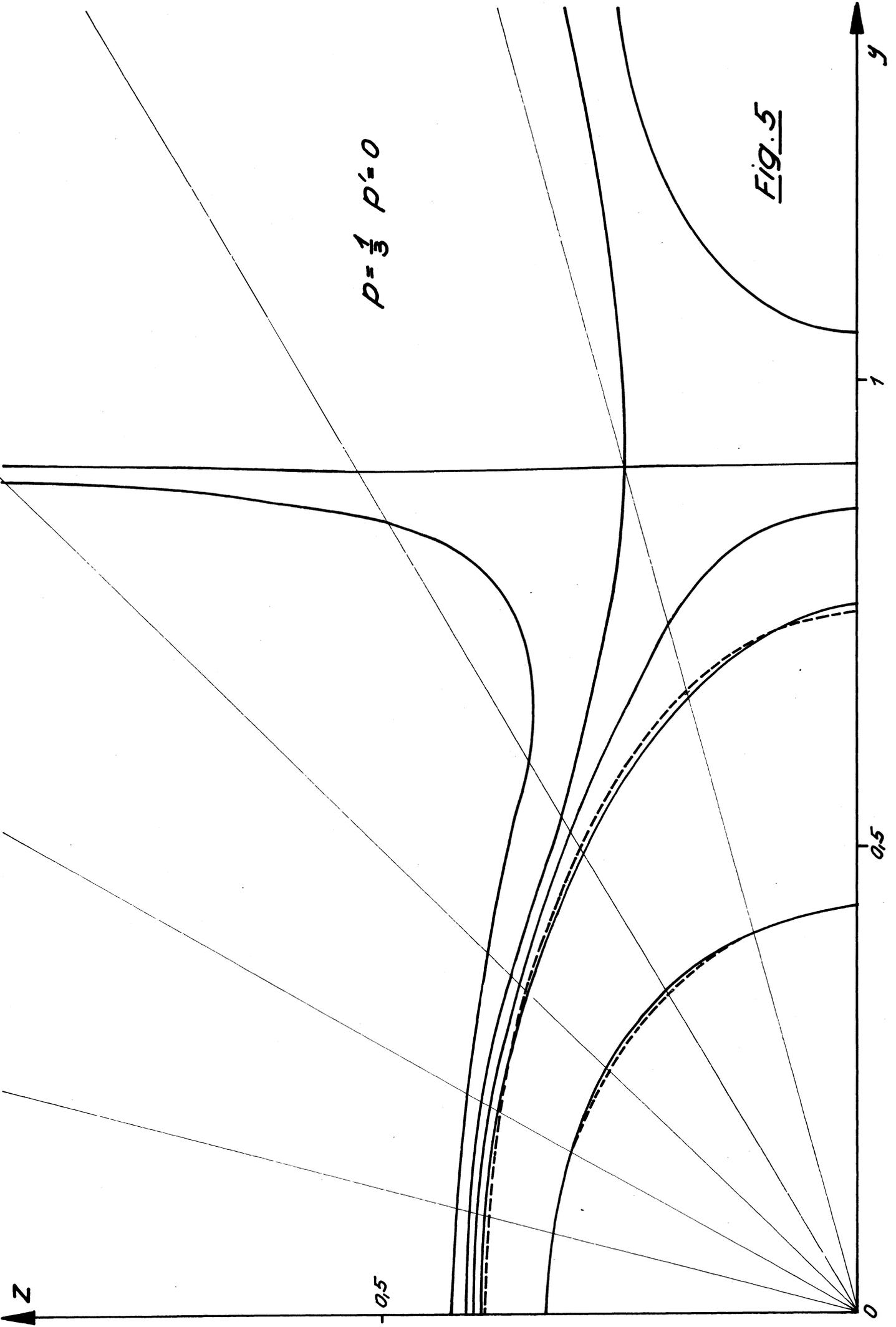
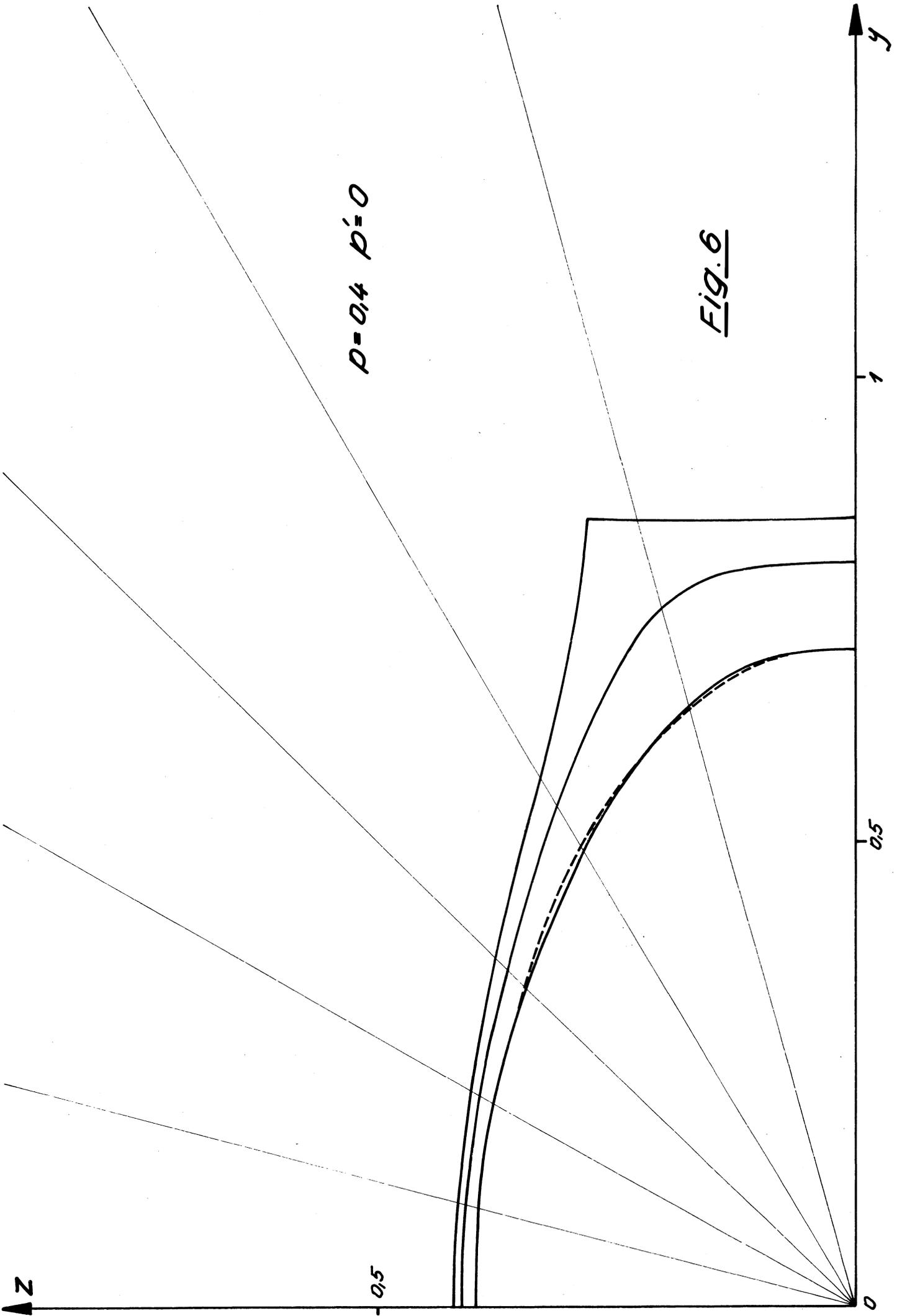
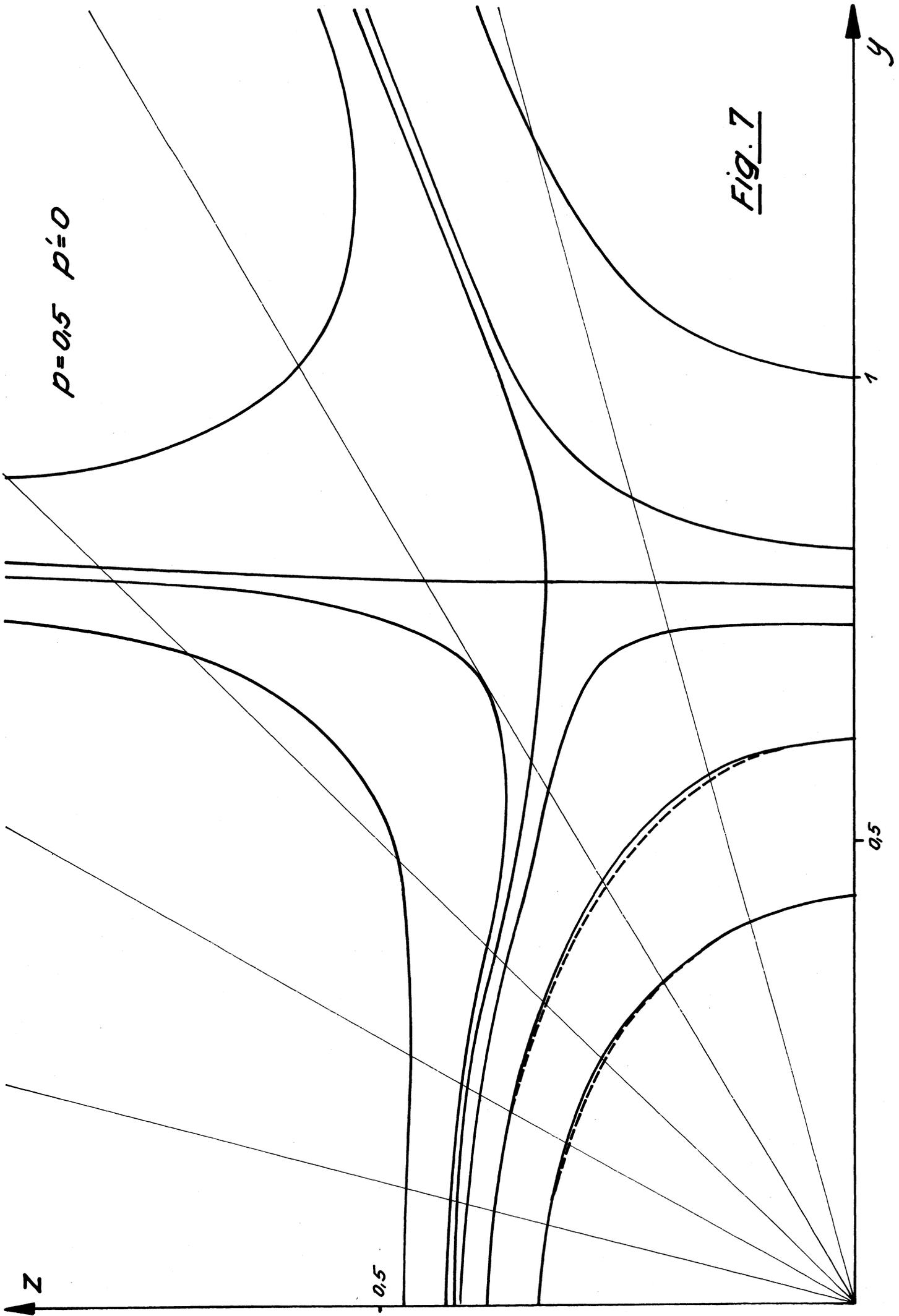
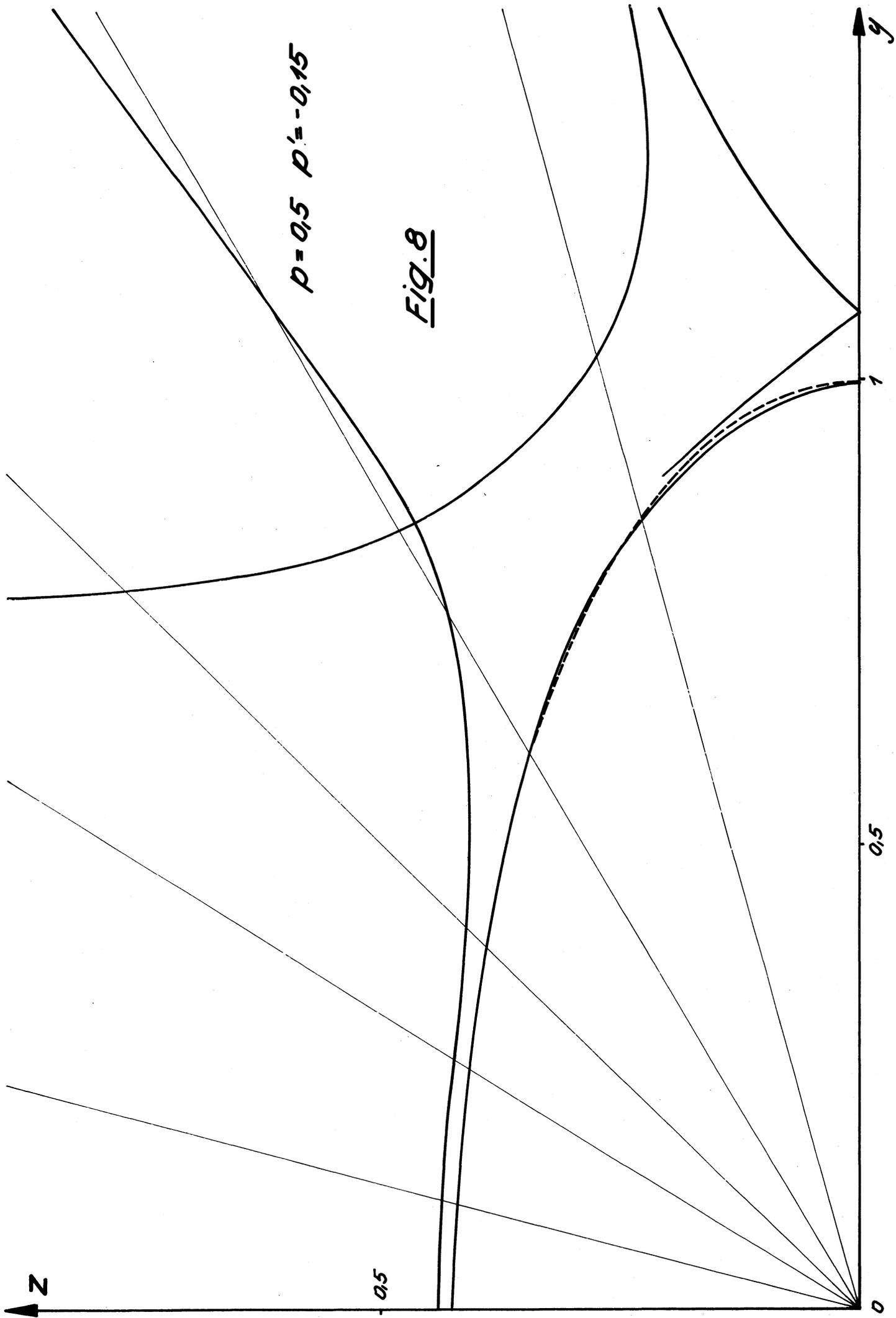


Fig. 4









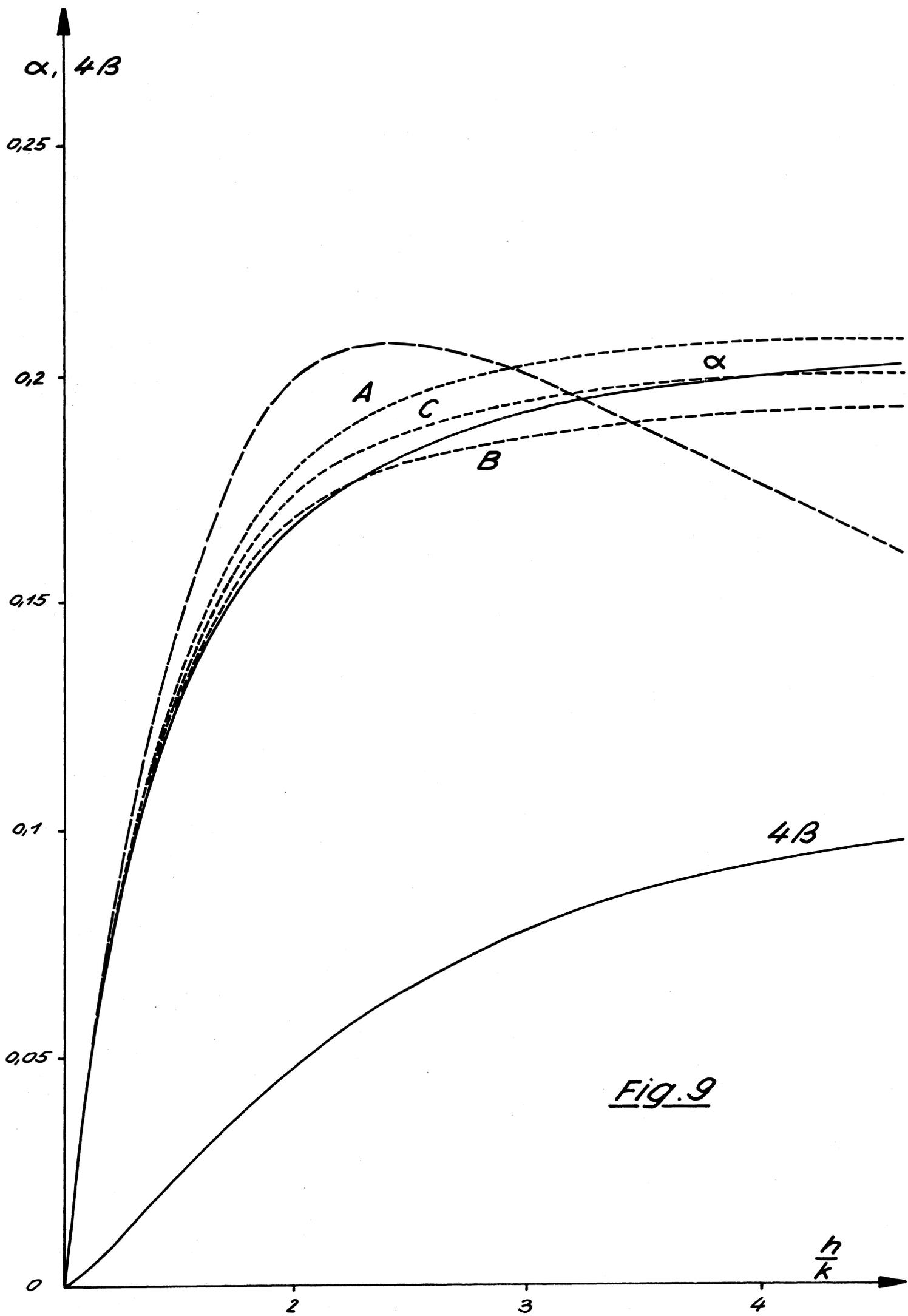
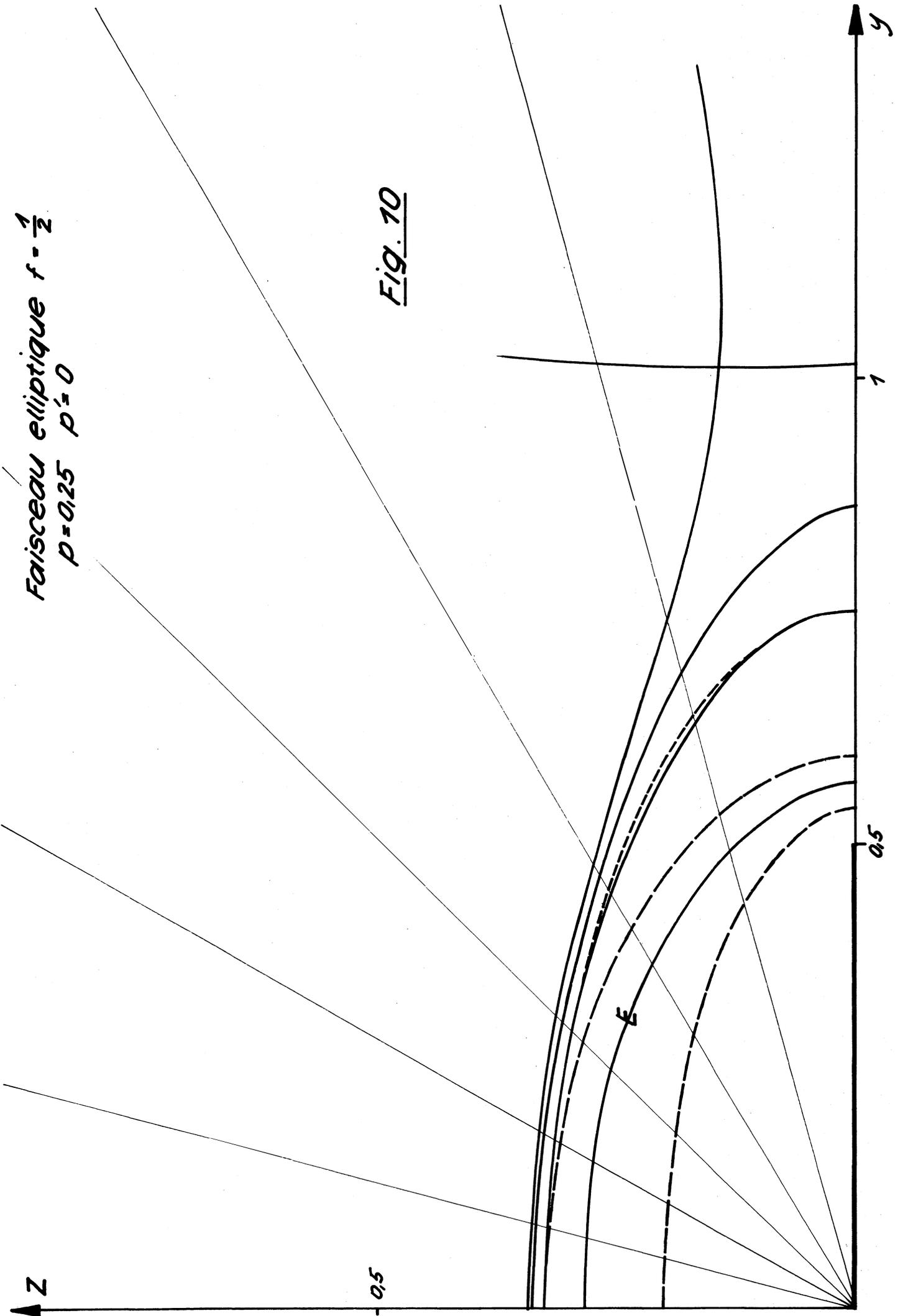


Fig. 9

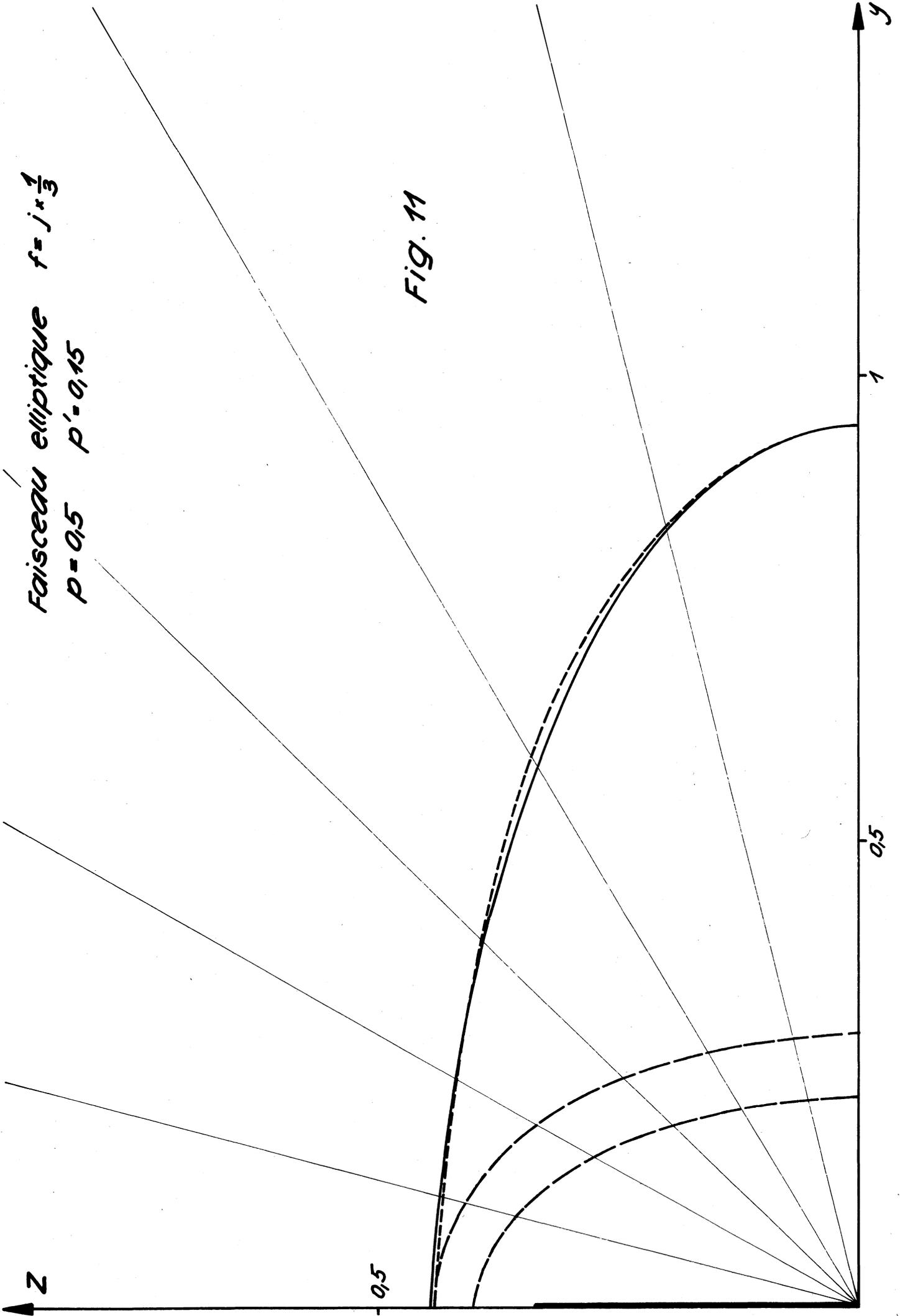
Faisceau elliptique $f = \frac{1}{2}$
 $p = 0,25$ $p' = 0$

Fig. 10



Faisceau elliptique $f = j \times \frac{1}{3}$
 $p = 0,15$ $p' = 0,15$

Fig. 11



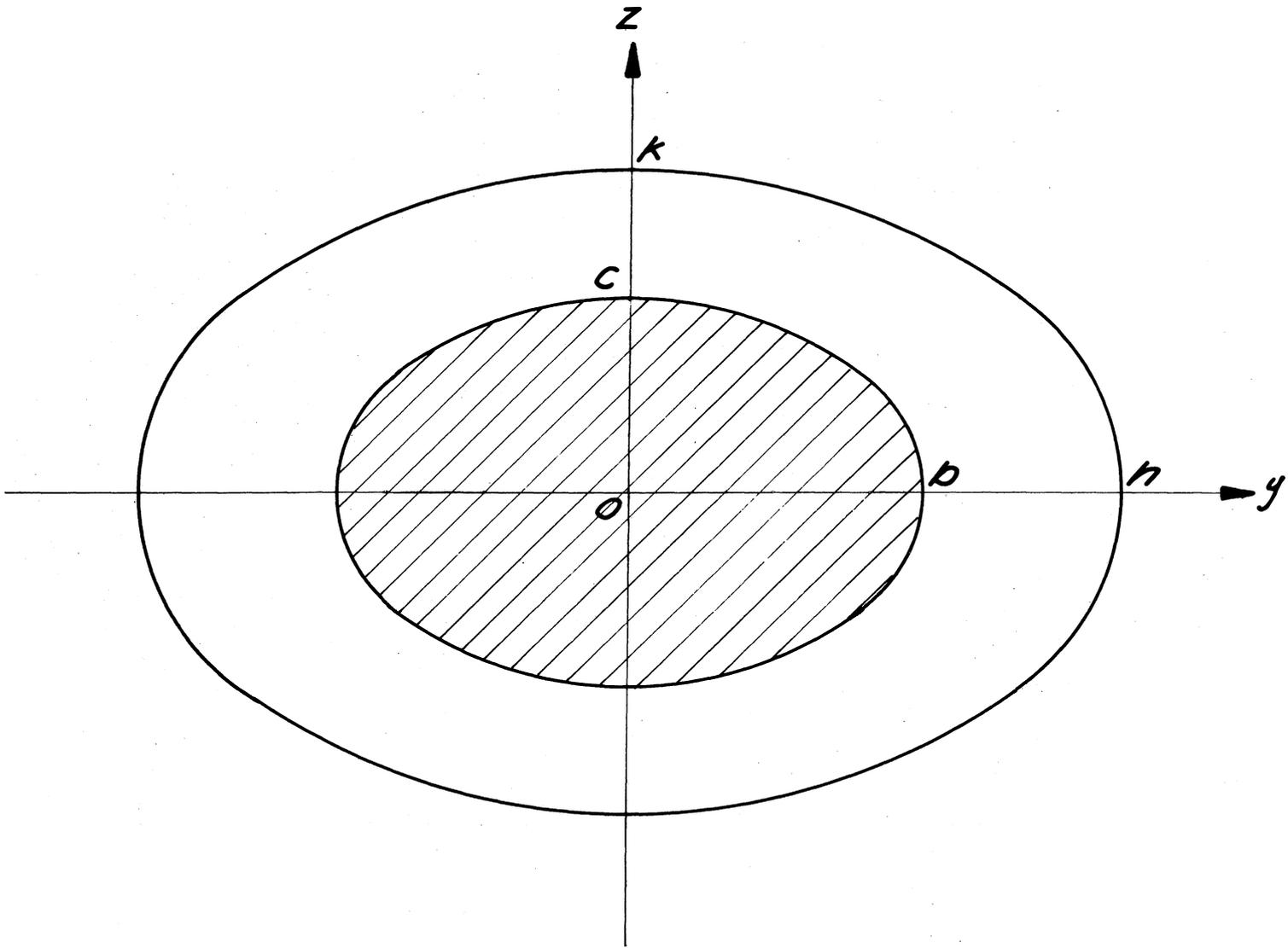


Fig. 12